

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
MATEMÁTICA

**Bifurcações de Equilíbrio em Equações Diferenciais  
Ordinárias:  
Ênfase em Bifurcações de Hopf Degeneradas.**

**Jerusa Mendonça Megale**

ITAJUBÁ, FEVEREIRO DE 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
MATEMÁTICA

**Jerusa Mendonça Megale**

**Bifurcações de Equilíbrio em Equações Diferenciais  
Ordinárias:  
Ênfase em Bifurcações de Hopf Degeneradas**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção de Título de Mestre em Ciências em Matemática.

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias.

Prof. Orientador: Luis Fernando de Osório Mello.

Fevereiro de 2015

ITAJUBÁ – MG

Página de Rosto

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Jerusa Mendonça Megale**

**Bifurcações de Equilíbrio em Equações Diferenciais  
Ordinárias:  
Ênfase em Bifurcações de Hopf Degeneradas.**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 20 de fevereiro de 2015, conferindo ao autor o título de **Mestre em Ciências em Matemática.**

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga

Prof. Dr. Bráulio de Augusto Garcia

ITAJUBÁ – MG

2015

*Dedico este trabalho a minha família: Hélio, Rita e Thomaz, sem vocês eu não teria chegado até aqui.*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus pela sua luz e proteção durante esta caminhada, e por conceder-me a graça de concluir este curso de mestrado.

Agradeço aos meus pais Hélio e Rita por todo amor, paciência, incentivo e por me apoiarem nos momentos difíceis. Ao meu irmão, Thomaz, pelo companheirismo, força e por sempre torcer por mim. Ao meu namorado, Silas, pela compreensão, paciência e por sempre ter me incentivado a ir atrás dos meus sonhos e comemorado comigo cada pequena conquista.

A todos os professores dos cursos de Bacharelado e Mestrado em Matemática da Unifei, e de modo especial, ao meu orientador e exemplo de profissional, Luis Fernando, pela paciência e confiança. Agradeço por me transmitir seus conhecimentos e pela compreensão nos momentos de aflição.

Aos meus amigos do mestrado, obrigada por todos os momentos de alegria e incentivo. Esta caminhada não teria sido a mesma sem vocês.

Aos professores da banca examinadora pela atenção, disponibilidade e contribuição dedicadas a este trabalho.

Agradeço, também, à CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, obrigada a todos que de alguma forma contribuíram para que esse sonho se tornasse realidade essa vitória também é de vocês.

*"A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original"*

*Albert Einstein.*

# Resumo

O principal objetivo desta dissertação é estudar as bifurcações de Hopf de codimensões 1 e 2 em sistemas de equações diferenciais ordinárias. Para sistemas de dimensão  $n$ , com  $n > 2$ , utilizaremos dois métodos: o Método da Projeção e a Redução de Lyapunov-Schmidt. Faremos uma comparação destes, no sentido de enfatizar suas semelhanças e diferenças.

**Palavras-chave:** Bifurcação de Hopf, Método da Projeção, Redução de Lyapunov-Schmidt, Bifurcação de Bautin.

# Abstract

The main goal of this dissertation is to study the Hopf bifurcation of codimension 1 and 2 in systems of ordinary differential equations. For systems of dimension  $n$ , with  $n > 2$ , we will use two methods: the Projection Method and the Lyapunov-Schmidt Reduction. We will compare them in order to emphasize their similarities and differences.

**Key words:** Hopf Bifurcation, Projection Method, Lyapunov-Schmidt Reduction, Bautin Bifurcation.

# Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Lista de Figuras	viii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Estrutura da Dissertação . . . . .	2
<b>2 Bifurcação de Hopf no plano</b>	<b>5</b>
2.1 Formas Normais da bifurcação de Hopf no plano . . . . .	5
2.2 Bifurcação de Hopf genérica no plano . . . . .	10
2.3 Bifurcação de Hopf no sistema predador-presa . . . . .	23
<b>3 Bifurcação de Hopf em sistemas <math>n</math>-dimensionais I: Método da Projeção</b>	<b>28</b>
3.1 Algoritmo do Método da Projeção . . . . .	30
3.2 Aplicação do Método da Projeção . . . . .	32
3.3 Bifurcação de Hopf no sistema <i>feedback control</i> . . . . .	42
<b>4 Bifurcação de Hopf em sistemas <math>n</math>-dimensionais II: Redução de Lyapunov-Schmidt</b>	<b>46</b>

4.1	Redução de Lyapunov-Schmidt para espaços de Banach de dimensão infinita	47
4.1.1	Algoritmo da Redução de Lyapunov-Schmidt . . . . .	47
4.2	Encontrando soluções periódicas através da redução de Lyapunov-Schmidt	51
4.2.1	Definição de Operador $\Phi$ . . . . .	52
4.2.2	Prova do Teorema de Hopf . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Aplicação dos resultados e comparação dos métodos</b>	<b>70</b>
5.1	Apresentação do problema . . . . .	70
5.2	Estudo da bifurcação via Teorema de Hopf . . . . .	73
5.3	Estudo da bifurcação via Teorema da Forma Normal de Hopf . . . . .	74
5.4	Extensão do Modelo . . . . .	78
5.5	Comparação dos Métodos . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Bifurcação de Bautin</b>	<b>82</b>
6.1	Bifurcação de Bautin no plano . . . . .	82
6.1.1	Diagrama de Bifurcação da forma normal . . . . .	89
6.2	Bifurcação de Bautin em sistemas $n$ -dimensionais . . . . .	90
	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>95</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>96</b>
	<b>Anexo I</b>	<b>98</b>

# Lista de Figuras

2.1	Retratos de fase qualitativos do sistema, em coordenadas polares $\rho' = \rho(\alpha - \rho^2)$ , $\theta' = 1$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ . . . . .	8
2.2	Retratos de fase qualitativos do sistema, em coordenadas polares $\rho' = \rho(\alpha + \rho^2)$ , $\theta' = 1$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ . . . . .	8
2.3	Retratos de fase do modelo predador-presa. . . . .	27
5.1	Curva de Hopf. . . . .	79
6.1	Diagrama da bifurcação de Bautin. . . . .	90

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

Considere o sistema de equações diferenciais dependendo do parâmetro  $\alpha$

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \quad (1.1)$$

Dizemos que o sistema (1.1) apresenta uma bifurcação se existe um valor do parâmetro,  $\alpha_0$ , tal que para toda vizinhança  $U$  de  $\alpha_0$  existem  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , tais que  $x' = f(x, \alpha_1)$  e  $x' = f(x, \alpha_2)$  não são topologicamente equivalentes.

As bifurcações podem ser locais ou globais. As bifurcações locais são aquelas que podem ser detectadas observando-se o comportamento dos autovalores da parte linear do campo de vetores e analisadas por meio da expansão em série de Taylor do campo de vetores.

Neste trabalho estudaremos as bifurcações de Hopf locais de codimensões 1 e 2 em sistemas do tipo (1.1), com  $n \geq 2$ . Entenderemos por codimensão o número de parâmetros que devem ser variados para que a bifurcação ocorra.

A bifurcação de Hopf é caracterizada pelo surgimento de uma órbita periódica simultaneamente à troca de estabilidade do ponto de equilíbrio. Sua análise e descoberta é atribuída a E. Hopf que em 1942 estabeleceu condições para a ocorrência de tal bifurcação num sistema  $n$ -dimensional. Entretanto, esse tipo de bifurcação já havia sido sugerida por Poincaré, em 1892, e estudada por Andronov, em 1929.

Para a bifurcação de Hopf planar de codimensão 1, utilizaremos a mesma abordagem utilizada em [8]. Estudaremos analiticamente a forma normal da bifurcação no plano, em seguida encontraremos condições para que um sistema planar que apresente a bifurcação seja topologicamente equivalente à forma normal, feito isso utilizaremos o Teorema da Forma Normal de Hopf para estudarmos a bifurcação. Este teorema apresenta condições sobre a equação diferencial para que a bifurcação ocorra.

A partir deste estudo obteremos uma fórmula explícita para o cálculo do primeiro coeficiente de Lyapunov do sistema, cujo sinal nos dará informações sobre a estabilidade da órbita periódica.

Para a bifurcação de Hopf planar de codimensão 2 faremos o mesmo processo feito para a de codimensão 1, porém nesse caso utilizaremos o Teorema da Forma Normal de Bautin e obteremos uma fórmula para o cálculo do segundo coeficiente de Lyapunov do sistema.

Na literatura sobre bifurcação de Hopf, podemos identificar seis métodos distintos para o estudo das bifurcações em sistemas de dimensão maior que 2. Aqui abordaremos dois métodos para a bifurcação de codimensão 1: o Método da Projeção e o Método da Redução de Lyapunov-Schmidt. Para bifurcação de codimensão 2 aplicaremos somente o primeiro. Para maiores informações sobre os outros métodos veja [5].

Nosso objetivo é apresentar uma análise comparativa dos dois métodos, a partir da qual o leitor poderá identificar qual deles deverá utilizar para obter as informações que deseja sobre a bifurcação.

Todas as figuras presentes no trabalho, exceto a 5.1, foram retiradas de [8].

## 1.2 Estrutura da Dissertação

A dissertação está estruturada como segue:

- **Capítulo 2)** Estudaremos a bifurcação de Hopf planar de codimensão 1. O estudo realizado foi baseado em [8]. Primeiramente, falaremos sobre a definição da bifurcação e exemplificaremos apresentando suas formas normais. Em seguida, enunciaremos e demonstraremos teoremas que nos forneçam condições para a existência da

bifurcação em sistemas planares, em seguida, aplicaremos esse teorema na equação que modela o fenômeno biológico predador-presa.

- **Capítulo 3)** Estudada a bifurcação em sistemas planares, posteriormente estudaremos em sistema  $n$ -dimensionais, com  $n > 2$ . Inicialmente utilizaremos o Método da Projeção, que nos permite diminuir a dimensão do sistema para 2, e a partir daí podemos utilizar os resultados do Capítulo 2 para o estudo da bifurcação.

Obteremos também uma fórmula para calcular o primeiro coeficiente de Lyapunov do sistema. Para finalizar, mostraremos através da aplicação do método, que o sistema que modela o fenômeno físico *feedback control* apresenta uma bifurcação de Hopf. O estudo realizado neste capítulo foi baseado nas referências [7] e [8].

- **Capítulo 4)** Apresentaremos outro método para sistemas  $n$ - dimensionais: o Método da Redução de Lyapunov-Schmidt. Inicialmente apresentaremos o algoritmo do método, que é dividido em 5 passos, enunciaremos e justificaremos matematicamente cada passo envolvido. Em seguida, aplicaremos o algoritmo em sistemas  $n$ -dimensionais que apresentam uma bifurcação de Hopf de codimensão 1. Feito isso, utilizaremos a Redução feita anteriormente para demonstrar o Teorema de Hopf, a partir do qual obteremos informações sobre a bifurcação. A principal referência utilizada foi [2].
- **Capítulo 5)** Neste capítulo aplicaremos os resultados obtidos a partir do Método da Projeção e da Redução de Lyapunov-Schmidt para estudar a bifurcação de Hopf na equação que modela o sistema biológico conhecido como *Repressilator*. Buscamos com isso fazer uma comparação destes métodos, no sentido de enfatizar suas semelhanças e diferenças. Em seguida, faremos uma extensão do modelo e, para essa extensão, apresentaremos o diagrama de bifurcação. Este capítulo foi baseado no artigo [3].
- **Capítulo 6)** Este capítulo será dedicado à bifurcação de Hopf de codimensão 2 ou bifurcação de Bautin. Primeiramente, estudaremos a bifurcação em sistema planares, apresentamos o conceito da bifurcação e exemplificaremos apresentando suas formas normais. Em seguida, enunciaremos e demonstraremos teoremas que nos forneçam condições para a existência da bifurcação em sistemas planares. Estudaremos

também o diagrama de bifurcação, com o intuito de destacar o caráter geométrico. Para finalizar, aplicamos o Método da Projeção para sistemas  $n$ -dimensionais,  $n > 2$  que exibem a bifurcação. O estudo feito neste capítulo foi baseado nas referências [5], [7] e [8].

# Capítulo 2

## Bifurcação de Hopf no plano

Abaixo seguem algumas definições que utilizaremos ao longo deste capítulo.

**Definição 2.0.1.** *Um ponto de equilíbrio  $x_0$  do sistema*

$$x' = f(x)$$

*com  $f$  suave e  $x \in \mathbb{R}^n$ , é chamado hiperbólico se todos os autovalores de  $J(x_0)$  têm partes reais não nulas, onde  $J(x_0) = Df(x_0)$  representa a matriz Jacobiana de  $f(x)$  no ponto  $x_0$ .*

**Definição 2.0.2.** *Um ponto de equilíbrio hiperbólico do sistema*

$$x' = f(x)$$

*com  $f$  suave e  $x \in \mathbb{R}^2$ , chama-se foco se  $J(x_0)$  possuir dois autovalores complexos. Se a parte real desses autovalores for negativa chamaremos  $x_0$  de foco atrator. Se a parte real dos autovalores for positiva de foco repulsor.*

A principal referência utilizada para confecção deste capítulo foi [8].

### 2.1 Formas Normais da bifurcação de Hopf no plano

Considere o sistema de equações diferenciais dependente do parâmetro  $\alpha$

$$x' = f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

**Definição 2.1.1.** *O sistema (2.1) apresenta uma **Bifurcação de Hopf** se a partir de uma pequena perturbação no parâmetro  $\alpha$ , ocorre uma mudança de estabilidade do ponto de equilíbrio, de foco atrator para foco repulsor (ou vice versa) com o surgimento de um ciclo limite estável (instável, caso contrário).*

Vejamos alguns exemplos. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x_1' = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ x_2' = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases} \quad (2.2)$$

Note que, para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ , a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema (2.2) com matriz Jacobiana dada por

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

que possui autovalores  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$ .

Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos(\theta), \\ x_2 = \rho \sin(\theta), \end{cases} \quad (2.3)$$

o sistema (2.2) assume a forma

$$\begin{cases} \rho' \cos(\theta) - \rho\theta' \sin(\theta) = \alpha\rho \cos(\theta) - \rho \sin(\theta) - \rho^3 \cos(\theta), \\ \rho' \sin(\theta) + \rho\theta' \cos(\theta) = \rho \cos(\theta) + \alpha\rho \sin(\theta) - \rho^3 \sin(\theta). \end{cases} \quad (2.4)$$

Multiplicando a primeira equação de (2.4) por  $(\cos(\theta))$ , a segunda por  $(\sin(\theta))$  e somando-as temos

$$\rho' = \alpha\rho - \rho^3. \quad (2.5)$$

Multiplicando agora a primeira equação de (2.4) por  $(-\sin(\theta))$ , a segunda por  $(\cos(\theta))$  e somando-as obtemos

$$\theta' = 1. \quad (2.6)$$

Temos, portanto, o seguinte sistema

$$\begin{cases} \rho' = \rho(\alpha - \rho^2), \\ \theta' = 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Analisaremos o comportamento dos retratos de fase do sistema (2.7) para diferentes valores do parâmetro, considerando  $\rho \geq 0$ . Da primeira equação de (2.7), temos que  $\rho = 0$  é ponto de equilíbrio para qualquer valor de  $\alpha$ , tal que:

- 1) Para  $\alpha < 0$  este equilíbrio é uma foco atrator, pois os autovalores da matriz jacobiana são complexos conjugados com partes reais negativas;
- 2) Para o valor crítico  $\alpha = 0$ , da primeira equação do sistema (2.7) temos que  $\rho' < 0$ , logo a função  $\rho$  é estritamente decrescente, donde concluímos que as órbitas tendem a origem. Neste caso dizemos que o equilíbrio é um foco atrator fraco (um equilíbrio não linear e topologicamente equivalente ao foco atrator);
- 3) Para  $\alpha > 0$  o equilíbrio é uma foco repulsor, pois os autovalores são complexos conjugados com partes reais positivas. Temos um outro ponto de equilíbrio para  $\rho = \sqrt{\alpha}$ , neste caso a origem fica isolada por uma órbita fechada (ciclo limite) que é única e atratora. Este ciclo é uma circunferência de raio  $\rho(\alpha) = \sqrt{\alpha}$ . Todas as órbitas internas e externas a este ciclo, com exceção da origem, tendem a ele quando  $t \rightarrow \infty$ . A segunda equação do sistema (2.7) nos garante que esta órbita é percorrida no sentido anti-horário com velocidade constante.

Assim, o sistema sofre uma bifurcação de Hopf para  $\alpha = 0$ . Observe a figura (2.1).

Um outro exemplo é mesmo sistema de (2.2), porém tendo os termos não lineares positivos

$$\begin{cases} x_1' = \alpha x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ x_2' = x_1 + \alpha x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases} \quad (2.8)$$

O sistema (2.8) tem fórmula polar dada por

$$\begin{cases} \rho' = \rho(\alpha + \rho^2), \\ \varphi' = 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

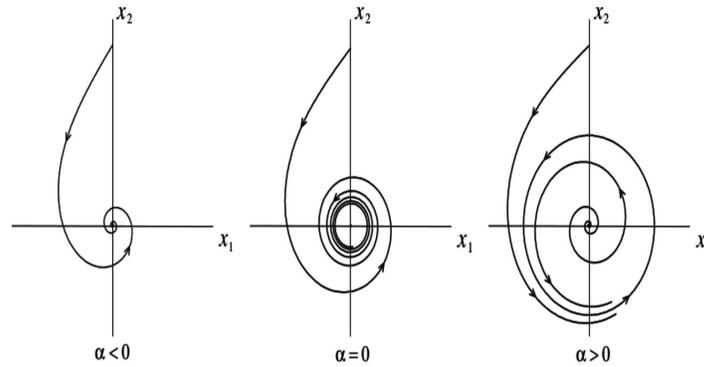


Figura 2.1: Retratos de fase qualitativos do sistema, em coordenadas polares  $\rho' = \rho(\alpha - \rho^2)$ ,  $\theta' = 1$  com  $\alpha \in \mathbb{R}$

e pode ser analisado da mesma maneira. Para  $\alpha = 0$  teremos uma bifurcação de Hopf, mas ao contrário do sistema (2.2) o ciclo limite, que surgirá para  $\alpha < 0$ , é repulsor. Para valores de  $\alpha > 0$  a origem é um foco repulsor, para  $\alpha = 0$  será um foco repulsor "fraco" e para  $\alpha < 0$  será um foco atrator. Neste último caso teremos então o ciclo limite repulsor dado por uma órbita fechada de raio  $\rho(\alpha) = \sqrt{\alpha}$ . Todas as órbitas externas ou internas ao ciclo, com exceção da origem, tendem a ele quando  $t \rightarrow -\infty$ . Observe a figura (2.2)

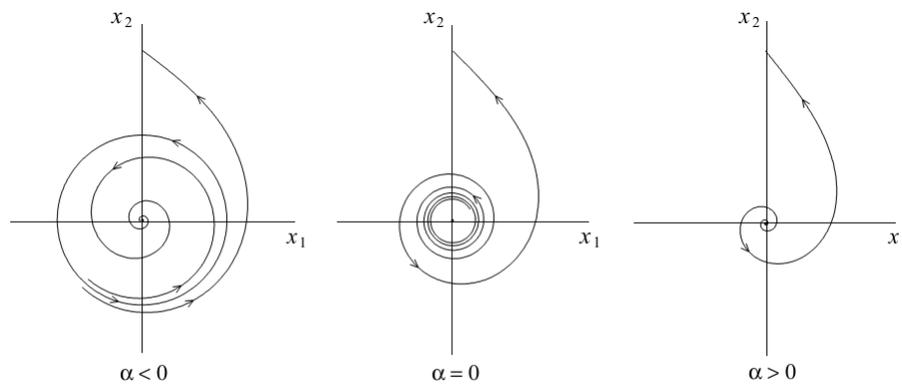


Figura 2.2: Retratos de fase qualitativos do sistema, em coordenadas polares  $\rho' = \rho(\alpha + \rho^2)$ ,  $\theta' = 1$  com  $\alpha \in \mathbb{R}$

**Definição 2.1.2.** Os sistemas (2.2) e (2.8) serão denominados **Formas normais**

*da bifurcação de Hopf.*

As formas normais serão de grande importância para nossos estudos, como veremos mais adiante elas serão utilizadas quando formos estudar o Método da Projeção para bifurcação de Hopf em sistemas  $n$ -dimensionais. Segue abaixo a definição de ponto de Hopf.

**Definição 2.1.3.** *Um ponto de Hopf é um ponto de equilíbrio  $(x_0, \alpha_0)$  de (2.1) onde a parte linear do campo de vetores  $A = Df(x_0, \alpha_0)$  possui dois autovalores da forma  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$ . Um ponto de Hopf é denominado transversal, se os autovalores complexos da forma  $\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega_0$  interceptam o eixo imaginário com  $\mu'(\alpha_0)$  não nula.*

Nos sistemas (2.2) e (2.8) o ponto formado pela origem do sistema e o parâmetro  $\alpha_0 = 0$  é o ponto de Hopf dos sistemas.

Veremos na próxima seção que o ponto de Hopf ser transversal é uma condição necessária para que a bifurcação de Hopf ocorra.

O próximo lema nos dará informações de como os termos de ordem maior do sistema afetam a bifurcação de Hopf .

Considere o sistema (2.2) na sua forma vetorial e com termos de ordem maior

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^4), \quad (2.10)$$

onde  $O(\|x\|^4)$  são termos que podem depender eventualmente de  $\alpha$ .

**Lema 2.1.1.** *O sistema (2.10) é localmente topologicamente equivalente ao sistema (2.2) perto da origem.*

Para demonstração deste resultado veja [8], Apêndice 1.

**Observação 2.1.1.** *Do Lema 2.1.1, concluímos que os termos de ordem maior não afetam o comportamento da bifurcação do sistema (2.10) perto da origem, assim podemos ignorá-los nas nossas considerações.*

**Observação 2.1.2.** *Um resultado análogo vale para o sistema (2.8).*

## 2.2 Bifurcação de Hopf genérica no plano

Como vimos na seção (2.1), os sistemas (2.2) e (2.8) representam as formas normais da bifurcação de Hopf no plano. Nesta seção, encontraremos condições para que um sistema planar qualquer seja topologicamente equivalente às formas normais apresentadas.

Considere o sistema

$$x' = f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

com  $f$  suave, tendo para  $((0, 0), 0)$  autovalores  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$ . Pelo Teorema da Função Implícita, quando  $\lambda = 0$  não é autovalor da matriz Jacobiana, o sistema (2.11) tem um único ponto de equilíbrio  $x_0(\alpha)$  em alguma vizinhança da origem para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeno. Podemos, então, por uma mudança de coordenadas, levar este equilíbrio para a origem. Portanto, podemos assumir sem perda de generalidade que  $x = 0$  é ponto de equilíbrio do sistema para  $|\alpha|$  suficientemente pequeno. Assim, o sistema (2.11) pode ser escrito na forma

$$x' = A(\alpha)x + F(x, \alpha), \quad (2.12)$$

onde  $F$  é uma função vetorial suave com componentes  $F_1$  e  $F_2$  tendo expansão de Taylor em  $x$  começando com termos quadráticos (no mínimo). A matriz Jacobiana  $A(\alpha)$  possui dois autovalores que serão denotados por

$$\lambda_1(\alpha) = \lambda(\alpha), \quad \lambda_2(\alpha) = \bar{\lambda}(\alpha),$$

onde

$$\begin{cases} \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha), \\ \mu(0) = 0, \quad \omega(0) > 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

A segunda equação do sistema (2.13) denota uma condição necessária para que a bifurcação de Hopf ocorra.

**Lema 2.2.1.** *Introduzindo uma variável complexa  $z$ , o sistema (2.12) para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeno pode ser escrito como uma equação simples*

$$z' = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha), \quad (2.14)$$

onde  $g = (\|z\|^2)$  é uma função suave de  $(z, \bar{z}, \alpha)$ .

**Demonstração:** Seja  $q(\alpha) \in \mathbb{C}^2$  um o autovalor complexo correspondente ao autovalor  $\lambda(\alpha)$ ,

$$A(\alpha)q(\alpha) = \lambda(\alpha)q(\alpha),$$

e seja  $p(\alpha) \in \mathbb{C}^2$  um autovetor da matriz transposta correspondendo ao autovalor  $\bar{\lambda}(\alpha)$ ,

$$A^t(\alpha)p(\alpha) = \bar{\lambda}(\alpha)p(\alpha). \quad (2.15)$$

É sempre possível normalizar  $p(\alpha)$  com respeito a  $q(\alpha)$

$$\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1,$$

onde  $\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2$  é o produto escalar em  $\mathbb{C}^2$ .

Como  $q$  e  $\bar{q}$  formam uma base de autovetores, qualquer vetor  $x \in \mathbb{R}^2$  pode ser representado unicamente, para todo  $\alpha$  pequeno, como

$$x = zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \quad (2.16)$$

para algum número complexo  $z$ . Temos então a seguinte forma explícita para determinar  $x$

$$z = \langle p(\alpha), x \rangle. \quad (2.17)$$

**Afirmção 1:** A fórmula (2.17) está bem definida.

Com efeito, da equação (2.16) segue que:

$$\begin{aligned} \langle p(\alpha), x \rangle &= \langle p(\alpha), zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha) \rangle \\ &= \langle p(\alpha), zq(\alpha) \rangle + \langle p(\alpha), \bar{z}\bar{q}(\alpha) \rangle \\ &= z \langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle + \bar{z} \langle p(\alpha), \bar{q}(\alpha) \rangle. \end{aligned}$$

Como  $\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1$  basta verificarmos que  $\langle p(\alpha), \bar{q}(\alpha) \rangle = 0$ .

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle p(\alpha), \bar{q}(\alpha) \rangle &= \left\langle p(\alpha), \frac{A(\alpha)\bar{q}(\alpha)}{\bar{\lambda}(\alpha)} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\bar{\lambda}(\alpha)} \langle p(\alpha), A(\alpha)\bar{q}(\alpha) \rangle \\
&= \frac{1}{\bar{\lambda}(\alpha)} \langle A^t(\alpha)p(\alpha), \bar{q}(\alpha) \rangle \\
&= \frac{\lambda(\alpha)}{\bar{\lambda}(\alpha)} \langle p(\alpha), \bar{q}(\alpha) \rangle \\
\Rightarrow \left(1 - \frac{\lambda(\alpha)}{\bar{\lambda}(\alpha)}\right) \langle p(\alpha), \bar{q}(\alpha) \rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Como

$$\left(1 - \frac{\lambda(\alpha)}{\bar{\lambda}(\alpha)}\right) \neq 0,$$

pois numa vizinhança suficientemente pequena de  $|\alpha|$  temos  $\omega(\alpha) > 0$ , concluimos que

$$\langle p(\alpha), \bar{q}(\alpha) \rangle = 0.$$

e a prova da afirmação está feita.

**Afirmação 2:**  $z$  satisfaz a equação

$$z' = \lambda(\alpha)z + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}q(\alpha), \alpha) \rangle.$$

Com efeito, de (2.17) temos que  $z$  satisfaz a equação

$$\begin{aligned}
z' &= \langle p(\alpha), x' \rangle \\
&= \langle p, Ax + F(x) \rangle \\
&= \langle p, Ax \rangle + \langle p, F(x) \rangle \\
&= \langle p, A(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\
&= \langle p, A(zq) \rangle + \langle p, A(\bar{z}\bar{q}) \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\
&= \lambda z \langle p, q \rangle + \bar{\lambda} \bar{z} \langle p, \bar{q} \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\
&= \lambda(\alpha)z + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle.
\end{aligned}$$

Donde obtemos a fórmula requerida com

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle.$$



Escrevendo  $g$  em série de Taylor nas variáveis complexas  $z$  e  $\bar{z}$  temos

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l,$$

onde

$$g_{kl} = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle \Big|_{z=0}$$

para  $k+l \geq 2, k, l = 0, 1, \dots$

Supondo que, para  $\alpha = 0$ , a função  $F(x, \alpha)$  de (2.12) seja representada na forma

$$F(x, 0) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4),$$

onde  $B(x, y)$  e  $C(x, y, z)$  são funções multilineares simétricas de  $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ . Em coordenadas temos

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_k} F_i(\epsilon, 0) \Big|_{\epsilon=0} x_j y_k, \quad i = 1, 2;$$

$$C_i(x, y, u) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_k \partial \epsilon_l} F_i(\epsilon, 0) \Big|_{\epsilon=0} x_j y_k u_l, \quad i = 1, 2.$$

Então,

$$B(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) = z^2 B(q, q) + 2z\bar{z} B(q, \bar{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}),$$

onde  $q = q(0)$  e  $p = p(0)$ , e os coeficientes de Taylor  $g_{kl}$ ,  $k+l=2$ , dos termos quadráticos em  $g(z, \bar{z}, 0)$  podem ser expressos pelas fórmulas:

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle,$$

$$g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle.$$

Fazendo cálculos similares com  $C$  temos

$$g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle.$$

A seguir faremos mudanças de coordenadas (complexas) não lineares a fim de simplificar a equação (2.14). Primeiramente, iremos remover todos os termos quadráticos, utilizando o seguinte lema.

**Lema 2.2.2.** *A equação*

$$z' = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{20}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3), \quad (2.18)$$

onde  $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$ ,  $\mu(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ , e  $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$ , pode ser transformada, pela mudança de coordenada complexa

$$z = r + \frac{h_{20}}{2} r^2 + h_{11} r \bar{r} + \frac{h_{20}}{2} \bar{r}^2, \quad (2.19)$$

para  $|\alpha|$  suficientemente pequeno, na equação sem termos quadráticos

$$r' = \lambda r + O(|r|^3). \quad (2.20)$$

**Demonstração:** A mudança de variável inversa é dada pela expressão

$$r = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z \bar{z} - \frac{h_{20}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3).$$

Assim,

$$r' = z' - h_{20} z z' - h_{11} (z' \bar{z} + z \bar{z}') - h_{20} \bar{z} \bar{z}' \dots$$

Substituindo  $z'$  dado por (2.18) na expressão acima, obtemos

$$r' = \lambda z + \left( \frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{02} \right) z^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) z \bar{z} + \left( \frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda} h_{02} \right) \bar{z}^2 + \dots$$

Substituindo  $z$  e  $\bar{z}$  dado por (2.19) temos

$$r' = \lambda r + \frac{1}{2} (g_{20} - \lambda h_{20}) r^2 + (g_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) r \bar{r} + \frac{1}{2} (g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda) h_{02}) \bar{r}^2 + O(|r|^3).$$

Escolhendo

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda}.$$

eliminamos os termos quadráticos da expressão anterior e obtemos (2.20).

Essas substituições são sempre possíveis pois, para  $|\alpha|$  suficientemente pequeno, os denominadores nunca se anulam, uma vez que  $\lambda(0) = i\omega_0$ , com  $\omega_0 > 0$ .

■

No que segue, assumindo que todos os termos quadráticos já foram removidos, também tentaremos eliminar todos os termos cúbicos via mudança de variáveis. Veremos que isso não é possível devido a um termo resistente.

**Lema 2.2.3.** *A equação*

$$z' = \lambda z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 + O(|z|^4), \quad (2.21)$$

onde  $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$ ,  $\mu(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 > 0$  e  $g_{ij} = g_{ij}(\epsilon)$ , pode ser transformada, pela mudança de coordenada complexa

$$z = r + \frac{h_{30}}{6} r^3 + \frac{h_{21}}{2} r^2 \bar{r} + \frac{h_{12}}{2} r \bar{r}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{r}^3, \quad (2.22)$$

para  $|\alpha|$  suficientemente pequeno, na equação com um único termo cúbico

$$r' = \lambda + c_1 r^2 \bar{r} + O(|r|^4). \quad (2.23)$$

**Demonstração:** A mudança de variável inversa é dada por

$$r = z - \frac{h_{30}}{6} z^3 - \frac{h_{21}}{2} z^2 \bar{z} - \frac{h_{12}}{2} z \bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6} \bar{z}^3 + O(|z|^4). \quad (2.24)$$

Assim,

$$r' = z' - \frac{h_{30}}{2} z^2 \bar{z}' - \frac{h_{21}}{2} (2z\bar{z}z' + z^2\bar{z}') - \frac{h_{12}}{2} (z'\bar{z}^2 + 2z\bar{z}\bar{z}') - \frac{h_{03}}{2} \bar{z}^2 \bar{z}' + \dots$$

Substituindo (2.21) na expressão acima obtemos

$$\begin{aligned} r' &= \lambda z + \left( \frac{g_{30}}{6} - \frac{\lambda h_{30}}{2} \right) z^3 + \left( \frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \frac{\bar{\lambda} h_{21}}{2} \right) z^2 \bar{z} + \left( \frac{g_{12}}{2} - \frac{\lambda h_{12}}{2} - \bar{\lambda} h_{12} \right) z \bar{z}^2 \\ &+ \left( \frac{g_{03}}{6} - \frac{\bar{\lambda} h_{03}}{2} \right) \bar{z}^3 + \dots \end{aligned}$$

Substituindo agora  $z$  e  $\bar{z}$  dados em (2.22) na expressão acima temos

$$\begin{aligned} r' &= \lambda r + \frac{1}{6} (g_{30} + 2\lambda h_{30}) r^3 + \frac{1}{2} (g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda}) h_{21}) r^2 \bar{r} + \frac{1}{2} (g_{12} - 2\bar{\lambda} h_{12}) r \bar{r}^2 + \\ &+ \frac{1}{6} (g_{03} + (\lambda - 3\bar{\lambda}) h_{03}) \bar{r}^3 + O(|r|^4). \end{aligned}$$

Tomando, portanto,

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{2\bar{\lambda}}, \quad h_{03} = \frac{g_{03}}{3\bar{\lambda} - \lambda},$$

eliminamos os termos cúbicos com excessão do termo  $r^2\bar{r}$ , o qual trataremos separadamente.

As substituições são válidas, pois os denominadores envolvidos são diferentes de zero para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeno.

Podemos tentar eliminar o termo  $r^2\bar{r}$  escrevendo seu coeficiente da seguinte maneira

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}}.$$

Isto é possível para  $\alpha \neq 0$  pequeno, mas quando  $\alpha = 0$  o denominador se anula, pois  $\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = i\omega_0 - i\omega_0 = 0$ . Para obtermos então uma transformação que dependa suavemente de  $\alpha$ , escolhemos  $h_{21} = 0$ , o que implica

$$c_1 = \frac{g_{21}}{2}.$$

■

O termo  $r^2\bar{r}$  é chamado de termo ressonante. Note que o seu coeficiente é o mesmo coeficiente do termo cúbico  $z^2\bar{z}$  na equação (2.21). Combinando os Lemas 2.2.2 e 2.2.3 segue o resultado.

**Lema 2.2.4.** (*Forma Normal de Poincaré para a Bifurcação de Hopf.*) A equação

$$z' = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^k \bar{z}^l + O(|z|^4), \quad (2.25)$$

onde  $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$ ,  $\mu(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ , e  $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$ , pode ser transformada, pela mudança de coordenada complexa

$$z = r + \frac{h_{20}}{2} r^2 + h_{11} r\bar{r} + \frac{h_{02}}{2} \bar{r}^2 + \frac{h_{30}}{6} r^3 + \frac{h_{12}}{2} r\bar{r}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{z}^3,$$

para  $|\alpha|$  suficientemente pequeno, na equação com apenas um termo cúbico

$$r' = \lambda r + c_1 r^2 \bar{r} + O(|r|^4), \quad (2.26)$$

com  $c_1 = c_1(\alpha)$ .

**Demonstração:** Iremos aplicar os Lemas 2.2.2 e 2.2.3. Primeiramente, a transformação

$$z = r + \frac{h_{20}}{2}r^2 + h_{11}r\bar{r} + \frac{h_{02}}{2}\bar{r}^2. \quad (2.27)$$

com

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\lambda - \lambda},$$

elimina os termos quadráticos como vimos no Lema 2.2.2, mas ela também altera os coeficientes dos termos cúbicos. O coeficiente  $g_{21}/2$  do termo  $z^2\bar{z}$  na equação (2.25) foi modificado pela transformação. Representemos, então, o coeficiente de  $r^2\bar{r}$  por  $g_{21}^*/2$ . Aplicando a transformação do Lema 2.2.3 eliminamos os termos cúbicos com exceção do termo ressonante. O coeficiente deste termo continuará sendo  $g_{21}^*/2$ . ■

Precisamos, agora, calcular o coeficiente  $c_1$  em termos da equação (2.25). O valor deste será dado pelo novo coeficiente  $g_{21}^*/2$  do termo  $r^2\bar{r}$  após a transformação quadrática. Segue então o lema.

**Lema 2.2.5.** *O coeficiente  $c_1(\alpha)$ , da equação (2.26), para  $\alpha = 0$ , é dado por*

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left( g_{20}g_{11} - 2 |g_{11}|^2 - \frac{1}{3} |g_{02}| \right) + \frac{g_{21}}{2}. \quad (2.28)$$

**Demonstração:** Diferenciando a equação (2.27), obtemos

$$z' = r' + h_{20}rr' + h_{11}(r\bar{r}' + \bar{r}r') + h_{02}r\bar{r}'. \quad (2.29)$$

Substituindo na equação acima os valores de  $r'$  e  $\bar{r}'$ , provenientes da equação (2.26), temos

$$z' = \lambda r + \lambda h_{20}r^2 + (\lambda + \bar{\lambda})h_{11}r\bar{r} + \bar{\lambda}h_{20}\bar{r}^2 + c_1r^2\bar{r} + \dots$$

Consideremos agora a equação (2.25), substituindo  $z$  e  $\bar{z}$ , dados por (2.27) e escrevendo apenas os termos que nos interessam, temos:

$$\begin{aligned} z' &= \lambda r + \frac{1}{2}(\lambda h_{20} + g_{20})r^2 + (\lambda h_{11} + g_{11})r\bar{r} + \frac{1}{2}(\lambda h_{02} + g_{02})\bar{r}^2 + \\ &+ \left( g_{20}h_{11} + g_{11} \left( \frac{h_{20}}{2} + \bar{h}_{11} \right) + \frac{g_{02}\bar{h}_{02}}{2} + \frac{g_{21}}{2} \right) r^2\bar{r} + \dots \end{aligned}$$

Comparando, então, os coeficientes do termo  $r^2\bar{r}$  nas duas equações obtidas e utilizando os valores encontrados para  $h_{20}$ ,  $h_{11}$  e  $h_{20}$ ,

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda},$$

temos

$$\begin{aligned} c_1 &= g_{20} \frac{g_{11}}{\lambda} + g_{11} \left( \frac{g_{20}}{2\lambda} + \frac{\bar{g}_{11}}{\lambda} \right) + \frac{g_{02}\bar{g}_{02}}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}. \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{g_{20}g_{11}(2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}. \end{aligned}$$

Essa fórmula nos dá a dependência de  $c_1$  em relação a  $\alpha$ , uma vez que  $\lambda$  e  $g_{ij}$  são funções suaves do parâmetro. No valor de bifurcação  $\alpha = 0$ , a última equação se reduz a

$$c_1(0) = \frac{g_{20}g_{11}(2i\omega_0 - i\omega_0)}{2\omega_0^2} + \frac{|g_{11}|^2}{i\omega_0} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2i\omega_0 + i\omega_0)} + \frac{g_{21}}{2}.$$

concluindo, finalmente, o resultado

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left( g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}.$$

■

O próximo lema nos permite transformar a forma normal de Poincaré na forma normal da definição (2.1.2).

**Lema 2.2.6.** *Considere a equação*

$$\frac{dr}{dt} = (\mu(\alpha) + i\omega(\alpha))r + c_1(\alpha)r|r|^2 + O(|r|^4), \quad (2.30)$$

onde  $\mu(0) = 0$  e  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ . Suponha  $\mu'(0) \neq 0$  e  $\text{Re}(c_1(0)) \neq 0$ . Então a equação (2.30) pode ser transformada, por mudanças de coordenadas, na equação

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4), \quad (2.31)$$

onde  $u$  é a nova coordenada complexa,  $\theta$  é o novo tempo,  $\beta$  é o novo parâmetro e  $s = \text{sign} \text{Re}(c_1(0)) = \pm 1$ .

**Demonstração:** Introduzindo o novo tempo  $\tau = \omega(\alpha)t$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ &= [(\mu(\alpha) + i\omega(\alpha))r + c_1(\alpha)r |r|^2 + \dots] \frac{1}{\omega(\alpha)} \\ &= (\beta + i)r + d_1(\beta)r |r|^2 + \dots, \end{aligned}$$

onde,

$$\beta = \beta(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)}, \quad d_1(\beta) = \frac{c_1(\alpha(\beta))}{\omega(\alpha(\beta))}.$$

Note que, a direção do tempo é preservada, pois para  $|\alpha|$  suficientemente pequeno próximo da origem, temos que  $\omega(\alpha) > 0$ . Podemos considerar  $\beta$  como um novo parâmetro pois

$$\beta(0) = 0, \quad \beta'(0) = \frac{\mu'(0)}{\omega(0)} \neq 0,$$

e, portanto, o Teorema da Função Inversa nos garante a existência local e suave de  $\alpha$  como função de  $\beta$ .

Vamos agora reparametrizar o tempo ao longo das órbitas com a nova mudança de tempo  $\theta = \theta(\tau, \beta)$ , onde

$$d\theta = (1 + e_1(\beta) |r|^2) d\tau$$

com  $e_1(\alpha) = \text{Im}(d_1(\alpha))$ . Usando esse novo valor do tempo, obtemos:

$$\frac{dr}{d\theta} = (\beta + i)r + l_1(\beta)r |r|^2 + O(|r|^4),$$

onde

$$l_1(\beta) = \text{Re } d_1(\beta) - \beta e_1(\beta), \quad l_1(0) = \frac{\text{Re } c_1(0)}{\omega(0)}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{d\theta} \\ &= [(\beta + i)r + d_1(\beta)r |r|^2 + \dots] \frac{1}{1 + e_1(\beta) |r|^2}. \end{aligned}$$

Seja

$$f(x) = \frac{1}{1 + e_1(\beta)x^2} \quad \text{com } x = |r|.$$

Tomemos a expansão de Taylor de  $f$  em torno da origem para  $|x|$  pequeno

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{1 + e_1(\beta)x^2} \right]_{x=0} x + \frac{1}{2} \frac{d}{dx^2} \left[ \frac{1}{1 + e_1(\beta)x^2} \right]_{x=0} x^2 + \dots \\ &= 1 + (-2e_1(\beta)x)_{x=0} x + \frac{1}{2} \left( \frac{-2e_1(\beta)}{1 + e_1(\beta)x^2} \right)_{x=0} x^2 + \dots \\ &= 1 - e_1(\beta)x^2 + \dots \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= [(\beta + i)r + d_1(\beta)r |r|^2 + \dots] (1 - e_1(\beta) |r|^2) \\ &= (\beta + i)r + d_1(\beta)r |r|^2 - (\beta + i)e_1(\beta)r |r|^2 + \dots \\ &= (\beta + i)r + [d_1(\beta) - (\beta + i)e_1(\beta)]r |r|^2 + \dots \\ &= (\beta + i)r + l_1(\beta)r |r|^2 + \dots, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} l_1(\beta) &= d_1(\beta) - (\beta + i)e_1(\beta) \\ &= \operatorname{Re} d_1(\beta) + i\operatorname{Im} d_1(\beta) - \beta e_1(\beta) - ie_1(\beta) \\ &= \operatorname{Re} d_1(\beta) + i\operatorname{Im} d_1(\beta) - \beta e_1(\beta) - i\operatorname{Im} d_1(\beta) \\ &= \operatorname{Re} d_1(\beta) - \beta e_1(\beta). \end{aligned}$$

Em particular,

$$l_1(0) = \operatorname{Re} d_1(0) - 0e_1(0) = \operatorname{Re} d_1(0) = \operatorname{Re} \frac{c_1(0)}{\omega_0}.$$

Finalmente, introduzindo a nova variável complexa  $u$ ,

$$r = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}},$$

que está bem definida pois  $\operatorname{Re} c_1(0) \neq 0$  e, portanto,  $l_1(0) \neq 0$ ,

temos

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= \frac{du}{dr} \frac{dr}{d\theta} \\ &= \sqrt{|l_1(\beta)|} [(\beta + i)r + l_1(\beta)r |r|^2 + O(|r|^4)] \\ &= \sqrt{|l_1(\beta)|} \left[ (\beta + i) \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}} + l_1(\beta) \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}} \frac{|u|^2}{|l_1(\beta)|} + O(|r|^4) \right] \\ &= (\beta + i)u + \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|} u |u|^2 + O(|r|^4) \\ &= (\beta + i)u + su |u|^2 + O(|r|^4) \end{aligned}$$

com  $s = \text{sign} l_1(0) = \text{sign} \text{Re } c_1(0)$ .

■

**Definição 2.2.1.** A função  $l_1(\beta)$  é chamada de **Primeiro coeficiente de Liapunov**, para  $\beta = 0$  pode ser calculado pela fórmula

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0^2} \text{Re} (ig_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21}).$$

**Observação 2.2.1.** 1) Necessitamos somente da segunda e terceira derivadas do campo de vetores no ponto de bifurcação para calcularmos  $l_1(0)$ ;

2) O valor de  $l_1(0)$  dependerá da normalização dos autovetores  $q$  e  $p$ , enquanto que seu sinal é invariante pela escolha de  $p$  e  $q$  obviamente considerando a normalização  $\langle p, q \rangle = 1$ ;

3) Note que se (2.31) com o sinal  $s = -1$  for escrita na sua forma real ela coincidirá com o sistema (2.2).

O teorema seguinte resume todos os resultados obtidos até agora.

**Teorema 2.2.1.** Qualquer sistema em duas dimensões

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.32)$$

com  $f$  suave, tendo para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeno o equilíbrio em  $x = 0$  com autovalores

$$\lambda_{1,2} = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

onde  $\mu(0) = 0$  e  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ , satisfazendo as seguintes condições:

- 1)  $l_1(0) \neq 0$  (não degenerescência);
- 2)  $\mu'(0) \neq 0$  (transversalidade);

é localmente topologicamente equivalente em torno da origem a uma das seguintes formas normais:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4)$$

**Demonstração:** Basta utilizarmos os Lemas 2.2.2 a 2.2.5, para transformar o sistema (2.32) na equação (2.30) e então usando o Lema 2.2.6 concluimos o resultado. ■

Usando o Lema 2.1.1 podemos eliminar os termos  $O(\|y\|^4)$  e finalmente chegar no resultado geral.

**Teorema 2.2.2.** *(Teorema da Forma Normal de Hopf) Qualquer sistema planar a um parâmetro*

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

tendo para  $((0,0),0)$  autovalores

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 > 0$$

e satisfazendo as condições (1) e (2) do Teorema 2.2.1 é topologicamente equivalente perto da origem a uma das formas normais:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

O Teorema 2.2.2 nos garante que um sistema em duas dimensões que possui autovalores imaginários puros e satisfaz as condições (1) e (2) do Teorema 2.2.1 possui uma bifurcação de Hopf. Como consequência do Teorema 2.2.2 segue o corolário.

**Corolário 2.2.1.** *Considere o sistema*

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.33)$$

Suponha  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  um ponto de equilíbrio do sistema tal que para  $\alpha = \alpha_0$  há uma bifurcação de Hopf em (2.33). Suponha ainda que para  $\alpha < \alpha_0$  ( $\alpha > \alpha_0$ ), a parte linear do campo de vetores, calculada no ponto de equilíbrio, possua um par complexo conjugado, com parte real negativa, como autovalores e que para  $\alpha > \alpha_0$  ( $\alpha < \alpha_0$ ) estes autovalores passem a ter parte real positiva. Então,

- a) Se  $l_1 < 0$ , o ponto de equilíbrio  $(x_0)$  quando  $\alpha = \alpha_0$  é assintoticamente estável e para cada  $\alpha > \alpha_0$  ( $\alpha < \alpha_0$ ), porém suficientemente próximo deste, existe uma única órbita periódica estável perto do ponto de equilíbrio instável  $(x, \alpha)$ .
- b) Se  $l_1 > 0$ , o ponto de equilíbrio  $(x_0)$  é instável quando  $\alpha = \alpha_0$  e para cada  $\alpha < \alpha_0$  ( $\alpha > \alpha_0$ ), porém suficientemente próximo deste, existe uma única órbita periódica instável perto do ponto de equilíbrio estável  $(x, \alpha)$ .
- c) Se  $l_1 = 0$ , nada se pode concluir.

Os Teoremas 2.2.1 e 2.2.2, junto com a análise da forma normal da seção anterior, o Corolário 2.2.1 e a fórmula dada para  $l_1(\alpha)$  fornecem todas as ferramentas necessárias para análise da bifurcação de Hopf em sistemas genéricos bidimensionais.

## 2.3 Bifurcação de Hopf no sistema predador-presa

Utilizaremos agora as ferramentas desenvolvidas na seção (2.2) para estudar a bifurcação de Hopf em um sistema que modela o fenômeno biológico predador-presa.

A aplicação a seguir retirada de [8].

O primeiro modelo matemático elaborado para descrever a dinâmica de duas populações interagindo como um sistema predador-presa foi sugerido independentemente por Lotka (1925) e V. Volterra (1931), e é dado por

$$\begin{cases} x_1' = rx_1(\alpha + x_1)(1 - x_1) - cx_1x_2, \\ x_2' = -\alpha dx_2 + (c - d)x_1x_2. \end{cases} \quad (2.34)$$

Neste sistema  $x_1 > 0$  e  $x_2 > 0$  denotam os tamanhos das populações da presa e do predador, respectivamente, onde  $a, b, c, d, r > 0$  e  $\alpha > 0$  caracterizam o comportamento isolado das populações e suas interações.

O modelo (2.34) tem como base as seguintes idealizações:

1. na ausência de predadores, a população de presas cresce exponencialmente de acordo com a lei de Malthus;

2. se não houver presas, a população de predadores decai exponencialmente;
3. a quantidade total de presas consumidas pelos predadores por unidade de tempo depende linearmente da densidade populacional de ambos, predadores e presas;
4. a porção de biomassa de presas que é convertida em biomassa de predadores é constante;
5. nenhum outro fator afeta a dinâmica do sistema.

Aqui iremos considerar  $\alpha$  como parâmetro de controle e  $c > d$ .

O sistema (2.34) tem um equilíbrio não trivial

$$E_0 = \left( \frac{\alpha d}{c-d}, \frac{r\alpha}{c-d} \left[ 1 - \frac{\alpha d}{c-d} \right] \right).$$

A matriz Jacobiana avaliada neste ponto é

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha r d (c+d)}{(c-d)^2} \left[ \frac{c-d}{c+d} - \alpha \right] & \frac{-\alpha c d}{c-d} \\ \frac{\alpha r [c-d(1+\alpha)]}{c-d} & 0 \end{pmatrix}.$$

Vamos avaliar para quais valores do parâmetro  $\alpha$  a matriz  $A(\alpha)$  possui autovalores imaginários puros.

A parte real dos autovalores pode ser calculada pela fórmula

$$\mu(\alpha) = \frac{\sigma(\alpha)}{2} = \frac{\alpha r d (c+d)}{2(c-d)^2} \left[ \frac{c-d}{c+d} - \alpha \right],$$

onde  $\sigma(\alpha)$  é o traço da matriz  $A(\alpha)$ .

Temos que

$$\mu(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \frac{c-d}{c+d},$$

e como

$$\omega^2(\alpha_0) = \frac{r c^2 d (c-d)}{(c+d)^3} > 0,$$

concluimos que para  $\alpha = \alpha_0$  o equilíbrio  $E_0$  tem autovalores imaginários puros com  $\omega_0 > 0$ .

Note que para  $\alpha < \alpha_0$  o equilíbrio é instável (possui autovalores com partes reais positivas), enquanto que para  $\alpha > \alpha_0$  o equilíbrio é estável (possui autovalores com partes reais negativas).

A transversalidade é satisfeita, pois

$$\mu'(\alpha_0) = -\frac{\alpha_0 r d (c + d)}{2(c - d)^2}$$

e como todos os valores envolvidos são positivos, segue que  $\mu'(\alpha_0) < 0$ .

Para estudarmos a estabilidade do ciclo limite calcularemos o primeiro coeficiente de Lyapunov, para isso fixaremos o parâmetro no seu valor crítico  $\alpha_0$ .

Para  $\alpha = \alpha_0$  o equilíbrio tem coordenadas

$$x_1^0 = \frac{d}{c + d}, \quad x_2^0 = \frac{rc}{(c + d)^2}.$$

Considere a mudança de variáveis, através da qual trasladamos a origem das coordenadas para esse equilíbrio

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + \xi_1, \\ x_2 = x_2^0 + \xi_2. \end{cases}$$

esta mudança transforma o sistema original no seguinte

$$\begin{cases} \xi_1' = -\frac{cd}{c+d}\xi_2 - \frac{rd}{c+d}\xi_1^2 - c\xi_1\xi_2 - r\xi_1^3 = F_1(\xi_1, \xi_2), \\ \xi_2' = \frac{cr(c-d)}{(c+d)^2}\xi_1 + (c-d)\xi_1\xi_2 = F_2(\xi_1, \xi_2). \end{cases} \quad (2.35)$$

O sistema (2.35) pode ser representado por

$$\xi' = A\xi + \frac{1}{2}B(\xi, \xi) + \frac{1}{6}C(\xi, \xi, \xi),$$

onde  $A = A(\alpha_0)$  e  $B, C$  são funções multilineares simétricas.

Dados os vetores em  $\mathbb{R}^2$   $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ,  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$  e  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ , calculemos as funções envolvidas

$$B_1(\xi, \eta) = -\frac{2rd}{c+d}\xi_1\eta_1 - c(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1), \quad B_2(\xi, \eta) = (c-d)(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1).$$

Assim,

$$B(\xi, \eta) = \left( -\frac{2rd}{c+d}\xi_1\eta_1 - c(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1), (c-d)(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) \right).$$

Calculemos agora a função  $C$ , é fácil ver que a segunda componente da função  $C$  é nula e

$$C_1(\xi, \eta, \zeta) = -6r\xi_1\eta_1\zeta_1.$$

Logo,  $C(\xi, \eta, \zeta) = (-6rx_1\eta_1\zeta_1, 0)$ .

A matriz  $A(\alpha_0)$  é dada por

$$A(\alpha_0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{cd}{c+d} \\ \frac{\omega^2(c+d)}{cd} & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^2(\alpha_0) = \frac{rc^2d(c-d)}{(c+d)^3}.$$

Os autovetores  $p$  e  $q$  já normalizados são

$$q = \begin{pmatrix} \frac{cd}{\omega(c+d)} \\ \frac{1}{2\omega cd(c+d)} \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} \frac{\omega(c+d)}{-icd} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando as quantidades  $g_{20}$ ,  $g_{11}$  e  $g_{21}$ , temos

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle = \frac{cd(c^2 - d^2 - rd) + i\omega c(c+d)^2}{c+d},$$

$$g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle = -\frac{rcd^2}{c+d}, \quad g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle = -3rc^2d^2.$$

Assim, o primeiro coeficiente de Lyapunov é dado por:

$$\begin{aligned} l_1(\alpha_0) &= \frac{1}{2\omega^2} \operatorname{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega g_{21}) \\ &= \frac{1}{2\omega^2} \operatorname{Re} \left[ -i \left( \frac{cd(c^2 - d^2 - rd) + i\omega c(c+d)^2}{c+d} \right) \left( \frac{rcd^2}{c+d} \right) - 3r\omega c^2d^2 \right] \\ &= \frac{-rc^2d^2}{\omega} < 0. \end{aligned}$$

Logo, a condição de não-degenerescência é satisfeita. Podemos então aplicar o Teorema 2.2.2, donde concluímos que ocorre uma bifurcação de Hopf para o parâmetro crítico  $\alpha_0$ . Do Corolário 2.2.1, segue que um único ciclo limite estável bifurca do equilíbrio para cada  $\alpha < \alpha_0$ , porém suficientemente próximo de  $\alpha_0$ .

A Figura (2.3) apresenta um esboço dos retratos de fase do sistema para  $\alpha > \alpha_0$  e  $\alpha < \alpha_0$ .

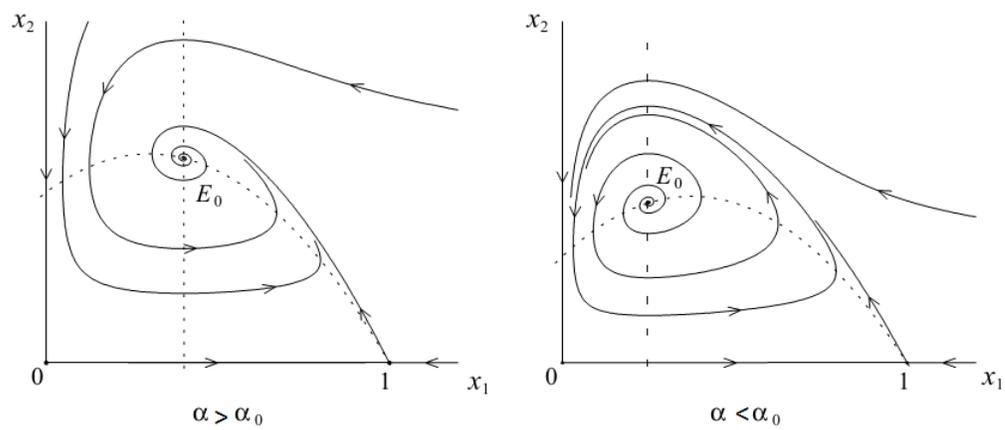


Figura 2.3: Retratos de fase do modelo predador-presa.

## Capítulo 3

# Bifurcação de Hopf em sistemas $n$ -dimensionais I: Método da Projeção

Neste capítulo apresentamos o Método da Projeção, o qual é utilizado quando lidamos com bifurcações de Hopf em sistemas  $n$ -dimensionais, onde  $n > 2$ . Tal método baseia-se em projetar e reduzir o sistema à sua variedade central. Para isso, consideramos que a matriz jacobiana do sistema possui apenas um par de autovalores imaginários puros, escrevemos o sistema na base de autovetores correspondentes a estes autovalores, e reduzimos pelo método ao caso bidimensional. Assim, para estudarmos este caso mais geral utilizamos as ferramentas já desenvolvidas para o estudo da bifurcação de Hopf no plano.

Os teoremas da Variedade Central e da Forma Normal de Hopf (visto no Capítulo 2) desempenham um papel importante para aplicação deste método. Assim, antes de enunciarmos o Método da Projeção iremos relembrar alguns resultados da Teoria de Variedade Central.

Considere o sistema

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

onde  $f$  é suficientemente suave com  $f(0) = 0$ . Sejam  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , os autovalores

da matriz Jacobiana do sistema (3.1) avaliada no ponto de equilíbrio  $x_0 = 0$ . Vamos supor que o equilíbrio é não hiperbólico, isto é, existem autovalores com partes reais nulas. Denotaremos por:

- $n_+$  o número de autovalores com partes reais positivas;
- $n_-$  o número de autovalores com partes reais negativas;
- $n_c$  o número de autovalores com partes reais nulas (em todos os casos estamos contando as multiplicidades);
- $E^c$  o autoespaço linear de  $A$  gerados pelos autovetores correspondendo a união de  $n_c$  autovalores no eixo imaginário;
- $\varphi^t$  o fluxo associado ao sistema (3.1).

Nas condições acima, segue o seguinte teorema.

**Teorema 3.0.1. Teorema da Variedade Central.** *Localmente, existe um conjunto invariante  $W^c(0)$  do sistema que é tangente a  $E^c$  em  $x_0 = 0$ . Tal conjunto é gráfico de uma aplicação suave, cujas derivadas parciais de todas as ordens são unicamente determinadas. Além disso, existe uma vizinhança  $U$  de  $x_0$ , tal que se  $\varphi^t \in U$  para  $t \geq 0$  ( $t \leq 0$ ) então  $\varphi^t \rightarrow W^c(0)$  para  $t \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ).*

**Definição 3.0.1.** *A variedade  $W^c$  é chamada de Variedade Central do sistema.*

**Observação 3.0.1.** 1)  *$W^c$  não é única, pode ocorrer de um sistema possuir uma família de variedades centrais;*

2) *Uma variedade central tem a mesma suavidade finita de  $f$ , se  $f \in C^k$  com,  $k$  finito,  $W^c$  também é uma  $C^k$  variedade em alguma vizinhança  $U$  de  $x_0$ ;*

3) *Se o sistema admitir mais de uma variedade central, todos os sistemas resultantes serão topologicamente equivalentes;*

4) *No nosso estudo, os sistemas dependem de um parâmetro  $\alpha$ , como estamos interessados em estudar a estabilidade do equilíbrio para o sistema com  $\alpha = 0$ , calcularemos a restrição à variedade central para esse sistema;*

5) *A equação de restrição do sistema à sua variedade central é a forma normal da bifurcação em coordenadas apropriadas de  $w \in \mathbb{R}^{n_c}$ . Na seção 3.2 mostraremos esta afirmação para a bifurcação de Hopf de codimensão 1.*

### 3.1 Algoritmo do Método da Projeção

O algoritmo descrito a seguir foi retirado de [7].

Considere o sistema

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \quad (3.2)$$

Vamos supor que para  $\alpha = 0$ , o sistema (3.2) satisfaça as mesmas hipóteses do sistema (3.1) e escrever em  $\alpha = 0$  da seguinte maneira

$$x' = F(x) = f(x, 0), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.3)$$

Seja  $H$  sua  $n_c$  variedade central parametrizada por  $w \in \mathbb{R}^{n_c}$

$$x' = H(w), \quad H : \mathbb{R}^{n_c} \longrightarrow \mathbb{R}^n. \quad (3.4)$$

A equação restrita pode ser escrita como

$$w' = G(w), \quad G : \mathbb{R}^{n_c} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_c}. \quad (3.5)$$

Substituindo (3.4) e (3.5) em (3.3), obtemos a equação diferencial parcial

$$H_w(w)G(w) = F(H(w)). \quad (3.6)$$

A equação (3.6) é denominada Equação Homológica e será de grande importância para nós em calculos futuros.

Considere agora as expansões em série de Taylor de  $G$  e  $H$ , em torno da origem, até certa ordem

$$G(w) = \sum_{|k| \geq 1}^m \frac{1}{k!} g_k w^k + O(\|w\|^{m+1}), \quad H(w) = \sum_{|k| \geq 1}^m \frac{1}{k!} h_k w^k + O(\|w\|^{m+1})$$

onde  $O(\|w\|^{m+1})$  denota uma função suave com expansão em série de Taylor iniciando nos termos de ordem  $m + 1$  no mínimo. A expansão do campo de vetores é apresentada na Seção 2.2.

Para obter as condições de não degenerescência para uma dada bifurcação,  $G$  é colocada na forma normal até a ordem  $m$ . Note que os coeficientes  $g_k$  da forma normal e os vetores  $h_k$  da expansão em série de Taylor de  $H$  são desconhecidos, porém podem ser obtidos a partir da equação homológica por meio de um procedimento recorrente para  $k = 1, \dots, m$ . Agrupando os termos  $w_k$ , obtém-se um sistema linear para os vetores  $h_k$ ,

$$Lh_k = R_k, \quad (3.7)$$

onde  $L$  é a matriz formada pela parte linear do campo de vetores e os autovalores com partes reais nulas e  $R_k$  depende dos coeficientes de  $G$  e  $H$  de ordem menor ou igual a  $|k|$ , bem como dos termos de ordem menor ou igual  $|k|$  da expansão em série de Taylor do campo de vetores  $F$ . Quando  $R_k$  envolve somente quantidades conhecidas, o sistema (3.7) admite solução porque  $\det(L) \neq 0$  ou  $R_k$  satisfaz a condição de Fredholm

$$\langle p, R_k \rangle = 0, \quad (3.8)$$

onde  $p$  é um autovetor associado ao autovalor nulo de  $L^t$ . Se  $R_k$  depende dos coeficientes  $g_k$  ainda não calculados,  $\det(L) = 0$  e (3.8) fornece a expressão para  $g_k$ . Para todas as bifurcações locais a dois parâmetros, exceto para a bifurcação de Bogdanov-Takens, o autoespaço invariante de  $L$  (ou  $\bar{L}^t$ ) associado com o autovalor nulo é unidimensional em  $C^n$ , ou seja, existem autovetores  $q$  e  $p$  tais que

$$L \cdot q = 0,$$

$$L^T \cdot p = 0,$$

satisfazendo a condição de normalização

$$\langle p, q \rangle = 1$$

e não há outros autovetores generalizados. Assim, a única solução  $h_k$  que satisfaz

(3.7) pode ser obtida resolvendo o sistema não singular

$$\begin{pmatrix} L & q \\ \bar{p}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_k \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resumindo, o método apresentado consiste em restringir à variedade central e colocar na forma normal, até certa ordem, o sistema dinâmico. Esta técnica é aplicada na seção (3.2) deste capítulo para sistemas  $n$ -dimensionais,  $n > 2$ , que apresentam uma bifurcação de Hopf de codimensão 1.

## 3.2 Aplicação do Método da Projeção

Antes de aplicarmos o método demonstraremos o item 5 da observação 3.0.1. Para isso, considere o sistema de equações diferenciais ordinárias dependendo de um parâmetro  $\alpha$ .

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

Suponha que para  $\alpha = 0$  o sistema pode ser escrito na forma

$$x' = Ax + F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.10)$$

onde  $F(x) = O(\|x\|^2)$  é uma função suave e  $A$  corresponde à parte linear do sistema, com  $x_0 = 0$  sendo um ponto de equilíbrio não hiperbólico, com uma par de autovalores puramente imaginários,  $\lambda e \bar{\lambda}$ , onde  $\lambda = i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$ . Suponha que sejam os únicos autovetores de  $A$  com parte real nula. Seja  $q \in \mathbb{C}^n$  um autovetor de  $A$  correspondendo a  $\lambda = i\omega_0$ . Então,

$$Aq = i\omega_0 q, \quad A\bar{q} = -i\omega_0 \bar{q}.$$

Introduzimos agora o autovetor adjunto  $p \in \mathbb{C}^n$  com a propriedade

$$A^t p = -i\omega_0 p, \quad A^t \bar{p} = i\omega_0 \bar{p},$$

satisfazendo a normalização

$$\langle p, q \rangle = 1,$$

onde  $\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i q_i$  é o produto escalar em  $\mathbb{C}^n$  (linear em relação ao segundo argumento).

O autoespaço real  $E^c$  é agora bidimensional e é gerado por  $\operatorname{Re} q$  e  $\operatorname{Im} q$ . O autoespaço real generalizado  $E^{su}$ , correspondendo a todos os outros autovalores de  $A$ , tem dimensão  $(n - 2)$ .

Como  $\mathbb{R}^n = E^{su} \oplus E^c$  podemos decompor  $x \in \mathbb{R}^n$  da seguinte forma

$$x = zq + \bar{z}\bar{q} + y_{su},$$

onde  $z \in \mathbb{C}$ ,  $zq + \bar{z}\bar{q} \in E^c$  e  $y_{su} \in E^{su}$ . Nestas condições o seguinte lema é válido.

**Lema 3.2.1.** *Seja  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in E^{su}$  se, e somente se,  $\langle p, y \rangle = 0$ .*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Sejam  $\mu_i, i = 1, \dots, l$  os autovalores reais de  $A$  e  $\eta_j, \bar{\eta}_j, j = 1, \dots, k$  os autovalores complexos de  $A$ , diferentes de  $\lambda$  e  $\bar{\lambda}$ .

Sejam  $i$  e  $j$  fixados. Denotemos por  $E_{\mu_i}$  o autoespaço generalizado correspondente ao autovalor  $\mu_i$  e  $E_{\eta_j, \bar{\eta}_j}$  o autoespaço generalizado real correspondente aos autovalores  $\eta_j, \bar{\eta}_j$ .

Temos que

$$E^{su} = E_{\mu_1} \oplus E_{\mu_2} \oplus \dots \oplus E_{\mu_l} \oplus E_{\eta_1, \bar{\eta}_1} \oplus E_{\eta_2, \bar{\eta}_2} \oplus E_{\eta_k, \bar{\eta}_k}.$$

Como os autoespaços  $E_{\mu_i}$  são generalizados, para cada  $i$  existe um  $N_{\mu_i} \in \mathbb{N}$ , tal que, se  $y \in E_{\mu_i}$ , então  $(A - \mu_i I)^{N_{\mu_i}} y = 0$ . Logo, tomando o produto interno com  $p$ , obtemos

$$0 = \langle p, (A - \mu_i I)^{N_{\mu_i}} y \rangle = \langle (A^t - \bar{\mu}_i I)^{N_{\mu_i}} p, y \rangle = \langle (\bar{\lambda} - \bar{\mu}_i)^{N_{\mu_i}} p, y \rangle = (\lambda - \mu_i)^{N_{\mu_i}} \langle p, y \rangle$$

e, como  $\lambda \neq \mu_i$ , segue que

$$\langle p, y \rangle = 0.$$

Do mesmo modo, os  $E_{\eta_k, \bar{\eta}_k}$  também são espaços generalizados, para cada  $j$  existe um  $N_{\eta_j} \in \mathbb{N}$ , tal que, se  $y \in E_{\eta_k, \bar{\eta}_k}$ , então  $(A - \eta_j)^{N_{\eta_j}} (A - \bar{\eta}_j)^{N_{\eta_j}} y = 0$ . Portanto,

$$0 = \langle p, (A - \eta_j I)^{N_{\eta_j}} (A - \bar{\eta}_j I)^{N_{\eta_j}} y \rangle = \langle (A^t - \bar{\eta}_j I)^{N_{\eta_j}} p, (A - \bar{\eta}_j I)^{N_{\eta_j}} y \rangle$$

$$= \langle (A^t - \eta_j I)^{N_{\eta_j}} (A^t - \bar{\eta}_j I)^{N_{\eta_j}} p, y \rangle = (\lambda - \bar{\eta}_j)^{N_{\eta_j}} (\lambda - \eta_j)^{N_{\eta_j}} \langle p, y \rangle$$

e, como  $\lambda \neq \eta_j$  e  $\lambda \neq \bar{\eta}_j$ , temos que

$$\langle p, y \rangle = 0.$$

Portanto, para qualquer  $y \in E^{su}$ , podemos escrever

$$y = \sum_{i=1}^l y_{\mu_i} + \sum_{j=1}^k y_{\eta_j},$$

com  $y_{\mu_i} \in E_{\mu_i}$  para  $i = 1, \dots, l$  e  $y_{\eta_j} \in E_{\eta_j, \bar{\eta}_j}$ , para  $j = 1, \dots, k$ , concluimos então que

$$\begin{aligned} \langle p, y \rangle &= \langle p, y_{\mu_1} + \dots + y_{\mu_l} + y_{\eta_1} + \dots + y_{\eta_k} \rangle = \\ &= \langle p, y_{\mu_1} \rangle + \dots + \langle p, y_{\mu_l} \rangle + \langle p, y_{\eta_1} \rangle + \dots + \langle p, y_{\eta_k} \rangle = 0. \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Seja  $y$  qualquer, tal que  $y \in E^{su} \oplus E^c \subset \mathbb{R}^n$  e  $\langle p, y \rangle = 0$ . Podemos escrever

$$y = y_{su} + y_c,$$

com  $y_{su} \in E^{su}$  e  $y_c \in E^c$ . Como  $E^c$  é gerado por  $q$  e  $\bar{q}$ , segue que  $y_c = \alpha q + \bar{\alpha} \bar{q}$ , com  $\alpha \in \mathbb{C}$ , concluindo que

$$y = y_{su} + \alpha q + \bar{\alpha} \bar{q}.$$

Mostremos que  $\alpha = 0$ . Da hipótese temos

$$0 = \langle p, y \rangle = \langle p, y_{su} + y_c \rangle = \langle p, y_{su} \rangle + \langle p, y_c \rangle.$$

Da primeira parte da demonstração, temos que  $\langle p, y_{su} \rangle = 0$ , logo

$$0 = \langle p, y_c \rangle = \langle p, \alpha q + \bar{\alpha} \bar{q} \rangle = \alpha \langle p, q \rangle + \bar{\alpha} \langle p, \bar{q} \rangle.$$

Portanto  $\alpha = 0$ , pois  $\langle p, q \rangle = 1$  e  $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$  (demonstrado no Lema 2.2.1).

■

Utilizando o Lema 3.2.1, podemos explicitar  $z$  e  $y$  em relação a  $x$ . De fato, seja  $x \in \mathbb{R}^n$ , podemos escrever  $x = zq + \bar{z}\bar{q} + y$ , com  $zq + \bar{z}\bar{q} \in E^c$  e  $y \in E^{su}$ . Tomando o produto interno de  $x$  com  $p$ , obtemos

$$\langle p, x \rangle = \langle p, zq \rangle + \langle p, \bar{z}\bar{q} \rangle + \langle p, y \rangle.$$

Como  $\langle p, y \rangle = 0$ , pois  $y \in E^{su}$  ( Lema 3.2.1),

$$\langle p, x \rangle = \langle p, zq \rangle + \langle p, \bar{z}\bar{q} \rangle = z \langle p, q \rangle + \bar{z} \langle p, \bar{q} \rangle,$$

e, lembrando que  $\langle p, q \rangle = 1$  e  $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$ , concluimos que

$$\begin{cases} z = \langle p, x \rangle \\ y = x - \langle p, x \rangle q - \langle \bar{p}, x \rangle \bar{q}. \end{cases}$$

**Teorema 3.2.1.** *Nas coordenadas acima, o sistema (3.10) tem a forma:*

$$\begin{cases} z' = i\omega_0 z + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\ y' = Ay + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle q - \langle \bar{p}, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \bar{q}. \end{cases} \quad (3.11)$$

**Demonstração:** De fato, considerando a mudança:

$$\begin{cases} z = \langle p, x \rangle \\ y = x - \langle p, x \rangle q - \langle \bar{p}, x \rangle \bar{q}. \end{cases}$$

Derivando a primeira equação, temos

$$\begin{aligned} z' &= \langle p', x \rangle + \langle p, x' \rangle \\ &= \langle p, x' \rangle \\ &= \langle p, A(x) + F(x) \rangle \\ &= \langle p, A(zq + \bar{z}\bar{q} + y) + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\ &= \langle p, zA(q) + \bar{z}A(\bar{q}) + A(y) + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\ &= \langle p, zA(q) \rangle + \langle p, \bar{z}A(\bar{q}) \rangle + \langle p, A(y) \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle. \end{aligned}$$

Note que  $\langle p, A(y) \rangle = 0$  pois  $A(y) \in E^{su}$ . Assim,

$$\begin{aligned} z' &= z \langle p, i\omega_0 q \rangle + \bar{z} \langle p, -i\omega_0 \bar{q} \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\ &= zi\omega_0 \langle p, q \rangle + \bar{z}(-i\omega_0) \langle p, \bar{q} \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\ &= i\omega_0 z + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle. \end{aligned}$$

Derivando agora a segunda equação:

$$\begin{aligned}
y' &= x' - \langle p, x' \rangle q - \langle \bar{p}, x' \rangle \bar{q} \\
&= A(x) + F(x) - \langle p, x' \rangle q - \langle \bar{p}, x' \rangle \bar{q} \\
&= A(zq + \bar{z}\bar{q} + y) + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) - \langle p, A(zq + \bar{z}\bar{q} + y) + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle q \\
&\quad - \langle \bar{p}, A(zq + \bar{z}\bar{q} + y) + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \bar{q} \\
&= zA(q) + \bar{z}A(\bar{q}) + A(y) + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) - \langle p, A(zq) \rangle q - \langle p, A(\bar{z}\bar{q}) \rangle q \\
&\quad - \langle p, A(y) \rangle q - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle q - \langle \bar{p}, A(\bar{z}\bar{q}) \rangle \bar{q} - \langle \bar{p}, A(zq) \rangle \bar{q} - \langle \bar{p}, A(y) \rangle \bar{q} \\
&\quad - \langle \bar{p}, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \bar{q} \\
&= zi\omega_0 q - \bar{z}i\omega_0 \bar{q} + \bar{z}i\omega_0 \bar{q} - zi\omega_0 q + A(y) + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \\
&\quad - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle q + \langle \bar{p}, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \bar{q} \\
&= A(y) + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle q - \langle \bar{p}, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \bar{q}.
\end{aligned}$$

■

O sistema (3.11) pode ser escrito, usando a expansão de Taylor em  $z, \bar{z}$  e  $y$ , na forma

$$\begin{cases} z' = i\omega_0 + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}G_{21}z^2\bar{z} + \langle G_{10}, y \rangle z + \langle G_{01}, y \rangle \bar{z} + \dots \\ y' = Ay + \frac{1}{2}H_{20}z^2 + H_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}H_{02}\bar{z}^2 + \dots \end{cases} \quad (3.12)$$

onde  $G_{20}, G_{11}, G_{02}, G_{21} \in \mathbb{C}$  e  $G_{01}, G_{10}, H_{ij} \in \mathbb{C}^n$ . Os números complexos e vetores podem ser calculados pelas fórmulas:

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \Big|_{z=0}, \quad i+j \geq 2, \\
G_{10,i} &= \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial z} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \Big|_{z=0, y=0}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\
\overline{G_{01,i}} &= \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial \bar{z}} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \Big|_{z=0, y=0}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\
H_{ij} &= \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \Big|_{z=0} - G_{ij}q - \overline{G_{ji}}\bar{q}, \quad i+j = 2,
\end{aligned}$$

onde

$$\langle G, y \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{G}_i y_i.$$

**Lema 3.2.2.** *O sistema (3.11), restrito a variedade central, é dado pela expressão*

$$\begin{aligned} z' &= i\omega_0 + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}(G_{21} - 2\langle G_{10}, A^{-1}H_{11} \rangle + \\ &+ \langle G_{01}, (2i\omega_0 I - A)^{-1}H_{20} \rangle)z^2\bar{z} + \dots, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde  $I$  representa a matriz identidade.

**Demonstração:** Com efeito, como vimos a variedade central de uma sistema pode ser representada localmente como gráfico de uma função

$$W^c = \{(z, \bar{z}, y : y = V(z, \bar{z})\}.$$

onde  $V : \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{R}^n$  e  $V(z, \bar{z}) = O(|z|^2)$ , podemos escrever

$$y = V(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}w_{20}z^2 + w_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}w_{02}\bar{z}^2 + O(|z|^3), \quad (3.14)$$

com  $\langle p, w_{ij} \rangle = 0$ . Derivando a expressão acima obtemos:

$$y' = w_{20}zz' + w_{11}(\bar{z}z' + z\bar{z}') + w_{02}\bar{z}\bar{z}' + \dots$$

Substituindo nessa equação as expressões de  $z'$  e  $\bar{z}'$ , dadas pela primeira equação do sistema (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} y' &= w_{20}z(i\omega_0 z + \dots) + w_{11}\bar{z}(i\omega_0 z + \dots) + w_{11}z(-i\omega_0 \bar{z} + \dots) + w_{02}\bar{z}(-i\omega_0 \bar{z} + \dots) \\ &= i\omega_0 w_{20}z^2 + i\omega_0 w_{11}z\bar{z} - i\omega_0 w_{11}z\bar{z} - i\omega_0 w_{02}\bar{z}^2 + \dots \\ &= i\omega_0 w_{20}z^2 - i\omega_0 w_{02}\bar{z}^2 + \dots \end{aligned}$$

Por outro lado, substituindo a expressão de  $y$ , dada em (3.14) na segunda equação do sistema, temos

$$\begin{aligned} y' &= A \left( \frac{1}{2}w_{20}z^2 + w_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}w_{02}\bar{z}^2 + \dots \right) + \frac{1}{2}H_{20}z^2 + H_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}H_{02}\bar{z}^2 \\ &= \frac{1}{2}(Aw_{20} + H_{20})z^2 + (Aw_{11} + H_{11})z\bar{z} + \frac{1}{2}(Aw_{02} + H_{02})\bar{z}^2 + \dots \end{aligned}$$

Vamos agora comparar as equações obtidas para  $y'$ , dos termos quadráticos temos

$$\begin{cases} (2i\omega_0 I - A) w_{20} = H_{20}, \\ -Aw_{11} = H_{11}, \\ (-2i\omega_0 I - A) w_{02} = H_{02}. \end{cases}$$

Note que, estas equações tem solução única, uma vez que, as matrizes que aparecem do lado esquerdo do sistema são inversíveis pois  $0$ ,  $2i\omega_0$  e  $-2i\omega_0$  não são autovalores de  $A$ . Os vetores  $w_{ij} \in \mathbb{C}^n$  podem ser encontrados pelas equações lineares

$$\begin{cases} w_{20} = (2i\omega_0 I - A)^{-1} H_{20}, \\ w_{11} = -A^{-1} H_{11}, \\ w_{02} = (-2i\omega_0 I - A)^{-1} H_{02}. \end{cases}$$

Calculemos agora o termo ressonante na primeira equação do sistema (3.12), restrita à variedade central. Note, então, que

$$\begin{aligned} \langle G, y \rangle &= \left\langle G, \frac{1}{2} w_{20} z^2 + w_{11} z \bar{z} + \frac{1}{2} w_{02} \bar{z}^2 + \dots \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle G, w_{20} \rangle z^2 + \langle G, w_{11} \rangle z \bar{z} + \frac{1}{2} \langle G, w_{02} \rangle \bar{z}^2 + \dots . \end{aligned}$$

Portanto, do produto  $\langle G_{10}, y \rangle z$  e  $\langle G_{01}, y \rangle \bar{z}$  do sistema (3.12), aparecem os termos  $z^2 \bar{z}$  com os seguintes coeficientes

$$\begin{aligned} \langle G_{10}, y \rangle &= \langle G_{10}, w_{11} \rangle z^2 \bar{z} + \dots \\ &= \langle G_{10}, -A^{-1} H_{11} \rangle z^2 \bar{z} + \dots \\ &= -\langle G_{10}, A^{-1} H_{11} \rangle z^2 \bar{z} + \dots . \\ \langle G_{01}, y \rangle &= \frac{1}{2} \langle G_{01}, w_{20} \rangle z^2 \bar{z} \dots \\ &= \frac{1}{2} \langle G_{01}, (2i\omega_0 I - A)^{-1} H_{20} \rangle z^2 \bar{z} + \dots . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} z' &= i\omega_0 z + \frac{1}{2} G_{20} z^2 + G_{11} z \bar{z} + \frac{1}{2} G_{02} \bar{z}^2 + \frac{1}{2} G_{21} z^2 \bar{z} + \langle G_{10}, y \rangle z + \langle G_{01}, y \rangle \bar{z} + \dots \\ &= i\omega_0 z + \frac{1}{2} G_{20} z^2 + G_{11} z \bar{z} + \frac{1}{2} G_{02} \bar{z}^2 + \frac{1}{2} G_{21} z^2 \bar{z} - \langle G_{10}, A^{-1} H_{11} \rangle z^2 \bar{z} + \\ &+ \frac{1}{2} \langle G_{01}, (2i\omega_0 I - A)^{-1} H_{20} \rangle z^2 \bar{z} + \dots . \end{aligned}$$



Note que a equação (3.13) é localmente topologicamente equivalente a forma normal da bifurcação de Hopf. Portanto, o item 5 da observação (3.0.1) está demonstrado.

Uma boa característica do algoritmo acima é que ele dá o sistema restrito, na forma complexa adequada para o cálculo do Primeiro coeficiente de Lyapunov. Faremos isto no próximo lema.

**Lema 3.2.3. (Condição de não-degenerescência)** *O primeiro coeficiente de Lyapunov do sistema (3.10) fica dado pela expressão*

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0} \text{Re}[\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 I - A)^{-1}B(q, q)) \rangle]. \quad (3.15)$$

**Demonstração:** Escrevemos  $F(x)$  em termos de funções multilineares  $B(x, y)$  e  $C(x, y, u)$

$$F(x) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4). \quad (3.16)$$

Então, podemos expressar

$$\langle G_{10}, y \rangle = \langle p, B(q, y) \rangle, \quad \langle G_{01}, y \rangle = \langle p, B(\bar{q}, y) \rangle,$$

e a equação restrita fica escrita na forma

$$z' = i\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}(G_{21} - 2 \langle p, B(q, A^{-1}H_{11}) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 - A^{-1})H_{20}) \rangle) z^2\bar{z} \cdots,$$

onde

$$G_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad G_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \quad G_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad (3.17)$$

$$G_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle \quad (3.18)$$

e

$$\begin{cases} H_{20} = B(q, q) - \langle p, B(q, q) \rangle q - \langle \bar{p}, B(q, q) \rangle \bar{q} \\ H_{11} = B(q, \bar{q}) - \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle q - \langle \bar{p}, B(q, \bar{q}) \rangle \bar{q}. \end{cases} \quad (3.19)$$

Substituindo de (3.17) a (3.19) na equação restrita, e tomando

$$A^{-1}q = \frac{1}{i\omega_0}q, \quad A^{-1}\bar{q} = \frac{-1}{i\omega_0}\bar{q},$$

$$(2i\omega_0 I - A)^{-1}q = \frac{1}{i\omega_0}q, \quad (2i\omega_0 I - A)^{-1}\bar{q} = \frac{1}{3i\omega_0}\bar{q},$$

transformamos (3.13) na equação

$$z' = i\omega_0 z + \frac{1}{2}g_{20}z^2 + g_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}g_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}g_{21}z^2\bar{z} + \dots$$

onde,

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle$$

e

$$\begin{aligned} g_{21} &= \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 I - A)^{-1}B(q, q)) \rangle \\ &+ \frac{1}{i\omega_0} \langle p, B(q, q) \rangle \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle \\ &- \frac{2}{i\omega_0} | \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle |^2 - \frac{1}{3i\omega_0} | \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle |^2. \end{aligned}$$

Note que os termos da última linha são imaginários puros e que os termos na segunda linha são dados pelo produto escalar  $g_{20}g_{11}$ . Aplicando a fórmula

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0^2} \operatorname{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21}),$$

temos a seguinte expressão para o primeiro coeficiente de Lyapunov

$$\begin{aligned} l_1(0) &= \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Re}[\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \\ &+ \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 I - A)^{-1}B(q, q)) \rangle]. \end{aligned}$$

■

Esta fórmula parece ser a mais conveniente para um estudo analítico da bifurcação de Hopf em sistemas  $n$ -dimensionais. Ela expressa o primeiro coeficiente de Lyapunov usando os termos lineares, quadráticos e cúbicos, originais, assumindo que somente os autovetores críticos - ordinários e adjuntos - da matriz jacobiana são conhecidos.

Para finalizar, apresentaremos uma fórmula explícita para o cálculo da condição de transversalidade. Para isso, consideremos os sistemas de equações diferenciais a um parâmetro

$$x' = A(\alpha)x + F(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.20)$$

onde  $F(x, \alpha) = O(\|x\|^2)$  é uma função suave de  $x$ , com expansão de Taylor iniciando com pelo menos termos quadráticos, e depende suavemente de  $\alpha$  e  $A(\alpha)$  corresponde à parte linear do sistema com um par de autovalores complexos conjugados

$$\lambda_1(\alpha) = \lambda(\alpha), \quad \lambda_2(\alpha) = \bar{\lambda}(\alpha),$$

$$\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha),$$

satisfazendo a condição de Hopf para  $\alpha = 0$

$$\mu(0) = 0, \quad \omega(0) = \omega_0 > 0.$$

**Lema 3.2.4. (Condição de transversalidade)** *Considere o sistema (3.20), nas condições acima. Então,*

$$\mu'(0) = \operatorname{Re} \langle p, A'(0)q \rangle, \quad (3.21)$$

onde  $p, q \in \mathbb{C}^n$  satisfazem

$$A(0)q = i\omega_0q, \quad A^t(0)p = -i\omega_0p, \quad \langle p, q \rangle = 1.$$

**Demonstração:** Derivando ambos os lados da equação

$$A(\alpha)q(\alpha) = \lambda(\alpha)q(\alpha)$$

com relação a  $\alpha$ , obtemos

$$A'(\alpha)q(\alpha) + A(\alpha)q'(\alpha) = \lambda'(\alpha)q(\alpha) + \lambda(\alpha)q'(\alpha).$$

Tomando agora, o produto escalar por  $p$  em ambos os lados temos

$$\langle p, A'q + Aq' \rangle = \langle p, \lambda'q + \lambda q' \rangle$$

$$\Rightarrow \langle p, A'q \rangle + \langle p, Aq' \rangle = \langle p, \lambda'q \rangle + \langle p, \lambda q' \rangle$$

$$\Rightarrow \langle p, A'q \rangle + \langle A^t p, q' \rangle = \langle p, \lambda'q \rangle + \langle p, \lambda q' \rangle.$$

Para  $\alpha = 0$  temos que  $A^t(0)p = -i\omega_0 p$  e assim

$$\langle p, A'(0)q \rangle + i\omega_0 \langle p, q' \rangle = \lambda'(0) \langle p, q \rangle + \lambda(0) \langle p, q' \rangle,$$

Usando que  $\langle p, q' \rangle = 0$  e  $\langle p, q \rangle = 1$ , segue que

$$\langle p, A'(0)q \rangle = \mu'(0) + i\omega(0)' \langle p, q \rangle.$$

Portanto,

$$\mu'(0) = \text{Re} \langle p, A'(0)q \rangle.$$

■

### 3.3 Bifurcação de Hopf no sistema *feedback control*

Nesta seção aplicaremos o Método da Projeção para estudar a bifurcação de Hopf no sistema físico *feedback control*, este exemplo foi retirado de [8]. Considere a equação diferencial não linear dependendo do par de parâmetros positivos  $(\alpha, \beta)$

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + \alpha \frac{d^2 y}{dt^2} + \beta \frac{dy}{dt} + y(1 - y) = 0,$$

esta descreve um sistema simples de *feedback control* do tipo Lur'e.

Fazendo  $x_1 = y$ ,  $x_2 = x'_1$  e  $x_3 = x'_2$ , escrevemos a equação no seguinte sistema de terceira ordem

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = x_3, \\ x'_3 = -\alpha x_3 - \beta x_2 - x_1 + x_1^2. \end{cases} \quad (3.22)$$

Note que para todos os valores de  $(\alpha, \beta)$ , o sistema (3.22) tem equilíbrios  $x^{(0)} = (0, 0, 0)$  e  $x^{(1)} = (1, 0, 0)$ . Estudaremos o equilíbrio  $x^{(0)}$ .

A matriz jacobiana do sistema (3.22) avaliada em  $x^{(0)}$  tem a forma

$$A = (x^{(0)}, \alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

cujo polinômio característico é dado por

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + 1.$$

A fim de estabelecer a relação entre  $\alpha$  e  $\beta$  correspondendo a bifurcação de Hopf de  $x^{(0)}$  vamos aplicar o critério de Hurwitz (veja Anexo I).

Note que, todos os coeficientes do polinômio são positivos, pelo critério de Hurwitz o polinômio terá raízes complexas imaginárias puras, quando

$$\alpha = \frac{1}{\beta}, \quad \beta > 0.$$

Fazendo  $\lambda = i\omega$  no polinômio característico obtemos

$$P(i\omega) = (i\omega)^3 + \alpha(i\omega)^2 + \beta(i\omega) + 1.$$

Neste caso,  $\alpha = 1/\beta$ , assim

$$0 = -i\omega^3 - \frac{\omega^2}{\beta} + \beta i\omega + 1 \Rightarrow \begin{cases} -i\omega^3 + \beta i\omega = 0, \\ -\frac{\omega^2}{\beta} + 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \omega^2 = \beta > 0.$$

Logo, para  $\alpha = 1/\beta$ , o equilíbrio tem autovalores imaginários  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ , com  $\omega^2() > 0$ .

Temos que para  $\alpha < \alpha_0$ , o equilíbrio é instável (possui autovalores com partes reais positivas), enquanto que para  $\alpha > \alpha_0$  o equilíbrio é estável (possui autovalores com partes reais negativas); em ambos casos o terceiro autovalor é negativo. (Basta aplicar o critério de Hurwitz).

A condição de transversalidade é satisfeita (veja [8]).

Note que temos as condições suficientes para que a bifurcação de Hopf ocorra. Para analisar a bifurcação( isto é, determinar a posição do ciclo limite), iremos calcular o

primeiro coeficiente de Lyapunov do sistema restrito à variedade central no valor do parâmetro crítico, para isso utilizaremos a fórmula (2.15).

O autovetor  $q$  de  $A$  correspondendo ao autovalor  $i\omega$  e o autovetor  $p$  de  $A^t$  associado a  $-i\omega$  são

$$q = (1, i\omega, -\omega^2), \quad p = (i\omega, 1 - \omega^3 i, -\omega^2)$$

Para que a relação  $\langle p, q \rangle = 1$  seja satisfeita, tomaremos os vetores

$$q = (1, i\omega, -\omega^2), \quad p = \frac{1}{2\omega^4 + 2i\omega}(i\omega, 1 - \omega^3 i, -\omega^2).$$

A análise da parte linear do sistema está completa, faremos agora a análise da parte não linear. Note que existe somente um termo não linear (quadrático). Assim, a forma bilinear  $B(x, y)$ , com  $x = (x_1, x_2, x_3)$  e  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ , pode ser expressa como

$$B(x, y) = (0, 0, 2x_1 y_1).$$

Temos também que  $C(x, y, z) = (0, 0, 0)$  com  $z \in \mathbb{R}^3$ . Assim,

$$B(q, q) = B(q, \bar{q}) = (0, 0, q_1^2) = (0, 0, 2).$$

Para as outras expressões envolvendo  $B$ , encontramos as matrizes inversas

$$A^{-1}(x^{(0)}, \alpha_0) = \begin{pmatrix} -\beta & -\frac{1}{\beta} & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

e

$$(2i\sqrt{\beta} - A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{3(-3i\omega^3 2)}{6\omega^4 - 3i\omega} & \frac{-1}{\omega^2} & \frac{3i}{6\omega^3 - 3i} \\ -\frac{3i}{6\omega^3 - 3i} & \frac{-2i}{\omega} & \frac{-6\omega}{6\omega^3 - 3i} \\ \frac{6\omega}{6\beta\omega^3 - 3i} & 1 & \frac{-12i\omega^2}{6\omega^3 - 3i} \end{pmatrix}.$$

Assim, segue que

$$\begin{cases} s = A^{-1}B(q, \bar{q}) = (-2, 0, 0), \\ r = (2i\omega I - A)^{-1}B(q, q) = -\frac{2}{3(1 + 2\omega^3 i)}(1, 2\omega i, -4\omega^2). \end{cases}$$

Utilizando a Fórmula (2.15)

$$\begin{aligned} l_1(\alpha_0) &= \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \operatorname{Re} (-2 \langle p, B(q, s) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, r) \rangle) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \operatorname{Re} (-4\bar{p}_3 q_1 s_1 + 2\bar{p}_3 q_1 r_1) \\ &= -\frac{-\omega^3(1 + 8\omega^6)}{(1 + \omega^6)(1 + 4\omega^6)} \\ &= -\frac{-\beta\sqrt{\beta}(1 + 8\beta^3)}{(1 + \beta^3)(1 + 4\beta^3)} \end{aligned}$$

O coeficiente de Lyapunov é claramente negativo para todo  $\beta > 0$ . Aplicando o Corolário 2.2.1, segue que existe um único equilíbrio estável para cada  $\alpha < \alpha_0$ , com  $\alpha$  suficientemente próximo de  $\alpha_0$ .

## Capítulo 4

# Bifurcação de Hopf em sistemas $n$ -dimensionais II: Redução de Lyapunov-Schmidt

Neste capítulo apresentamos a Redução de Lyapunov-Schmidt, nosso objetivo é mostrar como este método pode ser utilizado para estudar a bifurcação de Hopf em sistemas  $n$ -dimensionais, com  $n > 2$ . Essa forma de entender a Bifurcação de Hopf é devida a Cesari e Hale (ver [6]). O estudo realizado neste capítulo foi baseado na referência [2]. Dividimos o capítulo em duas seções:

Na seção (4.1) apresentamos o algoritmo da Redução para sistemas definidos em espaços de Hilbert de dimensão infinita, para o caso de sistemas definidos em espaços de dimensão finita veja [2].

Na seção (4.2) aplicamos a Redução para sistema  $n$ -dimensionais que apresentam uma bifurcação de Hopf de codimensão 1. Em seguida, utilizamos a redução feita para demonstrar o Teorema de Hopf o qual nos permitirá obter informações sobre a Bifurcação de Hopf.

## 4.1 Redução de Lyapunov-Schmidt para espaços de Banach de dimensão infinita

Primeiramente, apresentaremos definições e teoremas necessários para a compreensão do Método da Redução de Lyapunov-Schmidt que será exposto a seguir.

**Definição 4.1.1.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach. Um operador linear limitado  $L : X \rightarrow Y$  é dito Fredholm se satisfaz as seguintes condições:*

- i)  $\text{Nuc}(L)$  é subespaço de  $X$  de dimensão finita.*
- ii)  $\text{Im}(L)$  é subespaço fechado de  $Y$  com codimensão finita.*

**Definição 4.1.2.** *Se  $L$  é Fredholm, o índice de  $L$  é o inteiro*

$$i(L) = \dim \text{Nuc}(L) - \text{codim Im}(L).$$

**Proposição 4.1.1.** *Se  $L : X \rightarrow Y$  é Fredholm de índice zero, então existem subespaços fechados  $M$  e  $N$  de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, tais que,*

- a)  $X = \text{Nuc}(L) \oplus M$ ,*
- b)  $Y = N \oplus \text{Im}(L)$ .*

Para uma demonstração deste resultado ver [1].

### 4.1.1 Algoritmo da Redução de Lyapunov-Schmidt

A Redução de Lyapunov-Schmidt nos fornece uma maneira de relacionar as órbitas periódicas de um sistema  $n$ -dimensional, onde  $n > 2$ , com as soluções simples de uma equação escalar do tipo

$$f(x, \alpha) = 0.$$

A Redução é feita em 5 passos, no que segue iremos apresentar e justificar cada passo.

Seja  $\Phi : X \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow Y$  uma aplicação  $C^\infty$  entre espaços de Hilbert, com  $\Phi(0, 0) = 0$ . Usaremos a redução de Lyapunov-Schmidt para resolver a equação

$$\Phi(u, \alpha) = 0 \quad (4.1)$$

com  $u$  em função de  $\alpha$ , numa vizinhança da origem. A derivada de  $\Phi$  na origem, calculada no vetor  $u$ , é dada por

$$Lu = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(hu, 0) - \Phi(0, 0)}{h}.$$

De agora em diante iremos supor  $L$  Fredholm de índice zero.

Segue o algoritmo do Método:

1) Decompor os espaços  $X$  e  $Y$  em função de  $L$ :

$$X = \text{Nuc}(L) \oplus M, \quad (4.2)$$

$$Y = N \oplus \text{Im}(L). \quad (4.3)$$

Esta decomposição faz sentido, pois como  $L$  é Fredholm de índice zero podemos aplicar a Proposição 4.1.1.

2) Considere as projeções

$$E : Y \longrightarrow \text{Im}(L), \quad (I - E) : Y \longrightarrow N.$$

com  $\text{Nuc}(E) = N$  e  $\text{Nuc}(I - E) = \text{Im}(L)$ .

**Proposição 4.1.2.** *Seja  $v \in Y$  temos que  $v = 0$  se, e somente se  $Ev = 0$  e  $(I - E)v = 0$ .*

**Demonstração:**  $(\Rightarrow)$  Suponha  $v = 0$ . Como  $E$  e  $I - E$  são transformações lineares segue que  $E(0) = 0$  e  $(I - E)(0) = 0$ .  $(\Leftarrow)$  Seja  $v \in (\text{Nuc}(E) \cap \text{Nuc}(I - E))$ , como as projeções  $E$  e  $(I - E)$  são complementares, temos que  $(\text{Nuc}(E) \cap \text{Nuc}(I - E)) = \{0\}$ , ou seja  $v = 0$ .

■

De acordo com a Proposição 4.1.2 o sistema (4.1) pode ser expandido no par de equações equivalentes

$$E\Phi(u, \alpha) = 0 \quad (4.4)$$

$$(I - E)\Phi(u, \alpha) = 0. \quad (4.5)$$

- 3) Utilizando a decomposição (4.2) podemos escrever  $u = v + w$ , onde  $v \in \text{Nuc}(L)$  e  $w \in M$ .

**Afirmção:** É possível resolver a equação (4.4) em função de  $v$  e  $\alpha$ .

De fato, inicialmente mostraremos que podemos aplicar o Teorema da Função Implícita em (4.4). Para isso, definamos a função

$$F : \text{Nuc}(L) \times \mathbb{R}^{k+1} \times M \rightarrow \text{Im}(L), \quad (v, \alpha, w) \mapsto E\Phi(v + w, \alpha).$$

Utilizando a Regra da cadeia, temos que a derivada de  $F$  em relação a  $w$ , aplicada na origem, é dada por

$$\frac{dF}{dw} = \frac{dE}{dw}(\Phi(0, 0)) \circ L = E \circ L = L \Big|_M.$$

**Lema 4.1.1.**  $L \Big|_M$  é invertível.

**Demonstração:** Seja  $w \in M$  tal que  $L \Big|_M (w) = 0$  então  $w \in \text{Nuc}(L) \cap M$  ou seja  $w = 0$ . Logo,  $\text{Nuc}(L) \Big|_M = \{0\} \Rightarrow L \Big|_M$  é invertível. ■

Aplicando o Teorema da Função Implícita segue que  $F$  tem solução única para  $w$  numa vizinhança  $\Omega \subset \text{Nuc}(L) \times \mathbb{R}^{k+1}$  da origem. Vamos escrever essa solução como  $w = W(v, \alpha)$  sendo  $W : \Omega \rightarrow M$  a qual satisfaz

$$E\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) = 0 \quad , \quad \forall (v, \alpha) \in \Omega \quad (4.6)$$

e  $W(0, 0) = 0$ .

4) Substituindo  $W$  na equação (4.5) obtemos a equação reduzida

$$\phi : \text{Nuc}(L) \times \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow N, \quad (v, \alpha) \mapsto (I - E)\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha). \quad (4.7)$$

Desse modo, os zeros de  $\phi(v, \alpha)$  estão em correspondência biunívoca com os zeros de  $\Phi(u, \alpha)$ , tal correspondência é dada por

$$\Phi(v, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \phi(v + W(v, \alpha)) = 0.$$

5) Escolhemos bases  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  para  $\text{Nuc}(L)$  e  $\{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}$  para  $\text{Im}(L)^\perp$ .

Defina  $g_i$  por

$$g_i : B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, \alpha) \mapsto \langle v_i^*, \phi(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \alpha) \rangle, \quad (4.8)$$

onde  $B$  é uma bola pequena o suficiente para que o vetor  $(x, \alpha) \in B$  então o vetor  $(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \alpha) \in \Omega$ . Como  $L$  é Fredholm de índice zero temos que:

$$\dim \text{Nuc}(L) = \dim \text{Im}(L)^\perp,$$

ambas dimensões são finitas. Assim, as bases para  $\text{Nuc}(L)$  e  $\text{Im}(L)^\perp$  possuem o mesmo número de vetores.

Abaixo vamos citar, brevemente, os cinco passos essenciais, que detalhamos anteriormente, para chegarmos na equação reduzida (4.8).

1. Decompomos o espaço, em uma soma direta dependendo de  $L$  ((4.2) e (4.3)).
2. Usamos tal decomposição para definirmos as projeções  $E$  e  $(I - E)$ , donde chegamos nas equações ((4.4) e (4.5)).
3. Mostramos que (4.4) pode ser resolvida numa vizinhança da origem usando o Teorema da Função Implícita.
4. Substituímos as soluções de (4.4) em (4.5) para obtermos a equação (4.7).
5. Escolhemos bases convenientes para  $\text{Nuc}(L)$  e para  $(\text{Im}(L))^\perp$  e obtemos a equação reduzida (4.8).

O resultado da Redução de Lyapunov-Schmidt pode ser resumido no seguinte teorema.

**Teorema 4.1.1.** *Se a derivada de  $\Phi(u, \alpha)$  é um operador Fredholm de índice zero, então as soluções de (4.1) estão localmente em correspondência biunívoca com as soluções do sistema em dimensão finita*

$$g(x, \alpha) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.9)$$

onde  $g_i$  é definido por (4.8).

Para aplicações da Redução de Lyapunov-Schmidt muitas vezes é necessário conhecer as derivadas da função  $g$ . Vamos supor que  $W$  e  $g_i$ , com  $i = 1, \dots, n$  sejam suficientemente diferenciáveis. A proposição abaixo nos fornece as fórmulas dessas derivadas. Para demonstração veja [2].

**Proposição 4.1.3.** *As seguintes afirmações são verificadas*

- a)  $D_v W(0, 0) = 0$ ,
- b)  $D_v^2 W(0, 0) = -L^{-1} E D_x^2 \Phi(0, 0)$ ,
- c)  $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(0, 0) = 0$ ,
- d)  $\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k \partial x_j}(0, 0) = \langle v_i^*, D_x^2 \Phi(0, 0)(v_k v_j) \rangle$ ,
- e)  $\frac{\partial^3 g_i}{\partial x_l \partial x_k \partial x_j}(0, 0) = \langle v_i^*, V \rangle$ , onde
 
$$V = D_x^3 \Phi(0, 0, 0)(v_l, v_k, v_j) + D_x^2 \Phi(0, 0)(v_k, W_{kl}) + D_x^2 \Phi(0, 0)(v_l, W_{lj}),$$
- f)  $\frac{\partial g_i}{\partial \alpha_j}(0, 0) = \langle v_i^*, D_{\alpha_l} \Phi(0, 0) \rangle$ ,
- g)  $\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial \alpha_i}(0, 0) = \langle v_i^*, D_x^2 \Phi(0, 0)(v_j, -L^{-1} E(D_{\alpha_l} \Phi(0, 0)) + D_x D_{\alpha_l} \Phi(0, 0)(v_j)) \rangle$ .

## 4.2 Encontrando soluções periódicas através da redução de Lyapunov-Schmidt

Seja  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e considere a equação

$$\frac{du}{dt} + F(u, \alpha) = 0, \quad (4.10)$$

Em toda seção, vamos supor que

$$F(0, \alpha) \equiv 0, \quad (4.11)$$

e que  $A(\alpha) = dF_{0,\alpha}$  satisfaça as hipóteses:

- i)  $A(0)$  tem autovalores simples  $\pm i$ , e
- ii)  $A(0)$  não tem outros valores sobre o eixo imaginário.

Essa seção será dividida em duas subseções:

(4.2.1) Definição do operador  $\Phi$ .

(4.2.2) Prova do Teorema de Hopf.

### 4.2.1 Definição de Operador $\Phi$

Nosso objetivo é definir um operador  $\Phi$  com a propriedade que as soluções de  $\Phi = 0$  correspondam a soluções  $2\pi$ -periódicas de (4.10).

Existe um problema técnico no espaço das funções periódicas. A soma de duas funções com períodos distintos pode não ser periódica. Para superar esse problema introduziremos o parâmetro extra  $\tau$ . Mais especificamente,

$$s = (1 + \tau)t.$$

Assim,

$$\frac{du}{ds} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{du}{dt} \frac{1}{1 + \tau}.$$

Isto é,

$$\frac{du}{dt} = (1 + \tau) \frac{du}{ds}.$$

Assim podemos escrever (4.10) da seguinte forma

$$(1 + \tau) \frac{du}{ds} + F(u, \alpha) = 0, \quad (4.12)$$

uma vez que  $F(u, \alpha)$  não depende explicitamente de  $s$ .

Notemos que soluções  $2\pi$ -periódicas para (4.12) correspondem as soluções  $2\pi/1+\tau$  periódicas para (4.10).

Como soluções periódicas de pequena amplitude de (4.10) têm período próximo de  $2\pi$ , temos que  $\tau \approx 0$ .

Definimos então,

$$\Phi : C_{2\pi}^1 \times \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R} \rightarrow C_{2\pi}, \quad (u, \alpha, \tau) \mapsto (1 + \tau) \frac{du}{ds} + F(u, \alpha).$$

Deste modo, soluções para a equação  $\Phi(u, \alpha, \tau) = 0$  estão em correspondência com as soluções  $2\pi$ -periódicas de (4.12) e por consequência com as soluções  $2\pi$ -periódicas de (4.10).

Notemos que,

$$\Phi(0, \alpha, \tau) = 0, \quad \forall \alpha, \tau.$$

Os espaços em que o operador  $\Phi$  atua são definidos da seguinte maneira:

- $C_{2\pi}$  é o espaço de Banach das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , contínuas e  $2\pi$ -periódicas, onde a norma é definida por

$$\| u \| = \max_s | u(s) |.$$

Temos que existe  $\max_u | u(s) |$ , pois  $u$  é contínua e periódica.

- $C_{2\pi}^1$  é o espaço das aplicações  $2\pi$ -periódicas com derivadas de primeira ordem contínuas. Neste espaço é definido a seguinte norma

$$\| u \|_1 = \| u \| + \left\| \frac{du}{ds} \right\|.$$

Tomando o seguinte produto interno

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(s)^t v(s) ds$$

os espaços  $C_{2\pi}$  e  $C_{2\pi}^1$  são espaços de Hilbert.

Uma importante e indispensável observação é que o grupo  $S^1$  atua sobre  $C_{2\pi}$ , através da mudança de fase.

**Definição 4.2.1.** *Sejam  $\mathbb{X}$  um espaço topológico e  $G$  um grupo. Dizemos que  $G$  atua em  $\mathbb{X}$  se existe uma aplicação contínua*

$$\theta : G_x \rightarrow \mathbb{X}$$

*tal que*

$$\theta(g, x) = gx.$$

**Definição 4.2.2.** *Definimos a ação de  $S^1$  em  $C_{2\pi}$  por  $\theta : S^1 \times C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$  onde*

$$(\theta u)(s) = u(s - \theta).$$

Temos a seguinte proposição.

**Proposição 4.2.1.** *O operador  $\Phi$  comuta com a ação de grupo  $\theta$ .*

**Demonstração:** Com efeito,

$$\begin{aligned} \Phi(\theta \cdot u, \alpha, \tau) &= (1 + \tau) \frac{d(\theta \cdot u)}{ds} + F(\theta \cdot u, \alpha) \\ &= (1 + \tau) \frac{du}{ds} + F(u, \alpha) \\ &= \theta \cdot \Phi(u, \alpha, \tau), \end{aligned}$$

uma vez que

$$\frac{d(\theta \cdot u)}{ds} = \frac{du}{ds} \quad \text{e} \quad F(\theta \cdot u, \alpha) = F(u, \alpha),$$

pois  $F$  não depende explicitamente de  $s$ .

■

## 4.2.2 Prova do Teorema de Hopf

Tendo caracterizado as soluções periódicas de (4.10) com as soluções da equação

$$\Phi(u, \alpha, \tau) = 0 \tag{4.13}$$

resolveremos então (4.13) usando a Redução de Lyapunov-Schmidt.

Denotaremos por  $A_0(u)$  a derivada de  $F$  na origem, calculada no vetor  $u$ .

Calculemos a derivada de  $\Phi$  com respeito a  $u$  avaliada no ponto  $(u, \alpha, \tau) = (0, 0, 0)$ .

$$\begin{aligned}
 D\Phi_{(0,0,0)}u &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(tu, 0, 0) - \Phi(0, 0, 0)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{d(tu)}{ds} + F(tu, 0)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{du}{ds} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(tu, 0)}{t} \\
 &= \frac{du}{ds} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(tu, 0) - F(0, 0)}{t} \\
 &= \frac{du}{ds} + A_0(u).
 \end{aligned}$$

Denotaremos por  $L$  o operador  $D\Phi_{(0,0,0)}$ .

**Afirmação:** O operador  $L : C_{2\pi}^1 \rightarrow C_{2\pi}$  é Fredholm de índice zero.

**Teorema 4.2.1.** *Se o sistema (4.10) possui autovalores simples para  $x = 0$  quando  $\alpha = 0$ , então existe uma função diferenciável  $g(x, \alpha)$ , da forma*

$$g(x, \alpha) = r(x^2, \alpha)x, \quad r(0, 0) = 0,$$

*tal que as soluções locais de  $g(x, \alpha) = 0$ , com  $x > 0$ , estão em correspondência biunívoca com órbitas que são soluções  $2\pi$ -periódicas de pequena amplitude para o sistema (4.10).*

Para demonstrarmos o Teorema 4.2.1, necessitamos de alguns lemas.

**Lema 4.2.1.** *Se o sistema (4.10) satisfaz as hipóteses (i) e (ii), então*

a)  $\dim \text{Nuc}(L) = 2$ .

b) *Existe uma base  $\{v_1, v_2\}$  para  $\text{Nuc}(L)$  com a seguinte propriedade.*

*Se identificarmos  $\text{Nuc}(L)$  com o  $\mathbb{R}^2$  pela aplicação*

$$(x, y) \mapsto xv_1 + yv_2$$

*então, a ação de  $S^1$  sobre  $\text{Nuc}(L)$  dada por*

$$\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

c) Existe uma decomposição invariante de  $C_{2\pi}$  dada por

$$C_{2\pi} = \text{Nuc}(L) \oplus M \quad (4.14)$$

e essa decomposição induz uma decomposição em  $C_{2\pi}^1$

$$C_{2\pi}^1 = \text{Nuc}(L) \oplus M, \quad (4.15)$$

onde  $M = (\text{Im}(L)) \cap C_{2\pi}^1$ .

**Demonstração:** a) Considere o sistema de Edo's com coeficientes constantes

$$Lu = 0, \quad u \in C_{2\pi}^1$$

onde

$$L = \frac{d}{ds} + A_0.$$

Das hipóteses (i) e (ii), feitas nesta seção, temos que os autovalores são  $\pm i, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ , onde  $\alpha_j, j = 3, \dots, n$  não estão no eixo imaginário. Existe uma base de soluções  $\{u_1(s), \dots, u_n(s)\}$  tal que  $u_1(s)$  e  $u_2(s)$  (associadas aos autovalores  $\pm i$ ) são soluções  $2\pi$ -periódicas e as outras não são  $2\pi$ -periódicas. Mostraremos que estas são as únicas soluções periódicas.

De fato, se  $\alpha + i\beta$  é autovalor e  $(u_1 + iu_2)$  é autovetor correspondente, temos

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)s}(u_1 + iu_2) &= [e^{\alpha s} \cos(\beta s) + ie^{\alpha s} \text{sen}(\beta s)](u_1 + iu_2) \\ &= e^{\alpha s} \cos(\beta s)u_1 - e^{\alpha s} \text{sen}(\beta s)u_2 \\ &\quad + ie^{\alpha s} [\cos(\beta s)u_2 + \text{sen}(\beta s)u_1] \\ &= e^{\alpha s} [\cos(\beta s)u_1 - \text{sen}(\beta s)u_2] + \\ &\quad + ie^{\alpha s} [\cos(\beta s)u_2 + \text{sen}(\beta s)u_1] \\ &= e^{\alpha s} v_1 + ie^{\alpha s} v_2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde

$$v_1 = \cos(\beta s)u_1 - \text{sen}(\beta s)u_2, \quad (4.17)$$

$$v_2 = \cos(\beta s)u_2 + \text{sen}(\beta s)u_1. \quad (4.18)$$

Notemos que (4.16) será uma solução  $2\pi$ -periódica se  $\alpha = 0$  e  $\beta \in \mathbb{Z}$ . Logo, somente os autovalores  $\pm i$  induzem soluções  $2\pi$ -periódicas.

Seja  $c \in \mathbb{C}^n$  satisfazendo

$$A_0 c = -ic, \quad \langle \bar{c}^t, c \rangle = 2.$$

ou seja,  $c$  é autovetor associado ao autovalor  $-i$ . O vetor linha  $\bar{c}^t$  é o vetor transposto ao vetor  $c$  com entradas complexas conjugadas em relação a  $c$ . Então tomando  $\alpha = 0$  em (4.16) e  $\beta = 1$  nas equações (4.17) e (4.18), obtemos

$$v_1(s) = \operatorname{Re}(e^{is}c), \quad (4.19)$$

$$v_2(s) = \operatorname{Im}(e^{is}c), \quad (4.20)$$

que formam uma base para  $\operatorname{Nuc}(L)$ . Em particular  $\dim \operatorname{Nuc}(L) = 2$ .

**b)** Consideremos a base para  $\operatorname{Nuc}(L)$  formada pelos vetores  $v_1$  e  $v_2$  dados por (4.19) e (4.20). Como

$$v_1(s) = \operatorname{Re}(e^{is}c) = \cos(s)\operatorname{Re}(c) - \operatorname{sen}(s)\operatorname{Im}(c), \quad (4.21)$$

$$v_2(s) = \operatorname{Im}(e^{is}c) = \cos(s)\operatorname{Im}(c) + \operatorname{sen}(s)\operatorname{Re}(c), \quad (4.22)$$

temos que

$$\begin{aligned} \theta v_1(s) &= v_1(s - \theta) \\ &= \cos(s - \theta)\operatorname{Re}(c) - \operatorname{sen}(s - \theta)\operatorname{Im}(c) \\ &= [\cos(s)\cos(\theta) + \operatorname{sen}(s)\operatorname{sen}(\theta)]\operatorname{Re}(c) \\ &\quad - [\operatorname{sen}(s)\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta)\cos(s)]\operatorname{Im}(c) \\ &= \cos(\theta)[\cos(s)\operatorname{Re}(c) - \operatorname{sen}(s)\operatorname{Im}(c)] \\ &\quad + \operatorname{sen}(\theta)[\operatorname{sen}(s)\operatorname{Re}(c) - \cos(s)\operatorname{Im}(c)] \\ &= \cos(\theta)v_1(s) + \operatorname{sen}(\theta)v_2(s). \end{aligned}$$

Fazendo calculos análogos para  $\theta v_2(s)$  concluimos que

$$\theta v_1(s) = \cos(\theta)v_1(s) + \operatorname{sen}(\theta)v_2(s),$$

$$\theta v_2(s) = -\operatorname{sen}(\theta)v_1(s) + \cos(\theta)v_2(s).$$

Para descobrirmos com  $\theta$  age em  $\mathbb{R}^2$ , aplicamos  $\theta$  no vetor  $(x, y)$

$$\begin{aligned}
 \theta(x, y) &= \theta(xv_1(s) + yv_2(s)) \\
 &= x(\theta v_1(s)) + y(\theta v_2(s)) \\
 &= x[\cos(\theta)v_1(s) + \text{sen}(\theta)v_2(s)] + \\
 &+ y[\cos(\theta)v_1(s) + \text{sen}(\theta)v_2(s)] \\
 &= v_1(s)[x \cos(\theta) - y \text{sen}(\theta)] + \\
 &+ v_2(s)[x \text{sen}(\theta) + y \cos(\theta)] \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

c) A demonstração deste item é extensa, citaremos aqui os principais passos, para demonstração completa veja [2].

Primeiramente, construímos uma base para  $\text{Nuc}(L^*)$ , onde  $L^*$  é o operador adjunto com respeito ao produto interno

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{u(s)}^t v(s) ds.$$

Para isso, utilizamos as afirmações:

**Afirmção 1)**  $L^*$  é dado por

$$L^*w = -\frac{dw}{ds} + A_0^t w.$$

**Afirmção 2)** Considerando funções somente de valores reais, temos que  $A_0$  e  $A_0^t$  possuem os mesmos autovalores.

Concluimos da Afirmção 2 que se  $A_0$  satisfaz as hipóteses do enunciado (i) e (ii), então  $A_0^t$  também satisfaz.

Seja  $d$  um vetor, não-nulo, pertencente a  $\mathbb{C}^n$  satisfazendo

$$A_0^t d = id,$$

e seja

$$v_1^*(s) = \text{Re}(e^{is}d),$$

$$v_2^*(s) = \text{Im}(e^{is}d).$$

Então, com cálculos análogos aos feitos no item (a), concluímos que  $\{v_1^*, v_2^*\}$  é uma base para  $\text{Nuc}(L^*)$ .

Normalizamos  $d$  com a seguinte afirmação.

**Afirmação 3** O autovetor  $d$  pode ser escolhido tal que

$$\overline{d^t}c = 2 \quad d^t \cdot c = 0.$$

Com essa normalização para  $d$ , temos as seguintes fórmulas para os produtos internos entre  $v_j$  e  $v_k^*$   $j, k = 1, 2$ :

1.  $\langle v_k^*, v_j^* \rangle = \frac{\overline{d^t}d\delta_{jk}}{2},$
2.  $\langle v_k^*, v_j \rangle = \delta_{jk},$
3.  $\langle v_k, v_j \rangle = \delta_{jk},$  onde  $\delta_{ij} = 1$ , se  $i = j$ , e  $\delta_{ij} = 0$ , se  $j \neq i$ .

Para verificarmos a decomposição (4.14) usamos a hipótese de  $L$  ser Fredholm de índice zero,

$$\text{codim Im}(L) = \dim \text{Nuc}(L) = 2,$$

ou seja,  $\text{Nuc}(L)$  tem a mesma dimensão de um subespaço complementar da  $\text{Im}(L)$ .

**Afirmação 4**) Sendo  $L$  Fredholm de índice zero, então  $\text{Im}(L) \cap \text{Nuc}(L) = \{0\}$ .

**Afirmação 5**) Seja  $W \subset C_{2\pi}$  um subespaço tal que

- a)  $\text{Im}(L) \oplus W = C_{2\pi},$
- b)  $\dim W = \dim \text{Nuc}(L) = 2,$
- c)  $\text{Im}(L) \cap \text{Nuc}(L) = \{0\}.$

Então,

$$\text{Im}(L) \oplus \text{Nuc}(L) = C_{2\pi}.$$

Utilizando as Afirmações (5) e (6) concluímos a decomposição (4.14).

A decomposição (4.15) segue de um argumento análogo a justificativa de (4.14).

■

Vamos agora nos referir aos 5 passos da Redução. No passo 1, escolhemos  $M$  e  $N$  de acordo com as decomposições (4.14) e (4.15), isto é,

$$M = (\text{Im}(L))^{\perp} \cap C_{2\pi}^1, \quad N = \text{Nuc}(L). \quad (4.23)$$

Os passos 2, 3 e 4 não requerem informações específicas para a presente aplicação. Paramos após o passo 4 com as coordenadas livres da aplicação reduzida  $\phi$  dada por (4.7). Pela nossa escolha em (4.23), temos que

$$\phi : \text{Nuc}(L) \times \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \text{Nuc}(L),$$

isto é, o mesmo espaço  $\text{Nuc}(L)$  aparece no domínio e imagem de  $\phi$ . Na verdade, esta é a razão de não usarmos o complemento ortogonal em (4.23). Além do mais,  $M$  e  $N$  são complementos invariantes. Segue o lema.

**Lema 4.2.2.** *Se os espaços são invariantes pela ação, então as projeções comutam com a ação.*

**Demonstração:** Seja  $E : Y \rightarrow \text{Im}(L)$  a projeção com  $\text{Nuc}(L)$  queremos que  $E$  comute com  $\theta \in S^1$  qualquer. Suponhamos que  $u = v + w$ , onde  $v \in \text{Im}(L)$  e  $w \in \text{Nuc}(L)$ . Usando a linearidade de  $\theta$ , temos que

$$\theta E(u) = \theta v = E(\theta v) = E(\theta v + \theta w) = E(\theta(u)),$$

pois  $\text{Im}(L)$  e  $\text{Nuc}(L)$  são invariantes pela ação. De maneira análoga segue que  $(I - E)$  comuta com  $\theta$ .

■

**Lema 4.2.3.** *A função  $\phi$  comuta com a ação.*

**Demonstração:** Mostraremos primeiramente que a função  $W : \text{Nuc}(L) \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow M$  dada em (4.6) comuta com  $\theta$ , isto é

$$W(\theta v, \alpha) = \theta W(v, \alpha) \quad \forall \theta \in S^1.$$

De fato, fixemos  $\theta \in S^1$  e definamos

$$W_\theta(v, \alpha) = \theta^{-1}W(\theta v, \alpha).$$

Assim,

$$\begin{aligned} E\Phi(v + W_\theta(v, \alpha)) &= E\Phi(v + \theta^{-1}W(\theta v, \alpha)) \\ &= E\Phi(\theta \cdot \theta^{-1}v + \theta^{-1}W(\theta v, \alpha)) \\ &= E\Phi(\theta^{-1}(\theta v + W(\theta v, \alpha))). \end{aligned}$$

Como a ação comuta com o operador e com a projeção, segue que

$$E\Phi(v + W_\theta(v, \alpha)) = \theta^{-1}E\Phi(\theta v + W(\theta v, \alpha)).$$

Do fato que (4.7) vale para qualquer  $v$ , em particular para  $\theta v$ , concluímos que  $W_\theta$  também é solução da equação implícita (4.4), sendo claro que  $W_\theta(0, 0) = 0$ . Pela unicidade do Teorema da Função Implícita, concluímos que

$$W_\theta(v, \alpha) = W(v, \alpha),$$

o que queríamos mostrar.

Considere agora a equação (4.5), temos que

$$\begin{aligned} \phi(\theta v, \alpha, \tau) &= (I - E)\Phi(\theta v + W(\theta v, \alpha), \alpha, \tau) \\ &= (I - E)\Phi(\theta(v + W(v, \alpha)), \alpha, \tau) \\ &= \theta(I - E)\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha, \tau) \\ &= \theta\phi(v, \alpha, \tau). \end{aligned}$$

■

Os lema a seguir nos oferece a forma da aplicação  $\phi$ .

**Lema 4.2.4.** *Assumindo as coordenadas de Nuc (L) no Lema 4.2.1(b), a aplicação reduzida tem a forma*

$$\phi(x, y, \alpha, \tau) = p(x^2 + y^2, \alpha, \tau) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + q(x^2 + y^2, \alpha, \tau) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

onde  $p$  e  $q$  são aplicações diferenciáveis satisfazendo:

- a)  $p(0, 0, 0) = 0$ ,  
 b)  $q(0, 0, 0) = 0$ ,  
 c)  $\frac{dp}{d\tau}(0, 0, \tau) = 0$ ,  
 d)  $\frac{dq}{d\tau}(0, 0, \tau) = -1$ .

**Demonstração:** Seja  $\phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  uma aplicação diferenciável que comuta com a ação definida em (4.2.1)(c). Então existem funções diferenciáveis  $p, q$  de uma variável real, tais que

$$\phi(x, y, \alpha, \tau) = p(x^2 + y^2, \alpha, \tau) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + q(x^2 + y^2, \alpha, \tau) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

De fato, escrevemos  $\phi$  como função de duas componentes

$$\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)).$$

Como sabemos  $\phi$  comuta com qualquer  $\theta \in S^1$ , em particular comuta com  $\theta = \pi$ .

Sendo  $\pi(x, y) = (-x, -y)$ , temos que

$$\phi(-x, -y) = \phi\pi(x, y) = \pi\phi(x, y) = \pi(\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)) = (-\phi_1(x, y), -\phi_2(x, y)).$$

Fazendo  $y = 0$ , temos

$$\phi(-x, 0) = (\phi_1(-x, 0), \phi_2(-x, 0)),$$

e por outro lado

$$\phi(-x, 0) = (-\phi_1(x, 0), -\phi_2(x, 0)).$$

Logo,

$$\phi_j(-x, 0) = -\phi_j(x, 0), \quad j = 1, 2.$$

Em outras palavras cada componente  $\phi_j(x, 0)$  é uma função ímpar na primeira variável. Sendo assim, podemos escrever

$$\phi_1(x, 0) = p(x^2)x, \quad \phi_2(x, 0) = q(x^2)x$$

para funções diferenciáveis  $p$  e  $q$ .

Para qualquer ponto  $(x, y)$  do plano, podemos encontrar um ângulo  $\theta$  tal que  $\theta(s, 0) = (x, y)$  onde  $s^2 = x^2 + y^2$ . Disso segue que

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \phi(\theta(s, 0)) = \theta\phi(s, 0) \\ &= \theta(p(s^2)s, q(s^2)s) \\ &= \theta(p(s^2)s, 0) + \theta(q(s^2)s, 0) \\ &= p(s^2)(\theta(s, 0)) + q(s^2)(\theta(0, s)) \\ &= p(x^2 + y^2)(\theta(s, 0)) + q(x^2 + y^2)(\theta(0, s)).\end{aligned}$$

Note que

$$\frac{\pi}{2}\theta(s, 0) = \theta\frac{\pi}{2}(s, 0) = \theta(0, s).$$

Logo,

$$\theta(0, s) = \frac{\pi}{2}(x, y) = (-y, x).$$

Com isso, temos que

$$\phi(x, y, \alpha, \tau) = p(x^2 + y^2, \alpha, \tau) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + q(x^2 + y^2, \alpha, \tau) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Assim, concluímos a demonstração de (4.24) a menos de parâmetros auxiliares. Para concluirmos a demonstração do lema, basta verificarmos agora os itens (a), (b), (c) e (d). Na sequência, realizamos o passo 5 da Redução de Lyapunov-Schmidt. Especificamente, para  $j = 1, 2$  de (4.8) temos que

$$\phi_j(x, y, \alpha, \tau) = \langle v_j^*, \Phi(xv_1 + yv_2, \alpha, \tau) \rangle.$$

De (4.24) temos

$$\phi_1(x, 0, \alpha, \tau) = p(x^2, \alpha, \tau)x, \quad (4.25)$$

$$\phi_2(x, 0, \alpha, \tau) = q(x^2, \alpha, \tau)x. \quad (4.26)$$

Derivando as equações (4.25) e (4.26) em relação a  $x$  e calculando em  $(0, 0, 0)$ , obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(0, 0, 0, 0) &= p(0, 0, 0), \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(0, 0, 0, 0) &= q(0, 0, 0).\end{aligned}$$

Usando o item (a) da Proposição 4.1.3, concluímos que

$$p(0, 0, 0) = q(0, 0, 0) = 0.$$

De (4.25) e (4.26), segue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial \tau}(0, 0, \tau) &= \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial \tau}(0, 0, 0, \tau), \\ \frac{\partial q}{\partial \tau}(0, 0, \tau) &= \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial \tau}(0, 0, 0, \tau).\end{aligned}$$

Do item (g) da Proposição 4.1.3

$$\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial \tau} = \langle v_j^*, d(\Phi_\tau)v_1 - d^2\Phi(v_1, L^{-1}E\Phi_\tau) \rangle, \quad (4.27)$$

onde

$$\Phi_\tau = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}.$$

Como

$$\Phi(u, \alpha, \tau) = (1 + \tau) \frac{du}{ds} + F(u, \alpha),$$

derivando em relação a  $\tau$

$$\frac{\partial \Phi(u, \alpha, \tau)}{\partial \tau} = \frac{du}{ds}.$$

É trivial que

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(0, \alpha, \tau) = 0,$$

assim o termo

$$d^2\phi(v_1, L^{-1}E\Phi_\tau)$$

no produto interno de (4.27) é nulo.

Para o termo  $d(\Phi_\tau)v_1$  temos

$$\begin{aligned}\partial(\Phi_\tau)v_1 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_\tau(0 + tv_1, \tau) - \Phi_\tau(0, 0, \tau)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial(tv_1)}{t \partial s} \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial s}.\end{aligned}$$

Como

$$v_1(s) = \operatorname{Re}(c) \cos(s) - \operatorname{Im}(c) \operatorname{sen}(s),$$

$$v_2(s) = \text{Im}(c) \cos(s) + \text{Re}(c) \text{sen}(s).$$

Segue que

$$\frac{\partial v_1}{\partial s} = -[\text{Im}(c) \cos(s) + \text{Re}(c) \text{sen}(s)] = -v_2. \quad (4.28)$$

Substituindo (4.28) em (4.27)

$$\frac{\partial^2 \theta_j}{\partial x \partial \tau} = \langle v_j^*, -v_2 \rangle.$$

assim,

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial \tau} = -\langle v_1^*, v_2 \rangle = 0, \quad \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x \partial \tau} = -\langle v_2^*, v_2 \rangle = -1$$

e concluimos a demonstração. ■

Temos agora todas as ferramentas necessárias para demonstrar o Teorema 4.2.1.

**Demonstração de Teorema 4.2.1.** Da fórmula explícita de  $\phi$  dada no Lema 4.2.4 segue que  $\phi = 0$ , se e somente, se

a)  $x = y = 0$ ,

b)  $p = q = 0$ .

De fato,

$$\begin{cases} px - qy = 0, \\ py + qx = 0, \end{cases} \Leftrightarrow (px - qy) + i(py + qx) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p - iq = 0, \\ x + iy = 0, \end{cases} \\ \Leftrightarrow x = y = 0 \quad \text{ou} \quad p = q = 0.$$

As soluções de (a) correspondem a solução constante trivial  $u = 0$ , já as soluções de (b) correspondem as soluções  $2\pi$ -periódicas do sistema. Esta é não constante se  $z = x^2 + y^2 > 0$ .

Com o objetivo de eliminar a redundância de soluções de (a) associadas a ação de  $S^1$  vamos a assumir que  $y = 0$  e  $x \geq 0$ . Depois dessa simplificação, as expressões de (a) e (b) ficam da seguinte forma:

a)  $x = 0$ ,

b)  $p(x^2, \alpha, \tau) = q(x^2, \alpha, \tau) = 0$ .

Agora queremos que numa vizinhança da origem a equação

$$q(x^2, \alpha, \tau) = 0 \tag{4.29}$$

pode ser resolvida para  $\tau = \tau(x^2, \alpha)$ .

O Lema 4.2.4 itens (b) e (d) nos permite aplicar o Teorema da Função Implícita, assim garantimos que (4.29) possa ser resolvida para  $\tau = \tau(x^2, \alpha)$ .

Definamos então,

$$r(x, \alpha) = p(z, \alpha, \tau(z, \alpha)), \quad g(x, \alpha) = r(x^2, \alpha, x).$$

Então a equação

$$\phi(x, y, \alpha, \tau) = 0 \tag{4.30}$$

tem solução com  $x^2 + y^2 > 0 \Leftrightarrow r(x^2 + y^2, \alpha)$  possui solução. Além disso, toda solução de (4.30) pode ser obtida das soluções de

$$g(x, \alpha) = 0$$

com  $x \geq 0$  por uma rotação apropriada.

Concluindo que as soluções de (4.30) estão em correspondência biunívoca com as soluções do sistema (4.10).

■

Demonstraremos agora o Teorema de Hopf, o qual nos permitirá obter informações sobre a bifurcação de Hopf.

**Teorema 4.2.2.** *Considere o sistema de EDO's (4.10) tal que as seguintes hipóteses são satisfeitas:*

1) *o sistema possui autovalores simples no ponto de equilíbrio  $x = 0$  para  $\alpha = 0$ ,*

2) a condição de transversalidade da Bifurcação de Hopf é satisfeita.

Então existe uma família á um parâmetro de (4.10) bifurcando da solução trivial  $u = 0$  em  $\alpha = 0$ .

**Demonstração:** O Teorema 4.2.1 nos garante que podemos encontrar órbitas periódicas de (4.10) resolvendo a equação

$$g(x, \alpha) = 0. \quad (4.31)$$

O teorema também garante que  $g(x, \alpha) = r(x^2, \alpha)x$  para alguma função  $r$ . Mas, encontrar soluções triviais de (4.31) consiste em resolver

$$r(x^2, \alpha) = 0.$$

Expandindo a função  $r$  em série de Taylor numa vizinhança de  $(0, 0)$  temos

$$r(z, \alpha) = r(0, 0) + \frac{\partial r}{\partial z}(0, 0)z + \frac{\partial r}{\partial \alpha}(0, 0)\alpha + O(z, \alpha)$$

onde  $z = x^2$ ,  $r(0, 0) = 0$  (Teorema 4.2.1) e  $O$  denota os termos de ordem maior.

**Afirmação:**

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha}(0, 0) = \frac{\partial \mu(0)}{\partial \alpha} \neq 0,$$

onde  $\mu$  é a parte real dos autovalores associadas ao sistema (4.10).

Com efeito, temos que

$$r(z, \alpha) = p(z, \alpha, \tau(z, \alpha)).$$

Aplicando a regra da cadeia

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha}(z, \alpha) = \frac{\partial p}{\partial \alpha}(z, \alpha, \tau(z, \alpha)) + \frac{\partial p}{\partial \tau}(z, \alpha, \tau(z, \alpha)) \frac{\partial \tau}{\partial \alpha}(z, \alpha)$$

e em  $(z, \alpha) = (0, 0)$ , temos

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha}(0, 0) = \frac{\partial p}{\partial \alpha}(0, 0, \tau(0, 0)) + \frac{\partial p}{\partial \tau}(0, 0, \tau(0, 0)) \frac{\partial \tau}{\partial \alpha}(0, 0)$$

Do Lema 4.2.4 temos que

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}(0, 0, 0) = 0.$$

Assim,

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha}(0, 0) = \frac{\partial p}{\partial \alpha}(0, 0, 0).$$

Por outro lado,

$$\phi_1(x, 0, \alpha, \tau) = p(x^2, \alpha, \tau)x. \quad (4.32)$$

Derivando (4.32) em relação a  $x$  obtemos

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(0, 0, 0, 0) = \frac{\partial p}{\partial x}(x^2, \alpha, \tau)2x^2 + p(x^2, \alpha, \tau).$$

Derivando agora com respeito a  $\alpha_0$  e aplicando em  $(x, y, \lambda, \tau) = (0, 0, 0, 0)$ .

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \alpha \partial x}(0, 0, 0, 0) = \frac{\partial p}{\partial \alpha}(0, 0, 0) = \frac{\partial r}{\partial \alpha}(0, 0).$$

Da Proposição 4.1.3, item (g), temos

$$\frac{d^2 \phi_i}{d\alpha dx} = \langle v_1^*, d(\Phi_\alpha)v_1 - d^2\Phi(v_1, L^{-1}E\Phi_\alpha) \rangle, \quad (4.33)$$

onde

$$\Phi(u, \alpha, \tau) = (1 + \tau) \frac{\partial u}{\partial s} + F(u, \alpha).$$

Derivando em relação a  $\alpha$  obtemos,

$$\Phi_\alpha(u, \alpha, \tau) = \frac{\partial F}{\partial \alpha}(u, \alpha).$$

Em particular temos que

$$\Phi_\alpha(0, \alpha, \tau) = 0, \quad d\Phi_\alpha(0)v_1 = A_\alpha(0)v_1.$$

Portanto (4.33) fica na forma

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \alpha \partial x} = \langle v_1^*, A_\alpha(0)v_1 \rangle.$$

Como,

$$A_\alpha(0)v_1 = \frac{\partial \mu}{\partial \alpha}(0)v_1 \quad \text{e } \langle v_1^*, v_1 \rangle = 1$$

segue que,

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha}(0, 0) = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \alpha \partial x}(0, 0, 0, 0) = \frac{\partial \mu(0)}{\partial \alpha} \neq 0$$

e concluimos a prova da afirmação.

Utilizando o Lema 4.2.4, podemos aplicar o Teorema da Função Implícita e obter que a solução de  $r(x^2, \alpha_0) = 0$  pode ser expressa por  $\alpha_0 = \alpha_0(x^2)$ , em uma vizinhança de  $(x, \alpha_0) = (0, 0)$ . Isto significa que para cada valor de  $x > 0$ , próximo de  $x = 0$ , existe um único  $\alpha = \alpha(x^2)$  de forma que  $r(x^2, \alpha) = 0$ , ou seja, existe uma órbita periódica de amplitude maior que 0. Com isto encontramos uma família a um parâmetro parametrizada por  $x > 0$  que bifurca da solução trivial  $u = 0$ .

■

# Capítulo 5

## Aplicação dos resultados e comparação dos métodos

### 5.1 Apresentação do problema

O estudo realizado neste capítulo foi baseado em [?]

As redes reguladoras são coleções de interações de moléculas em uma célula. Proteínas, RNA e DNA agem um sobre o outro para controlar os processos celulares e as respostas às alterações no ambiente. Um tipo particular são as redes oscilatórias que estão sendo descobertas em muitos processos biológicos.

Nos últimos anos, pesquisas tem tornado possível implementar redes oscilatórias artificiais em laboratórios. Estudar esses modelos simplificados é um importante passo para entender a vida real das redes. Os estudos sugerem *designs* para uma rede oscilatória artificial.

Iremos estudar uma rede oscilatória artificial conhecida como *Repressilator*, que consiste de uma rede de três proteínas, cada uma das quais reprime ciclicamente a transcrição da seguinte.

Estudaremos o comportamento da seguinte família à um parâmetro de equações diferenciais.

**Definição 5.1.1.** *Seja  $n$  um inteiro positivo, para  $\alpha > 0$  as equações do Reprissilator são*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{1+y^n} - x, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\alpha}{1+z^n} - y, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{\alpha}{1+x^n} - z, \end{cases} \quad (5.1)$$

com  $x, y, z \geq 0$ .

Esta é a versão resumida do modelo, no qual três das seis relações estão assumidas. A redução assume que as três variáveis excluídas envolvem numa certa ordem de grandeza mais rápida do que as outras três.

Note que, devido a simetria das coordenadas, os pontos de equilíbrio são da forma  $R = (r, r, r)$ , onde  $r$  satisfaz

$$\frac{\alpha}{1+r^n} = r, \quad (5.2)$$

isto é,

$$r^{n+1} + r - \alpha = 0.$$

A matriz Jacobiana de (5.1) é dada por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{-n\alpha y^{n-1}}{(1+y^n)^2} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{-n\alpha z^{n-1}}{(1+z^n)^2} \\ \frac{-n\alpha x^{n-1}}{(1+x^n)^2} & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e calculada no ponto de equilíbrio  $R$

$$A(r, r, r) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{-n\alpha r^{n-1}}{(1+r^n)^2} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{-n\alpha r^{n-1}}{(1+r^n)^2} \\ \frac{-n\alpha r^{n-1}}{(1+r^n)^2} & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

O polinômio característico desta matriz é

$$P(\lambda) = -(1+\lambda)^3 + a^3, \quad a = \frac{-n\alpha r^{n-1}}{(1+r^n)^2},$$

com raízes

$$\lambda = w \frac{nr^n}{1+r^n} - 1, \quad w^3 = -1. \quad (5.4)$$

Temos que

$$w^3 = -1 \Rightarrow w = -1, \quad w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad w = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Note que para qualquer valor de  $n > 0$  o autovalor correspondendo a  $w = -1$  é negativo.

Verifiquemos agora os autovalores correspondendo a

$$w = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Utilizando a equação (5.4) é fácil ver que, para  $n = 1$  e  $n = 2$  os autovalores complexos conjugados terão partes reais negativas. Logo,  $R$  em ambos casos é atrator.

Para o caso  $n > 2$ , dependendo do valor de  $r$ , a parte real pode ser negativa ou positiva, vamos tratá-lo separadamente.

A parte real dos autovalores é dada por

$$\operatorname{Re}\lambda = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{nr^n}{1+r^n} - 1 = \frac{n}{2} \cdot \frac{r^n}{1+r^n}, \quad (5.5)$$

fazendo (5.5) igual a zero, obtemos

$$r_0 = \sqrt[n]{\frac{2}{n-2}}. \quad (5.6)$$

Para  $r < r_0$  as parte reais dos autovalores são negativas e para  $r > r_0$  as partes reais do autovalores são positivas.

Em particular, para o único parâmetro

$$\alpha_0 = r_0^{n+1} + r_0$$

a linearização de (5.1) tem dois autovalores imaginários puros, condição necessária para que a bifurcação de Hopf ocorra. Para verificarmos que de fato ela ocorre e estudá-la, utilizaremos os resultados obtidos pelo Método da Projeção e o Método da Redução de Lyapunov-Schmidt, o Teorema da Forma Normal de Hopf e o Teorema de Hopf, respectivamente.

## 5.2 Estudo da bifurcação via Teorema de Hopf

Iremos aplicar o Teorema de Hopf visto no Capítulo 4. Para isso, verifiquemos se a condição de transversalidade é satisfeita.

De (5.2) temos para  $n > 0$  fixo e  $r > 0$

$$\frac{\alpha}{1 + r^n} = r.$$

**Afirmção** A aplicação

$$\alpha : (0, \infty) \mapsto (0, \infty), \quad \alpha(r) = r + r^{n+1}, \quad (5.7)$$

é invertível.

De fato, basta observar que a aplicação é estritamente crescente e injetora, logo invertível.

Da afirmação acima, concluímos que a aplicação inversa está bem definida, com derivada em relação a  $\alpha$  dada por

$$\frac{1}{1 + (n + 1)r^n}. \quad (5.8)$$

De (5.5)

$$\operatorname{Re} \lambda = \frac{n}{2} \cdot \left( \frac{r^n}{1 + r^n} \right) - 1.$$

Utilizando (5.2), e derivando a expressão obtida em relação a  $\alpha$ , temos

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda}{\partial \alpha} = \frac{n}{2\alpha^2} \left( -\alpha \frac{\partial r}{\partial \alpha} + r \right).$$

Vamos supor que

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda}{\partial \alpha} = 0.$$

Como  $n/2\alpha^2 > 0$ , pois  $\alpha > 0$  e  $r > 0$ , segue que

$$\left( \frac{n}{2\alpha^2} \right) \left( -\alpha \frac{\partial r}{\partial \alpha} + r \right) = 0 \Leftrightarrow \left( -\alpha \frac{\partial r}{\partial \alpha} + r \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial r}{\partial \alpha} = \frac{r}{\alpha}.$$

Utilizando (5.8),

$$\frac{1}{1 + (n + 1)r^n} = \frac{r}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = r[1 + (n + 1)r^n],$$

de (5.2), temos

$$\alpha = r[1 + (n + 1)r^n] \Leftrightarrow \alpha + nr^{n+1} = \alpha \Leftrightarrow nr^{n+1} = 0,$$

o que é uma contradição, pois  $nr^{n+1} > 0$ .

Concluimos que

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda(\alpha)}{\partial \alpha} \neq 0,$$

para todo valor de  $\alpha$ , em particular para  $\alpha = \alpha_0$ .

Aplicando o Teorema de Hopf, segue que existe uma família de órbitas periódicas a um parâmetro que bifurca do ponto de equilíbrio  $(r_0, r_0, r_0)$  quando  $\alpha = \alpha_0$ .

### 5.3 Estudo da bifurcação via Teorema da Forma Normal de Hopf

Primeiramente, vamos escrever o campo de vetores do sistema (5.1) na forma

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)) = \left( \frac{\alpha}{1 + y^n} - x, \frac{\alpha}{1 + z^n} - y, \frac{\alpha}{1 + x^n} - z \right).$$

Iremos supor

$$F(x, y, z) = A(x, y, z) + \frac{1}{2!}B((x, y, z), (x, y, z)) + \frac{1}{3!}C((x, y, z), (x, y, z), (x, y, z)) + O(\| (x, y, z) \|^4),$$

onde  $A$  é a matriz Jacobiana calculada no ponto  $(r_0, r_0, r_0)$  dada por

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

com autovalores  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{3}i$ , e  $B$  e  $C$  funções bilineares e trilineares respectivamente, com componentes

$$B_1((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = f_{yy} \Big|_{x,y,z=r_0} y_1 y_2,$$

$$\begin{aligned}
B_2((x_1, y_1 z_1), (x_2, y_2, z_2)) &= g_{zz} \Big|_{x,y,z=r_0} z_1 z_2, \\
B_3((x_1, y_1 z_1), (x_2, y_2, z_2)) &= h_{xx} \Big|_{x,y,z=r_0} x_1 x_2, \\
C_1((x_1, y_1 z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)) &= f_{yyy} \Big|_{x,y,z=r_0} y_1 y_2 y_3, \\
C_2((x_1, y_1 z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_1, y_3, z_3)) &= g_{zzz} \Big|_{x,y,z=r_0} z_1 z_2 z_3, \\
C_3((x_1, y_1 z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)) &= h_{xxx} \Big|_{x,y,z=r_0} x_1 x_2 x_3.
\end{aligned}$$

onde  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$  e

$$\begin{aligned}
f_y(x, y, z) &= \frac{\alpha n y^{n-1}}{(1+y^n)^2}, \\
f_{yy}(x, y, z) &= n\alpha \frac{(n+1)y^{2n-2} - (n-1)y^{n-2}^3}{(1+y^n)}, \\
f_{yyy} &= -n\alpha \frac{(n^2 + 3n + 2)y^{3n-3} - (4n^2 - 4)y^{2n-3} - (n^2 - 3n - 2)y^{n-3}}{(1+y^n)^4}.
\end{aligned}$$

Procederemos da seguinte maneira. Primeiramente, calcularemos expressões explícitas para  $B$  e  $C$ ; em seguida encontraremos os vetores  $p$  e  $q$ , tais que  $Aq = \sqrt{3}iq$  e  $A^t p = -\sqrt{3}ip$ , satisfazendo a normalização  $\langle p, q \rangle = 1$ . Finalmente, calcularemos as expressões de (3.15), e a partir desta calcularemos o primeiro coeficiente de Lyapunov para  $\alpha = \alpha_0$ .

Para o cálculo de  $B_1$ , tomemos

$$y = r_0 \quad \text{e} \quad r_0 = \sqrt[n]{\frac{2}{n-2}},$$

em  $f_{yy}$ , e utilizando a relação

$$r_0 = \frac{\alpha}{1+r_0^n}$$

obtemos

$$B_1((x_1, y_1 z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \frac{2}{r_0} y_1 y_2.$$

Por simetria, este é também o coeficiente de  $B_2$  e  $B_3$ , então a função bilinear  $B$  é dada por

$$B((x_1, y_1 z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \frac{2}{r_0}(5 - n)(y_1 y_2, z_1 z_2, x_1 x_2).$$

Para o cálculo de  $C_1$ , tomemos

$$y = r_0 \quad \text{e} \quad r_0 = \sqrt[n]{\frac{2}{n-2}}$$

na expressão de  $f_{yyy}$ , e utilizando a relação

$$r_0 = \frac{\alpha}{1 + r_0^n},$$

segue que

$$C_1((x_1, y_1 z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)) = \frac{2}{r_0^2}(-n^2 + 15n + 38)y_1 y_2 y_3.$$

Por simetria este também é o coeficiente de  $C_2$  e  $C_3$ , então a função trilinear  $C$  é dada por

$$C((x_1, y_1 z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_1, y_3, z_3)) = \frac{2}{r_0^2}(-n^2 + 15n + 38)(y_1 y_2 y_3, z_1 z_2 z_3, x_1 x_2 x_3).$$

Os vetores  $p$  e  $q$  são dados por

$$p = q = \left( \frac{w^2}{\sqrt{3}}, \frac{w}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \text{ onde } \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

Utilizando (3.15), temos

$$l_1(\alpha_0) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{Re} \left[ \bar{p} \cdot C(q, q, \bar{q}) - 2\bar{p} \cdot B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) + \bar{p} \cdot B(\bar{q}, (2\sqrt{3}iI - A)^{-1}B(q, q)) \right]. \quad (5.9)$$

Calculemos as quantidades envolvidas em (5.9)

$$B(q, q) = \frac{2}{3r_0}(5 - n)(w^2, 1, w), \quad B(q, \bar{q}) = \frac{2(5 - n)}{3r_0}(1, 1, 1).$$

Para as outras expressões envolvendo  $B$  encontramos as matrizes inversas

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

e

$$(2\sqrt{3}I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{62} - \frac{34\sqrt{3}i}{189} & \frac{10}{63} + \frac{8\sqrt{3}i}{189} & -\frac{4}{63} + \frac{8\sqrt{3}i}{189} \\ -\frac{4}{63} + \frac{8\sqrt{3}i}{189} & \frac{3}{63} - \frac{34\sqrt{3}i}{189} & \frac{10}{63} + \frac{8\sqrt{3}i}{189} \\ \frac{10}{63} + \frac{8\sqrt{3}i}{189} & -\frac{4}{63} + \frac{8\sqrt{3}i}{189} & -\frac{3}{63} - \frac{34\sqrt{3}i}{189} \end{pmatrix}.$$

Assim, segue que

$$A^{-1}B(q, \bar{q}) = \frac{-2(5-n)}{9r_0^2}(1, 1, 1),$$

$$(2\sqrt{3}iI - A^{-1})B(q, q) = \frac{-(5-n)}{27r_0} \left( 1 - \frac{i}{\sqrt{3}}, 6 - \frac{4\sqrt{3}i}{7}, -3 - \sqrt{3}i \right).$$

Então,

$$B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) = \frac{-4\sqrt{3}(5-n)^2}{27r_0^2}(w, 1, w^2),$$

$$B(\bar{q}, (2\sqrt{3}i - A)^{-1}B(q, q)) = \frac{-2\sqrt{3}(5-n)^2}{27r_0^2} \left( 1 - \frac{i}{\sqrt{3}i}, -1 - \frac{i}{\sqrt{3}i}, \frac{2}{\sqrt{3}}i \right).$$

e

$$C(q, q, \bar{q}) = \frac{\sqrt{3}}{9r_0^2}(n^2 - 15n + 38)(1 - \sqrt{3}i, -2, 1 + \sqrt{3}i).$$

Os produtos internos são

$$\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle = \frac{n^2 - 15n + 38}{3r_0^2}(1 + \sqrt{3}i), \quad (5.10)$$

$$\langle \bar{p}, B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle = \frac{2(5-n)^2}{9r_0^2}(1 + \sqrt{3}i), \quad (5.11)$$

$$\langle \bar{p}, (\bar{q}, (2\sqrt{3}i - A)^{-1}B(q, q)) \rangle = \frac{-4(5-n)^2i}{9\sqrt{3}r_0^2}. \quad (5.12)$$

Substituindo os valores (5.10), (5.11) e (5.12) em (5.9)

$$\begin{aligned} l_1(\alpha_0) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{Re} \left( \frac{n^2 - 15n + 38}{3r_0^2} - \frac{4(5-n)^2}{9r_0^2}(1 + \sqrt{3}i) + \bar{p} \frac{-4(5-n)^2i}{9\sqrt{3}r_0^2} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \frac{n^2 - 15n + 38}{3r_0^2} - \frac{4(5-n)^2}{9r_0^2}(1 + \sqrt{3}i) \right) \\ &= \frac{1}{18\sqrt{3}r_0^2}(-n^2 + 5n + 14) \\ &= -\frac{n^2 + 5n - 14}{18\sqrt{3}r_0^2}. \end{aligned}$$

**Afirmação:**  $l_1(\alpha_0) \neq 0$  para  $n > 2$ .

De fato,

$$-\frac{n^2 + 5n - 14}{18\sqrt{3}r_0^2} = 0 \Leftrightarrow (n^2 + 5n - 14) = 0,$$

isto ocorre quando  $n = 2$  e  $n = -7$ , como estamos considerando  $n > 2$  a afirmação é verdadeira.

Na seção anterior já verificamos que (5.1) satisfaz a condição de transversalidade.

Assim, estamos nas condições do Teorema da Forma Normal de Hopf, donde concluímos que o sistema (5.1) apresenta uma bifurcação de Hopf, para  $n > 2$ , quando  $\alpha = \alpha_0 = r_0^{n+1} + r_0$ , onde  $r_0 = \sqrt[n]{2/(n-2)}$ .

Aplicando o Corolário 2.2.1, concluímos que para cada  $\alpha > \alpha_0$ , porém suficientemente próximo de  $\alpha_0$ , existe um único ciclo limite estável.

## 5.4 Extensão do Modelo

Nesta seção iremos estender o modelo do *Repressilator*. Para isso faremos  $n \in \mathbb{R}^+$ , no caso anterior tínhamos  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Nosso objetivo é apresentar o diagrama da bifurcação correspondente a esta bifurcação de Hopf. Notemos que todas as considerações feitas anteriormente para a aplicação dos métodos continuam válidas quando fazemos a extensão.

Como vimos o polinômio característico da matriz Jacobiana do sistema aplicada no ponto  $(r, r, r)$  é dado por

$$P(\lambda) = -(1 + \lambda)^3 + a^3,$$

onde

$$a = \frac{-nr^n}{1 + r^n}.$$

Vamos verificar se

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + (1 - a^3) = 0,$$

tem raízes complexas com partes reais nulas, para isso vamos aplicar o Critério de Hurwitz.

Temos

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 1 - \left( \frac{-nr^n}{1+r^n} \right)^3.$$

Note que todos os coeficientes são positivos, aplicando o critério temos a seguinte relação

$$9 = 1 - \left( \frac{-nr^n}{1+r^n} \right)^3,$$

essa expressão nos dá a curva de Hopf, que está ilustrada na Figura 5.1.

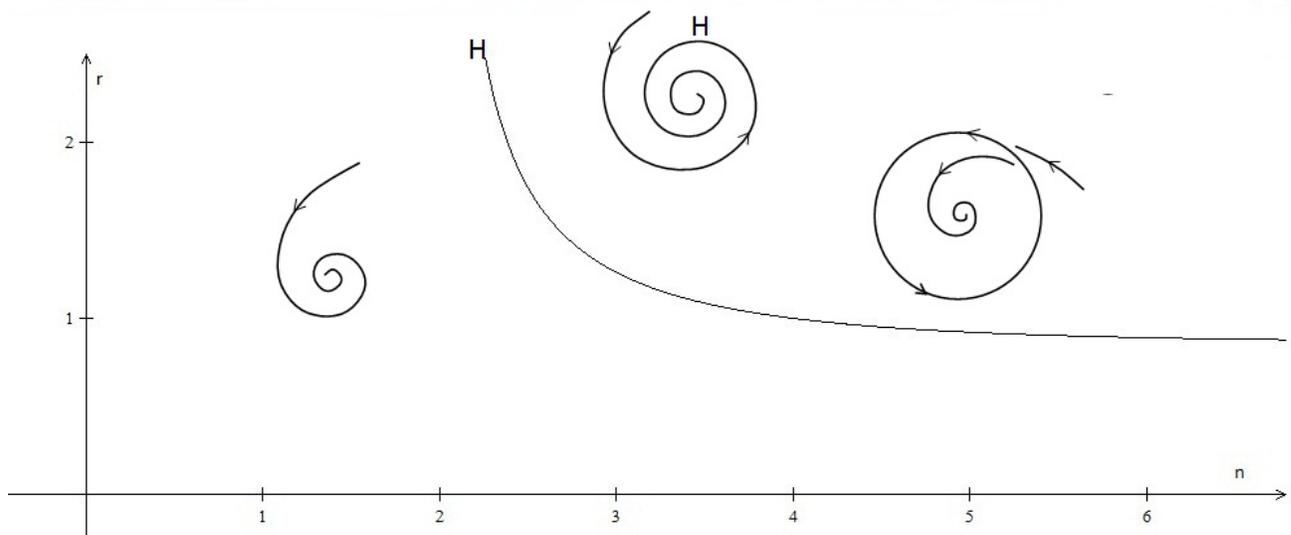


Figura 5.1: Curva de Hopf.

**Observação 5.4.1.** a) Se tomarmos  $P = (n, r)$  abaixo da curva, porém suficientemente próximo dela, aplicando (5.7) em  $P$  obtemos um único  $\alpha$ , este é menor que  $\alpha_0$ . Como vimos, para esse caso, o ponto de equilíbrio  $(r, r, r)$  é uma foco atrator.

b) Porém, tomando  $P$  acima da curva, porém suficientemente próximo dela, aplicando (5.7) em  $P$  obtemos um único  $\alpha$ , o qual é maior que  $\alpha_0$ . Para este caso, o ponto de equilíbrio  $(r, r, r)$  é uma foco repulsor isolado por um ciclo limite estável (resultante da bifurcação de Hopf).

c) Para  $P$  sobre a curva, o parâmetro  $\alpha$  obtido é um parâmetro crítico e  $(r_0, r_0, r_0)$  é assintoticamente estável.

## 5.5 Comparação dos Métodos

Nos Capítulos 3 e 4 aplicamos o Método da Projeção e a Redução de Lyapunov-Schmidt para estudarmos a bifurcação de Hopf em sistemas  $n$ -dimensionais, com  $n > 2$ . A aplicação de ambos é trabalhosa, pois envolvem conceitos e resultados não triviais de Álgebra Linear e Análise, como o Teorema da Variedade Central e o Teorema da Função Implícita.

O Método da Redução de Lyapunov-Schmidt é utilizado para demonstrar o Teorema de Hopf, a partir do qual obtemos informações sobre a bifurcação. A aplicação do método é complicada, pois envolve a construção de um operador  $\Phi$  e aplicação de 5 passos, sendo que os dois últimos envolvem o Teorema da Função Implícita e escolha de bases convenientes.

Já o Método da Projeção nos fornece uma maneira de restringir o sistema à sua variedade central bidimensional, e assim podemos utilizar todos os resultados sobre bifurcação de Hopf em sistemas bidimensionais. A partir desse método obtivemos fórmulas explícitas para o cálculo do primeiro coeficiente de Lyapunov do sistema e a condição de transversalidade, as quais dependem apenas das componentes do campo vetores e autovetores associados a matriz jacobiana do sistema no ponto de equilíbrio e sua adjunta.

Observemos que o Método de Redução de Lyapunov-Schmidt nos fornece o Teorema de Hopf para estudar a bifurcação e o método da Projeção nos fornece Teorema da Forma Normal de Hopf.

Note que, para aplicarmos o Teorema da Forma Normal de Hopf, devemos verificar uma hipótese a mais em relação ao Teorema de Hopf, isto é, devemos verificar que o coeficiente de Lyapunov é não nulo no parâmetro de bifurcação. Estes cálculos como vistos em (5.3) podem ser tediosos e complicados, porém este teorema nos fornece mais informações sobre a bifurcação, uma vez que podemos garantir a existência da bifurcação e saber a estabilidade do ciclo limite a partir do sinal do coeficiente de Lyapunov. Já o Teorema de Hopf nos garante apenas a existência de uma família de órbitas periódicas à um parâmetro que emana do ponto de equilíbrio do sistema.

Assim, podemos dizer que a aplicação do Método da Projeção é "melhor" que a do Método de Lyapunov-Schmidt, no sentido de que a partir do primeiro obtemos um resultado que nos permite obter mais informações sobre a bifurcação, o que pode ser observado nas Seções (5.2) e (5.3).

# Capítulo 6

## Bifurcação de Bautin

Neste capítulo estudaremos a Bifurcação de Hopf de codimensão 2, também conhecida como Bifurcação de Bautin.

Esta bifurcação é caracterizada pela existência de até dois ciclos limites locais, de estabilidades opostas, para valores adequados do parâmetro. Estes ciclos colidem e desaparecem ao longo de uma curva que emana do ponto de codimensão 2 (**Ponto de Bautin**).

Iniciaremos nosso estudo com o caso bidimensional, cujo estudo foi baseado em [8].

### 6.1 Bifurcação de Bautin no plano

Considere o sistema de equações diferenciais dependendo do parâmetro  $\alpha$

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.1)$$

com  $f$  suave tendo para  $\alpha = 0$  equilíbrio em  $x = 0$  satisfazendo as seguintes condições:

- 1) em  $\alpha = 0$  o equilíbrio tem autovalores imaginários puros,  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$ ,
- 2) a condição de transversalidade é satisfeita, ou seja,  $\mu'(0) \neq 0$ ,

- 3) o primeiro coeficiente do Lyapunov avaliado no parâmetro de bifurcação é nulo,  
 $l_1(0) = 0$ .

Sob estas condições dizemos que o sistema (6.1) apresenta uma **bifurcação de Bautin**.

Iremos supor, sem perda de generalidade, que o equilíbrio é a origem do sistema. Como na análise da bifurcação de Hopf de codimensão 1, sempre podemos realizar uma mudança de coordenadas que coloca esse equilíbrio em  $x = 0$  para todo  $\alpha$  suficientemente pequeno.

Do Lema 2.2.1, sempre podemos escrever o sistema (6.1) na forma complexa

$$z' = (\mu(\alpha) + i\omega(\alpha))z + g(z, \bar{z}, \alpha),$$

onde  $\mu$ ,  $\omega$  e  $g$  são funções de  $\alpha$ , com  $\mu(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0$  e formalmente

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l,$$

com  $g_{kl}$  funções reais.

**Lema 6.1.1.** (*Forma Normal de Poincaré para a Bifurcação de Bautin*) A equação

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{2 \leq k+l \leq 5} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l + O(\|z\|^6), \quad (6.2)$$

onde  $\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$ ,  $\mu(0) = 0$  e  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ , pode ser transformada através da seguinte mudança de coordenada complexa:

$$z = w + \sum_{2 \leq k \leq 5} \frac{1}{k!} h_{kl} r^k \bar{r}^l, \quad h_{21}(\alpha) = h_{32}(\alpha) = 0$$

para todo  $\alpha$  com  $\|\alpha\|$  suficientemente pequeno, na equação

$$r' = \lambda(\alpha)r + c_1(\alpha)r |r|^2 + c_2(\alpha)r |r|^4 + O(\|r\|^6). \quad (6.3)$$

O lema pode ser provado usando o mesmo método utilizado para provar o Lema 2.2.5 no Capítulo 2. Pelo Lema 2.2.5, podemos assumir que todos os termos quadráticos e termos cúbicos não ressonantes em (6.2) já estão eliminados:  $g_{20} = g_{11} =$

$g_{02} = g_{30} = g_{12} = g_{21} = 0$  e  $c_1 = g_{21}/2$ . Em seguida, através de uma seleção adequada de  $h_{ij}$ , com  $i + j = 4$ , podemos eliminar todos os termos de ordem quatro em (6.2), tendo o coeficiente da ressonância  $c_1(\alpha)$  intocado durante a mudança. Finalmente, podemos remover todos os termos quinta ordem exceto o termo ressonante mostrado na equação (6.3).

Os coeficientes  $c_1$  e  $c_2$  são complexos, o próximo lema nos fornece uma reparametrização do tempo, a partir da qual eles se tornam reais.

**Lema 6.1.2.** *O sistema (6.3) é localmente topologicamente equivalente ao sistema:*

$$r' = (\nu(\alpha) + i)r + l_1(\alpha)r |r|^2 + l_2(\alpha)r |r|^4 + O(\|r\|^6),$$

onde  $\nu(\alpha)$ ,  $l_1(\alpha)$  e  $l_2(\alpha)$  são funções reais com  $\nu(0) = 0$ .

**Demonstração:** Primeiramente, vamos introduzir um novo tempo  $\tau = \omega(\alpha)t$ .

Temos,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= \frac{dw}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ &= [\lambda(\alpha)r + c_1(\alpha)r |r|^2 + c_2(\alpha)r |r|^4 + O(\|r^6\|)] \frac{1}{\omega(\alpha)} \\ &= \frac{\lambda(\alpha)r}{\omega(\alpha)} + \frac{c_1(\alpha)r |r|^2}{\omega(\alpha)} + \frac{c_2(\alpha)r |r|^4}{\omega(\alpha)} + O(\|r^6\|) \\ &= (\nu(\alpha) + i)r + d_1(\alpha)r |r|^2 + d_2(\alpha)r |r|^4 + O(\|r^6\|), \end{aligned}$$

onde

$$\nu(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)}, \quad d_1 = \frac{c_1(\alpha)}{\omega(\alpha)}, \quad d_2(\alpha) = \frac{c_2(\alpha)}{\omega(\alpha)}.$$

Note que a direção do tempo é preservada, pois para  $\|\alpha\|$  suficientemente pequeno próximo da origem temos  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ .

As funções  $\nu$ ,  $d_1$  e  $d_2$  são suaves e  $d_1$  e  $d_2$  são funções a valores complexos. Faremos agora uma reparametrização do tempo ao longo das órbitas introduzindo o novo tempo  $\theta$  tal que:

$$d\tau = (1 + e_1(\alpha) |r|^2 + e_2(\alpha) |r|^4) d\theta,$$

onde  $e_1(\alpha)$  e  $e_2(\alpha)$  são funções reais dadas por:

$$e_1(\alpha) = -\text{Im}d_1(\alpha), \quad e_2(\alpha) = -\text{Im}d_2(\alpha) + [\text{Im}d_1(\alpha)]^2$$

Em termos de  $\theta$  temos

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{d\theta} &= \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{d\theta} \\
&= [\nu(\alpha) + i)r + d_1(\alpha) |r|^2 + d_1(\alpha) + d_2(\alpha)r |r|^4 + O(\|r^6\|)] \\
&\times (1 + e_1(\alpha) |r|^2 + e_2(\alpha) |r|^4) \\
&= (\nu(\alpha) + i)r + [\nu(\alpha) + i)e_1(\alpha) + d_1(\alpha)] r |r|^2 \\
&+ [\nu(\alpha) + i)e_2(\alpha) + d_1(\alpha)e_1(\alpha) + d_2(\alpha)] r |r|^4 + O(\|r^6\|).
\end{aligned}$$

Tomemos

$$l_1(\alpha) = (\nu(\alpha) + i)e_1(\alpha) + d_1(\alpha),$$

e

$$l_2(\alpha) = (\nu(\alpha) + i)e_2(\alpha) + d_1(\alpha)e_1(\alpha) + d_2(\alpha).$$

Escrevendo

$$d_1(\alpha) = \operatorname{Re} d_1(\alpha) + i\operatorname{Im} d_1(\alpha).$$

$$d_2(\alpha) = \operatorname{Re} d_2(\alpha) + i\operatorname{Im} d_2(\alpha),$$

e usando as definições de  $e_1(\alpha)$  e  $e_2(\alpha)$ , segue que:

$$\begin{aligned}
l_1(\alpha) &= (\nu(\alpha) + i)(-\operatorname{Im} d_1(\alpha)) + \operatorname{Re} d_1(\alpha) + i\operatorname{Im} d_1(\alpha) \\
&= -\nu(\alpha)\operatorname{Im} d_1(\alpha) - i\operatorname{Im} d_1(\alpha) + \operatorname{Re} d_1(\alpha) + i\operatorname{Im} d_1(\alpha) \\
&= \operatorname{Re} d_1(\alpha) - \nu(\alpha)\operatorname{Im} d_1(\alpha) = \operatorname{Re} \frac{c_1(\alpha)}{\omega(\alpha)} - \mu(\alpha)\operatorname{Im} \frac{c_1(\alpha)}{\omega(\alpha)^2}
\end{aligned}$$

que é o primeiro coeficiente de Lyapunov. Por outro lado,

$$l_2(\alpha) = \operatorname{Re} d_2(\alpha) - \operatorname{Re} d_1(\alpha)\operatorname{Im} d_1(\alpha) + \nu(\alpha)[(\operatorname{Im} d_1(\alpha))^2 - \operatorname{Im} d_2(\alpha)]$$

e

$$\frac{dr}{d\theta} = (\nu(\alpha) + i)r + l_1(\alpha)r |r|^2 + l_2(\alpha)r |r|^4 + O(\|r^6\|), \quad (6.4)$$

onde  $\nu(\alpha)$ ,  $l_1(\alpha)$  e  $l_2(\alpha)$  são funções suaves e a valores reais. ■

**Definição 6.1.1.** A função real  $l_2(\alpha)$  é chamada de **Segundo coeficiente de Lyapunov**.

Como vimos no Capítulo 2,  $c_1 = c_1(\alpha)$  pode ser calculado pela fórmula

$$c_1(\alpha) = \frac{g_{21}}{2} + \frac{g_{20}g_{11}(2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})},$$

onde  $\lambda = \lambda(\alpha)$  e  $g_{kl} = g_{kl}(\alpha)$ .

Da bifurcação de Bautin temos que  $l_1(0) = 0$  e  $\mu(0) = 0$ , segue que

$$l_2(0) = \operatorname{Re} d_2(0) = \operatorname{Re} \frac{c_2(0)}{\omega_0}.$$

De modo análogo como calculamos  $c_1(0)$  podemos calcular o coeficiente  $c_2(0)$ , e assim calcular  $l_2(0)$ . Obtendo o seguinte lema.

**Lema 6.1.3.** *O segundo coeficiente de Lyapunov do sistema (6.4) é dado por*

$$\begin{aligned} 12l_2(0) &= \frac{1}{\omega_0} \operatorname{Re} g_{32} + \frac{1}{\omega_0^2} \operatorname{Im} [g_{20}\bar{g}_{31} - g_{11}(4g_{31} + 3\bar{g}_{22}) - \frac{1}{3}(g_{02}g_{40} + \bar{g}_{13}) \\ &\quad - g_{30}g_{12}] + \frac{1}{\omega_0^3} \{ \operatorname{Re} [g_{20}\bar{g}_{11}(3g_{12} - \bar{g}_{30}) + g_{02}(\bar{g}_{12} - \frac{1}{3}g_{30}) + \frac{1}{3}\bar{g}_{02}g_{03}) \\ &\quad + g_{11}\bar{g}_{02}(\frac{5}{3}\bar{g}_{30} + 3g_{12}) + \frac{1}{3}g_{02}\bar{g}_{03} - 4g_{11}g_{30}] + 3\operatorname{Im} g_{20}g_{11} \operatorname{Im} g_{21} \} \\ &\quad + \frac{1}{\omega_0^4} \{ \operatorname{Im} [g_{11}\bar{g}_{02}(\bar{g}_{20} - 3\bar{g}_{20}g_{11} - 4g_{11}^2)] + \operatorname{Im}(g_{20}g_{11}) [3\operatorname{Re}(g_{20}g_{11}) \\ &\quad - 2|g_{02}|^2] \}. \end{aligned}$$

**Definição 6.1.2.** *Um ponto de Bautin é um ponto  $(x_0, \alpha_0)$  de um sistema, tal que  $A = Df(x_0, \alpha_0)$  possui dois autovalores da forma  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$  e nenhum outro autovalor crítico,  $l_1(\alpha_0) = 0$  e  $l_2(\alpha_0) \neq 0$ .*

Para o sistema (6.1) o ponto de Bautin é o ponto formado pela origem do sistema e o parâmetro  $\alpha = 0$ . Suponha que neste ponto  $l_2(0) \neq 0$ . Podemos parametrizar uma vizinhança de  $\alpha = 0$ , suficientemente pequena, por dois novos parâmetros,  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , tais que  $\eta_1(\alpha) = \mu(\alpha)$ , assim quando tomamos  $\alpha = 0$  este parâmetro representa a condição necessária para que a bifurcação de Hopf ocorra. O segundo parâmetro tomamos como sendo  $\eta_2(\alpha) = l_1(\alpha)$ . Portanto a anulação simultânea de ambos especifica o ponto de Bautin.

Vamos assumir a regularidade em  $\alpha = 0$ , ou seja,

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \eta}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial l_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial l_1}{\partial \alpha_2} \end{array} \right|_{(\alpha=0)} = \frac{1}{\omega_0} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial l_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial l_1}{\partial \alpha_2} \end{array} \right|_{(\alpha=0)} \neq 0.$$

Como  $\omega_0 \neq 0$ , o Teorema na Função Inversa nos garante que podemos escrever  $\alpha$  em função de  $\eta$ , obtendo a equação

$$r' = (\eta_1 + i)r + \eta_2 r |r|^2 + L_2(\eta)r |r|^4 + O(|r|^6),$$

onde  $L_2(\eta) = l_2(\alpha(\eta))$  é uma função suave de  $\eta$  tal que  $L_2(0) = l_2(0) \neq 0$ .

Introduzindo uma nova variável complexa  $r = \sqrt[4]{|L_2(\eta)|} u$ , e definindo os parâmetros

$$\begin{cases} \beta_1 = \eta_1, \\ \beta_2 = \sqrt{|L_2(\eta)|} \eta_2, \end{cases}$$

obtemos

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta_1 + i)u + \beta_2 u |u|^2 + su |u|^4 + O(|u|^6), \quad (6.5)$$

onde  $s = \text{sinal } l_2(0) = \pm 1$ .

Podemos resumir os resultados obtidos no seguinte teorema.

**Teorema 6.1.1.** *Considere o sistema*

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

com  $f$  suave, tendo no equilíbrio  $x = 0$  autovalores

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

para todo  $\|\alpha\|$  suficientemente pequeno, onde  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ . Suponha ainda que para  $\alpha = 0$ , sejam verificadas as hipóteses:  $\mu(0) = 0$  e  $l_1(0) = 0$ . Assuma ainda que as seguintes condições de genericidade são satisfeitas:

- 1)  $l_2(0) \neq 0$ , onde  $l_2(0)$  é o segundo coeficiente de Lyapunov;
- 2) a aplicação  $\alpha \rightarrow (\mu(\alpha), l_1(\alpha))$  é regular em  $\alpha = 0$ .

Então, através da introdução de uma nova variável complexa e uma reparametrização do tempo, o sistema pode ser reduzido à uma das seguintes formas complexas:

$$z' = (\beta_1 + i)z + \beta_2 z |z|^2 + sz |z|^4 + O(|z|^6)$$

onde  $s = \text{sign} l_2(0) = \pm 1$ .

**Lema 6.1.4.** *O sistema*

$$z' = (\beta_1 + i)z + \beta_2 z |z|^2 + sz |z|^4 + O(|z|^6)$$

*é localmente topologicamente equivalente perto da origem ao sistema.*

$$z' = (\beta_1 + i)z + \beta_2 z |z|^2 \pm z |z|^4.$$

Munidos com o Lema 6.1.4 podemos eliminar os termos de ordem maior e enunciar o resultado geral.

**Lema 6.1.5.** *(Forma Normal da Bifurcação de Bautin) Qualquer sistema planar a dois parâmetros*

$$x' = f(x, \alpha),$$

*tendo em  $\alpha = 0$  um equilíbrio  $x_0 = 0$  que exibe uma bifurcação de Bautin, é localmente topologicamente equivalente perto da origem a uma das formas normais complexas*

$$z' = (\beta_1 + i)z + \beta_2 z |z|^2 \pm z |z|^4.$$

Este teorema nos diz que a forma normal capta a topologia de qualquer sistema que apresenta uma bifurcação de Bautin e satisfaz as condições de genericidade.

Para melhor compreendermos o caráter geométrico da bifurcação de Bautin iremos estudar seu diagrama de bifurcação, que encontra-se ilustrado na Figura 6.1.

### 6.1.1 Diagrama de Bifurcação da forma normal

Consideremos a forma complexa com sinal negativo e escrevendo-a em coordenadas polares  $(\rho, \phi)$ , onde  $z = \rho e^{i\phi}$ , obtemos

$$\begin{cases} \rho' = \rho(\beta_1 + \beta_2\rho^2 - \rho^4), \\ \phi' = 1. \end{cases} \quad (6.6)$$

Note que as equações do sistema (6.6) são desacopladas. Analisando a primeira equação verificamos a existência de dois pontos de equilíbrio. O equilíbrio  $\rho = 0$  corresponde ao único equilíbrio,  $z = 0$ , do sistema truncado, e o equilíbrio

$$\beta_1 + \beta_2\rho^2 - \rho^4 = 0 \quad (6.7)$$

descreve ciclos limites circulares.

Note que a equação (6.7) pode ter duas, uma ou nenhuma solução positiva (ciclos). Estas soluções são triviais ao longo da linha  $H = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0\}$  e colidem e desaparecem na meia parábola

$$T = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_2^2 + 4\beta_1 = 0, \beta_2 > 0\}.$$

O diagrama de Bifurcação é retratado na figura 6.1. A linha  $H$  corresponde a Bifurcação de Hopf, ao longo desta linha o equilíbrio tem autovalores  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Para  $\beta_1 < 0$  o equilíbrio é estável e para  $\beta_1 > 0$  o equilíbrio é instável.

O primeiro coeficiente de Lyapunov é representado pelo parâmetro  $\beta_2$ , assim o ponto de Bautin ( $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ) separa  $H$  em dois ramos  $H^+$  e  $H^-$ , o que corresponde a uma bifurcação de Hopf com coeficiente negativo e positivo, respectivamente. Um ciclo limite estável bifurca do equilíbrio se cruzarmos  $H^-$  da esquerda para a direita, enquanto um ciclo limite instável aparece se cruzarmos  $H^+$  na direção oposta. Os ciclos colidem e desaparecem na curva  $T$ , correspondendo a bifurcação sela nó de ciclos. Ao longo dessa curva o sistema tem um ciclo limite semi estável.

As curvas dividem o plano de parâmetro em três regiões, veja Figura (6.1).

Para um melhor entendimento do diagrama de Bifurcação, vamos fazer uma excursão no plano de parâmetros em torno do ponto de Bautin, começaremos em um ponto na região 1 onde o sistema tem um equilíbrio estável simples e não tem ciclos.

Cruzando a fronteira da região  $H^+$  da região 1 para a região 2 implica o aparecimento de um ciclo limite estável, que se mantém quando entramos na região 3. Cruzando a fronteira da região  $H^+$  aparece um ciclo limite instável dentro do ciclo limite estável, onde o equilíbrio troca de estabilidade. Existem dois ciclos limites de estabilidades opostas dentro da região 3 que desaparecem ao longo da curva  $T$  através de uma bifurcação dobra de ciclos que deixa um único equilíbrio estável, completando assim o ciclo.

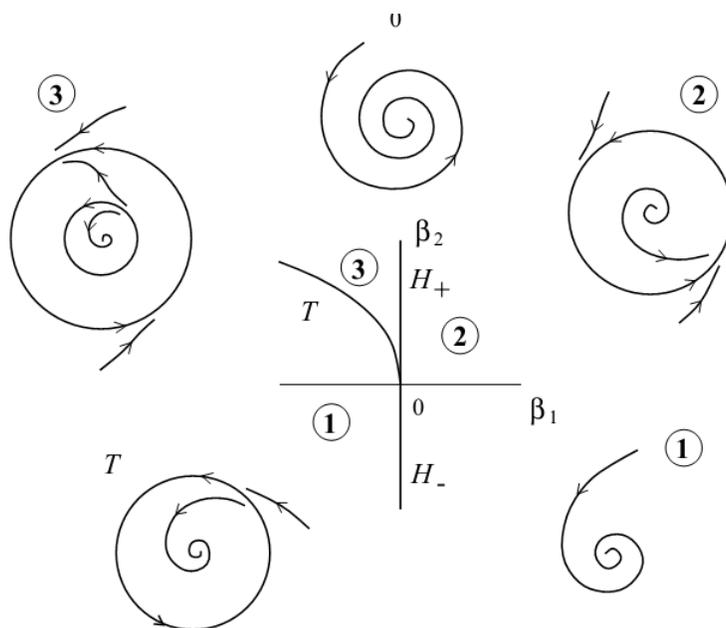


Figura 6.1: Diagrama da bifurcação de Bautin.

## 6.2 Bifurcação de Bautin em sistemas $n$ -dimensionais

Aplicaremos agora o Método da Projeção para estudar a bifurcação Hopf em sistemas  $n$ -dimensionais, com  $n \geq 2$ . A principal referência utilizada foi ???. Considere o sistema

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \quad (6.8)$$

Suponha que (6.8) tenha um equilíbrio na origem quando  $\alpha = 0$  e vamos representar  $F(x) = f(x, 0)$  da forma:

$$F(x) = Ax + \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + \frac{1}{24}D(x, x, x, x) + \frac{1}{120}E(x, x, x, x, x) + O(\|x\|^6), \quad (6.9)$$

onde  $Ax = f(0, 0)$  e

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 F_i(\epsilon)}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_k} \Big|_{\epsilon=0} x_j y_k, \quad C_i(x, y, z) = \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial^3 F_i(\epsilon)}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_k \partial \epsilon_l} \Big|_{\epsilon=0} x_j y_k z_l,$$

$$D_i(x, y, z, v) = \sum_{j,k,l,m=1}^n \frac{\partial^4 F_i(\epsilon)}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_k \partial \epsilon_l \partial \epsilon_m} \Big|_{\epsilon=0} x_j y_k z_l v_m,$$

$$E_i(x, y, z, v, w) = \sum_{j,k,l,m,s=1}^n \frac{\partial^5 F_i(\epsilon)}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_k \partial \epsilon_l \partial \epsilon_m \partial \epsilon_s} \Big|_{\epsilon=0} x_j y_k z_l v_m w_s,$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n$  com  $x, y, z, v, w \in \mathbb{R}^n$ .

A variedade central para esse tipo de bifurcação é bidimensional e parametrizada por

$$H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (r, \bar{r}) \rightarrow x = H(r, \bar{r})$$

onde

$$H(r, \bar{r}) = rq + r\bar{q} + \sum_{2 \leq j+k \leq 5} \frac{1}{j!k!} h_{jk} r^j \bar{r}^k + O(\|(r, \bar{r})\|^6),$$

com  $h_{jk} \in \mathbb{C}^n$ ,  $h_{jk} = hkj$ ,  $j, k \geq 0$ . A restrição do sistema (6.1) à variedade central para o parâmetro crítico é localmente topologicamente equivalente à forma normal da bifurcação

$$r' = (\beta_1 + i\omega_0)r + \beta_2 r |r|^2 + l_2 r |r|^4.$$

onde  $l_2$  é real. Assim, podemos tomar a restrição da seguinte forma:

$$r' = G(r, \bar{r}) = i\omega_0 r + \frac{1}{2}G_{21}r |r|^2 + \frac{1}{12}G_{32}r |r|^4 + O(|r|^6).$$

Neste caso, a equação homológica é da forma

$$H_r r' + H_{\bar{r}} \bar{r}' = F(H(r, \bar{r})) \quad (6.10)$$

onde  $F$  é dada por (6.9). Basta agora calcularmos as quantidades envolvidas de maneira recorrente utilizando a equação homológica (6.10).

Desenvolvendo o lado direito da equação (6.10)

$$\begin{aligned}
F(H(r, \bar{r})) &= Aqr + A\bar{q}\bar{r} + \frac{1}{2}[Ah_{20} + B(q, q)]r^2 + [Ah_{11} + B(q, \bar{q})]\bar{r}^2 \\
&+ \frac{1}{6}[Ah_{30} + 3B(q, h_{20}) + C(q, q, q)]r^3 \\
&+ \frac{1}{2}[Ah_{21} + C(q, q, \bar{q}) + 2B(q, h_{21}) + B(\bar{q}, h_{20})]r^2\bar{r} \\
&+ \frac{1}{2}[A\bar{h}_{21} + C(q, \bar{q}, \bar{q}) + 2B(\bar{q}, h_{11}) + B(q, \bar{h}_{20})]r\bar{r}^2 \\
&+ \frac{1}{6}[A\bar{h}_{30} + C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + 3B(\bar{q}, \bar{h}_{20})]\bar{r}^3 + \frac{1}{24}[Ah_{40} \\
&+ D(q, q, q, q) + 6C(q, q, h_{20}) + 4B(q, h_{30}) + 3B(h_{20}, h_{20})]r^4 \\
&+ \frac{1}{6}[Ah_{31} + D(q, q, q, \bar{q}) + 3C(q, q, h_{11}) + 3C(q, \bar{q}, h_{20}) \\
&+ 3B(h_{20}, h_{11}) + B(\bar{q}, h_{30}) + 3B(q, h_{21})]r^3\bar{r} \\
&+ \frac{1}{4}[Ah_{22} + D(q, q, \bar{q}, \bar{q}) + 4C(q, \bar{q}, h_{11}) + C(q, \bar{q}, h_{20}) \\
&+ C(q, q, \bar{h}_{20}) + 2B(h_{11}, h_{11}) + 2B(\bar{q}, h_{21}) + B(\bar{h}_{20}, h_{20}) \\
&- 2h_{11}(G_{21} + \bar{G}_{21})]r^2\bar{r}^2. \tag{6.11}
\end{aligned}$$

Desenvolvendo agora o lado esquerdo

$$\begin{aligned}
H_r r' + H_{\bar{r}} \bar{r}' &= i\omega_0 q - i\omega_0 \bar{q} + i\omega_0 h_{20} r^2 - (i\omega_0 \bar{h}_{20}) \bar{r}^2 + \frac{1}{2} i\omega_0 h_{30} r^3 \\
&+ \frac{1}{2} (i\omega h_{21} + G_{21} q) r^2 \bar{r} + \frac{1}{2} (i\omega \bar{h}_{21} + G_{21} \bar{q}) r \bar{r}^2 \\
&- \frac{1}{2} i\omega_0 \bar{h}_{30} \bar{r}^3 + \frac{1}{6} (i\omega h_{40}) r^4 + \frac{1}{3} (i\omega_0 h_{31} + \frac{3}{2} G_{21} h_{20}) r^3 \bar{r} \\
&+ 2h_{11}(G_{21} + \bar{G}_{21}) r^2 \bar{r}^2. \tag{6.12}
\end{aligned}$$

Vamos igualar (6.12) e (6.13) e comparar os coeficientes termo a termo.

Para os termos de segunda ordem

$$Ah_{11} + B(q, \bar{q}) = 0 \Rightarrow h_{11} = -A^{-1}B(q, \bar{q}).$$

e

$$i\omega h_{20} = \frac{1}{2}[Ah_{20} + B(q, q)],$$

resolvendo para  $h_{20}$ , obtemos

$$h_{20} = (2i\omega_0 - A)^{-1}B(q, q).$$

Os termos de terceira ordem:

$$(i\omega_0 I - A)h_{21} = C(q, q, \bar{q}) + B(\bar{q}, h_{20}) + 2B(q, h_{11}) - G_{21}q,$$

o sistema é singular, pois  $i\omega_0$  é autovalor de  $A$ .

Utilizando a condição de Fredholm segue que

$$\langle p, C(q, q, \bar{q}) + B(\bar{q}, h_{20}) + 2B(q, h_{11}) - G_{21}q \rangle = 0,$$

então o coeficiente  $G_{21}$  da forma normal pode ser expresso por

$$G_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) + B(\bar{q}, (2i\omega_0 I - A)^{-1}B(q, q) - 2B(q, A^{-1}B(q, \bar{q}))) \rangle$$

e  $l_1 = \text{Re } G_{21}/2$  coincide com a fórmula que definimos no capítulo 2.

Logo,

$$h_{21} = (i\omega_0 I - A)^{inv} [C(q, q, \bar{q}) + B(\bar{q}, h_{20}) + 2B(q, h_{11}) - G_{21}q], \quad (6.13)$$

onde o vetor complexo  $h_{21}$  satisfaz  $\langle p, h_{21} \rangle = 0$  e pode ser encontrado resolvendo o  $(n + 1)$  dimensional sistema complexo não singular

$$\begin{pmatrix} i\omega_0 I - A & q \\ \bar{p}^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{21} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(q, q, \bar{q}) + B(\bar{q}, h_{20}) + 2B(q, h_{11}) - G_{21}q \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Temos também

$$h_{30} = (3i\omega_0 - A)^{-1}[C(q, q, q) + 3B(q, h_{20})].$$

Os termos de quarta ordem:

$$h_{40} = (4i\omega_0 I - A)^{-1}[D(q, q, q, q) + 6C(q, q, h_{20}) + 4B(q, h_{30}) + 3B(h_{20}, h_{20})],$$

$$\begin{aligned} h_{31} = (2i\omega_0 I - A)^{-1}[D(q, q, q, \bar{q}) + 3C(q, q, h_{11}) + 3C(q, \bar{q}, h_{20}) + 3B(h_{20}, h_{11}) \\ + B(\bar{q}, h_{30}) + 3B(q, h_{21}) - 3G_{21}h_{20}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{22} = -A^{-1}[D(q, q, \bar{q}, \bar{q}) + 4C(q, \bar{q}, h_{11}) + C(q, \bar{q}, h_{20}) + C(q, q, \bar{h}_{20}) + 2B(h_{11}, h_{11}) \\ + 2B(\bar{q}, h_{21}) + B(\bar{h}_{20}, h_{20}) - 2h_{11}(G_{21} + \bar{G}_{21})]. \end{aligned}$$

Dos coeficientes de quinta ordem necessitamos apenas do  $r^3\bar{r}^2$ . Neste caso, recaímos em um sistema não singular, assim, utilizamos a condição de Fredholm e obtemos a seguinte expressão para  $G_{32}$

$$\begin{aligned}
G_{32} = & \langle p, E(q, q, q, \bar{q}, \bar{q}) \\
& + D(q, q, q, \bar{h}_{20}) + 3D(q, \bar{q}, \bar{q}, h_{20}) + 6D(q, q, \bar{q}, h_{11}) \\
& + C(\bar{q}, \bar{q}, h_{30}) + 3C(q, q, \bar{h}_{21}) + 6C(q, \bar{q}, h_{21}) + 3C(q, \bar{h}_{20}, h_{20}) \\
& + 6C(q, h_{11}, h_{11}) + 6C(\bar{q}, h_{20}, h_{11}) \\
& + 2B(\bar{q}, h_{31}) + 3B(q, h_{22}) + B(\bar{h}_{20}, h_{30}) + 3B(\bar{h}_{21}, h_{20}) + 6B(h_{11}, h_{21}) \rangle .
\end{aligned}$$

Segue ainda que

$$l_2 = \frac{1}{12} \text{Re } G_{32}.$$

E concluímos a aplicação do método.

# Conclusões e Trabalhos Futuros

Nesta dissertação estudamos as bifurcações de Hopf de codimensões 1 e 2. Para analisar a bifurcação de codimensão 1 em sistemas de dimensão  $n$ , com  $n > 2$ , utilizamos dois métodos: O Método da Projeção e o Método da Redução de Lyapunov-Schmidt. Concluimos que, a partir do Método da Projeção obtemos um resultado que nos fornece mais informações sobre a bifurcação quando comparado ao resultado obtido com a Redução de Lyapunov-Schmidt.

Para a bifurcação de codimensão 2 aplicamos o Método da Projeção.

Como sugestões para trabalhos futuros podemos citar:

1. Estudar a aplicação do Método de Lyapunov-Schmidt para a bifurcação de Bautin, visando fazer uma comparação com o Método da Projeção para essa bifurcação, feito no Capítulo 5.
2. Aplicar outros métodos para estudar a Bifurcação de Hopf em sistemas  $n$  dimensionais,  $n > 2$ . Dentre eles o método das Aproximações Sucessivas e o Método da Média.

# Bibliografia

- [1] BERGER, M., *Nonlinearity and Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1977.
- [2] BENITO, R., *A Redução de Liapunov-Schmidt e a Bifurcação de Hopf*, Dissertação de Mestrado do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus de São José do Rio Preto, UNESP, (2005).
- [3] BUSE, O., KUZNETSOV, A., *Existence of limit Cycles in the Repressilator equations*, Internat. J. Bifur. Chaos, 12 (2009), 4097-4106.
- [4] CHICONE, C., *Ordinary Differential Equations with Applications*, Applied Mathematical, Springer-Verlag, New York, (1999).
- [5] FARR W.W., LI C., LABOURIAU I.S, LANGFORD, W.F, *Degenerate Hopf bifurcation formulas and Hilbert's 16<sup>th</sup> problem*, SIAM J. Math. Anal., 20 (1989), 13-30.
- [6] HALE, J.K., *Ordinary Differential Equations*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XXI, Wiley-Interscience, New York, (1969).
- [7] KUZNETSOV, Y.A., *Numerical normalization techniques for all codim 2 bifurcations of equilibria in ODE*, SIAM J. Numer. Anal., 36(1999), 1104-1124.
- [8] KUZNETSOV, Y.A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, second edition, Springer-Verlag, New York, (2004).
- [9] PONTRYAGIN, L.S., *Ordinary Differential Equations*, Addison-Wesley Publishing Company, (1962).

- [10] SANTOS, D., *Bifurcação de Hopf num modelo de controle biológico*, Dissertação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, USP, (2004).
- [11] SOTOMAYOR, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (1979).
- [12] SOTOMAYOR, J., MELLO, L.F, BRAGA, D.C, *Hopf Bifurcations in a Watt Governor System*, *Comp. Appl. Math.*, 26 (2007), 19-44.

# Anexo 1

Neste capítulo iremos enunciar alguns resultados e conceitos fundamentais de Análise e Álgebra Linear. Tais conceitos são de extrema importância para o desenvolver da dissertação tais como o Teorema da Função Implícita, o Teorema de Routh-Hurwitz e as definições de Espaço de Hilbert e Banach.

**Teorema 1 (Teorema da Função Implícita)** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$  um aberto,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação de classe  $C^1$  e  $(p_0, q_0) \in D$ , com  $f(p_0, q_0) = 0$ ; se a matriz  $\rightarrow \frac{\partial f}{\partial q}(p_0, q_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_{n+j}}(p_0, q_0) \right)$  é não singular, então existem abertos  $V \subset \mathbb{R}^n$  contendo  $p_0$  e  $W \subset \mathbb{R}^m$  contendo  $q_0$ , tal que para cada  $p \in V$ , existe um único  $\phi(p) \in W$  com  $f(p, \phi(p)) = 0$ . A função  $\phi : V \rightarrow W$  é de classe  $C^1$  e*

$$J\phi(p) = \left[ \frac{\partial f}{\partial q}(p, \phi(p)) \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial p}(p, \phi(p)).$$

**Definição 2 (Espaço de Hilbert)** *Um Espaço de Hilbert é um espaço vetorial com produto interno que é completo com a métrica induzida pelo produto interno.*

**Definição 3 (Espaço de Banach)** *Um Espaço de Banach é um espaço vetorial normado que é completo com a métrica induzida pela norma.*

**Teorema 4 (Critério de Routh-Hurwitz)** *Seja  $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  com coeficientes reais, então*

- a)  *$p$  é estável se, e somente se,  $a, b, c > 0$  e  $ab - c > 0$ .*
- b) *Se  $c > 0$  e  $ab - c < 0$ , então  $p$  tem duas raízes com parte real positiva e uma raiz com parte real negativa.*

c) *Se  $a, b, c > 0$  e  $ab - c = 0$ , então  $p$  tem duas raízes com parte real nula e uma raiz real negativa.*