

TESE
307

USO DO MÉTODO DA CONTINUAÇÃO PARA
A CONSTRUÇÃO DO LUGAR DAS RAÍZES
PELO COMPUTADOR DIGITAL

DURVAL RICCIULLI





Ministério da Educação e Cultura
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

A N E X O I

PRONUNCIAMENTO DA COMISSÃO EXAMINADORA

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, nomeada por Portaria nº 031 de 07 / 03 / 81, considerando o resultado do Julgamento da Prova de Defesa Pública da Dissertação de Mestrado intitulada: "USO DO MÉTODO DA CONTINUAÇÃO PARA A CONSTRUÇÃO DO LUGAR DAS RAÍZES PELO COMPUTADOR DIGITAL"

apresenta pronunciamento no sentido de que a Comissão de Pós-Graduação da Escola Federal de Engenharia de Itajubá solicite à DDD (Divisão de Divulgação e Documentação) a expedição do título de Mestre em Engenharia ELÉTRICA na Área de Concentração de SISTEMAS DE POTÊNCIA satisfeitas as demais exigências regimentais à DURVAL LUIZ SILVA RICCIULLI.

Itajubá, 07 de Março de 19 81.

1º Examinador

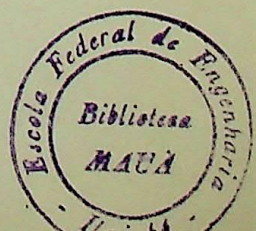
Prof. Wladimir Borgest - ITA

2º Examinador

Prof. Jaime Feinstein - EFEI

3º Examinador (Orientador)

Prof. Alberto Eduardo Fregosi - EFEI





Ministério da Educação e Cultura
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

A N E X O I I

FOLHA DE JULGAMENTO DA COMISSÃO EXAMINADORA

Título da Dissertação: "USO DO MÉTODO DA CONTINUAÇÃO PARA A CONS
TRUÇÃO DO LUGAR DAS RAÍZES PELO COMPUTADOR DIGITAL"

Autor: DURVAL LUIZ SILVA RICCIULLI

JULGAMENTO

EXAMINADORES	CONCEITO	RUBRICA
1º	A+	W Borgest
2º	A+	J Feinstein
3º	A+	A Fregosi

Resultado médio: Conceito A+, ou seja Aprovado com
distingão

Observações: _____

Itajubá, 07 de Março de 19 81

1º Examinador

Prof. Wladimir Borgest - ITA

2º Examinador

Prof. Jaime Feinstein - EFEI

3º Examinador (Orientador)

Prof. Alberto Eduardo Fregosi - EFEI

AGRADECIMENTOS

Muito obrigado,

Eng. Alberto Eduardo Fregosi,
pela sugestão do tema, orientação e apoio,

Colegas Senne e Samuel,
pela ajuda recebida.

DEDICATÓRIA

Aos meus pais,

Benedito e Helena,

A minha espôsa,

Soraya,

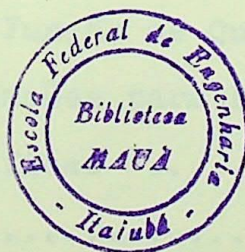
Aos meus filhos,

Luciane e Fábio.

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

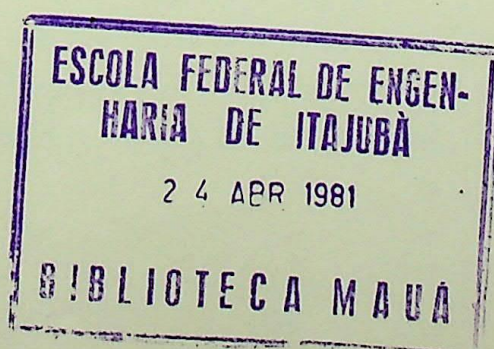
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

USO DO MÉTODO DA CONTINUAÇÃO PARA CONSTRUÇÃO DO
LUGAR DAS RAÍZES PELO COMPUTADOR DIGITAL



ITAJUBÁ - M. G.

1981



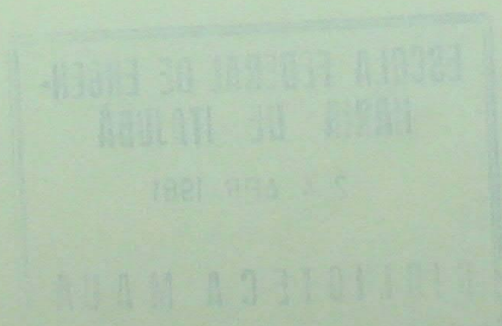
ÍNDICE

1. Introdução	02
2. Objetivo e Desenvolvimento da Tese	04
3. Método da Continuação e suas Aplicações	06
3.1. Determinação das Soluções de um Sistema de Equações não Lineares	07
3.2. Determinação das Raízes de um Polinômio	11
4. O Lugar das Raízes pelo Método da Continuação ...	15
5. Programação Computacional Desenvolvida	32
5.1. Subrotinas e suas Aplicações	32
5.2. Programa Principal	38
6. Resultados Obtidos	44
7. Utilização de Escalas Mistas	67
8. Análise pelo Lugar das Raízes	73
9. O Lugar das Raízes em Função de Qualquer Parâmetro	83
10. Conclusões e Recomendações para Futuros Trabalhos	92
11. Referências Bibliográficas	95
12. Apêndices	98

CLASS. 519.853:681:516(3:681.5.033(043.2)

CUTT. R. 191 m

TOMBO 307



ÍNDICE

1. Introdução	02
2. Objetivo e Desenvolvimento da Tese	04
3. Método da Continuação e suas Aplicações	06
3.1. Determinação das Soluções de um Sistema de Equações não Lineares	07
3.2. Determinação das Raízes de um Polinômio	11
4. O Lugar das Raízes pelo Método da Continuação ...	15
5. Programação Computacional Desenvolvida	32
5.1. Subrotinas e suas Aplicações	32
5.2. Programa Principal	38
6. Resultados Obtidos	44
7. Utilização de Escalas Mistas	67
8. Análise pelo Lugar das Raízes	73
9. O Lugar das Raízes em Função de Qualquer Parâmetro	83
10. Conclusões e Recomendações para Futuros Trabalhos	92
11. Referências Bibliográficas	95
12. Apêndices	98

RESUMO

É apresentado um método eficiente para construção do lugar das raízes para o ganho K da função de transferência de malha aberta variando de $-\infty$ até $+\infty$, com utilização do método da continuação, baseado no artigo de C. T. Pan e K. S. Chao, onde a construção é feita apenas para K positivo. Todos os problemas de singularidades foram contornados na geração dos pontos para plotagem do lugar das raízes, podendo-se desta maneira obter-se sempre convergência no método utilizado. Toda a programação computacional foi elaborada, bem como as subrotinas para plotagem do diagrama pela impressora do computador. A convergência é melhorada pela utilização de Newton-Raphson em todos os pontos estimados para evitar-se as singularidades, principalmente nos pontos múltiplos complexos.

ABSTRACT

A method is presented regarding the construction of root locus for the open-loop transfer function gain varying between $-\infty$ and $+\infty$. The continuation method is used. It is based on a previous work by C. T. Pan and K. S. Chao. Their method was nevertheless limited to positive values of K .

All singularity problems were overcome in the generation of the diagram points for plotting root-loci, then convergence is attained everywhere. The software including a plotting subroutines, was developed.

Convergence is improved by using Newton-Raphson in all cases of estimated points in order to overcome singularity, specially near complex multiple points.

1. INTRODUÇÃO

O primeiro trabalho significativo em controle automático foi realizado no século dezoito por James Watt para controlar a velocidade de uma máquina a vapor. Deve-se mencionar os trabalhos realizados posteriormente por Minorsky, Hazen e Nyquist que provocaram um grande desenvolvimento no primeiro estágio da evolução da teoria do controle.

Em 1922, Minorsky trabalhou em controladores automáticos utilizados para dirigir navios e mostrou como a estabilidade pode ser determinada pelas equações diferenciais que descrevem um sistema em estudo. Já em 1932, Nyquist desenvolveu um procedimento relativamente simples para determinar a estabilidade de sistemas com realimentação baseado na resposta de malha aberta para entradas senoidais. Em 1934, Hazen foi quem introduziu o termo servomecanismo para um sistema de controle de posição.

Nesta época, a análise de sistemas de controle realimentados foi realizada através da utilização das equações diferenciais destes sistemas.

Durante a segunda guerra mundial houve muitas pesquisas que possibilitaram o desenvolvimento de técnicas e métodos de análise e projeto de sistemas de controle através da resposta em frequência do sistema. Aproximadamente em meados da década 1940 - 1950 o método da resposta em frequência já foi operativamente usado em grande escala. Porém, este método não era satisfatório porque em vários sistemas a resposta transitória obtida era muito aproximada devido às relações empíricas então utilizadas e tinha-se necessidade de conhecer com precisão o seu comportamento transitório.

Já no fim desta década, com base na teoria das funções de variáveis complexas e na transformada de Laplace, pôde estabelecer a possibilidade de controlar as respostas dos sistemas tanto no domínio do tempo como também no domínio da frequência. Destacou-se o trabalho realizado por W. R. Evans e publicado em 1948, onde o autor apresentou a análise gráfi

ca de sistemas de controle realimentados, gráfico este denominado Lugar das Raízes, por apresentar em um plano complexo o lugar geométrico das raízes de um polinômio quando considera-se a variação de um parâmetro.

O método desenvolvido por Evans, juntamente com outros métodos gráficos desenvolvidos por Bode, Nyquist e por Nichols fazem parte atualmente da teoria clássica do controle, sendo utilizados em sistemas lineares onde várias especificações são fixadas.

O método do lugar das raízes, dentro de seu campo de aplicabilidade, foi e ainda é muito usado, conforme vemos a sua utilização em sistemas de potência, como na análise da máquina síncrona com regulador conectada ao barramento infinito feita por P. Anderson e A. Fouad [1] em sua obra editada em 1977, na determinação de parâmetros estabilizadores realizada por Fitzner e C. P. Oradat [2] e apresentada em março de 1977. Mais recentemente, foi utilizado em sistemas interconectados para determinação dos autovalores do sistema em termos da informação da conexão por R. Decarlo e R. Saeks [3] e finalmente a utilização do método do lugar das raízes para determinação da estabilidade dinâmica na Estação Geradora de Monticelo no Texas em um artigo apresentado em junho de 1979 [4].

Com o advento do computador, viu-se a necessidade de conseguir-se uma técnica para, com utilização deste, obter-se rapidamente o lugar das raízes para uma determinada função de transferência de um sistema em estudo, desde que este sistema seja linear, fornecendo informação da resposta em frequência através da variação de um parâmetro, como também, possibilitando analisar a resposta no domínio do tempo. Porém, o traçado do lugar das raízes utilizando o computador era problemático devido às várias singularidades existentes, que interrompiam o seu traçado. Isto foi contornado por C. T. Pan e K. S. Chao que apresentaram uma técnica onde é utilizado o método da continuação para obtenção dos pontos complexos que serão plotados no plano "s" através de uma subrotina desenvolvida para tal fim.



2. OBJETIVO E DESENVOLVIMENTO DA TESE

Baseado no artigo de C. T. Pan e K. S. Chao [5], foi desenvolvida toda a programação computacional para o traçado do lugar das raízes utilizando-se o computador digital Burroughs-B1700, sendo o gráfico obtido pela impressora após todos os pontos terem sido gerados por uma expressão iterativa, obtida pelo uso do conceito do método da continuação.

O lugar das raízes poderá ser traçado para qualquer função de transferência de um sistema linear, desde que seja possível fatorar os polinômios do numerador e denominador desta função, podendo-se considerar a variação de qualquer parâmetro, de forma semelhante à realizada com o ganho da função de transferência. Este gráfico obtido permitirá com o auxílio de técnicas complementares, analisar o comportamento de um sistema tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência, como também extrair conclusões a respeito das contribuições de cada parâmetro neste comportamento.

Como no artigo básico os autores só apresentam a construção do lugar das raízes para o ganho K da função de transferência variando de zero até infinito, utilizando-se outras referências, foram introduzidas modificações de tal modo que a sua construção pudesse ser efetuada com K variando de $-\infty$ a $+\infty$. Desta maneira conseguiu-se aumentar o campo de aplicabilidade do método.

Inicialmente é apresentado o método da continuação e suas aplicações, ressaltando o caso em que é utilizado para determinar as raízes de um polinômio e posteriormente como é aplicado para obter-se o lugar das raízes.

A programação computacional elaborada é descrita juntamente com as disponibilidades existentes. Vários exemplos são apresentados para mostrar a eficiência do método em determinados casos particulares. Em um destes exemplos é apresentada a análise qualitativa em função da variação do ganho de uma determinada função de transferência de um sistema

quando é suposto aplicado um sinal na entrada deste. Também é mostrado como se pode construir o lugar das raízes utilizando a mesma metodologia desenvolvida, em função da variação de qualquer parâmetro da função de transferência do sistema.

Para finalizar são apresentadas as discussões e conclusões gerais, como também as recomendações para futuros trabalhos que venham aplicar ou complementar o que aqui foi desenvolvido.

3. MÉTODO DA CONTINUAÇÃO E SUAS APLICAÇÕES

O desenvolvimento ocorrido na última quarta parte deste século na tecnologia aplicada na construção dos computadores digitais, proporcionando um aumento na velocidade com que os cálculos são realizados, exerceu uma profunda influência em vários campos da ciência. Em aplicações matemáticas, por exemplo, os computadores são apropriados para determinar as soluções de grandes sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares ou não lineares, sujeitas a um valor inicial dado. Muitas equações básicas da física, como a segunda lei de Newton, são formuladas como problemas de valor inicial. Entretanto, muitos problemas de aplicações matemáticas não são originalmente formulados desta maneira, daí o mérito do método da continuação, pois ele próprio proporciona, na reformulação de tais problemas, os valores iniciais necessários.

Métodos da continuação foram utilizados no século passado nas provas teóricas da existência e unicidade de vários problemas, conforme é apresentado no histórico do artigo de Ficken [6] e mais recentemente nos trabalhos [7] e [8]. Neste último, são examinados vários casos para os quais este método tem sido aplicado com sucesso, como na determinação das raízes de um polinômio, problemas de valores no contorno em equações diferenciais ordinárias não lineares e outros.

O método da continuação foi utilizado por K. S. Chao e R. Saeks [9] na análise de circuitos eletrônicos onde os algoritmos da continuação apresentados por Branin [10], Broyden [11], Davidenko [12] e Chua e Ushida [13] são examinados e aplicados como por exemplo, na determinação das soluções múltiplas de sistemas de equações não lineares e na determinação da curva característica de entrada-saída de circuitos resistivos não lineares.

A idéia básica do método da continuação consiste em converter a solução de uma família parametrizada de problemas algébricos $P(r)$, na solução de equações diferenciais tais como:

$$\dot{x}(r) = f[x(r), r] \quad (1)$$

onde $x(r)$ é a solução do errigésimo problema da família $P(r)$. Então pode-se determinar a solução $x(r_0)$ de um problema inicial $P(r_0)$ por utilização de um dos métodos clássicos ou outros, onde as soluções dos demais problemas são obtidas por integração de (1) com $x(r_0)$ como condição inicial.

Embora pareça que pela conversão da solução de um problema algébrico numa solução de equações diferenciais, estabeleceu-se um outro problema mais complicado, não é este o caso e sim que a integração de (1) ao ser reduzido a um processo numérico, prova-se ser menos incômodo que métodos diretos de solução. Isto pode ser observado por exemplo, na determinação das soluções de um sistema de equações não lineares, onde a dificuldade básica está no fato da matriz jacobiana tornar-se singular durante a aplicação de um método direto de solução, interrompendo o processo utilizado. Ao ser usado o método da continuação, este inconveniente é contornado, não só permitindo a continuidade da aplicação do método, como também fornecer mais do que uma solução caso o problema original as apresente. Também como aplicação do método da continuação temos a determinação das raízes de um polinômio, que além de servir como exemplo de utilização deste método, é usado na programação computacional desenvolvida para o traçado do lugar das raízes conforme veremos no capítulo 5.

3.1. Determinação das Soluções de um Sistema de Equações não Lineares

Seja um sistema de equações não lineares escrita na forma:

$$f(x) = 0 \quad (2)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável.

O método de Newton-Raphson é provavelmente o mais conhecido e a técnica mais comumente utilizada para determinar as raízes reais de tal sistema não linear. O método poderá convergir contanto que o passo inicial esteja suficientemente próximo da solução onde a matriz jacobiana satisfaz a condição de Lipschitz e não é singular no ponto solução. Entretanto, o método é impraticável se o passo inicial está longe e interrompe o processo quando o jacobiano em algum estágio da iteração torna-se singular.

Muitos métodos foram desenvolvidos para determinação das raízes de (2) fazendo-se uso de técnicas de deflação, métodos iterativos quase lineares e outros que envolvem a solução de uma equação diferencial associada na qual a raiz x^* de (2) é um ponto crítico, obtida por algoritmos iterativos, correspondente à solução $x(r)$. Em particular, Branin [10] resolve a equação diferencial dada por:

$$\frac{d}{dt} f[x(t)] = \pm f[x(t)] \quad (3)$$

a qual pode ser escrita no espaço x como:

$$\frac{dx}{dt} = \pm J^{-1} f(x) \quad (4)$$

onde J é a matriz jacobiana. Utilizando a formula iterativa de Euler tem-se:

$$x_{k+1} = x_k \pm h J^{-1}(x_k) f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

onde x_0 é o passo inicial para a raiz x^* , $J(x_k)$ é a matriz

jacobiana de $f(x)$ computada para x_k e h é o tamanho do intervalo. O sinal + ou - será escolhido a fim de fazer x_k mover-se na direção desejada. Branin mostrou que pela mudança do sinal em (5) após cada mudança de sinal do jacobiano ou para cada ponto solução, o processo para determinação da raiz, o qual poderia de outra maneira ser interrompido devido à singularidade jacobiana, pode agora ser continuado.

Este método, porém, apresentava limitações significativas, sendo capaz de determinar todas as soluções em apenas alguns casos particulares.

K. S. Chao e D. Liu [14] utilizando a idéia sugerida por Branin preferiram escrever a equação diferencial associada na forma:

$$\frac{d}{dt} f_i [x(t)] = -f_i [x(t)], f_i [x(0)] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} f_n [x(t)] = \pm f_n [x(t)], f_n [x(0)] = f_{no}$$

onde a condição inicial x_0 deve estar situada na curva espaço ℓ obtida da intersecção das soluções de $f_i(x) = 0$, com $i = 1, 2, \dots, n-1$.

No espaço x , (6) se reduz na equação diferencial:

$$\dot{x} = J^{-1} \begin{bmatrix} -f_1 & \dots & -f_{n-1} & \pm f_n \end{bmatrix}^T, \quad x(0) \in \ell \quad (7)$$

onde T denota matriz transposta. Utilizando Euler novamente, tem-se o seguinte algoritmo iterativo:..

$$x_{k+1} = x_k + h J^{-1}(x_k) \begin{bmatrix} -f_1(x_k) & \dots & -f_{n-1}(x_k) & \pm f_n(x_k) \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

com $x_0 \in \ell$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Do mesmo modo anterior, o processo pode ser continuado através da mudança do sinal de $f_n(x_k)$ após uma mudança no sinal do jacobiano ou após a determinação de cada ponto solução. As dificuldades anteriores são agora superadas, não havendo problemas com as singularidades, sendo o método capaz de determinar todas as soluções desde que ℓ seja uma curva simples, ou seja, continuamente diferenciável que não corte a si mesma.

Como ilustração do método desenvolvido por Chao e Liu, considere um circuito não linear constituído por um diodo do túnel em série com uma resistência linear R , alimentado por uma bateria que fornece E volts. As equações deste circuito são:

$$f_1(v, i) = g(v) - i = 0 \quad (9)$$

$$f_2(v, i) = v + Ri - E = 0$$

onde $g(v)$ é uma função não linear que descreve a curva característica do diodo túnel e i é a corrente através do circuito. Aplicando (7) temos para a matriz jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} dg/dv & -1 \\ 1 & R \end{bmatrix} \quad (10)$$

Como a curva ℓ é definida por $f_1(v, i) = 0$, todas as soluções podem ser determinadas. Dependendo do valor de E utilizado, o circuito pode apresentar até três pontos de operação. Vejamos como estes pontos são obtidos aplicando-se a fórmula iterativa de Euler indicada na equação (8).

Inicialmente é adotado um ponto inicial qualquer x_p (v_p, i_p). Considerando-se x_p como passo inicial, um ponto

$x_0 \in \mathbb{R}$, é obtido por exemplo, fazendo-se uso do método inverso generalizado [15]. Utilizando-se (8) com sinal negativo e x_0 como ponto de partida os valores computados de $|f_2|$ decrescem e um dos pontos de operação Q_1 é encontrado. O uso do sinal positivo em (8) e Q_{1+} força $|f_2|$ a crescer, resultando em uma trajetória divergente ao longo de Q_1 . Desde que o jacobiano muda de sinal num ponto P_1 , o sinal de f_2 é novamente mudado para menos, obtendo-se o segundo ponto de operação Q_2 . Avançando a busca na mesma direção, nenhuma solução é encontrada pois o jacobiano cresce juntamente com $|f_2|$. Similarmente o último ponto de operação Q_3 é obtido utilizando-se o sinal positivo em (8) e x_0 como condição inicial. A figura 1 mostra os três pontos obtidos e as trajetórias computadas para um caso particular onde $g(v)$ foi aproximado por um polinômio do quinto grau.

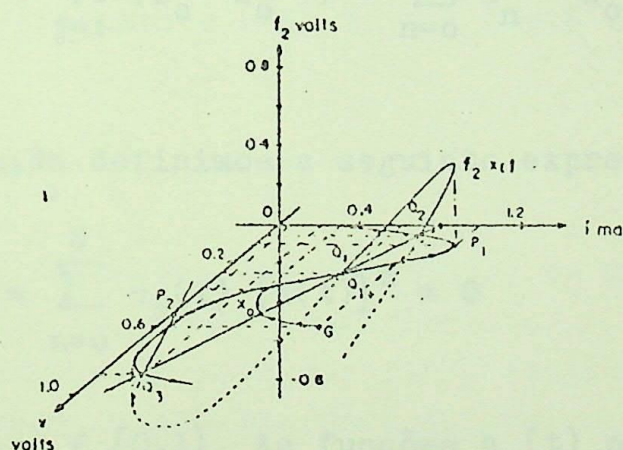


Fig. 1 - Ilustração dos pontos de operação

3.2. Determinação das Raízes de um Polinômio

Utilizando o método apresentado por E. Wasserstrom [8] foi desenvolvido um programa para o computador para determinação de todas as raízes de um polinômio, o qual é utilizado na programação para construção do lugar das raízes,

razão pela qual a teoria desta solução numérica é apresentada.

Seja determinarmos as raízes de um polinômio de grau N , onde os coeficientes pertencem ao conjunto dos números complexos, dado por:

$$f_1(z_1) = \sum_{n=0}^N a_n^{(1)} z_1^n = 0 \quad (11)$$

Inicialmente construímos uma base, ou seja, elegemos arbitrariamente, porém preferencialmente próximo das soluções, N números complexos $z_0^{(j)}$ os quais servirão como raízes da base. Os coeficientes correspondentes $a_n^{(0)}$ são então calculados pelo desenvolvimento do produto:

$$f_0(z_0) = \prod_{j=1}^N (z_0 - z_0^{(j)}) = \sum_{n=0}^N a_n^{(0)} z_0^n = 0 \quad (12)$$

Em seguida definimos a seguinte expressão:

$$f(t, z) = \sum_{n=0}^N a_n(t) [z(t)]^n = 0 \quad (13)$$

com $a_N(t) = 1$, $t \in [0, 1]$. As funções $a_n(t)$ obtidas devem ser diferenciáveis com relação a t , satisfazendo as condições:

$$\begin{aligned} a_n(0) &= a_n^{(0)} \\ a_n(1) &= a_n^{(1)} \end{aligned} \quad (14)$$

ou seja, para $t = 0$ a expressão (13) coincide com a base e para $t = 1$ a mesma expressão coincide com o problema inicial. Para formulação de um problema com valor inicial, di

ferenciamos (13) em relação a t e obtemos:

$$\frac{dz^{(j)}}{dt} = g(t, z^{(j)}) = - \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \dot{a}_n(t) (z^{(j)})^n}{\sum_{n=1}^N n a_n(t) (z^{(j)})^{n-1}}, \quad (15)$$

$j = 1, 2, \dots, N$

onde $\dot{a}_n(t)$ denota derivada em relação a t . Temos portanto N equações idênticas, mas com condições iniciais diferentes das por:

$$z^{(j)}(0) = z_0^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

Integrando numericamente (15) de $t = 0$ até $t = 1$, obtemos:

$$z^{(j)}(1) = z_1^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (17)$$

onde devido às condições estabelecidas, os $z^{(j)}(1)$ são as raízes desejadas do problema original.

Esta integração pode ser feita utilizando-se um dos métodos numéricos existentes para determinação da solução de equações diferenciais. Por exemplo, utilizando-se o método de Runge-Kutta de 4ª ordem tem-se para as equações dadas em (15) sujeitas às condições iniciais indicadas em (16) a seguinte fórmula iterativa:

$$z_{1,m+1}^{(j)} = z_{1,m}^{(j)} + (k_1^{(j)} + 2k_2^{(j)} + 2k_3^{(j)} + k_4^{(j)}) h/6$$

onde $k_1^{(j)} = g(t_m, z_m^{(j)})$ (18)

$$k_2^{(j)} = g(t_m + h/2, z_m^{(j)} + h k_1^{(j)}/2)$$

$$k_3^{(j)} = g(t_m + h/2, z_m^{(j)} + hk_2^{(j)}/2)$$

$$k_4^{(j)} = g(t_m + h, z_m^{(j)} + hk_3^{(j)})$$

com $j = 1, 2, \dots, N$ e $m = 1, 2, 3, \dots$

A grande vantagem na utilização deste método consiste na convergência ser sempre possível, mesmo que os valores iniciais estejam bastante afastados da solução, porém o tempo de computação aumenta gradativamente. Por esta razão é conveniente combinar este método com outros já existentes como o de Newton, cuja expressão iterativa é a seguinte:

$$z_{1, m+1}^{(j)} = z_{1, m}^{(j)} - \frac{f_1(z_{1, m}^{(j)})}{\dot{f}_1(z_{1, m}^{(j)})} \quad (19)$$

com $j = 1, 2, \dots, N$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ e \dot{f}_1 é a derivada de f_1 em relação a z_1 .

O método de Newton apresenta rápida convergência, porém esta somente será possível se o valor inicial estiver bem próximo da solução. Logo, utilizando-se os valores obtidos em (18) como valores iniciais para aplicação do método de Newton, consegue-se refinar as soluções em poucos passos, obtendo-se sempre convergência e reduzindo o tempo de computação.

Não será aqui apresentado um exemplo de utilização deste método pois foge ao contexto deste trabalho, sendo que no capítulo 5 é mencionado como foi aplicada esta técnica para determinação das raízes de um polinômio a fim de tornar possível a construção do lugar das raízes através da teoria a ser explanada.

4. O LUGAR DAS RAÍZES PELO MÉTODO DA CONTINUAÇÃO

Seja o sistema com realimentação mostrado na figura 2. A função de transferência de malha aberta pode ser expressa por:

$$G(s)H(s) = K \frac{A(s)}{B(s)} = K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \quad (20)$$

onde K é um fator denominado ganho de malha aberta e $m < n$. A função de transferência de malha fechada é:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)B(s)}{B(s) + KA(s)} \quad (21)$$

Nota-se que na expressão (21) aparecem os polinômios $A(s)$ e $B(s)$ e a função de transferência $G(s)$. Seria desejável que a expressão final fosse constituída somente por polinômios. Porém, isto obrigaria a introdução de novas definições, por exemplo, $G(s) = K' Q(s)/P(s)$, razão pela qual achou-se conveniente apresentá-la daquela maneira.

O diagrama do lugar das raízes para a função de transferência $T(s)$ é definido como o lugar geométrico dos polos de $T(s)$ quando K varia de $-\infty$ até $+\infty$. Este diagrama consiste de um conjunto de pontos denotado por ℓ , situados no plano complexo s de eixo real σ e imaginário $j\omega$, tal que:

$$g(s,K) = B(s) + KA(s) = 0 \quad (22)$$

isto é,

$$\ell = \{s | g(s,K) = 0\}, \quad s = \sigma + j\omega \quad (23)$$

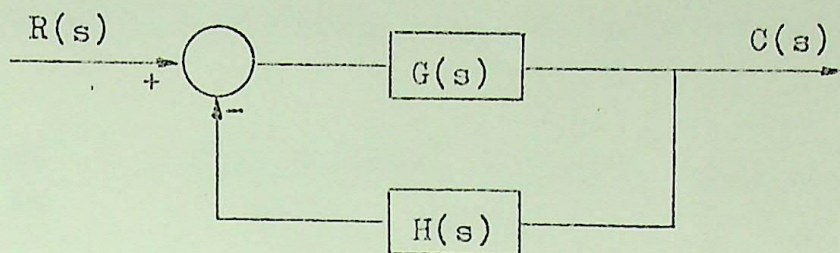


Fig. 2 - Sistema com realimentação

Ao invés de determinarmos as raízes de (22) diretamente para cada valor de K , o que seria um trabalho exaustivo, mesmo com a ajuda do computador, consideremos as seguintes equações diferenciais relativas a este problema:

$$\frac{d}{dt} g(s(t), K(t)) = -g(s(t), K(t)), \quad g(s(0), K(0)) = 0 \quad (24)$$

$$\frac{d}{dt} K(t) = \pm 1, \quad K(0) = K_0$$

onde $s(0) = s_0$ é uma raiz de (22) correspondente ao ganho inicial K_0 , e t é uma variável fictícia introduzida. Aplicando-se a regra da cadeia em (23), obtem-se:

$$\frac{d}{dt} g(s, K) = \frac{\partial g}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial g}{\partial K} \frac{dK}{dt} \quad (25)$$

e expressando em termos de ds/dt resulta:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= - (g(s, k) \pm \frac{\partial g}{\partial K}) / \frac{\partial g}{\partial s}, \quad s(0) = s_0 \\ \frac{dK}{dt} &= \pm 1, \quad K(0) = K_0 \end{aligned} \quad (26)$$

ou as equações equivalentes considerando (22):

$$\frac{ds}{dt} = - \frac{B(s) + K A(s) \pm A(s)}{B'(s) + K A'(s)}, \quad s(0) = s_0 \quad (27)$$

$$\frac{dK}{dt} = \pm 1, \quad K(0) = K_0$$

A equação acima pode ser resolvida por alguma técnica de integração numérica. Por exemplo, utilizando-se o método de Euler, obtem-se:

$$s_{k+1} = s_k - h \frac{B(s_k) + K_k A(s_k) \pm A(s_k)}{B'(s_k) + K_k A'(s_k)} \quad (28)$$

$$K_{k+1} = K_k \pm h$$

onde o sinal + ou - deve ser utilizado quando um aumento ou decréscimo no valor de K for desejado, ou ainda, para valores de K variando desde 0 até $+\infty$, as expressões anteriores tornam-se:

$$s_{k+1} = s_k - h \frac{B(s_k) + K_k A(s_k) + A(s_k)}{B'(s_k) + K_k A'(s_k)} \quad (29)$$

$$K_{k+1} = K_k + h$$

e para valores de K variando entre 0 e $-\infty$, as expressões correspondentes são dadas na página seguinte, permitindo a construção do lugar das raízes também para variações negativas do ganho K.



$$s_{k+1} = s_k - h \frac{B(s_k) + K_k A(s_k) - A(s_k)}{B'(s_k) + K_k A'(s_k)} \quad (30)$$

$$K_{k+1} = K_k - h$$

Para (24) obtem-se a seguinte solução:

$$g(s, K) = g(s(0), K(0)) e^{-t} = 0 e^{-t} \equiv 0 \quad (31)$$

$$K = \pm t$$

onde para algum par K_0 e s_0 considerado satisfazendo (22), a trajetória correspondente obtida de (27) resultará na curva solução de $g(s, K) = 0$ com o ganho K variando. O sinal menos utilizado em g em (24) é usado a fim de que sempre haja convergência na trajetória computada.

Como o lugar das raízes de $T(s)$ contém $2n$ ramos partindo dos polos da função de transferência de malha aberta para $K = 0$, sendo n ramos para valores positivos de K e os outros n ramos devido aos valores negativos de K , no caso em que estes polos são distintos, as n condições iniciais consideradas em (29) e (30) serão:

$$\begin{aligned} s(0) &= p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ K(0) &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

No caso em que a função de transferência de malha aberta exibir polos repetidos, o termo correspondente a $\partial g / \partial s$ torna-se nulo quando estes polos são considerados. Como resultado, a obtenção dos pontos de partida quanto tivermos polos repetidos não poderá ser feita para $K = 0$. Porém, próxi-

mo aos polos pode-se obtê-los considerando-se as propriedades do lugar das raízes na vizinhança de um polo repetido. Sabendo-se que em um polo de ordem r , originam-se $2r$ ramos, sendo r ramos devido à variação positiva de K e r ramos devido à variação negativa de K , que se alternam angularmente e também que os ramos em seu início formam entre si ângulos de $180^\circ/r$, é calculado um vetor Δs que através da sua adição ao polo repetido tem-se um valor inicial cujo valor do ganho correspondente é agora diferente de zero. Para este objetivo consideremos que na função expressa em (20) temos um polo repetido p_k com multiplicidade r , logo, $g(s,K)$ pode ser escrito como:

$$g(s,K) = (s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_k)^r\dots(s-p_{n-r}) + K\Lambda(s) = 0 \quad (33)$$

Seja x um ponto complexo, o valor inicial a ser utilizado no processo iterativo, logo:

$$x = p_k + \Delta s = p_k + \epsilon e^{j\theta} \quad (34)$$

onde ϵ é um número real arbitrariamente pequeno e θ é o ângulo de fase a ser determinado. Para $s = x$ temos:

$$g(x,K) = g(p_k + \Delta s, K) \approx 0 \quad (35)$$

onde o valor de Δs pode ser avaliado por:

$$\Delta s = \epsilon e^{j\theta} \approx (K \rho e^{j\theta})^{1/r} \quad (36)$$

D
=> p=0

$$\text{com } \rho e^{j\theta} = - \frac{A(s)(s-p_k)^r}{B(s)} \Big|_{s=p_k} \quad (37)$$

Portanto, teremos $2r$ pontos de partida aproximados na vizinhança do polo repetido p_k para os ganhos correspondentes a estes pontos avaliados de (36). Para valores positivos de K temos:

$$x_i = p_k + \epsilon e^{j(\theta + 2\pi i)/r}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, r-1 \quad (38)$$

$$K = \frac{1}{\rho} \epsilon^r$$

Para valores negativos de K , basta adicionar π/r considerando-se as regras construtivas do lugar das raízes de números 5.1 e 7.6 da referência [16] em (38), obtendo-se:

$$x_i = p_k + \epsilon e^{j(\theta + \pi + 2\pi i)/r} \quad (39)$$

$$K = - \frac{1}{\rho} \epsilon^r$$

Logo, com a escolha conveniente dos $2n$ pontos de partida, todos os $2n$ ramos que darão origem ao diagrama denominado lugar das raízes poderão ser obtidos por integração numérica fazendo-se uso do computador digital. Porém, esta integração será interrompida conforme veremos, quando um ponto múltiplo for atingido, razão pela qual, sempre que na integração houver aproximação de um destes pontos, alguma providência deverá ser tomada. Para isto, começaremos estudando estes pontos.

Um ponto s^* satisfazendo:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{ds} \Big|_{s=s^*} &= \frac{d}{ds} \left(- \frac{B(s)}{A(s)} \right) \Big|_{s=s^*} = \\ &= - \frac{A(s^*)B'(s^*) - B(s^*)A'(s^*)}{A^2(s^*)} = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

no plano complexo é chamado um ponto singular. Desde que o numerador de (40) é um polinômio com grau $(n + m - 1)$, com coeficientes reais, existem $(n + m - 1)$ pontos singulares no plano s . Denominamos de ponto múltiplo, ao ponto satisfazendo (40), que não seja um zero nem um polo múltiplo e que satisfaça (22), ou seja, K obtido de:

$$K(s) = - \frac{B(s)}{A(s)} \Big|_{s=s^*} \quad (41)$$

deve ser um número real. Voltando em (40), considerando o fato de que $A(s^*)$ não pode ser zero para K finito, sucede que no lugar das raízes a condição:

$$\begin{aligned} A(s^*)B'(s^*) - B(s^*)A'(s^*) &= A(s^*)[B'(s^*) + \\ &+ K A'(s^*)] = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

implica em:

$$\frac{\partial g}{\partial s} \Big|_{s=s^*} = B'(s^*) + K A'(s^*) = 0 \quad (43)$$

Logo, as expressões iterativas utilizando-se Euler não são válidas para os pontos singulares e modificações se-

rão introduzidas para contornar estes pontos. A condição estabelecida em (40) inclui os pontos sobre o eixo real onde dois ramos chegam ou saem, conhecidos como pontos de entrada (break-in) e de saída (break-away) respectivamente na notação inglesa. Um ponto de saída é estabelecido quando o valor de $|K|$ é um máximo local. Isto pode ser visto, quando se considera a presença de dois polos consecutivos no eixo real, então, necessariamente deve existir um ponto múltiplo, no caso, de saída, onde devido ao valor de $|K|$ crescer a partir dos polos, neste ponto, o seu valor é máximo. Do mesmo modo, um ponto de entrada é estabelecido quando o valor de $|K|$ é um mínimo local, pois agora, após atingido este valor, $|K|$ cresce com os ramos caminhando em direções opostas, sempre tendendo a um zero ou a um outro ponto de saída.

Visto que K é uma função real estimada de s para todo s pertencente a ℓ , a derivada direcional $dK/d\ell$ juntamente com suas derivadas de ordens superiores ao longo da direção tangencial do lugar das raízes são bem definidas. É então possível considerar os locais de valores extremos de K mencionados anteriormente ao longo de ℓ usando a notação de derivada direcional. Seja:

$$K(s) = - \frac{B(s)}{A(s)} = U(x,y) + jV(x,y) \quad (44)$$

onde U e V são funções reais estimadas de x e y e $s = x + jy$. A derivada direcional de K em um ponto $s \in \ell$ na direção unitária $v = e^{j\theta} = v_x + jv_y$ tangencial ao lugar das raízes, visto K ser real é:

$$\frac{dK}{d\ell} = U(x,y) \cdot v = \frac{\partial U}{\partial x} v_x + \frac{\partial U}{\partial y} v_y \quad (45)$$

onde $U(x,y)$ é o gradiente de U em (x,y) e o ponto denota produto interno. A equação acima também pode ser escrita na forma:

$$\frac{dK}{d\ell} = \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} - j \frac{\partial U}{\partial y} \right) (v_x + j v_y) \right], \quad s \in \ell \quad (46)$$

Considerando-se $K(s)$ dado pela expressão (44) e fazendo-se uso da condição de Cauchy-Riemann, ou seja, $\partial U / \partial y = - \partial V / \partial x$, ficamos com:

$$\frac{dK}{d\ell} = \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} + j \frac{\partial V}{\partial x} \right) e^{j\theta} \right] = \operatorname{Re} \left[K'(s) e^{j\theta} \right] \quad (47)$$

onde $K'(s) = dK(s) / ds$

Do mesmo modo, as derivadas direcionais de ordens superiores de $K(s)$ com respeito a ℓ são obtidas e pode-se escrever que a derivada de ordem m será dada por:

$$\frac{d^m K}{d\ell^m} = \operatorname{Re} \left[K^{(m)}(s) e^{jm\theta} \right] \quad (48)$$

Assim, é observado de (48) que ao longo de ℓ , K e suas derivadas direcionais são funções reais estimadas. Vejamos agora um teorema que representa um papel importante na classificação das singularidades para que seja possível contorná-las adequadamente.

O ponto s^* passa a partir deste instante a designar um ponto múltiplo, visto que um ponto singular tem um significado mais amplo, incluindo polos e zeros múltiplos.

Teorema: Suponha uma função analítica $p(s)$ tal que:

$$p(s^*) = a, \text{ para } a \text{ real e } a \neq 0$$

$$p^{(k)}(s^*) = 0, \text{ para } k = 1, 2, \dots, q-1$$

$$p^{(q)}(s^*) \neq 0, \text{ para } 2 \leq q \leq n$$

para algum ponto s^* de tal forma que $\text{Im}[p(s)] = 0$. Seja:

$$R_p = \{s \mid \text{Im}[p(s)] = 0\}$$

então, na vizinhança de s^* , R_p consiste de um conjunto de q ramos $R_{p_1}, R_{p_2}, \dots, R_{p_q}$ tal que $R_{p_1} \cap R_{p_2} \cap \dots \cap R_{p_q} = s^*$. Além disso, para cada i , $1 \leq i \leq q$, $\text{Re}[p(s)]|_{R_{p_i}}$ é ou um local de valor máximo ou de valor mínimo para s^* se q for par e é uma função crescente ou decrescente se q for ímpar.

Prova: Sem perda da generalidade, s^* pode se considerado como zero. Antes de considerar o caso geral, o teorema é provado para:

$$h(s) = a + s^q$$

Identificando o conjunto R_h como:

$$R_h = \{s \mid \text{Im}[h(s)] = 0\}$$

e considerando-se que $s = x + jy = re^{j\theta}$ e $h(s) = a + re^{jq\theta}$, temos que:

$$\begin{aligned} R_h &= \{re^{j\theta} \mid r^q \sin q\theta = 0\} = \\ &= \{re^{j\theta} \mid \theta = i\pi/q, i = 0, 1, 2, \dots, q-1\} \end{aligned}$$

onde θ está restrito na metade superior do plano s e r assume valores negativos na metade inferior do mesmo plano. Lo -

go, R_h consiste de q ramos R_{hi} , $i = 0, 1, 2, \dots, q-1$ que se interceptam em $r = 0$. Para cada i , tem-se:

$$\operatorname{Re}[h(s)]|_{R_{hi}} = a + r^q \cos(q\theta_i) = a + r^q \cos(i\pi)$$

Em consequência, se q for par, $r^q \geq 0$ e

$$\operatorname{Re}[h(s)]|_{R_{hi}} \geq a \quad \text{quando } \cos(i\pi) = 1$$

$$\operatorname{Re}[h(s)]|_{R_{hi}} \leq a \quad \text{quando } \cos(i\pi) = -1$$

isto é, $h(s)|_{R_{hi}}$ é um local de valor máximo ou de valor mínimo. Agora, se q for ímpar, para cada i temos:

$$\operatorname{Re}[h(s)]|_{R_{hi}} = a + r^q \cos(i\pi)$$

Logo $(h(s)|_{R_{hi}} - a)$ mudará de sinal, ou de mais para menos com r passando de valor negativo para positivo ou vice-verso, isto é, $h(s)|_{R_{hi}}$ é uma função monotônica.

Retornando ao caso geral, $p(s)$ pode ser expandido em torno de s^* utilizando a série de Taylor, resultando:

$$\begin{aligned} p(s) &= p(s^*) + \sum_{i=q}^{\infty} c_i (s-s^*)^i = \\ &= a + (s-s^*)^q \sum_{k=0}^{\infty} c_{q+k} (s-s^*)^k \end{aligned}$$

Visto que a somatória da equação acima é uma função analítica e existe uma região limitada por um pequeno disco ao redor de s^* sem conter outro ponto singular, do teorema da teoria de variáveis complexas (de acordo com a referência [17])

temos a existência de uma função analítica $u(s)$ tal que:

$$\sum c_{q+k} (s-s^{\times}) = \exp(u(s))$$

Seja $v(s) = \exp(u(s)/q)$, então

$$p(s) = a + [(s-s^{\times}) v(s)]^q \triangleq a + [f(s)]^q$$

onde $f(s^{\times}) = 0$, $f'(s^{\times}) \neq 0$, portanto $f(s)$ é um homomorfismo.

Agora para o conjunto R_p temos:

$$R_p = \{s \mid \operatorname{Im}[a + (f(s))^q] = 0\} = \{s \mid f(s) \in R_h\}$$

Seja $R_{pi} = \{s \mid f(s) \in R_{hi}, i = 0, 1, 2, \dots, q-1\}$

Se q for par, então $s \in R_{pi}$ resultando em $f(s) \in R_{hi}$. Prosseguindo temos:

$$\operatorname{Re}[h(f(s))] \geq \operatorname{Re}[h(0)] = \operatorname{Re}[h(f(s^{\times}))] \text{ para } \cos(i\eta) = 1$$

$$\operatorname{Re}[h(f(s))] \leq \operatorname{Re}[h(0)] = \operatorname{Re}[h(f(s^{\times}))] \text{ para } \cos(i\eta) = -1$$

isto é,

$$\operatorname{Re}[p(s)] \geq \operatorname{Re}[p(s^{\times})] \text{ quando } \cos(i\eta) = 1$$

$$\operatorname{Re}[p(s)] \leq \operatorname{Re}[p(s^{\times})] \text{ quando } \cos(i\eta) = -1$$

Portanto, $\operatorname{Re}[p(s)]|_{R_{pi}}$ é ou um local de valor máximo ou um local de valor mínimo para $s = s^{\times}$. Similarmente, se q for ímpar então pode-se mostrar que $\operatorname{Re}[p(s)]|_{R_{pi}}$ é uma função cres-

cente ou decrescente.

Como uma consequência direta do teorema visto, o seguinte corolário é deduzido:

Corolário: Suponha s^* um ponto múltiplo em ℓ tal que:

$$K(s^*) \neq 0$$

$$\left. \frac{d^k K}{ds^k} \right|_{s=s^*} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, q-1 \quad (49)$$

$$\left. \frac{d^q K}{ds^q} \right|_{s=s^*} \neq 0, \quad 2 \leq q \leq n$$

onde $K(s) = -B(s)/A(s)$, então existem q ramos que se interceptam em $s = s^*$. Além disso, se q for par, ao longo de cada ramo de intersecção do lugar das raízes para $s = s^*$, $K(s^*)$ tem um valor máximo ou um valor mínimo, por outro lado, se q for ímpar, $K(s^*)$ é uma função monotônica de s na vizinhança de s^* em cada ramo.

Prova: Seja $f(s) = -B(s)/A(s)$, então $f(s)$ é uma função analítica. Segue que:

$$B(s) + f(s)A(s) = 0$$

que comparando-se com a equação (22) é óbvio que:

$$K = \operatorname{Re}[f(s)]$$

$$0 = \operatorname{Im}[f(s)], \text{ para todo } s \in \ell$$

Com aplicação do teorema visto para $f(s)$, a prova do corolário é completada.

Conforme o corolário apresentado, os pontos múltiplos são caracterizados de acordo com os resultados obtidos nas derivadas de ordens superiores de $K(s)$. Deve-se observar que:

$$\frac{d^k K}{ds^k} = \frac{d^k}{ds^k} [-B(s)/A(s)] = - \frac{\partial^k g}{\partial s^k} / A(s) \quad (50)$$

Como $g(s)$ é um polinômio de enésima ordem, com coeficientes reais, a derivada parcial deste polinômio em relação a s pode ser facilmente obtida, entretanto, q pode ser no máximo igual a n , pois:

$$\frac{d^n K}{ds^n} = - \frac{n!}{A(s)} \neq 0 \quad (51)$$

Com o corolário visto, os pontos sobre o eixo real onde dois ramos chegam ou saem (break-in e break-away) podem agora ser generalizados de acordo com a definição abaixo:

Definição: No teorema, um ponto múltiplo s^* é chamado de ponto múltiplo par se o valor de q for divisível por dois, caso contrário, é chamado de ponto múltiplo ímpar.

É claro que do corolário, no lugar das raízes, um ponto múltiplo par é ou um local de máximo ou de mínimo ao longo do ramo conforme definido no teorema. Os pontos de entrada e de saída (break-in e break-away) são casos especiais de pontos múltiplos pares de ordem dois, isto é, $q = 2$, localizados no eixo real. Em geral, se um ponto múltiplo está localizado fora do eixo real, o conceito de derivada direcional pode ser usado para caracterizar este ponto. Considerando-se a equação (48) e o corolário é óbvio que para um ponto múltiplo de q -ésima ordem temos:

$$\frac{d^k K}{d\ell^k} = 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, q-1$$

(52)

$$\frac{d^q K}{d\ell^q} \neq 0$$

existindo q ramos no ponto de intersecção correspondente à este ponto no lugar das raízes.

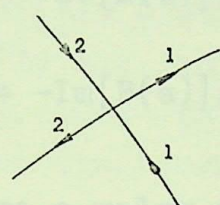
Uma vez determinado e caracterizado os pontos múltiplos, cada ramo do diagrama é obtido separadamente para um aumento de K , utilizando-se a equação (29) e se houver interesse nos valores negativos de K , a equação (30) é usada. Se no ramo que está sendo gerado, houver aproximação de um ponto múltiplo ímpar, visto que $K(s)$ é uma função monotônica de s em ℓ , a derivada direcional de primeira ordem é uma função contínua, logo, há necessidade de pular este ponto por adição de uma pequena variação $|\Delta s|$ ao longo da direção tangencial do ramo. Já para um ponto múltiplo par este procedimento não é válido, visto que no diagrama do lugar das raízes, este ponto singular é um ponto de máximo ou de mínimo, onde tal construção não resulta em um aumento no $|K|$. Assim, afim de prosseguir a plotagem do ramo quando um ponto singular par é aproximado, há necessidade de mudar a direção deste ramo. Dependendo do valor de q neste ponto, a mudança de direção Δz é dada por:

$$\Delta z = \Delta s e^{-j\pi/q} \quad (53)$$

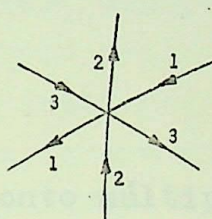
onde Δs é um vetor suficientemente pequeno na direção tangencial do ramo em questão. O fator $\exp(-j\pi/q)$ pode ser visto como um operador rotacional, o qual gira na direção horária de π/q .

Conforme pode ser observado pelas afirmações anteriores, para construção do lugar das raízes, quando temos um

Ponto múltiplo ímpar, desejamos que q ramos se cortem neste ponto, sendo por esta maneira denominado de ponto intersectante, ao passo que, na presença de um ponto múltiplo par, os ramos devem apenas tocar este ponto, sendo por isso denominado de ponto tocante. As ilustrações gráficas para estes dois tipos de singularidades são mostradas na figura 3 para $q = 2$ e $q = 3$, onde os ramos são numerados e as setas apontam na direção crescente de K , considerando-se apenas valores positivos para variação do ganho.



(a) $q = 2$



(b) $q = 3$

Fig. 3 - Pontos múltiplos

Após uma mudança de direção devido à presença de um ponto tocante ou um pulo sobre o ponto intersectante, há necessidade de melhorar o valor obtido. Esta correção é importante pois com a utilização de (53), ou com a adição de Δs , o ponto obtido quanto mais afastado estiver do ponto múltiplo, mais distante estará do ponto verdadeiro, ou seja, do ponto correspondente para aquele valor de K pertencente ao lugar das raízes. Com a utilização deste ponto estimado, com uso de (29) ou (30), após várias iterações, os valores obtidos poderão afastar-se cada vez mais dos verdadeiros, cessando a convergência do método. Do mesmo modo, os valores obtidos com uso de (38) ou (39), como também são valores aproximados, ao serem utilizados em uma das expressões iterativas de Euler para geração dos pontos poderão ter o mesmo destino anterior. Para evitar-se todos estes inconvenientes, o ponto

estimado é corrigido em poucos passos utilizando-se a iteração de Newton:

$$s_{k+1} = s_k - \frac{B(s_k) + K A(s_k)}{B'(s_k) + K A'(s_k)} \quad (54)$$

cujo valor de K é estipulado inicialmente, podendo ser avaliado através do uso de:

$$K = -\text{Re}[B(s)] / \text{Re}[A(s)] \quad (55)$$

ou
$$K = -\text{Im}[B(s)] / \text{Im}[A(s)] \quad (56)$$

Caso o valor do ganho do ponto múltiplo seja conhecido, o valor de K para o ponto estimado após contornar esta singularidade, pode ser obtido de:

$$K = K(s^*) \pm \Delta h \quad (57)$$

onde $K(s^*)$ é o ganho correspondente ao ponto múltiplo, Δh é um pequeno acréscimo real correspondente ao intervalo h usado em (29) ou (30) e o sinal + ou - é utilizado para $K \geq 0$ e $K \leq 0$ respectivamente.

5. PROGRAMAÇÃO COMPUTACIONAL DESENVOLVIDA

Foi elaborado um programa na linguagem FORTRAN para o computador digital Burroughs - B1700 que tem uma memória disponível com apenas 26 kbytes para a execução de programas. Os diagramas foram traçados pela impressora do computador, após todos os pontos terem sido gerados. O programa fornece também os limites de estabilidade, ou seja, os valores do ganho K em que o lugar das raízes cruza o eixo $j\omega$.

A programação desenvolvida é constituída por um programa principal e dezoito subrotinas, sendo apresentado no apêndice (2) uma listagem do programa principal. Para facilitar a compreensão da programação, temos a figura 4 que apresenta em um diagrama de blocos, os passos necessários até a obtenção dos pontos múltiplos. Na figura 5 é apresentado o procedimento para obtenção de um ramo do lugar das raízes, apenas para a variação positiva do ganho. Para valores negativos, o procedimento é o mesmo, porém, as equações indicadas nos blocos são outras.

A fim de que os comentários posteriores realizados sobre o programa principal possam ser melhor compreendidos, vejamos as subrotinas usadas, no que diz respeito às suas aplicações.

5.1. Subrotinas e suas Aplicações

ANGFI - Esta subrotina determina o módulo e o ângulo de um vetor para informar a direção tangencial do lugar das raízes em um ponto.

ARRED - Como os valores calculados pelas expressões iterativas estão sujeitos a erros de truncamento que se propagam no desenvolver do programa, estes deverão ser levados em consideração sempre que dois pontos consecutivos forem usados para obter-se por exemplo, a direção na qual caminha um

ramo do lugar das raízes. Portanto, esta subrotina avalia o valor deste erro em função do valor obtido.

CONEW - Utiliza o método de Newton-Raphson para, a partir de um ponto estimado e um valor do ganho K, obter-se um ponto que realmente pertence ao lugar das raízes para aquele valor de K estipulado. A expressão iterativa usada é a correspondente a equação (54) onde uma precisão é estabelecida para o término das iterações.

DEPOL - É utilizada para derivar um polinômio sempre que for necessário, como por exemplo, nas equações (28) e nas derivadas de $K(s)$ para determinação do valor de q no ponto múltiplo.

DETK - Esta subrotina determina o valor ou valores de K para o limite de estabilidade tanto para variação positiva como também negativa do ganho.

DIVX - É utilizada para dividir um polinômio pelo binômio $(s - a)$, usada por exemplo, na presença de polos múltiplos.

LIEST - Como um ramo do lugar das raízes pode cruzar mais do que uma vez o eixo $j\omega$, podemos ter um ou mais trechos em que o sistema deixa de ser estável. Esta subrotina se encarrega de expressar claramente quando isto ocorre, imprimindo através da impressora estes intervalos em função do ganho K.

PLOTE - É a subrotina encarregada de plotar através da impressora do computador, o diagrama do lugar das raízes. Isto é feito utilizando-se uma matriz cujos elementos são símbolos, sendo montada gradativamente, linha por linha. Inicialmente, foi utilizado o disco para armazenar os símbolos correspondentes a formação do lugar das raízes, porém, devido aos vários acessos ao disco, ocasionados pelo número elevado de pontos, o tempo de computação era da ordem de três vezes maior quando comparado com o do primeiro procedimento. Devido a isto, deu-se preferência ao uso da montagem da ma-



triz.

Como pode-se ter muitos pontos a serem plotados, que devido às aproximações nos cálculos das posições a serem ocupadas por estes na matriz, resultaria numa aglomeração de pontos em uma região do lugar das raízes, decidiu-se selecioná-los por dois critérios. O primeiro elimina os pontos que estão muito próximos através da determinação de dois valores obtidos em função da escala utilizada para construção do diagrama e o segundo elimina símbolos da matriz já montada, deixando o gráfico mais claro. Este último critério, examina linha por linha da matriz e como se sabe, somente na linha em que $\text{Im}[g(s,K)] = 0$ obtém-se trechos do lugar das raízes paralelos ao eixo σ . Logo, quando ocorrer a presença de vários símbolos, digamos x , consecutivos e paralelos ao eixo anterior, é feita a eliminação dos símbolos extremos até resultar ou o do meio, caso o valor de x seja ímpar, ou os dois centrais, caso contrário.

Como a construção pode ser feita para K variando desde $-\infty$ até $+\infty$, utilizou-se os símbolos "+" e "-" para diferenciar os ramos, sendo o primeiro usado para indicar os ramos do lugar das raízes obtidos pela variação positiva do ganho e o segundo para variação negativa. Para indicação dos polos, utilizou-se o símbolo "X", para os zeros, "O" e "M" para os pontos múltiplos.

POLIC - Esta subrotina monta um polinômio que pode ter coeficientes complexos, a partir de números complexos quaisquer. É utilizada para montagem do polinômio base para determinação das raízes de um polinômio de mesmo grau da base. Pode ser utilizada também na determinação das condições iniciais quando houver polos repetidos complexos na função de transferência de malha aberta utilizada para construção do lugar das raízes.

POLIN - É utilizada para montar um polinômio com coeficientes reais, usada por exemplo, para montar o polinômio do numerador da equação (20), ou seja, $A(s)$, a partir dos va

lôres opostos aos zeros da função correspondente.

PROD - Esta subrotina é responsável pela determinação do produto de dois polinômios.

PSKR - Após obtidas as raízes da equação (40), eliminando-se as possibilidades de uma delas ser um polo ou zero repetido, deve-se verificar quais destas raízes são realmente pontos múltiplos. Para isto, utiliza-se esta subrotina que determina o valor de K para cada uma das raízes, e para que sejam consideradas, o valor de K obtido deve ser um número real. Porém, devido às aproximações sucessivas é admitido um fator mínimo para as partes imaginárias destas raízes.

REFR - Esta subrotina refina as raízes obtidas pelo método da continuação para determinação dos possíveis pontos múltiplos através da utilização de Newton-Raphson, para uma determinada precisão estipulada.

REPRA - Esta subrotina verifica a existência de polos ou zeros múltiplos, fornecendo-os em um conjunto e os distintos em outro para subsequente utilização. Caso a função de transferência de malha aberta não apresente polos nem zeros repetidos, uma variável é feita igual a zero para facilitar a aplicação do método.

Esta subrotina poderia ser dispensada, caso já fosse mencionado no fornecimento dos dados os zeros e polos repetidos, as suas multiplicidades e demais dados, porém, complicaria a entrada dos dados.

SOMA - É a subrotina responsável pela adição de dois polinômios.

SUBT - Esta subrotina subtrai um polinômio de outro polinômio.

VAPO - Determina o valor numérico de um polinômio com coeficientes reais para um ponto real ou complexo fornecido.

VAPOL - Determina o valor numérico de um polinômio com coeficientes complexos para um ponto fornecido.

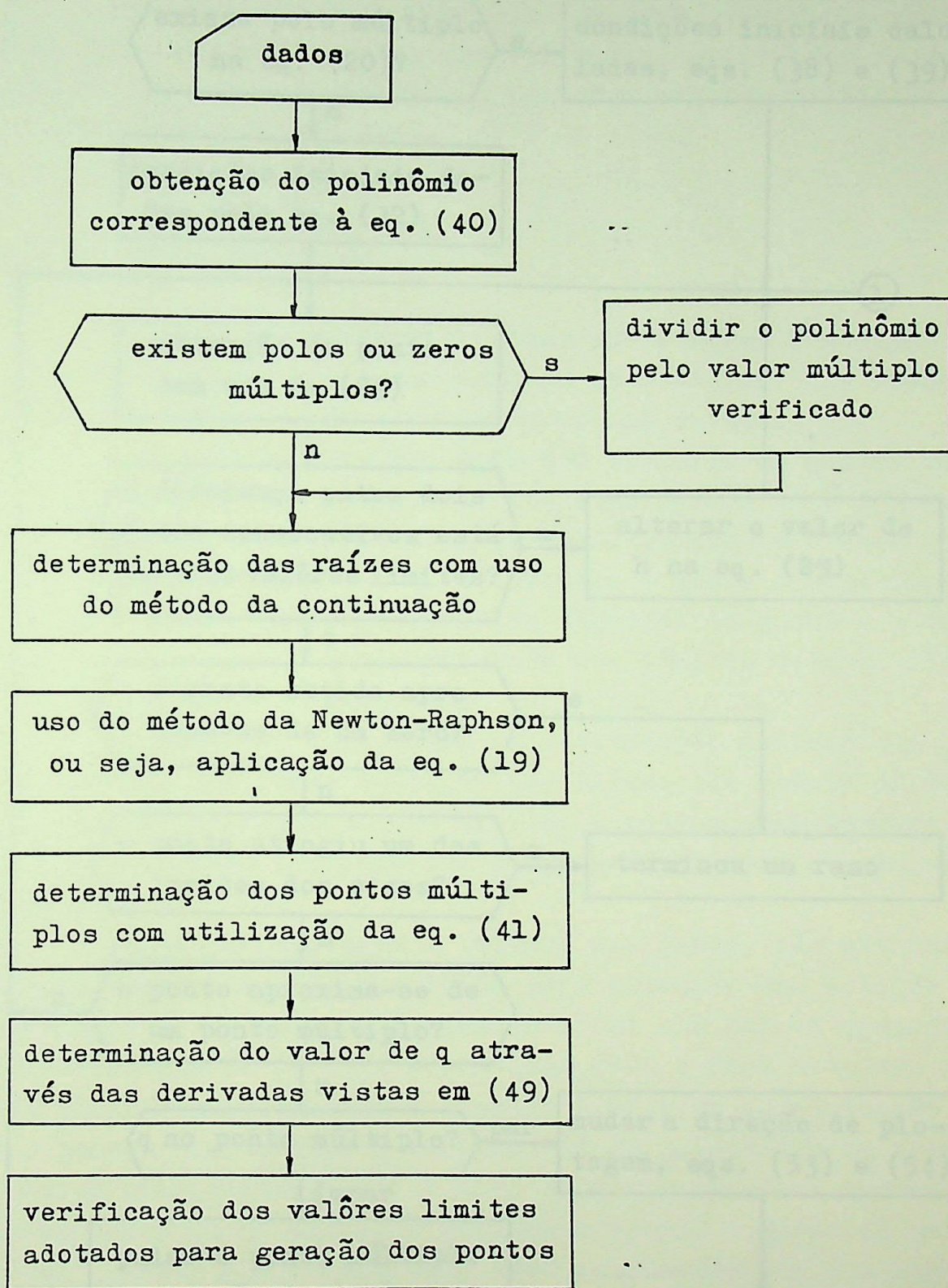


Fig. 4 - Primeira etapa do programa principal

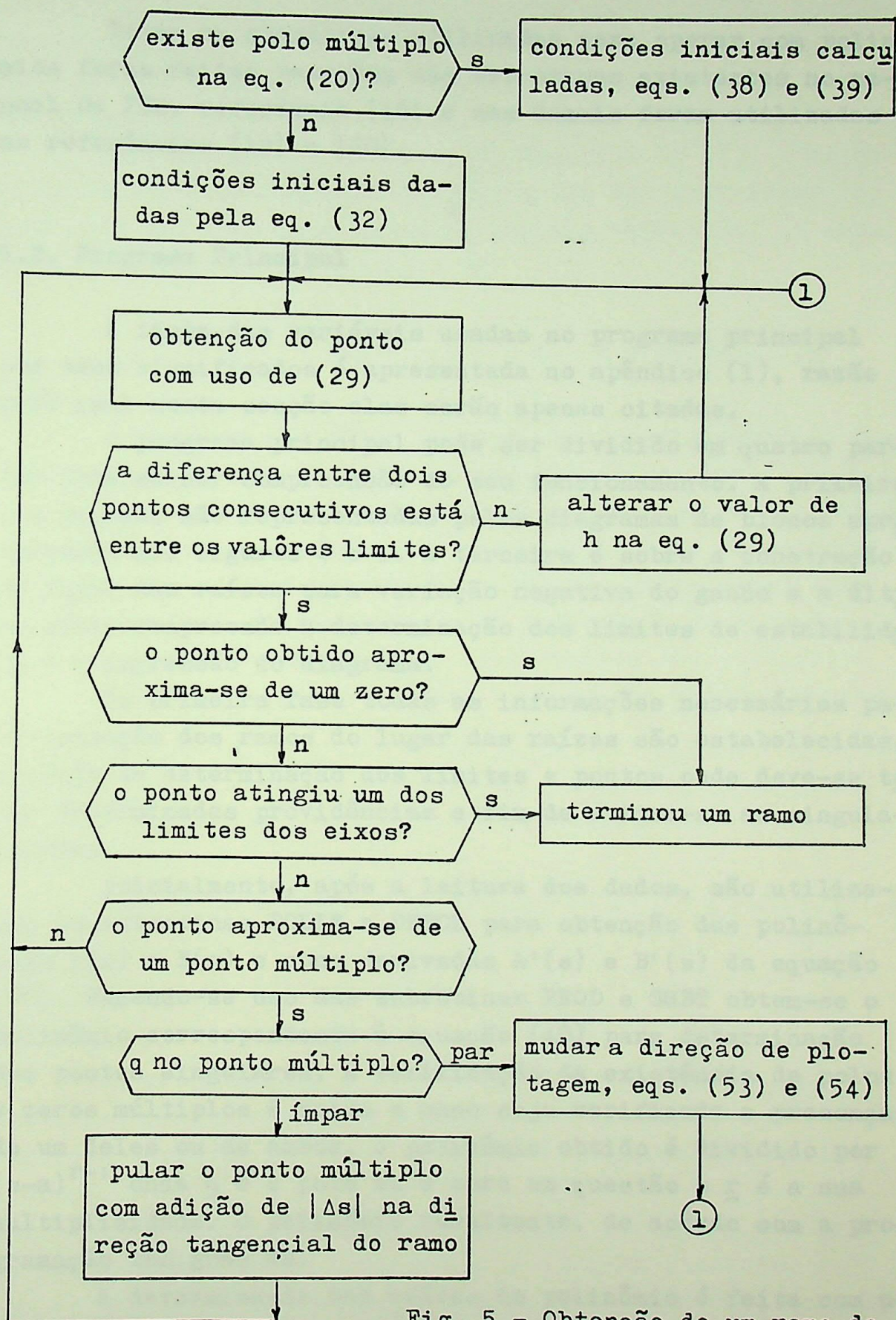


Fig. 5 - Obtenção de um ramo do lugar das raízes para $K > 0$

Todas as subrotinas utilizadas para operar com polinômios foram feitas baseadas nas subrotinas existentes no manual da IBM, referência [18] e nas demais foram utilizadas as referências [19] e [20].

5.2. Programa Principal

A lista das variáveis usadas no programa principal com seus significados é apresentada no apêndice (1), razão pela qual nesta seção elas serão apenas citadas.

O programa principal pode ser dividido em quatro partes para melhor compreensão do seu funcionamento. A primeira e a segunda são representadas pelos diagramas de blocos apresentados nas figuras 4 e 5. A terceira é sobre a construção do lugar das raízes para variação negativa do ganho e a última parte compreende a determinação dos limites de estabilidade e a impressão do diagrama.

Na primeira fase todas as informações necessárias para obtenção dos ramos do lugar das raízes são estabelecidas, através da determinação dos limites e pontos onde deve-se tomar determinadas providências a fim de evitar-se as singularidades.

Inicialmente, após a leitura dos dados, são utilizadas as subrotinas POLIN e DEPOL para obtenção dos polinômios $A(s)$ e $B(s)$ e suas derivadas $A'(s)$ e $B'(s)$ da equação (20). Fazendo-se uso das subrotinas PROD e SUBT obtém-se o polinômio correspondente à equação (40) para determinação dos pontos singulares. A verificação da existência de polos e zeros múltiplos é feita e caso seja verificada a presença de um deles ou de ambos, o polinômio obtido é dividido por $(s-a)^{r-1}$ onde a é o polo ou o zero em questão e r é a sua multiplicidade. O polinômio resultante, de acordo com a programação tem grau NC.

A determinação das raízes do polinômio é feita com uso do método da continuação desenvolvido no item 3.2, sendo

necessário construir uma base a partir das NC raízes complexas fornecidas juntamente com os outros dados, obtendo-se deste modo o polinômio base indicado na equação (12), através do uso da subrotina POLIC.

Considerando-se a expressão definida em (13) e os polinômios expressos em (11) e (12), a fim de satisfazer as condições exigidas para obtenção daquela expressão, os seus coeficientes podem ser obtidos de:

$$a_n(t) = a_n^{(0)} - (a_n^{(0)} - a_n^{(1)}) t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

onde os índices 0 e 1 dizem respeito aos coeficientes do polinômio base e original respectivamente. Logo, para $t = 0$ os coeficientes da expressão (13) coincidem com os da base e para $t = 1$, estes coeficientes coincidem com os do polinômio original. Como estes coeficientes não são utilizados, pois as soluções são obtidas através da integração da equação diferencial mostrada em (15), os coeficientes dos polinômios do numerador e denominador desta equação são obtidos diretamente com o uso de:

$$-a_n(t) = a_n^{(0)} - a_n^{(1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$na_n(t) = n[a_n^{(0)} - (a_n^{(0)} - a_n^{(1)}) t], \quad n = 1, 2, \dots, N$$

pois para $n = N$, $a_n^{(0)} = a_n^{(1)} = 1$

Na programação, a determinação destes coeficientes é feita facilmente com a utilização de três comandos DO, cujas soluções dependem do valor de t que é incrementado em cada iteração.

Para solução da expressão (15) é utilizado o método de Runge-Kutta, cujas constantes da fórmula iterativa (18) são determinadas em função de t e de uma das raízes do poli-

nômio base, sendo o valor final obtido com uso do seguinte comando:

$$Z(K) = Z(K) + H * (XK(1) + 2 * XK(2) + 2 * XK(3) + XK(4)) / 6$$

cujos valores iniciais correspondentes ao indicado em (16) utilizados na programação são:

$$\begin{aligned} Z(K) &= -RA(K) \\ T &= 0. \end{aligned}$$

Logo, sempre que T for igual à unidade, pois T é acrescido de H, determinou-se uma raiz, sendo que, para $K = NC$, obteve-se todas as raízes do polinômio, ou seja, os possíveis pontos múltiplos.

Como estas raízes obtidas são aproximadas e há necessidade de ter-se uma boa precisão devido às futuras utilizações, as raízes são refinadas com utilização da subrotina REFR, a qual utiliza a expressão (19), conseguindo-se em poucos passos a precisão desejada.

A determinação do valor de q indicado em (49) do capítulo anterior é feita através da utilização das subrotinas DEPOL, PROD, SUBT e VAPO. A expressão $K(s) = -B(s)/A(s)$ é derivada em relação a s e fazendo-se s igual ao ponto múltiplo verifica-se o resultado obtido. Se este for zero ou devido às aproximações, menor que um pequeno valor real definido, digamos ϵ , torna-se a derivar $K(s)$ até que o resultado obtido seja maior do que ϵ . Quando isto ocorrer, o valor de q será igual ao número total de derivadas efetuadas.

Como pode ocorrer que um ponto múltiplo esteja fora dos limites estabelecidos para geração dos pontos, limites estes fornecidos com os demais dados, estes são examinados em função de todos os pontos múltiplos obtidos, podendo-se redefinir ou não estes limites de acordo com os testes comparativos efetuados.

Com isso, já é possível iniciar a geração dos pontos

para o traçado do lugar das raízes, dando início à segunda parte da programação indicada pelo diagrama de blocos apresentado na figura 5.

Para a geração dos pontos de um ramo para $K \geq 0$, inicialmente é verificado através do valor de IAP da programação, a existência de polos repetidos. Se todos os polos forem simples, as condições iniciais para obtenção dos ramos são fornecidas por (32). Se existir pelo menos um polo repetido, inicialmente são obtidos os ramos decorrentes deste polo, para posteriormente obter-se os ramos correspondentes aos demais polos.

Na presença de mais de um polo repetido, caso sejam complexos, o valor correspondente à equação (37) é obtido com uso das subrotinas POLIC e VAPOL, porém, se existe apenas um polo múltiplo, este necessariamente deve ser real, devendo-se utilizar as subrotinas POLIN e VAPO. Para determinar-se o ângulo \varnothing da equação (37) utiliza-se a subrotina ANGFI. Os valores iniciais correspondentes à equação (38), ou seja, o ponto e o valor do ganho correspondente, são obtidos adotando-se $\varepsilon = 0,2$. Este ponto estimado é corrigido através da subrotina CONEW, para o valor do ganho anteriormente determinado.

Uma vez estabelecidas as condições iniciais para geração dos pontos que definirão um ramo do lugar das raízes, o primeiro ponto e o ganho correspondente são obtidos com a utilização da equação (29). Outros pontos são obtidos, incrementando-se o valor do ganho, devendo a diferença entre dois pontos consecutivos estar compreendida em um intervalo previamente estabelecido. Caso o acréscimo dado ao ganho fosse mantido constante, os pontos gerados em certos trechos do lugar das raízes estariam muito afastados e em outros haveria necessidade de calcular-se muitos pontos em vão para que houvesse um mínimo deslocamento do ramo obtido. Logo, caso a diferença anteriormente citada caia fora dos limites estabelecidos, o valor de h da equação (29) é alterado, o último ponto gerado é recalculado até que a diferença seja satisfató-

ria.

Se um ponto gerado aproxima-se de um ponto múltiplo, o valor de q deste último ponto é verificado e se for par, através da utilização das subrotinas ARRED e ANGFI, determina-se a direção tangencial ao lugar das raízes. Para isto, a diferença entre os dois últimos pontos consecutivos gerados pela equação (29) é considerada, obtendo-se um vetor que denominaremos de SB. Utilizando-se a equação (53), muda-se a direção do ramo pela adição de Δz ao ponto múltiplo, onde Δs é obtido pelo produto do vetor SB por um pequeno número real a fim de que o ponto estimado após a mudança de direção fique o mais próximo possível do ponto múltiplo. Se q for ímpar, para contornar este ponto singular, calcula-se o mesmo vetor Δs , só que neste caso, como trata-se de um ponto onde os ramos se cruzam, o ponto resultante a fim de contornar esta singularidade é obtido simplesmente pela adição de Δs ao ponto múltiplo. Em ambos os casos é utilizada a subrotina CONEW, pois o ponto obtido após contornar a singularidade é aproximado e uma vez definido o valor do ganho pela equação (57), obtem-se um valor mais exato, evitando-se os inconvenientes já mencionados no capítulo anterior.

Para o término de um ramo, após um ponto ser gerado, há necessidade de verificar se este aproxima-se de um zero ou se atinge um dos limites dos eixos. Isto é feito com testes lógicos e para aproximação de um zero, é estipulado um valor de aproximação, pois como sabemos, para atingir realmente um zero, o ganho deve ser infinito.

Após o término de um ramo, se o polo inicialmente utilizado era repetido, novas condições iniciais são calculadas e, caso contrário, as condições iniciais são fornecidas por (32), reiniciando-se o procedimento para ambos os casos. Isto se repete até que n ramos são obtidos, sendo n o número de polos da função de transferência de malha aberta utilizada.

A terceira parte do programa compreende a obtenção dos ramos correspondentes aos valores de K negativos, sendo

utilizado o mesmo procedimento apresentado na figura 5, só que são usadas as equações (30) e (39) no lugar das equações (29) e (38). Isto é feito através de uma variável LL, que após a obtenção dos ramos para $K > 0$, ela é feita igual a 1.

A última parte compreende a obtenção dos limites de estabilidade feita pela subrotina DETK através da verificação da mudança do sinal na parte real dos pontos gerados. Sempre que uma mudança de sinal for observada temos a presença de um valor limite. Compreende também a saída dos resultados. Além da impressão do lugar das raízes feita pela subrotina PLOTE, o programa imprime os polos e zeros da equação (20), as raízes obtidas pelo método da continuação e os pontos múltiplos com os valores de K e q correspondentes. Pode-se também, com utilização da variável MJ, obter-se todos os pontos estimados com uso das equações (29) e (30) com os valores dos ganhos correspondentes. Os limites de estabilidade são impressos após o diagrama, permitindo assim efetuar um estudo sobre a estabilidade da função representativa do sistema em estudo.

6. RESULTADOS OBTIDOS

Várias funções de transferência foram utilizadas para comprovar a programação elaborada. Para uma mesma função de transferência, obteve-se apresentações diferentes do lugar das raízes para mostrar as flexibilidades possíveis na programação elaborada. Os exemplos foram propositadamente selecionados para mostrar a eficiência do método em diferentes situações.

Exemplo 1: Seja construir o lugar das raízes para a função de transferência $G(s) H(s) = \frac{K}{(s + 3)(s + 1)^2}$ para a variação de K desde 0 até $+\infty$.

Devido à variação de K, MPLOT é feito igual a 1. O polinômio para a determinação dos pontos múltiplos é obtido. Devido à existência de um polo duplo em $s = -1$ (com $r = 2$), o polinômio em questão é dividido por $(s + 1)$, obtendo-se diretamente a única raiz real que dá a localização do ponto múltiplo. Através da determinação de q comprova-se tratar-se de um ponto múltiplo par.

Como IAP = 1 (devido ao polo múltiplo existente), os primeiros ramos gerados devem ser os devidos à este polo. Através da utilização da equação (37) obteve-se:

$$\rho e^{j\phi} = - \frac{1}{(s + 3)} \Big|_{s=-1} = 0,5 e^{j\pi}$$

logo $\rho = 0,5$ e $\phi = \pi$. Com $\epsilon = 0,2$ a primeira aproximação do primeiro ponto do lugar das raízes é obtida:

$$x_1 = -1 + \epsilon e^{j(\phi + 2\pi i)/r} = -1 + j0,2$$

$$K = \epsilon^2 / \rho = 0,08$$

Utilizando-se a subrotina CONEW para melhorar esta aproximação, obteve-se:

$$x_1 = - 0,9901932 + j 0,1987846$$

para $K = 0,08$

Em seguida trabalha-se com a equação (29) tentando-se um valor inicial de h desta equação igual a 0,06. Através do aumento do ganho, devido aos acréscimos provocados pela adição de HH , outros pontos vão sendo gerados. Os valores limites V_{MAX} e V_{MIN} são fixados em 0,25 e 0,02 respectivamente, resultando que a diferença entre dois pontos consecutivos gerados (SB) deve ser tal que:

$$0,02 \leq \text{Re}(SB) \leq 0,25$$

e
$$0,02 \leq \text{Im}(SB) \leq 0,25$$

Se $\text{Re}(SB)$ e $\text{Im}(SB)$ forem menores que 0,02, o valor de h é aumentado, e caso uma delas ultrapasse o valor 0,25, o valor de h é reduzido.

Uma vez obtido o primeiro ramo, devido ao valor Y_{MIN} ser atingido, e como $r = 2$, as condições iniciais do segundo ramo são calculadas, obtendo-se:

$$x_2 = - 1 - j 0,2$$

$$K = 0,08$$

resultando após ser utilizada a subrotina CONEW:

$$x_2 = - 0,9901934 - j 0,1987843 ..$$

O procedimento anterior é repetido, terminando quando o limite pré-fixado de um dos eixos for atingido. Como temos ainda um polo simples, as condições iniciais para o terceiro



ramo são:

$$s(0) = -3 + j 0$$

$$K(0) = 0$$

Este último ramo é obtido da mesma maneira que os demais, terminando quando o valor limite X_{MIN} é atingido.

Embora tenha sido constatado a presença de um ponto múltiplo, este não pertence a nenhum dos ramos obtidos pois o valor do ganho correspondente é negativo e o lugar das raízes foi construído apenas para valores de K positivos.

Uma vez que todos os ramos foram gerados, o lugar das raízes é construído através da impressora do computador, sendo determinado o limite de estabilidade. Neste caso, dois ramos cruzam o eixo $j\omega$ e como o método é iterativo, o valor de K correspondente a um dos ramos pode não ter exatamente o mesmo valor correspondente ao outro ramo. Para evitar a indicação de dois valores ou mais em outros casos, é feita uma comparação entre estes valores limites obtidos e se dois ou mais estiverem bem próximos (no caso, a diferença entre eles deve ser menor do que 1), somente o primeiro valor é considerado.

O lugar das raízes bem como outros dados importantes são mostrados na figura 6.

Fig. 6 - Resultados do exemplo 1

***** POL OS *****

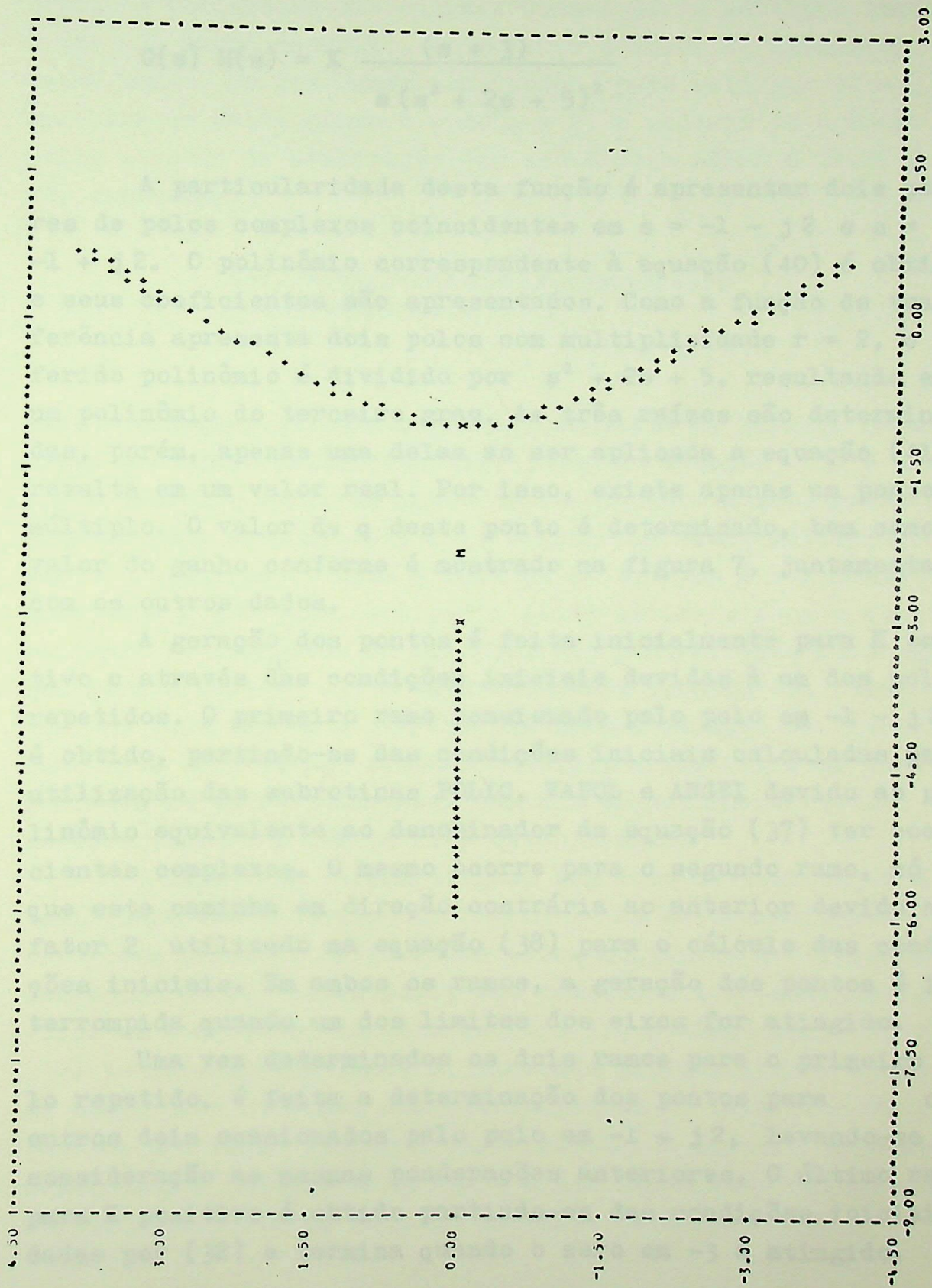
-3.000000 + J 0.000000
 -1.000000 + J 0.000000
 -1.000000 + J 0.000000

COEFICIENTES DO POLINOMIO PARA
 DETERMINACAO DOS PONTOS MULTIPLOS

COEFICIENTE 1 0.7000000E+01
 COEFICIENTE 2 0.1000000E+02
 COEFICIENTE 3 0.3000000E+01

***** PUNTO MULTIPLO *****

	GANHO	VALOR DE Q
-0.2333333E+01 + J 0.0000000E+00	-0.1185186E+01	2



LIMITE DE ESTABILIDADE PARA K POSITIVO
INSTAVEL A PARTIR DE K = 31.4

Exemplo 2: Construir o lugar das raízes com K variando de $-\infty$ a $+\infty$ para a seguinte função de transferência:

$$G(s) H(s) = K \frac{(s + 3)}{s (s^2 + 2s + 5)^2}$$

A particularidade desta função é apresentar dois pares de polos complexos coincidentes em $s = -1 - j2$ e $s = -1 + j2$. O polinômio correspondente à equação (40) é obtido e seus coeficientes são apresentados. Como a função de transferência apresenta dois polos com multiplicidade $r = 2$, o referido polinômio é dividido por $s^2 + 2s + 5$, resultando em um polinômio do terceiro grau. As três raízes são determinadas, porém, apenas uma delas ao ser aplicada a equação (41) resulta em um valor real. Por isso, existe apenas um ponto múltiplo. O valor de q deste ponto é determinado, bem como o valor do ganho conforme é mostrado na figura 7, juntamente com os outros dados.

A geração dos pontos é feita inicialmente para K positivo e através das condições iniciais devidas à um dos polos repetidos. O primeiro ramo ocasionado pelo polo em $-1 - j2$ é obtido, partindo-se das condições iniciais calculadas pela utilização das subrotinas POLIC, VAPOL e ANGFI devido ao polinômio equivalente ao denominador da equação (37) ter coeficientes complexos. O mesmo ocorre para o segundo ramo, só que este caminha em direção contrária ao anterior devido ao fator 2 utilizado na equação (38) para o cálculo das condições iniciais. Em ambos os ramos, a geração dos pontos é interrompida quando um dos limites dos eixos for atingido.

Uma vez determinados os dois ramos para o primeiro polo repetido, é feita a determinação dos pontos para os outros dois ocasionados pelo polo em $-1 + j2$, levando-se em consideração as mesmas ponderações anteriores. O último ramo para K positivo é obtido partindo-se das condições iniciais dadas por (32) e termina quando o zero em -3 é atingido.

Posteriormente é feita a geração dos pontos para valores negativos de K do mesmo modo anterior, só que agora as equações utilizadas são outras. Como o ponto múltiplo obtido é par com ganho negativo, dois ramos deverão se aproximar deste ponto. Um dos ramos ocasionado pelo polo em $-1 - j2$ aproxima-se deste ponto e como $q = 2$, a mudança de direção é feita através da utilização das subrotinas ARRED e ANGFI e dos comandos:

```
SA(J)=ZM(L)+ACR*CMPLX(SBR,SBI)*ZX
AK(J)=GA(L)+HE/2
```

onde o primeiro calcula o ponto resultante da mudança de direção provocado pelo fator $\exp(-j\pi/q)$ da equação (53) e o segundo indica o valor do ganho correspondente a este ponto de acordo com a equação (57) pois o ganho no ponto múltiplo $GA(L)$ é conhecido. Após a mudança de direção é utilizada a subrotina CONEW para corrigir o ponto estimado para o ganho adotado. Prosseguindo na obtenção dos pontos, este ramo caminha para o zero em -3 . O mesmo acontece para um dos ramos devido ao polo em $-1 + j2$, só que após a mudança de direção, como este ramo atinge o ponto múltiplo a 180° do ramo correspondente ao outro polo, este caminha em sentido contrário ao zero, atingindo o limite XMIN estabelecido.

O lugar das raízes obtido, bem como os limites de estabilidade são mostrados na figura 7. Na determinação das condições iniciais devidas aos polos múltiplos é utilizada a subrotina CONEW. Estes polos são complexos e dependendo do valor de ϵ adotado, os valores iniciais obtidos por (38) ou (39) se fossem utilizados diretamente provocariam um aumento no tempo para obtenção dos outros pontos do lugar das raízes podendo até fazer cessar a convergência do método. Do mesmo modo, após a mudança de direção é utilizada esta subrotina, evitando-se assim um aumento no tempo de computação.

Fig. 7 - Resultados do exemplo 2

***** ZEROS *****

-3.000000 + J 0.000000 ..

***** POLOS *****

-1.000000 - J 2.000000

-1.000000 - J 2.000000

-1.000000 + J 2.000000

-1.000000 + J 2.000000

0.000000 + J 0.000000

COEFICIENTES DO POLINOMIO PARA
DETERMINACAO DOS PONTOS MULTIPLOS

COEFICIENTE 1 0.7500001E+02

COEFICIENTE 2 0.1200000E+03

COEFICIENTE 3 0.1460000E+03

COEFICIENTE 4 0.7600001E+02

COEFICIENTE 5 0.2700000E+02

COEFICIENTE 6 0.4000000E+01

RAIZES OBTIDAS PELO METODO DA CONTINUACAO

RAIZ 1 -0.4595718E+00 - J 0.8761776E+00

RAIZ 2 -0.3830857E+01 + J 0.0000000E+00

RAIZ 3 -0.4595718E+00 + J 0.8761776E+00

***** PONTO MULTIPLO *****

GANHO

VALOR DE Q

-0.3830857E+01 + J 0.0000000E+00

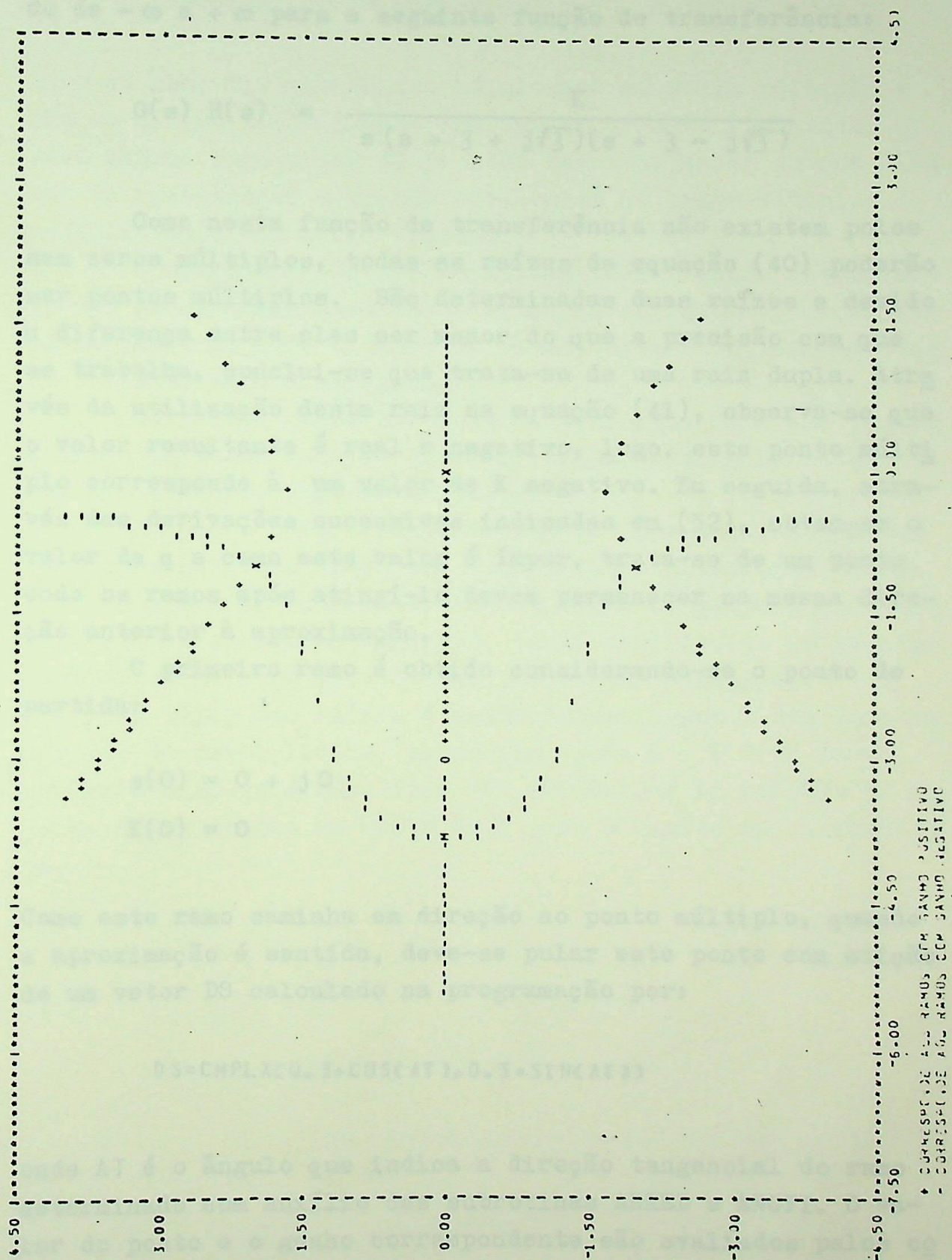
-0.6654677E+03

2

LIMITE DE ESTABILIDADE PARA K POSITIVO

INSTAVEL A PARTIR DE K = -7.7

O SISTEMA E INSTAVEL PARA QUALQUER VALOR DE K NEGATIVO



Exemplo 3: Construir o lugar das raízes com K variando de $-\infty$ a $+\infty$ para a seguinte função de transferência:

$$G(s) H(s) = \frac{K}{s(s + 3 + j\sqrt{3})(s + 3 - j\sqrt{3})}$$

Como nesta função de transferência não existem polos nem zeros múltiplos, todas as raízes da equação (40) poderão ser pontos múltiplos. São determinadas duas raízes e devido a diferença entre elas ser menor do que a precisão com que se trabalha, conclui-se que trata-se de uma raiz dupla. Através da utilização desta raiz na equação (41), observa-se que o valor resultante é real e negativo, logo, este ponto múltiplo corresponde a um valor de K negativo. Em seguida, através das derivações sucessivas indicadas em (52), obtém-se o valor de q e como este valor é ímpar, trata-se de um ponto onde os ramos após atingi-lo devem permanecer na mesma direção anterior à aproximação.

O primeiro ramo é obtido considerando-se o ponto de partida:

$$s(0) = 0 + j0$$

$$K(0) = 0$$

Como este ramo caminha em direção ao ponto múltiplo, quando a aproximação é sentida, deve-se pular este ponto com adição de um vetor DS calculado na programação por:

$$DS = CMPLX(0.3 * \cos(AT), 0.3 * \sin(AT))$$

onde AT é o ângulo que indica a direção tangencial do ramo determinado com auxílio das subrotinas ARRED e ANGFI. O valor do ponto e o ganho correspondente são avaliados pelos comandos:

$$SA(J+1) = ZM(L) + DS$$

$$AK(J+1) = GA(L) + HE/2.$$

*com 7e. et
longos de DS*

Deve-se observar que DS foi adicionado ao ponto múltiplo e não ao último ponto obtido com uso da equação iterativa, pois alguma componente de DS pode resultar menor do que o valor da aproximação e ao ser adicionado ao ponto anterior a singularidade não seria vencida.

A subrotina CONEW é utilizada pois o ponto determinado não corresponde exatamente ao ganho estipulado, corrigindo-se desta maneira o valor de SA(J). Este ramo termina quando o limite XMIN é atingido.

Os outros ramos com valores positivos de K são também obtidos da mesma maneira anterior, onde as singularidades são contornadas conforme explicado.

Os ramos para K negativo são obtidos partindo-se das condições iniciais dadas por (32) e com a utilização da expressão iterativa adequada, onde o valor do ganho é incrementado por um acréscimo negativo, terminando quando os limites estabelecidos para geração dos pontos são atingidos.

O lugar das raízes é mostrado na figura 8 bem como os limites de estabilidade, sendo que, para $K \geq 0$ dois ramos cruzam o eixo $j\omega$ e como eles são simétricos em relação ao eixo σ , temos apenas um valor de K para o limite de estabilidade.

Fig. 8 - Resultados do exemplo 3

***** POLQS *****

0.000000 + J 0.000000
 -3.000000 - J 1.732050
 -3.000000 + J 1.732050

COEFICIENTES DO POLINOMIO PARA
 DETERMINACAO DOS PONTOS MULTIPLOS

COEFICIENTE 1 0.1200000E+02
 COEFICIENTE 2 0.1200000E+02
 COEFICIENTE 3 0.3000000E+01

RAIZES OBTIDAS PELO METODO DA CONTINUACAO

RAIZ 1 -0.2000990E+01 + J 0.0000000E+00
 RAIZ 2 -0.1999022E+01 + J 0.0000000E+00

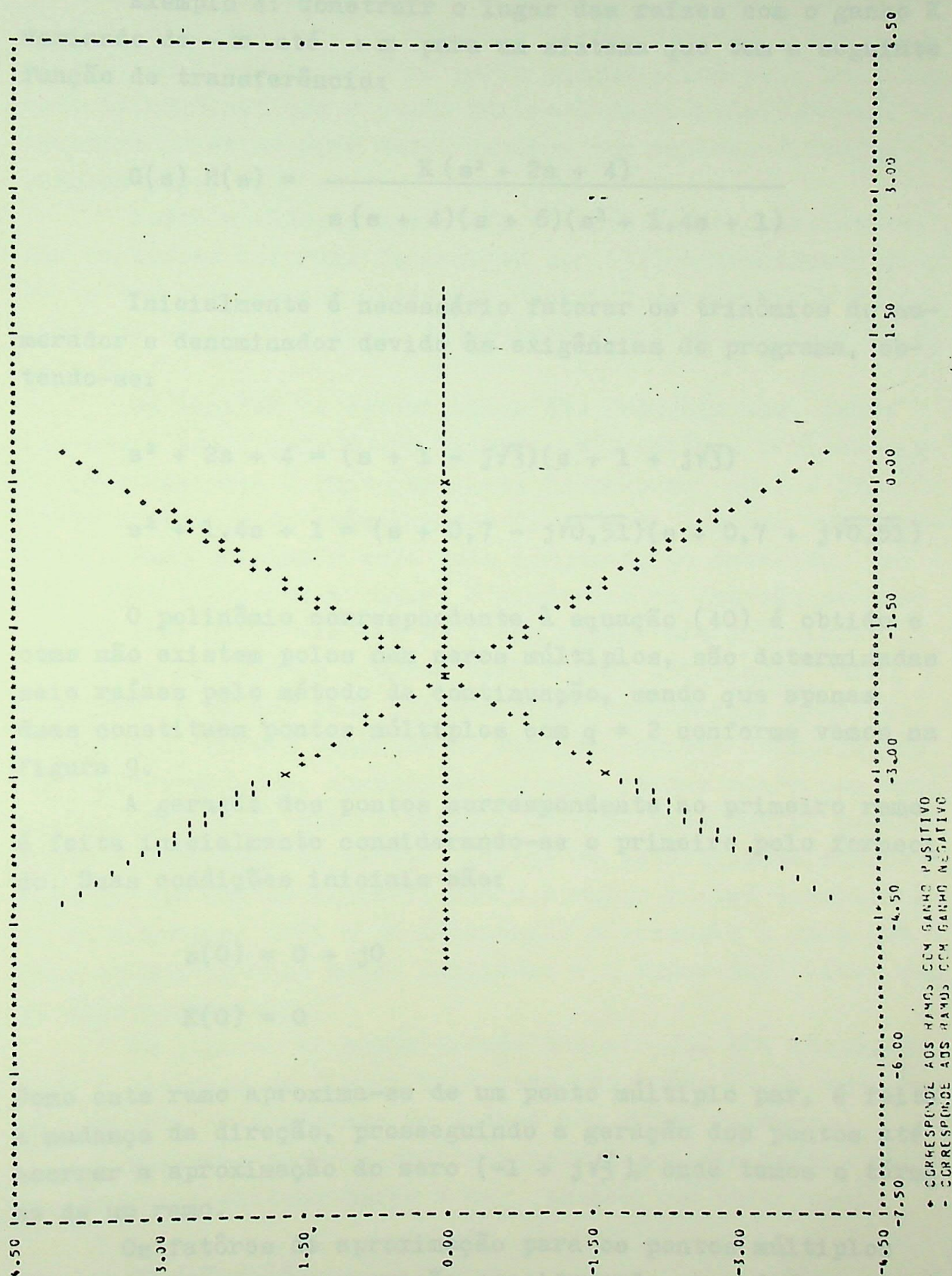
***** PONTO MULTIPLO *****

	GANHO	VALOR DE Q
-0.2000990E+01 + J 0.0000000E+00	0.7999995E+01	3

LIMITE DE ESTABILIDADE PARA K POSITIVO

INSTAVEL A PARTIR DE K = 71.5

O SISTEMA E INSTAVEL PARA QUALQUER VALOR DE K NEGATIVO



Exemplo 4: Construir o lugar das raízes com o ganho K variando de $-\infty$ até $+\infty$ para um sistema que tem a seguinte função de transferência:

$$G(s) H(s) = \frac{K(s^2 + 2s + 4)}{s(s + 4)(s + 6)(s^2 + 1,4s + 1)}$$

Inicialmente é necessário fatorar os trinômios do numerador e denominador devido às exigências do programa, obtendo-se:

$$s^2 + 2s + 4 = (s + 1 - j\sqrt{3})(s + 1 + j\sqrt{3})$$

$$s^2 + 1,4s + 1 = (s + 0,7 - j\sqrt{0,51})(s + 0,7 + j\sqrt{0,51})$$

O polinômio correspondente à equação (40) é obtido e como não existem polos nem zeros múltiplos, são determinadas seis raízes pelo método da continuação, sendo que apenas duas constituem pontos múltiplos com $q = 2$ conforme vemos na figura 9.

A geração dos pontos correspondente ao primeiro ramo é feita inicialmente considerando-se o primeiro polo fornecido. Suas condições iniciais são:

$$s(0) = 0 + j0$$

$$K(0) = 0$$

Como este ramo aproxima-se de um ponto múltiplo par, é feita a mudança de direção, prosseguindo a geração dos pontos até ocorrer a aproximação do zero $(-1 + j\sqrt{3})$, onde temos o término de um ramo.

Os fatores de aproximação para os pontos múltiplos são calculados na programação considerando-se a diferença en

tre dois pontos consecutivos SB acrescida de uma constante ϵ . Com isto, evita-se a nulidade destes fatores, pois caso contrário, a aproximação só seria estabelecida se o ponto gerado coincidisse com o ponto múltiplo em questão. Já para a aproximação de um zero estes fatores tem valores fixos na programação.

Todos os demais ramos são obtidos sempre partindo-se das condições iniciais fornecidas por (32) e terminando quando um dos limites dos eixos for atingido ou ocorrer a aproximação de um zero. O lugar das raízes obtido é mostrado na figura 9.

Os limites de estabilidade são determinados, sendo que neste caso, para $K > 0$ existem três valores limites significativos pois o ramo que parte do polo em $-0,7 + j\sqrt{0,51}$ corta o eixo $j\omega$ em três lugares distintos, o mesmo ocorrendo para o ramo originado pelo polo conjugado ao anterior, porém, como o lugar das raízes é simétrico em relação ao eixo $j\omega$, os três novos valores de K são iguais aos anteriores.

Se os valores limites VMAX e VMIN utilizados forem elevados, o método pode não convergir rapidamente gerando pontos que, embora caminhem no sentido correto constituindo um ramo verdadeiro, apresentam as suas partes reais com oscilações. Caso isto ocorra próximo ao eixo imaginário, poderá haver a indicação de vários limites de estabilidade falsos. Logo existe uma dependência entre o valor mínimo estabelecido na subrotina DETK e já mencionado no exemplo 1 para que dois ou mais ganhos sejam distintos e o lugar das raízes que se deseja construir.

Os limites de estabilidade encontrados são mostrados após o diagrama na figura 9, e como são três, é indicado como se comporta este sistema de acordo com estes valores.

Conforme podemos observar pelo lugar das raízes obtido, embora o sistema torne a ser estável no intervalo:

$$67 < K < 163$$



a resposta do sistema para um valor específico de K dentro deste intervalo terá uma componente oscilatória com uma constante de tempo elevada. Esta componente é devida aos dois polos complexos conjugados que ficam próximos do eixo $j\omega$. Como o valor da parte real é pequena, menor do que 0,2, a constante de tempo será maior do que 5 segundos, sendo que, quanto mais o valor de K se aproximar dos limites deste intervalo, menor se torna a parte real do ponto correspondente, aumentando cada vez mais a constante de tempo da envolvente desta oscilação amortecida. Para $K = 163$, por exemplo, teríamos uma constante de tempo de valor infinito, ou seja, a resposta devido a esta componente seria oscilatória com valôres máximos constantes, deixando de ser estável a resposta do sistema.

Fig. 9 - Resultados do exemplo 4

***** ZEROS *****

-1.000000 - J 1.732051
-1.000000 + J 1.732051

***** POLOS *****

0.000000 + J 0.000000
-4.000000 + J 0.000000
-6.000000 + J 0.000000
-0.700000 + J 0.714143
-0.700000 - J 0.714143

COEFICIENTES DO POLINOMIO PARA
DETERMINACAO DOS PONTOS MULTIPLOS

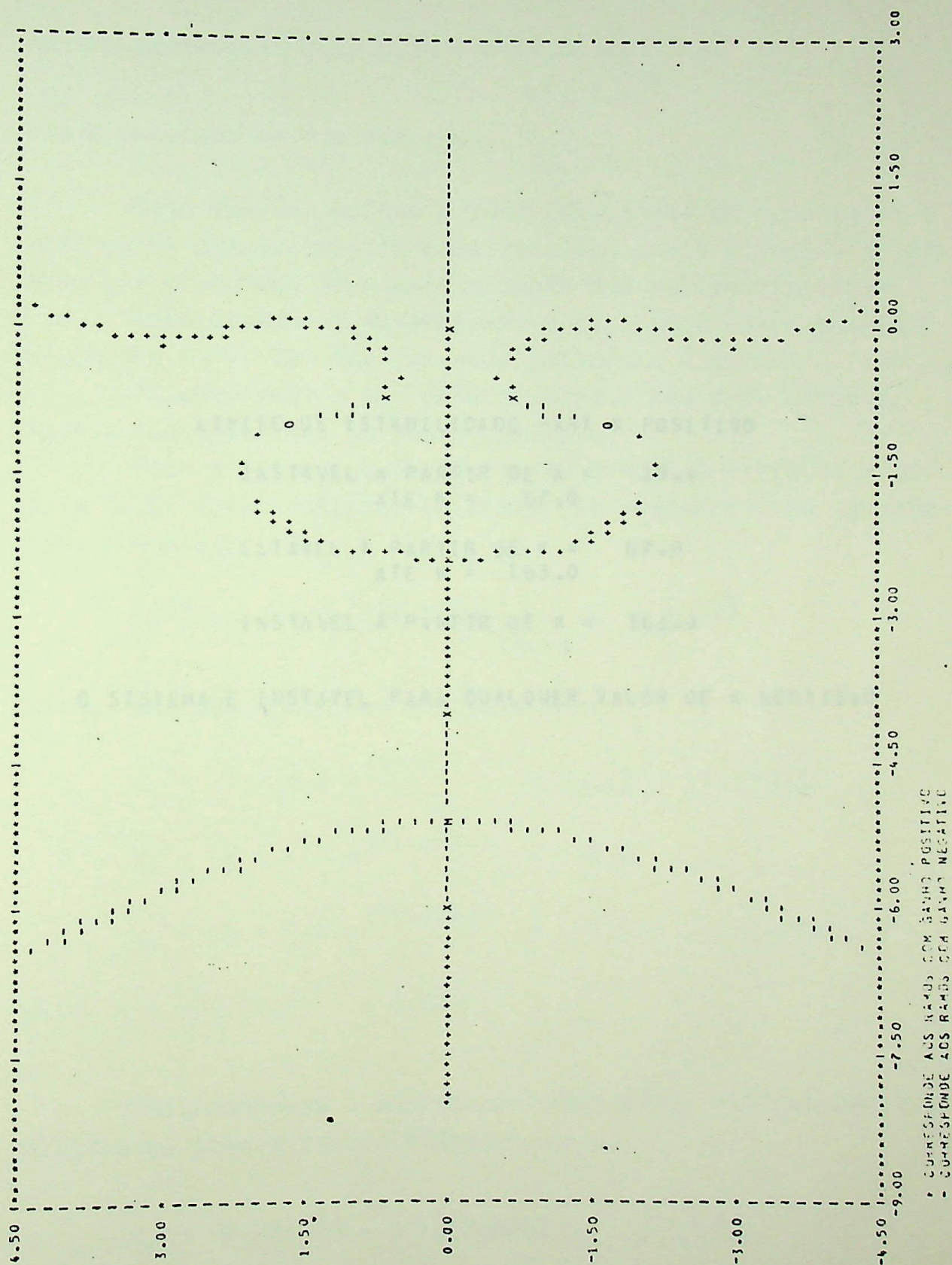
COEFICIENTE 1	0.9600004E+02
COEFICIENTE 2	0.3488001E+03
COEFICIENTE 3	0.5312002E+03
COEFICIENTE 4	0.3384001E+03
COEFICIENTE 5	0.1274000E+03
COEFICIENTE 6	0.3080000E+02
COEFICIENTE 7	0.3000000E+01

RAIZES OBTIDAS PELO METODO DA CONTINUACAO

RAIZ 1	-0.5000232E+00 + J	0.3334635E+00
RAIZ 2	-0.5000232E+00 - J	0.3334635E+00
RAIZ 3	-0.2355670E+01 + J	0.0000000E+00
RAIZ 4	-0.9000794E+00 - J	0.2558927E+01
RAIZ 5	-0.5110792E+01 + J	0.0000000E+00
RAIZ 6	-0.9000793E+00 + J	0.2558927E+01

***** PONTO MULTIPLO *****

	GANHO	VALOR DE Q
-0.2355670E+01 + J 0.0000000E+00	0.9486782E+01	2
-0.5110792E+01 + J 0.0000000E+00	-0.5064921E+01	2



Exemplo 3: Construir o lugar das raízes para a função

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)^2}$$

com K variando de $-\infty$ até $+\infty$.

Esta função, devido a particularidade de apresentar três pólos iguais, mostra uma situação nesta situação a qual não é abordada para determinar os valores críticos.

Inicialmente é determinado a polinômio correspondente à equação (40). Uma vez que este polinômio é dividido por $(s+2)^2$, suas raízes são determinadas e são iguais, apenas uma

LIMITE DE ESTABILIDADE PARA K POSITIVO

INSTAVEL A PARTIR DE $K = 15.4$
ATE $K = 67.0$

ESTAVEL A PARTIR DE $K = 67.0$
ATE $K = 163.0$

INSTAVEL A PARTIR DE $K = 163.0$

O SISTEMA É INSTAVEL PARA QUALQUER VALOR DE K NEGATIVO

$$x_1 = -2 + 0.2 e^{j(10.173223)/s} = -1.9 + j0.173223$$

$$x_2 = -2 + 0.2 e^{j(10.173223)/s} = -2.2$$

$$x_3 = -2 + 0.2 e^{j(10.173223)/s} = -1.9 - j0.173223$$

$$\text{para } K = \frac{1}{0.3} (0.2)^2 = 0.015$$

Utilizando-se a expressão (40) entre os valores K com os valores K positivos obtendo-se:

$$x_1 = -1.901203 + j0.1792213$$

Exemplo 5: Construir o lugar das raízes para a função de transferência $G(s) H(s) = \frac{K(s+1)(s+3)}{s(s+2)^3}$

com K variando de $-\infty$ até $+\infty$.

Esta função, devido a particularidade de apresentar três polos iguais, mostra como funciona nesta situação a programação elaborada para determinação dos valores iniciais.

Inicialmente é determinado o polinômio correspondente à equação (40). Uma vez que este polinômio é dividido por $(s+2)^2$, suas raízes são determinadas e das três obtidas, apenas uma constitui um ponto múltiplo.

Para a determinação dos ramos devido à variação positiva de K, três condições iniciais são estimadas. Da equação (37) obtem-se:

$$\rho e^{j\phi} = - \frac{(s+1)(s+3)}{s} \bigg|_{s=-2} = 0,5 e^{j\pi}$$

Então, as três condições iniciais são:

$$x_1 = -2 + 0,2 e^{j\pi/3} = -1,9 + j0,173205$$

$$x_2 = -2 + 0,2 e^{j(\pi+2\pi)/3} = -2,2$$

$$x_3 = -2 + 0,2 e^{j(\pi+4\pi)/3} = -1,9 - j0,173205$$

$$\text{para } K = \frac{1}{0,5} (0,2)^3 = 0,016$$

Utilizando-se a subrotina CONEW estes valores são corrigidos em poucos passos obtendo-se:

$$x_1 = -1,901203 + j0,1792213$$

$$x_2 = -2,191593$$

$$x_3 = -1,901203 - j 0,1792218$$

para $K = 0,016$

Para cada valor inicial obtido é determinado um ramo que termina quando ocorre a aproximação de um zero ou quando um dos limites para a obtenção do lugar das raízes é atingido. Após os três ramos devido ao polo de multiplicidade três serem obtidos, o último ramo originado pelo polo na origem é gerado.

Os ramos para variação negativa de K são obtidos da mesma maneira, sendo os valores iniciais calculados pela expressão (39), onde para $K = 0,016$ obtém-se os seguintes valores após a correção efetuada pela subrotina CONEW:

$$x_1 = -2,105193 + j 0,1672114$$

$$x_2 = -2,105195 - j 0,1672151$$

$$x_3 = -1,795610$$

Após os quatro ramos ocasionados pela variação negativa de K terem sido gerados, o lugar das raízes é traçado conforme vemos na figura 10.

Conforme se observa no lugar das raízes obtido, do polo triplo partem seis ramos, sendo três com valores positivos de K e três com valores negativos que se alternam angularmente entre si. Diminuindo-se o valor de ϵ utilizado nas equações (38) e (39) consegue-se aproximar mais os ramos deste polo, porém, devido à proximidade entre os pontos, ao utilizar-se a subrotina CONEW poderá não haver convergência para todos os pontos estimados.

Fig. 10 - Resultados do exemplo 5

***** ZEROS *****

-1.000000 + J 0.000000
-3.000000 + J 0.000000

***** POLOS *****

-2.000000 + J 0.000000
-2.000000 + J 0.000000
-2.000000 + J 0.000000
0.000000 + J 0.000000

COEFICIENTES DO POLINOMIO PARA
DETERMINACAO DOS PONTOS MULTIPLOS

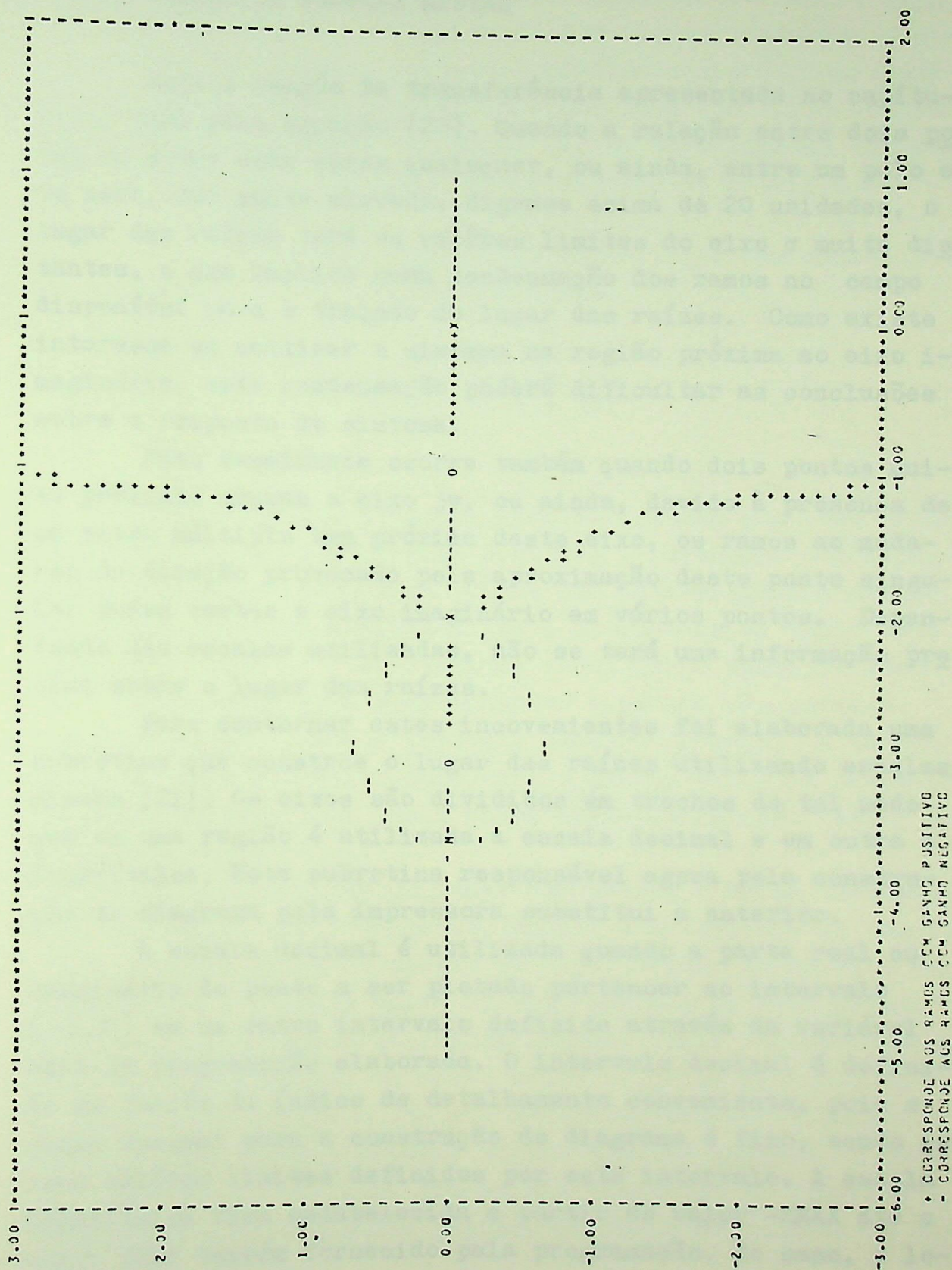
COEFICIENTE 1	0.2400000E+02
COEFICIENTE 2	0.7200001E+02
COEFICIENTE 3	0.9400000E+02
COEFICIENTE 4	0.6000000E+02
COEFICIENTE 5	0.1800000E+02
COEFICIENTE 6	0.2000000E+01

RAIZES OBTIDAS PELO METODO DA CONTINUACAO

RAIZ 1	-0.3546818E+01 + J	0.0000000E+00
RAIZ 2	-0.7265910E+00 - J	0.5638211E+00
RAIZ 3	-0.7265909E+00 + J	0.5638211E+00

***** PONTO MULTIPLO *****

	GANHO	VALOR DE Q
-0.3546818E+01 + J 0.0000000E+00	-0.9425748E+01	2



7. UTILIZAÇÃO DE ESCALAS MISTAS

Seja a função de transferência apresentada no capítulo 3, dada pela equação (20). Quando a relação entre dois polos ou entre dois zeros quaisquer, ou ainda, entre um polo e um zero, for muito elevada, digamos acima de 20 unidades, o lugar das raízes terá os valores limites do eixo σ muito distantes, o que implica numa condensação dos ramos no campo disponível para o traçado do lugar das raízes. Como existe interesse em analisar o sistema na região próxima ao eixo imaginário, esta condensação poderá dificultar as conclusões sobre a resposta do sistema.

Fato semelhante ocorre também quando dois pontos muito próximos cruzam o eixo $j\omega$, ou ainda, devido à presença de um ponto múltiplo bem próximo deste eixo, os ramos ao mudarem de direção provocado pela aproximação deste ponto singular podem cortar o eixo imaginário em vários pontos. Dependendo das escalas utilizadas, não se terá uma informação precisa sobre o lugar das raízes.

Para contornar estes inconvenientes foi elaborada uma subrotina que constroa o lugar das raízes utilizando escalas mistas [21]. Os eixos são divididos em trechos de tal modo que em uma região é utilizada a escala decimal e em outra a logarítmica. Esta subrotina responsável agora pela construção do diagrama pela impressora substitui a anterior.

A escala decimal é utilizada quando a parte real ou imaginária do ponto a ser plotado pertencer ao intervalo $[-1,1]$ ou um outro intervalo definido através da variável $XMAX$ da programação elaborada. O intervalo decimal é definido em função do índice de detalhamento conveniente, pois o campo decimal para a construção do diagrama é fixo, sendo os seus valores limites definidos por este intervalo. A escala logarítmica fica estabelecida a partir do valor $-XMAX$ até o valor $XMIN$ também fornecido pela programação. No caso, o logaritmo utilizado é o decimal.

Para a plotagem de um ponto, suas partes real e imaginária são examinadas e dependendo dos testes efetuados, são escolhidas as fórmulas adequadas para determinação das coordenadas deste ponto. Os valores indicados nos eixos do diagrama são determinados em função dos valores limites fornecidos, pois os campos decimal e logarítmico da matriz a ser montada são fixos.

Como aplicação, seja construir o lugar das raízes para a seguinte função de transferência:

$$G(s) H(s) = \frac{K(s + 10)}{s(s + 1)(s + 30)}$$

para $-\infty < K < +\infty$

Inicialmente, após ter sido verificado que não existem polos ou zeros múltiplos é obtido o polinômio correspondente à equação (40). Suas raízes são determinadas e apenas uma delas satisfaz a equação (41), obtendo-se um valor real para $K(s)$. Como $q = 2$, trata-se de um ponto múltiplo par.

Os pontos para construção do diagrama são gerados, partindo-se dos valores iniciais comuns, ou seja, a localização do polo e o valor nulo para o ganho. Devido à presença do ponto múltiplo par, dois ramos mudam de direção quando se aproximam deste ponto.

Se a construção do lugar das raízes é feita utilizando a subrotina PLOTE corrente, devido à existência de uma relação elevada entre os polos, ou seja, trinta no caso, o ponto múltiplo é plotado muito próximo aos outros dois polos. Isto se deve à escala utilizada imposta pelos valores dos polos existentes. Logo, os ramos entre os polos situados em -1 e 0 e o ponto múltiplo não são mostrados embora os pontos pertencentes a estes trechos tenham sido calculados na geração dos ramos. Com isto, tem-se uma visualização incompleta do lugar das raízes nesta região, conforme se observa na figura 11.1.

Utilizando-se a subrotina onde são utilizadas as esca

las linear e logarítmica, obteve-se o lugar das raízes mostrado na figura 11.2. Pode-se observar que o campo próximo ao eixo imaginário é aumentado e agora tem-se a visualização dos ramos próximo ao ponto múltiplo.

Mais aplicações do uso de escalas mistas serão vistas no capítulo seguinte onde embora as relações entre os polos, os zeros, e entre um polo e um zero sejam pequenas, teremos, devido à presença de um polo múltiplo muito próximo ao eixo $j\omega$, dois ramos cruzando este eixo em valores muito próximos.

***** ZEROS *****

-10.000000 + j 0.000000

***** POLOS *****

-1.000000 + j 0.000000

-10.000000 + j 0.000000

0.000000 + j 0.000000

COEFICIENTES DO POLINOMIO PARA
DETERMINACAO DOS PONTOS MULTIPLOS

COEFICIENTE 1 0.30100000E+03

COEFICIENTE 2 0.20000000E+03

COEFICIENTE 3 0.10000000E+03

COEFICIENTE 4 0.20000000E+03

RAIZES OBTIDAS PARA A CONTINUAÇÃO

RAIZ 1 -0.99999999E+00 + j 0.00000000E+00

RAIZ 2 -0.14999999E+02 + j 0.00000000E+00

RAIZ 3 -0.14999999E+02 + j 0.00000000E+00

***** PONTO MULTIPLO *****

RAIZ

VALOR DE Q

-0.10000000E+00 + j 0.00000000E+00

0.00000000E+00

2

Fig. 11 - Utilização de escalas mistas

Fig. 11.1 - Uso da escala decimal

Fig. 11.2 - Uso da escala decimal-logarítmica

***** ZEROS *****

-10.000000 + J 0.000000

***** POLOS *****

-1.000000 + J 0.000000

-30.000000 + J 0.000000

0.000000 + J 0.000000

COEFICIENTES DO POLINOMIO PARA
DETERMINACAO DOS PONTOS MULTIPLOS

COEFICIENTE 1 0.3000000E+03

COEFICIENTE 2 0.6200000E+03

COEFICIENTE 3 0.6100000E+02

COEFICIENTE 4 0.2000000E+01

RAIZES OBTIDAS PELO METODO DA CONTINUACAO

RAIZ 1 -0.5089239E+00 + J 0.0000000E+00

RAIZ 2 -0.1499554E+02 + J 0.8358863E+01

RAIZ 3 -0.1499554E+02 - J 0.8358864E+01

***** PONTO MULTIPLO *****

GANHO

VALOR DE Q

-0.5089289E+00 + J 0.0000000E+00

0.7765632E+00

2



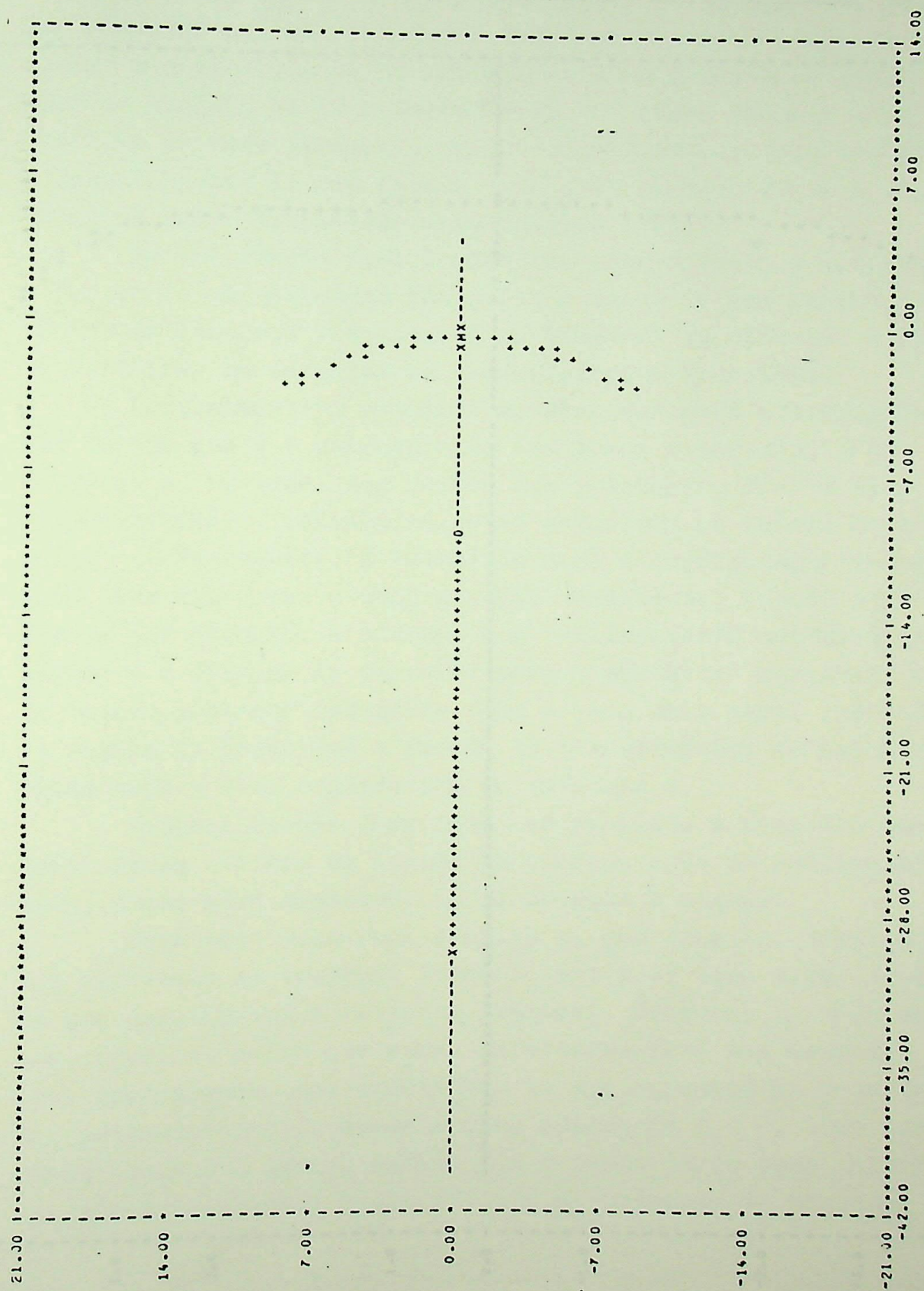
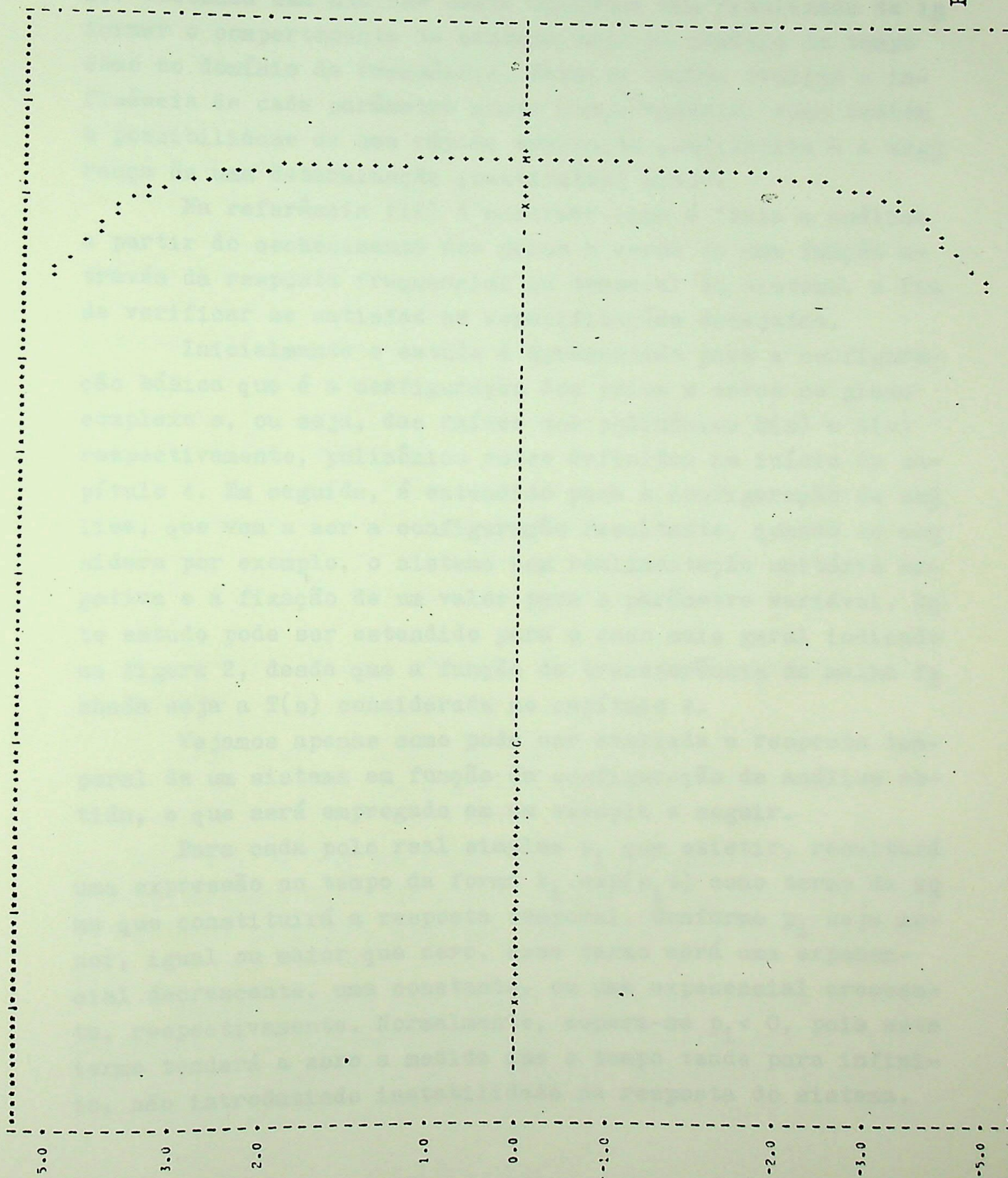


Fig. 11.1

Fig. 11.2



8. ANÁLISE PELO LUGAR DAS RAÍZES

Uma vez obtido o lugar das raízes de um sistema, pode ser efetuada uma análise deste diagrama com finalidade de informar o comportamento do sistema seja no domínio do tempo como no domínio da frequência. Permite também avaliar a influência de cada parâmetro neste comportamento, como também a possibilidade de uma rápida avaliação qualitativa e a segurança de uma determinação quantitativa exata.

Na referência [16] é mostrado como é feita a análise a partir do conhecimento dos polos e zeros de uma função através da resposta frequencial ou temporal do sistema, a fim de verificar se satisfaz as especificações desejadas.

Inicialmente o estudo é apresentado para a configuração básica que é a configuração dos polos e zeros no plano complexo s , ou seja, das raízes dos polinômios $B(s)$ e $A(s)$ respectivamente, polinômios estes definidos no início do capítulo 4. Em seguida, é estendido para a configuração de análise, que vem a ser a configuração resultante, quando se considera por exemplo, o sistema com realimentação unitária negativa e a fixação de um valor para o parâmetro variável. Este estudo pode ser estendido para o caso mais geral indicado na figura 2, desde que a função de transferência de malha fechada seja a $T(s)$ considerada no capítulo 4.

Vejamos apenas como pode ser avaliada a resposta temporal de um sistema em função da configuração de análise obtida, o que será empregado em um exemplo a seguir.

Para cada polo real simples p_i que existir, resultará uma expressão no tempo da forma $k_i \cdot \exp(p_i t)$ como termo da soma que constituirá a resposta temporal. Conforme p_i seja menor, igual ou maior que zero, esse termo será uma exponencial decrescente, uma constante, ou uma exponencial crescente, respectivamente. Normalmente, espera-se $p_i < 0$, pois este termo tenderá a zero a medida que o tempo tende para infinito, não introduzindo instabilidade na resposta do sistema.

No caso de $p_i < 0$, o valor $|1/p_i|$ será a constante de tempo da exponencial decrescente correspondente.

Para cada polo complexo simples, valem as mesmas considerações do parágrafo anterior para a parte real do polo que fornece a envolvente da oscilação amortecida resultante ao se considerar conjuntamente os dois termos originados pelos dois polos complexos conjugados. Para um par de polos complexos conjugados temos um termo temporal composto pelo produto de uma onda senoidal de frequência angular ω_i por uma exponencial com constante de tempo $|1/\sigma_i|$.

Logo, obtido o lugar das raízes pode-se efetuar uma análise qualitativa da resposta temporal do sistema em função, por exemplo, do ganho K , para várias configurações de análise. No caso de não existir uma que seja satisfatória, pode-se, se isto for possível, variar a posição de um outro parâmetro, por exemplo, a posição de um polo, buscando assim a configuração apropriada.

Cabe observar ainda que caso se deseje conhecer a resposta no tempo de um sistema mediante qualquer entrada, somente será necessário adicionar os polos e zeros que caracterizam esta entrada aos da configuração de análise.

Exemplo: Seja a seguinte função de transferência de um sistema:

$$G(s) H(s) = \frac{K(s + 1)}{(s + 2)(s^2 + 8s + 17)}$$

com $H(s) = 1$ e $-\infty < K < +\infty$ para a qual deseja-se conhecer a análise qualitativa do comportamento do sistema em função da variação do ganho, mediante uma entrada impulsiva unitária.

Inicialmente é construído o lugar das raízes após o polinômio do denominador da função de transferência ser fatorado devido à exigência da programação elaborada. Obtem-se três pontos múltiplos que são mostrados na figura 12, sendo

os ramos obtidos a partir das condições iniciais dadas por (32). Devido à presença de um ponto múltiplo muito próximo ao eixo $j\omega$, com uso da escala mista, tem-se uma ampliação desta região, observando-se melhor a localização deste ponto, bem como os valores das frequências dos pontos pertencentes a estes ramos que cruzam o eixo imaginário, conforme mostra a figura 11.2. O valor de K correspondente à estes pontos é indicado logo abaixo do diagrama obtido pelo computador, porém, devido à falta de espaço na folha em que é apresentado o diagrama, é mostrado na folha seguinte.

A análise qualitativa será feita em relação ao segundo diagrama em face das vantagens que ele apresenta em relação ao primeiro. Como primeira informação do lugar das raízes, temos que o sistema é estável para qualquer valor de K menor do que $-32,9$.

Nesta análise serão utilizados apenas três algarismos significativos para os valores obtidos na programação, embora alguns valores, conforme se observa na figura 12, possuam seis algarismos. As frequências ω são dadas em radianos por segundo e as constantes de tempo ζ e ζ_e (em segundos) dizem respeito as constantes de tempo da envolvente da oscilação amortecida quando tem-se polos complexos conjugados e da exponencial ocasionada por um polo real.

a. Valores Negativos de K

Para $-0,662 < K < 0$ o sistema terá uma resposta oscilatória amortecida adicionada a uma resposta exponencial decrescente. A componente oscilatória amortecida terá as seguintes variações de frequência e da constante de tempo da envolvente a medida que K varia desde 0 até $-0,662$:

$$1 > \omega > 0$$

$$\frac{1}{4} < \zeta < \frac{1}{3,91}$$

A componente exponencial decrescente terá uma constante de tempo variando entre:

$$\frac{1}{2} > \zeta_e > \frac{1}{2,18}$$

onde o valor 2,18 foi obtido pela aplicação da propriedade 37.1 da referência [16], a qual fornece:

$$\sum \text{raízes} = -2 \times 3,91 + s = -10$$

$$\text{logo } s = -2,18$$

Para $-1,11 \leq K \leq -0,662$ teremos uma resposta exponencial decrescente oriunda da adição de três componentes exponenciais que terão as suas constantes de tempo variando nos seguintes intervalos conforme o valor de K aumenta desde -1,11 até -0,662:

$$\frac{1}{4,72} \leq \zeta_e \leq \frac{1}{3,91}$$

$$\frac{1}{2,64} > \zeta_e \geq \frac{1}{3,91}$$

$$\frac{1}{2,64} \leq \zeta_e \leq \frac{1}{2,18}$$

onde o valor 4,72 foi obtido da aplicação de:

$$\sum \text{raízes} = -2 \times 2,64 + s = -10$$

Para $-32,9 < K < -1,11$ teremos uma resposta amortecida oscilatória devido à existência de duas componentes, uma oscilatória amortecida e outra exponencial. A componente oscilatória terá uma frequência variando inicialmente de 0

até 1,22, diminuindo posteriormente à medida que K diminui até 0,33, valores estes obtidos do lugar das raízes; e uma constante de tempo da envolvente com a seguinte variação correspondente:

$$\frac{1}{2,64} < \zeta < \frac{1}{0}$$

A componente exponencial será decrescente com uma constante de tempo variável de acordo com a variação de K dada por:

$$\frac{1}{4,72} > \zeta_e > \frac{1}{10}$$

onde o valor 10 corresponde ao ponto em que $K = -32,9$, obtido pela aplicação da propriedade 37.1 referenciada anteriormente.

Finalmente, para $K < -32,9$ o sistema será instável pois para $K = -32,9$ teremos uma resposta oscilatória devido à adição de uma componente senoidal mantida com uma exponencial decrescente. Já para $-44,0 < K < -32,9$ teremos uma componente oscilatória crescente adicionada a uma exponencial decrescente e para $K < -44,0$ teremos a composição de tres exponenciais sendo uma delas obrigatoriamente crescente responsável pela instabilidade do sistema.

b. Valores Positivos de K

Para qualquer valor de K positivo, o sistema será estável, apresentando uma resposta oscilatória amortecida em conjunto com uma resposta exponencial decrescente. A componente oscilatória terá a seguinte variação de frequência, bem como a constante de tempo da envolvente para um aumento do ganho:

$$1 < w < \infty$$

$$\frac{1}{4} > \zeta > \frac{1}{4,5}$$

onde o valor 4,5 foi obtido com aplicação da propriedade 37.1, a qual resulta:

$$\sum \text{raízes} = 2 \times s - 1 = -10$$

A componente exponencial decrescente terá a seguinte variação da sua constante de tempo de acordo com o aumento de K:

$$\frac{1}{2} < \zeta_e < 1$$

Fig. 12 - Análise pelo lugar das raízes

Fig. 12.1 - Uso da escala decimal

Fig. 12.2 - Uso da escala mista

***** ZEROS *****

-1.000000 + J 0.000000

***** POLQS *****

-4.000000 - J 1.000000

-4.000000 + J 1.000000

-2.000000 + J 0.000000

COEFICIENTES DO POLINOMIO PARA
DETERMINACAO DOS PONTOS MULTIPLOS

COEFICIENTE 1	-0.1000000E+01
COEFICIENTE 2	0.2000000E+02
COEFICIENTE 3	0.1300000E+02
COEFICIENTE 4	0.2000000E+01

RAIZES OBTIDAS PELO METODO DA CONTINUACAO

RAIZ 1	0.4846205E-01 + J	0.0000000E+00
RAIZ 2	-0.3909240E+01 + J	0.0000000E+00
RAIZ 3	-0.2639222E+01 + J	0.0000000E+00

***** PONTO MULTIPLO *****

GANHO

VALOR DE Q

0.4846205E-01 + J	0.0000000E+00	-0.3397629E+02	2
-0.3909240E+01 + J	0.0000000E+00	-0.6616727E+00	2
-0.2639222E+01 + J	0.0000000E+00	-0.1112040E+01	2



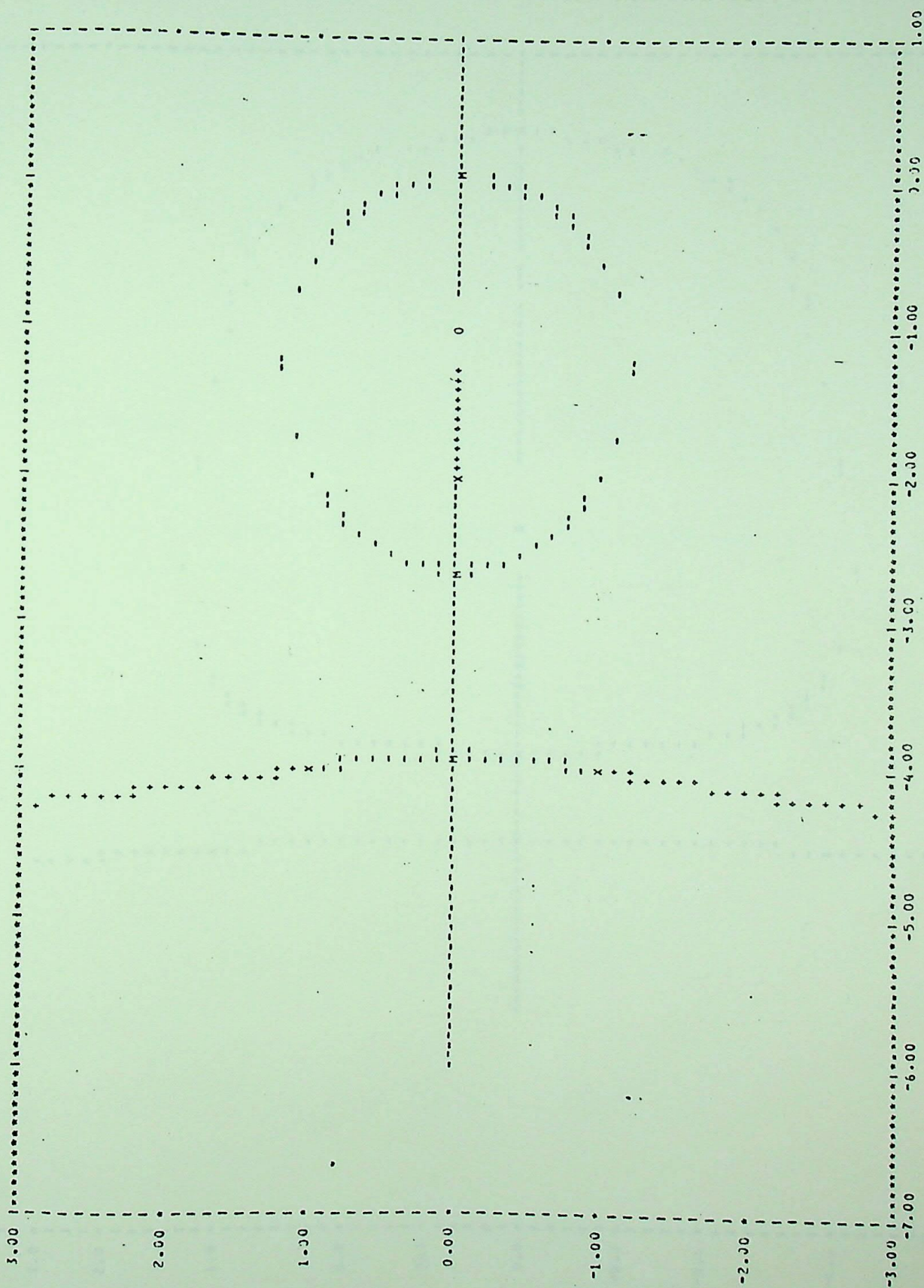
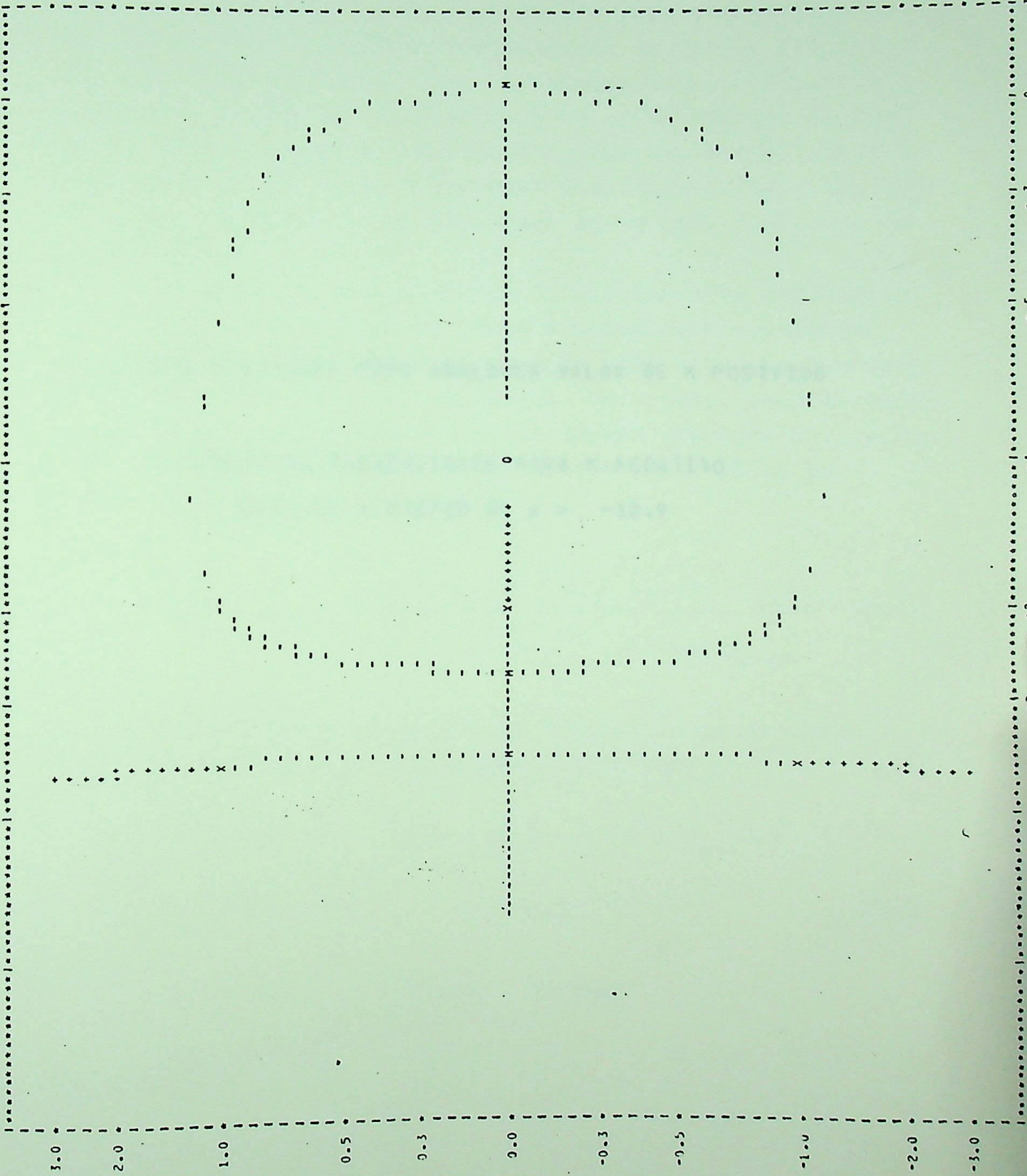


Fig. 12.1

Fig. 12.2



9. O LUGAR DAS RAÍZES EM FUNÇÃO DE QUALQUER PARÂMETRO

Na referência [10] este tópico é apresentado de uma maneira geral, onde o lugar das raízes pode ser construído para um sistema de qualquer estrutura e em função de qualquer parâmetro. Nos capítulos anteriores este parâmetro era o ganho da função de transferência de malha aberta. Vejamos o caso em que o sistema apresenta apenas uma malha, que é o caso estudado aqui, e queremos construir o lugar das raízes para a variação de um polo real ou um zero real para um valor fixo de K .

A função de transferência do sistema deve ser mantida tal a fim de apresentar os zeros e polos correspondentes.

C SISTEMA É ESTÁVEL PARA QUALQUER VALOR DE K POSITIVO

Para isso vamos considerar a função de transferência de malha aberta expressa no capítulo 4, ou

LIMITE DE ESTABILIDADE PARA K NEGATIVO

INSTÁVEL A PARTIR DE $K = -32.9$

$$G(s) = \frac{K(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_m)}{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_n)} \quad (38)$$

O denominador da função de transferência de malha fechada $T(s)$ definido anteriormente é dado por

$$D(s, p_i) = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_{n-1}) + K(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m) \quad (39)$$

Colocado p_i em evidência obtemos

$$D(s, p_i) = (s - p_i) \Delta(s, p_i)$$

onde:

9. O LUGAR DAS RAÍZES EM FUNÇÃO DE QUALQUER PARÂMETRO

Na referência [16] este tópico é apresentado de uma maneira geral, onde o lugar das raízes pode ser construído para um sistema de qualquer estrutura e em função de qualquer parâmetro. Nos capítulos anteriores este parâmetro era o ganho da função de transferência de malha aberta. Vejamos o caso em que o sistema apresenta apenas uma malha, que é o caso estudado até aqui, e queremos construir o lugar das raízes para a variação de um polo real ou um zero real para um valor fixo de K .

A função de transferência do sistema deve ser manipulada a fim de apresentar os zeros e polos correspondentes aos polinômios $A(s)$ e $B(s)$ da equação (20) para que a programação elaborada possa ser utilizada. Para isto, consideremos a função de transferência de malha aberta expressa no capítulo 4, onde desejamos ter como parâmetro variável um polo, digamos o polo p_i , resultando:

$$G(s) H(s) = \frac{K (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_i)(s - p_1) \dots (s - p_{n-1})} \quad (58)$$

O denominador da função de transferência de malha fechada $T(s)$ definido anteriormente é dado por:

$$g(s, p_i) = (s - p_i)(s - p_1) \dots (s - p_{n-1}) + K (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_n) \quad (59)$$

Colocando p_i em evidência obtemos:

$$g(s, p_i) = C(s) - p_i D(s)$$

onde:

$$C(s) = s(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_{n-1}) + \\ + K(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)$$

$$D(s) = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_{n-1})$$

Uma vez fixado o valor do ganho para o qual se deseja analisar o comportamento do sistema face a variação do polo p_i , as raízes de $C(s)$ serão os polos e as de $D(s)$ serão os zeros da nova configuração básica associada.

Para a determinação das raízes de $C(s)$, quando a ordem deste polinômio for elevada, o método desenvolvido no capítulo 3 pode ser utilizado, ou poderia ser construído um lugar das raízes auxiliar conforme é mostrado no capítulo 6 da referência [16].

Uma vez determinadas as raízes de $C(s)$ e $D(s)$, o lugar das raízes de $T(s)$ é definido como o lugar geométrico dos polos de $T(s)$, o que corresponde às raízes de $g(s, p_i) = 0$, quando p_i varia de $-\infty$ a $+\infty$. Porém, como o sinal de p_i é negativo, os ramos indicados com o símbolo "+" no diagrama construído pela impressora do computador correspondem às variações negativas de p_i , os ramos indicados com o símbolo "-" correspondem às variações positivas de p_i , ao se utilizar a mesma programação anteriormente elaborada. Isto também pode ser observado através da comparação de $g(s, p_i)$ com a função $g(s, K)$ enunciada no capítulo 4, obtendo-se:

$$B(s) = C(s)$$

$$A(s) = D(s) \tag{60}$$

$$K = -p_i$$

Logo, após fatorado os polinômios $C(s)$ e $D(s)$, a programação elaborada é utilizada normalmente, sem qualquer modificação, bastando considerar o afirmado em (60) para verificação do

comportamento do sistema.

Caso desejássemos construir o lugar das raízes em função da variação de um zero real, seria utilizado o mesmo raciocínio anterior, colocando-se em evidência a raiz z_i em cuja variação se está interessado, tomando-se o cuidado de que neste caso, ao se especificar o valor de z_i após a obtenção do lugar das raízes, para uma determinada análise, é imprescindível levar em consideração o valor deste zero real.

Exemplo: Seja a mesma função de transferência do exemplo anterior, onde estamos interessados na variação do polo inicialmente fixado em -2 . Supondo que o valor de K foi determinado e vale -5 , temos que inicialmente manipular a seguinte função de transferência:

$$G(s) H(s) = \frac{-5(s+1)}{(s-p_i)(s^2+8s+17)}$$

Para um sistema com realimentação unitária, $H(s) = 1$, obtem-se a seguinte função de transferência de malha fechada:

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{KA(s)}{B(s) + KA(s)} = \\ &= \frac{-5(s+1)}{(s-p_i)(s^2+8s+17) - 5(s+1)} \end{aligned}$$

onde $\frac{KA(s)}{B(s)} \triangleq G(s)$

logo, $C(s) = s^3 + 8s^2 + 12s - 5$

$$D(s) = s^2 + 8s + 17$$

Utilizando o programa para determinação das raízes de um polinômio pelo método da continuação, obteve-se as raízes do polinômio $C(s)$ indicadas na figura 13.

RAIZES OBTIDAS PELO MÉTODO DA CONTINUAÇÃO

```

R ( 1 ) =  C.3375173E+00 +  0.0000000E+00 I
R ( 2 ) = -0.5770162E+01 +  0.0000000E+00 I
R ( 3 ) = -0.2567355E+01 +  0.0000000E+00 I

```

Fig. 13 - Apresentação das raízes de $C(s)$

As raízes de $D(s)$ já são conhecidas e utilizando-se as relações indicadas em (60), o lugar das raízes é plotado conforme vemos na figura 14. Deve-se lembrar que devido ao sinal negativo de p_i , a indicação dos ramos no lugar das raízes está com sinal trocado.

Para uma entrada impulsiva unitária, com $K = -5$, tem-se o seguinte comportamento para o sistema:

O sistema é estável para $-\infty < p_i < -0,3$ sendo que, para $-1,16 < p_i < -0,3$ o sistema apresenta uma resposta puramente exponencial, composta pela soma de três exponenciais. Para $p_i < -1,16$, o sistema terá uma resposta oscilatória amortecida mais uma exponencial decrescente. Logo, a medida que o valor do polo diminui, a constante de tempo da resposta do sistema também diminui pois temos um ramo caminhando para a esquerda, o que corresponde a um valor decrescente de $|1/\sigma_i|$ para a componente exponencial, o mesmo ocorrendo para a componente oscilatória. O valor de p_i é limitado em relação ao elemento que o produz. Por exemplo, se é devido à variação da capacitância de um condensador, existe um limitante para o seu valor; embora tenha sido observado que quanto menor fosse o seu valor, melhor seria a resposta do sistema.

Para $K = -5$ e $p_i = -2$, ao superpormos os dois luga-

res das raízes obtidos, ou seja, as figuras 12.1 e 14, teremos nos cruzamentos dos ramos em que $j\omega = 0$, os dois polos de $T(s)$ para estes valores fixos dos parâmetros variáveis. Isto é possível devido as escalas utilizadas nos dois gráficos serem iguais. Não é possível obter diretamente o terceiro polo pois trata-se de um polo real.

Da superposição dos diagramas obteve-se os seguintes valores aproximados para os polos:

$$p_1 = -1,87 + j 1,0$$

$$p_2 = -1,87 - j 1,0$$

Quanto ao terceiro polo pode-se dizer simplesmente que o seu valor é menor do que $-5,8$, mas ao se utilizar a propriedade 37.1 da referência [16] obtem-se:

$$p_3 = -10 + 2 \times 1,87$$

$$p_3 = -6,26$$

Se ao invés de utilizarmos os diagramas obtidos, resolvessemos o polinômio do denominador de $T(s)$ quando se considera $K = -5$ e $p_1 = -2$, as raízes obtidas estão bem próximas dos valores encontrados, o que vem a confirmar a validade da metodologia empregada.

Se no lugar de $K = -5$ fosse utilizado outro valor, por exemplo, $K = -10$, o lugar das raízes obtido em função da variação do mesmo polo anterior é mostrado na figura 15. Nota-se agora que o sistema é estável para $p_1 < -0,6$. A medida que diminuimos o valor de K , o valor limite de estabilidade para o polo p_1 deve aumentar em módulo pois quando $p_1 = -2$ o valor limite vale $-32,9$ conforme obtido no lugar das raízes da figura 12.2.

Fig. 14 - Lugar das raízes em função de um polo
para $K = -5$

***** ZEROS *****

-4.000000 + J 1.000000
-4.000000 - J 1.000000

***** POLOS *****

0.337517 + J 0.000000
-2.567355 + J 0.000000
-5.770162 + J 0.000000

COEFICIENTES DO POLINOMIO PARA
DETERMINACAO DOS PONTOS MULTIPLOS

COEFICIENTE 1	0.2440000E+03
COEFICIENTE 2	0.2820000E+03
COEFICIENTE 3	0.1030000E+03
COEFICIENTE 4	0.1600000E+02
COEFICIENTE 5	0.1000000E+01

RAIZES OBTIDAS PELO METODO DA CONTINUACAO

RAIZ 1	-0.1558724E+01 + J	0.0000000E+00
RAIZ 2	-0.5155930E+01 - J	0.3365183E+01
RAIZ 3	-0.5155930E+01 + J	0.3365184E+01
RAIZ 4	-0.4129417E+01 + J	0.0000000E+00

***** PONTO MULTIPLO *****

	GANHO	VALOR DE Q
-0.1558724E+01 + J 0.0000000E+00	0.1157331E+01	2
-0.4129417E+01 + J 0.0000000E+00	-0.1125993E+02	2

LIMITE DE ESTABILIDADE PARA K POSITIVO

ESTAVEL A PARTIR DE $K = 0.3$

O SISTEMA E INSTAVEL PARA QUALQUER VALOR DE K NEGATIVO

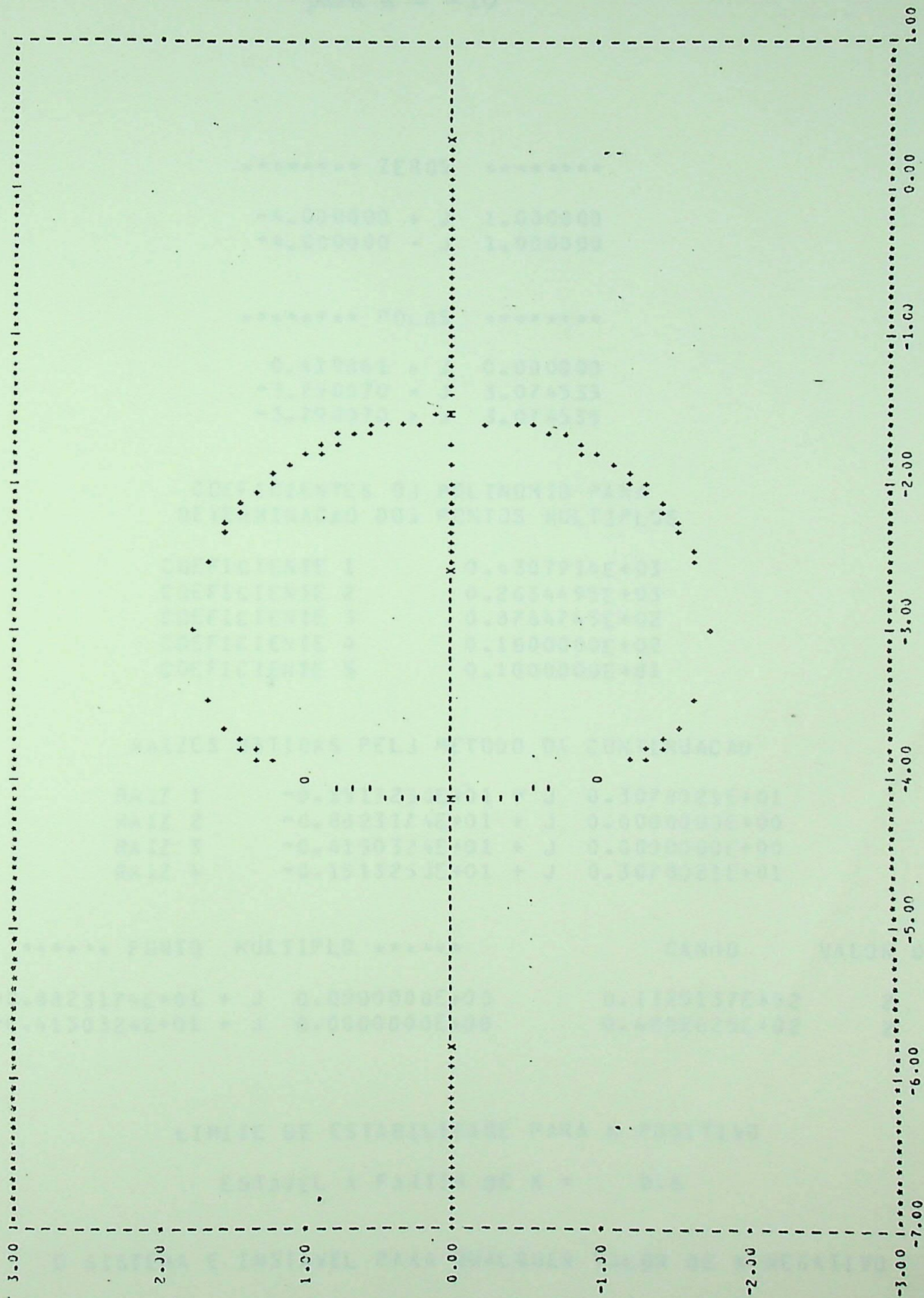


Fig. 15 - Lugar das raízes em função de um polo
para $K = -10$

***** ZEROS *****

-4.000000 + J 1.000000
-4.000000 - J 1.000000

***** POLOS *****

0.419861 + J 0.000000
-3.790070 - J 3.074535
-3.790070 + J 3.074535

COEFICIENTES DO POLINOMIO PARA
DETERMINACAO DOS PONTOS MULTIPLOS

COEFICIENTE 1 0.4307914E+03
COEFICIENTE 2 0.2634495E+03
COEFICIENTE 3 0.8764745E+02
COEFICIENTE 4 0.1600000E+02
COEFICIENTE 5 0.1000000E+01

RAIZES OBTIDAS PELJ METODO DA CONTINUACAO

RAIZ 1 -0.1513250E+01 - J 0.3078021E+01
RAIZ 2 -0.8823174E+01 + J 0.0000000E+00
RAIZ 3 -0.4150324E+01 + J 0.0000000E+00
RAIZ 4 -0.1513250E+01 + J 0.3078021E+01

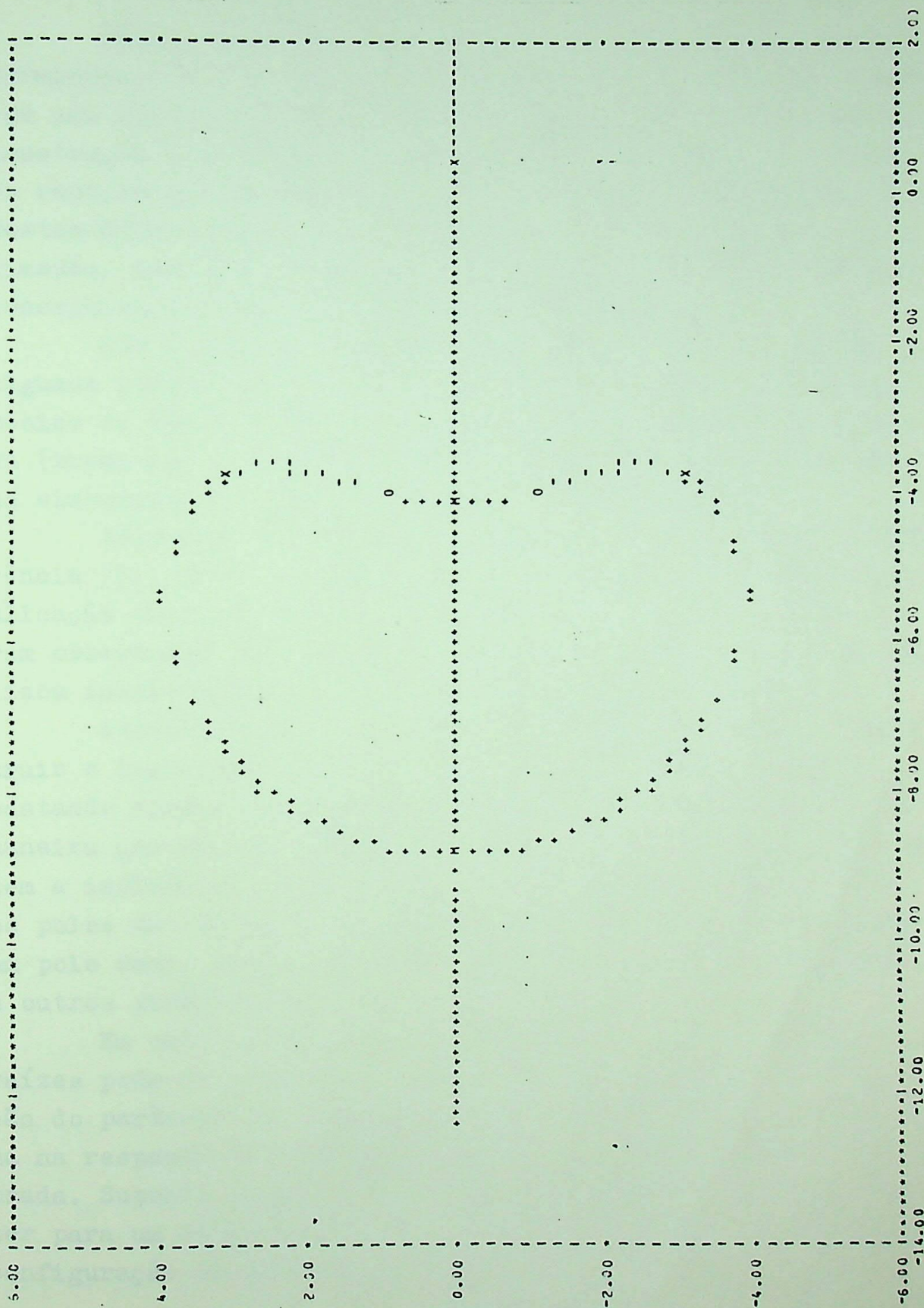
***** PONTO MULTIPLO *****

	GANHO	VALOR DE Q
-0.8823174E+01 + J 0.0000000E+00	0.1325137E+02	2
-0.4150324E+01 + J 0.0000000E+00	0.4282625E+02	2

LIMITE DE ESTABILIDADE PARA K POSITIVO

ESTAVEL A PARTIR DE $K = 0.6$

O SISTEMA E INSTAVEL PARA QUALQUER VALOR DE K NEGATIVO



10. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Vários lugares das raízes foram construídos para determinadas funções de transferência, onde em cada uma tinha-se uma particularidade diferente, a qual era contornada na construção do diagrama, mostrando-se a eficiência do método da continuação aplicado nesta tarefa. Com a utilização de Newton-Raphson em todos os pontos obtidos por cálculos aproximados, como por exemplo, no contorno de um ponto múltiplo, conseguiu-se melhorar a convergência do método.

Com o emprêgo de [22] e [23] foi possível elucidar algumas idéias que não estavam totalmente claras no artigo básico de Pan e Chao [5], como no caso dos pontos de entrada (break-in) e de saída (break-away). Também contribuíram na elaboração de alguns dos exemplos apresentados.

Alguns erros foram observados no artigo básico, referência [5], sendo corrigidos e apresentados para futura publicação conforme mostra a referência [24]. Estes erros foram observados pela não convergência do método quando se utilizou inicialmente as fórmulas apresentadas no artigo.

Através de um exemplo foi mostrado que pode-se construir o lugar das raízes em função de qualquer parâmetro, bastando apenas reescrever a função de transferência de tal maneira que resulte dois polinômios, onde em um deles não se tem a influência do parâmetro variável, cujas raízes serão os polos da configuração básica. Isto só foi realizado para um polo real, porém, com a referência [16] pode-se estender a outros parâmetros.

Em outro exemplo viu-se como a partir do lugar das raízes pode-se analisar qualitativamente o efeito da variação do parâmetro em função do qual foi construído o diagrama na resposta do sistema perante um determinado sinal de entrada. Supondo o ganho como parâmetro variável, pode-se obter para um determinado valor fixo de K , todos os polos da configuração de análise, bastando mandar imprimir todos os

valôres calculados pelas fórmulas iterativas. Isto seria útil na determinação da resposta temporal de um sistema, onde se adicionaria os zeros e os polos ocasionados pelo sinal de entrada à configuração de análise então obtida.

Tem-se portanto um programa de amplas aplicações na construção do lugar das raízes, permitindo o traçado do diagrama para variação de um parâmetro desde $-\infty$ até $+\infty$, desde que os polinômios do numerador e denominador da função de transferência de malha aberta possam ser fatorados.

Foram observadas algumas limitações no uso de determinados valôres de alguns parâmetros variáveis da programação elaborada. Por exemplo, para um valor elevado de HH, teria-se a construção do diagrama com poucos pontos, porém com uma péssima precisão, podendo até cessar a convergência do método. Já para a construção do lugar das raízes com polos muito distantes, por exemplo, para a função de transferência utilizada no capítulo 7, se o valor de HH fosse muito pequeno, seriam calculados muitos pontos, o que implicaria num aumento no tempo de computação. Logo, para cada função de transferência o valor de HH é adotado em torno de 0,1, sendo que os valôres de VMAX e VMIN serão responsáveis pelo seu aumento ou não. Estes valôres são estipulados em função da precisão que se deseja obter na construção do lugar das raízes, do tempo gasto na computação e das distâncias entre os polos e zeros da configuração básica associada.

Na maioria dos casos, a escolha de HE em função de HH pela verificação da diferença entre os dois últimos valôres gerados pela fórmula iterativa foi útil, pois melhorou a precisão em certos trechos do diagrama e aumentou a velocidade em outros, reduzindo consideravelmente o tempo de computação. Porém, em uma determinada função, devido à propagação de erros, na geração dos pontos pertencentes a dois ramos paralelos ao eixo imaginário e simétricos entre si, à medida que os valôres calculados se afastavam do eixo σ , a parte imaginária destes valôres sofriam oscilações, o mesmo ocorrendo

em menor escala para a parte real que deveria ser constante e no caso, igual a $-1,0$. Logo, a convergência do método é dificultada, devendo-se alterar o valor de HE quando isto ocorrer. Também se observou que quando um ramo do lugar das raízes descreve uma trajetória curva que não corta o eixo real, nas imediações do ponto onde ocorre a mudança de direção tem-se baixa convergência provocada pelo valor corrente de HE.

11. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- |1| - P. M. Anderson, A. A. Fouad, "Power System Control and Stability", Iowa State University Press, 1977
- |2| - J. Fitzner, C. P. Oradat, "Determining Power System Stabilizer Parameters by the Root locus Method", Control of P. S., pg. 44 - 48, 1977
- |3| - Raymond Decarlo, R. Saeks, "A Root Locus Technique for Interconnected Systems", IEEE Trans. on S., vol SMC-19, nº1, pg. 53 - 55, 1979
- |4| - E. L. Busby, J. D. Hurley, "Dynamic Stability Improvement at Monticello Station", IEEE Trans. on P. A. and S., vol. PAS-98, nº8, pg. 889 - 901, 1979
- |5| - C. T. Pan, K. S. Chao, "A Computer-Aided Root-Locus Method", IEEE Trans. on a Control, vol. AC-23, nº5, pg. 856 - 860, 1978
- |6| - F. A. Ficken, "The Continuation Method for Functional Equations", Comm. Pure Appl. Math, pg. 435 - 456, 1951
- |7| - G. H. Meyer, "On Solving Nonlinear Equations with a One-Parameter Operator Imbedding", SIAM J. Numer. A., nº5, pg. 739 - 752, 1968
- |8| - E. Wassertrom, "Numerical Solutions by the Continuation Methods", SIAM Rev., vol. 15, nº1, pg. 89 - 119, 1973
- |9| - K. S. Chao, R. Saeks, "Continuation Methods in Circuit Analysis", Proc. IEEE, vol. 65, nº 8, pg. 1187 - 1194, 1977
- |10| - F. H. Branin, "Widely Convergent Method for Finding Multiple Solutions of Simultaneous Equations", IBM J. Res. Dev., vol. 16, nº5, pg 504 - 522, 1972

- |11| - C. G. Broyden, "A New Method of Solving Nonlinear Simultaneous Equations", Comp. J. , nº12, pg 94 - 99, 1969
- |12| - D. F. Davidenko, "On Approximate Solution of Systems of Nonlinear Equations", Dokl. A. Nauk SSSR, vol. 88, pg. 601 - 602, 1953
- |13| - L. O. Chua, Ushida, "A Switching-Parameter Algorithm for Finding Multiple Solutions of Nonlinear Resistive Circuits", vol. 4, pg. 215 - 239, 1976
- |14| - K. S. Chao, D. K. Liu, C. T. Pan, "A Systematic Search Method for Obtaining Multiple Solutions of Simultaneous Nonlinear Equations" IEEE Trans. on C. and S., vol. CAS-22, nº9, pg. 748 - 753, 1975
- |15| - R. Fletcher, "Generalized Inverse Methods for the Best Least Squares Solutions of Systems of Nonlinear Equations", Comp. J., vol. 10, pg. 392 - 399, 1968
- |16| - Fregosi, Feinstein, Caldeira, "Enfoque Clássico da Teoria de Contrôles: Método do Lugar das Raízes", vol. 2, Campus/Eletróbrás/EFEL, 1980
- |17| - Walter Rudin, "Real and Complex Analysis", McGraw-Hill Book Company, 1966
- |18| - IBM Application Program, "1130 Ascic Scientific Subroutine Package", Programmer's Manual
- |19| - T. Pacitti, Atkinson, "Programação e Métodos Computacionais", Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., vol. 2, 1976
- |20| - S. D. Conte, "Elementos de Análise Numérica", Editora Globo S.A., 1965
- |21| - Fregosi, Ricciulli, "Uso de escalas mixtas y del método de continuacion para la graficación de lugares de las raíces por computador", VIIº Simposio Nacional de Control Automático, 1980

- |22| - F. H. Haven, "Automatic Control Engineering", cap. 7, McGraw-Hill Book Company, 2ª ed., 1968
- |23| - K. Ogata, "Modern Control Engineering", cap. 8, Prentice-Hall, 1970
- |24| - D. Ricciulli, A. Fregosi, "Comments on 'A Computer-Aided Root-Locus Method' ", publicação aprovada no IEEE Trans. A. C. para o mes de abril de 1981

12. APÊNDICES

Apêndice 1 - Variáveis Utilizadas na Programação

1.1 - Variáveis Inteiras:

- IAP - número de polos múltiplos
- IAZ - número de zeros múltiplos
- ICO - número de coeficientes do polinômio da equação (12)
- ICOD - número de coeficientes do polinômio $B(s)$
- ICON - número de coeficientes do polinômio $A(s)$
- IDCO - número de coeficientes do polinômio da equação (40),
desconsiderando os polos e zeros múltiplos
- IQ(I) - vetor dos valores de q dos pontos múltiplos
- IRP - número de polos simples
- IRZ - número de zeros simples
- KK(L) - vetor indicativo da passagem por um ponto múltiplo
para evitar-se a reaproximação deste
- LAP(I) - vetor das multiplicidades dos polos repetidos
- LAZ(I) - vetor das multiplicidades dos zeros repetidos
- LL - número utilizado para selecionar as expressões, on-
de para $K > 0$, LL vale 0 e para $K < 0$, LL vale 1
- LLN - número de valores limites de estabilidade para $K < 0$
- LLP - número de valores limites de estabilidade para $K > 0$
- M - número de polos da equação (20)
- MJ - número utilizado para impressão ou não (neste caso,
 $MJ = 1$) dos valores obtidos pelas equações (29) e (30)
- MPLOT - número indicativo da variação de K desejada. Para es-
te valor igual a um, o lugar das raízes é construído
apenas para $K > 0$ e caso contrário é construído para
 $-\infty < K < +\infty$
- N - número de zeros da equação (20)
- NC - número de raízes a serem determinadas
- NCR - número de pontos múltiplos determinados
- NIT - número de iterações para determinação das raízes, tal
que, $NIT = 1/H$
- NU - número máximo de iterações estipulado para o método
de Newton-Raphson para refinamento das raízes

1.2 - Variáveis Reais

- AK(J) - vetor dos ganhos
- AKN(I) - vetor dos valores limites de estabilidade para $K \leq 0$
- AKP(I) - vetor dos valores limites de estabilidade para $K > 0$
- APRI - valor para aproximação da parte imaginária do ponto múltiplo
- APRR - valor para aproximação da parte real do ponto múltiplo
- CO(I) - vetor dos coeficientes do polinômio correspondente à equação (40), desconsiderados os valores múltiplos
- COD(I) - vetor dos coeficientes do polinômio $B(s)$
- CON(I) - vetor dos coeficientes do polinômio $A(s)$
- EPS - diferença adotada para convergência entre dois valores no método de Newton-Raphson
- FI - valor correspondente ao ângulo ϕ da equação (38) ou (39)
- GA(I) - vetor dos valores dos ganhos nos pontos múltiplos
- H - valor do intervalo h utilizado na equação (18)
- HE - valor correspondente a HH , alterado no decorrer da programação
- HH - valor inicial do intervalo h utilizado na equação (29) ou (30)
- SAR - parte real de um ponto $SA(J)$
- SAI - parte imaginária de um ponto $SA(J)$
- RO - valor correspondente ao módulo ρ da equação (37)
- VMAX - valor máximo permitido entre dois pontos consecutivos obtidos pela equação (29) ou (30)
- VMIN - valor mínimo permitido entre dois pontos consecutivos obtidos pela equação (29) ou (30)
- X(I) - vetor das partes reais de $SA(J)$ para $K \leq 0$
- XD(I) - vetor das partes reais de $SA(J)$ para $K > 0$
- XK(I) - vetor das constantes utilizadas no método de Runge-Kutta de 4ª ordem
- XMAX - valor máximo para $\text{Re}[SA(J)]$ obtida
- XMIN - valor mínimo para $\text{Re}[SA(J)]$ obtida

Y(I) - vetor das partes imaginárias de SA(J) para $K \leq 0$
YD(I) - vetor das partes reais de SA(J) para $K \geq 0$
YMIN - valor mínimo para $\text{Im}[SA(J)]$ obtida

1.3 - Variáveis Complexas

CAP(I) - vetor dos valores opostos aos polos múltiplos
CAZ(I) - vetor dos valores opostos aos zeros múltiplos
COC(I) - vetor dos coeficientes do polinômio correspondente à equação (12)
CRAP(LX) - vetor dos valores opostos ao polo múltiplo quando este for complexo
D(I) - vetor dos coeficientes do polinômio correspondente ao denominador da expressão (15)
DS - valor correspondente a Δs da equação (53)
E(I) - vetor dos coeficientes do polinômio correspondente ao numerador da expressão (15)
RA(I) - vetor das raízes para formação da base correspondente à equação (12)
RAP(I) - vetor dos valores opostos aos polos
RAZ(I) - vetor dos valores opostos aos zeros
ROA - valor correspondente ao resultado da equação (37)
RP(I) - vetor dos valores opostos aos polos simples
SA(J) - vetor dos pontos gerados para construção do lugar das raízes
SB - diferença entre dois pontos consecutivos obtidos com uso da equação (29) ou (30)
Z(K) - vetor das raízes determinadas através da integração da expressão correspondente à equação (15)
ZM(I) - vetor dos pontos múltiplos

Apêndice 2 - Programa Principal

```

HLRROUGHS B1800/B1700 FORTRAN COMPILER , MARK 6.1 RC 01/2C/78 11 44 ,
PROF      /LUCFAB /RICLIULLI

      I=NO PAP
      FILE 6=LP,UNIT=PRINTER,UNLABELED
0002      DIMENSION AKP(10),AKN(10), ZA(10),ZR(10),CO(10),IO(10),ADS(20),30:
0002      *S(20),ALOS(20),BDDS(20),ZAA(20),ZBB(20),ZCC(20),ZE(20),LAP(10),AK(
0002      *3000),LAZ(10),XD(3000),YD(3000),X(3000),Y(3000),RNP(10),KK(10)
0002      *,XPL(10),YPL(10),XPR(10),YPR(10),XPH(10),YPH(10),GA(10),AUX(10)
0003      *COMPLEX RAZ(10),RAP(10),RA(10),COC(10),Z(10),C(10),XK(4),E(10),RN,
0003      *P,RO,ZH(10),REN,Z),RED,DR(10),CAP(10),RP(10),SA(3000),SG,BS, AS,B:
0003      *DX,ADX,ZX,ASP,RSP,CA,ROA,US,RZ(10),CAZ(10), CRAP(10),CRNP(10)
0004      *COMMON CUD(10),ICCD,CON(10),ICON,COAD(10),ICQAD,C08C(10),IC08D
0005      *DATA PA /3.1415927/
0006      TEMPO=TIME(1)
0007      READ(5,5)M,N,XMIN,YMIN,XMAX,HM,H,EPS,NU,NIT,VMAX,VMIN,MPLUT,MJ
0008      *5 FORMAT(4I3,4F6.2,2F8.6,F10.8,2I3,2F7.4,2I1)
0009      READ(5,40)(RAP(I),I=1,N)
0010      10 FORMAT(4F10.6)
0011      IAZ=0
0012      IRZ=0
0013      IF(M.EQ.0)GO TO 17
0015      READ(5,41)(RAZ(I),I=1,M)
0016      11 FORMAT(4F10.6)
0017      CALL RPRAC(M,RAZ,CAZ,IAZ,LAZ,RZ,IRZ)
0018      WRITE(6,12)
0019      12 FORMAT(//,32X,"***** ZEFOS *****",/)
0020      DO 16 I=1,M
0021      XPR(I)=-REAL(RAZ(I))
0022      YPR(I)=-AIMAG(RAZ(I))
0023      IF(YPR(I).GE.0)GO TO 13
0025      S="-"
0026      AUX(I)=ABS(YPR(I))
0027      GO TO 14
0028      13 S="+"
0029      AUX(I)=XPR(I)
0030      14 WRITE(6,21)XPR(I),S,AUX(I)
0031      16 CONTINUE
0032      17 WRITE(6,18)
0033      18 FORMAT(//,32X,"***** PCLOS *****",/)
0034      DO 22 I=1,N
0035      XPL(I)=-REAL(RAP(I))
0036      YPL(I)=-AIMAG(RAP(I))
0037      IF(YPL(I).GE.0)GO TO 19
0039      S="-"
0040      AUX(I)=ABS(YPL(I))
0041      GO TO 20
0042      19 S="+"
0043      AUX(I)=YPL(I)
0044      20 WRITE(6,21)XPL(I),S,AUX(I)
0045      21 FORMAT(32X,F10.6,1X,A1,1X,"J",F10.6)
0046      22 CONTINUE
0047      CALL POLIN(M,RAZ,CON,ICON)
0048      CALL POLIN(N,RAF,COC,IC0)
0049      CALL C2POL(COAO,IC0AO,CON,ICON)
0050      CALL C2POL(C08D,IC08D,COJ,IC0J)
0051      CALL PRLO(ZA,IOZA,CON,IC0N,C08D,IC08D)
0052      CALL PRLO(ZB,IOZB,COD,IC0D,COAD,IC0AD)
0053      CALL SUBT(CO,IC0C,ZA,IOZA,ZB,IOZB)
0054      WRITE(6,23)
0055      23 FORMAT(//,29X,"COEFICIENTES DO POLINOMIO PARA",//,20X,"DETERMINACAO:
0055      * DOS PUNTOS MULTIPLCS",/)
0056      DO 30 I=1,IDCO
0057      WRITE(6,25)I,CO(I)
0058      25 FORMAT(47X,"COEFICIENTE",12,5X,E15.7)
0059      30 CONTINUE
0060      IAP=0
0061      CALL RPRAC(N,RAF,CAP,IAP,LAP,RP,IRP)
0062      NC=IAZ+IRZ+IAP+IRP-1
0063      IF(IAP.EQ.0)GO TO 33
0065      CALL C4X(CO,IC0C,CAP,IAP,LAP)
0066      33 IF(IAZ.EQ.0) GO TO 35
0066      CALL C4X(CC,IC0C,CAZ,IAZ,LAZ)
0069      35 IF(NC.EQ.1)GO TO 36
0071      IF(NC.EQ.0)GO TO 211
0073      K=1

```



```

0074 : Z(K)=CMPLX(-CO(K)/CO(K+1),0.)
0075 : GO TO 147
:
: C
: C
: C DETERMINACAO DAS FAIZES PELO METODO DA CONTINUACAO
: C
0076 : 36 READ(5,37)(RA(I),I=1,NC)
0077 : 37 FORMAT(4F10.5)
0078 : WRITE(6,38)
0079 : 38 FORMAT(//,25X,"FAIZES ORIGINAIS PELO METODO DA CONTINUACAO",/)
0080 : CALL POLIC(NC,RA,CO,ICO)
0081 : IE=ICO-1
0082 : DO 40 I=1,ICO
0083 : 40 E(I)=CO(I)-CO(I)
0084 : K=1
0085 : 50 Z(K)=-KA(K)
0086 : T=0.
0087 : DO 123 IL=1,NIT
0088 : L=1
0089 : P=Z(K)
0090 : 70 DO 80 I=2,ICO
0091 : 80 O(I)=CO(I)-E(I)+I
0092 : DO 90 I=2,ICO
0093 : 90 O(I-1)=O(I)+O(I-1)
0094 : CALL VAPOL(RN,P,E,ICO)
0095 : CALL VAPOL(RO,P,O,IE)
0096 : XK(L)=RN/RO
0097 : IF(L.EQ.4)GO TO 120
0099 : IF(L.EQ.2)GO TO 100
0101 : T=T+H/L.
0102 : 100 IF(L.EQ.3)GO TO 110
0104 : P=Z(K)+H*XK(L)/2.
0105 : L=L+1
0106 : GO TO 40
0107 : 110 P=Z(K)+H*XK(L)
0108 : L=L+1
0109 : GO TO 40
0110 : 120 Z(K)=Z(K)+H*(XK(1)+2*XK(2)+2*XK(3)+XK(4))/6
0111 : 123 CONTINUE
0112 : K=K+1
0113 : IF(K.GE.NC)GO TO 130
0115 : GO TO 50
:
: C
: C REFINAMENTO DAS FAIZES - METODO DE NEWTON
: C
0116 : 130 CALL REFR(NC,Z,ICO,CO,EP,NU)
0117 : DO 145 I=1,NC
0118 : ZA(I)=REAL(Z(I))
0119 : ZB(I)=AIMAG(Z(I))
0120 : IF(ZB(I).GE.0)GO TO 135
0122 : S="-"
0123 : ZB(I)=ABS(ZB(I))
0124 : GO TO 140
0125 : 135 S="+"
0126 : 140 WRITE(6,142)I,ZA(I),S,ZB(I)
0127 : 142 FORMAT(4X,"RAIZ",I2,4X,E15.7,1X,A1,1X,"J",E15.7)
0128 : 145 CONTINUE
:
: C
: C DETERMINACAO DOS PONTOS MULTIPLOS CUJO K RESULTA REAL
: C
0129 : 147 CALL FPAR(ZM,NCR,Z,NC,GA)
:
: C
: C DETERMINACAO DE Q NO PONTO MULTIPLO
: C
0130 : IF(NCR.EQ.0)GO TO 211
0132 : DO 200 J=1,NCR
0133 : IQ(J)=0
0134 : DO 150 I=1,ICON
0135 : 150 ADS(I)=CON(I)
0136 : IADS=ICON
0137 : DO 160 I=1,ICOO
0138 : 160 BOS(I)=LOD(I)
0139 : IBOS=ICOO
0140 : 170 CALL CLPOL(ADDS,IADDS,ADS,IADS)
0141 : CALL CLPOL(BOS,IEOS,BOS,IEOS)
0142 : CALL PRLO(ZAA,I2AA,ADS,IADS,BOS,IBOS)
0143 : CALL PRLO(ZBB,I2BB,BOS,IBOS,IACS,IAOS)
0144 : CALL SUT(ZCC,I2CC,ZBB,I2BB,ZAA,I2AA)
0145 : CALL PRLO(ZE,I2E,ADS,IADS,ACS,IAOS)
0146 : ZX=ZM(J)
0147 : CALL VAPOL(REN,ZX,ZCC,I2CC)
0148 : CALL VAPOL(REO,ZX,ZE,I2E)
0149 : OR(J)=K/N/RED
0150 : ORR=REAL(OR(J))

```



```
0151 : ORI=AIMAG(ORC(J))
0152 : IF(ABS(LRR)-GE-0.01)GO TJ 195
0154 : IF(ABS(LRI)-GE-0.01)GO TJ 195
0156 : IQ(J)=ILC(J)+1
0157 : DO 180 A=1, IZE
0158 : 180 AOS(I)=AE(I)
0159 : IADS=IALI
0160 : DO 190 A=1, IZCC
0161 : 190 BOS(I)=ACC(I)
0162 : IBOS=IALC
0163 : GO TO 170
0164 : 195 IQ(J)=ILC(J)+1
0165 : 200 CONTINUE
0166 : WRITE(6,201)
0167 : 201 FORMAT(//,18X,"***** PONTO MULTIPLO *****",13X,"CANHO",5X,"VALOR
0167 : : R DE 0"/)
0168 : DO 205 A=1,NCR
0169 : XPM(I)=REAL(ZM(I))
0170 : YPM(I)=AIMAG(ZM(I))
0171 : IF(YPM(I)-GE-0)GO TO 202
0173 : S="+"
0174 : AUX(I)=ABS(YPM(I))
0175 : GO TO 203
0176 : 202 S="-"
0177 : AUX(I)=YPM(I)
0178 : 203 WRITE(6,204)XPM(I),S,AUX(I),GA(I),IQ(I)
0179 : 204 FORMAT(15X,E15.7,1X,A1,1X,"J",E15.7,5X,E15.7,5X,11)
0180 : 205 CONTINUE
: C
: C VERIFICACAO DOS VALORES MAXIMOS ADMITIDOS
: C
0181 : DO 209 A=1,NCR
0182 : IF(ABS(XMIN)-GE-1.4*ABS(AIMAG(ZP(I))))GO TO 207
0184 : YMIN=-1.4*ABS(AIMAG(ZH(I)))
0185 : 207 IF(XMIN-LE-1.4*REAL(ZH(I)))GO TO 208
0187 : XMIN=1.4*REAL(ZP(I))
0188 : 208 IF(XMAX-GE-1.4*REAL(ZH(I)))GO TO 209
0190 : XMAX=1.4*REAL(ZP(I))
0191 : 209 CONTINUE
: C
: C OBTENCAO DOS PONTOS A SEREM PLOTADOS
: C
0192 : 211 LL=0
0193 : 212 DO 215 A=1,NCR
0194 : KK(L)=A
0195 : 215 CONTINUE
0196 : RI=1
0197 : IA=0
0198 : IF(IAP-AE-0)GO TO 330
0200 : I=1
0201 : J=1
0202 : 225 HE=HH+K1
0203 : IF(IAP-AE-0)GO TO 230
0205 : SA(J)=-HP(I)
0206 : AK(J)=0.
0207 : 230 SB=SA(J)
0208 : CALL VAP0(BS,SB,CCD,IC00)
0209 : CALL VAP0(AS,SB,CCN,IC0N)
0210 : CALL VAP0(BOX,SB,C0B0,ICJB0)
0211 : CALL VAP0(ADX,SB,C0AD,ICJAD)
0212 : IF(LL-LL-0)GO TC 232
0214 : SA(J+1)=SA(J)+HE*(BS+AK(J)+AS+AS)/(GOX+AK(J)+ADX)
0215 : GO TO 234
0216 : 232 SA(J+1)=SA(J)-HE*(BS+AK(J)+AS+AS)/(GOX+AK(J)+ADX)
0217 : 234 AK(J+1)=AK(J)+HE
0218 : J=J+1
0219 : SB=SA(J)-SA(J-1)
0220 : RSB=ABS(REAL(SB))
0221 : AISB=ABS(AIMAG(SB))
0222 : APRR=1.3*RSB+0.05
0223 : APRI=1.3*AISB+0.1
0224 : IF(RSB-LI-VMIN-AND-AISB-LI-VMIN) GO TO 536
0226 : IF(RSB-LE-VMAX-OR-AISB-GE-VMAX) GO TO 537
0228 : GO TO 239
0229 : 536 RI=RI+1
0230 : J=J-1
0231 : HE=HH+K1
0232 : GO TO 230
0233 : 537 IF(RI-LE-2)GO TC 538
0235 : RI=RI/2.
0236 : J=J-1
0237 : HE=HH+K1
0238 : GO TO 230
```


(4)

```

0239 : 538 RI=RI-1
0240 : HE=HM*MI
0241 : J=J-1
0242 : GO TO 230
0243 : 539 SAR=REAL(SA(J))
0244 : SAI=AIMAG(SA(J))
      :C
      :C VERIFICACAO SE O PONTO ATINGIU UM ZERO (TERMINO DO RAMO I)
      :C
0245 : IF(M.EQ.0) GO TO 247
0246 : DO 240 L=1,M
0247 : RAZI=AIMAG(RAZ(L))
0248 : RAZR=REAL(RAZ(L))
0249 : IF(ABS(SAR+RAZR)-GT.0.25-GR.ABS(SAI+RAZI)-GT.0.25)GO TO 240
0250 : GO TO 320
0251 :
0252 : 240 CONTINUE
      :C
      :C VERIFICACAO SE O PONTO ATINGIU O LIMITE DOS EIXOS
      :C
0254 : 247 IF(SAR.LE.XMAX)GO TO 320
0255 : IF(SAR.LE.XMIN)GO TO 320
0256 : IF(ABS(SAI).GE.ABS(YMIN)) GO TO 320
      :C
      :C VERIFICACAO SE APROXIMAMOS DE UM PONTO MULTIPLO
      :C
0260 : IF(NCR.EQ.0)GO TO 230
0261 : DO 250 L=1,NCR
0262 : IF(KK(L).EQ.L)GO TO 250
0263 : ZR=REAL(ZH(L))
0264 : ZI=AIMAG(ZH(L))
0265 : IF(ABS(ZR-SAR).LE.APRR.AND.ABS(ZI-SAI).LE.APRI)GO TO 260
0266 : 250 CONTINUE
0267 : GO TO 230
0268 : 260 KK(L)=L
      :C
      :C VERIFICACAO DE C AO PONTO MULTIPLO
      :C
0272 : IF(MOD(100(L),2))390,270,390
      :C
      :C MUDAR A DIRECAO DE PLOTAGEM
      :C
0273 : 270 ZX=CMPLX(0.,-1.)
0274 : ACR=0.1
0275 : CALL ANHED(SAR,ARRER)
0276 : CALL ANHED(SAI,ARREI)
0277 : CALL ANGLE(SB,ANG,ARRER,ARREI)
0278 : SBR=CEB(ANG)
0279 : SBI=SIN(ANG)
0280 : J=J+1
0281 : SA(J)=ZH(L)+ACR*CMPLX(SBR,SEI)*ZX
0282 : AX(J)=HA(L)+HE/2
0283 : CALL CUAEN(SA,AX,J)
0284 : GO TO 230
      :C
      :C TERMINO DA PLOTAGEM DE UM RAMO
      :C
0285 : 320 IF(L.EQ.N)GO TO 400
0286 : J=J+1
0287 : RI=1
0288 : DO 324 L=1,NCR
0289 : KK(L)=0
0290 : 324 KK(L)=0
0291 : IF(IAP.EQ.0)GO TO 325
0292 : IF(K.LL.IAP)GO TO 360
0293 : IF(IA.LL.IRP)GO TO 380
0294 : 325 I=I+1
0295 : GO TO 225
      :C
      :C POLOS REPETIDOS - DETERMINACAO DAS CONDICAOES INICIAIS E PONTOS
      :C
0299 : 330 I=1
0300 : K=1
0301 : J=1
0302 : 340 CA=-CAP(K)
0303 : CALL VAPD(ASP,CA,CON,ICON)
0304 : IF(IAP.EQ.1)GO TO 345
0305 : LX=0
0306 : DO 343 L=1,M
0307 : IF(REAL(RAP(L)).EQ.REAL(CAP(K)).AND.AIMAG(RAP(L)).EQ.AIMAG(CAP(K)))
0308 : ) GO TO 343
0309 : LX=LX+1
0310 : CRAP(L)=RAP(L)
0311 : 343 CONTINUE
0312 : 343 CALL PULIC(LX,CFAP,CRNP,IRNP)
0313 :

```


(5)

```

0314 : CALL VAO(BSP,CA,CRNP,IRNP)
0315 : GO TO 348
0316 : 345 CALL PUL(IN(IRP,EP,RAP,IRNP)
0317 : CALL VAO(BSP,CA,RNP,IRNP)
0318 : 348 ROA=-ASP/BSP
0319 : ROR=REAL(ROA)
0320 : ROI=AIMAG(ROA)
0321 : RO=SORI(ROR+ROR*RCI+ROI)
0322 : ARRE=U.
0323 : ARREI=U.
0324 : CALL ANGFI(ROA,FI,ARRE,ARREI)
0325 : IL=0
0326 : EPS=0.4
0327 : 350 IF(LL-LL.0)GO TC 352
0329 : AK(J)=-EPS*LA(K))/RO
0330 : ARG=(FI+2.*PI*IL*PI)/LAP(K)
0331 : GO TO 354
0332 : 352 AK(J)=(EPS*LA(K))/RO
0333 : ARG=(FI+2.*PI*IL)/LAP(K)
0334 : 354 SA(J)=-LAP(K)+EPS*CMPLX(COS(ARG),SIN(ARG))
0335 : CALL CUNEM(SA,AK,J)
0336 : GO TO 365
0337 : 360 IL=IL+1
0338 : IF(IL-LL.LAP(K))GO TO 370
0340 : I=I+1
0341 : GO TO 350
0342 : 370 K=K+1
0343 : IF(K-GI.IAP)GO TO 380
0345 : I=I+1
0346 : GO TO 340
0347 : 380 IF(I-EU.N)GO TO 400
0349 : IA=IA+1
0350 : I=I+1
0351 : SA(J)=-AP(IA)
0352 : AK(J)=U.
0353 : GO TO 365
:
:C
:C PULAR O PONTO MULTIPLO (J IMPAR) POR ADICAO DE DS NA C. TANGENCIAL
:C
0354 : 390 CALL ANHED(SA,ARRE)
0355 : CALL ANHED(SA,ARREI)
0356 : CALL ANGFI(SB,AI,ARRE,ARREI)
0357 : DS=CMPLX(0.3*COS(AT),0.3*SIN(AT))
0358 : SA(J+1)=ZH(L)+DS
0359 : AK(J+1)=GA(L)+HE/2.
0360 : J=J+1
0361 : CALL CUNEM(SA,AK,J)
0362 : GO TO 350
:
:C
:C SAIDA DETALHADA DOS RESULTADOS
:C
0363 : 400 IF(MJ-LL.1) GO TO 410
0365 : IF(LL-LL.1)GO TC 404
0367 : WRITE(6,401)
0368 : 401 FORMAT(10,23X,"VALORES DETIDOS PELO METODO DA CONTINUACAO")
0369 : WRITE(6,403)
0370 : 403 FORMAT(1,15X,"***** PONTOS *****",6X,"** GANHOS **")
0371 : 404 DO 408 L=1,J
0372 : WRITE(6,406)SA(L),AK(L),L
0373 : 406 FORMAT(4X,E15.7,3X,E15.7,5X,E15.7,4X,I4)
0374 : 408 CONTINUE
0375 : 410 IF(LL-LL.1)GO TC 415
0377 : JJ=J
0378 : CALL DLK(SA,J,XD,YD,AKP,LLP,XXD,AK,LL)
0379 : IF(MPLJ.EQ.1)GC TO 425
0381 : HH=-HH
0382 : LL=1
0383 : GO TO 412
0384 : 415 CALL DLK(SA,J,X,Y,AKN,LLN,YY,AK,LL)
:
:C
:C PLOTAGEM DOS PONTOS ATRAVES DA SUBROTINA PLOTE
:C
0385 : 425 CALL PLTEC(JJ,J,MPLCT,N,4,NCR,XMIN,XMAX,XD,YD,X,Y,XPL,YPL,XPR,YPR,
0385 : *XPM,YPM,YMIN)
:
:C
:C LIMITES DE ESTABILIDADE
:C
0386 : IF(LLP-LL.0) GO TC 465
0388 : WRITE(6,460)
0389 : 460 FORMAT(1,20X,"O SISTEMA E ESTAVEL PARA QUALQUER VALOR DE X POSITI-
0389 : VO",1)
0390 : GO TO 402

```


6

```

0391 : 465 WRITE(6,470)
0392 : 470 FORMAT(//,28X,"LIMITE DE ESTABILIDADE PARA K POSITIVO",//)
0393 : CALL LALST(AKP,LLP,XX0)
0394 : 482 IF(MPLUJ.EQ.1)GO TO 510
0396 : IF(LLA-6F.0) GO TO 490
0398 : WRITE(6,485)
0399 : 485 FORMAT(//,20X,"O SISTEMA E INSTAVEL PARA QUALQUER VALOR DE K NEGAT:
0399 : "IVO",//)
0400 : GO TO 510
0401 : 490 WRITE(6,495)
0402 : 495 FORMAT(//,28X,"LIMITE DE ESTABILIDADE PARA K NEGATIVO",//)
0403 : CALL LALST(AKN,LLA,YY)
0404 : 510 TEMPO=(TIME(1)-TEMPO)/60J.
0405 : WRITE(6,900)TEMPO
0406 : 900 FORMAT('1',///,20X,"TEMPO = ",F10.3," MINUTOS",)
0407 : STOP
0408 : END

```

NO ERRORS AND NO WARNINGS IN 408 STATEMENTS, CODE EMITTED = 69911 BITS (8739 BYTES) ORIG TULLI
 COMPILE TIME IS 9 MINUTES AND 48.1 SECONDS FOR 422 CARDS AT 43 CARDS/MINUTE.

ata 24/04/1981
roc. _____
ed. _____
iv. GPG - EFEI
ICR\$ 29000,00

[illegible]

EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ
8200307



NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA