

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**TESE DE DOUTORADO**

**Modelagem de Problemas Bidimensionais Através  
de Formulação Variacional Auto-regularizada do  
Método dos Elementos de Contorno**

**Autor: Paulo Augusto Capetti Rodrigues Porto**

**Orientador: Prof. Dr. Ariosto Bretanha Jorge**

Itajubá, Março de 2006

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**TESE DE DOUTORADO**

**Modelagem de Problemas Bidimensionais Através  
de Formulação Variacional Auto-regularizada do  
Método dos Elementos de Contorno**

**Autor: Paulo Augusto Capetti Rodrigues Porto**

**Orientador: Prof. Dr. Ariosto Bretanha Jorge**

**Curso: Doutorado em Engenharia Mecânica**

**Área de Concentração: Projeto e Fabricação**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Itajubá, Março de 2006.

M.G. – Brasil

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –  
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB\_6/1700

P853m

Porto, Paulo Augusto Capetti Rodrigues

Modelagem de problemas bidimensionais através de formulação variacional auto-regularizada do Método dos Elementos de Contorno / por Paulo Augusto Capetti Rodrigues Porto. -- Itajubá,(MG) : [s.n.], 2006.

101 p. : il.

Orientador : Prof. Dr. Ariosto Bretanha Jorge.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. MEC – Métodos dos Elementos de Contorno. 2. Formulação variacional. 3. Formulações regularizadas. I. Jorge, Ariosto Bretanha, orient. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Título.

CDU 519.6(043)



Ministério da Educação  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
Criada pela Lei 10.435, de 24 de abril de 2002

### FOLHA DE JULGAMENTO DA COMISSÃO EXAMINADORA DE TESE DE DOUTORADO

Título da Tese: "Modelagem de Problemas Bidimensionais Através de Formulação Variacional Auto-regularizada do Método dos Elementos de Contorno"

Autor : Paulo Augusto Capetti Rodrigues Porto

#### JULGAMENTO

Examinadores	Conceito	Rubrica
1º	A	<i>G. Oliveira</i>
2º	A	<i>P. Sollero</i>
3º	A	<i>W. Carlos</i>
4º	A	<i>J. Célio</i>
5º	A	<i>N. Manzanara</i>
6º	A	<i>A. Bretanha</i>

Resultado Médio: A ou seja, Aprovado.

Observações: \_\_\_\_\_

Itajubá, 30 de março de 2006.

*G. Oliveira*  
Prof. Dr. Gabriel de Oliveira Ribeiro  
1º Examinador - UFMG

*P. Sollero*  
Prof. Dr. Paulo Sollero  
2º Examinador - UNICAMP

*W. Carlos*  
Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira  
3º Examinador - UNIFEI

*J. Célio*  
Prof. Dr. José Célio Dias  
4º Examinador - UNIFEI

*N. Manzanara*  
Prof. Dr. Nelson Manzanara Filho  
5º Examinador - UNIFEI

*A. Bretanha*  
Prof. Dr. Ariosto Bretanha Jorge  
6º Examinador - Orientador - UNIFEI

*J. Eugênio Ricci*  
Prof. Dr. José Eugênio Rios Ricci  
Presidente da Comissão

# AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, *Prof. Dr. Ariosto Bretanha Jorge* pela orientação constante, amizade e exemplo dado ao longo desse período de convivência e trabalho.

Ao *Prof. Dr. Gabriel Oliveira Ribeiro* pelas referências bibliográficas, programas cedidos e pelas valiosas sugestões.

Aos professores da Universidade Federal de Itajubá pelo apoio dado, conhecimentos transmitidos e pela convivência gratificante e enriquecedora.

Aos alunos e pesquisadores do Grupo de Mecânica Computacional pelo incentivo e apoio.

À Indústria de Material Bélico do Brasil, em particular ao Superintendente da Fábrica de Itajubá, *Engenheiro Alte Saturno Evangelista Zylberberg*, pela confiança depositada e pela oportunidade de crescimento profissional.

À minha esposa e amiga *Lourdes Maria* e aos meus filhos *Pedro* e *Fernando*, pelo incentivo constante, paciência e compreensão nos momentos em que me fiz ausente.

Aos meus pais *Gilberto* e *Marlene*, que desde os primeiros momentos, mais que me fazer sonhar, ajudaram a realizar meus sonhos.

## RESUMO

PORTO, P.A.C., *Modelagem de Problemas Bidimensionais Através de Formulação Variacional Auto-regularizada do Método dos Elementos de Contorno*, Itajubá, Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, 2006, 101 p. Monografia (Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica)

No presente trabalho é apresentada uma nova abordagem numérica para o cálculo de integrais bi-dimensionais hipersingulares baseada em uma formulação não-simétrica variacional auto-regularizada para o Método dos Elementos de Contorno (MEC) aplicado às equações de Laplace e de Poisson (problemas de potencial) e também às equações de Navier (problemas de elasticidade).

O conceito de “continuidade relaxada” é utilizado como ponto de partida para a formulação proposta, assim, ao invés de se empregar abordagens que assegurem o requisito de continuidade  $C^{1,\alpha}$ , as formulações hipersingulares apresentadas neste trabalho utilizam somente elementos isoparamétricos  $C^0$ . A continuidade é forçada nas junções dos diversos elementos através de um conjunto de equações de restrição que é inserido no sistema de equações originais do problema.

Exemplos numéricos mostram que os algoritmos desenvolvidos baseados nas equações integrais de contorno para o gradiente do potencial e para a força de superfície são eficientes e de simples implementação, uma vez que nenhuma transformação integral é necessária e resultados precisos podem ser obtidos mesmo quando se utiliza um pequeno número de pontos de Gauss.

**PALAVRAS-CHAVE:** *MEC-Métodos dos Elementos de Contorno, formulação variacional, formulações regularizadas.*

# ABSTRACT

PORTO, P.A.C., *Modelagem de Problemas Bidimensionais Através de Formulação Variacional Auto-regularizada do Método dos Elementos de Contorno*, Itajubá, Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, 2006, 101 p. Monografia (Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica)

This work deals with a numerical solution technique for evaluation of hypersingular two-dimensional equations based on a non-symmetric variational approach for the Boundary Element Method (BEM) applied to Laplace and Poisson equations (potential problems) as well as Navier equation (elasticity problems).

The relaxed continuity approach is the starting point for the formulations used along the work, which means that, instead of using approaches that assure the required  $C^{1,\alpha}$  inter-element continuity requirement, the formulation applied on this work uses only standard  $C^0$  isoparametric elements. The continuity requirement is enforced at smooth inter-element nodes through a subsidiary set of constraint equations included into the original system of equations.

Numerical examples show that the developed algorithm based on the self-regular traction and flux-BIE are highly efficient, and quite straightforward in that no integral transformations are necessary to compute the singular integrals and even a small number of integration Gauss points gives very accurate results.

KEYWORDS: *BEM - Boundary Element Methods, Variational Formulation, Self-Regular Formulations.*

# SUMÁRIO

## AGRADECIMENTOS

## RESUMO

## ABSTRACT

SUMÁRIO.....	I
LISTA DE FIGURAS.....	IV
LISTA DE TABELAS.....	VI
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS.....	VII

## CAPÍTULO 1

APRESENTAÇÃO .....	1
1.1 INTRODUÇÃO .....	1
1.2 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS.....	4
1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	5
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO.....	11

## CAPÍTULO 2

CONCEITOS BÁSICOS.....	14
2.1 FUNDAMENTOS .....	14
2.1.1 Notação Indicial.....	14
2.1.2 Vizinhança .....	15
2.1.3 Integrais Singulares .....	17
2.1.4 Continuidade de Hölder.....	17
2.1.5 Teoremas Fundamentais .....	18
2.1.6 Soluções aproximadas .....	20
2.2 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO .....	21
2.2.1 EIC para potencial .....	22

2.2.2 EIC Auto-regularizada para o Fluxo .....	24
2.2.3 MEC Incluindo Fontes de Calor no Domínio.....	26
2.2.4 EIC para elasticidade.....	27
<b>CAPÍTULO 3</b>	
<b>FORMULAÇÃO VARIACIONAL .....</b>	<b>31</b>
3.1 INTRODUÇÃO .....	31
3.2 PROBLEMAS DE CONDUÇÃO DE CALOR .....	32
3.3 FORMULAÇÃO VARIACIONAL.....	34
3.3.1 Continuidade $C^{1,\alpha}$ Inter-elementares para as Derivadas do Potencial.....	34
3.3.2 Sistema de Equações a Partir da Minimização do Funcional.....	36
3.3.3 Implementação Computacional .....	38
3.4 FORMULAÇÃO VARIACIONAL MISTA.....	41
<b>CAPÍTULO 4</b>	
<b>CÁLCULO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÕES ATRAVÉS DE PONTOS INTERIORES .....</b>	<b>45</b>
4.1 INTRODUÇÃO .....	45
4.2 CONCENTRADORES DE TENSÕES .....	46
4.3 FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÕES.....	47
4.4 MECÂNICA DA FRATURA ATRAVÉS DO MEC.....	49
4.5 MÉTODO HIPER-DETERMINÍSTICO PARA OBTENÇÃO DE $K_I$ .....	52
<b>CAPÍTULO 5</b>	
<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES: POTENCIAL .....</b>	<b>56</b>
5.1 PROBLEMAS DE TRANSMISSÃO DE CALOR.....	56
5.2 ESTIMADOR DE ERRO .....	57
5.3 DOMÍNIO QUADRADO .....	58
5.4 TUBO CILÍNDRICO.....	61
5.5 PROBLEMA DE MOTZ .....	63
5.6 PROBLEMAS QUASI-SINGULARES .....	65

**CAPÍTULO 6**

<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES: ELASTICIDADE.....</b>	<b>70</b>
6.1 CHAPA COM FURO CENTRAL .....	70
6.2 TUBO DE PAREDE ESPESSA.....	74
6.3 CHAPA PLANA SUBMETIDA A CARREGAMENTO TIPO I.....	82
6.3.1 $K_I$ Através do Deslocamento na Abertura da Trinca.....	82
6.3.2 $K_I$ Através do Método Hiper-Determinístico .....	84

**CAPÍTULO 7**

<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....</b>	<b>89</b>
7.1 CONCLUSÕES .....	89
7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	93
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>94</b>
<b>ANEXO A</b>	
<b>ELEMENTOS <i>QUARTER-POINT</i> .....</b>	<b>99</b>

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.1:</b> Artigos sobre o MEC <i>versus</i> ano de publicação (CHENG & CHENG, 2005).....	3
<b>Figura 2.1:</b> Pontos que definem o domínio e a fronteira (PARIS & CANÃS, 1997) .....	16
<b>Figura 3.1:</b> Coordenadas naturais (elemento quadrático).....	35
<b>Figura 3.2:</b> Descontinuidade da força de superfície .....	40
<b>Figura 3.3:</b> Descontinuidade da geometria e normal média.....	40
<b>Figura 3.4:</b> Localização dos nós funcionais e geométricos.....	43
<b>Figura 4.1:</b> Falha decorrente da pré-existência de uma trinca (cortesia: IMBEL).....	46
<b>Figura 4.2:</b> Evolução da tensão em um corpo que contém um vazio.....	47
<b>Figura 4.3:</b> Modos de solitação de uma trinca (ALIABADI & ROOKE, 1992).....	48
<b>Figura 4.4:</b> Ponta da trinca e frente da trinca .....	50
<b>Figura 4.5:</b> Sistema de coordenadas com origem na ponta da trinca .....	53
<b>Figura 5.1:</b> <i>Patch test</i> : (a) geometria (b) discretização com 4 elementos quadráticos.....	58
<b>Figura 5.2:</b> Domínio quadrado: erro absoluto no potencial ao longo da coordenada $s$ .....	59
<b>Figura 5.3:</b> Domínio quadrado: erro absoluto no fluxo ao longo da coordenada $s$ .....	60
<b>Figura 5.4:</b> Domínio quadrado: EIC variacional <i>versus</i> não-variacional.....	61
<b>Figura 5.5:</b> Tubo cilíndrico (1/4 da geometria).....	62
<b>Figura 5.6:</b> Erro global no tubo cilíndrico: EIC variacional <i>versus</i> não-variacional .....	62
<b>Figura 5.7:</b> Erro global conforme formulação, discretização e ordem do elemento .....	63
<b>Figura 5.8:</b> Problema de Motz.....	64
<b>Figura 5.9:</b> Problema de Motz: (a) Potencial (b) Fluxo próximo ao ponto singular.....	65
<b>Figura 5.10:</b> Erro global no potencial: (a) sem fontes ; (b) com fonte.....	66
<b>Figura 5.11:</b> Caminhos distintos na direção de diferentes condições de contorno .....	67
<b>Figura 5.12:</b> Erro exato no potencial para um ponto interior que se aproxima da fronteira ...	68
<b>Figura 5.13:</b> EIC para o potencial: influência da razão de aspecto no potencial calculado ....	69
<b>Figura 5.14:</b> EIC variacional: influência da razão de aspecto no potencial calculado.....	69
<b>Figura 6.1:</b> Chapa com furo central: (a) geometria; (b) discretização .....	71

<b>Figura 6.2:</b> Força de superfície normal ao longo do segmento $AB$ (16 elementos) .....	72
<b>Figura 6.3:</b> Força de superfície normal ao longo do lado $AB$ (32 elementos).....	73
<b>Figura 6.4:</b> Erro no FCT ( $K_\sigma$ ) <i>versus</i> número de nós .....	73
<b>Figura 6.5:</b> Tubo de parede espessa: (a)geometria; (b) malha com 6 elementos .....	74
<b>Figura 6.6:</b> Resultados para FARV: (a) deslocamento $u_x$ , (b) força de superfície $t_y$ .....	76
<b>Figura 6.7:</b> Erro na FARFS com elementos contínuos (RIBEIRO, 2003).....	77
<b>Figura 6.8:</b> Erro ao longo da face horizontal: FARFS-D <i>versus</i> FARV .....	79
<b>Figura 6.9:</b> Problema Tubo: deslocamentos normalizados (6 elementos) .....	80
<b>Figura 6.10:</b> Problema Tubo: deslocamentos normalizados (24 elementos) .....	80
<b>Figura 6.11:</b> Problema Tubo: deslocamentos normalizados (48 elementos) .....	81
<b>Figura 6.12:</b> Problema Tubo: deslocamentos normalizados (192 elementos) .....	81
<b>Figura 6.13:</b> Chapa submetida ao Modo I de carregamento .....	82
<b>Figura 6.14:</b> Localização dos nós utilizados no cálculo de $K_I$ .....	83
<b>Figura 6.15:</b> Erro em $K_I$ através da formulação variacional original (JORGE <i>et al.</i> , 2003b) .	83
<b>Figura 6.16:</b> $K_I$ normalizado em relação à FARFS-D <i>versus</i> o número de nós .....	84
<b>Figura 6.17:</b> Chapa com trinca central: discretização inicial com 35 elementos .....	85
<b>Figura 6.18:</b> $K_I$ normalizado <i>versus</i> $r$ : (a) diferentes direções $\theta$ , (b) $\theta=60^\circ$ .....	86

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1.1:</b> Número de publicações por método numérico (CHENG & CHEG, 2005) .....	2
<b>Tabela 3.1:</b> Implementação da estratégia variacional.....	39
<b>Tabela 5.1:</b> Erro máximo na chapa plana: EIC variacional <i>versus</i> não-variacional.....	59
<b>Tabela 6.1:</b> FARFS C <i>versus</i> FARV: elementos quadráticos .....	78
<b>Tabela 6.2:</b> FARFS C <i>versus</i> FARV: elementos quárticos .....	78
<b>Tabela 6.3:</b> FARFS D <i>versus</i> FARV: elementos quadráticos .....	78
<b>Tabela 6.4:</b> Formulação em deslocamento <i>versus</i> variacional .....	81
<b>Tabela 6.5:</b> Fator de intensidade de tensão: $K_I = 1783,47$ (TADA,2000).....	84
<b>Tabela 6.6:</b> FIT: método hiper-determinístico (OA) <i>versus</i> COD.....	87
<b>Tabela 6.7:</b> FIT : método hiper-determinístico (OA) <i>versus</i> COD.....	87
<b>Tabela 6.8:</b> Resultados para diferentes comprimentos de trinca (35 elementos) .....	88
<b>Tabela 6.9:</b> Resultados para diferentes comprimentos de trinca (70 elementos).....	88

# LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

## Letras Latinas

$a$	Distância entre o primeiro nó funcional do elemento e sua extremidade
$A$	Constante real positiva
$[A]$	PVC na forma matricial
$b$	Distância entre o último nó funcional do elemento e sua extremidade
$b(p)$	Fonte de calor
$B(x_0)$	Conjunto de pontos
$B(\xi)$	Problema de valor de contorno
$C^{0,\alpha}$	Continuidade $C^0$ no sentido de Hölder
$C^{1,\alpha}$	Continuidade $C^1$ no sentido de Hölder
$D$	Domínio bi-dimensional
$D_{kij}$	Solução fundamental da força de superfície
$\partial D$	Fronteira do domínio $D$
$E$	Módulo de elasticidade linear
$F(x)$	Função de $x$
$G$	Módulo de elasticidade transversal
$J(\xi)$	Jacobiano
$K$	Condutividade térmica
$\ell$	Comprimento do elemento de contorno
$m$	Número de pontos nodais do elemento
$M$	Número de elementos de contorno
$\bar{n}(s)$	Vetor unitário normal
$N$	Número de nós do problema
$N_D$	Número de fontes de calor no domínio
$N_i(\xi)$	Funções de interpolação
$p, q$	Ponto interno
$P$	Ponto do contorno
$P_D$	Localização da fonte de calor
$Q$	Ponto de integração
$q$	Fluxo
$Q_D$	Magnitude da fonte de calor
$[Q]$	Forma matricial das equações de restrições
$r$	Distância entre dois pontos
$R$	Região plana finita
$s$	Ponto de fronteira

$S$	Contorno fechado
$S_i$	Segmento curvo suave no sentido de Liapunov
$S_{kij}$	Solução fundamental da força de superfície
$T$	Potencial (temperatura)
$t_j$	Força de superfície na direção $j$ ( $j=1,2$ )
$t_k^i$	Força de superfície nos pontos nodais do contorno
$T_{ji}$	Solução fundamental para força de superfície
$u_j$	Deslocamento na direção $j$ ( $j=1,2$ )
$u_k^i$	Deslocamento nos pontos nodais do contorno
$u_{i,j}$	Gradientes do deslocamento
$U_{ji}$	Solução fundamental para deslocamentos
$w_k$	Funções peso
$x, x_0$	Ponto pertencente ao domínio
$x$	Variável geométrica (coordenadas)
$x_i$	Coordenadas cartesianas na direção $j$ ( $j=1,2$ )
$x_k^i$	Coordenadas dos pontos nodais do contorno
$y$	Ponto interior

## Letras Gregas

$\langle \Gamma \rangle$	Domínio de integração da integral de valor principal de Cauchy
$\ll \Gamma \gg$	Domínio de integração da integral de parte finita de Hadamard
$\Gamma$	Contorno do domínio $\Omega$
$\Gamma_\varepsilon$	Contorno da região de exclusão
$\zeta_k$	Ponto de colocação
$\Delta, \varepsilon$	Valor infinitesimal positivo
$\alpha$	Constante $[0,1]$
$\beta$	Ângulo entre dois elementos adjacentes
$\Pi$	Funcional de energia
$\Delta$	Varição arbitrária
$\Delta(\varepsilon)$	Função delta de Dirac
$\delta_{ij}$	Função delta de Kronecker
$\xi$	Coordenada intrínseca
$\Omega_\varepsilon$	Vizinhança
$\Omega$	Domínio ou intervalo de integração
$\varnothing$	Variável primária (potencial ou deslocamento)
$\lambda_{dd}$	Multiplicadores de Lagrange
$(\Delta\phi, i)$	Salto ou descontinuidade das derivadas da variável primária

## Superescritos

$L$	Campo linear
$T$	Transposta de uma matriz ou vetor
$\rightarrow$	Vetor

## Abreviaturas e Siglas<sup>1</sup>

2D	Bi-dimensional
3D	Tri-dimensional
C	Elementos contínuos
CD	Elementos contínuos e descontínuos
D	Elementos descontínuos
EIC ( <i>BIE</i> )	Equação integral de contorno ( <i>boundary integral equation</i> )
FARD	Formulação auto-regularizada para o deslocamento
FARF	Formulação auto-regularizada para o fluxo
FARFS	Formulação auto-regularizada para força de superfície
FARM	Formulação auto-regularizada mista
FARP	Formulação auto-regularizada para o potencial
FARV	Formulação auto-regularizada variacional
<i>Flux-BIE</i>	Formulação baseada na EIC para o fluxo
FIT ( <i>SIF</i> )	Fator de intensidade de tensão ( <i>stress intensity factor</i> )
IEM	Instituto de Engenharia Mecânica
IST	Identidade de Somigliana em tensões
MDF ( <i>FDM</i> )	Método de diferenças finitas ( <i>finite difference method</i> )
MEC ( <i>BEM</i> )	Método(s) de elementos de contorno ( <i>boundary element method</i> )
MEF ( <i>FEM</i> )	Método(s) de elementos finitos ( <i>finite element method</i> )
MVF ( <i>FVM</i> )	Método de volumes finitos ( <i>finite volume method</i> )
MC ( <i>CM</i> )	Método de colocação ( <i>collocation method</i> )
<i>Pot-BIE</i>	Formulação baseada na EIC para o potencial
PVC ( <i>BVP</i> )	Problema de valor de contorno ( <i>boundary value problem</i> )
PFH ( <i>FPH</i> )	Parte finita de Hadamard ( <i>finite part of Hadamard</i> )
Var-BIE	Formulação baseada na formulação variacional
VPC ( <i>CPV</i> )	Valor principal de Cauchy ( <i>Cauchy principal value</i> )
UNIFEI	Universidade Federal de Itajubá

---

<sup>1</sup> As abreviaturas e expressões entre parênteses referem-se às formas originais em inglês

## Capítulo 1

# APRESENTAÇÃO

## 1.1 INTRODUÇÃO

A utilização dos primeiros computadores digitais como ferramenta de engenharia, no final dos anos 50, fez com que algumas áreas de pesquisa que antes eram exclusivas dos matemáticos se difundissem com maior velocidade na busca de soluções para uma vasta gama de problemas do mundo real, em especial para problemas de engenharia. Assim aconteceu com o chamado Método dos Elementos de Contorno (MEC), tema principal da presente tese.

O Método dos Elementos de Contorno é um procedimento numérico que faz parte de uma linha de pesquisa desenvolvida pela Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI) na área de Projeto e Fabricação Mecânica. A modelagem, simulação e análise de fenômenos associados à área de concentração de Mecânica dos Sólidos são o foco do interesse das pesquisas desenvolvidas nessa área.

Para que se tenha uma visão geral do MEC dentro do contexto histórico e mais recente da literatura especializada é apresentada na Tabela 1.1 o resultado de uma pesquisa conduzida através do serviço *Institute for Scientific Information* (WEB OF SCIENCE, 2005) na qual o número de trabalhos publicados na área de elementos de contorno pode ser comparado com o número de trabalhos focados em outros métodos numéricos (CHENG & CHENG, 2005). Quando da realização da pesquisa (maio/2004), a base de dados continha 27 milhões de

registros abrangendo as publicações de 5900 periódicos no período de 1945 até a data da pesquisa. As entradas registradas relativas ao MEC foram ordenadas de acordo com o ano de publicação conforme apresentado na Figura 1.1.

**Tabela 1.1:** Número de publicações por método numérico (CHENG & CHEG, 2005)

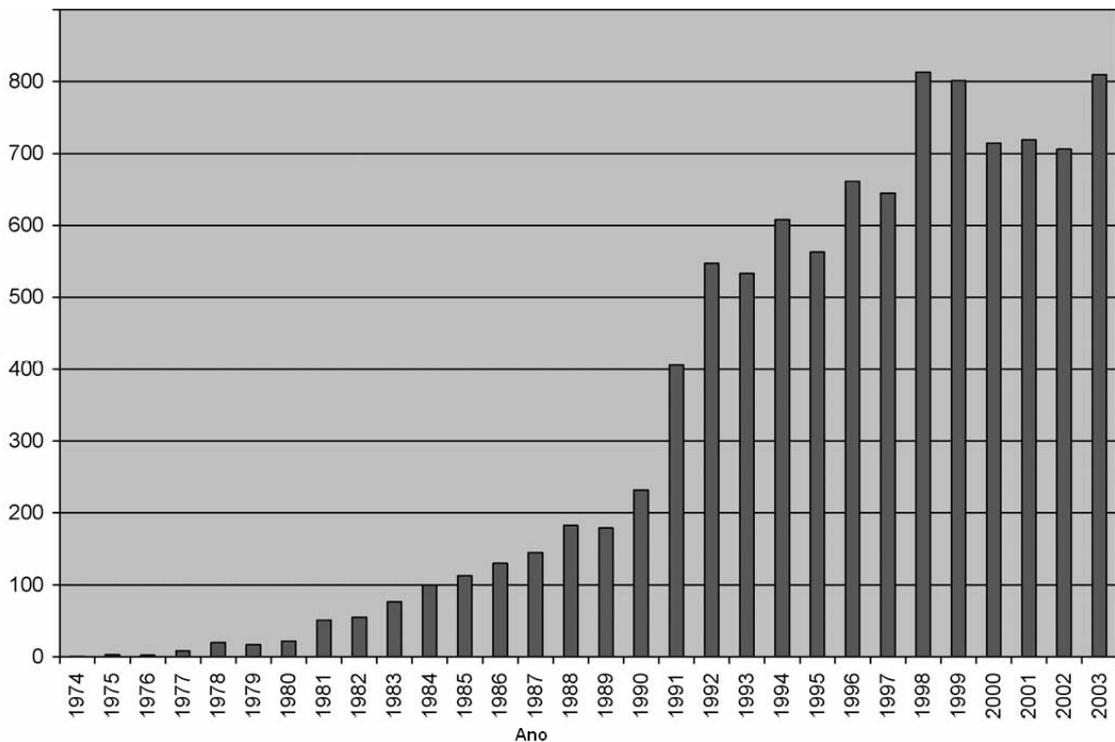
<b>Método</b>	<b>Palavra chave</b>	<b>Nº de artigos</b>
MEF	<i>finite element(s)</i>	66237
MDF	<i>finite difference(s)</i>	19531
MEC	<i>boundary element(s), boundary integral(s)</i>	10126
MVF	<i>finite volume method(s)</i>	1695
MC	<i>collocation method(s)</i>	1615

Como se pode constatar, o Método dos Elementos de Contorno está em um estágio intermediário de aceitação e o interesse por ele estabilizou no início dos anos 90. Embora a popularização e evolução do Método dos Elementos de Contorno não tenham ocorrido na mesma proporção e velocidade do Método dos Elementos Finitos (MEF) e do Método de Diferenças Finitas (MDF), nos dias de hoje, o Método dos Elementos de Contorno tem se mostrado, para determinadas classes de problema, tão ou mais eficiente que os “métodos de domínio”.

Este relativo sucesso se deve principalmente ao fato de que, quando aplicado a problemas de valor de contorno (PVC), a solução é obtida em um espaço de dimensão espacial menor que a dimensão do problema original, isto é, se o domínio original é tri-dimensional, é necessário discretizar somente a superfície do domínio e, no caso bi-dimensional, somente o contorno. Esta redução de dimensão resulta em sistemas de equações de menor ordem e conseqüentemente de menor custo computacional em termos de espaço de armazenamento. Afora essa característica mais marcante do método, existem outras vantagens significativas: o método trata de forma homogênea as variáveis primárias e suas derivadas obtendo resultados igualmente precisos para ambas e apresenta a capacidade de modelar de forma natural o comportamento de domínios infinitos.

Não obstante tais vantagens, existe uma visão geral de que o Método dos Elementos de Contorno apresenta uma complexidade matemática e uma dificuldade de implementação numérica maiores. Isso se deve ao fato de que as soluções fundamentais utilizadas na solução das equações integrais de contorno (EIC) que governam os diversos problemas são funções singulares. Segundo SLADEK & SLADEK (1998), a presença dessas singularidades é a principal desvantagem e obstáculo à popularização do MEC uma vez que, para uma

implementação eficaz, torna-se necessário o uso de esquemas de integração analíticos ou especiais que previnam a perda de precisão e estabilidade no cálculo das integrais.



**Figura 1.1:** Artigos sobre o MEC *versus* ano de publicação (CHENG & CHENG, 2005)

Duas áreas, portanto se destacam no campo das integrais de contorno: a primeira delas é a busca de soluções fundamentais que introduzam de forma natural condições de singularidades existentes em diversos problemas, tais como o campo de tensão em uma região próxima a frente de trinca; e a outra, a busca por métodos que permitam calcular de forma mais precisa as integrais singulares advindas do uso das soluções fundamentais singulares e suas derivadas.

O presente trabalho abordará com maior enfoque a segunda área de pesquisa, isto é, o estudo e a implementação numérica de soluções para equações integrais de contorno que contenham integrais hiper-singulares. Para tanto, serão apresentadas novas formulações auto-regularizadas das equações integrais de contorno para problemas bidimensionais singulares regidos pelas equações de Laplace e de Poisson (problemas de potencial) e também pelas equações de Navier (problemas de elasticidade). Os problemas singulares de elasticidade enquadram-se no contexto de Mecânica da Fratura Linear Elástica e os de potencial na área de Transferência de Calor.

## 1.2 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

Como será visto mais adiante, os Método dos Elementos de Contorno fazem largo uso de soluções fundamentais. Uma vez que essas soluções são funções da distância entre dois pontos, singularidades matemáticas podem surgir independentemente da natureza física do problema. Quando isso ocorre, a utilização de métodos usuais de integração pode gerar resultados imprecisos e instáveis.

Outra característica relevante da equação integral de contorno é que, devido à presença de núcleos hiper-singulares nas formulações auto-regularizadas na forma do gradiente, é exigido que a variável primária (no caso, o potencial ou os deslocamentos) seja contínua no sentido de Hölder para que a equação integral possua limite finito. Embora essa exigência matemática de continuidade não seja atendida ao se utilizar elementos de contorno *lagrangianos* conformes, alguns autores utilizaram estes elementos em equações hiper-singulares reportando resultados promissores nos diversos campos de aplicação propostos.

Do ponto de vista estritamente matemático, essa violação, denominada “continuidade relaxada”, não pode ser teoricamente justificada o que leva a um aparente paradoxo: a falta de fundamento matemático *versus* alguns bons resultados obtidos na prática. Com base nestas discussões, LIU & RUDOLPHI (1999) apontaram a necessidade de se apresentar um estudo de convergência, numérico e analítico, ou um contra-exemplo mostrando divergência que invalidasse de vez a hipótese de continuidade relaxada nos algoritmos do método dos elementos de contorno.

Nesse trabalho, são desenvolvidas e implementadas novas formulações regularizadas para as EIC na forma do gradiente. A continuidade  $C^{1,\alpha}$  requerida para as derivadas das variáveis primárias é imposta na solução discretizada do Método dos Elementos de Contorno através de equações de restrições. Uma vez que este requisito de continuidade passa a ser uma restrição imposta ao problema original, torna-se possível a discretização das equações na forma do gradiente utilizando elementos de contorno contínuos isoparamétricos  $C^0$ . Por outro lado, pelo fato das equações serem regularizadas, nenhum esquema especial de integração se faz necessário.

A estratégia adotada no trabalho é uma extensão da formulação baseada no princípio variacional, como apresentado por JORGE *et al.* (2003) para problemas bidimensionais de

elasticidade. No artigo, os autores usam como ponto de partida a hipótese de continuidade relaxada, mas força a continuidade da função campo na interseção entre elementos, e novas incógnitas, escritas como multiplicadores de Lagrange, são introduzidas. O requisito de continuidade passa então a ser satisfeito em um sentido variacional. A implementação dessa estratégia para problemas de elasticidade reduziu de forma significativa oscilações e erros advindos da discretização utilizando somente a hipótese de continuidade relaxada, entretanto, analisando o trabalho em referência constata-se que:

- o algoritmo original desconsiderou a possibilidade de ocorrência de condições de contorno mistas em um mesmo elemento;
- a formulação variacional só se mostrou efetiva quando a continuidade foi forçada nas partes suaves do contorno. Dessa forma, o fato de não se ter uma normal única nos cantos, por si só já é uma fonte de erro para a formulação;
- a formulação não foi estendida para problemas de potencial.

A presente tese visa preencher estes hiatos. Uma vez atingidos os objetivos propostos espera-se obter formulações hiper-singulares mais generalizadas, robustas e simples de serem implementadas. Tais formulações, juntamente com as formulações regularizadas já disponíveis para a variável primária, poderão assim, ser aplicadas nas chamadas formulações mistas ou *duais*, isto é, aquelas que utilizam em um mesmo problema as duas formulações.

### 1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os primeiros esforços no sentido de resolver numericamente problemas de valor de contorno datam de um período anterior à era dos computadores analógicos. As primeiras estratégias propostas se basearam no uso do método variacional em conjunto com funções de aproximação – o chamado Método de Ritz.

Em 1963, J. A. Jaswon e G. T. Symm (JASWON & SYMM, 1977) implementaram uma solução numérica para uma equação bi-dimensional de Fredholm de primeira espécie aplicada a problemas de potencial. Embora a equação fosse considerada instável, resultados estáveis e convergentes foram obtidos utilizando elementos de contorno constantes. No trabalho, os

autores apontaram também a possibilidade de estender a aplicação das equações integrais de contorno para problemas de Elasticidade.

Apesar dos bons resultados obtidos por Jaswon e Symm, alguns autores consideram que o aumento do interesse pelo método dos elementos de contorno só se deu de fato com a publicação de um procedimento numérico para solução da identidade de Somigliana (RIZZO, 1967). Ao reconhecer a atenção especial que se deveria dar à integração da solução fundamental singular para elasticidade denominada solução de Kelvin, o autor substituiu o termo singular  $r(p,q)$ , distância entre os pontos  $p$  e  $q$ , por outros não-singulares escritos em função do ângulo formado entre o segmento de reta que une os pontos  $p$  a  $q$  e a origem do sistema de coordenadas polares globais do problema. Essa solução permitiu obter soluções precisas para problemas bi-dimensionais, entretanto sua implementação em problemas tri-dimensionais não obteve o mesmo êxito ao substituir os ângulos planos por ângulos sólidos.

O êxito nas equações integrais de contorno tri-dimensionais foi obtido através de aproximações do contorno real utilizando elementos planos para os quais se dispunha de uma solução analítica (CRUSE, 1969). Posteriormente, como continuação daquele trabalho, são publicadas as primeiras soluções para equações integrais de contorno aplicadas a problemas tri-dimensionais de Mecânica da Fratura (CRUSE, 1970 e CRUSE & VAN BUREN, 1971).

Implementações utilizando elementos isoparamétricos foram feitas por LCHAT e WATSON (1976) onde através de um mapeamento de variáveis os autores obtiveram uma redução da ordem da singularidade, contudo nesse e em outros trabalhos que o sucederam, a precisão utilizando um esquema de quadratura só pode ser obtida através de uma subdivisão dos elementos e/ou uma elevada ordem de integração.

No campo das formulações hiper-singulares, observa-se que os primeiros trabalhos estão relacionados com a mecânica da fratura (CROUCH, 1976) e embora existam aplicações em outras áreas, essa é a que concentra a maior parte das pesquisas. Embora formulações não-singulares para o problema de mecânica da fratura tenham sido também desenvolvidas, com a implementação numérica da formulação *dual* (PORTELA & ALIABADI, 1992) passou a haver uma tendência geral no sentido da utilização de equações hiper-singulares para essa classe de problemas, o que torna o cálculo das equações integrais envolvidas de suma importância.

Diversas estratégias são apresentadas na literatura para solução de equações hiper-singulares aplicadas a problemas de potencial, elasticidade, mecânica da fratura, etc. como pode ser visto em IOKAMIDIS (1982), GRAY *et al.* (1989) TANAKA *et al.* (1994), BONNET (1999), CRUSE & RICHARDSON (2000), e DOMINGUEZ *et al.* (2000). Entretanto, o seu cálculo permanece sendo a maior dificuldade para implementação de algoritmos eficientes. Uma técnica bastante empregada para eliminar a necessidade de estratégias especiais para o cálculo das equações integrais de contorno é a chamada regularização.

Fazendo uma analogia com a estratégia de regularização amplamente utilizada para solução analítica de equações integrais, CRUSE & VAN BUREN (1971) fizeram uma expansão do núcleo das integrais através de séries de Taylor reduzindo a hiper-singularidade existente na identidade de Somigliana em tensões (IST). Uma generalização dessa estratégia foi mais tarde estendida por GUIGGIANI & GIGANTE (1990) para os casos de valor principal de Cauchy (VPC) em problemas tri-dimensionais de elasticidade incluindo elementos no contorno e no domínio. Segundo CRUSE & AITHAL (1993), o trabalho de Guiggiani e Gigante contém os elementos essenciais para um procedimento eficaz de regularização de núcleos aparentemente não-integráveis. O “aparentemente” aqui aparece devido ao fato de que, segundo os autores, por não existirem na verdade termos ilimitados torna-se desnecessária qualquer abordagem especial.

A condição necessária para existência de uma integral hiper-singular é a suavidade da função densidade no ponto fonte, o que garante a existência de um limite finito (KRISHNASAMY *et al.*, 1992). Essa condição de continuidade é a mesma tanto para as equações integrais de contorno auto-regularizadas como para aquelas fortemente singulares ou hiper-singulares que as originaram, sendo determinada pela ordem da singularidade do núcleo (LIU & RIZZO, 1992). Em termos mais claros, isso equivale a dizer que a variável primária deve ter continuidade  $C^{0,\alpha}$  no sentido de Hölder nas equações integrais de contorno de variável primária (valor do potencial e deslocamento para equações integrais de contorno em potencial e elasticidade respectivamente) e  $C^{1,\alpha}$  nas equações integrais de contorno baseadas no gradiente.

Para as equações integrais de contorno em potencial e deslocamento o requisito de continuidade  $C^{0,\alpha}$  no sentido de Hölder é em geral atendido quando se utilizam os elementos contínuos isoparamétricos entretanto, o mesmo não ocorre nas equações integrais de contorno

em fluxo e em força de superfície, ambas equações na forma do gradiente. Neste caso, a discretização do contorno em elementos contínuos padrão implica na perda da continuidade requerida para a variável primária nos nós localizados na junção entre elementos (MARTIN & RIZZO, 1996). Portanto, em princípio somente as abordagens com elementos de contorno que garantam continuidade  $C^{1,\alpha}$  no sentido de Hölder em cada ponto de colocação podem ser utilizados na aproximação da equações integrais de contorno hiper-singulares (H-EIC).

No caso dos métodos de colocação, a primeira abordagem se faz através do uso de elementos de contorno contínuos baseados em funções de interpolação de classe  $C^1$  chamados “Overhauser” e “hermitianos”. Quando se utilizam elementos “Overhauser” (CAMP & GIBSON, 1991; JOHNSTON, 1997), a continuidade da primeira derivada da variável campo é garantida de forma implícita, sem introduzir novas variáveis à formulação original. A continuidade é obtida através do uso das informações (deslocamento e força de superfície) dos nós adjacentes ao elemento, em ambos lados do mesmo. As funções de forma dos elementos “Overhauser” contudo, são mais complexas e ainda não estão bem desenvolvidas para alguns casos. Além disso, estes elementos apresentam algumas desvantagens, como, por exemplo, sua incapacidade de modelar descontinuidades geométricas. O uso de elementos “hermitianos” (WATSON, 1986; DURODOLA & FENNER, 1990) por sua vez, introduz novas variáveis no problema, uma vez que a continuidade é obtida incorporando-se as derivadas tangenciais nas funções de forma. Neste caso as variáveis extras são computadas através do uso da equação integral da derivada tangencial. Portanto, esta abordagem acarreta em custo computacional mais elevado e maior dificuldade de implementação em especial em problemas 3D e de mecânica da fratura.

A segunda abordagem utiliza elementos descontínuos padrão onde a continuidade  $C^{1,\alpha}$  é preservada uma vez que todos pontos de colocação se localizam no interior do elemento, onde o requisito de continuidade é satisfeito. É importante ressaltar, contudo, que a utilização desses elementos não-conformes não eliminam totalmente a singularidade. Em alguns casos, como por exemplo, alguns problemas apresentados no Capítulo 5 podem surgir *quasi*-singularidades, pois os nós funcionais podem estar situados a pequenas distâncias da extremidade dos elementos, podendo assim, gerar um sistema de equações mal condicionado. Adicionalmente, o uso de tais elementos implica em um maior sistema de equações a ser resolvido, já que um nó extra é criado para cada nó localizado na interseção entre elementos. Este maior custo contudo tem sido compensado pelos bons resultados obtidos através desta

estratégia. Além disso, esta abordagem permite a descontinuidade da variável campo nas junções entre elementos, embora os resultados reportados na literatura indiquem continuidade da solução (RUDOLPHI, 1991, LIU & RIZZO, 1992 e 1993, PORTELA *et al.*, 1992, e LACERDA & WROBEL, 2001).

A terceira alternativa consiste em utilizar elementos contínuos baseados em funções de interpolação de classe  $C^0$ , porém com pontos de colocação localizados apenas no interior do elemento, onde o requisito de continuidade é satisfeito. Neste caso os nós geométricos do elemento se localizam nas extremidades dos mesmos, assim como para os elementos padrão, e as funções de interpolação são escritas para estes nós. Alguns exemplos da utilização desta abordagem são vistos em LUTZ *et al.* (1992) para problemas de mecânica da fratura elástica, SLADEK *et al.* (1993) e DOMÍNGUEZ *et al.* (2000) para teoria de potencial e elasticidade, e GALLEGO & DOMÍNGUEZ (1996) para problemas transientes de elasto-dinâmica.

Uma outra abordagem, ainda aplicada ao método de colocação, se baseia na idéia de ignorar ou “relaxar” os requisitos de continuidade da variável primária e discretizar a equações integrais de contorno utilizando elementos conformes  $C^0$ . Vários autores utilizaram essa abordagem aplicando-a em diversos campos: MATSUMOTO *et al.* (1993), HUANG & CRUSE (1994), CRUSE & RICHARDSON (1996) e RICHARDSON, CRUSE & HUANG (1997) para problemas de elasticidade, YOUNG (1996) e RICHARDSON & CRUSE (1998) para mecânica da fratura elástica, POON *et al.* (1998) para elasto-plasticidade, LIU & CHEN (1999) para problemas de acústica, CRUSE & RICHARDSON (2000) e JORGE *et al.* (2001) para teoria de potencial.

Não obstante alguns bons resultados iniciais reportados utilizando elementos de contorno isoparamétricos que admitem somente uma interpolação  $C^0$ , KRISHNASAMY *et al.* (1992), e MARTIN & RIZZO (1996) concluíram que os algoritmos implementados não são teoricamente justificados. Isso significa que do ponto de vista estritamente matemático apenas as implementações que assegurem continuidade  $C^{0,\alpha}$  ou  $C^{1,\alpha}$  em todos os pontos de colocação podem ser utilizadas nas aproximações das equações integrais de contorno padrão ou de gradiente respectivamente.

Em um trabalho conjunto entre os defensores da continuidade relaxada e seus críticos, MARTIN *et al.* (1998) tentaram chegar a uma conclusão sobre esse aparente paradoxo entre a falta de fundamento matemático e os bons resultados obtidos na prática. No artigo, os autores

reafirmam a importância dos requisitos de suavidade da função densidade para existência de um limite finito, mas aceitam a hipótese de relaxar os requisitos de continuidade quando da discretização da equação integral de contorno, uma vez que a descontinuidade no gradiente é limitada e a integral tem valor finito. Todavia, MARTIN *et al.* (1998) afirmam que a convergência e precisão dos resultados não podem ser garantidas, pois esta abordagem contém inconsistências matemáticas que não asseguraram a unicidade da solução numérica obtida.

Com base nestas discussões, LIU & RUDOLPHI (1999) apontaram a necessidade de se apresentar um estudo de convergência, numérico e analítico, ou um contra-exemplo mostrando divergência que invalidasse de vez a hipótese de “continuidade relaxada” nos algoritmos do método dos elementos de contorno. Seguindo esta linha de pesquisa, CRUZ (2001) usou a hipótese de continuidade relaxada na formulação auto-regularizada do fluxo para a análise de problemas não-triviais de transmissão de calor e obteve convergência oscilatória dos resultados. Na continuação deste trabalho de 2001, RIBEIRO *et al.* (2002a) analisaram problemas de potencial que contêm singularidade de fluxo por meio da mesma formulação adotada no trabalho anterior, e novamente obtiveram resultados oscilatórios. Observações análogas foram feitas por RIBEIRO *et al.* (2002b) ao adotar o conceito de “continuidade relaxada” na formulação auto-regularizada da força de superfície para análise de problemas bidimensionais de elasticidade, principalmente no caso de elementos de baixa ordem. No caso de elementos de ordem mais elevada observou-se que a descontinuidade no gradiente é limitada e tende a desaparecer à medida que a malha é refinada. Utilizando refinamentos tipo  $p$  em um algoritmo regularizado para o cálculo de tensões, RICHARDSON (2003) obteve para interpolações de ordem 12 e 16 uma redução no erro da ordem de 5 vezes em relação à sistemas de mesma dimensão porém com funções de interpolação de menor ordem.

Mais recentemente, uma quinta alternativa foi apresentada com base no princípio variacional (JORGE *et al.*, 2003). Neste trabalho os autores discretizaram a equação integral para força de superfície com elementos Lagrangeanos  $C^0$ , mas forçaram a continuidade  $C^{1,\alpha}$  da função campo na interseção entre elementos através de equações de restrições escritas como multiplicadores de Lagrange. As equações de restrição subsidiárias para as descontinuidades da derivada da função campo nos nós entre elementos foram escritas, igualando-se a descontinuidade a zero e o requisito de continuidade foi então satisfeito no

sentido variacional. A implementação dessa estratégia para problemas de elasticidade reduziu de forma significativa as oscilações e erros advindos da discretização utilizando a hipótese de continuidade relaxada, entretanto, analisando o trabalho em referência constata-se que:

- a formulação pode ser estendida para problemas de potencial;
- o algoritmo implementado desconsiderou a possibilidade de ocorrência de condições de contorno mistas em um mesmo elemento, com isso a continuidade deixou de ser forçada em algumas regiões onde, por hipótese, poderia ser forçada;
- a formulação variacional se mostrou mais efetiva quando a continuidade foi forçada nas partes suaves do contorno. Isso se deve ao fato de que nas equações de contorno hipersingulares o tratamento de “cantos” envolvendo apenas condições de Dirichlet não é trivial dada à inexistência de uma normal única nesses pontos de colocação.

A presente tese visa avançar sobre esses pontos.

## 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

A tese aqui apresentada está estruturada na forma de uma monografia conforme previsto no Regulamento do Curso de Doutorado em Engenharia Mecânica (1999) da Universidade Federal de Itajubá, aprovado de acordo com a 104ª Resolução do Conselho dos Institutos em sua 17ª Reunião Ordinária, em 23/06/1999 e aprovado *ad-referendum*, de acordo com a 15ª Resolução da Egrégia Congregação da EFEI, em 24 de junho de 1999. Sua estruturação e formatação segue a “Norma Para Apresentação Gráfica da Dissertação de Mestrado e Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UNIFEI”, aprovada pelo Conselho de Doutorado em sua 4ª reunião ordinária em 04/05/2005 e pela Assembléia dos CPG-M em sua 3ª Reunião extraordinária em 09/05/2005.

O trabalho está estruturado a partir da compilação de diversos trabalhos e artigos desenvolvidos no desenrolar do Plano de Trabalho, apresentados em congressos (BETE2004, CILAMCE2004, CILAMCE2005 e ICCES'05) e publicados ou submetidos a

revistas (*Computer Modeling in Engineering & Sciences* e *Computational Mechanics*), reorganizados buscando seguir uma seqüência didática e natural que permita o entendimento da formulação proposta. Desta forma, após as considerações iniciais do presente capítulo, onde foi apresentado o objeto da presente pesquisa, situando-o dentro do contexto histórico e mais recente da literatura especializada, tem-se, no Capítulo 2, algumas definições e conceitos matemáticos que facilitarão o entendimento e fundamentarão o desenvolvimento ao longo dos demais capítulos.

No Capítulo 3, adaptado do artigo publicado *Extension of the Variational Self-Regular Approach for the Flux Boundary Element Method Formulation* (PORTO *et al.*, 2005), a formulação variacional não-simétrica auto-regularizada para força de superfície é estendida para a forma auto-regularizada do gradiente da identidade de Green - a equação integral de contorno auto-regularizada para o fluxo. Aspectos tais como regularização, discretização utilizando elementos isoparamétricos e as condições necessárias de continuidade das equações hiper-singulares são também abordados. Ainda, uma vez que a formulação variacional originalmente proposta não satisfaz o requisito de unicidade do vetor normal, é proposta como alternativa, uma formulação variacional mista com equações de restrição aplicadas nos chamados nós suaves e elementos semi-contínuos nos pontos onde, devido às condições de contorno ou geometria, existe uma descontinuidade da força de superfície. A aplicabilidade desta estratégia para problemas de potencial é demonstrada no Capítulo 5 e para problemas de Elasticidade, no Capítulo 6.

O Capítulo 4 trata do desenvolvimento de um procedimento numérico para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão (FIT) apresentado em Dezembro de 2005 na *International Conference on Computational and Experimental Engineering & Sciences – “ICCES’05 Índia”*. A estratégia elaborada é genérica no sentido de sua aplicabilidade em resultados experimentais ou numéricos, neste último caso, não somente em algoritmos do Método dos Elementos de Contorno, mas também em outros métodos numéricos para solução de problemas de mecânica da fratura como, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos. A implementação numérica, contudo é feita em um algoritmo variacional para a equação de contorno para força de superfície. O cálculo dos fatores de intensidade de tensão são feitos após a obtenção da solução no contorno. Em uma fase de pós-processamento, o estado de tensão de diversos pontos interiores localizados em uma região adjacente à ponta da trinca é utilizado e, com base na solução de um sistema hiper-determinado, o erro no cálculo do fator de intensidade de tensão é minimizado em um sentido de mínimos quadrados. O emprego da

estratégia proposta neste capítulo, aplicada ao Método dos Elementos de Contorno é vista no Capítulo 6.

O Capítulo 5 traz alguns resultados obtidos com a implementação da estratégia proposta no Capítulo 3. Através dos exemplos, é mostrada a equivalência de resultados entre formulações (EIC para o fluxo, EIC para o potencial, VPC e variacional) e as vantagens do uso da formulação variacional em problemas envolvendo *quasi*-singularidades. Os resultados contidos neste capítulo foram extraídos de trabalhos apresentados em congressos.

O Capítulo 6 aborda a aplicação da formulação variacional em problemas clássicos de elasticidade e de Mecânica da Fratura. A aplicação da estratégia proposta no Capítulo 4 para obtenção dos fatores de intensidade de tensões é testada e os resultados obtidos são comparados em termos absolutos e relativos com resultados obtidos com outras técnicas e/ou dados disponíveis na literatura. Os resultados contidos neste capítulo fazem parte de um artigo que está sendo submetido a uma revista de nível internacional com corpo de revisores.

No Capítulo 7 são apresentadas as conclusões finais bem como, são feitas sugestões e considerações acerca das etapas futuras na continuação das idéias abordadas neste trabalho.

## Capítulo 2

# CONCEITOS BÁSICOS

## 2.1 FUNDAMENTOS

### 2.1.1 Notação Indicial

Essa notação utiliza índices (subscritos e sobrescritos) ligados às letras que representam o tensor em questão. Diversas variáveis e funções que aparecem ao longo do texto, tais como as coordenadas geométricas ( $x_i$ ), os deslocamentos ( $u_i$ ), as tensões ( $\sigma_{ij}$ ), etc. são apresentadas utilizando essa notação, onde o número de índices define a ordem do tensor. Além dessa regra existem outras que definem a notação:

- Se só existir um índice, este índice varia de  $i$  até  $n$ . Por exemplo, fazendo  $n=3$ :

$$x_i = \{x_1 \quad x_2 \quad x_3\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

- Um índice repetido assume todos os valores do seu intervalo e o tensor resultante é o somatório dos tensores componentes:

$$w_i t_{ii} = w_1 t_{11} + w_2 t_{22} + w_3 t_{33} \quad (2.2)$$

- Um tensor de ordem 1 (coordenadas, por exemplo) tem apenas um índice livre, um tensor de ordem dois (tais como tensões e deformações) tem dois índices livres e assim sucessivamente.

$$x_i = \{x_1 \quad x_2 \quad x_3\} \quad \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

- A notação “ $\cdot, i$ ” define a derivada de um tensor ou de uma função com relação a sua  $i$ -ésima coordenada

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \phi_{,i} \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = f_{i,i} \quad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} = T_{ij,k} \quad (2.4)$$

- O Delta de Kronecker, utilizado ao longo do texto, é definido da seguinte forma:

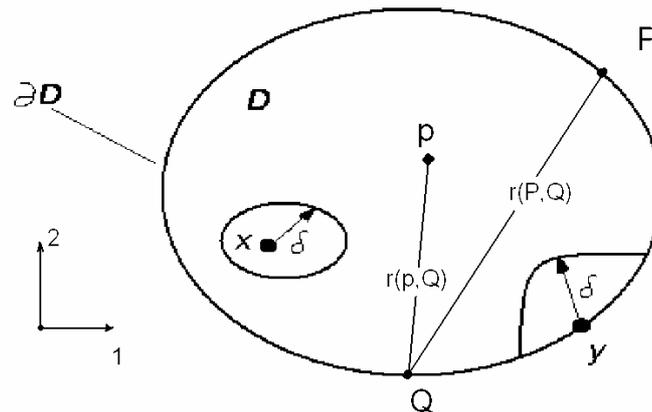
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (2.5)$$

## 2.1.2 Vizinhança

Os problemas a serem examinados nesse trabalho se restringem ao espaço bi-dimensional com domínio  $D$  cuja fronteira, no caso 2D, é o contorno  $\partial D$ . Define-se a vizinhança de um ponto  $x_0$  o conjunto de pontos  $B(x_0)$  que, para um  $\delta$  suficientemente pequeno satisfazem (PARIS & CANÃS, 1997), :

$$B(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n, |x - x_0| < \delta, \delta > 0\} \quad (2.6)$$

Considerando  $D \subset \mathbb{R}^n$ , então diz que  $x \in D$  é um ponto interior, ou ponto do domínio, se existir uma vizinhança de  $x$  totalmente contida em  $D$ . De outra forma, um ponto  $y \in \partial D$  é denominado um ponto da fronteira ou do contorno se toda vizinhança de  $y$  contenha pontos que pertençam a  $D$  e outros que não pertençam a  $D$ . Essas definições estão ilustradas na Figura 2.1.



**Figura 2.1:** Pontos que definem o domínio e a fronteira (PARIS & CANÃS, 1997)

Quando todos os pontos do domínio  $D$  são pontos interiores então  $D$  é denominado um domínio aberto; se o domínio  $D$  incluir todos os pontos da fronteira, então o domínio é dito fechado. A definição de domínio limitado é empregada quando existir um número maior que a distância de um ponto de referência a qualquer ponto do conjunto. Embora a aplicação do Método dos Elementos de Contorno não se restrinja a domínios limitados, nesse trabalho o termo domínio será empregado em referência a um conjunto fechado e limitado.

Uma função é dita contínua em um ponto interior  $x_0$  quando para qualquer número positivo  $\varepsilon > 0$  existir uma vizinhança de  $x_0$  tal que:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (2.7)$$

quando  $x$  pertencer a essa vizinhança. Em outras palavras, isso equivale a dizer que se  $x$  está próximo de  $x_0$ , o valor de  $f(x)$  não pode ser muito diferente do valor de  $f(x_0)$ . Da mesma forma, a derivada parcial de  $f(x)$  é contínua em  $x_0$  se satisfizer a Equação (2.7) na vizinhança de  $x_0$ . Com base nas definições anteriores diz-se que  $f(x)$  é suave se e somente se  $f(x)$  e as derivadas parciais de primeira ordem de  $f(x)$  forem contínuas em todos os pontos do domínio.

Supondo que a função  $f$  represente um contorno ou uma superfície de um problema pode-se afirmar que, se  $f$  é suave, então suas derivadas parciais são contínuas, ou seja,  $f$  tem, respectivamente, tangentes ou planos tangentes contínuos e conseqüentemente vetores normais únicos. Pontos do contorno que não satisfazem a condição de suavidade são denominados vértices ou cantos no caso bidimensional ou arestas no caso tri-dimensional. Uma vez que a integral é um operador linear, a existência de um ou mais cantos no contorno não traz restrições ao Método dos Elementos de Contorno, já que o seu cálculo pode ser feito

através do somatório das integrais de cada porção suave do contorno. Um contorno com essa característica é denominado suave por partes ou regular.

As considerações feitas no que segue se referem a domínios limitados fechados por contornos regulares, ou simplesmente, domínios regulares.

### 2.1.3 Integrais Singulares

Diz-se que uma integral é singular quando o integrando assume valor infinito em algum ponto de um intervalo de integração  $\Omega$ . Não obstante essa característica, isso não significa que a solução da integral resulte em um valor finito, já que seu valor não depende do valor do integrando em um número finito de pontos. De outra forma, o valor da integral nesses casos depende do comportamento do integrando numa vizinhança  $\Omega_\epsilon$  do ponto singular, isto é, se a integral é finita ou se existe em algum sentido especial. Esse cálculo em geral é feito excluindo-se do intervalo de integração a vizinhança  $\Omega_\epsilon$  que contém a singularidade e fazendo-a desaparecer através de seu limite:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_\tau} f(x) d\Omega(x) \quad (2.8)$$

Se o limite existir independente da forma da zona de exclusão  $\Omega_\epsilon$ , a função  $f(x)$  é integrável no sentido ordinário e a integral é imprópria e a singularidade é denominada fraca. Se o limite existir somente para o caso da região de exclusão ser uma *hiperesfera* (região  $n$ -dimensional simétrica em relação ao ponto de singularidade)<sup>2</sup> a singularidade é denominada de valor principal de Cauchy (VPC ou, do inglês, CPV). Integrais com singularidades de ordem superior a VPC são denominadas hiper-singulares.

### 2.1.4 Continuidade de Hölder

Sejam  $x$  e  $p$  dois pontos de  $D \in \mathbb{R}^2$  e  $r = |x - p|$ . Diz-se que a função  $f$  satisfaz a condição de Hölder em  $x$  se:

---

<sup>2</sup> No caso bi-dimensional, um círculo; e no caso tri-dimensional, uma esfera.

$$|f(x) - f(p)| \leq Ar^\alpha(x, p) \begin{cases} A > 0 \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

A Equação (2.9) equivale a dizer que para satisfazer a condição de Hölder, a função não deve crescer mais rápido do que  $r^\alpha$  no ponto  $p$ . Quando  $f$  satisfaz a condição de Hölder para os mesmos valores de  $A$  e  $\alpha$  diz-se que  $f(q)$  é uma função do tipo  $C^{0,\alpha}$ . Se além disso, sua derivada primeira também satisfizer a condição de continuidade de Hölder, então a função é dita do tipo  $C^{1,\alpha}$ .

A condição de Hölder pode também ser interpretada como um “meio termo” entre uma condição de a função aceitar o operador diferencial (ser “diferenciável”) e de ser contínua. Ou seja, é uma condição mais restritiva que a mera continuidade de uma função, porém menos que o requisito de ser diferenciável.

O conceito de continuidade de uma função no sentido de Hölder, é amplamente empregado nesse trabalho e na maioria dos trabalhos que se baseiam ou buscam uma formulação não-singular para o Método dos Elementos de Contorno. Isso porque só se pode assegurar a existência de integrais do tipo VPC se a densidade for  $C^{0,\alpha}$  e de integrais hiper-singulares se a densidade for  $C^{1,\alpha}$ .

### 2.1.5 Teoremas Fundamentais

Um dos pilares de sustentação das equações integrais de contorno é o chamado Teorema da Divergência que permite transformar uma integral de volume em uma integral de superfície, e assim reduzir a dimensão espacial do problema:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (2.10)$$

onde,  $\mathbf{A}$  representa um campo vetorial e  $\Omega$  é um domínio(volume) limitado por uma superfície regular  $\Gamma$  com o vetor unitário normal  $\mathbf{n}(x)$  apontando o exterior. A Equação (2.10) é também conhecida como Teorema de Gauss. Gauss entretanto, apresentou em seus trabalhos somente alguns casos especiais desta equação. O teorema geral, como da forma apresentada na equação, é creditado a Mikhail Vasilevich Ostrogradski (CHENG & CHENG, 2005).

Outro teorema bastante importante e por vezes considerado um caso especial da Equação (2.10) é o Teorema de Stokes, que transforma uma integral de superfície em uma integral de contorno:

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.11)$$

onde,  $S$  é um contorno fechado limitado e  $ds$  denota um elemento de linha orientado.

Utilizando o Teorema da Divergência, George Green obteve em 1828 a chamada Segunda Identidade de Green, que mais tarde serviria como base das equações integrais de contorno para problemas escalares (potencial):

$$\int_{\Omega} (u \nabla^2 w - w \nabla^2 u) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( u \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (2.12)$$

No caso de  $u$  e  $w$  serem funções harmônicas o lado esquerdo da equação é igual a zero o que resulta:

$$\int_{\Gamma} \left( u \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \quad (2.13)$$

De uma maneira resumida pode-se dizer que substituindo  $w$  por uma solução fundamental, isto é, por uma função singular que satisfaz a equação diferencial de governo do problema, obtém-se uma equação integral de contorno para problemas de potencial.

No caso dos problemas de Elasticidade um marco importante foi o desenvolvimento do Teorema do Trabalho Recíproco de Betti, uma generalização do Teorema da Reciprocidade anteriormente desenvolvido por Maxwell. Pelo Teorema de Betti, dados dois estados elásticos independentes em equilíbrio  $(\mathbf{u}, \mathbf{t}, \mathbf{F})$  e  $(\mathbf{u}', \mathbf{t}', \mathbf{F}')$ , onde  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}'$  são deslocamentos;  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{t}'$  são forças de superfície atuando sobre a superfície fechada  $\Gamma$ ; e  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{F}'$  são forças de corpo aplicadas na região  $\Omega$  definida pelo contorno  $\Gamma$ , então estes estados satisfazem a seguinte relação de reciprocidade:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}' - \mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{t}' \cdot \mathbf{u} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}') d\Gamma \quad (2.14)$$

Considerando o estado  $(\mathbf{u}, \mathbf{t}, \mathbf{F})$  correspondente às funções densidade do problema e o estado  $(\mathbf{u}', \mathbf{t}', \mathbf{F}')$  às soluções fundamentais de Kelvin para uma carga pontual em um corpo infinito, obtém-se, na ausência de forças de corpo, a identidade de Somigliana para deslocamentos (CRUSE, 1988).

$$u_j(p) = - \int_{\Gamma} u_i(Q) T_{ji}(p, Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} t_i(Q) U_{ji}(p, Q) d\Gamma(Q) \quad (2.15)$$

Na Equação (2.15)  $U_{ij}$  e  $T_{ij}$  representam respectivamente as soluções fundamentais de Kelvin para deslocamentos e forças de superfície e serão explicitadas no Capítulo 3.

### 2.1.6 Soluções aproximadas

Seja uma equação integral de contorno da forma:

$$\Omega(P) = \int_{\Gamma} B(P) d\Gamma = 0 \quad P \in \Gamma \quad (2.16)$$

Via de regra, a resolução das equações integrais de contorno irá requerer que tanto a geometria do contorno quanto as variáveis a ele associadas sejam aproximadas. Nesse processo de aproximação é comum o uso de polinômios. A aproximação de uma equações integrais de contorno  $\Omega(P)$  através de funções polinomiais resulta numa redução do número de graus de liberdade do problema de um número infinito para um número finito  $m$ .

$$\Omega(P) = \int_{\Gamma} B(P) d\Gamma = 0 \quad \xrightarrow{\text{aprox}} \quad \int_{\Gamma} B_{disc}(P_m) d\Gamma = 0 \quad P \in \Gamma \quad (2.17)$$

O cálculo das variáveis discretas do problema resultante  $B_{disc}(P_m)$  requer a construção de um sistema finito de equações lineares independentes. A construção deste sistema através do chamado Método de Colocação consiste em satisfazer a equação original nos pontos nodais  $P_m$  que definem a geometria do problema aproximado, ou seja:

$$\Omega(P_m) = 0 \quad (2.18)$$

Diferentemente, numa formulação por resíduos ponderados ter-se-á a equação original satisfeita em um sentido “médio”.

$$\int_{\Gamma} w_m(P) \Omega(P) d\Gamma = 0 \quad (2.19)$$

onde  $w_m$  são funções peso previamente selecionadas e  $m$  é número de nós do contorno discretizado. Se, as funções de interpolação forem utilizadas como funções peso tem-se o que se chama de Método de Galerkin. Uma das principais características deste método é que, quando aplicado às equações integrais de contorno hiper-singulares a condição de continuidade  $C^{1,\alpha}$  é automaticamente satisfeita (GRAY *et al.*, 1995).

O Método de Galerkin não será abordado neste trabalho, entretanto, é importante ressaltar que as estratégias citadas anteriormente são voltadas para o método de colocação. Outras abordagens para a solução das equações integrais de contorno hiper-singulares através de métodos como o de *Galerkin*, *Global Petrov-Galerkin* (HAN & ATLURI, 2003) ou *meshless local Petrov-Galerkin* (ATLURI *et al.*, 2003) têm se mostrado também uma alternativa viável.

Na aproximação do problema é bastante comum o uso de polinômios de Lagrange como funções de interpolação das variáveis do contorno. O amplo emprego dessa classe de polinômios deve-se ao fato deles não aumentarem o número de graus de liberdade do problema e não requererem nenhuma informação externa ao elemento no qual será empregado, entretanto apenas a continuidade  $C^0$  é assegurada nas extremidades do elemento.

## 2.2 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

A equação integral de contorno é aquela que satisfaz de forma exata a equação diferencial que rege o problema. Nesta seção são apresentadas as equações integrais de contorno regularizadas para problemas bidimensionais de potencial regidos pela equação de Laplace e de elastoestática regidos pelas equações de Navier.

CRUSE e seus colaboradores (HUANG, 1994; RICHARDSON *et al.*, 1997; MARTIN *et al.*, 1998, RIBEIRO & JORGE, 2000; JORGE *et al.*, 2001, JORGE *et al.*, 2002a) vêm desenvolvendo formulações auto-regularizadas para as equações integrais de contorno aplicando com sucesso a diversas classes de problema. As formulações padrões das equações integrais de contorno resultam em integrais singulares cujo cálculo pode ser simplificado.

Comparadas a estas, as equações regularizadas eliminam a necessidade de se avaliarem integrais fortemente singulares e hipersingulares baseadas no conceito de valor principal de Cauchy e de parte finita de Hadamard.

Aplicando essa idéia à identidade de Green para a equação 2D de Laplace é possível se obter uma equação integral de contorno em potencial auto-regularizada, onde um potencial arbitrário  $p(x)$  tomado sobre um ponto qualquer do contorno é utilizado como termo regularizador da equação integral. De maneira análoga, partindo da equação de Laplace na forma do gradiente (equações integrais de contorno para o fluxo) é assumida a existência de um gradiente único, equivalente a um potencial linear, em um ponto qualquer do contorno e esse termo regulariza a integral hiper-singular.

Como o objetivo proposto é desenvolver uma formulação variacional não-simétrica que force a continuidade  $C^{1,\alpha}$  interelementos para as derivadas do potencial e esse requisito só é mandatório para a forma do gradiente da identidade de Green, a formulação auto-regularizada para equação integral de contorno em fluxo será apresentada a partir de sua equivalente em potencial. O desenvolvimento completo das duas formulações pode ser verificado em RIBEIRO *et al.* (2000) e JORGE *et al.* (2001).

### 2.2.1 EIC para potencial

A formulação auto-regularizada do potencial é uma formulação parcialmente regular, pois permanece com uma integral fracamente singular de natureza logarítmica. O processo de regularização exige que a variável de campo (potencial) atenda à condição de continuidade de Hölder  $C^{0,\alpha}$ . A discretização desta equação através de elementos lagrangeanos atende a esse requisito.

Integrando a solução fundamental sobre um contorno fechado  $S = \sum_{i=1}^m S_i$ , onde, para satisfazer a condição de existência da solução, cada  $S_i$  representa um segmento curvo suave no sentido de Liapunov<sup>3</sup> (JASWON & SYMM, 1977) pode-se escrever a segunda identidade de Green para equação bi-dimensional de Laplace. No caso bi-dimensional, o contorno

---

<sup>3</sup> Segmento tipo  $C^{1,\alpha}$  que possui em cada ponto uma tangente e uma normal, mas não necessariamente uma curvatura.

fechado  $S$  é a fronteira que limita a região plana finita  $R$  com vetor unitário normal  $\vec{n}(s)$  apontando para fora da região. Tomando-se os pontos  $y$  e  $s$ , respectivamente um ponto interior e um ponto de integração na fronteira e um ponto fixo na fronteira  $x$ , tem-se para um ponto interior ( $y \in R$ ) a representação do potencial na forma da identidade de Green:

$$2\pi\phi(y) = -\int_s \phi(s) \vec{\nabla} \ln\left(\frac{1}{r(s,y)}\right) \cdot \vec{n}(s) dS + \int_s \vec{\nabla} \phi(s) \cdot \vec{n}(s) \ln\left(\frac{1}{r(s,y)}\right) dS \quad \forall y \in R \quad (2.20)$$

onde, o termo  $\vec{\nabla}\phi(s)$  é o gradiente do potencial  $\phi$  calculado em um ponto  $s$  da fronteira<sup>4</sup>. O campo potencial  $\phi(y)$  satisfaz a equação de Laplace e as condições contorno na região finita.

Seja a derivada direcional definida da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \ln\left(\frac{1}{r(s,y)}\right) \cdot \vec{n}(s) = \frac{d}{dn} \ln\left(\frac{1}{r(s,y)}\right) \quad (2.21)$$

então, a Equação (2.21) representa a derivada direcional da solução fundamental na direção normal definida pelo vetor unitário normal ao contorno  $\vec{n}(s)$ . Uma vez que o gradiente pode ser escrito em termos de suas componentes normal e tangencial, então a derivada na direção normal pode ser entendida como a componente do vetor gradiente naquela direção.

A identidade de Green para problemas nos quais o campo é contínuo no sentido de Hölder, isto é  $\phi(y) \in C^{0,\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , pode ser regularizado (DOMINGUEZ *et al.*, 2000). O procedimento de regularização consiste em subtrair e adicionar a integral:

$$\phi(x) \int_s \vec{\nabla} \ln\left(\frac{1}{r(s,y)}\right) \cdot \vec{n}(s) dS \quad (2.22)$$

Este processo remove a descontinuidade na representação integral do potencial. Atuando desta forma e considerando que a integral na Equação (2.22) expressa o ângulo de varredura que para qualquer ponto  $y \in R$  então, a Equação (2.22) é igual a  $2\pi\phi(x)$ . Tem-se então que a equação auto-regularizada para o potencial é da forma:

---

<sup>4</sup> O operador  $\nabla$  é denominado “nabla” (nome hebraico para um instrumento de cordas em forma de triângulo).

$$\begin{aligned}
2\pi\phi(y) &= 2\pi\phi(x) + \int_s \vec{\nabla} \phi(s) \cdot \vec{n}(s) \ln\left(\frac{1}{r(s,y)}\right) dS - \\
&\int_s [\phi(s) - \phi(x)] \vec{\nabla} \ln\left(\frac{1}{r(s,y)}\right) \cdot \vec{n}(s) dS
\end{aligned} \tag{2.23}$$

A primeira integral na Equação (2.23) é regular e limitada para todos os pontos ao passo que a segunda integral é fracamente singular, porém também limitada. A equação obtida é dita auto-regularizada no sentido de que as propriedades matemáticas do núcleo (denominado potencial de camada dupla ou dipolo) e da continuidade de Hölder, à medida que  $y \rightarrow s$ , reúnem todas as condições requeridas para modificação da formulação original do potencial.

Uma vez que a Equação (2.23) é contínua para  $y \rightarrow x$ ,  $\forall x \in S$ , incluindo os cantos (pontos não suaves), tomando o limite para o fronteira obtém-se a equação integral de contorno para qualquer ponto do contorno da região.

$$0 = -\int_s [\phi(s) - \phi(x)] \frac{d}{dn} \ln\left(\frac{1}{r(s,x)}\right) dS + \int_s \left. \frac{d\phi}{dn} \right|_s \ln\left(\frac{1}{r(s,x)}\right) dS \tag{2.24}$$

## 2.2.2 EIC Auto-regularizada para o Fluxo

A equação integral de contorno auto-regularizada para o fluxo é obtida tomando o gradiente da equação integral de contorno auto-regularizada para o potencial nos pontos interiores  $y$ . A seguir é subtraído e adicionado um campo potencial linear da forma:

$$\phi^L(s) = \phi(x) + \phi_i \Big|_x [x_i(s) - x_i(x)] \tag{2.25}$$

sendo o gradiente desse campo linear dado por

$$\nabla \phi^L(s) = \nabla \phi(x) \tag{2.26}$$

O uso do campo linear apresentado na Equação (2.25) segue uma estratégia análoga ao que foi feito ao se adicionar um potencial constante à equação original para o potencial. Da mesma forma, o resultado obtido é a forma auto-regularizada para o gradiente do potencial em pontos interiores  $y$ , que é regular para todos os pontos interiores limítrofes ao contorno que atendam a condição de continuidade, que nesse caso passa a ser  $\phi(y) \in C^{l,\alpha}$ .

Atendida a condição de continuidade e fazendo  $y \rightarrow x$ , em qualquer ponto  $s \equiv x$  obtém-se a equação regular de contorno para o gradiente do potencial.

$$0 = \int_s [\phi(s) - \phi^L(s)] \ln \left( \frac{1}{r(s, x)} \right)_{,ij} n_j(s) dS - \int_s [\vec{\nabla} \phi(s) - \vec{\nabla} \phi(x)] \cdot \vec{n}(s) \ln \left( \frac{1}{r(s, x)} \right)_{,i} dS \quad (2.27)$$

Por ser uma representação do gradiente é evidente que a equação acima obtida é uma equação vetorial, o que significa dizer que no caso bi-dimensional tem-se duas equações, uma para cada direção do sistema de coordenadas. Qualquer uma das equações pode ser utilizada, entretanto é mais freqüente utilizar a equação escalar obtida como a projeção do vetor gradiente do potencial na direção normal. A equação assim obtida é denominada identidade de Green para o fluxo do potencial.

$$0 = n_i(x) \int_s [\phi(s) - \phi^L(s)] \ln \left( \frac{1}{r(s, x)} \right)_{,ij} n_j(s) dS - n_i(x) \int_s [\vec{\nabla} \phi(s) - \vec{\nabla} \phi(x)] \cdot \vec{n}(s) \ln \left( \frac{1}{r(s, x)} \right)_{,i} dS \quad (2.28)$$

É importante ressaltar que as formulações auto-regularizadas para o potencial e o fluxo, Equação (2.24) e Equação (2.28) foram obtidas através de manipulações matemáticas antes do processo de discretização.

A discretização da Equação (2.28) usando a hipótese de continuidade relaxada com  $n$  elementos de contorno isoparamétricos conformes baseados em funções de interpolação de classe  $C^0$  fica na forma:

$$0 = \sum_{M=1}^n n_i(x^I) \int_{\Delta S_M} [\phi(\xi) - \phi^L(\xi)] \ln \left( \frac{1}{r(\xi, x^I)} \right)_{,ij} n_j(\xi) dS(\xi) - \sum_{M=1}^n n_i(x^I) \int_{\Delta S_M} [\vec{\nabla} \phi(\xi) - \vec{\nabla} \phi^L(\xi)] \cdot \vec{n}^M(\xi) \ln \left( \frac{1}{r(\xi, x^I)} \right)_{,i} dS(\xi) \quad (2.29)$$

Estes elementos não preservam a continuidade  $C^{l,\alpha}$  requerida para a validade da equações integrais de contorno auto-regularizada do fluxo, entretanto, conforme

RICHARDSON *et al.*, (1997), algoritmos baseados no conceito de continuidade relaxada não invalidam os requisitos básicos da formulação potencial.

A utilização da Equação (2.29) para um ponto de colocação situado sobre um canto requer a definição de elementos distintos compartilhando o canto, antes e depois deste ponto, de forma a permitir a ocorrência da descontinuidade das normais dos respectivos elementos. O algoritmo adotado neste trabalho admite descontinuidades da normal ao contorno e ou das condições de contorno usando um único nó nos cantos, podendo ser prescritos diferentes valores de fluxo nos elementos anterior e posterior ao nó compartilhado. Podem ser prescritos o fluxo na extremidade de um destes elementos e o potencial, que é contínuo, na extremidade do outro elemento, entretanto se o fluxo é incógnito em ambas as extremidades comuns destes elementos, apenas o valor médio do fluxo no canto pode ser calculado neste algoritmo.

### 2.2.3 MEC Incluindo Fontes de Calor no Domínio

A presença de fontes de calor no interior do corpo é um fato bastante comum em problemas reais de transferência de calor. Como a contribuição dessas fontes não é feita de forma direta através da fronteira, torna-se necessário acrescentá-la através de integrais de domínio no lado direito das equações (2.24) e (2.28). No caso da equações integrais de contorno para o potencial, Equação (2.24), a integral de domínio tem a forma (BREBBIA *et al.*, 1984):

$$-\int_{\Omega} \ln\left(\frac{1}{r(p,x)}\right) b(p) dV(p) \quad (2.30)$$

Na prática, a fonte de calor  $b(p)$  pode ser um feixe de *laser* de máquina de solda ou corte, ou mesmo de um equipamento de solda convencional. Nesses casos, a fonte de calor pode ser modelada matematicamente como uma singularidade no campo potencial. Assim, a fonte de calor pode ser escrita como  $Q_D * \delta(y, X_D)$ , onde  $Q_D$  é a magnitude da fonte de calor localizada no ponto  $X_D$  and  $\delta(y, X_D)$  é a função Delta de Dirac. Para qualquer ponto interior  $y \neq X_D$ , então  $\delta(y, X_D) = 0$ , e o campo potencial é contínuo.

No caso de existirem  $N_D$  fontes de domínio, a integral de domínio se transforma no somatório das magnitudes  $Q_D$  vezes a solução fundamental no ponto  $p = P_D$ . Nesses casos, as

formulações regularizadas para o potencial e o fluxo podem ser escritas respectivamente como:

$$0 = -\int_S [\phi(s) - \phi(x)] \frac{\partial}{\partial n} \ln \left( \frac{1}{r(s, x)} \right) dS + \int_S \frac{\partial}{\partial n} \phi(s) \ln \left( \frac{1}{r(s, x)} \right) dS + \sum_{I=1}^{N_D} Q_D(I) \ln \left( \frac{1}{r(P_D, x)} \right) \quad (2.31)$$

$$0 = n_i(x) \int_S [\phi(s) - \phi^L(s)] \ln \left( \frac{1}{r(s, x)} \right)_{,ij} n_j(s) dS - n_i(x) \int_S [\vec{\nabla} \phi(s) - \vec{\nabla} \phi(x)] \cdot \vec{n}(s) \ln \left( \frac{1}{r(s, x)} \right)_{,i} dS + n_i(x) \sum_{I=1}^{N_D} Q_D(I) \vec{\nabla} \ln \left( \frac{1}{r(P_D, x)} \right) \quad (2.32)$$

A simples presença dessas fontes pode resultar em algum tipo de instabilidade numérica no cálculo do potencial e seu gradiente em pontos interiores próximos ao ponto singular onde a fonte está concentrada. Da mesma forma, se o corpo em análise tiver uma elevada razão de aspecto (uma dimensão muito maior que a outra), isso acarretará que não só que a fonte fique muito próxima de alguma parte do contorno do corpo como também que se tenha pontos de campo muito próximos aos pontos de colocação. Essas condições e as complicações delas advindas são por isso consideradas *quasi-singularidades*.

As equações (2.31) e (2.32) obtidas permitem avaliar a influência da presença de fontes de calor no interior do domínio, da razão de aspecto e da solução em pontos muito próximos da fonte e da fronteira isoladamente ou de forma combinada como será visto no Capítulo 5.

## 2.2.4 EIC para elasticidade

Para elasticidade, a equação integral de contorno advém da equação diferencial de equilíbrio de Navier, que para um corpo isotrópico é dada por:

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{j,ij} + u_{i,jj} + \frac{1}{G} f_i = 0 \quad (2.33)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $i$  e  $j$  são componentes cartesianos,  $f_i$  são as forças de corpo e  $u_{i,jj}$  são as segundas derivadas dos

deslocamentos  $u_i$ . O operador diferencial desta equação é elíptico para todo valor de  $\nu < 0,5$  garantindo que os deslocamentos e tensões sejam contínuos em todo o domínio  $\Omega$ .

Seguindo o esquema desenvolvido por CRUSE (1977), a equação integral de contorno clássica para deslocamentos, partindo da equação (2.33) e na ausência de forças de corpo toma a forma:

$$C_{ij}(P) u_j(P) = - \int_{\langle \Gamma \rangle} u_i(Q) T_{ji}(P, Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} t_i(Q) U_{ji}(P, Q) d\Gamma(Q) \quad (2.34)$$

onde a primeira integral é uma integral do tipo valor principal de Cauchy (VPC),  $u_j$  e  $t_j$  são, respectivamente, as componentes  $j$  do deslocamento e da força de superfície (*traction*),  $C_{ij}(P) = \frac{1}{2} \delta_{ij}$  quando  $P$  é um ponto pertencente a um segmento suave do contorno, e  $U_{ji}(P, Q)$  e  $T_{ji}(P, Q)$  representam, respectivamente, as soluções fundamentais em deslocamento e força de superfície na direção  $i$  de um ponto  $P$  quando uma carga pontual na direção  $j$  é aplicada em um ponto  $Q$ . Para problemas bidimensionais em deformação plana a solução fundamental para deslocamentos é dada por:

$$U_{ji}(P, Q) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (2.35)$$

sendo,  $r=r(P, Q)$  a distância entre o ponto fonte ( $P$ ) e o ponto campo ( $Q$ ), conforme Figura 2.1,  $r_{,j}$  a derivada de  $r$  em relação a  $x_j$ . O campo de forças de superfície correspondente à solução fundamental é dado por:

$$T_{ji}(p, Q) = - \frac{1}{4\pi r G(1-\nu)} \left\{ \frac{dr}{dn} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} \right] - (1-2\nu) \left[ n_j r_{,i} - n_i r_{,j} \right] \right\} \quad (2.36)$$

Seguindo a mesma referência, derivando-se a identidade de Somigliana para deslocamentos e substituindo-a na Lei de Hooke obtém-se a identidade de Somigliana para tensões (IST), que é a representação integral da tensão  $\sigma_{ij}$  em um ponto interno  $p$  em função das grandezas do contorno. A identidade de Somigliana para tensões é expressa da forma:

$$\sigma_{ij}(p) = - \int_{\Gamma} u_k(Q) S_{kij}(p, Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} t_k(Q) D_{kij}(p, Q) d\Gamma(Q) \quad (2.37)$$

onde  $S_{kij}(p,Q)$  e  $D_{kij}(p,Q)$  são as soluções fundamentais apresentadas nas Equação(2.38) e (2.39).

$$S_{kij}(p,Q) = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left\{ 2 \frac{dr}{dn} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 4 r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \right. \\ \left. + 2\nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu) (2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} \quad (2.38)$$

$$D_{kij}(p,Q) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r} \left\{ (1-2\nu) (\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}) + 2 r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \quad (2.39)$$

Quando o ponto fonte tende ao contorno ( $p \rightarrow P$ ), a Equação (2.37) contém um núcleo hipersingular,  $S_{kij}(p,Q)$ , e outro fortemente singular,  $D_{kij}(p,Q)$ . As integrais hipersingulares existem se a função densidade tiver continuidade  $C^{1,\alpha}$  no sentido de Hölder no ponto de colocação (MARTIN & RIZZO, 1996). Neste caso, as derivadas primeiras do deslocamento devem ser contínuas no sentido de Hölder. Para tratar as integrais hipersingulares e fortemente singulares é usual utilizar os conceitos de parte finita de Hadamard (PFH) e valor principal de Cauchy (VPC) para se obter a equações integrais de contorno da tensão. Este procedimento é análogo ao utilizado para a obtenção da equação integral de contorno do deslocamento.

$$C_{ij}(P) \sigma_{ij}(P) = - \int_{\langle\langle \Gamma \rangle\rangle} u_k(Q) S_{kij}(P,Q) d\Gamma(Q) + \int_{\langle \Gamma \rangle} t_k(Q) D_{kij}(P,Q) d\Gamma(Q) \quad (2.40)$$

Conforme mencionado anteriormente, devido à ordem de singularidade dos núcleos, a primeira integral na Equação(2.40), cujo domínio de integração é representado por  $\langle\langle \Gamma \rangle\rangle$ , é avaliada no sentido de parte finita de Hadamard (HADAMARD, 1908) e a segunda, representada por  $\langle \Gamma \rangle$ , no sentido do valor principal de Cauchy (CAUCHY, 1825).

O processo de regularização da IST (Equação (2.37)) pode ser feito adicionando e subtraindo uma solução correspondente a um estado de tensão constantes:

$$u_k^L(Q) = u_k(P) + u_{k,m}(P) [x_m(Q) - x_m(P)] \\ t_k^L(Q) = \sigma_{km}(P) n_m(Q) \quad (2.41)$$

onde o sobrescrito  $L$  denota um campo linear de deslocamentos e forças de superfície associado ao estado de tensão no ponto  $P$ . O termo  $u_{k,m}(P)$  representa o gradiente dos

deslocamentos no ponto fonte,  $x_m$  as coordenadas do ponto fonte ( $P$ ) e de campo ( $Q$ ),  $\sigma_{km}(P)$  o estado de tensão no ponto  $P$ , e  $n_m(Q)$  as componentes do vetor normal no ponto de campo.

A Equação (2.41) permite uma transição suave do campo de tensão dos pontos interiores para pontos na fronteira, uma vez que todas as singularidades e descontinuidades foram eliminadas durante o processo de regularização. Levando a Equação (2.41) na Equação (2.37), fazendo  $p \rightarrow P$ , e operando a equação resultante com a normal ao contorno no ponto fonte, obtém-se a equação de contorno regularizada para força de superfície.

$$\int_{\Gamma} [u_k(Q) - u_k^L(Q)] S_{kij}(P, Q) n_i(P) d\Gamma = \int_{\Gamma} [t_k(Q) - t_k^L(Q)] D_{kij}(P, Q) n_i(P) d\Gamma \quad (2.42)$$

Equação (2.42) é totalmente regular e válida para todos os pontos da fronteira onde o requisito de continuidade é satisfeito. Ao contrário da formulação hiper-singular clássica, a Equação (2.42) não necessita ser calculada no sentido de valor principal de Cauchy ou de parte finita e Hadamard. Entretanto, para a existência de uma solução no contorno o requisito de continuidade  $C^{1,\alpha}$  permanece válido.

## Capítulo 3

# FORMULAÇÃO VARIACIONAL

### 3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, adaptado do artigo *Extension of the Variational Self-Regular Approach for the Flux Boundary Element Method Formulation* (PORTO *et al.*, 2005), a formulação variacional não-simétrica auto-regularizada para força de superfície é estendida para a forma auto-regularizada do gradiente da identidade de Green - a equação integral de contorno auto-regularizada para o fluxo. A aplicabilidade desta estratégia para problemas de potencial é demonstrada no Capítulo 5 e para problemas de Elasticidade, no Capítulo 6.

Os requisitos de continuidade inter-elementares do tipo  $C^{1,\alpha}$  para as derivadas do potencial são impostos no Método dos Elementos de Contorno através de uma formulação variacional não-simétrica. Não obstante o uso de elementos  $C^0$  Lagrangeanos, resultados precisos são obtidos quando se aplica a formulação em problemas de elasticidade e de transmissão de calor clássicos ou com condições singulares ou *quasi*-singulares.

No contexto desta tese, entende-se por *quasi*-singular qualquer condição na qual se tenha pontos fonte ou pontos interiores a uma distância muito pequena do elemento no qual se esteja calculando uma integral, particularmente um ponto nodal do elemento. Essa situação pode ocorrer, por exemplo, em corpos muito esbeltos ou, em malhas mal condicionadas onde se tem um elemento com grande comprimento adjacente a outro muito pequeno ou, quando se

deseja calcular o potencial, tensões, etc. em pontos interiores muito próximos do contorno. Em geral, este tipo de problema requer uma abordagem especial (HUANG & CRUSE, 1993), o que não será necessário com a formulação aqui utilizada.

Os exemplos apresentados mostram que o algoritmo desenvolvido baseado na formulação proposta é bastante eficiente uma vez que não é necessária nenhuma transformação para o cálculo das integrais singulares e os resultados obtidos têm boa precisão mesmo com o uso de poucos pontos de Gauss na integração numérica.

### 3.2 PROBLEMAS DE CONDUÇÃO DE CALOR

Com o advento da tecnologia de micro-componentes, tem surgido uma necessidade de se verificar a aplicabilidade das formulações e métodos existentes para a solução dos diversos problemas de engenharia a essa classe de componentes. Problemas de transmissão de calor em micro-componentes, por exemplo, podem acarretar dificuldades na obtenção de solução analítica ou numérica. Por mais simples que seja a geometria do corpo em estudo, o cálculo do valor do campo potencial em pontos muito próximos de uma fonte concentrada de calor ou em corpos muito esbeltos acabam resultando em problemas *quasi*-singulares.

Dentre os métodos existentes para a solução de problemas de condução de calor dessa natureza três abordagens podem ser destacadas: o método dos elementos finitos (MEF), a solução através da expansão em séries de auto-funções, e o método dos elementos de contorno (MEC).

A solução através do Método dos Elementos Finitos pode ser vista como a solução obtida a partir da minimização de um funcional. Isso significa que a solução em um determinado elemento é uma aproximação que corresponde a uma interpolação dos valores nodais que são parte da solução do problema de minimização. Procedimentos usuais para resolução dessa classe de problemas requerem malhas refinadas nas regiões onde o componente é esbelto ou próximo à singularidade para que se obtenha uma solução mais precisa. Além disso, sabe-se que o Método dos Elementos Finitos não funciona bem para fontes pontuais uma vez que essas “cargas concentradas” acabam sendo aproximadas por

“cargas distribuídas” ainda que ao longo de uma região muito pequena, ou seja, não só a resposta como próprio modelo sofrem aproximações.

Soluções baseadas na soma infinita de séries de auto-funções podem ser desenvolvidas para problemas de potencial supondo que o campo satisfaça alguns requisitos de continuidade. Exemplos dessas soluções são as séries de Fourier ou as séries obtidas através do método da transformação integral (OZISIK, 1968). Na prática, as séries infinitas têm de ser truncadas em um número finito de termos o que pode introduzir erros consideráveis, uma vez que o número de termos pode ser suficiente para o cálculo do valor do campo em um ponto interior afastado da fronteira, mas insuficiente para um ponto muito próximo. Além disso, devido ao fenômeno de Gibbs a solução próxima à fronteira pode também oscilar.

O Método dos Elementos de Contorno é uma alternativa a ser considerada quando se deseja uma solução precisa próxima à fronteira, ou próxima às fontes no domínio como será visto a seguir. Para problemas de potencial, o método se baseia na Segunda Identidade de Green. Ao contrário do Método dos Elementos Finitos, não há no Método dos Elementos de Contorno uma aproximação na formulação da equação integral do problema. As aproximações são feitas somente a partir da discretização da equação integral de contorno (BONNET, 1999). Contudo, diferentemente também do Método dos Elementos Finitos, as equações integrais obtidas podem conter termos singulares (do tipo valor principal de Cauchy) ou hiper-singulares (do tipo parte finita de Hadamard) e essa característica tem sido o principal obstáculo ao uso generalizado dos algoritmos baseados no Método dos Elementos de Contorno.

O desenvolvimento de formulações auto-regularizadas das equações integrais de contorno tem sido vista, se não como uma solução, como uma alternativa a essa desvantagem significativa. Tais formulações eliminam a necessidade de esquemas analíticos ou especiais para o cálculo das integrais fortemente singulares e hiper-singulares que usualmente ocorrem nas formulações clássicas do Método dos Elementos de Contorno. Como já foi visto, diferentes técnicas de regularização têm sido implementadas acarretando diferentes níveis de complexidade e eficiência.

Diferentes técnicas de regularização têm sido implementadas, com variáveis graus de eficiência e complexidade. A formulação auto-regularizada aqui apresentada se baseia no trabalho apresentado por RIBEIRO *et al.* (2000) para equação de Laplace. As equações

obtidas partem das equações integrais de contorno singulares que são reescritas de forma que os termos originalmente singulares são regularizados obtendo-se assim uma forma totalmente regular para qual pode ser utilizado um único algoritmo do Método dos Elementos de Contorno para integração de todos os elementos do contorno e todos os pontos de colocação.

### 3.3 FORMULAÇÃO VARIACIONAL

A discretização da equação integral de contorno regularizada para o fluxo através de elementos isoparamétricos conformes  $C^0$  viola o requisito de continuidade  $C^{1,\alpha}$  para o fluxo nos nós que interligam dois elementos. Nessa seção, é desenvolvida uma formulação não-simétrica variacional para problemas de potencial regidos pela equação bi-dimensional de Laplace, similar a desenvolvida por JORGE *et al.* (2003b) para problemas de elasticidade. Equações de restrição são obtidas e introduzidas no sistema de equações originais forçando a continuidade  $C^{1,\alpha}$  nas partes suaves do contorno, quando as equações integrais de contorno são discretizadas através de elementos isoparamétricos contínuos.

#### 3.3.1 Continuidade $C^{1,\alpha}$ Inter-elementares para as Derivadas do Potencial

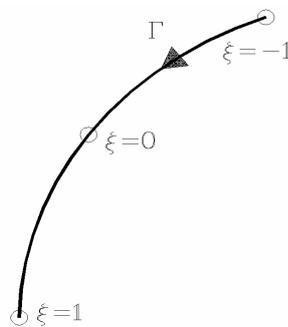
A discretização no Método dos Elementos de Contorno pode ser obtida utilizando elementos isoparamétricos com funções de forma  $N_i$  onde, denotando  $\bar{q} = d\phi/d\bar{n}$ , tem-se para geometria  $x_k$ , o potencial  $\phi_k$  e o fluxo  $q_k$  as seguintes aproximações ao longo dos  $m$  elementos:

$$\begin{aligned} x_k(S) &\approx x_k(\xi) = \sum_{i=1}^m N_i(\xi) x_k^i \\ \phi_k(S) &\approx \phi_k(\xi) = \sum_{i=1}^m N_i(\xi) \phi_k^i \\ q_k(S) &\approx q_k(\xi) = \sum_{i=1}^m N_i(\xi) q_k^i \end{aligned} \tag{3.1}$$

Com base no conceito de continuidade relaxada, as mesmas discretizações podem ser adotadas para a equação regularizada para o fluxo. Considerando que as derivadas do potencial são calculadas de forma independente em cada elemento em função dos valores do potencial e dos fluxos em cada nó, pode-se definir, para um sistema local de coordenada natural  $\xi$  (Figura 3.1), uma descontinuidade das derivadas do potencial ( $\Delta\phi_{,i}$ ), do primeiro nó ( $\xi = -1$ ) do elemento  $I$  em relação ao último nó ( $\xi = 1$ ) do elemento anterior como sendo:

$$\Delta\phi_{,i}^I = \phi_{,i}^I(\xi = -1) - \phi_{,i}^{I-1}(\xi = 1) \quad (3.2)$$

Uma vez definido nesse contexto o conceito de descontinuidade das derivadas do potencial deseja-se a seguir definir uma estratégia através da qual se possa introduzir equações de restrições que forcem tanto a densidade regularizada  $\phi(S) - \phi^L(S)$  presentes nas formas discretizadas das equações Equação 2.31 e Equação 2.32 a serem iguais a zero, como também as suas derivadas nos pontos nodais inter-elementares nos quais o contorno seja suave. Em outras palavras, o objetivo é eliminar qualquer “salto” de descontinuidade das derivadas do potencial definido pela Equação (3.2), em qualquer nó de ligação entre dois elementos que pertençam a uma parte suave do contorno.



**Figura 3.1:** Coordenadas naturais (elemento quadrático)

Para o caso bi-dimensional, nas regiões suaves do contorno, um nó inter-elementar liga somente dois elementos. Por conseguinte, o vetor normal é contínuo nesse nó, o que resulta em um conjunto mais simples de equações uma vez que somente as equações de continuidade na direção tangencial ( $i=I$ , na notação que segue) necessitam ser introduzidas como equações de restrição na formulação original. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned}\phi_{,1}'(\xi = -1) &= \phi_{,1}'^{-1}(\xi = 1) \\ \frac{\phi_{,\xi}'(\xi = -1)}{J'(\xi = -1)} &= \frac{\phi_{,\xi}'^{-1}(\xi = 1)}{J'^{-1}(\xi = 1)}\end{aligned}\quad (3.3)$$

onde,  $J(\xi)$  é o Jacobiano da transformação entre o elemento original (de coordenada  $S$ ) e o elemento padrão (de coordenada natural  $\xi$ ). Ainda, as derivadas do potencial,  $\phi_{,i}$ , são obtidas a partir da Equação(3.1):

$$\phi_{,i} = \sum_{i=1}^m N_i'(\xi)\phi^i \quad (3.4)$$

Analisando as novas equações a serem introduzidas percebe-se que todas as suas variáveis estão presentes no sistema de equações originais, dessa forma nenhuma nova variável é adicionada ao sistema. Visando simplificar a notação, o novo conjunto de equações pode ser escrito na forma matricial:

$$[Q_{dd}]\{q\} = \{0\} \quad (3.5)$$

É importante ressaltar que nesse trabalho, as equações de restrição, Eqs. (3.3), se aplicam somente a nós suaves do contorno. Na formulação original aqui estendida para problemas de potencial foi discutido pelos autores que a mesma estratégia quando aplicada aos nós não suaves (no caso, os cantos) não gerou bons resultados dada incongruência de se forçar a continuidade onde o próprio modelo não a admite. Por esse motivo essa segunda estratégia deixou de ser implementada.

### 3.3.2 Sistema de Equações a Partir da Minimização do Funcional

BREBBIA *et al.*, (1984) demonstraram que um funcional da energia potencial total de um sistema elástico pode ser escrito em termos das variáveis do contorno. De maneira semelhante é possível determinar um funcional  $\Pi$  para o problema potencial da forma  $\Pi = \Pi(\phi, q) \approx \Pi(\phi^n, q^n)$ , onde o índice  $n$  indica a aproximação para  $\{\phi\}$  e  $\{q\}$  utilizando as funções de forma dos elementos. Um sistema de equações não-simétrico pode ser obtido admitindo-se uma variação  $\delta\Pi=0$ . Uma vez que as variações  $\delta\phi^n$  e  $\delta q^n$  são arbitrárias tem-se um sistema de equações correspondente.

Uma vez satisfeita as condições de contorno e de continuidade, a solução para o sistema original de equações  $[A]\{x\}=\{b\}$  obtido a partir da discretização da equação integral de contorno é, em princípio, única. Sendo o subespaço da solução um subespaço de  $2N$ , onde  $N$  é o número de nós, a solução da equação integral de contorno pode ser representada por um ponto. Essa solução satisfaz o problema original de valor de contorno nos  $N$  pontos de colocação.

Por outro lado, as novas equações de restrição introduzidas no sistema obrigam essa solução a satisfazer uma condição de energia potencial mínima. Trata-se, portanto, de um problema hiper-determinado uma vez que o número de equações presentes é maior que o número de variáveis. Ao se utilizar a abordagem por colocação, a solução obtida é exata nos pontos de colocação e aproximada em qualquer outro ponto. Por sua vez essa solução exata é o minimizante do funcional de energia. Como para solução do problema as equações são discretizadas, somente numa situação limite, isto é quando o número de pontos de colocação tende a infinito (e o comprimento dos elementos tendem a zero) ambas equações irão representar a mesma solução, entretanto para um número razoável de pontos de colocação, a solução da equações integrais de contorno discretizada é aproximadamente a solução do problema de minimização do funcional de energia  $\Pi$ .

$$\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial \phi^n} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q^n} \right\} = \{0\} \stackrel{approx.}{\Leftrightarrow} [A]\{X^n\} = \{B\} \quad (3.6)$$

Pode-se admitir uma variação em torno da solução original de tal forma que, essa solução perturbada satisfaça o novo conjunto de equações modificadas que incluam graus de liberdade extras e um número de equações adicionais, que aqui no caso é dado pelas condições de continuidade inter-elementares para as derivadas do potencial conforme apresentado na Equação (3.1).

Para cada nova equação adicional tem-se um multiplicador de Lagrange associado permitindo que a solução admita uma variação, assim para todo conjunto de equações tem-se um conjunto de multiplicadores de Lagrange na forma  $\{\lambda_{ad}\}=\{\lambda_\phi \ \lambda_q\}^T$ . Para problemas 2-D, ter-se-á no máximo um conjunto de  $2N$  equações adicionais (o número exato dependerá das condições de contorno prescritas) a serem inseridas no conjunto original de equações. A nova solução será portanto o conjunto  $\{\phi^n, q^n, \lambda_\phi, \lambda_q\}^T$  com dimensão máxima  $4N$  e o novo funcional lagrangeano  $L$  passa a ser:

$$L(\phi^n, q^n, \lambda) = \Pi(\phi^n, q^n) + \{ \{ \phi^n \}^T \{ q^n \}^T \} [Q_{dd}] \{ \lambda_{dd} \} \quad (3.7)$$

Dessa forma, o problema inicial de minimização do funcional  $II$  é reescrito na forma de um problema de determinação de um ponto estacionário do lagrangeano expandido  $L$ . Fazendo  $\delta L=0$  obtém-se assim um novo sistema de equações para o Método dos Elementos de Contorno através de uma formulação variacional não-simétrica. A solução aproximada no contorno é a perturbação ou variação da solução da equação integral de contorno original. Essa solução aproximada satisfaz a equações integrais de contorno discretizada e as equações de restrição adicionais. O problema original de minimização fica transformado num problema de minimização com restrições impostas pelas equações adicionais que forçam a continuidade das derivadas do potencial.

Analisando o trabalho de MUSTOE *et al.*, (1982) pode-se concluir que a estratégia aqui proposta guarda certa semelhança com a formulação simétrica proposta pelos autores do referido trabalho. A diferença principal reside no fato de que naquele trabalho as equações de restrições foram impostas para o equilíbrio de tensões ao invés da continuidade inter-elementares aqui utilizada.

### 3.3.3 Implementação Computacional

Em relação à formulação simétrica, as vantagens de adotar uma formulação não-simétrica são que nenhuma nova variável é inserida no problema original e não é necessário realizar uma segunda integração. Essas características permitem que a implementação computacional dessa formulação seja demasiadamente simples e possa ser feita dentro do conceito de modularidade, isto é através de uma sub-rotina independente a ser inserida nos algoritmos pré-existentes.

Assim, logo após a montagem do sistema de equações  $[A]\{x\}=\{b\}$ , obtido através algoritmo original, é chamada a sub-rotina variacional. Com base nas condições de contorno, esta nova sub-rotina analisa a suavidade dos nós inter-elementares. Vale ressaltar que aqui, o conceito de suavidade está relacionado também com a continuidade do gradiente da variável primária, independente da suavidade do contorno. Desta forma, se o gradiente da variável primária for contínuo e a variável primária em qualquer um dos nós inter-elementares não for prescrita deve-se introduzir uma nova equação ao sistema original:

$$\frac{1}{J^I(\xi=1)} \sum_{i=1}^m (N'_i(\xi)\phi_i)^I - \frac{1}{J^{I+1}(\xi=-1)} \sum_{i=1}^m (N'_i(\xi)\phi_i)^{I+1} = 0 \quad (3.8)$$

ou seja, uma linha a mais, no sistema original  $[A]\{x\}=\{b\}$ , sendo que o que for prescrito vai para o lado direito e o que não for fica em  $[A]$  conforme a Tabela 3.1.

Por fim, a solução desse novo sistema de equações é obtida fazendo:

$$\begin{bmatrix} [A] & [Q_{dd}]^T \\ [Q_{dd}^{\theta_n} Q_{dd}^{q_n}] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \lambda_{dd} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B \\ B_{dd} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

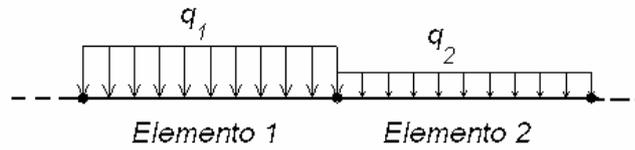
Vale ressaltar que o novo sistema obtido é um sistema esparsa cuja dimensão depende não somente do número de graus de liberdade do problema original discretizado, mas também das condições de contorno. Além disso, se, por exemplo, dois elementos interligados tiverem o potencial prescrito em todos os nós, a equação de restrição não terá variáveis desconhecidas. Nesses casos, a sub-rotina variacional critica esses dados e nenhuma equação é adicionada (primeira linha da Tabela 3.1).

**Tabela 3.1:** Implementação da estratégia variacional

$(\phi(\xi=1))^I$	$(\phi(\xi=-1))^{I+1}$	$[A]$	$\{b\}$
Prescrito	Prescrito	-	-
Prescrito	Não prescrito	$-\frac{1}{J^{I+1}(\xi=-1)} \sum_{i=1}^m (N'_i(\xi)\phi_i)^{I+1}$	$-\frac{1}{J^I(\xi=1)} \sum_{i=1}^m (N'_i(\xi)\phi_i)^I$
Não prescrito	Prescrito	$\frac{1}{J^I(\xi=1)} \sum_{i=1}^m (N'_i(\xi)\phi_i)^I$	$\frac{1}{J^{I+1}(\xi=-1)} \sum_{i=1}^m (N'_i(\xi)\phi_i)^{I+1}$
Não prescrito	Não prescrito	$\frac{1}{J^I(\xi=1)} \sum_{i=1}^m (N'_i(\xi)\phi_i)^I$ $-\frac{1}{J^{I+1}(\xi=-1)} \sum_{i=1}^m (N'_i(\xi)\phi_i)^{I+1}$	-

As implementações numéricas do método variacional, no presente trabalho, foram feitas tendo como base os algoritmos auto-regularizados do Método dos Elementos de Contorno desenvolvidos por RICHARDSON & CRUSE (1999) e RIBEIRO (2003) para problemas

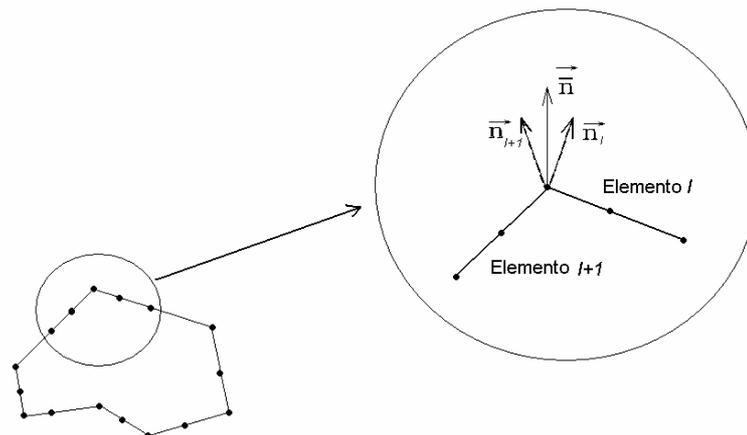
bidimensionais da teoria da elasticidade e por RIBEIRO & JORGE (2000) para problemas bidimensionais da teoria de potencial. Nesta implementação foram adotados elementos isoparamétricos quadráticos, cúbicos e quárticos.



**Figura 3.2:** Descontinuidade da força de superfície

Ao se utilizar elementos contínuos de classe  $C^0$ , tem-se valores únicos para as variáveis primárias nas interseções entre elementos. Entretanto, o mesmo não pode ser assegurado para o gradiente. Mesmo em partes suaves do contorno, a força de superfície pode apresentar descontinuidades (Figura 3.1).

Como foi visto, a formulação variacional originalmente proposta satisfaz o requisito de unicidade das derivadas da variável primária nas junções dos elementos adjacentes - os denominados “nós suaves”. Entretanto, não consegue satisfazer nos cantos devido à descontinuidade existente no vetor normal (Figura 3.2). Por conseguinte, atenção especial deve ser dada às junções entre elementos quando da discretização do contorno do problema.



**Figura 3.3:** Descontinuidade da geometria e normal média

### 3.4 FORMULAÇÃO VARIACIONAL MISTA

Sem perda de generalidade, o algoritmo do Método dos Elementos de Contorno desenvolvido por RICHARDSON e CRUSE (1999) para elasticidade bidimensional é tomado como base para a implementação da estratégia variacional mista. Seja a equação regularizada para força de superfície, Equação (2.42), reescrita abaixo

$$\int_{\Gamma} [u_k(Q) - u_k^L(Q)] S_{kij}(P, Q) n_i(P) d\Gamma = \int_{\Gamma} [t_k(Q) - t_k^L(Q)] D_{kij}(P, Q) n_i(P) d\Gamma \quad (3.10)$$

tendo seus termos regularizadores da forma:

$$\begin{aligned} u_k^L(Q) &= u_k(P) + u_{k,m}(P) [x_m(Q) - x_m(P)] \\ t_k^L(Q) &= \sigma_{km}(P) n_m(Q) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Observando as equações (3.10) e (3.11) constata-se que o algoritmo para a formulação auto-regularizada da força de superfície requer uma representação explícita do gradiente do vetor deslocamento em função dos deslocamentos e das forças de superfície e suas derivadas.

Da Lei de Hooke e das relações deformação-deslocamento pode-se chegar a uma representação das forças de superfície em termos dos gradientes dos deslocamentos:

$$t_j = \sigma_{ij} n_i = \left\{ \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{i,i} \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) \right\} n_i \quad (3.12)$$

Por outro lado, usando a regra da cadeia, pode-se expressar as derivadas tangenciais do deslocamento (direção "1") em função das coordenadas intrínsecas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \Gamma} + \frac{\partial u_k}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \Gamma} &= \frac{du_k}{d\Gamma} \\ \frac{du_k}{d\Gamma} &\approx \frac{du_k(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{d\Gamma} \\ \frac{du_k(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{d\Gamma} &= \frac{1}{J(\xi)} \sum_{i=1}^m N'_i(\xi) u_k^i \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde,

$$\frac{\partial x_1}{\partial \Gamma} = -n_2, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \Gamma} = -n_1, \quad \frac{dN_i}{d\xi} = -n_2 \text{ e } \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \quad (3.14)$$

De (3.13) e (3.14) chega-se a:

$$u_{k,\xi}^i = \sum_{i=1}^m N_i'(\xi) u_k^i = -J(\xi) n_2 u_{k,1} + J(\xi) n_1 u_{k,2} \quad (3.15)$$

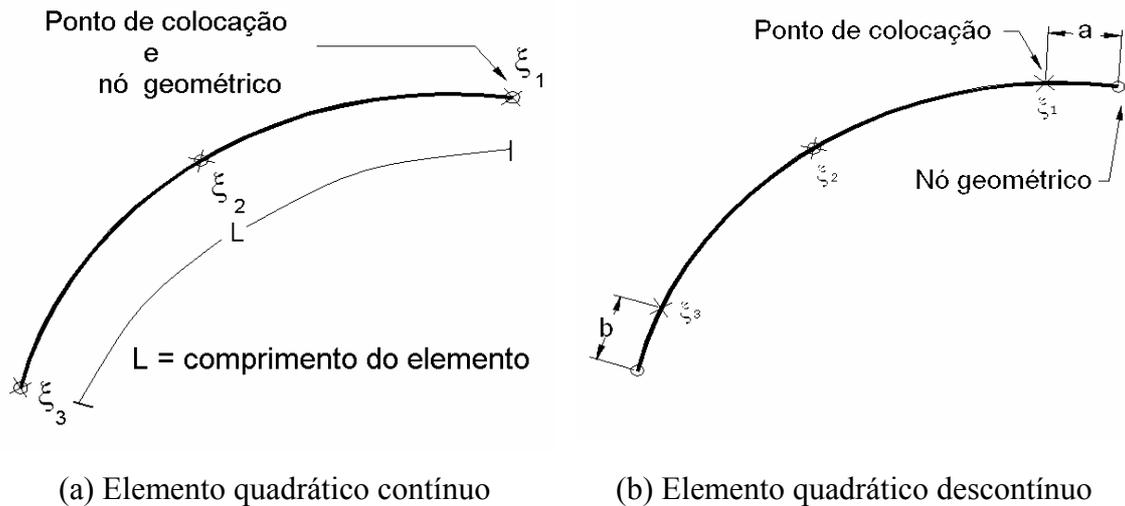
Ao levar a Equação (3.15) na Equação (3.12) chega-se a um sistema de equações cuja solução permite expressar o gradiente dos deslocamentos no ponto fonte, em termos das derivadas dos deslocamentos e das forças de superfície:

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ u_{1,\xi} \\ u_{2,\xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2G}{1-2\nu}(1-\nu)n_1 & Gn_2 & Gn_2 & \frac{2G\nu}{1-2\nu}n_1 \\ \frac{2G\nu}{1-2\nu}n_2 & Gn_1 & Gn_1 & \frac{2G}{1-2\nu}(1-\nu)n_2 \\ -n_2J(\xi) & 0 & n_1J(\xi) & 0 \\ 0 & -n_2J(\xi) & 0 & n_1J(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Devido à adoção da hipótese de “continuidade relaxada”, os termos regularizadores  $u_k^L$  e  $t_k^L$  não possuem valores únicos nas junções dos elementos. Estes dependem da localização do ponto de colocação com relação ao elemento a ser integrado. Para pontos fonte localizado nos cantos é adotada como normal unitária a média dos vetores normais calculados em cada um dos elementos que compartilham o nó.

Pode-se concluir, portanto, que os campos lineares regularizadores não são únicos e que, se a força de superfície for incógnita em um nó comum a dois elementos situados em um canto, apenas um valor médio da força de superfície no nó compartilhado será calculada pelo algoritmo o que poderá ser uma fonte de erro na formulação.

A abordagem a ser utilizada neste trabalho para lidar com o problema de descontinuidade do vetor normal e/ou da força de superfície será adotar uma formulação variacional denominada “mista”. Nela, além das equações de restrição, serão utilizados elementos semi-contínuos nos pontos nodais onde, devido às condições de contorno ou geometria não há como forçar a continuidade, isto é, elementos nos quais os nós funcionais das extremidades se localizam no interior do elemento (Fig 3.3b). Espera-se que esta estratégia resulte em uma redução do erro.



**Figura 3.4:** Localização dos nós funcionais e geométricos

Na Figura 3.3b, os parâmetros  $a$  e  $b$  representam a distância, em coordenadas intrínsecas, entre os nós funcionais e geométricos mais extremos do elemento. Em outras palavras, a distância entre o nó funcional e o nó geométrico do elemento será uma porcentagem do comprimento do elemento ( $\ell$ ), ou seja, se  $a = 0,1$  o que equivale dizer que  $a = 5\% \ell$ . A adoção dos valores de  $a$  e  $b$  em termos de coordenadas intrínsecas facilita a entrada de dados do problema, uma vez que não é necessário saber *a priori* o comprimento do elemento.

Conforme RIBEIRO (2003), as funções de forma usuais são reescritas, de forma geral (elementos contínuos, descontínuos ou semi-contínuos), para elementos quadráticos,

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{(\xi + b - 1)\xi}{(2 - a - b)(1 - a)} \\
 N_2 &= \frac{(a - b - \xi)\xi}{(1 - b)(1 - a)} + 1 \\
 N_3 &= \frac{(\xi - a + 1)\xi}{(2 - a - b)(1 - b)}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

elementos cúbicos,

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{9\xi^3 + 9\xi^2(b-1) - \xi + 1 - b}{(8 - 18a + 9a^2)(a + b - 2)} \\
N_2 &= \frac{27\xi^3 + 9\xi^2(3b - 3a - 1) + 9\xi(4a + 2b - 3ab - 3) + 9(a-1)(b-1)}{2 \cdot (3a - 2)(3b - 4)} \\
N_3 &= \frac{-27\xi^3 + 9\xi^2(3a - 3b - 1) + 9\xi(-2a - 4b + 3ab + 3) + 9(a-1)(b-1)}{2 \cdot (3a - 4)(3b - 2)} \\
N_4 &= \frac{-9\xi^3 + 9\xi^2(a-1) + \xi + 1 - a}{(8 - 18b + 9b^2)(a + b - 2)}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

e elementos quárticos,

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{4\xi^4 + 4\xi^3(b-1) - \xi^2 + \xi(1-b)}{(a-1)(2a-3)(2a-1)(a+b-2)} \\
N_2 &= \frac{-8\xi^4 + 4\xi^3(1+2a-2b) + 4\xi^2(2-3a-b+2ab) + 4\xi(1-b)(a-1)}{(2a-1)(2b-3)} \\
N_3 &= \frac{4\xi^4 + 4\xi^3(b-a) + \xi^2(4a+4b-4ab-5) + \xi(a-b)}{(a-1)(b-1)} + 1 \\
N_4 &= \frac{-8\xi^4 + 4\xi^3(2a-2b-1) + 4\xi^2(2-a-3b+2ab) + 4\xi(b-1)(a-1)}{(2b-1)(2a-3)} \\
N_5 &= \frac{4\xi^4 + 4\xi^3(1-a) - \xi^2 + \xi(a-1)}{(b-1)(2b-3)(2b-1)(a+b-2)}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Adotando-se ambos  $a$  e  $b$  nulos nas Equação (3.17) a (3.19), obtêm-se as funções de forma usuais para elementos contínuos e a formulação é denominada variacional. Se elementos semi-contínuos forem utilizados basta adotar  $a$  ou  $b$  diferentes de zero e a formulação se denominará, variacional mista. Neste caso a distância entre os dois nós deve ser pequena e a escolha de seu valor é restrita, devido aos possíveis problemas numéricos decorrentes da existência de um par de equações cujos coeficientes possuem valores bastante próximos uns dos outros (BREBBIA & DOMINGUEZ, 1989).

A aplicabilidade desta estratégia para problemas de potencial é demonstrada no Capítulo 5 e para problemas de Elasticidade, no Capítulo 6.

## Capítulo 4

# CÁLCULO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÕES ATRAVÉS DE PONTOS INTERIORES

## 4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo, adaptado do trabalho *Overdeterministic Singularity Subtraction Technique for Stress Intensity Factor Determination Using the Variational Traction-BEM*, trata do desenvolvimento de um procedimento numérico para o cálculo de fatores de intensidade de tensão (FIT) a ser utilizado nos problemas de Mecânica da Fratura Linear Elástica. A estratégia elaborada é genérica no sentido de sua aplicabilidade em resultados experimentais ou numéricos, neste último caso, não somente em algoritmos do Método dos Elementos de Contorno, mas também em outros métodos numéricos para solução de problemas de mecânica da fratura como, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos.

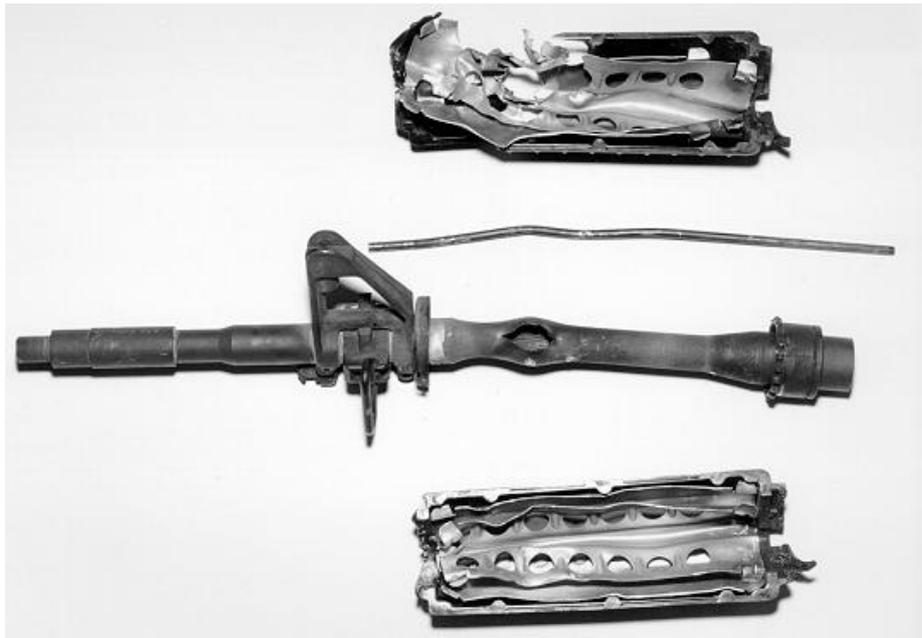
A implementação numérica, contudo é feita no algoritmo desenvolvido nos capítulos anteriores, isto é, em um algoritmo variacional para a equação de contorno para força de superfície.

O cálculo dos fatores de intensidade de tensão é feito em uma fase de pós-processamento após a obtenção da solução no contorno. Utilizando o estado de tensão de diversos pontos interiores localizados em uma região adjacente à ponta da trinca e, com base

na solução de um sistema hiper-determinado, o erro no cálculo do fator de intensidade de tensão é minimizado em um sentido de mínimos quadrados.

## 4.2 CONCENTRADORES DE TENSÕES

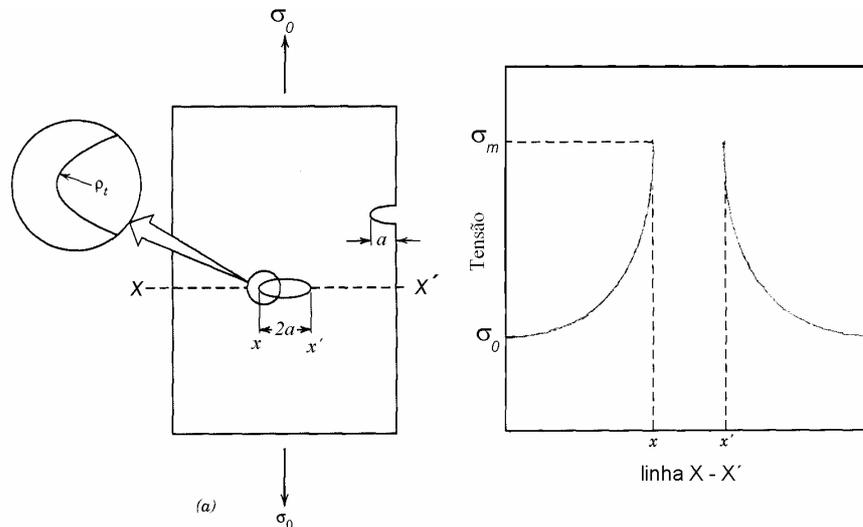
Uma fratura frágil em materiais normalmente dúcteis, como a apresentada na Figura 4.1 demonstra a necessidade de um melhor entendimento dos mecanismos de falha que ocorrem nos materiais. Diversos estudos nas últimas décadas levaram a evolução de uma área de pesquisa denominada “Mecânica da Fratura”. Via de regra, estas pesquisas visam determinar as relações existentes entre as propriedades do material, o estado de tensão e a existência de “defeitos” que possam ocasionar ou propagar uma falha do material.



**Figura 4.1:** Falha decorrente da pré-existência de uma trinca (cortesia: IMBEL)

O primeiro estudo nesta área é creditado a GRIFFITH (1921) que após analisar a resistência de barras de vidro concluiu que a discrepância existente entre a resistência teórica e experimental dos corpos de prova testados se devia a existência de falhas (trincas) no material que se propagavam sobre ação de um carregamento externo. Tais falhas, muitas vezes inerentes ao material, resultam numa menor resistência à fratura, pois a tensão aplicada ao corpo pode ser amplificada no campo próximo a elas. Este fenômeno é representado na

Figura 4.2 onde está esboçada a evolução da tensão ao longo de uma seção reta do corpo que contém um vazio.



**Figura 4.2:** Evolução da tensão em um corpo que contém um vazio

Na Figura 4.2 pode-se observar que a tensão alcança um valor máximo e vai diminuindo à medida que se afasta do vazio até atingir seu valor nominal. Devido a esta característica estas falhas são denominadas “concentradores de tensões” e a razão  $\sigma_m/\sigma_0$  é denominada “fator de concentração de tensão”,  $K_\sigma$ .

$$K_\sigma = \frac{\theta_m}{\theta_0} \quad (4.1)$$

É importante ressaltar que a concentração de tensão que pode ocorrer não está restrita a defeitos de ordem microscópica. Macro-defeitos tais como furos, cantos vivos e mudanças bruscas de seção podem ocasionar concentrações de tensão como será exemplificado mais adiante.

### 4.3 FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÕES

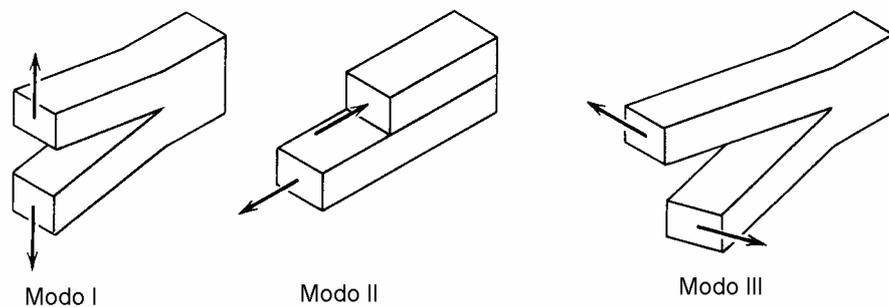
À medida que se deseja aprofundar o conhecimento sobre os mecanismos de falha dos materiais torna-se necessário uma melhor compreensão do estado de tensão na vizinhança da trinca. Em continuação às pesquisas de Griffith, IRWIN (1957) constatou, ao analisar diversos

problemas bi-dimensionais envolvendo uma chapa plana trincada, que o campo de tensão  $\sigma_{ij}$  em um ponto  $(r, \theta)$  na vizinhança da trinca tinha sempre uma configuração da forma:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \Theta \quad (4.2)$$

sendo a origem do sistema de coordenadas a ponta da trinca,  $f_{ij}(\theta)$  funções trigonométricas,  $\Theta$  termos de maior ordem e  $K$  uma constante denominada “fator de intensidade de tensões”. A relação obtida por Irwin equivale a dizer que o campo de tensão na região próxima da ponta da trinca é caracterizado pelo fator de intensidade de tensões.

Para fins de estudo, considera-se que a sollicitação da trinca em qualquer ponto de sua frente pode ser decomposto em 3 tipos básicos: modo I para abertura da trinca cuja direção de propagação seja perpendicular ao esforço de tração aplicado; modo II para esforço cisalhante paralelo ao plano da trinca e modo III para trinca devido a esforço de rasgamento. (Figura 4.3).



**Figura 4.3:** Modos de sollicitação de uma trinca (ALIABADI & ROOKE, 1992)

Para cada modo de carregamento existe um fator de intensidade de tensão associado. Tais fatores são parâmetros de suma importância durante todo ciclo de vida de um componente mecânico, em especial aqueles considerados críticos e de maior responsabilidade. Seu conhecimento durante a fase de projeto permite que o engenheiro estabeleça fatores de segurança que levem em conta não-homogeneidades ou falhas no material. Por outro lado, na fase de uso do produto, o conhecimento do fator de intensidade de tensão permite que se possa avaliar se uma peça trincada deve ser condenada e posta fora de uso ou se ainda possui condições de operar com segurança. No caso da aceitação do componente trincado, é possível ainda, em alguns casos, prever a vida restante em horas ou número de ciclos, uma vez que

os fatores de intensidade de tensão estão diretamente relacionados com o crescimento e direção de propagação da trinca por fadiga.

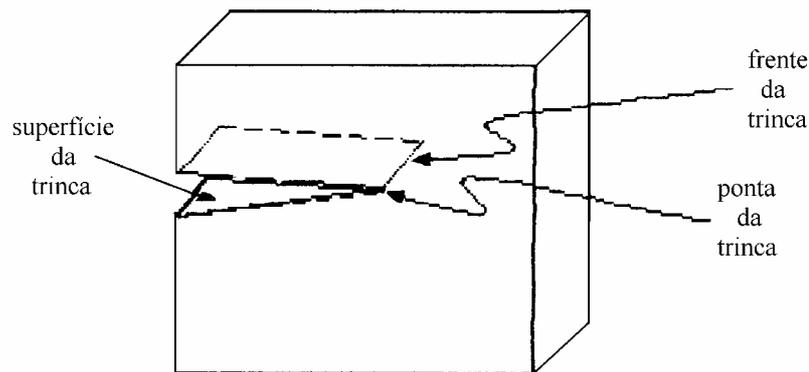
Em termos matemáticos, pode-se afirmar que os fatores de intensidade de tensão quantificam o comportamento singular do campo de tensão em uma região próxima à ponta ou frente de trinca. Desde que IRWIN (1957) demonstrou a importância dos fatores de intensidade de tensão, diversos métodos foram desenvolvidos para sua determinação sendo eles analíticos, numéricos ou experimentais.

## **4.4 MECÂNICA DA FRATURA ATRAVÉS DO MEC**

Nos dias atuais, o estudo da Mecânica Linear Elástica da Fratura, através do Método dos Elementos de Contorno, engloba duas áreas de especial interesse por parte dos pesquisadores. A primeira é o estudo das equações integrais de contorno hiper-singulares, para as quais foi, nos capítulos anteriores, desenvolvido um método de solução numérica baseado em uma formulação não variacional. A segunda área de interesse é a determinação dos fatores de intensidade de tensão.

Soluções analíticas para os problemas de Mecânica da Fratura, como acontece na maioria dos problemas de ordem prática, se limitam a poucos casos que envolvem geometrias e condições de contorno simples. Métodos experimentais por sua vez, além de requererem uma instrumentação adequada, podem ser inviáveis devido ao seu elevado custo (em diversos sentidos). Como consequência, os métodos numéricos vêm sendo largamente utilizados na determinação de parâmetros relacionados com a Mecânica da Fratura tais como os fatores de intensidade de tensão, que podem simular as condições de emprego do componente e assim, auxiliar na predição da vida e resistência residual, na determinação da frequência de inspeção, etc.

Para fins de estudo, considera-se que uma trinca é definida por duas superfícies coplanares no interior ou no contorno de um meio contínuo cuja interseção é uma linha comum (nos modelos bi-dimensionais, ponta da trinca e nos modelos tri-dimensionais, frente da trinca).



**Figura 4.4:** Ponta da trinca e frente da trinca

Para entender o que ocorre em um componente que apresenta uma trinca é preciso caracterizar o seu estado de tensão. Dentre os diversos métodos existentes para tratar o problema, o Método dos Elementos de Contorno é, por suas características, um método bastante eficiente, não obstante o fato de que, uma vez que as superfícies da trinca são coplanares, a aplicação direta do método resulta em sistemas com equações linearmente dependentes, isto é, em uma matriz singular (BONNET, 1999).

Diversas estratégias foram e vêm sendo propostas visando contornar este obstáculo, como por exemplo, o método da função de Green (SNYDER & CRUSE, 1975); o uso de múltiplos domínios (BLANDORF *et al.*, 1981); o método da descontinuidade dos deslocamentos (CROUCH & STARFIELD, 1983); e a formulação dual (PORTELA *et al.*, 1992a, SOLLERO & ALIABADI, 1995). Casos especiais, onde existam condições de simetria associadas à geometria e ao carregamento, podem, ainda, ser analisados aplicando o método diretamente, desde que o modelo numérico leve em consideração as condições de simetria existentes.

Em todos os casos acima mencionados, o cálculo do fator de intensidade de tensão pode ser feito também através de diferentes abordagens, sendo para materiais isotrópicos, as mais freqüentes, o método da integral  $J$  e os métodos dos deslocamentos.

A determinação dos fatores de intensidade de tensão através da integral  $J$  é perfeitamente viável no Método dos Elementos de Contorno (PORTELA *et al.*, 1992a), bastando para isso tomar um caminho fechado em torno da trinca e calcular os deslocamentos e tensões em pontos ao longo dele. Este caminho pode ser arbitrado uma vez que o resultado da integral independe dele. Além da necessidade de se calcular os deslocamentos e as tensões

ao longo do caminho, há que se calcular a integral propriamente dita, o que, devido à necessidade de cálculos adicionais pode ser visto como uma desvantagem.

Os métodos de deslocamento são aqueles baseados na solução clássica de Irwin para os deslocamentos na região próxima da ponta da trinca, onde a distância  $r$  que vai da ponta da trinca aos dos pontos pertencentes a esta região tende a zero. Os métodos de deslocamento, como por exemplo, o método do deslocamento na abertura da trinca, foram também facilmente implementados no Método dos Elementos de Contorno. Por serem simples, versáteis e eficientes, estes métodos têm sido largamente utilizados. Entretanto, tais métodos são bastante dependentes da discretização empregada na superfície da trinca em especial, na proximidade da ponta da trinca.

As tensões ou forças de superfície também podem ser utilizadas para se determinar os fatores de intensidade de tensão, como acontece na técnica de subtração da singularidade (PORTELA *et al.*, 1992b). Esta técnica foi inicialmente utilizada como estratégia para regularização na qual através da introdução de uma solução singular particular do problema de Mecânica da Fratura introduz-se os fatores de intensidade de tensão como variáveis adicionais no Método dos Elementos de Contorno. Recentemente, esta técnica foi implementada em uma etapa de pós-processamento em um algoritmo do Método dos Elementos de Contorno (DE MATOS *et al.*, 2004)

Uma revisão completa dos métodos acima descritos e de outros utilizados para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão, bem como sua utilização no Método dos Elementos de Contorno pode ser obtida nos trabalhos de CRUSE (1996) e MUKHOPADHYAY (2000).

Nas seções que seguem, a técnica de subtração de singularidade como apresentada por PORTELA *et al.* (PORTELA *et al.*, 1992b) e, recentemente implementada em um algoritmo do Método dos Elementos de Contorno por DE MATOS *et al.* (2004) é estendida para pontos interiores localizados no campo próximo adjacente à ponta da trinca. Para que o campo singular de tensão nesta região esteja corretamente representado é necessário utilizar termos adicionais à expansão de Williams. Com um número maior de coeficientes a determinar (advindos dos termos incorporados), pequenos erros resultantes obtidos através dos pontos interiores podem acarretar erros de ordem elevada para o fator de intensidade de tensão. A idéia aqui é reduzir estes erros, lançando mão de um número de pontos interiores maior do que o necessário para a determinação do sistema. Desta forma, ter-se-á um sistema hiper-

determinado de equações cuja solução permitirá obter um valor “médio” de fator de intensidade de tensão em um sentido de mínimos quadrados.

Esta estratégia será aplicada aos resultados obtidos através da formulação variacional em alguns exemplos de Mecânica da Fratura Linear Elástica.

## 4.5 MÉTODO HIPER-DETERMINÍSTICO PARA OBTENÇÃO DE $K_I$

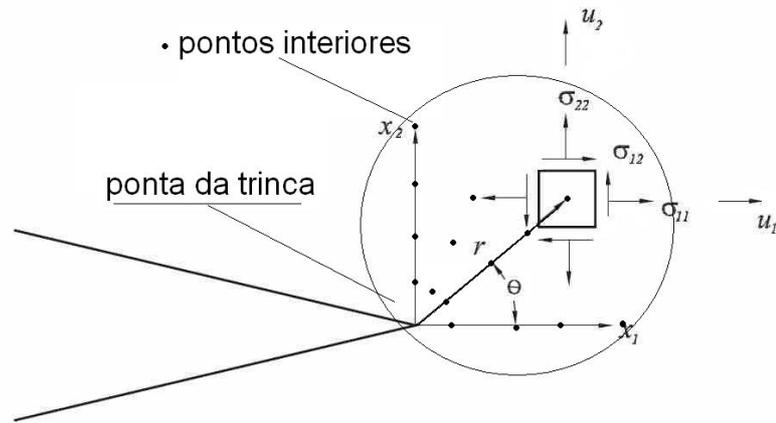
Na Mecânica da Fratura Linear Elástica, o termo singularidade é comumente empregado para caracterizar um campo de tensão que tende ao infinito. O fator de intensidade de tensão, definido na ponta da trinca, é um parâmetro que permite avaliar o “peso” dessa singularidade (MUSKHELISHVILI, 1953).

Em problemas bidimensionais, os campos de deslocamento e tensão na região próxima da ponta da trinca são freqüentemente representado por funções de Westergaard, como por exemplo, a série (ALIABADI & ROOKE, 1992)

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^N A_n r^{(n-1/2)} f_n(\theta) + \sum_{m=0}^M B_m r^m g_m(\theta) \quad (4.3)$$

onde  $A_n$  e  $B_m$  são coeficientes a determinar e  $f_n(\theta)$  e  $g_m(\theta)$  são funções trigonométricas calculadas tendo como base um sistema de coordenadas com origem na ponta da trinca conforme apresentado na Figura 4.5.

O número de termos  $N$  e  $M$  na Equação (4.3) depende da distância da região considerada à ponta da trinca e da precisão desejada. À medida que  $r$  aumenta tornam-se necessários mais termos para representar o campo singular de tensões e como consequência, torna-se necessário um maior número de informações e de tempo de processamento.



**Figura 4.5:** Sistema de coordenadas com origem na ponta da trinca

Supondo as seguintes funções modificadas de tensão de Muskhelishvili (DALLY & RILLEY, 1991):

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \text{Re}(Z) - y \text{Im}(Z') - y \text{Im}(Y') + 2 \text{Re}(Y) \\ \sigma_{yy} &= \text{Re}(Z) + y \text{Im}(Z') + y \text{Im}(Y') \\ \tau_{xy} &= -y \text{Re}(Z') - y \text{Re}(Y') - \text{Im}(Y)\end{aligned}\quad (4.4)$$

onde,  $Z(z)$  e  $Y(z)$  são funções de tensão complexas da forma:

$$Z(z) = \sum_{n=0}^N A_n z^{(n-1/2)} \quad Y(z) = \sum_{m=0}^M B_m z^m \quad (4.5)$$

e,  $Z(z) = \text{Re}(Z) + j \text{Im}(Z)$ , sendo  $z$  definido como  $z = x + jy = r e^{j\theta}$ .

No caso de um corpo submetido ao Modo I de carregamento, o estudo dos campos de tensão e deslocamento pode ser simplificado. Neste caso, devido ao modo de carregamento e a simetria existente, a função de tensão  $Z$  pode ser escrita, desprezando os termos de maior ordem:

$$Z = A_0 z^{-1/2} = A_0 r^{-1/2} e^{-j(\theta/2)} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} e^{-j(\theta/2)} \quad (4.6)$$

onde,  $A_0 = K_I/2\pi$ . Substituindo a Equação (4.6) na Equação (4.4) chega-se à seguinte representação para o campo de tensão próximo à trinca:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \\
\sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \\
\tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Tomando  $\theta = \pm\pi$  pode-se definir o fator de intensidade de tensão associado ao Modo I como sendo (KANNINEN&POPELAR,1985).

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ (2\pi r)^{1/2} \sigma_{yy} \Big|_{\theta = \pm\pi} \right\} \tag{4.8}$$

Considerando que  $A_n$  e  $K_I$  estão relacionados pode-se afirmar, de uma forma genérica, que o cálculo do fator de intensidade de tensão está associado à solução do sistema:

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} [f(\theta)] & [0] \\ [0] & [g(\theta)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A\} \\ \{B\} \end{Bmatrix} \tag{4.9}$$

onde, a dimensão da matriz dos coeficientes do sistema é determinada pelo número de termos usados na expansão da série ( $m+n+2$ ). Aumentando o número de termos da série, aumenta o número de coeficientes  $A_n$  and  $B_m$  a determinar. Via de regra, à medida que a distância  $r$  aumenta, mais termos da série tornam-se necessários para descrever de forma precisa as grandezas envolvidas (deslocamentos e tensões).

A Equação (4.7) indica que uma vez conhecido o estado de tensão de um único ponto ( $r$  e  $\theta$  conhecidos) é possível obter de forma determinística o valor de  $K_I$ . Por outro lado, levando todos os termos da Equação (4.4) na Equação (4.9) (série truncada em  $m=0$  e  $n=1$ ) tem-se um sistema de equações da forma.

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= A_0 r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] + A_1 r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right] + 2B_0 \\
\sigma_{yy} &= A_0 r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] + A_1 r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
\tau_{xy} &= A_0 r^{-1/2} \left( \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) - A_1 r^{1/2} \left( \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

É de se esperar que, na obtenção do estado de tensão do ponto escolhido existam erros inerentes a qualquer método numérico. Isso significa que a convergência da solução não será assegurada somente pelo aumento do número de coeficientes uma vez que, dependendo do grau de condicionamento do sistema, pequenos erros nos termos independentes podem resultar em grandes erros na determinação de  $A_n$  and  $B_m$ .

Uma estratégia para reduzir estes erros consiste em se utilizar pontos adicionais. Estes pontos adicionais irão fornecer mais equações ao sistema, resultando em um sistema hiper-determinado, cuja solução pode ser obtida por mínimos quadrados.

$$\begin{Bmatrix} \{A\} \\ \{B\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [f(\theta)] & [0] \\ [0] & [g(\theta)] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [f(\theta)] & [0] \\ [0] & [g(\theta)] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [f(\theta)] & [0] \\ [0] & [g(\theta)] \end{bmatrix}^T \{\sigma\} \quad (4.11)$$

Uma vez que, pelas funções utilizadas, o coeficiente  $A_0$  é função de  $K_I$ , e a solução por mínimos quadrados é uma forma de minimização de erro na determinação dos coeficientes de um sistema, percebe-se que esta solução, em outras palavras, minimiza o erro na determinação de  $K_I$ .

Uma estratégia semelhante a aqui proposta foi utilizada por BERGER & DALLY (1981) para análise experimental de deformações através de múltiplos extensômetros.

O emprego da estratégia proposta neste capítulo, aplicada ao Método dos Elementos de Contorno será vista no Capítulo 6. Entretanto, é importante ressaltar que esta estratégia pode ser perfeitamente adaptada a outros métodos numéricos.

## Capítulo 5

# RESULTADOS E DISCUSSÕES: POTENCIAL<sup>5</sup>

## 5.1 PROBLEMAS DE TRANSMISSÃO DE CALOR

Alguns exemplos de problemas de transmissão de calor em regime permanente são a seguir analisados permitindo assim avaliar a formulação apresentada comparando-a com outras formulações e com resultados disponíveis na literatura. A estratégia variacional foi introduzida a partir de um programa FORTRAN já existente (RIBEIRO *et al.*, 2000). Em todos os casos as integrações foram realizadas utilizando-se um esquema de quadratura de Gauss padrão com oito pontos e as grandezas apresentadas formam um sistema de unidades compatíveis.

Como se sabe, uma equação integral de contorno é uma representação matemática exata de um problema de valor de contorno. Entretanto, erros decorrentes do processo de discretização podem surgir uma vez que neste caso a solução é aproximada e válida somente em um número finito de pontos de colocação. Em problemas para os quais não se disponha de uma solução de referência com a qual se possa comparar o resultado obtido, a precisão da solução obtida para pontos do contorno pode ser analisada através de estimadores de erro. O

---

<sup>5</sup> Adaptado de Porto *et al.*, 2005

estimador utilizado nesse capítulo é uma extensão do estimador de erro global e local baseado no campo potencial exterior desenvolvido por JORGE *et al.* (2001).

A ausência de unidades nos exemplos indicam que os dados apresentados formam um sistema de unidades compatíveis.

## 5.2 ESTIMADOR DE ERRO

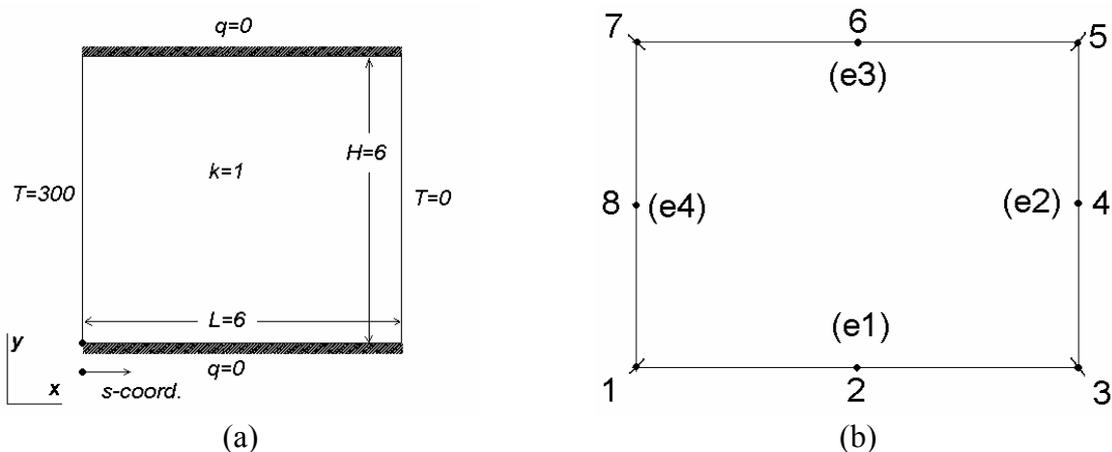
O estimador utilizado neste capítulo tem como hipótese fundamental o fato de que a solução obtida para o contorno tem uma grande influência na precisão da solução para pontos interiores. Se um ponto exterior for tratado como um ponto interior, isto é, se a solução para os pontos exteriores forem calculadas utilizando a mesma sub-rotina programada para pontos interiores, então se pode afirmar que a solução nesses pontos reflete a precisão da resposta obtida no contorno. Como a solução exata do potencial e do gradiente do potencial para qualquer ponto exterior é igual a zero, qualquer diferença na solução numérica será uma indicação de erro.

Pelo fato da distância entre o ponto exterior em análise e os nós do contorno estar presente na solução fundamental, quanto mais próximo estiver esse ponto de uma região do contorno, maior será a influência da solução nessa região no erro estimado. Isso significa que quanto mais próximo esse ponto externo estiver de um elemento, maior será a contribuição desse elemento no erro estimado, o que pode ser interpretado como uma medida do erro local (erro do elemento).

Por outro lado, se a distância for muito grande, a solução fundamental e, por conseguinte, o erro estimado tende a zero independente da solução no contorno. Devido a essa sensibilidade do estimador à distância do ponto exterior, decidiu-se nesse trabalho utilizar a distância de  $\frac{1}{4}$  do comprimento do elemento, pois este foi o valor com o qual JORGE *et al.* (2001) obtiveram os melhores resultados.

## 5.3 DOMÍNIO QUADRADO

Neste primeiro exemplo, o código gerado foi utilizado na análise de um problema relativamente simples onde se tem um contorno definido por linhas retas de comprimento igual a 6 (domínio quadrado), no qual a temperatura  $T$  varia linearmente numa direção. A temperatura é prescrita nas bordas opostas,  $x=0$  e  $x=6$  sendo  $T=300$  e  $T=0$ , respectivamente. Nas outras duas bordas,  $y=0$  e  $y=6$ , o fluxo  $q$  é prescrito e igual a zero, conforme apresentado na Figura 5.1.



**Figura 5.1:** Patch test: (a) geometria (b) discretização com 4 elementos quadráticos

A solução analítica desse problema

$$T(x) = -50x + 300$$

$$q = K \frac{dT}{dn} \tag{5.1}$$

indica que as densidades nas equações integrais de contorno ou são constantes ou variam linearmente ao longo do contorno. Programas que utilizam polinômios de baixa ordem e poucos pontos de integração conseguem com facilidade obter a solução para esse problema (BREBBIA & DOMINGUEZ, 1992). Por esse motivo, esse tipo de problema pode ser utilizado como um *patch test* aproximado (define-se como *patch test* um problema para o qual a solução esteja no limite de precisão do computador utilizado mesmo utilizando baixas ordens de integração).

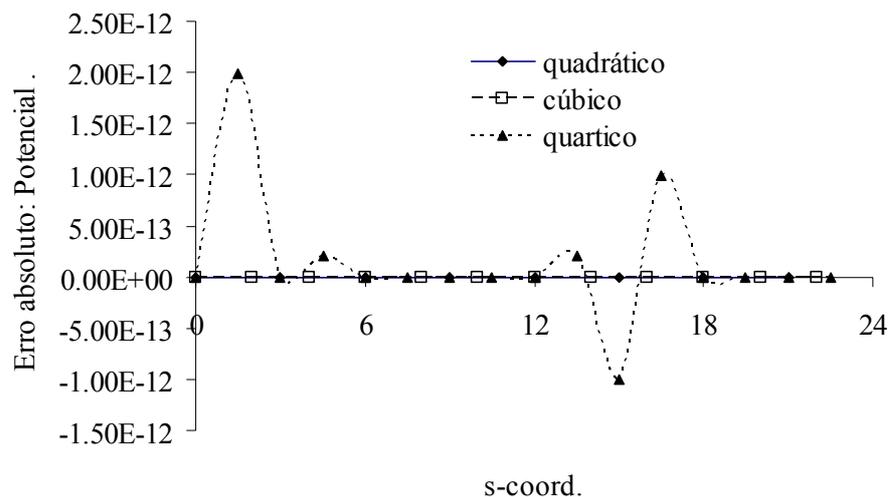
Conforme visto anteriormente esse problema tem solução analítica conhecida e, de acordo com a lei de Fourier, o fluxo e potencial são respectivamente constantes ou variam linearmente ao longo da fronteira. Por esse motivo, para polinômios de ordem igual ou maior

que um qualquer erro numérico na determinação dessas grandezas no contorno não deve ser atribuído à interpolação, esquema de integração, erros de arredondamento ou de truncamento, mas sim à formulação.

**Tabela 5.1:** Erro máximo na chapa plana: EIC variacional *versus* não-variacional

Elemento	Potencial:		Fluxo:	
	Magnitude do erro máximo (%)		Magnitude do erro máximo (%)	
	FARV	FARF	FARV	FARF
Quadrático	$\sim 10^{-15}$	$\sim 10^{-14}$	$\sim 10^{-12}$	$\sim 10^{-12}$
Cúbico	$\sim 10^{-15}$	$\sim 10^{-10}$	$\sim 10^{-12}$	$\sim 10^{-10}$
Quártico	$\sim 10^{-12}$	$\sim 10^{-10}$	$\sim 10^{-11}$	$\sim 10^{-9}$

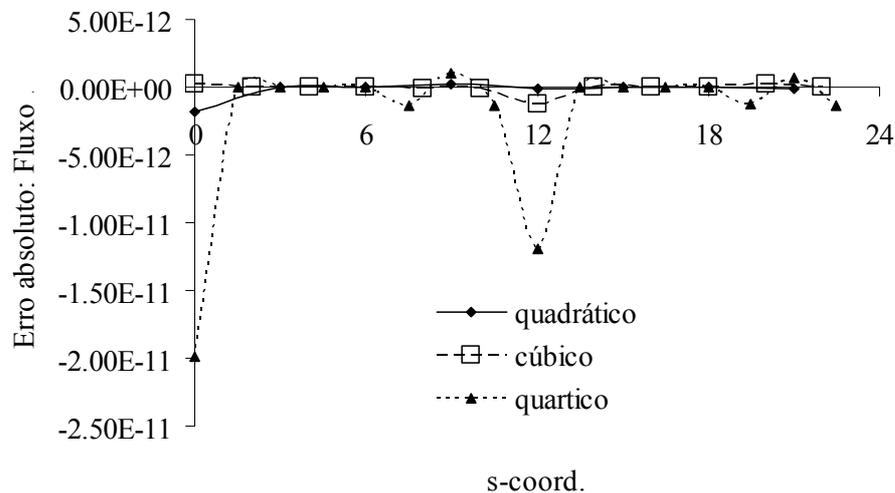
Para uma malha de quatro elementos são apresentados respectivamente, nas Figuras 5.2 e 5.3, os erros absolutos no potencial e no fluxo ao longo da coordenada  $s$  ( $s$ -coord) obtidos utilizando a formulação regularizada variacional, onde as coordenadas 0, 6, 12 e 18 correspondem aos quatro cantos do domínio. Na Tabela. 5.1 são apresentados, para as mesmas malhas, os erros relativos máximos no potencial e no fluxo obtidos tanto pela formulação variacional (FARV) como pela formulação para o fluxo (FARF). Através desse problema pode-se constatar que, mesmo para uma discretização grosseira, a formulação variacional produz resultados bastante precisos, alguns na ordem da precisão de máquina.



**Figura 5.2:** Domínio quadrado: erro absoluto no potencial ao longo da coordenada  $s$

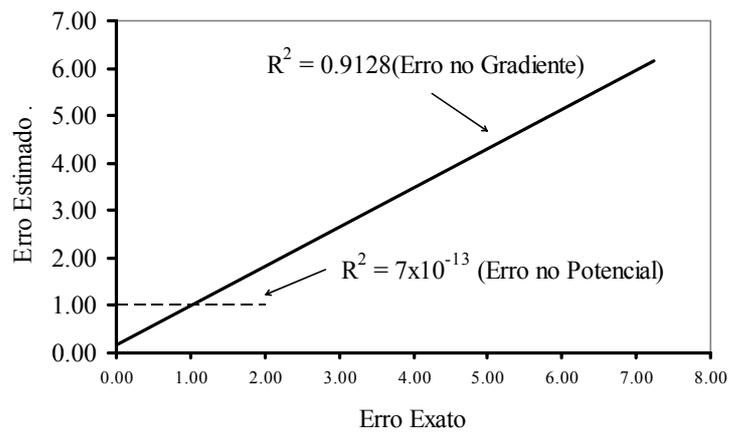
Constata-se ainda, que no pior caso, os erros são menores que  $10^{-9}$  e que nenhuma melhora significativa é observada ao se aumentar a ordem do polinômio interpolador. Ao contrário, devido ao maior número de cálculos envolvidos os erros de arredondamento e

truncamento parecem se tornar relevantes ou mesmo dominantes, de tal forma que os resultados para esses elementos de ordem superior são na verdade piores que os obtidos com elementos quadráticos.

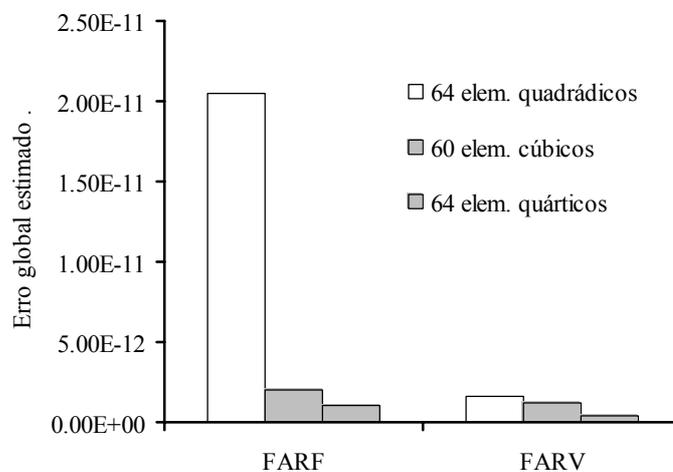


**Figura 5.3:** Domínio quadrado: erro absoluto no fluxo ao longo da coordenada  $s$

A Figura 5.4 mostra uma comparação entre as mesmas formulações anteriores, isto é fluxo (FARF) e variacional (FARV) utilizando malhas mais refinadas com 64 elementos quadráticos e quárticos, e 60 elementos cúbicos. Para essa comparação é utilizado o estimador de erro baseado no campo potencial exterior cuja correlação com o erro exato é apresentado na Figura 5.4a. A Figura 5.4b destaca a grande redução do erro global que a formulação variacional proporciona com elementos quadráticos, enquanto pouca melhora é notada na implementação com elementos cúbicos e quárticos. Como se sabe, os erros na formulação não-variacional se devem principalmente ao não atendimento dos requisitos de continuidade  $C^{1,\alpha}$  e são especialmente elevados para os elementos quadráticos. A formulação variacional se mostra portanto capaz de produzir uma grande melhora onde os erros eram originalmente altos, como na formulação em fluxo utilizando elementos quadráticos. Por outro lado, apenas uma pequena melhora é observada ao se utilizar elementos cúbicos e quadráticos, o que pode ser explicado pelo fato de que, na formulação em fluxo com esses elementos, os erros já eram pequenos ou pelo fato de que, proporcionalmente, na malha com elementos quadráticos a razão entre nós interelementares / nós interiores é maior (2:1) que nas malhas com elementos cúbicos (2:2) ou quárticos (2:3), ou seja, o “peso” da violação da condição  $C^{1,\alpha}$  nestas últimas é menor.



(a)



(b)

**Figura 5.4:** Domínio quadrado: EIC variacional *versus* não-variacional.

## 5.4 TUBO CILÍNDRICO

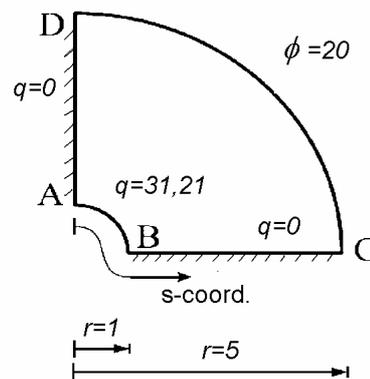
Neste exemplo tem-se um problema de transmissão de calor em regime permanente de um tubo cilíndrico de parede espessa. O raio interno da seção transversal do tubo é igual a  $r=1$  e o raio externo  $r=5$ . O fluxo  $q$  na face interna é prescrito igual a 31,21. Na face externa a temperatura é prescrita igual a  $T=20$ . O coeficiente de condutividade térmica é  $K=1$ . Este problema possui solução exata dada por:

$$T(r) = 31,21 \left[ \ln \left( \frac{9,4901855}{r} \right) \right] \quad (5.2)$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = -31,21 \frac{1}{r}$$

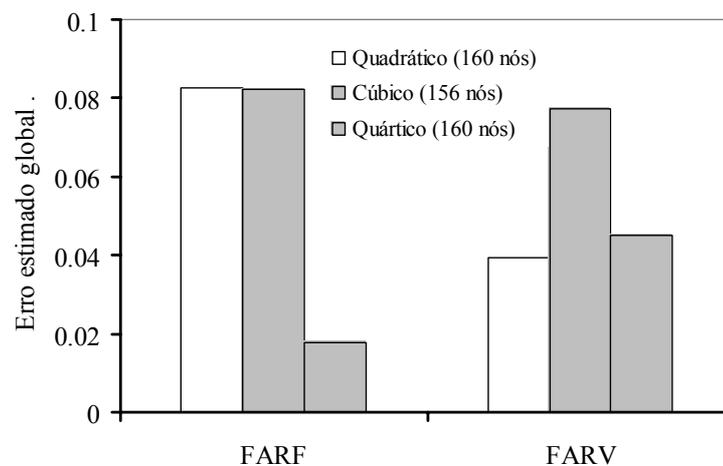
onde,  $T(r)$  é a temperatura ao longo da direção radial  $r$ , e  $q = k (dT/dn)$ , o fluxo de calor.

Devido a simetria axial do corpo, apenas um quarto do cilindro é apresentado e discretizado, conforme mostra a Figura 5.5. Nos contornos artificiais criados nos eixos de simetria (bordas retas) considera-se o fluxo igual a zero.



**Figura 5.5:** Tubo cilíndrico (1/4 da geometria)

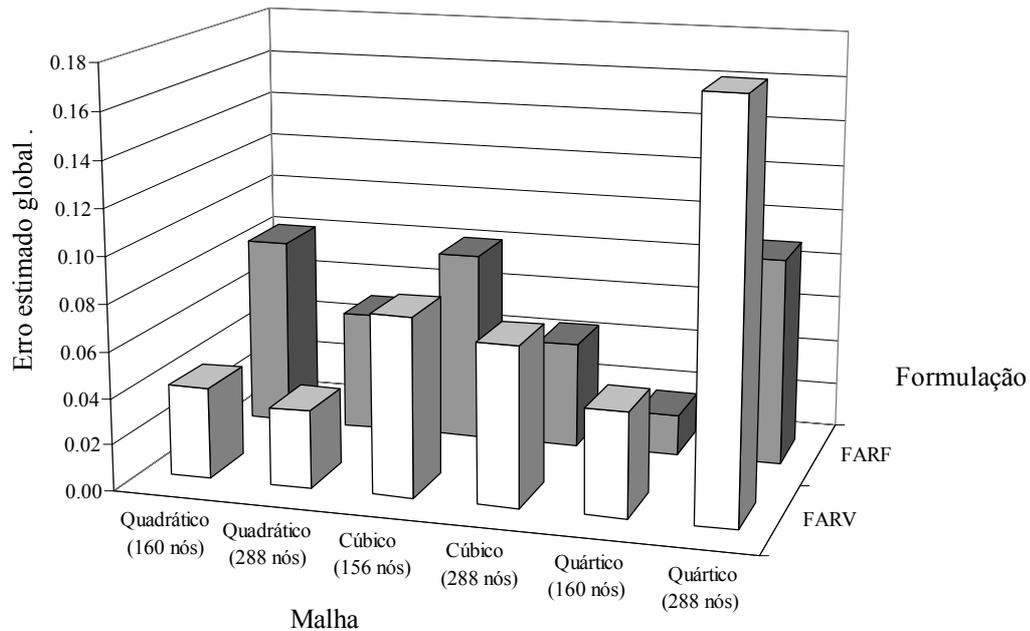
A influência da formulação variacional no erro numérico obtido utilizando elementos quadráticos e de ordem mais alta é novamente investigada nesse exemplo. Comparações utilizando o estimador de erro anteriormente descrito são apresentadas na Fig 5.6 para malhas com cerca de 160 nós. Pode-se notar que a maior redução no erro ocorre para os elementos quadráticos, ao passo que uma pequena redução é notada para os elementos cúbicos e para os elementos quárticos os erros aumentam.



**Figura 5.6:** Erro global no tubo cilíndrico: EIC variacional *versus* não-variacional

O efeito da formulação variacional no erro estimado para elementos de ordem dois, três e quatro (quadrático, cúbico e quártico respectivamente) é também analisado. Comparações

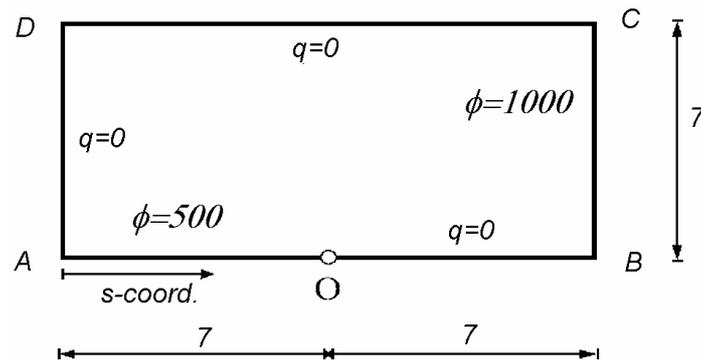
feitas usando o estimador de erro citado na seção 3.2 são apresentadas na Figura 5.7 para discretizações utilizando 156, 160 e 288 nós. Pode-se observar uma considerável redução no erro global quando a formulação é aplicada a elementos quadráticos, ao passo que, pouca redução ou mesmo um aumento no erro é obtido quando a formulação é aplicada a elementos cúbicos e quárticos.



**Figura 5.7:** Erro global conforme formulação, discretização e ordem do elemento

## 5.5 PROBLEMA DE MOTZ

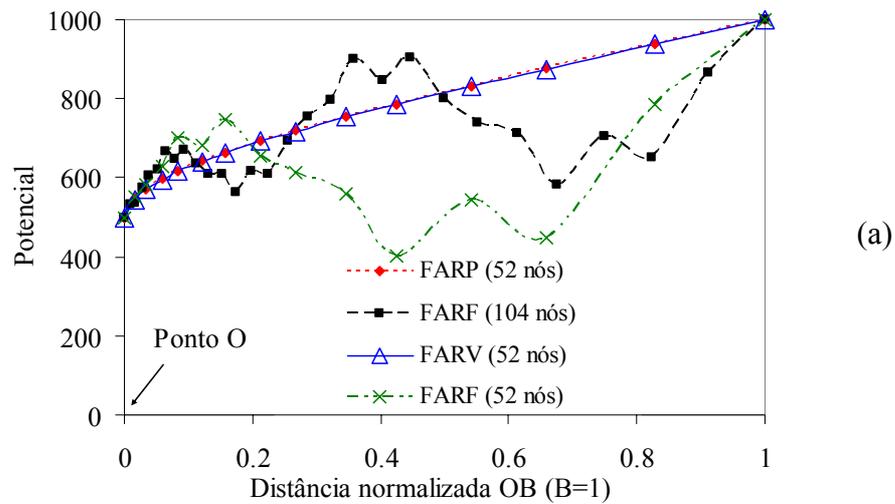
O problema proposto por Motz, na forma apresentada por JASWON & SYMM (1977), consiste em um domínio retangular com as dimensões e condições apresentadas na Figura 5.8, no qual existe um ponto singular  $O$  ( $s=7$ ). A esquerda desse ponto o potencial é prescrito e a direita dele tem-se o fluxo prescrito e igual a zero. No ponto  $O$  do elemento no qual o potencial é prescrito o fluxo é singular.



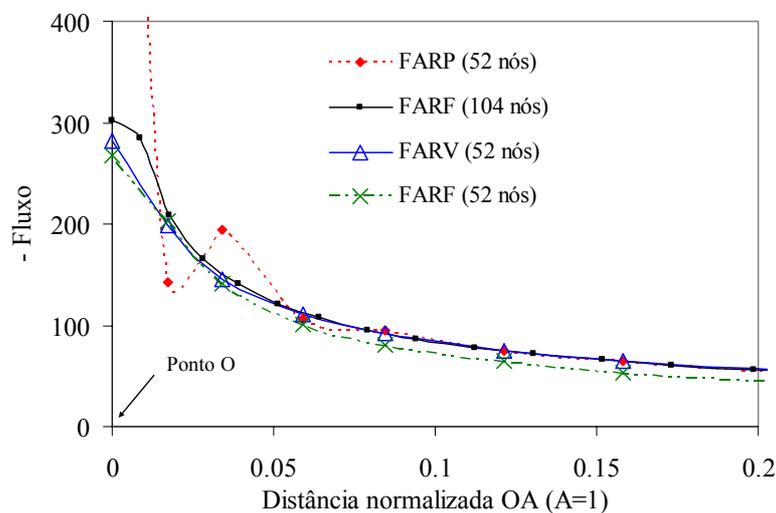
**Figura 5.8:** Problema de Motz

São apresentados na Figura 5.9a e Figura 5.9b respectivamente, os resultados obtidos para o potencial e o fluxo numa região próxima ao ponto de singularidade  $O$  para a formulação em fluxo (FARF) e variacional (FARV) obtidos para uma discretização utilizando 26 elementos quadráticos (52 nós). Estes resultados são também comparados àqueles obtidos através da formulação em fluxo não variacional para uma malha com 52 elementos (104 nós). Observa-se que mesmo com o refinamento, as oscilações existentes no potencial ao longo da linha  $OB$  existentes na formulação em fluxo não variacional não desaparecem. Por outro lado, na formulação variacional, tais oscilações desaparecem e o resultado desta formulação converge para o resultado obtido com a equação integral de contorno para o potencial (FARP), usada como referência.

A Figura 5.9b apresenta o resultado do fluxo ao longo da linha  $AO$ , (o fluxo é singular no ponto  $O$ ). Numa região afastada do ponto de singularidade os resultados estão bastante próximos uns dos outros. À medida que se aproxima do ponto de singularidade o fluxo calculado pelas formulações em fluxo (FARF) e variacional (FARV) cresce monotonicamente, porém com valores afastados dos obtidos com a equação integral de contorno para o potencial (FARP), que embora oscile, tem um valor maior no ponto singular. É possível que essa diferença ocorra devido ao fato que ao eliminar as oscilações a resposta é suavizada e com isso os elementos quadráticos utilizados (não-singulares) são incapazes de representar adequadamente o comportamento assintótico do fluxo.



(a)



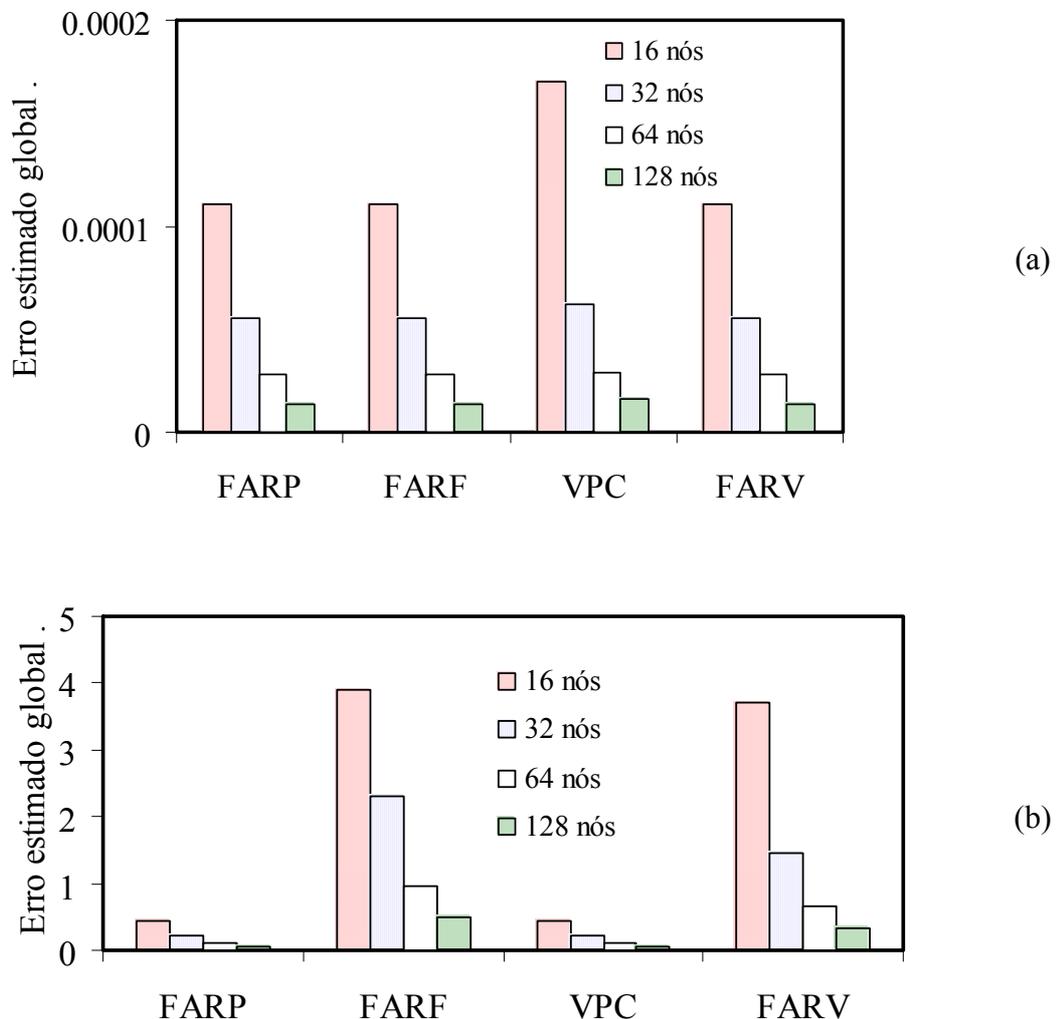
(b)

**Figura 5.9:** Problema de Motz: (a) Potencial (b) Fluxo próximo ao ponto singular

## 5.6 PROBLEMAS QUASI-SINGULARES

Na seção anterior foi mostrada, através de exemplos, a aplicabilidade da formulação variacional proposta em alguns problemas clássicos de transferência de calor. No que segue, a mesma formulação será empregada para solução de problemas de transferência de calor que apresentem algum tipo de *quasi*-singularidade. Para tanto, será inicialmente analisado um domínio cujas condições de contorno e propriedades são semelhantes ao domínio apresentado na Figura 5.1.

Partindo de uma discretização inicial com 16 nós, são obtidas sucessivas malhas com 32, 64 e 128 nós, através de um processo de refinamento tipo  $h$ , onde para se obter a discretização seguinte simplesmente divide-se por dois o comprimento do elemento da malha anterior. No que se refere ao estimador de erro aqui utilizado, isso significa que a distância entre o elemento e o ponto exterior ao contorno no qual o potencial e o gradiente serão calculados, é também dividida por dois. Essa distância como visto é uma das variáveis presentes no estimador de erro aqui utilizado para comparar quatro formulações distintas: regularizada para o potencial, regularizada para o fluxo, valor principal de Cauchy (denotada na figura como VPC) e regularizada não-simétrica variacional para o fluxo.



**Figura 5.10:** Erro global no potencial: (a) sem fontes ; (b) com fonte

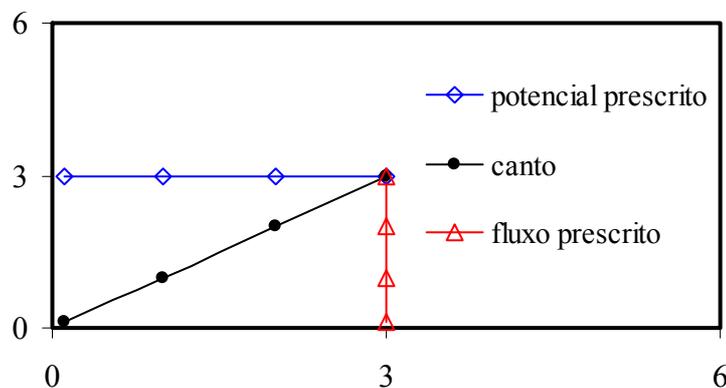
Os resultados numéricos para o erro médio global obtidos através do estimador para o campo potencial externo são apresentados na Figura 5.10, onde a parte (a) corresponde a um

problema como apresentado na seção 5.2, isso é sem fontes internas e a parte (b) corresponde ao mesmo domínio porém com uma fonte de domínio no centro (3,3) de magnitude  $Q_D=100$ .

Em todos os casos, a magnitude do erro global estimado diminui com o refinamento da malha, mostrando que malhas mais refinadas atuam no sentido de reduzir os erros locais. Se o ponto exterior fosse aproximado da fronteira sem o refinamento da malha os erros na região próxima a esse ponto seriam maiores. No que se refere às formulações, constata-se que, na maioria dos casos, as formulações regularizadas produzem resultados um pouco melhores que a formulação de valor principal de Cauchy, sendo que os resultados tornam-se significativamente melhores à medida que a malha é refinada.

Ao se incluir a fonte de calor no domínio, os resultados para a equação integral de contorno para o fluxo (FARF) se degeneram quando comparados *ceteris paribus*, com as demais formulações. A formulação variacional para o fluxo, contudo mantém o erro no mesmo patamar das demais formulações. Pelo que foi apresentado pode-se afirmar que nesse caso a formulação regularizada para o potencial é equivalente à formulação VPC ao passo que a formulação variacional para o fluxo é superior a sua contra-parte não-variacional. Por esse motivo e visando simplificar as análises seguintes doravante serão comparadas somente às formulações regularizada variacional para o fluxo e regularizada para o potencial.

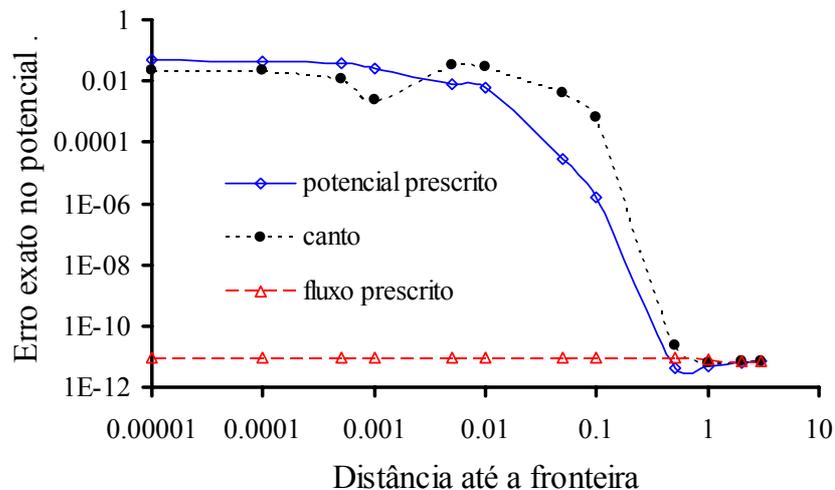
Para avaliar a influência da razão de aspecto e da localização dos pontos interiores a chapa plana sem fontes é novamente considerada. Neste caso, a solução analítica para o potencial e o fluxo,  $T(x)=-50x+300$  e  $q=K \, dT/dn$  respectivamente continua valendo, independente da razão aspecto do corpo. Assim sendo, é possível calcular o erro exato das soluções obtidas através do Método dos Elementos de Contorno.



**Figura 5.11:** Caminhos distintos na direção de diferentes condições de contorno

Suponha que um ponto interior inicialmente localizado no centro (3,3) do domínio possa se mover em direção à fronteira percorrendo três caminhos distintos conforme mostrado na Figura 5.11. Através do primeiro caminho (para esquerda) o ponto se desloca em direção a uma região suave do contorno com o potencial prescrito. No segundo caminho (para baixo) o ponto também se desloca em direção a uma região suave do contorno com fluxo prescrito, na metade do lado. E, no terceiro caminho, o ponto se desloca em direção a um canto, onde o vetor normal e as condições de contorno são descontínuas.

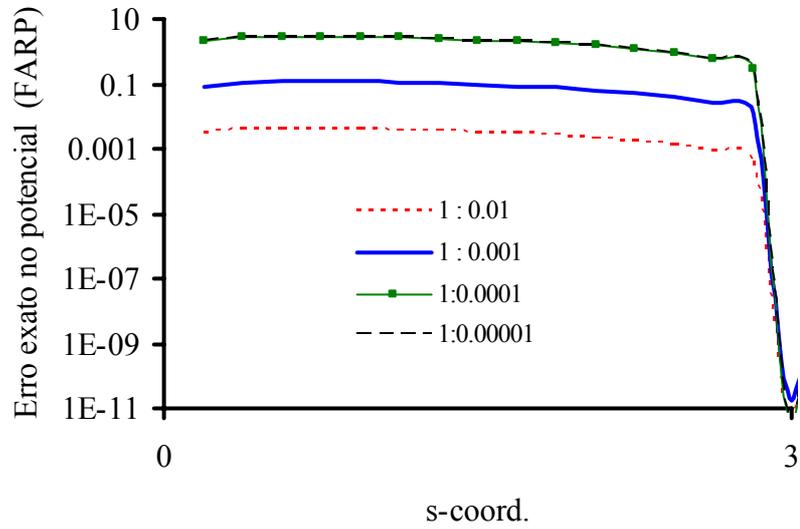
Utilizando a formulação regularizada variacional para o fluxo, com elementos quadráticos, é mostrado na Figura 5.12 o erro exato no potencial para diversas posições do ponto interior ao longo dos três caminhos. Nota-se que os erros praticamente se mantêm constantes quando se aproxima da região com fluxo prescrito ao passo que ao longo dos outros dois caminhos o erro tende a aumentar, porém em um nível que pode ser considerado baixo para a proximidade da fronteira (0,03%).



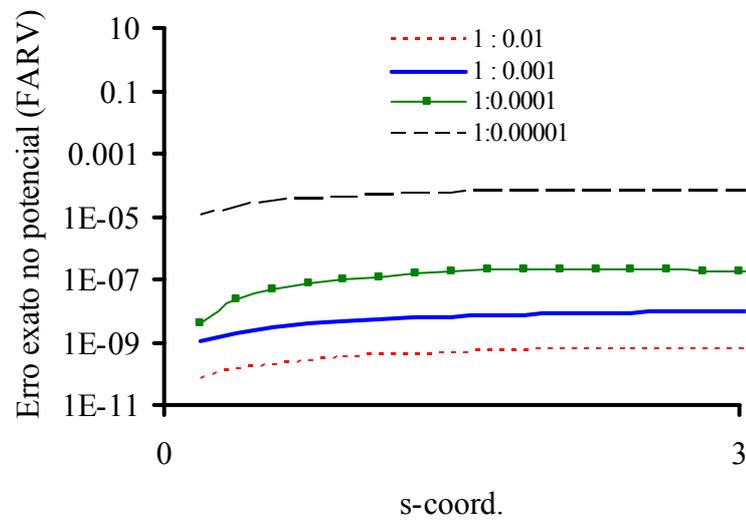
**Figura 5.12:** Erro exato no potencial para um ponto interior que se aproxima da fronteira

Utilizando também somente elementos quadráticos, a influência da razão de aspecto é analisada degenerando a geometria original no sentido vertical, isto é mantendo os lados horizontais constantes e diminuindo na mesma proporção os dois lados verticais da razão 1:1 (domínio quadrado) até a razão 1:0,00001. Na Figura 5.13 e 5.14, são comparados os resultados exatos com os resultados do Método dos Elementos de Contorno para as formulações regularizadas em potencial e variacional, ambas com 64 elementos quadráticos (128 nós) e sem fontes no domínio. À medida que a forma original vai sendo “achatada”, os

erros nas duas formulações vão aumentando sendo maiores na formulação para o potencial (Figura 5.13) que na variacional (Figura 5.14).



**Figura 5.13:** EIC para o potencial: influência da razão de aspecto no potencial calculado



**Figura 5.14:** EIC variacional: influência da razão de aspecto no potencial calculado

## Capítulo 6

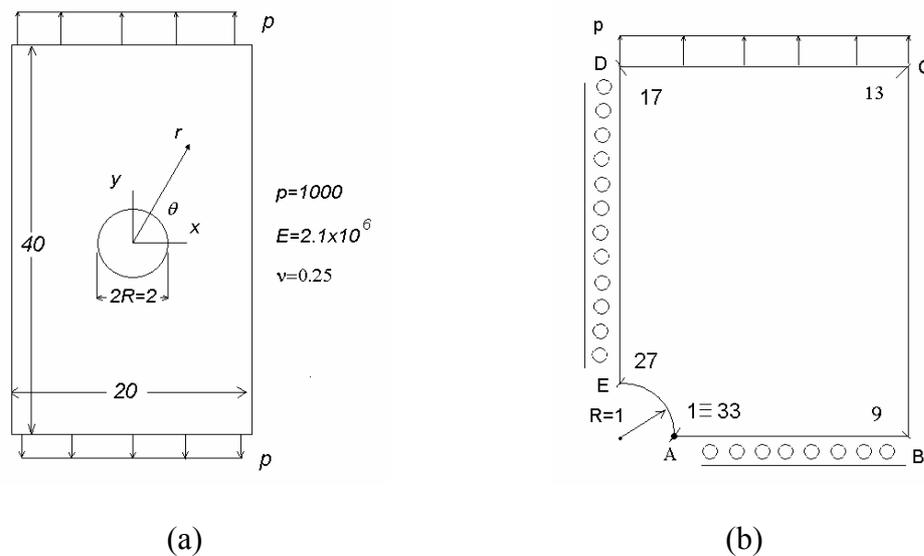
# RESULTADOS E DISCUSSÕES: ELASTICIDADE

## 6.1 CHAPA COM FURO CENTRAL

Neste exemplo é analisado um problema clássico de concentração de tensão em um painel retangular com um furo circular centrado submetido à tração conforme apresentado na Figura 6.1. Neste problema típico de concentração de tensões, a existência de uma descontinuidade geométrica faz com que em regiões próximas ao furo, em especial nas direções  $\theta=0^\circ$  e  $\theta=90^\circ$ , a tensão na direção  $y$  atinja valores absolutos mais elevados que a tensão aplicada e vá diminuindo à medida que se afasta do vazio até atingir seu valor nominal. Para um sistema de coordenadas com a origem no centro do furo, este campo de tensão é descrito matematicamente pelas equações:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{p}{2}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{p}{2}\left(1 + \frac{3R^4}{r^4} - \frac{4R^2}{r^2}\right)\cos(2\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{p}{2}\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{p}{2}\left(1 + \frac{3R^4}{r^4}\right)\cos(2\theta) \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{p}{2}\left(1 - \frac{3R^4}{r^4} + \frac{2R^2}{r^2}\right)\sin(2\theta)\end{aligned}\tag{6.1}$$

A rigor, a Equação (6.1) é válida para um painel de dimensões infinitas, entretanto devido as dimensões relativas entre o contorno da chapa e o furo, ela pode ser aplicada ao problema proposto uma vez que os estados de tensões obtidos são muito próximos.



**Figura 6.1:** Chapa com furo central: (a) geometria; (b) discretização

Aplicando a primeira expressão da Equação (6.1) para um ponto  $A$  localizado nas coordenadas polares  $(r, \theta) = (1, 0)$ , tem-se:

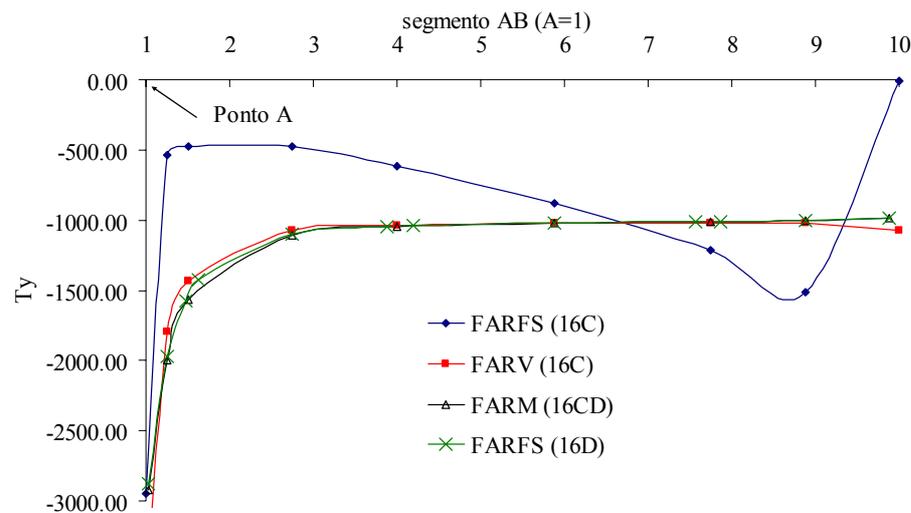
$$K_{\sigma} = \frac{\theta_y}{p} = 3 \quad (6.2)$$

onde,  $K_{\sigma}$  é o valor do fator de concentração de tensão (razão entre a tensão máxima e a tensão aplicada) para o ponto em consideração.

O objetivo deste problema é avaliar a efetividade da estratégia variacional através do cálculo da tensão ao longo da linha  $AB$  e de  $K_{\sigma}$ . Uma malha inicial com 16 elementos quadráticos é utilizada como ponto de partida. Malhas subsequentes, com 32 e 64 elementos, são obtidas dividindo o comprimento de cada elemento da malha anterior por dois.

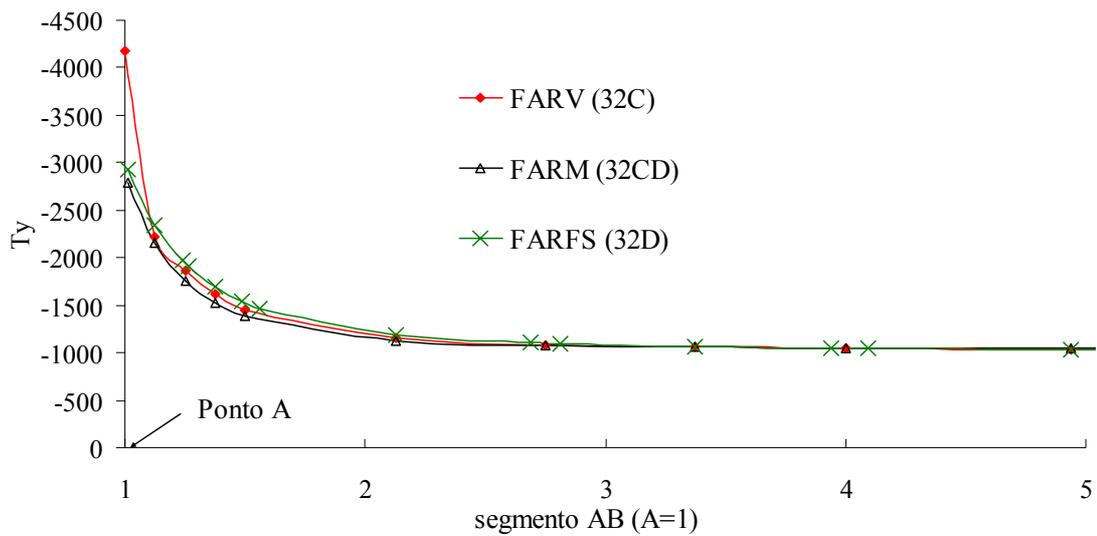
Outro ponto importante a ressaltar neste problema é que, devido à geometria, a discretização se dá ao longo de segmentos retos e curvos e, devido à simetria, pode-se discretizar somente  $\frac{1}{4}$  da geometria. Ainda, ao invés de aumentar a densidade de elementos na região próxima ao furo, são utilizadas malhas gradativas (*graded meshes*), nas quais o comprimento de cada elemento é diminuído progressivamente à medida que vai se aproximando do furo, já que é nesta direção que se tem uma evolução mais rápida do gradiente da tensão.

A Figura 6.2 mostra os valores da força de superfície na direção normal (equivalente a tensão na direção  $y$  em um ponto interior) ao longo do segmento  $AB$  obtidos através da formulação para força de superfície não-variacional (FARFS 16C) *versus* as formulações variacionais propostas usando somente elementos contínuos (FARV 16C) e a formulação mista utilizando elementos contínuos e descontínuos (FARM 16CD). Os erros elevados e oscilações observados na formulação para força de superfície não-variacional (curva FARFS 16C) indicam que, de fato, para malhas mais grosseiras e com elementos de baixa ordem, a hipótese de continuidade relaxada não conduz a resultados satisfatórios. Por outro lado, as oscilações desaparecem ao se aplicar a estratégia variacional com elementos contínuos ou elementos contínuos e descontínuos (curvas FARFS 16C e FARM 16CD, respectivamente). Nota-se também que estes últimos resultados convergem na direção da solução usual obtida através do uso de elementos descontínuos (curva FARFS 16D) aqui utilizada como solução de referência.



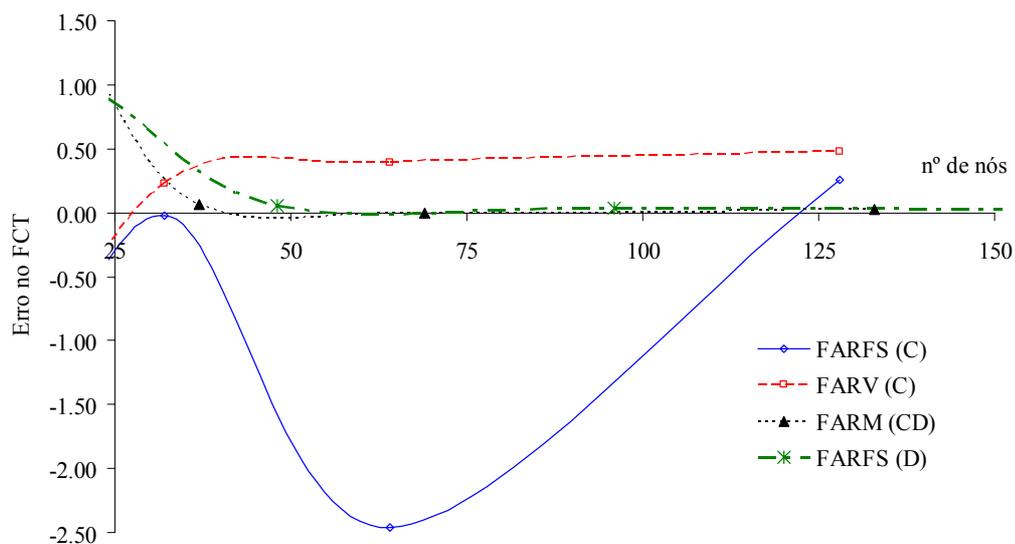
**Figura 6.2:** Força de superfície normal ao longo do segmento  $AB$  (16 elementos)

Também pode se observar que o resultado obtido através da formulação variacional usando somente elementos contínuos (FARV 16C) nas duas extremidades ( $x=1$  e  $x=10$ ) é maior que o resultado esperado. O erro nestes pontos é consistente com o fato de que não há como forçar a continuidade nestes pontos e portanto, a estratégia variacional não pode ser aí aplicada.



**Figura 6.3:** Força de superfície normal ao longo do lado  $AB$  (32 elementos)

Visando avaliar melhor a influência do erro existente nos cantos, compararam-se os resultados obtidos através da formulação variacional com elementos contínuos com os obtidos através da formulação variacional mista com elementos contínuos nas regiões suaves e descontínuos nos cantos. Os resultados obtidos para uma malha mais refinada com 32 elementos podem ser vistos na Figura 6.3. Por satisfazer o requisito de continuidade de Hölder, foi novamente utilizado como referência o resultado obtido através da formulação para força de superfície com elementos descontínuos. Valores mais próximos do resultado de referência foram obtidos através da formulação dessa mista.

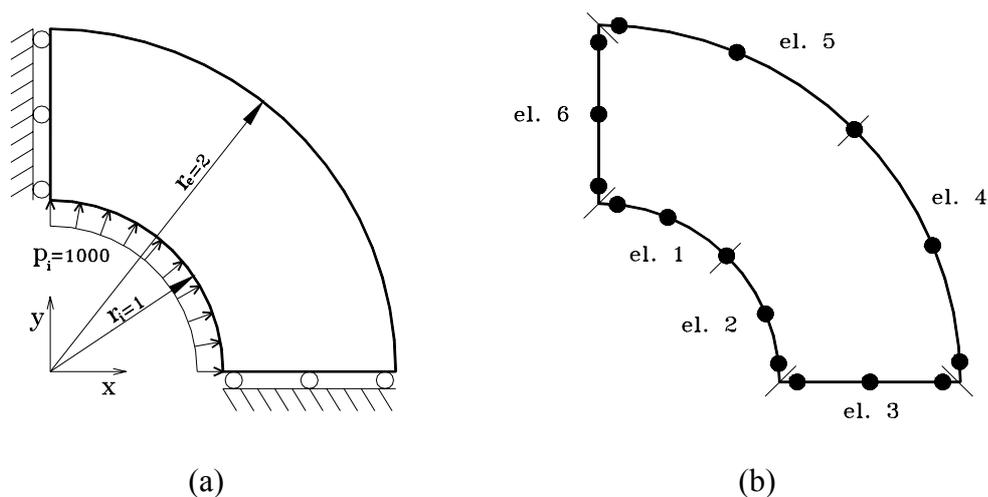


**Figura 6.4:** Erro no FCT ( $K_\sigma$ ) versus número de nós

Na Figura 6.4 pode ser vista, para todas as formulações testadas, a influência do refinamento da malha no valor do fator de concentração de tensão. Como esperado, excetuando a formulação para força de superfície com elementos contínuos (FARFS C) existe uma redução do erro à medida que vai aumentando o número de nós (número de incógnitas do contorno), isto é, a malha vai sendo refinada. Ainda, a partir de 50 variáveis incógnitas, os resultados obtidos através da formulação variacional mista (FARM CD) são próximos aos obtidos através da formulação para força de superfície com elementos descontínuos (FARFS D).

## 6.2 TUBO DE PAREDE ESPESSA

Um tubo de parede espessa de raio interno  $r_i=1$  e raio externo  $r_e=2$  é submetido a uma pressão interna  $p_i=1000$ . Devido à simetria axial do problema, apenas um quarto da seção transversal do tubo é apresentada e analisada numericamente. Usando a condição de simetria, o deslocamento vertical na face  $y=0$  e o deslocamento horizontal na face  $x=0$  são prescritos e iguais a zero. O problema físico analisado e o seu modelo de elementos de contorno com as condições de contorno associadas são mostrados na Figura 6.5 para uma malha com seis elementos.



**Figura 6.5:** Tubo de parede espessa: (a) geometria; (b) malha com 6 elementos

As constantes do material são o coeficiente de Poisson  $\nu=0,3$  e o módulo de elasticidade  $E=205010$ . Para um sistema de coordenadas com a origem no centro do furo, a solução analítica deste problema, adotando estado plano de tensão, é dada por:

$$u(r) = \frac{p_i r_i^2}{Er} \frac{1}{(r_e^2 - r_i^2)} \left[ (r_e^2 + r^2) + \nu(r_e^2 - r^2) \right] \quad (6.3)$$

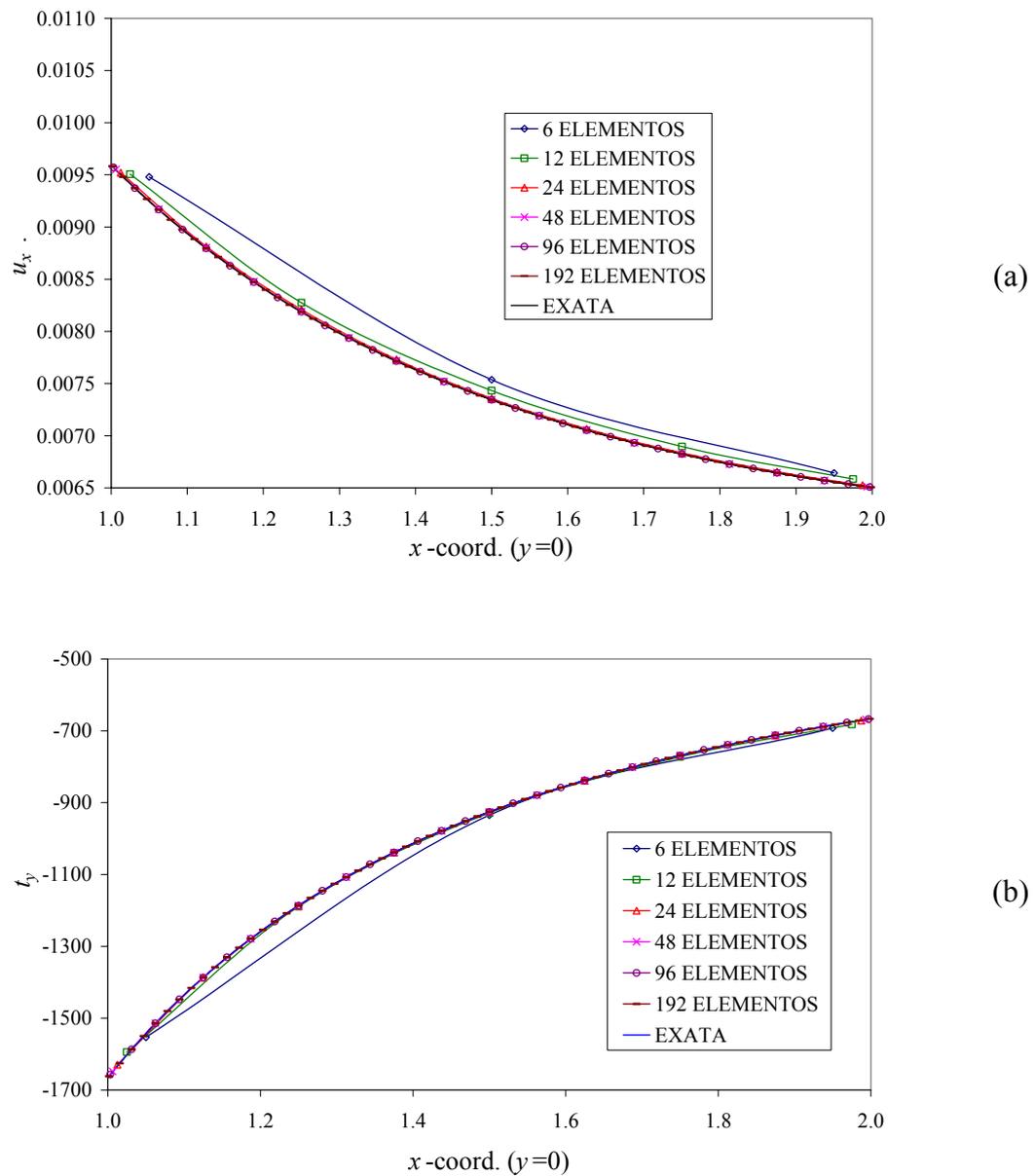
$$\sigma_r(r) = \frac{p_i r_i^2}{r^2} \frac{(r_e^2 - r^2)}{(r_e^2 - r_i^2)} \quad (6.4)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{p_i r_i^2}{r^2} \frac{(r_e^2 + r^2)}{(r_e^2 - r_i^2)} \quad (6.5)$$

onde  $u(r)$  é o deslocamento na direção radial,  $\sigma_r(r)$  a tensão radial e  $\sigma_\theta(r)$  a tensão tangencial.

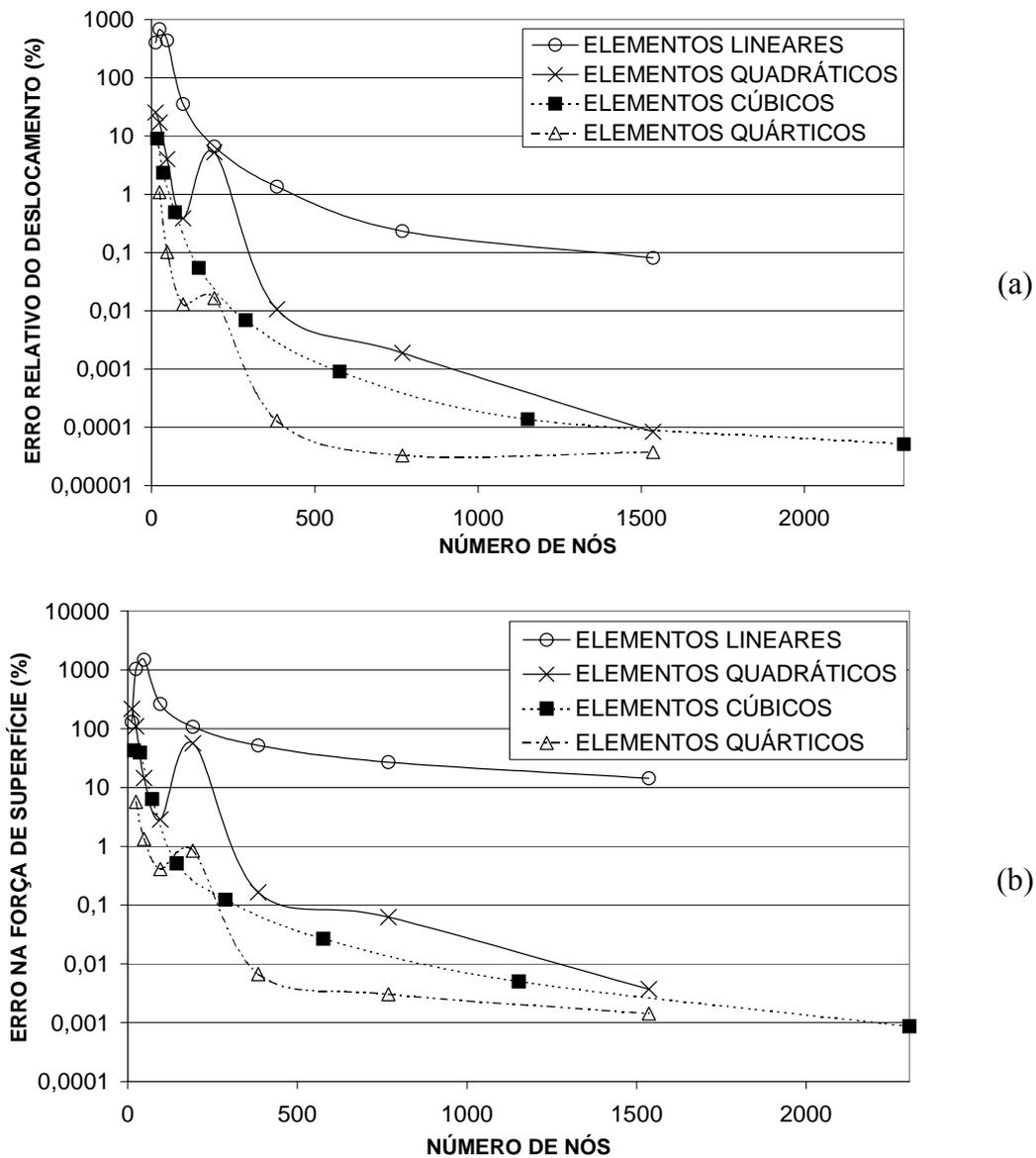
Partindo de uma malha com seis elementos quadráticos - um elemento em cada um dos segmentos radiais e dois elementos em cada um dos segmentos circulares - foram efetuados refinamentos sucessivos subdividindo-se cada elemento da malha anterior em dois elementos de mesmo tamanho, obtendo assim malhas mais refinadas. Todas as integrações foram feitas por meio de quadratura de Gauss com doze pontos de integração. Os resultados para os deslocamentos e as forças de superfície obtidos utilizando a formulação variacional são comparadas com a solução analítica e com os resultados obtidos através de outras formulações.

Na Figura 6.6 são apresentados o resultado analítico para o problema e os resultados para o deslocamento  $u_r = u_x$  e para a força de superfície  $t_\theta = t_y$ , ao longo da face horizontal ( $y=0$ ;  $1 \leq x \leq 2$ ), ao se utilizar a formulação auto-regularizada variacional. Pode-se observar que a medida que a malha vai sendo refinada, a solução numérica converge no sentido da solução analítica e que um bom grau de precisão pode ser obtido com malhas mais grosseiras .



**Figura 6.6:** Resultados para FARV: (a) deslocamento  $u_x$ , (b) força de superfície  $t_y$

Para fins de comparação, são apresentados, na Figura 6.7 e nas Tabela 6.1 e Tabela 6.2, os resultados apresentados por RIBEIRO (2003) para o mesmo problema, ao se utilizar a formulação auto-regularizada da força de superfície (FARFS C) com elementos lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos contínuos (hipótese de continuidade relaxada). Nas figuras e nas tabelas, a autora compara as soluções para deslocamentos e forças de superfície ao longo da face horizontal ( $y=0$ ;  $1 \leq x \leq 2$ ) com a solução exata para determinar o máximo erro relativo.



**Figura 6.7:** Erro na FARFS com elementos contínuos (RIBEIRO, 2003)

Como se pode observar, apesar dos erros diminuírem ao se adotar malhas bastante refinadas e/ou elementos de ordem superior, a hipótese de continuidade relaxada isoladamente não assegura uma convergência monotônica na direção da solução analítica. Para elementos quadráticos, a formulação variacional apresenta erros menores tanto no deslocamento como na força de superfície, ao passo que, com elementos quárticos os erros são maiores (Tabela 6.1 e 6.2). Cabe ressaltar contudo, que o custo computacional ao se trabalhar com elementos de maior ordem cresce consideravelmente tendo em vista o maior número de operações de ponto flutuante a serem executadas.

**Tabela 6.1:** FARFS C *versus* FARV: elementos quadráticos

Nº de Elementos Quadráticos	Erro no Deslocamento (%)		Erro na Força de Superfície (%)	
	FARFS C	FARV	FARFS C	FARV
6	25,38720	2,62458	215,52214	1,28121
12	17,05984	1,19533	109,63320	1,08666
24	4,02753	0,26488	14,47393	0,24426
48	0,38824	0,06855	2,85123	0,10237
96	5,25124	0,01822	56,27472	0,04463
192	0,01059	0,00482	0,16520	0,02044

**Tabela 6.2:** FARFS C *versus* FARV: elementos quárticos

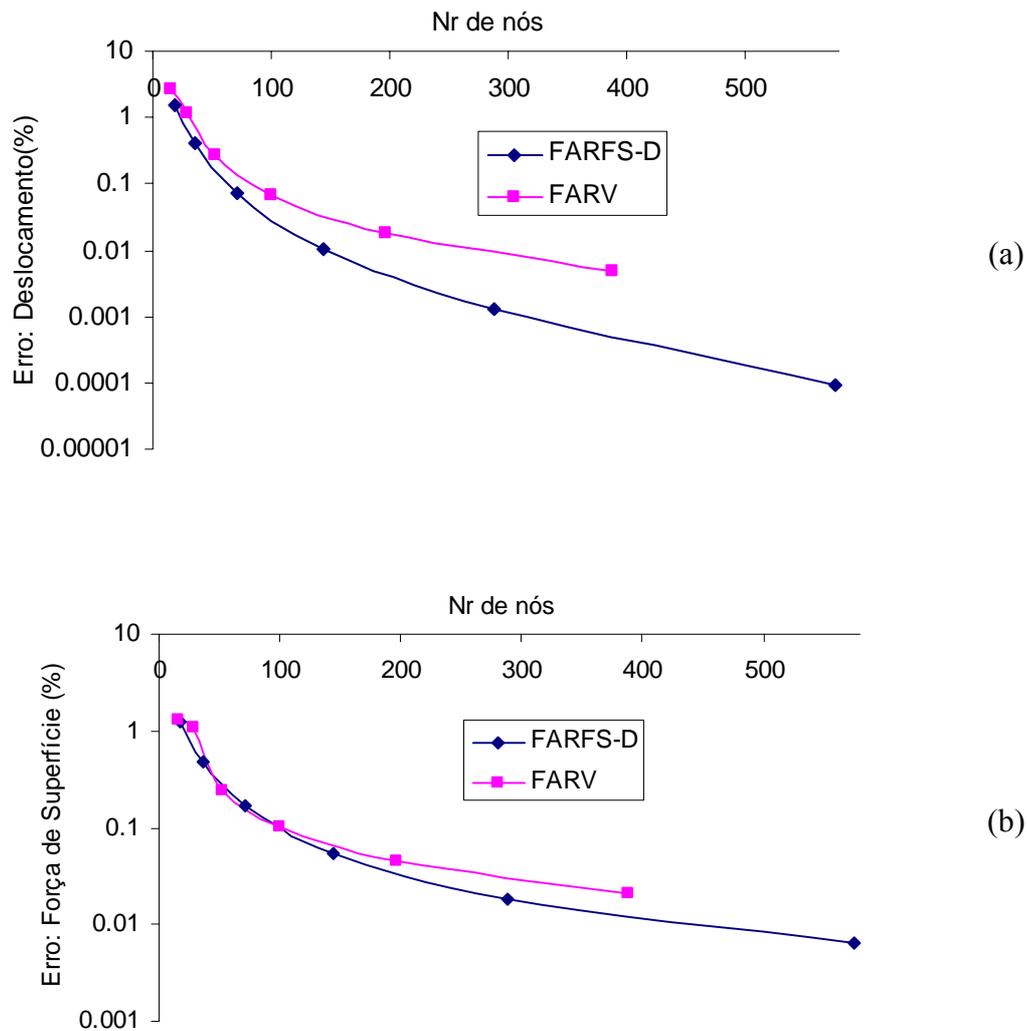
Nº de Elementos Quárticos	Erro no Deslocamento (%)		Erro na Força de Superfície (%)	
	FARFS C	FARV	FARFS C	FARV
6	1,08040	2,62458	5,72352	1,28121
12	0,10148	1,19533	1,33026	1,08666
24	0,01286	0,26488	0,40814	0,24426
48	0,01651	0,06855	0,83918	0,10237
96	0,00012	0,01822	0,00675	0,04463
192	0,00003	0,00482	0,00304	0,02044

Sendo a utilização de elementos descontínuos a estratégia mais difundida para solução da equações integrais de contorno em força de superfície, foram calculados também para o problema proposto, os resultados obtidos através desta formulação. As malhas com elementos quadráticos descontínuos foram geradas automaticamente pelo programa computacional tomando como base as malhas usadas na formulação variacional. A distância entre o nó funcional e os nós geométricos extremos do elemento equivale a 5% do comprimento do elemento ( $a=b=0,1$ ). Os erros relativos máximos obtidos no cálculo dos deslocamentos e forças de superfície, em cada nó funcional da malha, ao longo da face horizontal são apresentados na Figura 6.8 e na Tabela 6.3 juntamente com os resultados obtidos pela formulação variacional.

**Tabela 6.3:** FARFS D *versus* FARV: elementos quadráticos

Nº de Elementos Quadráticos	Erro no Deslocamento (%)		Erro na Força de Superfície (%)	
	FARFS D	FARV	FARFS D	FARV
6	1,48586	2,62458	1,23822	1,28121
12	0,39772	1,19533	0,47725	1,08666
24	0,07027	0,26488	0,16839	0,24426
48	0,01035	0,06855	0,05517	0,10237
96	0,00132	0,01822	0,01817	0,04463
192	0,00009	0,00482	0,00648	0,02044

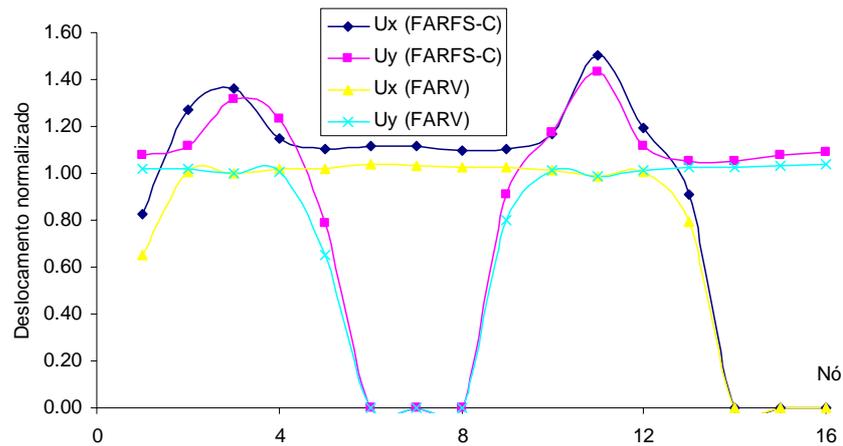
Dos resultados apresentados, pode-se concluir que, de uma maneira geral os resultados são bastante próximos, entretanto, para um problema com o mesmo número de variáveis incógnitas, os resultados obtidos pela formulação usual com elementos descontínuos apresenta um ligeiro ganho na precisão.



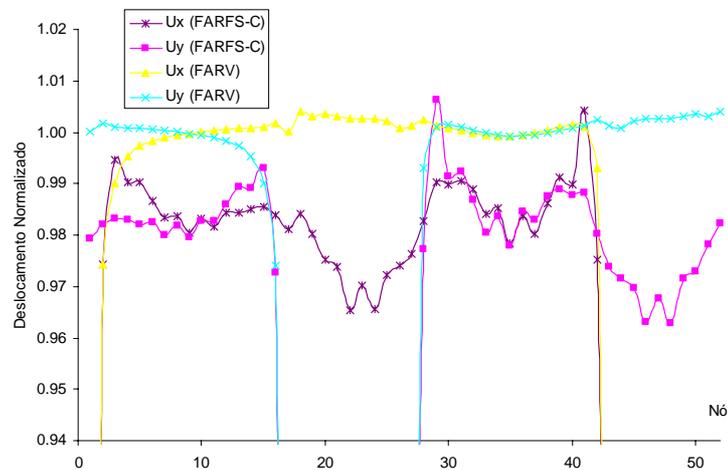
**Figura 6.8:** Erro ao longo da face horizontal: FARFS-D *versus* FARV

Embora a formulação variacional vise ser uma alternativa à utilização de elementos descontínuos para solução das equações integrais de contorno em força de superfície também é interessante comparar os seus resultados com a formulação auto-regularizada em deslocamento que, conforme demonstrado por CRUSE & RICHARSON (1996) é equivalente à formulação clássica do Método dos Elementos de Contorno. Para tanto, nas Figuras 6.9 a 6.12 são apresentadas, ao longo de todo contorno, os deslocamentos normalizados obtidos pela formulação variacional mista (FARM) e pela formulação para força de superfície com

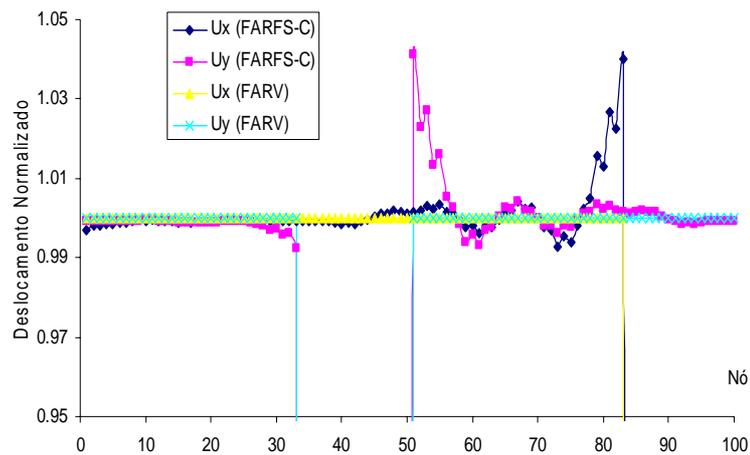
elementos contínuos (FARFS). O termo normalizador em cada nó é o deslocamento correspondente obtido através da formulação para o deslocamento (FARD). Os resultados obtidos por meio da formulação para força de superfície com elementos contínuos (hipótese de “continuidade relaxada”) ratificam conclusões anteriores que a convergência é lenta ao se utilizar elementos contínuos quadráticos e que resultados mais precisos para esta formulação só são obtidos com malhas extremamente refinadas.



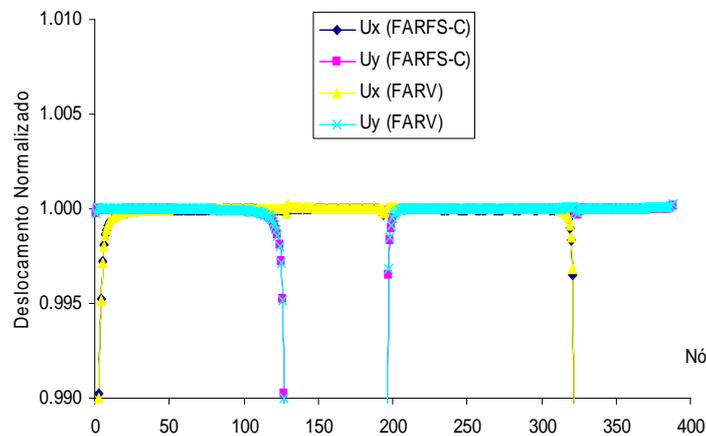
**Figura 6.9:** Problema Tubo: deslocamentos normalizados (6 elementos)



**Figura 6.10:** Problema Tubo: deslocamentos normalizados (24 elementos)



**Figura 6.11:** Problema Tubo: deslocamentos normalizados (48 elementos)



**Figura 6.12:** Problema Tubo: deslocamentos normalizados (192 elementos)

Outra forma de se avaliar em termos absolutos a precisão obtida pode ser vista na Tabela 6.4 onde são apresentados os erros relativos à solução analítica tanto para a formulação em deslocamento como para formulação variacional. Como se pode observar a formulação variacional fornece resultados bastante precisos, mesmo para malhas mais grosseiras, ainda assim, menos precisos que os obtidos pela formulação em deslocamento.

**Tabela 6.4:** Formulação em deslocamento *versus* variacional

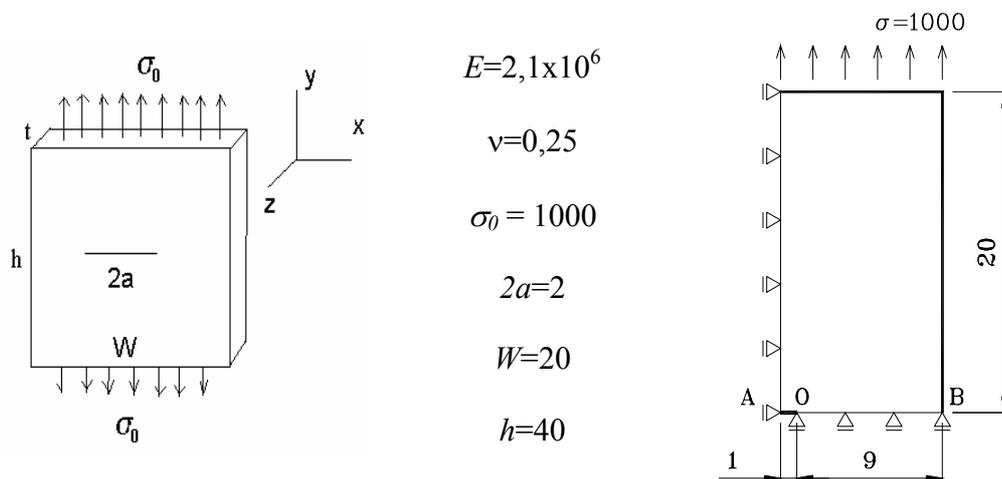
Nº de Elementos Quadráticos	Erro no Deslocamento (%)		Erro na Força de Superfície (%)	
	FARD	FARV	FARD	FARV
6	0,21886	2,62458	5,53314	1,28121
12	0,00912	1,19533	1,82522	1,08666
24	0,00293	0,26488	0,53165	0,24426
48	0,00045	0,06855	0,14336	0,10237
96	0,00006	0,01822	0,03716	0,04463
192	0,00001	0,00482	0,00945	0,02044

## 6.3 CHAPA PLANA SUBMETIDA A CARREGAMENTO TIPO I

### 6.3.1 $K_I$ Através do Deslocamento na Abertura da Trinca

Neste exemplo é analisado o mesmo problema de mecânica da fratura linear elástica apresentado por JORGE *et al.* (2003b), qual seja, uma chapa de espessura  $t$ , largura  $W$  e comprimento  $L$ , com uma trinca central de comprimento  $2a$ , que está submetida a um carregamento do tipo I, mais especificamente, submetida a um esforço de tração nas suas extremidades. A chapa tem módulo de elasticidade  $E=2,1 \times 10^6$  e coeficiente de Poisson  $\nu=0.25$  (Figura 6.13). Tendo em vista a simetria existente no problema, é possível modelar o problema discretizando apenas um quarto do domínio e assim, utilizar a formulação variacional para força de superfície e o método hiper-determinístico (denotado nos gráficos e tabelas como  $AO$ ) para o cálculo do fator de intensidade de tensão para o Modo I.

Todos os resultados apresentados foram obtidos discretizando o contorno através de elementos quadráticos. Nas integrações numéricas foram utilizados 12 pontos de Gauss. O conjunto de dados fornecidos forma um sistema consistente de unidades.

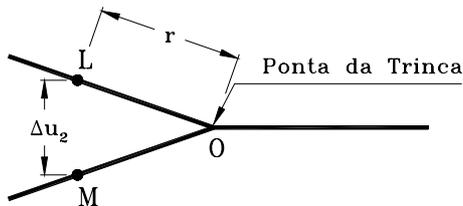


**Figura 6.13:** Chapa submetida ao Modo I de carregamento

Para este problema, o fator de intensidade de tensão, com uma margem de erro de 0.5%, é dado por TADA *et al.* (2000).

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot \sqrt{\sec \frac{\pi a}{W}} \quad (6.6)$$

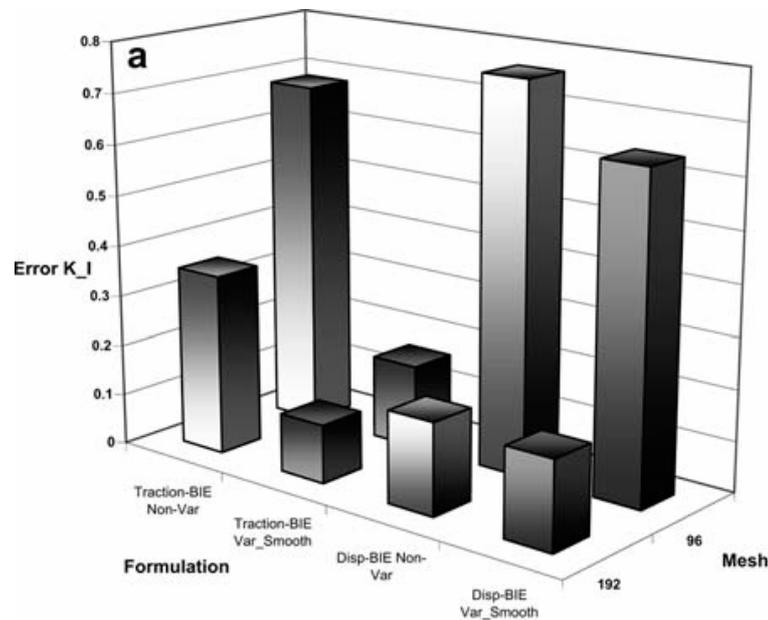
Conforme foi visto, a literatura apresenta diversas formas de se obter  $K_I$ . Para que se possa analisar a influência da formulação variacional empregada no problema, o valor de  $K_I$  será calculado também por uma das fórmulas baseadas na diferença entre os deslocamentos nas faces da trinca, (ALIABADI & ROOKE, 1992):



$$K_I = \frac{G}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (u_2^L - u_2^M) \quad (6.7)$$

**Figura 6.14:** Localização dos nós utilizados no cálculo de  $K_I$

onde  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  para estado plano de tensão,  $r$  é a distância do ponto  $L$  à ponta da trinca e  $u_2^L$  e  $u_2^M$  são respectivamente os deslocamentos na direção perpendicular à face da trinca nos pontos  $L$  e  $M$ , representados na Fig 6.14, na qual  $\Delta u_2 = u_2^L + u_2^M$ .



**Figura 6.15:** Erro em  $K_I$  através da formulação variacional original (JORGE *et al.*, 2003b)

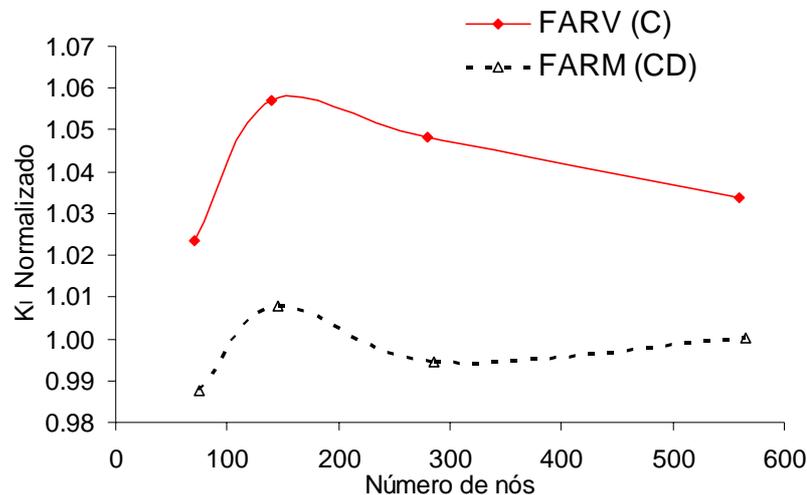
Na Tabela 6.5 são apresentados os valores dos fatores de intensidade de tensão obtidos através de diferentes malhas de elementos de contorno. A segunda coluna da tabela corresponde aos resultados obtidos pela formulação habitual para a equação integral de contorno de força de superfície, isto é, discretizada através de elementos descontínuos, a terceira coluna, corresponde aos resultados obtidos pela formulação variacional equações

integrais de contorno utilizando somente elementos contínuos; a quarta coluna corresponde à formulação variacional mista (elementos descontínuos nos cantos e contínuos nos demais pontos nodais suaves do contorno). Observa-se uma boa concordância entre os três resultados e uma melhora significativa em relação aos resultados obtidos através da formulação variacional original (Figura 6.15).

**Tabela 6.5:** Fator de intensidade de tensão:  $K_I = 1783,47$ (TADA,2000)

Elm	FARFS (D)	FARV (C)	FARM (CD)
35	1721,46	1762,05	1700,27
70	1721,76	1819,82	1735,45
140	1748,57	1832,87	1738,77
280	1738,86	1797,28	1739,23

Na Figura 6.16, os fatores de intensidade de tensão calculados através das duas formulações variacionais são normalizados como  $K_I / K_{Ref}$ , tendo como referência o fator de intensidade de tensão obtido através da formulação para força de superfície com elementos descontínuos. Observa-se que os resultados obtidos para a chamada formulação variacional mista estão mais próximos dos valores de referência do que aqueles obtidos através da formulação variacional que utiliza somente elementos contínuos.



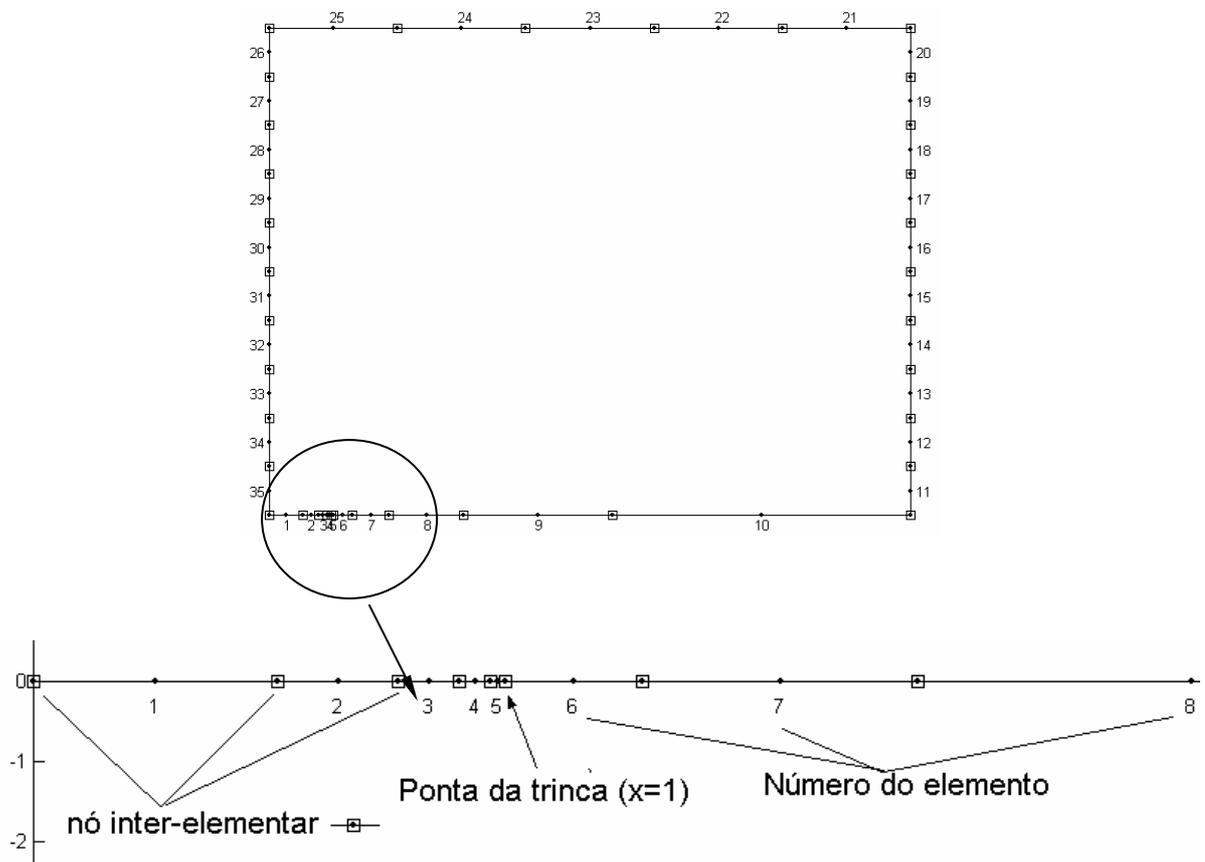
**Figura 6.16:**  $K_I$  normalizado em relação à FARFS-D versus o número de nós

### 6.3.2 $K_I$ Através do Método Hiper-Determinístico

Este exemplo visa analisar tanto a estratégia variacional como o método hiper-determinístico apresentado no Capítulo 4 para o cálculo do fator de intensidade de tensão.

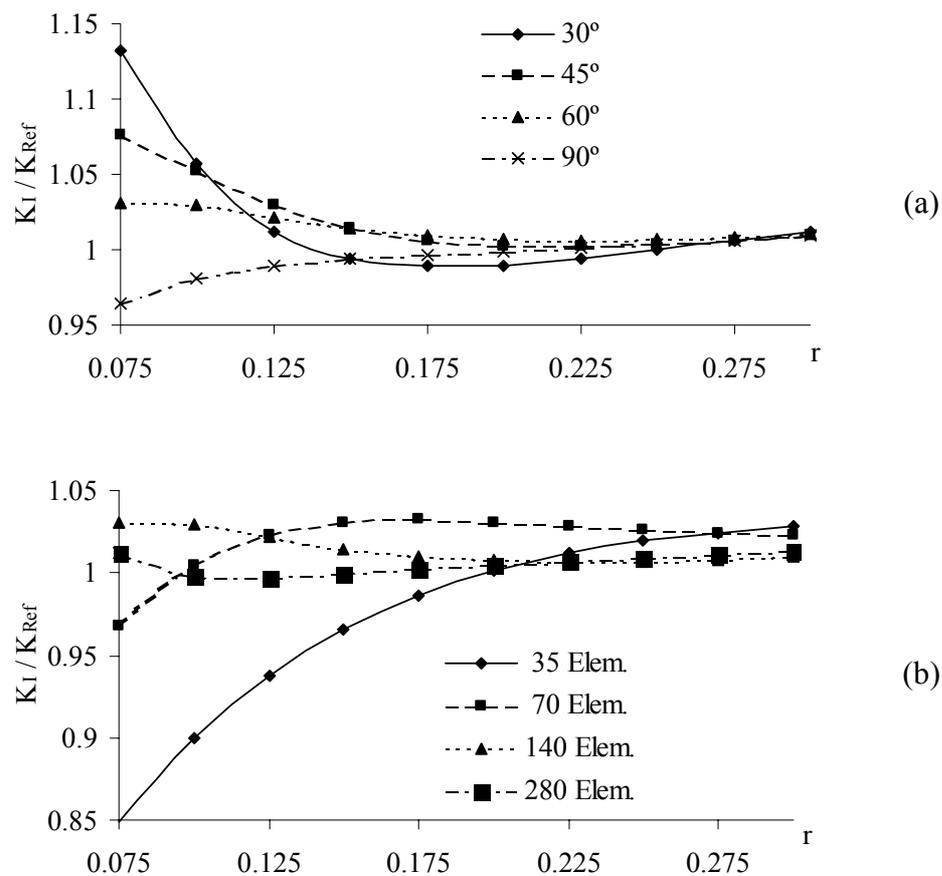
Para tanto, utiliza-se o mesmo problema visto na seção anterior, uma chapa plana com uma trinca central, sujeita a um carregamento tipo I (Figura 6.13), para a qual já se conhecem os resultados obtidos através da estratégia usual de obtenção de  $K_I$  através dos deslocamentos na abertura da trinca (Equação (6.7)). Da mesma forma, são utilizados os mesmos tipos de elementos (quadráticos) e de esquema de integração (12 pontos de Gauss). A principal diferença é a utilização do estado de tensão em um (método determinístico) ou mais pontos interiores,  $p$ , (método hiper-determinístico) localizados em diferentes direções ( $\theta$ ) e distâncias ( $r$ ). Os fatores de intensidade de tensão são comparados diretamente com valores de referência calculados através da Equação (6.6) ou de uma forma normalizada definida por  $K_I / K_{Ref}$ . A influência do comprimento da trinca na precisão dos resultados também é analisada.

Partindo de uma malha com 35 elementos (Figura 6.17) e refinando-a sucessivamente através de um refinamento tipo  $h$ , outras malhas mais refinadas são obtidas dividindo por dois o comprimento dos elementos. Ainda, ao invés de aumentar a densidade de elementos na região próxima a ponta da trinca, são utilizadas malhas graduais conforme explicado anteriormente.



**Figura 6.17:** Chapa com trinca central: discretização inicial com 35 elementos

A Figura 6.18a e 6.18b apresentam, respectivamente, a influência do refinamento da malha em uma dada direção e a influência da localização do ponto interno quando, para uma trinca de comprimento  $a=1$ , o fator de intensidade de tensão  $K_I$  é calculado através da Equação 4.8 (sistema determinado). Como se pode constatar, os resultados são mais precisos para pontos localizados a distâncias maiores que  $0,175a$  e/ou aumentando o número de elementos.



**Figura 6.18:**  $K_I$  normalizado *versus*  $r$ : (a) diferentes direções  $\theta$ , (b)  $\theta=60^\circ$

A influência da direção  $\theta$  no cálculo do valor de  $K_I$  é apresentado na Tabela 6.6 para uma malha com 140 elementos. Na tabela apenas um valor obtido através do método do deslocamento na abertura da trinca (COD) é apresentado uma vez que este valor depende do deslocamento de um ponto situado a uma distância fixa  $a/10$  sobre a superfície da trinca. Por esta tabela constata-se que os resultados obtidos pelo método hiper-determinístico guardam uma boa concordância com aqueles obtidos através de outras formulações e que ainda, não são muito sensíveis à variação de direção.

**Tabela 6.6:** FIT: método hiper-determinístico (*OA*) versus *COD*

$\theta$	$K_I$		$K_I / K_{Ref}$	
	<i>OA</i>	<i>COD</i>	<i>OA</i>	<i>COD</i>
30°	1777,75	1738,78	0,991	0,970
45°	1792,03		0,999	
60°	1797,76		1,002	
90°	1786,43		0,996	

A Tabela 6.7 compara, para diferentes malhas, os valores absolutos e normalizados de  $K_I$  quando calculados pelo método hiper-determinístico usando todos os pontos interiores, com o valor calculado pelo método do deslocamento na abertura da trinca. Observa-se que, em todos os casos os resultados guardam uma boa concordância com o valor de referência e, quando comparados com o valor obtido pelo método do deslocamento na abertura da trinca, convergem mais rápido e são ligeiramente superiores, em especial para as malhas mais grosseiras.

**Tabela 6.7:** FIT : método hiper-determinístico (*OA*) versus *COD*

Nº de elementos	<i>OA</i> $r : \text{de } 0.075a \text{ até } 0.3a$		<i>COD</i>	
	$K_I$	$K_I / K_{Ref}$	$K_I$	$K_I / K_{Ref}$
<b>35</b>	1773.72	0.989	1700.28	0.948
<b>70</b>	1856.64	1.035	1735.44	0.967
<b>140</b>	1817.82	1.014	1738.77	0.969
<b>280</b>	1786.28	0.996	1739.22	0.970

Baseado na constatação anterior decidiu-se testar, para diversos comprimentos de trinca o método hiper-determinístico usando todos os pontos interiores. Na Tabela 6.8 e Tabela 6.9 são apresentados, respectivamente, os resultados absolutos e o erro percentual em relação aos resultados calculados pela Equação 4.6 (TADA, 2000) para uma malha de 35 e 70 elementos. Observa-se que embora o erro diminua com o refinamento, para um mesmo número de elementos o erro aumenta à medida que aumenta a razão  $a/w$ . Os resultados entretanto, permitem afirmar que para este tipo de problema, os métodos propostos são estáveis independente do comprimento da trinca, fornecendo resultados precisos que, para um conjunto de pontos dentro do intervalo analisado de distância à ponta da trinca, resultam em erros de baixa ordem.

**Tabela 6.8:** Resultados para diferentes comprimentos de trinca (35 elementos)

	<b>Tada</b>	<b>OA</b>	<b>Erro(%)</b>
<b><math>a/w=0,1</math></b>	1783,46	1816,24	-1,838
<b><math>a/w=0,2</math></b>	2570,31	2635,86	-2,550
<b><math>a/w=0,4</math></b>	3941,17	4081,07	-3,549
<b><math>a/w=0,6</math></b>	5662,93	5919,52	-4,531
<b><math>a/w=0,8</math></b>	9018,38	9432,51	-4,592

**Tabela 6.9:** Resultados para diferentes comprimentos de trinca (70 elementos)

	<b>Tada</b>	<b>OA</b>	<b>Erro(%)</b>
<b><math>a/w=0,1</math></b>	1783,46	1778,23	0,293
<b><math>a/w=0,2</math></b>	2570,31	2556,22	0,548
<b><math>a/w=0,4</math></b>	3941,17	3916,34	0,630
<b><math>a/w=0,6</math></b>	5662,93	5679,17	-0,286
<b><math>a/w=0,8</math></b>	9018,38	9201,28	-2,028

Deixou-se de utilizar elementos do tipo *quarter-point* nos exemplos desta seção, dada ocorrência de erros numéricos decorrentes do algoritmo utilizado. Sobre esta impossibilidade, ver o Anexo A.

## Capítulo 7

# CONCLUSÕES E SUGESTÕES

## 7.1 CONCLUSÕES

A condição necessária para existência de uma integral hiper-singular é a suavidade da função densidade no ponto fonte, o que garante a existência de um limite finito. Em outras palavras, isto equivale a dizer que a variável primária deve ter continuidade  $C^{1,\alpha}$ . Trabalhos anteriores indicam que a adoção da hipótese de “continuidade relaxada” nas formulações auto-regularizadas das equações integrais de contorno na forma do gradiente (equações hiper-singulares) discretizadas com elementos contínuos isoparamétricos  $C^0$  não conduz a bons resultados. Oscilações, divergências e resultados anômalos foram observados, principalmente quando os problemas são discretizados com elementos de baixa ordem ou com malhas com baixo nível de refinamento.

Ao longo desse trabalho foi desenvolvida uma formulação variacional não-simétrica para o método de colocação das equações integrais de contorno com objetivo de forçar a continuidade  $C^{1,\alpha}$  em equações integrais de contorno hiper-singulares aplicadas a problemas de potencial (EIC em fluxo), e de elasticidade (EIC em força de superfície) discretizadas com elementos contínuos isoparamétricos  $C^0$ .

O requisito matemático de continuidade  $C^{1,\alpha}$  requerido para as derivadas das variáveis primárias foi imposto na solução discretizada do Método dos Elementos de Contorno através da introdução de equações de restrição ao sistema de equações integrais original. Uma vez que o requisito de continuidade passou a ser uma restrição imposta ao problema original, tornou-se possível a discretização das equações na forma do gradiente utilizando elementos de contorno contínuos isoparamétricos  $C^0$ , contornando-se assim um dos principais obstáculos das equações hiper-singulares do Método dos Elementos de Contorno.

A forma apresentada para implementação permitiu a generalização desta estratégia e a sua programação de maneira simples, clara e direta em algoritmos pré-existentes tanto para em problemas de potencial como de elasticidade. As equações de restrição forçaram o requisito de continuidade somente nos nós inter-elementares.

Os programas gerados foram utilizados tanto na solução de problemas clássicos, *quasi-singulares* e singulares da Teoria do Potencial, mais especificamente de transferência de calor, quanto na solução de problemas de Elasticidade. Os resultados obtidos foram comparados com resultados analíticos e com resultados obtidos através de outras formulações. Comparações também foram feitas na Teoria do Potencial utilizando um estimador de erro para o campo potencial exterior. A implementação computacional foi feita em algoritmos que permitiram o uso de elementos contínuos, descontínuos e semi-contínuos de segunda, terceira e quarta ordem (quadráticos, cúbicos e quárticos).

A exemplo do que já havia sido reportado anteriormente nos problemas de Elastoestática, a adoção da formulação variacional nos problemas de potencial discretizados com elementos cúbicos e quárticos não trouxe ganhos significativos na redução do erro. A explicação para este fato vem da constatação de que, *a priori*, “na continuidade relaxada” quanto maior a ordem do polinômio interpolador menores são os erros decorrentes da falta de suavidade das derivadas do potencial nos nós inter-elementares, ou seja, é menos eficiente tentar reduzir os erros nos pontos onde este erro é menor. Por este motivo concentrou-se a análise em problemas discretizados com elementos quadráticos.

Os resultados obtidos nos diversos problemas estudados mostraram-se em concordância com resultados disponíveis na literatura. Em todos os casos, a formulação variacional se mostrou efetiva no sentido de reduzir oscilações e divergências existentes nos resultados obtidos para as grandezas do contorno e para pontos interiores, mostrando-se ainda, estável e

convergente, mesmo nos problemas que continham elevados gradientes, *quasi*-singularidades ou campos singulares.

Nos problemas de Teoria do Potencial, a formulação variacional apresentada mostrou ser uma ferramenta robusta para resolver os problemas de *quasi*-singularidades decorrentes da presença de fontes de calor no interior do domínio, de pontos interiores muito próximos da fronteira ou de domínios com razão de aspecto elevada. Nesses casos, os erros foram maiores ao se adicionar uma fonte no domínio, ao aumentar a razão de aspecto ou à medida que o ponto interior se moveu em direção à fronteira. A formulação regularizada não-simétrica variacional para o fluxo obteve resultados superiores à formulação regularizada para o fluxo baseada na hipótese de continuidade relaxada e pareceu fornecer resultados ligeiramente superiores - ou pelo menos comparáveis - à formulação de valor principal de Cauchy, esta última, ainda a ser confirmada na continuidade desta pesquisa.

Mostrou-se ainda que a formulação variacional para elasticidade originalmente proposta por Jorge *et al.* (2003) satisfaz plenamente a condição de unicidade do gradiente dos deslocamentos nos pontos nodais suaves do contorno, entretanto, dada a dualidade existente na definição da normal nos cantos, a formulação não atende a esta condição nestes pontos. Como solução para este problema foi facultada à formulação variacional a utilização de elementos descontínuos nos cantos e em outros pontos nodais do contorno julgados de interesse dada a natureza do problema. Esta nova formulação foi denominada “formulação variacional mista”.

Para os problemas de Mecânica da Fratura Linear Elástica foi desenvolvido e implementado um procedimento numérico diferente dos que usualmente são utilizados no Método dos Elementos de Contorno para o cálculo do fator de intensidade de tensões. O cálculo dos fatores de intensidade de tensão para o modo de abertura da trinca foi efetuado a partir do conhecimento do estado de tensão em diferentes pontos interiores próximos a ponta da trinca. Os resultados indicaram que a precisão do resultado para  $K_I$  pode ser melhorada não somente refinando as malhas, como é usual, mas também aumentando o número de pontos internos e calculando um valor médio de  $K_I$  em um sentido de mínimos quadrados.

Os problemas de Teoria da Elasticidade serviram para testar a formulação variacional mista e o método hiper-determinístico para o cálculo do fator de intensidade de tensão. A utilização da formulação variacional mista levou a resultados mais precisos que a formulação

variacional original. Desta forma mostrou-se que a dualidade existente na definição da normal nos cantos é uma fonte de erro que pode ser eliminada através da utilização de elementos semi-contínuos nesses pontos. Comparações feitas com a formulação para força de superfície utilizando somente elementos descontínuos mostraram que os resultados obtidos através da formulação variacional mista convergem naquela direção para um mesmo número de variáveis incógnitas. Em todos os exemplos a formulação se mostrou estável e convergente, em especial nos problemas que continham campos singulares, como os problemas de Mecânica da Fratura.

No que se refere ao cálculo do fator de intensidade de tensão através da utilização do estado de tensão em pontos interiores localizados em uma região próxima à ponta de trinca, constatou-se que os resultados são mais precisos para pontos localizados à distâncias maiores que  $0,175a$  da ponta da trinca e/ou aumentando o número de elementos. Em todos os casos os resultados guardaram uma boa concordância com os valores utilizados como referência e, quando comparados com o valor obtido pelo método do deslocamento na abertura da trinca, convergiram mais rápido sendo ligeiramente superiores, em especial para as malhas mais grosseiras. Observou-se também que embora o erro diminua com o refinamento, para um mesmo número de elementos o erro aumenta à medida que aumenta a razão  $a/w$ . Os resultados contudo, permitem afirmar que para este tipo de problema, os métodos propostos são estáveis independente do comprimento da trinca, fornecendo resultados precisos que, para um conjunto de pontos dentro do intervalo considerado de distância à ponta da trinca, resultam em erros de baixa ordem. Os resultados obtidos mostraram-se bastante satisfatórios e a estratégia pode ser estendida para outros modos.

Pelo exposto acima, conclui-se que o trabalho atingiu aos objetivos inicialmente propostos de obter formulações hiper-singulares mais generalizadas, robustas e simples de serem implementadas. Tais formulações, juntamente com as formulações regularizadas já disponíveis para a variável primária, poderão, a partir da extensão deste trabalho, ser aplicadas nas chamadas formulações *duais* em problemas diretos ou inversos.

## 7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como perspectivas para pesquisas futuras na continuação das idéias abordadas neste trabalho, sugere-se:

- Testar a formulação variacional em algoritmos clássicos para o fluxo e para força de superfície (não-regularizados);
- Testar a formulação variacional em problemas elasto-plásticos, através da adição da integral correspondente às deformações plásticas.
- Desenvolver formulações duais regularizadas a partir das formulações aqui desenvolvidas e das formulações regularizadas já disponíveis para a variável primária que possam futuramente ser empregadas em problemas inversos, aplicados à detecção de danos em componentes;
- Estender o método hiper-determinístico para o cálculo de fatores de intensidade de tensões para o modo II e modos mistos;
- Comparar o método hiper-determinístico para o cálculo de fatores de intensidade de tensões com a integral  $J$ ;
- Aprofundar o estudo de estimadores de erro para problemas de potencial e elasticidade;
- Reescrever os algoritmos utilizados, em especial o utilizado em problemas de elasticidade, de forma permitir a utilização de elementos singulares tipo *quarter-point*.

## REFERÊNCIAS

- Aliabadi M.H. and Rooke D.P.** (1992): *Numerical Fracture Mechanics*, Computational Mechanics Publications, Southampton UK.
- Atluri, S. N.; Han, Z. D.; Shen, S.** (2003): Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approaches for Solving the Weakly-Singular Traction & Displacement Boundary Integral Equations, *Computer Modeling in Engineering & Sciences* 4 (5), pp. 507-517.
- Berger, J. R. and Dally, J. W.** (1981): An Overdeterministic Approach for Measuring the Opening Mode Stress Intensity Factor Using Strain Gages. *Exp. Mech.* 28, N1672, pp.142-145.
- Blandorf G. E., Ingraffea A. R., Liggett J. A.** (1981): Two-dimensional Stress Intensity Factor Computations Using the Boundary Element Method. *Int J Numer Methods Eng* 17, pp. 387–404.
- Bonnet, M.** (1999): *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*. Wiley, West Sussex.
- Brebbia, C. A.; Telles, J. C. F.; Wrobel, L. C.** (1984): *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag, Berlin.
- Brebbia, C. A.; Dominguez, J.** (1992): *Boundary Element: An Introductory Course*. Computational Mechanics Publications, Southampton, UK
- Cauchy, A. L.** (1825): *Leçons sur les Applications de Calcul Infinitésimal à la Géométries*
- Cheng, A. H-D., Cheng, D. T.** (2005): Heritage and early history of the boundary element method. *Engrg. Analy. Boundary Elem.*, vol. 29, pp.268-362
- Crouch, S. L.** (1976): Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. *Int.J. Numer. Meth. Engrg.*, vol. 10, pp. 301-343
- Crouch, S. L., Starfield, A. M.** (1983): *Boundary Element Methods in Solid Mechanics*. George Allen and Unwin, London
- Cruse, T. A.** (1970): Lateral constraint in a cracked, three-dimensional elastic body. *Int J Fract Mech*, vol. 6, pp. 326–328.
- Cruse, T. A.; Van Buren, W.** (1971): Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. *Int J Fract Mech* 7, pp. 1–15.

**Cruse T. A. (1996):** BIE fracture mechanics analysis: 25 years of developments. *Computational Mechanics* 18, pp. 1-11

**Cruse, T. A.; Richardson, J. D. (1996):** Non-Singular Somigliana Stress Identities, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 39, p.3273-3304.

**Cruse, T. A.; Richardson, J. D. (2000):** Self-regularized hypersingular BEM for Laplace's equation. In: Bonnet, M., Sändig, A. -M., & Wendland W. L. (ed), *Mathematical Aspects of Boundary Element Methods*, Chapman & Hall / CRC, Boca Raton, FL.

**Cruz, J. P. (2001):** Formulações Não-Singulares do Método dos Elementos de Contorno Aplicadas a Problemas Bidimensionais de Potencial, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG, Brasil

**Dally W.; Riley W. F. (1991):** *Experimental Stress Analysis*. McGraw Hill, USA

**de Matos, P. F. P.; Moreira, P. M. G. P.; Portela, A.; de Castro, P. M. S. T. (2004):** Dual Boundary Element Analysis of Cracked Plates: Post-Processing Implementation of the Singularity Subtraction Technique. *Computers and Structures* vol. 82, pp. 1443–1449.

**Durodola, J. F.; Fenner, R. T. (1990):** Hermitian cubic boundary elements for two-dimensional potential problems. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, vol. 30, pp.1051-1062.

**Dominguez, J.; Ariza, M. P.; Gallego, R. (2000):** Flux and traction boundary elements without hypersingular or strongly singular integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, n. 1, pp. 111–135.

**Gallego, R., Domínguez, J. (1996):** Hypersingular BEM for Transient Elastodynamics. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.39, pp.1681-1705

**Gray, L. J. (1989):** Boundary element method for regions with internal cavities. *Engrg. Analy. Boundary Elem.*, vol. 6, pp.180-184.

**Gray, L. J., Soucie, C. S., A (1993):** Hermite Interpolation Algorithm for Hypersingular Boundary Integrals. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.36, pp.2357-2367

**Gray, L. J.; Balakrishna, C.; Kane, J. H. (1995):** Symmetric Galerkin boundary integral fracture analysis. *Engineering Analysis in Boundary Elements*, vol. 15, pp.103-109.

**Griffith, A. A. (1921):** The Study of Rupture and Flow in Solids. *Phil. Trans.* A221, pp.163-198

**Hadamard J. (1908):** Theorie des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques et du problème de Cauchy. *Acta Math*, vol. 31, pp. 333–380.

**Han, Z. D.; Atluri, S. N. (2003):** On Simple Formulations of Weakly-Singular Traction & Displacement BIE and Their Solutions Through Petrov-Galerkin Approaches, *Computer Modeling In Engineering & Sciences 4 (1)*, pp. 5-20.

**Huang Q. P.; Cruse T. A. (1994):** On the nonsingular traction-BIE in elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37: pp. 2041–2072

- Ioakimidis, N. I.** (1982): A natural approach to the introduction of finite-part integrals into crack problems of three-dimensional elasticity. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 16, pp.669-673.
- Irwin, G. R.** (1957): Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Transversing a Plate. *J. Appl. Mech.*, vol. 24, pp.361-364
- Jaswon M. A., Symm G. T.** (1977): *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*, Academic Press, London-UK.
- Jorge, A. B.; Ribeiro, G. O.; Cruse, T. A.; Fisher, T. S.** (2001): Self-Regular Boundary Integral Equation Formulations for Laplace's Equation in 2-D. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51, n. 1, pp. 1–29.
- Jorge, A. B.; Ribeiro, G. O.; Fisher, T. S.** (2003a): New Approaches for Error Estimation and Adaptivity for 2-D Potential Boundary Element Methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 56, n. 1, pp. 117-144.
- Jorge, A. B.; Cruse, T. A.; Fisher, T. S.; Ribeiro, G. O.** (2003b): A new variational self-regular traction-BEM formulation for inter-element continuity of displacement derivatives. *Computational Mechanics*, vol. 32, n. 4-6, pp. 401–414.
- Jorge, A. B.; Porto, P. A. C.; Ribeiro, G. O.** (2004): Near-boundary heat transfer using a self-regular boundary element method formulation. Aliabadi, M. H. & Leitão, V. M. A. (ed), *Advances in Boundary Element Techniques V, Proceedings of BETEQ 2004 – International Conference on Boundary Element Techniques V*, EC Ltd, UK, pp. 1-7.
- Kanninen, M. F.; Popelar, C. H.** (1985): *Advanced Fracture Mechanics*. Oxford University Press. New York –USA.
- Krishnasamy G.; Rizzo F. J.; Rudolphi T. J.** (1992): Continuity Requirements for Density Functions in the Boundary Integral Equation Method. *Comp. Mech.*, vol. 9: pp. 267–284
- Lacerda, L. A., Wrobel, L. C.** (2001): Hypersingular Boundary Elements for Axisymmetric Elasticity Problems. *Advances in Boundary Element Techniques II.*, pp.337-345
- Liu, Y.; Rizzo, F. J.** (1992): A Weakly Singular Form of the Hypersingular Boundary Integral Equation Applied to 3-D Acoustic Wave Problems. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, v.96, pp.271-287
- Liu, Y.; Rizzo, F. J.** (1993): Hypersingular Boundary Integral Equations for Radiation and Scattering of Elastic Waves in Three Dimensions. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, v.107, pp.131-144.
- Love A. E. H.** (1944): *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover: New York.
- Lutz, E.; Ingraffea, A. R.; Gray, L. J.** (1992): Use of 'Simple Solutions' for Boundary Integral Methods in Elasticity and Fracture Analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.35, pp.1735-1751

- Kupradze, V. D.** (1979): *Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Martin, P. A.; Rizzo, F. J.** (1996): Hypersingular integrals; how smooth must the density be? *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, n. 4, pp. 687–704.
- Martin, P. A.; Rizzo, F. J.; Cruse, T. A.** (1998): Smoothness relaxation strategies for singular and hypersingular integral equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 42, n. 5, pp. 885–906.
- Muci-Küchler, K. H.; Rudolphi, T. J.**(1993): Coincident Collocation of Displacement and Tangent Derivative Boundary Integral Equations in Elasticity. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.36, pp.2837-2849
- Mukhopadhyay, N. K.; Maiti, S. K., Kakodkar A.** (2000): A Review of SIF Evaluation and Modeling of Singularities in BEM. *Comp. Mechanics* 25, pp. 358-375.
- Muskhelishvili N. I.** (1953): *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity* [Noordhoff P., English Trans.]. Netherlands [original publicado em russo, 1933].
- Mustoe, G. G.W.; Volait, F.; Zienkiewicz, O. C.** (1982). A symmetric boundary integral equation method for 2 dimensional elastostatics. *Res Mechanica*, vol. 4, n. 1, pp. 57–82.
- Ozisik, M. N.** (1968): *Boundary value problems of heat conduction*. Dover
- París, F.; Cañas, J.** (1997): *Boundary element method: fundamentals and applications*. Oxford Univ. Press, UK
- Portela, A.; Aliabadi, M. H.; Rooke, D. P.** (1992a): The dual boundary element method: effective implementation for crack problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.33, pp.1269-1287
- Portela A., Aliabadi M. H., Rooke D. P.** (1992b): Dual boundary element analysis of cracked plates: singularity subtraction technique. *Int. J. Fracture* 55, pp. 17–28.
- Porto, P. A. C.; Jorge, A. B.; Ribeiro, G. O.** (2005): Extension of the Variational Self-Regular Approach for the Flux Boundary Element Method Formulation. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, vol. 10, no.1, pp.65-77
- Ribeiro, G. O.; Cruz, J. P.; Jorge, A. B.** (2000): The self-regularized BEM for Laplace's equation based on the potential BIE. *Proc. 21st. CILAMCE - Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, pp. 1-13.
- Ribeiro, G. O; Jorge, A. B.** (2000): Formulações auto-regularizadas do método dos elementos de contorno para problemas de potencial. *XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructura*
- Ribeiro, T. S.** (2003): Algoritmos não-singulares do método dos elementos de contorno para problemas bidimensionais de elasticidade, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG, Brasil.

**Ribeiro, G. O.; Cruz, J. P.; Ribeiro, T. S. A., Jorge, A. B., Cruse, T. A.** (2002): Evaluation of non-singular bem algorithms for potential problems, EABE

**Ribeiro, T. S.; Ribeiro, G. O., Jorge, A. B.** (2003): On the self-regular BEM for elastostatics 2D. *Computer Methods in Mechanics*, June 3-6, 2003, Gliwice, Poland.

**Richardson, J. D.; Cruse, T. A; Huang, Q.** (1997): On the validity of conforming BEM algorithms for hypersingular boundary integral equations. *Computational Mechanics*, vol. 20, n. 3, pp. 213–220.

**Richardson, J. D.; Cruse, T. A.** (1999): Weakly Singular Stress-BEM for 2D Elastostatics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, n. 1, pp. 13–35.

**Richardson, J. D.** (2003): Numerical p-version Refinement Studies for the Regularized Stress-BEM. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v.58, pp. 2161–2176.

**Rizzo, F. J.** (1967): An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Q Appl Math*; vol. 25, pp. 83–95.

**Sladek, V., Sladek, J.** (1995): Plate Bending Problems Using the Nonsingular Boundary Element Formulation and C1-Continuous Elements. *Comp. Struc. Eng.*, v.54, pp.679-688

**Sladek, V.; Sladek, J.** (1998): Singular Integrals in Boundary Element Methods. In: *Advances in Boundary Elements Series*, Computational Mechanics Publications, Southampton, pp.1-31.

**Snyder, M.D.; Cruse, T.A.** (1975): Boundary Integral Analysis of Anisotropic Cracked Plates. *International Journal of Fracture* 11, pp. 315–328.

**Sollero, P.; Aliabadi, M. H.** (1995): Anisotropic analysis of cracks in composite laminates using the dual boundary element method. *Composite Structures*, vol. 31, pp. 229-233.

**Tada H.** (2000): *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. ASME Press, USA.

**Tanaka, M.; Sladek, V.; Sladek, J.** (1994): Regularization techniques applied to boundary element methods. *Applied Mechanics Reviews*, vol.47 n.10, pp. 457-449.

**Universidade Federal de Itajubá** (1999): Regulamento do Curso de Doutorado em Engenharia Mecânica, Itajubá-MG

**Watson, J. O.** (1986): Hermitian cubic and singular elements for plane strain. In: P. K. Banerjee and J. O. Watson, editors, In: *Developments in Boundary Element Methods*. Vol 4, pp.1-28. Elsevier Applied Science Publishers, New York-USA.

**Web of Science** (2005): *Institute for Scientific Information*, <http://www.isinet.com>

**Williams M. L.** (1957): On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J Appl Mech* 24, pp. 109–114.

## ANEXO A

### ELEMENTOS *QUARTER-POINT*

Na implementação de elementos contínuos tipo *quarter-point* nos algoritmos para formulação auto-regularizada para problemas de elasticidade, alguns pontos devem ser levantados e analisados.

Como se sabe, o contorno  $\Gamma$ , que delimita o domínio  $\Omega$  do problema, é dividido em um número finito  $M$  de segmentos, denominados elementos de contorno. O contorno real é, portanto substituído por um contorno aproximado, baseado em esquemas de interpolação previamente definidos. Da mesma forma, as grandezas do contorno (deslocamentos e forças de superfície) são aproximadas por funções de interpolação definidas em termos de seus valores nodais no contorno.

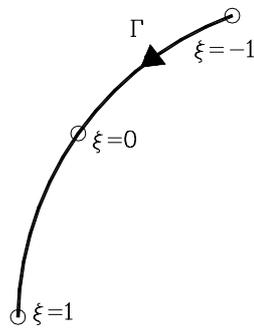
Os algoritmos do método dos elementos de contorno utilizados no presente trabalho utilizam elementos de contorno isoparamétricos, baseados em funções de interpolação de classe  $C^0$ . A adoção de elementos isoparamétricos implica que as mesmas funções de interpolação utilizadas para aproximar a geometria sejam usadas para aproximar as grandezas do contorno. Os deslocamentos, forças de superfície e coordenadas do contorno são descritos portanto pelas seguintes relações:

$$u_k(Q) \approx u_k(\xi) = \sum_{i=1}^m N_i(\xi) u_k^i \quad (A1)$$

$$t_k(Q) \approx t_k(\xi) = \sum_{i=1}^m N_i(\xi) t_k^i \quad (A2)$$

$$x_k(Q) \approx x_k(\xi) = \sum_{i=1}^m N_i(\xi) x_k^i \quad (\text{A3})$$

onde  $u_k^i$ ,  $t_k^i$ ,  $x_k^i$  são, respectivamente, os valores do deslocamento, força de superfície e coordenadas dos pontos nodais do contorno. O parâmetro  $m$  presente no somatório corresponde ao número de pontos nodais do elemento assumindo, no presente estudo, o valor 3, uma vez que a utilização de elementos tipo *quarter-point* implica em limitar o esquema de interpolação somente aos elementos quadráticos. Dessa forma,  $N_i(\xi)$  representa as funções quadráticas de interpolação em termos da coordenada intrínseca  $\xi$ .



$$N_1 = \frac{(\xi - 1)\xi}{2}$$

$$N_2 = 1 - \xi^2$$

$$N_3 = \frac{(\xi + 1)\xi}{2}$$

**Figura A.1:** Funções quadráticas de interpolação

Com intuito de possibilitar a avaliação numérica das integrais presentes nas equações integrais de contorno, faz-se necessária a transformação das coordenadas cartesianas globais dos elementos em coordenadas adimensionais locais. Tendo em vista a utilização de integração numérica por meio de quadratura Gaussiana padrão, as coordenadas cartesianas dos nós dos elementos são parametrizadas em função das coordenadas dos nós de extremidade de forma que as coordenadas adimensionais assumam valores entre  $-1$  e  $1$ . O Jacobiano dessa transformação de coordenadas globais ( $x_i$ ) para coordenadas adimensionais intrínsecas ( $\xi$ ) é dado por:

$$J(\xi) = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right)^2} \quad (\text{A4})$$

Por outro lado, sabe-se que a formulação auto-regularizada das equações integrais de contorno do gradiente requer uma representação explícita do gradiente para pontos no contorno. Este gradiente é obtido para cada elemento de contorno por meio de uma combinação vetorial da derivada tangencial local em cada nó do elemento. Desta forma evita-

se a inclusão das derivadas tangenciais como novas variáveis no contorno. A derivada tangencial para um elemento de contorno qualquer é dada por

$$\frac{dx}{d\Gamma} \approx \frac{1}{J(\xi)} \sum_{i=1}^m N'_i(\xi) T^i \quad \text{sendo} \quad N'_i = \frac{dN_i}{d\xi} \quad (\text{A5})$$

onde  $m$  é o número de pontos nodais do elemento e  $J(\xi)$  representa o Jacobiano.

Sabe-se ainda que se em um dado ponto o vetor tangente tem coordenadas  $(x_{tan}, y_{tan})$  então, o vetor  $(y_{tan}, -x_{tan})$  define a normal nesse ponto. O cálculo do vetor normal nos algoritmos em estudo se baseia nessa propriedade. Ou seja,

$$\begin{aligned} \text{Se } \vec{t} &= \left( \frac{\partial x_1}{\partial \Gamma}, \frac{\partial x_2}{\partial \Gamma} \right) \rightarrow \vec{n} = \left( \frac{\partial x_2}{\partial \Gamma}, -\frac{\partial x_1}{\partial \Gamma} \right) \\ \text{Mas, } \frac{\partial x}{\partial \Gamma} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \Gamma} \approx \frac{1}{J(\xi)} \sum_{i=1}^m N'_i(\xi) T^i \\ \text{Logo, } \vec{n} &= \vec{n} \left( \frac{1}{J(\xi)} \right) \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

Vejamos agora o que acontece quando o nó central de um elemento quadrático de comprimento  $L$  é re-mapeado para uma *quarter-point position*, isto é  $x^1=0$ ,  $x^2=L/4$  e  $x^3=L$ .

Considerando as funções de interpolação quadráticas (Equação 3.17) tem-se:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \xi(1-\varepsilon).0 + (1-\varepsilon^2). \frac{L}{4} + \frac{1}{2} \xi(1+\varepsilon).L \\ \varepsilon &= 2\sqrt{\frac{x}{L}} - 1 \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

Conseqüentemente, o Jacobiano da transformação tem a forma  $J(\xi) = \sqrt{Lx}$  e assim, quando  $x \rightarrow 0$ ,  $J(\xi) \rightarrow 0$ .

Analisando a seqüência de chamadas das subrotinas utilizadas pelas rotinas de integração constata-se que um dos primeiros passos dados é a obtenção do vetor normal da maneira explicada anteriormente. Ou seja, ao colocar o nó central a distância de  $\frac{1}{4}$  do comprimento (tomada em relação à ponta da trinca) o cálculo do vetor normal gera um erro numérico (divisão por zero) pois  $J(\xi)=0$  e o programa é interrompido. Por este motivo não é possível utilizar elementos *quarter-point* nos algoritmos utilizados.