

TESE

650

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



" TRANSFERÊNCIA DE CALOR PARA FLUIDOS NEWTONIANOS E
NÃO NEWTONIANOS EM DUTOS COM TEMPERATURA CONSTANTE DA
PAREDE E ESCOAMENTO LAMINAR "

ANTÔNIO GOMES DE ARAÚJO

ORIENTADOR :

PROF. TAPAN KUMAR SEN.

ITAJUBA - M.G.

ABRIL - 1991

RESUMO

Apresenta-se um método analítico baseado na teoria da camada limite hidrodinâmica e térmica para o cálculo do número de Nusselt, em tubo circular, em regime laminar, temperatura constante da parede e fluido não Newtoniano (fluidos da lei de Potência).

O método consiste em analisar o escoamento em duas partes: na primeira parte é a região de entrada onde o escoamento está se desenvolvendo. Considerando-se a região de entrada como placa plana e mediante a aplicação das equações integrais de Von Kármán e Kruzhilin, calcula-se o número de Nusselt para a camada limite térmica. Na segunda parte o escoamento é totalmente desenvolvido. Nesta região, tanto o perfil da velocidade quanto o de temperatura já estão desenvolvidos.

A transferência de calor é calculada pela aplicação da lei de Fourier e do conceito de temperatura "Bulk".

Para o cálculo, determina-se um perfil para a velocidade e temperatura, tanto para a região de entrada, como para a região de escoamento totalmente desenvolvido, pela aplicação das condições de contorno junto à parede do tubo.

Foi considerado que o número de Nusselt total, é a soma do número de Nusselt calculado na região de entrada, com o número de Nusselt determinado na região de escoamento totalmente desenvolvido. O número de Nusselt total é obtido para fluidos não Newtonianos. A equação do número de Nusselt total pode ser utilizada para fluido Newtoniano, bastando para isto, fazer o índice de comportamento do escoamento igual a um ($n = 1$).

O resultado final foi verificado com as equações mais usadas de Raghuraman [20], Lévêque [11] e Hausen [10], resultando excelente concordância. Também foram mostradas algumas aplicações.

ABSTRACT

An analytical method has been presented, based on the theory of hydrodynamic and thermal boundary layer for calculation of NUSSELT number, in circular tube, in laminar flow with constant wall temperature for non Newtonian power law fluid.

The method consists in analysing the flow in two parts: The first part provides the entrance region where the velocity profile is developing. Considering the entrance region with a flat plate and using an expression of VON KÁRMÁN and KRUSHILIN, calculation of NUSSELT number for a thermal boundary layer is performed. In the second part, the flow is completely developed. In this region, the velocity profile as well as the temperature profile are totally developed.

The heat transfer is calculated by applying the law of FOURIER and the concept of BULK temperature.

In order to calculate, a velocity profile and a temperature profile are determined, for the entrance region and also a region where the flow is completely developed, with the application of boundary conditions at the tube wall.

It has been considered that the total NUSSELT number is the sum of NUSSELT number calculated in the entrance region with NUSSELT number calculated in the completely developed flow region.

The total NUSSELT number is obtained for non Newtonian flow. The equation for total NUSSELT number can be used for Newtonian flow, to do this, the flow behaviour index is taken as ($n = 1$).

The results have been compared with the widely used equations of RAGHURAMAN [20], LÉVÊQUE [11] and HAUSEN [10], showing excellent agreement. Some applications have also been shown.

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Carinho, atenção, presteza e principalmente paciência foram palavras que nortearam o presente trabalho, dando condições para que idéias, sonhos e pretensões tornassem realidade. Ao amigo professor Tapan Kumar Sen, o reconhecimento e o mérito por esta empreitada.

Para a amiga prof^a Maria Aparecida Sanches — Irmã Emilianiana, pelo incentivo, empenho, dedicação e apoio, sem a qual a caminhada não teria tornado menos difícil, o meu profundo reconhecimento.

A Miriam, minha esposa, que soube entender e me auxiliar durante este tempo, muitas vezes se privando de momentos para que eu tivesse meus objetivos alcançados, meu eterno carinho.

A Empresa RIP - Refratário, Isolamento e Pintura Ltda, na pessoa do engenheiro Paulo K. Kuratomi pelo apoio e incentivo, o meu agradecimento.

A ADVANCE, na pessoa da Sra. Terezinha, pela paciência e atenção com que conduziu os trabalhos de datilografia, o meu agradecimento.

Aos funcionários da Biblioteca, CPD, secretárias e outros, pela atenção, cortesia e presteza que sempre foram peculiares na difícil arte de servir, meu sincero e cordial abraço de reconhecimento.

C O N T E Ú D O

RESUMO.....	II
ABSTRACT.....	IV
AGRADECIMENTOS.....	VIII
CONTEÚDO.....	X
LISTA DE GRÁFICOS.....	XVI
LISTA DE TABELAS.....	XVIII
LISTA DE FIGURAS.....	XXI
LISTA DE SÍMBOLOS.....	XXII
I- Revisão Bibliográfica.....	01
II- Desenvolvimentos Clássicos da Camada Limite.....	08
II.1. Equação Integral da Quantidade de Movimento de Von Kármán.....	08
II.2. Metodologia Desenvolvida para Utilização da Equação Integral da Camada Limite Hidrodinâmica de Von Kármán.....	09
II.3. Tipos de Equações que Podem Representar o Perfil da Velocidade em Placa Plana..	11
II.4. Seleção dos Perfis que Podem Representar o Perfil da Velocidade em Placa Plana.....	14
II.5. Equação Integral da Energia da Camada Limite.....	18

II.6.	Metodologia Desenvolvida para Utiliza- ção da Equação Integral da Energia de Kruzhilin.....	19
II.7.	Aplicação do Método.....	20
III-	Transferência de Calor ao Longo da Placa Plana.	24
III.1.	Transferência de Calor.....	25
III.2.	Relação entre Camada Limite Térmica e Hidrodinâmica.....	26
III.3.	Número de Nusselt.....	27
III.3.1.	Número de Nusselt Local.....	27
III.3.2.	Número de Nusselt Médio.....	30
III.4.	Transferência de Calor ao Longo da Pla- ca Plana com Escoamento Laminar de Fluido Não Newtoniano.....	31
III.4.1.	Metodologia de Solução Matemática....	33
IV-	Transferência de Calor em Tubo Circular.....	42
IV.1.	Introdução.....	42
IV.2.	Análise da Transferência de Calor para Entrada do Tubo - (Região I).....	44
IV.2.1.	Condições de Entrada.....	44
IV.2.2.	Análise da Camada Limite Aplicada em Tubo Circular.....	45
IV.2.3.	Análise da Transferência de Calor em Placa Plana, Aplicada em Tubo Circu- lar, para Fluido Newtoniano.....	46
IV.2.4.	Análise da Transferência de Calor em Placa Plana, Aplicada em Tubo Circu- lar, para Fluido Não Newtoniano.....	55
IV.3.	Análise da Transferência de Calor ao Longo do Tubo (Região II).....	64

IV.3.1.	Introdução.....	64
IV.3.2.	Análise da Transferência de Calor, em Tubo Circular, para Fluido Newtoniano.	65
IV.3.3.	Análise de Transferência de Calor, em Tubo Circular, para Fluido Não Newto- niano.....	71
IV.4.	Análise da Transferência de Calor To- tal em Tubo Circular.....	75
IV.4.1.	Para Fluido Não Newtoniano.....	75
IV.4.2.	Para Fluido Newtoniano.....	77
V-	Métodos Existentes para Análise da Troca de Ca- lor em Tubo Circular para Escoamento de Fluido Não Newtoniano.....	78
V.1.	Análise da Troca de Calor para Fluidos Não Newtonianos em Tubo Circular.....	78
V.1.1.	Análise Matemática.....	79
V.2.	Transferência de Calor em Tubo Circu- lar - Solução Aproximada de Lévêque...	84
V.2.1.	Generalizando a Expansão de Lévêque pa- ra Fluido Não Newtoniano.....	86
V.3.	Generalização para Fluidos Não Newto- nianos.....	87
V.4.	Cálculo do Número de Nusselt pela Equa- ção de Hausen [10].....	88
VI-	Resultados e Comparações.....	89
VII-	Aplicação.....	106
VIII-	Comentários, Conclusões e Sugestões.....	114

APÊNDICES

A -	Determinação das Equações da Camada Limite em Placa Plana.....	123
I.1.	Perfil Polinomial.....	123
I.2.	Perfil Potencial.....	133
I.3.	Perfil Exponencial.....	134
I.4.	Perfil Logaritmico.....	136
I.5.	Perfil Trigonométrico.....	137
B -	Cálculo dos Parâmetros da Camada Limite em Placa Plana para os Perfis Obtidos pelas Condições de Contorno.....	145
I.	Perfil Exponencial.....	145
II.	Perfil Trigonométrico.....	152
II.1.	Perfil Senoidal.....	152
II.2.	Perfil Cossécante.....	159
III.	Perfil Polinomial.....	161
C -	Programa para Calcular a Transferência de Calor em Uma Placa Plana, com Temperatura Constante da Parede, Sujeita a Um Escoamento Laminar, pelo Método Descrito no Item III.4.....	167
I.	Desenvolvimento.....	167
I.1.	Cálculo da Relação entre Camada Limite Hidrodinâmica e Térmica.....	167
I.2.	Determinação do Coeficiente Local da Transferência de Calor.....	182
I.3.	Cálculo do Número de Nusselt.....	183

D -	Transferência de Calor em Tubo Circular, com Perfis de Velocidade e Temperatura Totalmente Desenvolvida.....	188
I.	Escoamento de Fluido Newtoniano....	188
I.1.	Determinação das Equações dos Perfis de Temperatura para Tubo Circular, com Regime Laminar e Temperatura Constante da Parede.....	188
I.2.	Determinação das Equações dos Perfis de Velocidade para Tubo Circular, com Regime Laminar e Temperatura Constante da Parede.....	198
I.3.	Metodologia de Solução Matemática..	199
II.	Escoamento de Fluido Não Newtoniano	221
II.1.	Determinação das Equações dos Perfis de Temperatura para Tubo Circular, com Regime Laminar e Temperatura Constante da Parede.....	221
II.2.	Determinação das Equações dos Perfis de Velocidade para Tubo Circular, com Regime Laminar e Temperatura Constante da Parede.....	222
II.3.	Metodologia de Solução Matemática..	223
E -	Diagrama de Blocos Simplificados e Listagem do Programa.....	232

F -	Generalidades Sobre Fluidos.....	237
I.	Fundamentos Teóricos.....	237
I.1.	A Lei da Viscosidade de Newton [25]	237
I.2.	Classificação dos Fluidos Não New tonianos.....	238
I.2.1.	Fluidos Independentes do Tempo.....	238
I.2.2.	Fluidos Dependentes do Tempo.....	239
I.2.3.	Fluidos Visco-Elásticos.....	240
	Referências Bibliográficas.....	241

LISTA DE GRÁFICOS

- GRÁFICO 1 - Comparação da Equação (IV.49) com as Equações (V.18) e (V.25) para $n = 1$ 94
- GRÁFICO 2 - Comparação da Equação (IV.49) com as Equações (V.18) e (V.25) para $n = 0,6$. 95
- GRÁFICO 3 - Comparação da Equação (IV.49) com as Equações (V.18) e (V.25) para $n = 0,4$. 96
- GRÁFICO 4 - Comparação da Equação (IV.49) com as Equações (V.18) e (V.25) para $n = 0,2$. 97
- GRÁFICO 5 - Comparação entre o Número de Nusselt obtido pela Equação (IV.50) com o obtido pela Equação (V.28) de Hausen..... 99
- GRÁFICO 6 - Comparação entre o Número de Nusselt obtido pela Equação (IV.50) com o obtido pela Equação (V.28) de Hausen..... 100
- GRÁFICO 7 - Comparação entre o Número de Nusselt obtido pela Equação (IV.50) com o obtido pela Equação (V.28) de Hausen..... 101

- GRÁFICO 8 - Comparação entre o Número de Nusselt obtido pela Equação (IV.50) com o obtido pela Equação (V.28) de Hausen..... 102
- GRÁFICO 9 - Comparação entre o Número de Nusselt obtido pela Equação (IV.50) com o Obtido pela Equação (V.28) de Hausen..... 103
- GRÁFICO 10 - Comparação entre o Número de Nusselt obtido pela Equação (IV.50) com o obtido pela Equação (V.28) de Hausen..... 104
- GRÁFICO 11 - Comparação entre o Número de Nusselt obtido pela Equação (IV.50) com o obtido pela Equação (V.28) de Hausen..... 105

LISTA DE TABELAS

TABELA 01	-	Constantes da Equação (II.5), obtidas pelas Condições de Contorno.....	13
TABELA 02	-	Perfis potencial, exponencial, logaritmico e trigonométrico obtidos pelas condições de contorno, para representar a velocidade em placa plana.....	14
TABELA 03	-	Comparação dos parâmetros da camada limite sobre placa plana obtidos por Blasius, com os vários perfis de velocidades considerados.....	17
TABELA 04	-	Cálculo dos parâmetros da camada limite em placa plana para perfil polinomial da velocidade obtido pelas condições de contorno.....	166
TABELA 05	-	Parâmetros da equação adimensional da temperatura - Equação (II.7).....	21
TABELA 06	-	Cálculo do número de Prandtl para os perfis polinomiais e trigonométricos da velocidade e temperatura.....	22
TABELA 07	-	Paramêtros da relação entre a camada limite térmica e laminar - Equação (III.2)	27

TABELA 08	-	Parâmetros para o cálculo do número de Nusselt local - Equação (III.3).....	29
TABELA 09	-	Parâmetros para o cálculo do número de Nusselt médio - Equação (III.4).....	31
TABELA 10	-	Constantes do número de Nusselt [Equações (III.16) e (III.17)] para fluídos não newtonianos.....	41
TABELA 11	-	Perfis de temperatura e velocidade, obtidos pelas condições de contorno, para a região II da figura 04.....	68
TABELA 12	-	Número de Nusselt para tubo circular, com temperatura constante na parede, em regime laminar, escoamento totalmente desenvolvido e fluido Newtoniano [23, 24].....	70
TABELA 13	-	Perfis da velocidade e temperatura para fluido não Newtoniano.....	73
TABELA 14	-	Número de Nusselt para fluido não Newtoniano, com temperatura constante da parede, em regime laminar e escoamento totalmente desenvolvido.....	74

TABELA 15	-	Constantes do número de Nusselt total (Equação IV.50) para fluido Newtoniano.	77
TABELA 16	-	Comparação entre o número de Nusselt obtido pela Equação (IV.49) com o da Equação (V.20).....	91

LISTA DE FIGURAS

Figura 01.	Camada Limite Hidrodinâmica em Placa Plana.....	09
Figura 02.	Camada Limite Hidrodinâmica e Térmica....	18
Figura 03.	Camada Limite Hidrodinâmica e Térmica com Comprimento Inicial Não Aquecido.....	24
Figura 04.	Transferência de Calor para Escoamento Laminar, em Tubo Circular, com Perfil de Temperatura e Velocidade.....	42
Figura 05.	Curva de Escoamento para Fluido Newtoniano.....	237
Figura 06.	Curvas de Escoamento para Fluidos Independentes do Tempo.....	239
Figura 07.	Curvas de Escoamento para Fluidos Dependentes do Tempo.....	240

LISTA DE SÍMBOLOS

- (...) - inteiros entre parêntesis referem-se a números das equações.
- [...] - inteiros entre colchetes indicam referências bibliográficas.
- $a_{n'}$ - constante numérica - variando de 0 até n' .
- a_1 - constante que depende do perfil de temperatura equação (IV.49).
- $b_{n'}$ - constante numérica - variando de 0 até n' .
- B_1 - definido na equação (V.15).
- $c_{n'}$ - constante numérica - variando de 0 até n' .
- $C(n)$ - constante que depende de n .
- C_D - coeficiente de arrasto.
- C_1 - constante que depende do perfil de velocidade. equação (IV.49).
- C_{DM} - coeficiente de arrasto médio.
- C_{Dx} - Coeficiente de arrasto local.
- C_P - calor específico a pressão constante.
- D - diâmetro do tubo.
- $d_{n'}$ - constante numérica - variando de 0 até n' .
- $F(n)$ - constante que depende de n .
- $G1/G2$ - constantes da equação (IV.50)..
- H - parâmetros de forma da camada limite.
- h_x - coeficiente local de transferência de calor.
- h - coeficiente médio de transferência de calor.
- I - integral de Vón Kármán.
- K - condutividade térmica.

K_s/K_b	- índice de consistência do fluido com temperatura da superfície/temperatura média.
k'	- índice de consistência do fluido.
K_1	- valor numérico da integral de Kruzhilin.
k_1, k_2, k_3	- constantes numéricas - equações (III.2), (III.3) e (III.4).
K_i	- constante que depende do perfil de velocidade e temperatura
L_e	- comprimento de entrada hidrodinâmico.
L_{e_T}	- comprimento de entrada térmico.
n	- índice de comportamento do escoamento.
NGZ	- número de GRAETZ.
NU_x	- número de Nusselt local para tubo circular.
NU_{xp}	- número de Nusselt local para placa plana.
NU_m	- número de Nusselt médio.
N_{Pr}^o	- número de Prandtl para o fluido não Newtoniano.
$N_{Re_p}^o$	- número de Reynolds para fluido não Newtoniano em placa plana.
N_{Re}^o	- Número de Reynolds para fluido não Newtoniano em tubo circular.
Pr	- número de Prandtl.
Q	- fluxo calorífico total.
q_w	- taxa de calor por unidade de área por condução.
$q_{conv.}$	- taxa de calor por unidade de área por convecção.
R_o	- raio externo do tubo
R	- raio interno do tubo.
r	- distância radial.
Re_p	- número de Reynolds para placa plana.
Re	- número de Reynolds para tubo circular.

Re_{xp}	- número de Reynolds local para placa plana.
S	- integral de Kruzhilin.
S_0, S_1, S_2	- constante numérica - equações (III.2), (III.3) e (III.4).
T_B	- temperatura Bulk.
T_C	- temperatura no centro da corrente.
T_S	- temperatura na superfície da parede.
$T(y)$	- perfil de temperatura.
T_∞	- temperatura do fluido livre.
T'	- perfil adimensional da temperatura.
T_i/T_o	- temperatura de entrada/saída.
u_∞	- velocidade não perturbada (corrente livre).
u_c	- velocidade da corrente no centro do tubo.
u'	- perfil adimensional da velocidade.
U_x, U_y, U_z	- componentes da velocidade na direção x, y e z.
$u(y)$	- perfil da velocidade.
v	- velocidade média
X	- comprimento do tubo / placa plana.
X_0	- comprimento inicial não aquecido.
y	- distância da parede.
w	- fluxo de massa.

LETRAS GREGAS

α	- difusividade térmica.
β_v	- gradiente da velocidade junto da parede.
$\eta = y/\delta$	- espessura adimensional da camada limite hidrodinâmica.
$\eta_t = y/\delta_t$	- espessura adimensional da camada limite térmica.
δ	- espessura da camada limite Hidrodinâmica.
δ_t	- espessura da camada limite térmica.

- δ^* - espessura de deslocamento.
 θ - espessura da quantidade de movimento.
 θ' - perfil adimensional da temperatura.
 θ^* - definido na equação (V.6).
 θ_∞ - temperatura do fluido não perturbado (livre).
 $\theta(y)$ - perfil da temperatura.
 ρ - densidade.
 τ_{yx} - tensão de cisalhamento na direção x,y .
 τ_w - tensão de cisalhamento junto a parede.
 ϵ - relação entre camada limite térmica e hidrodinâmica.
 Ω - relação entre gradientes de velocidade, junto a parede, para fluidos não Newtonianos e Newtoniano.
 μ - viscosidade dinâmica.
 γ - viscosidade cinemática.
 Λ - definido na equação (V.1).
 \varnothing, β - definido na equação (V.10).
 β_1 - definido na equação (V.19).
 Δ - parâmetro obtido da referência [11], figura 10.13 e 10.14.
 ξ - relação π/NGZ .

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

- $\frac{\partial T}{\partial y}$ - gradiente de temperatura.
 $\frac{\partial u}{\partial y}$ - gradiente de velocidade
 $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ - derivada parcial de função $f(x)$.
 $\int f(x)dx$ - integral de uma função $f(x)$.
 π - 3, 1415927
 e - 2,71828

I - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Uma das primeiras análises de transferência de calor, em regime laminar, para tubo circular, foi feita por GRAETZ [1,11] em 1885.

Para perfil parabólico de velocidade completamente desenvolvido, GRAETZ resolveu a equação da energia e obteve a solução com a forma de uma série infinita. GRAETZ, originalmente, avaliou os primeiros três valores dos coeficientes, funções de raio adimensional e expoentes determinados pelas condições de contorno. Na sua equação o número de NUSSELT vale para escoamento laminar totalmente desenvolvido e em função da distância do começo da seção de transferência de calor.

As soluções detalhadas e melhoradas por métodos computacionais foram dadas por JAKOB e SELLARS [1,11] e TRIBUS e KLEIN [1,11], que avaliaram e determinaram a contribuição dos primeiros dez coeficientes e expoentes para a solução clássica de GRAETZ para fluidos Newtonianos.

Na mesma linha de trabalho de JAKOB - SELLARS e TRIBUS - KLEIN, BENNETT - MYERS [8,11], para fluido não Newtoniano, apresentaram, em forma de gráficos, a solução de GRAETZ, Fig.10.4, pg.374 [11]. Estes resultados foram comparados com os encontrados por LYCHE e BIRD [14].

A análise de COULSON e RICHARDSON [4], para fluidos Newtonianos consiste em admitir o perfil parabólico de velocidade e a equação polinomial de terceiro grau para a distribuição da temperatura na região de escoamento totalmente desenvolvido.

WELTY [6], para fluido newtoniano, usou a primeira lei da termodinâmica e a lei de resfriamento de Newton e desenvolveu uma expressão para a distribuição da temperatura, que é uma função do número de Stanton, comprimento e diâmetro do tubo.

A solução de GRAETZ [1,11], baseia-se na distribuição parabólica da velocidade e não é válida para a região de entrada.

KAYS [7] obteve uma solução numérica para a equação da energia, onde um perfil laminar de velocidade foi assumido de acordo com a relação de LANGHAAR [1,7], mostrando que a sua solução numérica é equivalente à solução clássica de GRAETZ para temperatura constante da parede, perfil parabólico da velocidade, fluido newtoniano e com baixo número de PRANDTL.

WHITEMAN e DRAKE [11] para fluidos não Newtonianos, estudaram o caso de temperatura constante da parede, para escoamento laminar e totalmente desenvolvido e obtiveram um número de NUSSELT local (somente para local) para uma grande faixa do número de GRAETZ. Os resultados apresentados por WHITEMAN e DRAKE são inexatos para pequenos valores de n . (Ref.[11] pg. 371).

LYCHE e BIRD [14] assumiram (para fluidos não Newtonianos) que: propriedades físicas independentes da temperatura; temperatura constante da parede; temperatura uniforme na entrada; desprezada a condução axial; desprezada a geração de calor por fricção, e separou em duas equações diferenciais ordinárias a equação:

$$v \left(\frac{3n+1}{n+1} \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \frac{\partial T}{\partial X} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right]$$

O autor ao resolver a equação diferencial obtém a expressão da temperatura em forma de um somatório. A análise da expressão da temperatura é feita para a faixa $0 < r/R < 1$. Os coeficientes da expressão são calculados para os primeiros três termos da série, correspondendo aos valores de: $n=0, 1/3, 1/2$ e 1 . LYCHE e BIRD apresentaram, em seu paper [14], a solução tabulada do número de NUSSELT em função da expressão da temperatura calculada. Dificuldades na avaliação da expansão da série, para valores elevados do número de GRAETZ, restringem os resultados para a faixa de $1,57 < NGZ < 31,4$.

A solução de LÉVÊQUE [1] consiste em resolver a equação da energia para placa plana sujeita a um escoamento laminar com temperatura constante da parede. Os resultados são facilmente adaptados para tubo circular, bastando, para isto, admitir um perfil parabólico da velocidade. O número de NUSSELT é calculado para a região de entrada do tubo e com a restrição de GRAETZ : $100 < NGZ < 5000$.

A solução apresentada por LÉVÊQUE, para fluidos Newtonianos, foi aplicada em fluidos não Newtonianos por PIGFORD [15]. A limitação da equação encontrada por PIGFORD é de número de GRAETZ $NGZ \gg 100$ e $n \gg 0,1$. As hipóteses consideradas são: as propriedades físicas do fluido são independentes da temperatura; a temperatura da parede permanece constante e o perfil de velocidade é estabilizado na mínima velocidade próxima da parede, onde a camada limite térmica é confinada para o postulado de LÉVÊQUE.

Na solução de GRAETZ, não tinha sido incluída nenhuma correção para a modificação da distribuição parabólica da velocidade durante o aquecimento ou resfriamento. SIDER e TATE [8,11] propuseram uma modificação na equação de LÉVÊQUE que leva em conta o efeito da temperatura sobre a viscosidade.

PETUKHOV [9], com seus resultados experimentais, sugere uma equação do tipo LÉVÊQUE que envolve um fator de correção para a região de entrada hidrodinâmica e térmica.

HAUSEN [10] propõe uma fórmula analítica que substitue a solução clássica de GRAETZ [1] e a solução numérica de KAYS [7], para qualquer número de Prandtl e com distribuição parabólica da velocidade. O número de NUSSELT médio, para comprimento total do tubo circular, pode ser calculado pela sua equação.

RAGHURAMAN [20] estuda a troca térmica ocorrida entre um fluido não Newtoniano que escoar através de um tubo cuja parte externa é aquecida pelo escoamento de um fluido Newtoniano. A análise considera a temperatura constante na parede e fluxo de calor uniforme na parede. Outra imposição é a de que o escoamento não Newtoniano é laminar e está totalmente desenvolvido. Os resultados são apresentados através de gráficos e estão de acordo com os resultados de GRAETZ [11] e NUSSELT [13], para fluidos da lei de potência e de SAFANOV e POTAPOV [20], para fluidos Newtonianos.

ACRIVOS, SHAH e PETERSEN [16] resolveram numericamente a equação integral de VON KÁRMÁN para os vários valores de n , para o caso de fluidos da lei de potência e compararam com os resultados obtidos pela solução da equação integral do momento da camada limite quando se adota um perfil de velocidade para o escoamento em placa plana.

Estudos nesta área foram feitos por SCHOWALTER [11] KAPUR [11], BIZZELL e SLATTERY [11,17], SLATTERY [11,18] e LEE e AMES [11,19].

O objetivo do presente trabalho é o de obter uma expressão genérica do número de NUSSELT total, para tubo circular, que analisa a transferência de calor tanto na região de entrada do tubo, como na região de escoamento totalmente desenvolvido e que seja válida para fluido Newtoniano e não Newtoniano (fluidos da lei de potência). As condições são o regime é laminar e a temperatura é constante na parede do tubo.

A transferência de calor sem convecção natural em escoamento laminar é um fenômeno de condução e está sujeito à

análise matemática racional. A transferência total de calor pode ser calculada [23] em duas partes. Na primeira parte, para a região de entrada, em que os perfis de velocidade e temperatura estão em desenvolvimento. Considerando-se a região de entrada do tubo circular como uma placa plana, pode-se calcular a transferência de calor utilizando três equações básicas e uma restrição. As equações são : Equação da tensão de cisalhamento de NEWTON [8] para fluidos, Equação geral integral da camada limite hidrodinâmica de VON KÁRMÁN [13] para placa plana e Equação integral da energia da camada limite térmica de KRUSHILIN [9]. A restrição é de que a espessura máxima da camada limite hidrodinâmica é igual ao raio do tubo. Para a utilização das equações anteriormente relacionadas se faz necessário admitir um perfil para a velocidade e outro para a temperatura. Os perfis são obtidos pela aplicação das condições de contorno junto a placa plana. O número de NUSSELT calculado para placa plana é adaptado para tubo circular, utilizando o conceito do número de REYNOLDS e do número de NUSSELT. Desta forma, consegue-se relacionar o número de NUSSELT da placa plana com o número de NUSSELT para tubo circular e obter a transferência de calor para a região de entrada do tubo.

Na segunda parte para escoamento totalmente desenvolvido. Calcula-se a transferência de calor mediante a aplicação da lei de FOURIER e do conceito de temperatura BULK [24] para a região de escoamento totalmente desenvolvido em tubo circular. As condições básicas são : temperatura constante da parede; escoamento totalmente desenvolvido; regime laminar e as propriedades constantes do fluido. Para o cálculo, assume-se um perfil polinomial para a distribuição da velocidade. Para a distribuição da temperatura um perfil polinomial é obtido mediante a aplicação das condições de contorno junto à parede do tubo. Com isto, consegue-se determinar o fluxo total de calor e obter o número de NUSSELT, para a região de escoamento desenvolvido.

O número de NUSSELT total, para o escoamento em regime laminar com a temperatura constante da parede, é obtido pela soma do número de NUSSELT calculado para a região de entrada com o da região de escoamento desenvolvido.

Procedimento adotado para obter o número de NUSSELT total em tubo circular.

Inicialmente, considera-se a região de entrada do tubo circular como uma placa plana. Analizam-se todas as possíveis equações, obtidas pelas condições de contorno, que podem representar o escoamento hidrodinâmico em uma placa plana. Estas equações são do tipo polinomial, potencial, exponencial, logaritmico e trigonométrico. Aplicando o método de VON KÁRMÁN e comparando os resultados obtidos com os de BLASIUS (solução exata para placa plana) [13], selecionam-se os perfis que melhor representam o escoamento. O método de KRUSHILIN permite calcular o número de NUSSELT em placa plana. Para a utilização do método de KRUSHILIN se faz necessário adotar uma equação que represente o perfil da temperatura em uma placa plana. Este perfil da temperatura é obtido pelas condições de contorno, que são idênticas as condições de contorno utilizadas para obter o perfil da velocidade no método de VON KÁRMÁN. Todas as equações utilizadas para representar o perfil da velocidade podem ser usadas para representar o perfil da temperatura. Aplicando as equações mencionadas anteriormente e a restrição, que a espessura da camada limite hidrodinâmica máxima é igual ao raio do tubo, calcula-se o número de NUSSELT para placa plana. O número de NUSSELT da placa plana é adaptado para tubo circular obtendo, assim, a transferência de calor para a região de entrada do tubo.

Para a região de escoamento desenvolvido, tanto o perfil da velocidade quanto o de temperatura já estão "formados" e a transferência de calor está em regime. Obtem-se o número de NUSSELT mediante o uso da equação de FOURIER e da temperatura BULK. Para o emprego do conceito de temperatura BULK é necessário adotar um perfil para a velocidade e outro

para a temperatura. Estes perfis podem ser obtidos pelas condições de contorno junto a parede do tubo.

O número de NUSSELT total será dado pela soma do número de NUSSELT calculado para a entrada do tubo, com o obtido para a região de escoamento totalmente desenvolvido. O número de NUSSELT obtido é para fluidos não Newtonianos (fluidos da lei de potência). Fazendo o índice de comportamento igual a um ($n = 1$), a equação obtida do número de NUSSELT passa a ser válida para fluido Newtoniano. Para maiores detalhes sobre fluidos, consultar o apêndice [F], que apresenta os fundamentos teóricos e a classificação dos vários tipos de fluidos.

A equação obtida do número de NUSSELT, para fluido não Newtoniano, será comparada com as várias equações existentes e mais utilizadas na "prática". As principais equações mais utilizadas para fluidos não Newtonianos são de : RAGHURAMAN, LÈVÊQUE / PIGFORD e METZNER, VAUGHN & HOUGHTON. Para fluidos Newtonianos é a equação de HAUSEN. Apresenta-se um resumo (com deduções e passagens matemáticas) dos vários trabalhos existentes sobre troca térmica em tubo circular, para fluido Newtoniano e não Newtoniano.

Finalmente, apresentam-se alguns exemplos de aplicação para a equação obtida do número de NUSSELT total.

II - DESENVOLVIMENTO CLÁSSICO DA CAMADA LIMITE

II.1. Equação Integral da Quantidade de Movimento de Von Kármán

A técnica da solução de Blasius está limitada pela capacidade de se descobrir transformações que satisfaçam as condições de contorno. A solução de Blasius foi obtida para a situação mais simples possível.

O método integral de Von Kármán [5, 7] envolve a aplicação da Segunda Lei de Newton a um volume de controle finito, em oposição ao elemento infinitesimal de Blasius.

Algumas vantagens são apresentadas pelo Método de Von Kármán, tais como: é consideravelmente mais simples do que a solução das equações diferenciais; oferece a vantagem matemática de apresentar a solução já integrada da espessura da camada limite, necessitando apenas satisfazer as condições de contorno.

A equação da quantidade de movimento é integrada em relação a y , através da espessura da camada limite δ .

A componente u_y da velocidade é eliminada pela equação da continuidade. A equação resultante é a chamada equação integral da quantidade de Movimento de Von Kármán.

As referências [8, 13] apresentam, com detalhes, a obtenção da equação integral da quantidade de movi-

mento de Von Kármán.

A equação é dada por:

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta} u (u_{\infty} - u) dy \right] = \gamma \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\tau_w}{\rho} \dots\dots\dots(II.1)$$

A equação (II.1) é a equação integral da quantidade de movimento de Von Kármán que na forma adimensional, fica:

Fazendo: $u' = \frac{u}{u_{\infty}}$ logo,

$$\frac{d}{dx} \left[u_{\infty}^2 \int_0^{\delta} u' (1 - u') dy \right] = \gamma \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\tau_w}{\rho} \dots\dots(II.2)$$

II.2. Metodologia Desenvolvida para Utilização da Equação Integral da Camada Limite Hidrodinâmica de Von Kármán

No desenvolvimento obtido por Von Kármán, observamos, que, para resolver a equação (II.2), se faz necessário conhecer, ou então supor, uma distribuição da velocidade no interior da camada limite que satisfaça as condições de contorno.

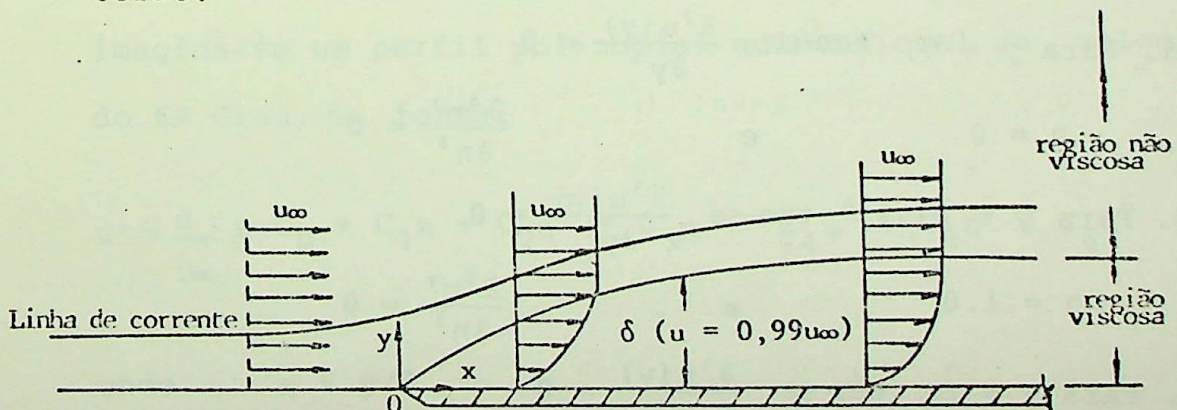


Figura 01 - Camada limite hidrodinâmica em placa plana.

Seja uma placa muito fina com um fluido viscoso incompressível escoando paralelamente a ela com uma velocidade de aproximação (corrente livre) u_∞ , como indicado na figura 01. Estão também mostradas os perfis de velocidade em duas seções, indicando como a velocidade varia desde zero junto à superfície, até $0,99u_\infty$, no contorno da camada limite hidrodinâmica. Analisando o escoamento na placa plana, figurá 01, observa-se que existirão condições físicas do perfil da velocidade e, também, condições matemáticas obtidas da equação da quantidade de movimento na direção " x ", para pressão constante.

As condições de contorno da placa plana são:

1. Para $y = 0$, tem-se $u(y) = 0$ ou na forma adimensional
 $\eta = y/\delta = 0$ e $u' = \frac{u(y)}{u_\infty} = 0$
2. Para $y = \delta(x)$, tem-se $u(y) = u_\infty$
 $\eta = 1.0$ e $u' = 1.0$
3. Para $y = \delta(x)$, tem-se $\frac{\partial u(y)}{\partial y} = 0$
 $\eta = 1.0$ e $\frac{\partial u'}{\partial \eta} = 0$
4. Para $y = 0$, tem-se que $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial y} \right) = 0$
 $\eta = 0$ e $\frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} = 0$
5. Para $y = \delta(x)$, tem-se $\frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^2} = 0$
 $\eta = 1.0$ e $\frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} = 0$
6. Para $y = 0$, tem-se $\frac{\partial^3 u(y)}{\partial y^3} = 0$
 $\eta = 0$ e $\frac{\partial^3 u'}{\partial \eta^3} = 0$
7. Para $y = \delta(x)$, tem-se $\frac{\partial^3 u(y)}{\partial y^3} = 0$
 $\eta = 1.0$ e $\frac{\partial^3 u'}{\partial \eta^3} = 0$
8. Para $y = 0$, tem-se $\frac{\partial^4 u(y)}{\partial y^4} = 0$
 $\eta = 0$ e $\frac{\partial^4 u'}{\partial \eta^4} = 0$

As condições de contorno 1, 2 e 3 são obtidas da condição física do perfil da velocidade; as condições 4, 5, 6, 7 e 8 são fornecidas pela equação do Fluxo da Quantidade de Movimento em "x" para a condição de pressão constante.

O método original de Von Kármán previa apenas 5 condições de contorno que são as condições 1, 2, 3, 4 e 5. Estas condições de contorno permitem determinar equações com no máximo, 5 incógnitas. Para o presente trabalho, propõem-se mais três condições de contorno, condições 6, 7 e 8. Com, isto, tem-se um total de oito condições de contorno, o que possibilita determinar equações com até oito incógnitas.

II.3. Tipos de Equações que Podem Representar o Perfil da Velocidade em Placa Plana

Supondo um perfil para a distribuição da velocidade no interior da camada limite que satisfaça as condições de contorno do Item II.2, determina-se a equação que representa o perfil da velocidade do escoamento. Como exemplo, imagina-se um perfil polinomial adimensional da velocidade do 6º Grau, da forma:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = C_0 + C_1\eta + C_2\eta^2 + C_3\eta^3 + C_4\eta^4 + C_5\eta^5 + C_6\eta^6 \quad (\text{II.3})$$

onde $\eta = y/\delta$

O perfil adotado para representar a velocidade apresenta 7 incógnitas, utilizando as condições de contorno número 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, que resulta em:

$$C_0 = 0; C_1 = 2; C_2 = 0; C_3 = 0; C_4 = -5; C_5 = 6 \text{ e } C_6 = -2$$

Assim, tem-se:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = -2\eta^6 + 6\eta^5 - 5\eta^4 + 2\eta \dots\dots\dots (II.4)$$

A solução detalhada da equação (II.4) e das demais equações mostradas neste item, estão indicadas no apêndice [A].

Através das condições de contorno para a placa plana descritas no item II.2 mostram-se os principais tipos de equações que podem representar o perfil da velocidade em placa plana. A investigação foi feita para grupos de famílias de perfis e os resultados são os seguintes:

1. Perfil Polinomial

Para perfil da velocidade da forma:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = C_0 + C_1\eta + C_2\eta^2 + C_3\eta^3 + C_4\eta^4 + C_5\eta^5 + C_6\eta^6 + C_7\eta^7 \dots\dots (II.5)$$

onde $\eta = y/\delta$

GRAU \ CONSTANTE	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
1º	0	1						
2º	0	2	-1					
3º	0	3/2	0	-1/2				
4º	0	2	0	-2	1			
5º	0	5/3	0	0	-5/3	1		
6º	0	2	0	0	-5	6	-2	
7º	0	7/4	0	0	0	-21/4	7	-5/2

TABELA 01— Constantes da equação (II.5), obtidas pelas condições de contorno.

2. Perfil Potencial, Perfil Exponencial, Perfil Logarítmico e Perfil Trigonométrico

Os perfis encontrados pelas condições de contorno estão indicados no apêndice [A], itens I.2, I.3, I.4 e I.5. Estes resultados estão indicados na tabela 02, que veremos a seguir:

POS.	$u' = \frac{u}{u_\infty}$	CONSTANTES	
		a	b
1.	Perfil Potencial		
1.1	$a (y/\delta)^b$	1	0
2.	Perfil Exponencial		
2.1	$a e^{b (y/\delta)}$	0	
2.2	$a e^{(y/\delta)} + b$	$\frac{-1}{e-1}$	$\frac{-1}{e-1}$
3.	Perfil Logaritmico		
3.1.	$a + b \ln (y/\delta)$	1	0
4.	Perfil Trigonométrico		
4.1	$a \text{ sen } b (y/\delta)$	1	$\pi/2$
4.2	$a \text{ cos } b (y/\delta)$	0	0
4.3	$a \text{ Tag } b (y/\delta)$	j	$\pi/4$
4.4	$a \text{ CoTag } b (y/\delta)$	j	$\pi/4$
4.5	$a \text{ sec } b (y/\delta)$	0	0
4.6	$a \text{ cossec } b (y/\delta)$	1	$\pi/2$
4.7	$a \text{ sinh } b (y/\delta)$	1	0
4.8	$a \text{ cosh } b (y/\delta)$	0	0

TABELA 02— Perfil Potencial, Exponencial, Logaritmico e Trigonométrico obtidos pelas condições de contorno, para representar a velocidade em placa plana.

II.4. Seleção dos Perfis que Podem Representar o Perfil da Velocidade em Placa Plana

A aplicação do Método de Von Kármán prevê adotar um perfil de distribuição da velocidade satisfeito pelas condições de contorno. Utilizando estes perfis, determinam-se

todos os parâmetros para cada perfil. Os parâmetros são: coeficiente de arrasto C_{DM} , tensão de cisalhamento viscosa na parede τ_w , espessura de deslocamento δ^* , espessura da quantidade de movimento θ e parâmetro de forma da camada limite H .

Os perfis selecionados serão aqueles em que o parâmetro calculado é o mais próximo do obtido por Blasius. Desta forma, existirão entre os perfis, os que representarão melhor a equação de distribuição da velocidade do escoamento.

Os parâmetros obtidos pelo Método de Von Kármán para equação da camada limite em placa plana estão apresentados, no Apêndice [B], itens I, II e III. Para perfis polinomiais estes parâmetros estão indicados na tabela 04 do item III do Apêndice [B].

Analisando os perfis obtidos pelas condições de contorno nas tabelas 01 e 02, nota-se que nem todos podem ser utilizados para expressar o perfil de distribuição da velocidade. Assim nos perfis que resultam uma constante numérica para $u' = \frac{u}{u_\infty}$ e nos perfis com número complexo, estes deverão ser desprezados, pois não tem significado físico.

Isto posto e analisando a tabela 02 podemos desprezar os perfis das posições 1.1; 2.1; 3.1; 4.2; 4.3; 4.4; 4.5; 4.7 e 4.8.

A tabela 03 apresenta uma investigação dos perfis adotados cujos resultados são comparados com os obtidos por Blasius. Nesta tabela apenas o perfil exponencial não deve ser utilizado para representar o perfil da velocidade em um

escoamento em placa plana, pois apresenta um grande desvio dos resultados obtidos por Blasius. Deste modo, concluimos que todos os perfis polinomiais e apenas o perfil senoidal (indicados na tabela 03), deverão ser utilizados para representar o perfil da velocidade de uma placa plana sujeito a um escoamento.

PERFIL DA VELOCIDADE

PRINCIPAIS PARÂMETROS DA CAMADA LIMITE EM PLACA PLANA

$u' = \frac{u}{u_\infty}$	$\frac{\delta^*}{\delta}$	% ***	$\frac{\theta}{\delta}$	% ***	$\frac{du'}{d\eta} \Big _{\eta=0}$	% ***	$\frac{\delta^* Re_{p,0.5}}{x}$	% **	$\frac{\theta Re_{p,0.5}}{x}$	% ***	$H = \frac{\delta^*}{\theta}$	% ***	$\frac{\delta Re_{p,0.5}}{x}$	% **
Solução Exata de Blasius *	0,34		0,13		1,7		1,729		0,664		2,61		$\approx 5,0$	
Perfil Polinomial														
(y/δ)	0,50	47,06	0,166	27,7	1,0	-41,2	1,732	0,17	0,577	-13,1	3,0	14,94	3,464	-30,71
$2(y/\delta) - (y/\delta)^2$	0,333	-2,06	0,133	2,31	2,0	17,7	1,826	5,61	0,730	9,94	2,5	-4,21	5,47	9,40
$\frac{3(y/\delta) - 1}{2} (y/\delta)^3$	0,375	10,29	0,139	6,9	1,5	-11,8	1,74	0,64	0,646	-2,71	2,69	3,07	4,64	-7,20
$2(y/\delta) - 2(y/\delta)^3 + (y/\delta)^4$	0,30	-11,76	0,117	-10,0	2,0	17,7	1,75	1,21	0,685	3,16	2,55	-2,30	5,83	16,6
$\frac{5(y/\delta) - 5}{3} (y/\delta)^4 + (y/\delta)^5$	0,333	-2,06	0,124	-4,62	1,66	-2,4	1,726	-17	0,643	-3,16	2,68	2,68	5,17	3,40
$2(y/\delta) - 5(y/\delta)^4 + 6(y/\delta)^5 - 2(y/\delta)^6$	0,285	-16,18	0,109	-16,15	2,0	17,7	1,728	-0,06	0,661	-4,5	2,70	0,11	6,04	20,80
$\frac{7}{4} (y/\delta) - \frac{21}{4} (y/\delta)^5 + 7(y/\delta)^6 - \frac{5}{2} (y/\delta)^7$	0,3125	-8,09	0,115	-11,54	1,75	2,94	1,7197	-54	0,636	-4,22	2,70	3,45	5,503	10,06
Perfil Exponencial														
$\frac{1}{1+e} [1 - e^{-(y/\delta)}]$	1,193	250,9	-0,079	-160,8	-268	-115,76	3,112	79,99			-15,1	-580,8	2,607	-47,9
Perfil Trigonométrico														
$\text{Sen } \frac{\pi}{2} (y/\delta)$	0,363	6,76	0,136	4,62	1,57	-7,65	1,742	75	,655	-1,36	2,659	1,88	4,79	-4,20

TABELA 03 - Comparação dos parâmetros da Camada Limite sobre placa plana obtidos por Blasius, com os vários perfis da velocidade considerados.

* Referência [5, 8, 11]
 ** Percentagem de desvio com relação a solução exata de Blasius.

II.5. Equação Integral da Energia da Camada Limite

Considera-se a transferência de calor em uma placa aquecida conforme a figura 02.

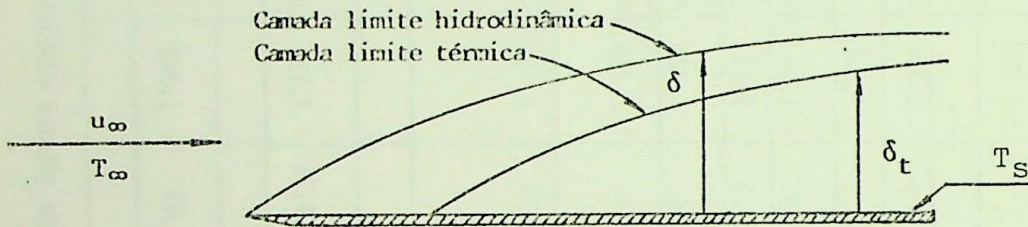


Figura 02 - Camada limite hidrodinâmica e térmica

De maneira análoga ao método empregado no desenvolvimento da equação integral do Movimento Linear de Von Kármán, pode-se assumir um volume de controle dentro da camada limite térmica, fazer um balanço de energia e obter-se a equação da energia na forma :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} u (T_\infty - T) dy &= \alpha \left(\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) = \\ &= \frac{k}{\rho C_p} \left[\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \right] = \frac{-q_w}{\rho C_p} \dots \dots \dots (II.6) \end{aligned}$$

A equação (II.6) se aplica a escoamento incompressível com efeitos viscosos desprezíveis.

A equação (II.6) é a integral da energia obtida por G.N. Kruzhilin [9], baseada no Princípio de Von Kármán. Detalhes da obtenção da equação da energia podem ser visto nas referências [3, 9].

O limite superior da integração é δ_t , uma vez que $(T_\infty - T)$ se anula para $y > \delta_t$.

II.6. Metodologia Desenvolvida para Utilização da Equação Integral da Energia de Kruzhilin

Para a utilização da equação (II.6) se faz necessário supor um perfil adimensional de distribuição da temperatura.

Assim vem:

$$\theta' = \frac{\theta}{\theta_\infty} = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s}$$

A Figura 02 fornece, as condições de contorno:

1.	para $y = 0$	tem-se	$T = T_s$
2.	para $y = \delta_t$	tem-se	$T = T_\infty$
3.	para $y = \delta_t$	tem-se	$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$
4.	para $y = 0$	tem-se	$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$
5.	para $y = \delta_t$	tem-se	$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$
6.	para $y = 0$	tem-se	$\frac{\partial^3 T}{\partial y^3} = 0$
7.	para $y = \delta_t$	tem-se	$\frac{\partial^3 T}{\partial y^3} = 0$
8.	para $y = 0$	tem-se	$\frac{\partial^4 T}{\partial y^4} = 0$

Por analogia direta das equações dos perfis de velocidade obtidos pelas condições de contorno para aplicar na equação do movimento linear de Von Kármán, observa-se que estas mesmas condições de contorno se aplicam para obter as equações de distribuição da temperatura. Assim, as mesmas equações usadas para representar os perfis de velocidade em placa plana poderão ser utilizadas para representar os perfis de distribuição da temperatura.

II.7. Aplicação do método

1. Perfil de Velocidade Adimensional

Os perfis para representar a distribuição da velocidade são indicados na tabela 01 e o perfil senoidal da tabela 02, pos. 4.1.

2. Perfil de Temperatura Adimensional

Os perfis de distribuição da temperatura são os indicados na tabela 05. Para facilitar indica-se o perfil senoidal em forma de série de Taylor:

$$\begin{aligned} \text{Os perfis polinomiais estão na forma: } \theta' = \frac{\theta}{\theta_{\infty}} = & C_0 + \\ + C_1 \left(\frac{y}{\delta_t} \right) + C_2 \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^2 + C_3 \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 + C_4 \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^4 + C_5 \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^5 + \\ + C_6 \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^6 + C_7 \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^7 & \dots\dots\dots \text{(II.7).} \end{aligned}$$

$\theta' = \theta/\theta_\infty$ / CONSTANTIA	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
Polinomial								
Eq. (II.7) 1º Grau	0	1						
Eq. (II.7) 2º Grau	0	2	-1					
Eq. (II.7) 3º Grau	0	3/2	0	-1/2				
Eq. (II.7) 4º Grau	0	2	0	-2	1			
Eq. (II.7) 5º Grau	0	5/3	0	0	-5/3	1		
Eq. (II.7) 6º Grau	0	2	0	0	-5	6	-2	
Eq. (II.7) 7º Grau	0	7/4	0	0	0	-21/4	7	-5/2
Trigonométrico								
Sen $\frac{\pi}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) =$ *	0	$\pi/2$	0	$-\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \frac{1}{6}$	0	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \frac{1}{120}$	0	$-\left(\frac{\pi}{2}\right)^7 \frac{1}{5040}$

TABELA 05 - Parâmetros da Equação Adimensional da Temperatura - Equação (II.7).

* As constantes C_1 , C_3 , C_5 e C_7 são as da série de Taylor.

3. Solução das Equações de Newton, da Quantidade de Movimento e da Energia

O programa no Apêndice [C] apresenta a solução para estas equações, quando um perfil de velocidade é adotado, conforme tabela 01, e tabela 02, e um perfil de temperatura é adotado conforme tabela 05.

Os resultados são apresentados na tabela 06.

Perfil da Velocidade $u' = \frac{u}{u_{\infty}}$	Perfil da Temperatura $\theta' = \frac{\theta}{\theta_{\infty}}$	Número Prandtl $PR.\epsilon^3 =$
Polinomial	Polinomial	
(y/δ)	(y/δ_t)	1.0
$2(y/\delta) - (y/\delta)^2$	$2(y/\delta_t) - (y/\delta_t)^2$	0.800
$\frac{3}{2}(y/\delta) - \frac{1}{2}(y/\delta)^3$	$\frac{3}{2}(y/\delta_t) - \frac{1}{2}(y/\delta_t)^3$	0.92857
$2(y/\delta) - 2(y/\delta)^3 + (y/\delta)^4$	$2(y/\delta_t) - 2(y/\delta_t)^3 + (y/\delta_t)^4$	0.88095
$\frac{5}{3}(y/\delta) - \frac{5}{3}(y/\delta)^4 + (y/\delta)^5$	$\frac{5}{3}(y/\delta_t) - \frac{5}{3}(y/\delta_t)^4 + (y/\delta_t)^5$	0.93790
$2(y/\delta) - 5(y/\delta)^4 + 6(y/\delta)^5 - 2(y/\delta)^6$	$2(y/\delta_t) - 5(y/\delta_t)^4 + 6(y/\delta_t)^5 - 2(y/\delta_t)^6$	0.91841
$\frac{7}{4}(y/\delta) - \frac{21}{4}(y/\delta)^5 + 7(y/\delta)^6 - \frac{5}{2}(y/\delta)^7$	$\frac{7}{4}(y/\delta_t) - \frac{21}{4}(y/\delta_t)^5 + 7(y/\delta_t)^6 - \frac{5}{2}(y/\delta_t)^7$	0.95105
Trigonométrico	Trigonométrico	
$\text{Sen} \left(\frac{\pi}{2} y/\delta \right)$	$\text{Sen} \left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta_t} \right)$	0.9182

TABELA 06 - Cálculo do Número de Prandtl para os Perfis Polinomiais e Trigonométrico da Velocidade e Temperatura.

A Tabela 06 relaciona o número de Prandtl obtido pela aplicação da equação de Newton, Equação da Quantidade de Movimento e Equação da energia com as equações de distribuição da velocidade e temperatura, obtidas pelas condições

de contorno e pelo programa do Apêndice [E].

Analisando a tabela 06, observamos que o número de Prandtl é uma constante multiplicada pela relação entre a Camada Limite Térmica/Hidrodinâmica (ϵ) elevada ao expoente -3 (três); quando se considera que o comprimento x_0 é igual a zero na figura 03, ou seja: o perfil de velocidade é idêntico ao de temperatura.

Como esta constante é bem próxima de (1.0) um, com desvio máximo na ordem de 20%, podemos considerar que o número de Prandtl é igual apenas à relação da Camada Limite Térmica e Hidrodinâmica elevado ao expoente 3 (três).

Desta forma a tabela 06 pode ser representada pela relação: $Pr \cong \bar{\epsilon}^3 \cong \left(\frac{\delta}{\delta_t} \right)^3$, que é análogo à encontrada por Pohlhausen [8].

III - TRANSFERÊNCIA DE CALOR AO LONGO DA PLACA PLANA

Considere a transferência de calor em uma placa aquecida, sujeita a um escoamento laminar conforme indicado na figura 03, abaixo.

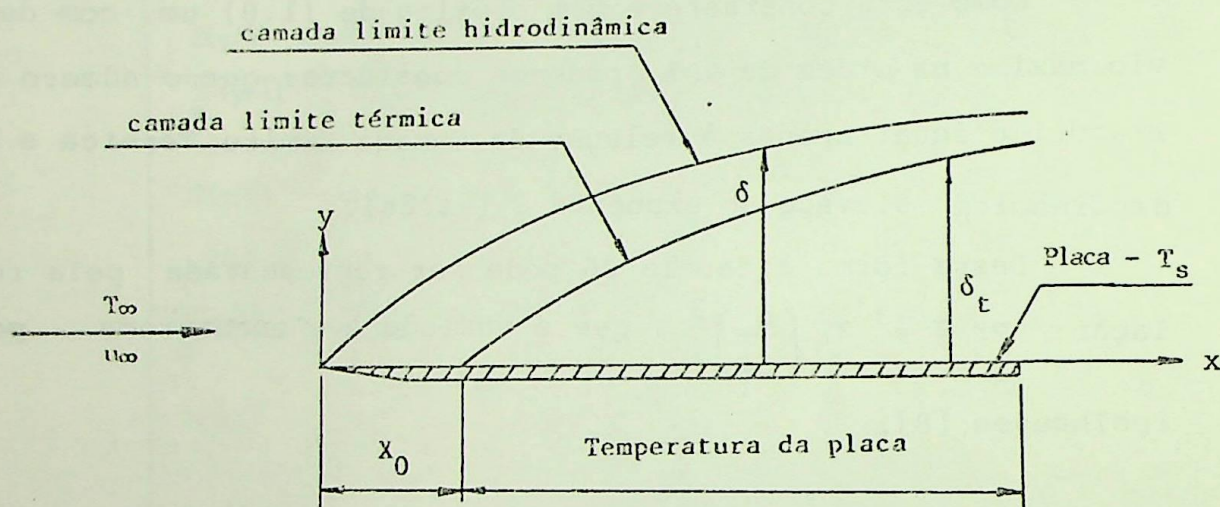


Figura 03 - Camada limite hidrodinâmica e térmica com comprimento inicial não aquecido.

Para desenvolver o estudo nesta parte, deve-se fazer o uso de três equações a saber:

- a) Equação da tensão de cisalhamento de Newton [8] para fluidos :

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \dots\dots\dots(III.1)$$

- b) Equação Geral Integral da Camada Limite Hidrodinâmica de Von Kármán [2, 7] para placa plana:

$$\tau_w = \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u(u_{\infty} - u) dy \quad \dots\dots\dots (II.2)$$

c) Equação Integral da energia da Camada Limite de Kruzhilin [9].

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} u(T_{\infty} - T) dy = \alpha \left(\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) = \frac{K}{\rho \cdot C_p} .$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) = \frac{-q_w}{\rho C_p} \quad \dots\dots\dots (II.6)$$

Desenvolvimento

Para o desenvolvimento do método, deve-se impor um tipo de equação para representar a distribuição da velocidade, ao longo da placa plana, e outro tipo de equação para representar a distribuição da temperatura. Utilizando, ainda, as equações (II.2), (II.6) e (III.1), obtém-se o número de Nusselt local e médio. Este desenvolvimento pode ser visto no Apêndice [C], item 1.3.

III.1. Transferência de Calor

Para este item deve-se fazer uso das leis:

1. Lei de Fourier [8, 23]

$$q_w = - K \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

2. Lei de Newton [8, 24]

$$q_{conv} = h_x \cdot (T_s - T_{\infty})$$

Para o caso de placa plana, temos que o calor (energia) conduzido na parede da placa, deve ser igual ao calor por convecção para o fluido. Assim, aplicando as Leis, vem:

$$q_w = q_{\text{conv.}}$$

Deste modo,

$$-K \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = h_x \cdot (T_s - T_\infty)$$

A combinação das Leis determinam a fórmula do coeficiente local de transferência de calor, dado por:

$$h_x = \frac{-K}{(T_s - T_\infty)} \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Donde concluímos que $h_x = h(K, X)$, o que vai permitir calcular o número de Nusselt em placa plana.

III.2. Relação Entre Camada Limite Térmica e Hidrodinâmica

Utilizando as equações dos perfis de velocidade e temperatura indicados na tabela 06 e, ainda, fazendo uso do programa do Apêndice [E] temos que:

$$\epsilon = \frac{\delta_t}{\delta} = S_0 \cdot \left[1 - \left(\frac{X_0}{X} \right)^{k_1} \right]^{k_2} \cdot \text{Pr}^{-k_2} \dots \dots \dots \text{(III.2)}$$

Perfil da Velocidade $u' = \frac{u}{u_\infty}$	Perfil Temperatura $\theta' = \frac{\theta}{\theta_\infty}$	S_0	k_1	k_2
Polinomial	Polinomial			
(y/δ)	(y/δ_t)	1.0	3/4	1/3
$2(y/\delta) - (y/\delta)^2$	$2(y/\delta_t) - (y/\delta_t)^2$	0.92832	3/4	1/3
$\frac{3}{2}(y/\delta) - \frac{1}{2}(y/\delta)^3$	$\frac{3}{2}(y/\delta_t) - \frac{1}{2}(y/\delta_t)^3$	0.97560	3/4	1/3
$2(y/\delta) - 2(y/\delta)^3 + (y/\delta)^4$	$2(y/\delta_t) - 2(y/\delta_t)^3 + (y/\delta_t)^4$	0.95863	3/4	1/3
$\frac{5}{3}(y/\delta) - \frac{5}{3}(y/\delta)^4 + (y/\delta)^5$	$\frac{5}{3}(y/\delta_t) - \frac{5}{3}(y/\delta_t)^4 + (y/\delta_t)^5$	0.97932	3/4	1/3
$2(y/\delta) - 5(y/\delta)^4 + 6(y/\delta)^5 - 2(y/\delta)^6$	$2(y/\delta_t) - 5(y/\delta_t)^4 + 6(y/\delta_t)^5 - 2(y/\delta_t)^6$	0.97206	3/4	1/3
$\frac{7}{4}(y/\delta) - \frac{21}{4}(y/\delta)^5 + 7(y/\delta)^6 - \frac{5}{2}(y/\delta)^7$	$\frac{7}{4}(y/\delta_t) - \frac{21}{4}(y/\delta_t)^5 + 7(y/\delta_t)^6 - \frac{5}{2}(y/\delta_t)^7$	0.98341	3/4	1/3
Trigonométrico	Trigonométrico			
$\text{Sen} \left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta} \right)$	$\text{Sen} \left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta_t} \right)$	0.971932	3/4	1/3

TABELA 07 - Parâmetros da relação entre a Camada Limite Térmica e Laminar - Equação (III.2).

III.3. Número de Nusselt

III.3.1. Número de Nusselt Local

O Número de Nusselt Local é definido pela relação:

$$NU_{xp} = \frac{h_x \cdot X}{K}$$

Foi definido pela Lei Combinada que:

$$h_x = \frac{-K \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}}{T_s - T_\infty}$$

Desta forma, usando os perfis de velocidade e temperatura, definidos na tabela 06, e o programa do APêndice [E] temos o número de Nusselt Local definido para placa plana, como sendo:

$$NU_{xp} = S_1 * \left\{ \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{k_1} \right] \right\}^{-k_2} * Pr^{k_2} * Re_p^{k_3} \dots \dots \dots (III.3)$$

Sendo bem representado pela Tabela 08, abaixo:

Perfil da Velocidade $u' = \frac{u}{u_{\infty}}$	Perfil Temperatura $\theta' = \frac{\theta}{\theta_{\infty}}$	S_1	k_1	k_2	k_3
Polinomial	Polinomial				
(y/δ)	(y/δ_t)	0.28868	3/4	1/3	1/2
$2(y/\delta) - (y/\delta)^2$	$2(y/\delta_t) - (y/\delta_t)^2$	0.39334	3/4	1/3	1/2
$\frac{3(y/\delta) - \frac{1}{2}(y/\delta)^3}{2}$	$\frac{3(y/\delta_t) - \frac{1}{2}(y/\delta_t)^3}{2}$	0.33129	3/4	1/3	1/2
$2(y/\delta) - 2(y/\delta)^3 + (y/\delta)^4$	$2(y/\delta_t) - 2(y/\delta_t)^3 + (y/\delta_t)^4$	0.35752	3/4	1/3	1/2
$\frac{5}{3}(y/\delta) - \frac{5}{3}(y/\delta)^4 + (y/\delta)^5$	$\frac{5}{3}(y/\delta_t) - \frac{5}{3}(y/\delta_t)^4 + (y/\delta_t)^5$	0.32866	3/4	1/3	1/2
$2(y/\delta) - 5(y/\delta)^4 + 6(y/\delta)^5 - 2(y/\delta)^6$	$2(y/\delta_t) - 5(y/\delta_t)^4 + 6(y/\delta_t)^5 - 2(y/\delta_t)^6$	0.34017	3/4	1/3	1/2
$\frac{7}{4}(y/\delta) - \frac{21}{4}(y/\delta)^5 + 7(y/\delta)^6 - \frac{5}{2}(y/\delta)^7$	$\frac{7}{4}(y/\delta_t) - \frac{21}{4}(y/\delta_t)^5 + 7(y/\delta_t)^6 - \frac{5}{2}(y/\delta_t)^7$	0.32338	3/4	1/3	1/2
Trigonométrico	Trigonométrico				
$\text{Sen} \left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta} \right)$	$\text{Sen} \left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta_t} \right)$	0.33702	3/4	1/3	1/2

TABELA 08 - Parâmetros para o Cálculo do Número de Nusselt local-equação (III.3).

Quando $X_0 = 0$ na figura 03, significa que o perfil de velocidade é idêntico ao perfil de temperatura para uma placa plana, com temperatura constante e sujeita a um escoamento laminar. Sendo assim, o número de Nusselt, com as constantes indicadas na Tabela 08, fica:

$$NU_{xp} = S_1 * Pr^{k_2} * Re_p^{k_3}$$

III.3.2. Número de Nusselt Médio

O número de Nusselt Médio é definido pela relação:

$$NU_m = \frac{h \cdot X}{K}$$

$$\text{Logo: } h = \frac{\int_0^X h_x dx}{\int_0^X dx} = 2 h_x$$

Desta maneira, $NU_m = 2 NU_{xp}$ que para $x_0 = 0$ (para figura 03, representa o perfil da velocidade análogo ao de temperatura), fornece a equação:

$$NU_m = S_2 * Pr^{k_1} * Re_p^{k_2} \dots\dots\dots(III.4)$$

Os detalhes desta equação poderão ser vistos no Apêndice [C] que resulta na tabela 09, a seguir:

Perfil de Velocidade $u' = \frac{u}{u_\infty}$	Perfil de Temperatura $\theta = \frac{\theta}{\theta_\infty}$	S_2	k_1	k_2
Polinomial	Polinomial			
(y/δ)	(y/δ_t)	0.57735	1/3	1/2
$2(y/\delta) - (y/\delta)^2$	$2(y/\delta_t) - (y/\delta_t)^2$	0.78669	1/3	1/2
$\frac{3(y/\delta) - 1(y/\delta)^3}{2}$	$\frac{3(y/\delta_t) - 1(y/\delta_t)^3}{2}$	0.66259	1/3	1/2
$2(y/\delta) - 2(y/\delta)^3 + (y/\delta)^4$	$2(y/\delta_t) - 2(y/\delta_t)^3 + (y/\delta_t)^4$	0.71503	1/3	1/2
$\frac{5}{3}(y/\delta) - \frac{5}{3}(y/\delta)^4 + (y/\delta)^5$	$\frac{5}{3}(y/\delta_t) - \frac{5}{3}(y/\delta_t)^4 + (y/\delta_t)^5$	0.65731	1/3	1/2
$-2(y/\delta) - 5(y/\delta)^4 + 6(y/\delta)^5 - 2(y/\delta)^6$	$-2(y/\delta_t) - 5(y/\delta_t)^4 + 6(y/\delta_t)^5 - 2(y/\delta_t)^6$	0.68035	1/3	1/2
$\frac{7}{4}(y/\delta) - \frac{21}{4}(y/\delta)^5 + 7(y/\delta)^6 - \frac{5}{2}(y/\delta)^7$	$\frac{7}{4}(y/\delta_t) - \frac{21}{4}(y/\delta_t)^5 + 7(y/\delta_t)^6 - \frac{5}{2}(y/\delta_t)^7$	0.64675	1/3	1/2
Trigonométrico	Trigonométrico			
Sen $\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{\delta} \right)$	Sen $\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{\delta_t} \right)$	0.6740556	1/3	1/2

TABELA 09 - Parâmetro para o cálculo do número de Nusselt Médio - Equação (III.4).

III.4. Transferência de Calor ao Longo da Placa Plana com Escoamento Laminar de Fluido não Newtoniano

Como descrito no Item III, a mesma metodologia adotada deverá ser aqui empregada. Utilizam-se as mesmas três equações com algumas modificações:

- a) Equação da tensão de cisalhamento de Newton [11]
para fluidos não Newtonianos:

$$\tau_w = k' \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \Big|_{y=0} \dots\dots\dots (III.5)$$

Para fluidos Newtonianos, $n = 1$ e $k' = \mu$ fornecendo a já conhecida equação de Newton:

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \dots\dots\dots (III.1)$$

- b) A Equação Integral da Quantidade de Movimento de Von Kármán [2, 7, 8] para Camada Limite:

$$\tau_w = \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u(u_{\infty} - u) dy \dots\dots\dots (II.2)$$

- c) Equação da Energia de Kruzhilin [9]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{\delta_t} u(T_{\infty} - T) dy &= \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{K}{\rho C_p} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) = \\ &= \frac{-q_w}{\rho C_p} \dots\dots\dots (II. 6) \end{aligned}$$

III. 4.1. Metodologia de Solução Matemática

Para aplicação do Método se faz necessário adotar um perfil de velocidade e temperatura. Os perfis serão os da tabela 06, pois são os mais adequados para representar o perfil da velocidade e temperatura em placa plana. Como os perfis são polinomiais, a análise será feita considerando o perfil polinomial sem a definição das constantes. Isto permite generalizar para qualquer tipo de perfil polinomial.

Seja o perfil adimensional da velocidade da forma:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = C_0 + C_1(y/\delta) + C_2(y/\delta)^2 + C_3(y/\delta)^3 + C_4(y/\delta)^4 + \\ + C_5(y/\delta)^5 + C_6(y/\delta)^6 + C_7(y/\delta)^7 \dots \text{(III. 6.)}$$

O perfil da temperatura adimensional na forma:

$$\theta' = \frac{\theta}{\theta_\infty} = C_0 + C_1(y/\delta_t) + C_2(y/\delta_t)^2 + C_3(y/\delta_t)^3 + C_4(y/\delta_t)^4 \\ + C_5(y/\delta_t)^5 + C_6(y/\delta_t)^6 + C_7(y/\delta_t)^7 \dots \text{(III.7)}$$

Sabemos que para fluidos não Newtonianos, equação (III. 5) com a derivada da equação (III. 6) fornece:

$$\tau_w = k' \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \Big|_{y=0} = k' \left(\frac{u_\infty C_1}{\delta} \right)^n \dots \text{(III. 8)}$$

Substituindo a equação (III. 6) na equação (II. 2), vem:

$$\tau_w = \rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta u(u_\infty - u) dy \text{ chamando a integral de } I, \\ \text{fica: } \tau_w = \rho \frac{d}{dx} u_\infty^2 \delta \cdot I \therefore \tau_w = \rho \cdot u_\infty^2 \cdot I \frac{d\delta}{dx} \dots \text{(III. 9)}$$

Igualando a equação (III. 9) com (III. 8), resulta:

$$k' \left[\frac{u_\infty}{\delta} C_1 \right]^n = \rho \cdot u_\infty^2 \cdot I \cdot \frac{d\delta}{dx}$$

Rearranjando

$$\delta^n d\delta = \frac{k'}{\rho} \frac{u_\infty^n C_1^n}{u_\infty^2 \cdot I} \cdot dx = \frac{k'}{\rho} \frac{u_\infty^{n-2} C_1^n}{I} dx$$

Integrando

$$\int \delta^n d\delta = \int \frac{k'}{\rho} \frac{u_\infty^{n-2} C_1^n}{I} dx \quad \text{assim,}$$

$$\frac{\delta^{n+1}}{n+1} = \frac{u_\infty^{n-2}}{I} \cdot C_1^n \cdot \frac{k'}{\rho} \cdot x + C$$

Onde $C =$ constante de integração.

Determinação da constante "C":

Sabe-se que para $x = 0$, tem-se $\delta = 0$

donde $C = 0$.

Sendo assim,

$$\delta = \left[\frac{(n+1) C_1^n}{I} \right]^{1/(n+1)} \cdot u_\infty^{\frac{n-2}{n+1}} \cdot \left(\frac{k'}{\rho} \right)^{\frac{1}{n+1}} \cdot x^{\frac{1}{n+1}}$$

Sabemos que $N_{Re_p}^{\circ} = \frac{x^n \cdot u_\infty^{2-n} \rho}{k'}$ e

$$x^{\frac{1}{n+1}} = x^{\frac{-n}{n+1}} \cdot x$$

fazendo: $C(n) = \left[\frac{(n+1) C_1}{I} \right]^{\frac{1}{n+1}}$ (III.10)

vem, $\delta = C(n) \cdot (X^n)^{\frac{-1}{n+1}} \cdot (u_\infty^{2-n})^{\frac{-1}{n+1}} \left(\frac{\rho}{K'} \right)^{\frac{-1}{n+1}} \cdot X$

$\delta = C(n) \cdot N_{Re_p}^{\frac{-1}{n+1}} \cdot X$ (III.11)

Derivando a equação (III.11), têm-se:

$\frac{d\delta}{dx} = \frac{C(n)}{n+1} \cdot N_{Re_p}^{\frac{-1}{n+1}}$ (III.12)

Assim,

$\delta \cdot \frac{d\delta}{dx} = \frac{C^2(n)}{(n+1)} \cdot N_{Re_p}^{\frac{-2}{n+1}} \cdot X$ (III.13)

Aplicando a equação da energia de Kruzilin, equação (II.6):

$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} u(T_\infty - T) dy = \frac{K}{\rho \cdot C_p} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$

Derivando a equação (III.7) e fazendo $y = 0$, resulta em:

$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = C_1 \cdot \frac{\theta_\infty}{\delta_t}$

Substituindo as equações (III.6) e (III.7) em (II.6) e chamando a integral de "S", vem:

$$S = K_1 \cdot u_\infty \cdot \theta_\infty \cdot \delta \cdot \epsilon^2$$

Onde: K_1 = é a maior constante numérica obtida na solução da integral.

As integrais "I" e "S" descritas acima, são resolvidas para os mesmos perfis polinomiais de velocidade e temperatura no Apêndice [C].

Logo:

$$\frac{d}{dx} S = \frac{K}{\rho \cdot C_p} \cdot \frac{C_1 \cdot \theta_\infty}{\delta \cdot \epsilon}$$

$$\frac{d}{dx} [K_1 \cdot u_\infty \cdot \theta_\infty \cdot \delta \cdot \epsilon^2] = \frac{K}{\rho \cdot C_p} \cdot \frac{C_1 \cdot \theta_\infty}{\delta \cdot \epsilon}$$

Derivando por partes, vem:

$$K_1 \cdot u_\infty \cdot \theta_\infty \left[2 \cdot \epsilon \cdot \delta \cdot \frac{d\epsilon}{dx} + \epsilon^2 \cdot \frac{d\delta}{dx} \right] = \frac{K}{\rho \cdot C_p} \cdot \frac{C_1 \cdot \theta_\infty}{\delta \cdot \epsilon}$$

$$K_1 \cdot u_\infty \left[2 \cdot \epsilon^2 \cdot \delta^2 \cdot \frac{d\epsilon}{dx} + \epsilon^3 \cdot \delta \cdot \frac{d\delta}{dx} \right] = \frac{K}{\rho \cdot C_p} \cdot C_1$$

Substituindo as equações (III.13) e (III.11), vem:

$$\left[2 \cdot \epsilon^2 \cdot C^2(n) \cdot N_{Re_p}^{\frac{-2}{n+1}} \cdot x^2 \cdot \frac{d\epsilon}{dx} + \epsilon^3 \cdot \frac{C^2(n)}{(n+1)} \cdot N_{Re_p}^{\frac{-2}{n+1}} \cdot x \right] =$$

$$= \frac{K}{\rho \cdot C_p} \cdot \frac{C_1}{K_1 \cdot u_\infty} \quad \text{ordenando, resulta em:}$$

$$2. \epsilon^2 \cdot X \cdot \frac{d\epsilon}{dx} + \frac{\epsilon^3}{(n+1)} = \frac{C_1}{K_1} \cdot \frac{1}{C^2(n)} \cdot \frac{1}{N_{Re_p}^{\frac{-2}{n+1}}} \cdot \frac{K}{\rho \cdot C_p \cdot X \cdot u^\infty}$$

$$\text{Como: } \frac{d\epsilon^3}{dx} = 3 \epsilon^2 \frac{d\epsilon}{dx} \Rightarrow \frac{1}{3} \frac{d\epsilon^3}{dx} = \epsilon^2 \frac{d\epsilon}{dx}, \text{ e}$$

$$N_{Pr}^{\circ} = \frac{C_p \cdot u^\infty \cdot \rho \cdot X}{K \cdot N_{Re_p}^{\circ} (2/n+1)}$$

Onde:

$$N_{Pr}^{\circ} = \text{Numero de Prandtl}$$

Logo:

$$X \frac{d\epsilon^3}{dx} + \frac{3}{2(n+1)} \cdot \epsilon^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{C_1}{K_1} \cdot \frac{1}{C^2(n)} \cdot \frac{1}{N_{Pr}^{\circ}}$$

$$\text{Fazendo: } y = \epsilon^3; x = X; A = \frac{3}{2(n+1)}; B = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{C_1}{K_1}\right) \cdot \left(\frac{1}{C^2(n)}\right) \cdot \left(\frac{1}{N_{Pr}^{\circ}}\right)$$

Assim, $x \cdot \frac{dy}{dx} + Ay = B$, é uma Equação Diferencial Linear de

1ª Ordem em $Y = \epsilon^3$.

A solução particular dessa equação diferencial é dada por: $y_p = \frac{B}{A}$. A solução homogênea y_H , que satisfaz a parte homogênea da Equação Diferencial, é dada por:

$$y_H = x^{-A}$$

A solução completa é dada por: $y = Cx^{-A} + \frac{B}{A}$

Onde: $C = \text{Constante de Integração}$.

Determinação da constante "C" de integração, substituindo os valores, vem:

$$\epsilon^3 = C X^{-3/2(2n+2)} + \frac{3}{2} \frac{C_1}{K_1} \cdot \frac{1}{C_{(n)}^2} \cdot \frac{1}{N_{Pr}^\circ} \cdot \frac{2(n+1)}{3}$$

$$C = X^{\frac{3}{2(n+1)}} \cdot \epsilon^3 - \frac{C_1}{K_1} \cdot \frac{1}{C_{(n)}^2} \cdot \frac{1}{N_{Pr}^\circ} \cdot (n+1) \cdot X^{\frac{3}{2(n+1)}}$$

Sabemos que $\delta_t = 0 \Rightarrow X = X_0$ e $X = X_0 \Rightarrow$

$\epsilon = 0$. Assim,

$$C = \frac{-C_1}{K_1} \cdot \frac{1}{C_{(n)}^2} \cdot \frac{1}{N_{Pr}^\circ} \cdot (n+1) \cdot X_0^{\frac{3}{2(n+1)}}$$

O que resulta em:

$$\epsilon^3 = \frac{-C_1}{K_1} \frac{1}{C_{(n)}^2} \cdot \frac{1}{N_{Pr}^\circ} \cdot (n+1) \left(\frac{X_0}{X}\right)^{3/(2n+2)} + \frac{C_1}{K_1} \frac{1}{C_{(n)}^2} \cdot \frac{(n+1)}{N_{Pr}^\circ}$$

$$\epsilon = \left[\frac{C_1}{K_1} \frac{1}{C_{(n)}^2} \cdot \frac{(n+1)}{N_{Pr}^\circ} \right]^{1/3} \cdot \left[1 - \left(\frac{X_0}{X}\right)^{3/(2n+2)} \right]^{1/3} \dots (III.14)$$

A Equação (III.14) é a relação entre a camada Limite Térmica e hidrodinâmica para fluido não Newtoniano escoando sobre placa plana. Fazendo $n=1$ na equação (III.14) e utilizando os perfis da velocidade e temperatura da tabela 06, observamos que os resultados são idênticos aos encontrados na tabela 07, item III.2 .

Transferência de calor:

Sabemos da Lei Combinada que o coeficiente Local de Transferência de calor é dado por:

$$h_x = \frac{-K \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}}{T_s - T_\infty}$$

Derivando a Equação (III.7), fazendo $y = 0$ e substituindo na equação de h_x , resulta:

$$h_x = \frac{C_1 K}{\epsilon \delta} \dots \dots \dots (III.15)$$

Substituindo as equações (III.11) e (III.14) na Equação (III.15), vem:

$$h_x = \frac{C_1 \cdot K \cdot N_{Pr}^{1/3} \cdot N_{Re_p}^{1/(n+1)}}{\left[\frac{C_1}{K} \frac{(n+1)}{C^2(n)} \right]^{1/3} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/(2n+2)} \right]^{1/3} \cdot C(n) \cdot x}$$

Substituindo a equação (III.10) e fazendo $\frac{h_x \cdot x}{K} = NU_x$ = Número de Nusselt, temos:

$$NU_x = \left\{ \left[\frac{C_1 \cdot I}{(n+1)} \right]^{1/n+1} \cdot K_1 \right\}^{1/3} \cdot \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/(2n+2)} \right]^{-1/3} \cdot N_{Re_p}^{1/n+1} \cdot N_{Pr}^{1/3} \dots \dots \dots (III.16)$$

A Equação (III.16) é o número de Nusselt local para fluido Não Newtoniano escoando em placa plana. Para $n = 1$, a equação (III.16) passa a ser o número de Nusselt local, para fluido Newtoniano, que com os perfis da velocidade e temperatura da tabela 06, apresenta o mesmo resultado da tabela 08, item III.3.1.

Para $x_0 = 0$, ou seja, perfil de velocidade igual ao da temperatura, a equação (III.16) fica:

$$NU_x = \left\{ \left[\frac{C_1^{n+2} \cdot I}{(n+1)^{n+2}} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot K_1 \right\}^{1/3} \cdot N_{Re_p}^{\frac{1}{n+1}} \cdot N_{Pr}^{1/3} \dots (III.17)$$

Da mesma forma como mostrado para Equação (III.16), para $n = 1$, a equação (III.17) equivale a solução da Tabela 09, item III.3.2.

A tabela 10 apresenta os valores das constantes para as equações (III.16) e (III.17), para perfis da velocidade, e temperatura até o 7º grau. A referência [11] apresenta a solução para Perfil Polinomial da velocidade e temperatura até o 4º grau, devido a restrição imposta pelas condições de contorno quando da obtenção do perfil. As bibliografias que tratam o assunto possuem 5 condições de contorno, ao passo que o presente trabalho foi elaborado com 8 condições de contorno, daí obter-se perfil até o 7º grau.

Posição	Perfil de Velocidade $u' = \frac{u}{u_{\infty}}$	Perfil de Temperatura $\theta = \frac{\theta - \theta_w}{\theta_b - \theta_w}$	C_1	I	K_1
	Polinomial	Polinomial			
1	(y/δ)	(y/δ)	1.0	0.1667	0.1666
2	$2(y/\delta) - (y/\delta)^2$	$2(y/\delta) - (y/\delta)^2$	2.0	0.1333	0.1666
3	$\frac{3}{2}(y/\delta) - \frac{1}{2}(y/\delta)^3$	$\frac{3}{2}(y/\delta) - \frac{1}{2}(y/\delta)^3$	1.5	0.1393	0.15
4	$2(y/\delta) - 2(y/\delta)^3 + (y/\delta)^4$	$2(y/\delta) - 2(y/\delta)^3 + (y/\delta)^4$	2.0	0.1175	0.1333
5	$\frac{5}{3}(y/\delta) - \frac{5}{3}(y/\delta)^4 + (y/\delta)^5$	$\frac{5}{3}(y/\delta) - \frac{5}{3}(y/\delta)^4 + (y/\delta)^5$	5/3	0.1243	0.13241
6	$2(y/\delta) - 5(y/\delta)^4 + 6(y/\delta)^5 - 2(y/\delta)^6$	$2(y/\delta) - 5(y/\delta)^4 + 6(y/\delta)^5 - 2(y/\delta)^6$	2.0	0.1043	0.11905
7	$\frac{7}{4}(y/\delta) - \frac{21}{4}(y/\delta)^5 + 7(y/\delta)^6 - \frac{5}{2}(y/\delta)^7$	$\frac{7}{4}(y/\delta) - \frac{21}{4}(y/\delta)^5 + 7(y/\delta)^6 - \frac{5}{2}(y/\delta)^7$	7/4	0.1156	0.12153
	Trigonométrico	Trigonométrico			
8	$\text{Sen} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{\delta} \right)$	$\text{Sen} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{\delta} \right)$	$\pi/2$	0.1366	0.1488

TABELA 10 - Constantes do Número de Nusselt (Equação (III.16) e (III.17)) para fluido não-Newtoniano.

IV. MÉTODO DESENVOLVIDO PARA TRANSFERÊNCIA DE CALOR

EM TUBO CIRCULAR

IV.1. INTRODUÇÃO

A transferência de calor em tubo circular com regime laminar, se dá entre a parede do tubo e o fluido escoando. Existe uma película entre parede do tubo e fluido. Na entrada do tubo esta película se comporta diferentemente da película ao longo do tubo. Isto ocorre devido à formação do perfil da velocidade na entrada do tubo. Como o regime é laminar, este efeito de entrada não é mais notado ao longo do tubo e a transferência de calor nesta região entra em regime.

Assim o problema deve ser atacado em duas partes: a primeira, considerando a região de entrada, onde o perfil da velocidade e temperatura estão se formando; e a segunda, considerando o tubo em regime (escoamento totalmente desenvolvido).

Desta maneira, podemos representar esquematicamente:

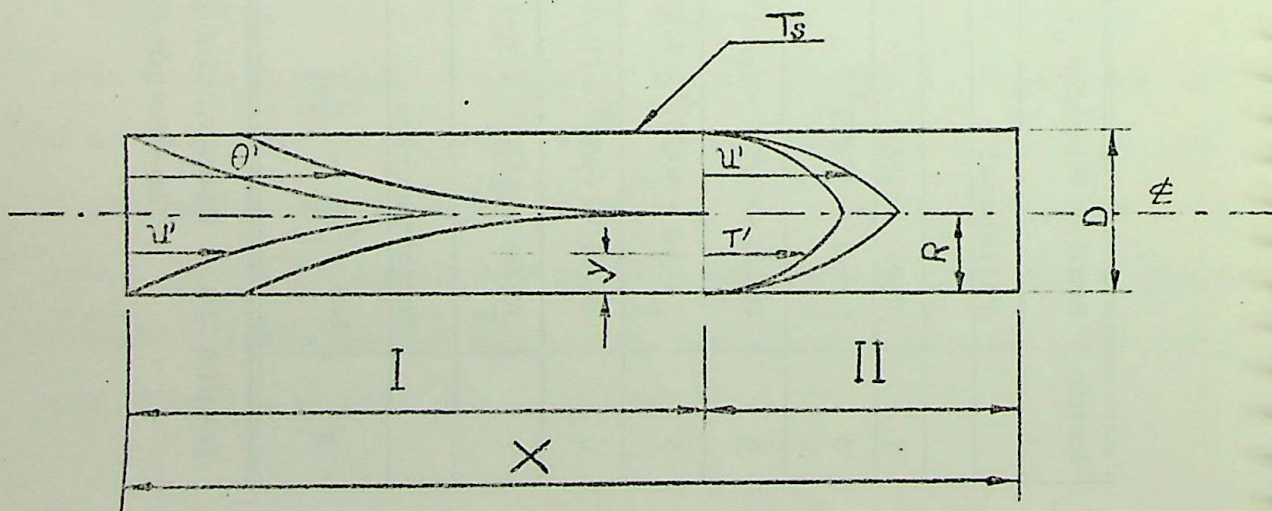


Figura U4 - Transferência de calor para escoamento laminar, em tubo circular, com perfil de temperatura e velocidade.

onde:

- Região I - Entrada do tubo, escoamento em desenvolvimento;
- Região II - Ao longo do tubo, escoamento desenvolvido;
- u' - Perfil adimensional da velocidade na região I e II;
- θ' - Perfil adimensional da temperatura na região I;
- T' - Perfil adimensional da temperatura na região II;
- T_s - Temperatura da parede do tubo.

A transferência de calor será representada pelo número de Nusselt calculado para a entrada do tubo (região I) e ao longo do tubo (região II).

O número de Nusselt total será a soma do número de Nusselt obtido na região I, com o número de Nusselt calculado para a região II.

Desta forma a análise da transferência de calor deverá ser feita em duas partes: para região I e para região II.

IV.2. ANÁLISE DO MÉTODO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR PARA ENTRADA DO TUBO (REGIÃO I)

IV.2.1. Condições de Entrada

Quando um fluido entra num tubo com velocidade uniforme, o fluído imediatamente adjacente à parede do tubo é trazido ao repouso. Forma-se uma camada limite laminar ao longo da parede do tubo, numa região próxima à entrada, figura 04 - Região I. Nesta região, tanto o perfil da velocidade adimensional u' , quanto o perfil adimensional da temperatura θ' estão em desenvolvimento.

Para a região de entrada, o comprimento necessário de tubo para o desenvolvimento completo do perfil de velocidade recebe o nome de "comprimento de entrada laminar". Analogamente, "o comprimento de entrada térmico" é o comprimento de tubo, necessário ao desenvolvimento completo do perfil de temperatura.

Uma aproximação experimental para o comprimento de entrada laminar (L_e) é dado por Langhaar [9,10] : $\frac{L_e}{D} = 0,058 Re$ onde D é o diâmetro do tubo e Re , é o número de Reynolds calculado com o respectivo diâmetro do tubo e baseado na máxima velocidade de corrente. Esta expressão é incorreta para número de Reynolds maior que 2500. Como o escoamento é laminar, Reynolds deve ser menor ou igual a 2100, resultando $L_e = 122 D.$, o que mostra que " L_e " não supera cento e vinte duas vezes o diâmetro do tubo.

O comprimento da entrada é variável, pois depende

dos parâmetros utilizados na fórmula de langhaar. Como estáveis são as condições dentro do tubo, a camada limite aumenta, em essência, em função do perfil de velocidade assumido.

Para o comprimento de entrada térmico, caso de temperatura constante da parede, Hausen [8,10] apresenta a expressão:

$$Le_T = 0,055 \cdot Re \cdot Pr \cdot D$$

IV.2.2. Análise da Camada Limite Hidrodinâmica Aplicada em Tubo Circular

Quando a corrente de fluído com velocidade uniforme entra no tubo, a camada limite forma com a parede um engrossamento gradual, com aumento desde o ponto de entrada até o ponto de desenvolvimento completo do perfil da velocidade. O fluído dentro da camada limite laminar é retardado, devido ao atrito com a parede do tubo, e o total da sobra de fluído no centro da corrente é acelerado. A uma certa distância da entrada, a camada limite, que é formada pelo contato com a parede do tubo e seu eixo e vindo da entrada para a fren

te do tubo, ocupa a seção inteira para atravessar e, conseqüentemente, a sobra é um engrossamento constante. Existe então um completo desenvolvimento da corrente.

Um fenômeno semelhante ao do fluido entrando em tubo circular ocorre, quando uma placa plana está sujeita a um escoamento. Existirá, então, uma camada limite devido ao atrito do fluido com a superfície de placa plana.

No Capítulo II e III foram apresentados vários princípios que permitem obter desde o perfil de velocidade para representar o escoamento, até a troca de calor que ocorre entre o fluido e a placa plana. Assim, devido à semelhança do fenômeno, podemos utilizar os mesmos princípios apresentados no Capítulo II e III para analisar a região de entrada de tubo circular (região I da figura 04).

Para a utilização dos princípios da placa plana em tubo circular, deve-se impôr uma restrição; a espessura da camada limite laminar máxima será igual ao raio do tubo ($\delta_{\max} = D/2$).

IV.2.3. Análise da Transferência de Calor em Placa Plana, Aplicado em Tubo Circular para Fluido Newtoniano

A análise será feita considerando a entrada do tubo como uma placa plana, com temperatura constante e sujeita a um escoamento em regime laminar. Seja a placa plana su-

jeita a um escoamento como mostrado na figura 03. Utilizar-se-ão as mesmas três equações do item III e a restrição para transportar estes resultados para tubo circular.

As equações são:

a) Equação da tensão de cisalhamento de Newton

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \dots\dots\dots (II.1)$$

b) Equação geral integral da quantidade de movimento de Von Kármán

$$\tau_w = \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u (u_{\infty} - u) dy \dots\dots\dots (II.2)$$

c) Equação integral da energia da camada limite de Kruzhilin

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{\delta_t} u (T_{\infty} - T) dy &= \alpha \left(\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \right) = \\ &= \frac{K}{\rho \cdot C_p} \left(\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \right) = \frac{-q_w}{\rho \cdot C_p} \dots\dots\dots (II.6) \end{aligned}$$

d) Restrição: $\delta_{\max} = D/2$

IV.2.3.1. Metodologia de Solução Analítica

Para a aplicação do método, devemos impôr um tipo de equação para representar o perfil de distribuição da velocidade e temperatura.

As condições de contorno para obter estes perfis, são as mesmas para a placa plana. Assim, as equações da distribuição da velocidade e temperatura, Tabela 06, podem aqui ser usadas para representar o perfil de temperatura e velocidade.

Como os perfis da velocidade e temperatura estão na forma polinomial, serão representados por polinômios cujas constantes serão definidas posteriormente. Logo, o perfil adimensional da velocidade será dado por:

$$u' = \frac{u}{u_{\infty}} = C_0 + C_1(y/\delta) + C_2(y/\delta)^2 + C_3(y/\delta)^3 + C_4(y/\delta)^4 + C_5(y/\delta)^5 + C_6(y/\delta)^6 + C_7(y/\delta)^7 \dots \dots \dots (IV.1)$$

E o perfil adimensional da temperatura dado por

$$\theta' = \frac{\theta}{\theta_{\infty}} = C_0 + C_1(y/\delta_t) + C_2(y/\delta_t)^2 + C_3(y/\delta_t)^3 + C_4(y/\delta_t)^4 + C_5(y/\delta_t)^5 + C_6(y/\delta_t)^6 + C_7(y/\delta_t)^7 \dots \dots \dots (IV.2)$$

Aplicando a equação (III.1) de Newton, tem-se:

$$\tau_w = \mu \frac{u_{\infty}}{\delta} C_1 \dots \dots \dots (IV.3)$$

Da equação (II.2) de Von Kármán, vem:

$$\tau_w = \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u (u_{\infty} - u) dy$$

Chamando a integral de "I" e resolvendo; resulta:

$$\tau_w = \rho \cdot u_{\infty}^2 \cdot I \cdot \frac{d\delta}{dx} \dots \dots \dots (IV.4)$$

igualando (IV.3) com (IV.4), vem :

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\gamma C_1}{u_{\infty} \cdot I} \dots \dots \dots (IV.6)$$

Que, integrando, fornece:

$$\delta = \sqrt{\frac{2C_1}{I}} \cdot \frac{x}{\sqrt{Re_p}} \quad \text{para} \quad \delta_{\text{máx}} = D/2, \text{ logo:}$$

$$x = \frac{D}{2} \cdot \sqrt{\frac{I}{2C_1}} \cdot \sqrt{Re_p} \dots\dots\dots (IV.5)$$

Aplicando a equação (II.6)

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} u \cdot (T_\infty - T) dy = \alpha \frac{C_1 \theta_\infty}{\delta_t}$$

Substituindo as equações (IV.1) e (IV.2) na integral e chamando a integral de "S" (* ver Apêndice [C] para solução das integrais "S" e "I"), vem:

$$S = \delta \cdot K_i \epsilon^i \quad \text{onde} \quad \epsilon = \frac{\delta_t}{\delta} \quad \text{e} \quad K_i = \text{constante numérica.}$$

Assim,

$$\frac{d}{dx} [u_\infty \cdot \theta_\infty \cdot S] = \alpha \frac{C_1 \theta_\infty}{\delta_t} \quad (\text{detalhes das "passagens$$

matemáticas" podem ser vistos no item I.1 do Apêndice [C]).

Que reduz a

$$u_\infty \left[\epsilon^2 \cdot \delta^2 \frac{d\epsilon}{dx} + \delta \cdot \epsilon^3 \cdot \frac{d\delta}{dx} \right] = C_1 \cdot \alpha \dots\dots (IV.7)$$

Substituindo (IV.5) e (IV.6) na equação (IV.7), esta se reduz a uma equação diferencial cujo resultado pode ser

representado por:

$$\epsilon = \frac{\delta_t}{\delta} = S_0 \cdot \left[1 - \left(\frac{X_0}{X} \right)^{k_1} \right]^{k_2} \cdot Pr^{-k_2} \dots (IV.8)$$

Que substituindo a restrição na equação (IV.8), vem:

$$\delta_t = S_0 \cdot \left(\frac{D}{2} \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{X_0}{X} \right)^{k_1} \right]^{k_2} \cdot Pr^{-k_2} \dots (IV.9)$$

Os valores das constantes da equação (IV.9) podem ser obtidos da Tabela 07, para os vários perfis da velocidade e temperatura adotados.

O coeficiente local de transferência de calor é dado por:

$$h_x = \frac{-K \left(\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \right)}{T_s - T_\infty} \dots (IV.10)$$

Derivando, a equação (IV.2) e fazendo $y = 0$, tem-se da equação (IV.10), que:

$$h_x = \frac{C_1 \cdot K}{\delta_t} \dots (IV.11)$$

Substituindo a equação (IV.9) em (IV.11), tem-se

$$\frac{h_x}{K} = \frac{2 C_1}{S_0 \cdot D \left[1 - \left(\frac{X_0}{X} \right)^{k_1} \right]^{k_2} \cdot Pr^{-k_2}}$$

multiplicando os dois membros por x logo:

$$\frac{h_x \cdot X}{K} = \frac{2C_1 \cdot X}{S_0 \cdot D \cdot \left[1 - \left(\frac{X_0}{X} \right)^{k_1} \right]^{k_2} \cdot Pr^{-k_2}}$$

que substituindo "X" no segundo membro pela equação (IV.5), e como o número de Nusselt é definido por

$$NU_{xp} = \frac{h_x \cdot X}{K}, \text{ assim}$$

$$NU_{xp} = \frac{1}{S_0} \sqrt{\frac{I \cdot C_1}{2}} \cdot \left[1 - \left(\frac{X_0}{X} \right)^{k_1} \right]^{-k_2} \cdot Pr^{k_2} \cdot Re_p^{\frac{1}{2}}$$

Rearranjando os índices para facilitar a identificação, vem:

$$S_1 = \frac{1}{S_0} \sqrt{\frac{I \cdot C_1}{2}}$$

e

$$k_3 = 1/2$$

Pode-se escrever o número de Nusselt como

$$NU_{xp} = S_1 \left[1 - \left(\frac{X_0}{X} \right)^{k_1} \right]^{-k_2} \cdot Pr^{k_2} \cdot Re_p^{k_3} \dots \text{ (IV.12)}$$

A equação (IV.12) é representada pela Tabela 08, para os vários perfis de velocidade e temperatura adotados, e com a superfície isotérmica.

Para $X_0 = 0$, ou seja, perfil da velocidade idêntico ao da temperatura, ver. figura 03, a equação (IV.12) se reduz a:

$$NU_{xp} = S_1 \cdot Pr^{k_2} \cdot Re_p^{k_3} \dots \dots \dots \quad (IV.13)$$

Assim, a equação (IV.13) pode ser usada para representar o número de Nusselt obtido em placa plana, com a restrição $\delta_{máx} = D/2$, usada para a região de entrada de tubo circular. (Região I da figura 04).

IV.2.3.2. Transferência dos Resultados Obtidos em Placa Plana para Tubo Circular

Transportando o número de Nusselt da placa plana para tubo circular, mediante a condição: o comprimento da placa, para efeito de consideração, será igual ao comprimento do tubo, com a espessura da camada limite limitada ao diâmetro do tubo dividido por dois.

Por definição tem-se que:

- a) Número de Reynolds da placa plana

$$Re_p = \frac{X \cdot u \cdot \rho}{\mu} \dots \dots \dots \quad (IV.14)$$

- b) Número de Reynolds para tubo circular

$$Re = \frac{D \cdot u \cdot \rho}{\mu} \dots \dots \dots \quad (IV.15)$$

c) Número de Nusselt da placa plana:

$$NU_{xp} = \frac{h_x \cdot X}{K} = S_1 \cdot Pr^{k_2} \cdot Re_p^{k_3} \dots \dots \dots (IV.13)$$

d) Número de Nusselt para tubo circular:

$$NU_x = \frac{h_x \cdot D}{K}$$

Multiplicando e dividindo por D a equação (IV.14) vem:

$$Re_p \equiv \frac{X \cdot u \cdot \rho}{\mu} \cdot \left(\frac{D}{D}\right) = \frac{D \cdot u \cdot \rho}{\mu} \cdot \left(\frac{X}{D}\right) = Re \cdot \left(\frac{X}{D}\right)$$

$$\therefore Re_p = \left(\frac{X}{D}\right) \cdot Re \dots \dots \dots (IV.16)$$

Multiplicando e dividindo por D a equação (IV.13)

resulta:

$$NU_{xp} = \frac{h_x \cdot X}{K} \cdot \left(\frac{D}{D}\right) = \frac{h_x \cdot D}{K} \cdot \left(\frac{X}{D}\right) = NU_x \cdot \left(\frac{X}{D}\right)$$

$$\therefore NU_{xp} = \left(\frac{X}{D}\right) \cdot NU_x \dots \dots \dots (IV.17)$$

Substituindo as equações (IV.16) e (IV.17) na equação (IV.13),

$$NU_{xp} = S_1 \cdot Pr^{k_2} \cdot Re_p^{k_3}$$

Sabe-se da tabela 08 que $k_2 = 1/3$ e $k_3 = 1/2$, logo:

$$\left(\frac{X}{D}\right) NU_x = S_1 \cdot Pr^{1/3} \cdot \left[\left(\frac{X}{D}\right) \cdot Re \right]^{1/2}$$

Assim,

$$NU_x = S_1 \cdot \left[\frac{D}{X} \right]^{1/2} \cdot Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \dots \dots \dots (IV.18)$$

A equação (IV.18) representa o número de Nusselt para a entrada do tubo circular (Região I), para escoamento laminar, temperatura constante da parede e fluido Newtoniano. A constante S_1 é obtida da Tabela 08 para os vários perfis de velocidade e temperatura.

IV.2.4. Análise da Transferência de Calor em Placa Plana, Aplicada em Tubo Circular, Para Fluido não Newtoniano

A análise foi feita com as mesmas condições, as mesmas equações (a menos da equação de Newton) e a mesma restrição apresentada no Item IV.2.3.

As equações são:

- a) Equação da tensão de cisalhamento de Newton para fluidos não Newtonianos [11]:

$$\tau_w = k' \left. \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \right|_{y=0} \dots\dots\dots (III.5)$$

- b) Equação da Quantidade de Movimento de Von Kármán, equação (II.2).

- c) Equação da Energia de Kruzhilin, equação (II.6)

- d) Restrição: $\delta_{\text{máx}} = D/2$

IV.2.4.1. Metodologia de Solução Analítica

Como descrito no item IV.2.3.1., adotaremos um perfil polinomial para representar a velocidade, na forma:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = C_0 + C_1 (y/\delta) + C_2 (y/\delta)^2 + C_3 (y/\delta)^3 + C_4 (y/\delta)^4 + \\ + C_5 (y/\delta)^5 + C_6 (y/\delta)^6 + C_7 (y/\delta)^7 \dots\dots\dots (IV.19)$$

O perfil polinomial da temperatura será dado por

$$\theta' = \frac{\theta}{\theta_\infty} = C_0 + C_1 (y/\delta_t) + C_2 (y/\delta_t)^2 + C_3 (y/\delta_t)^3 + \\ + C_4 (y/\delta_t)^4 + C_5 (y/\delta_t)^5 + C_6 (y/\delta_t)^6 + C_7 (y/\delta_t)^7 \dots \\ \dots\dots\dots (IV.20)$$

Antes de prosseguir no desenvolvimento do método, ca be ressaltar que maiores detalhes poderão ser visto no item III.4.1.

Derivando a equação (IV.19) e aplicando na equação (III.5), temos:

$$\tau_w = k' \cdot \left(\frac{u_\infty \cdot C_1}{\delta} \right)^n \dots\dots\dots (IV.21)$$

Substituindo a equação (IV.19) na equação (II.2) e chamando a integral de "I", resulta:

$$\tau_w = \rho \cdot u_\infty \cdot I \cdot \frac{d\delta}{dx} \dots\dots\dots (IV.22)$$

Igualando a equação (IV.21) com (IV.22), vem:

$$k' \left(\frac{u_\infty \cdot C_1}{\delta} \right)^n = \rho \cdot u_\infty \cdot I \cdot \frac{d\delta}{dx}$$

Rearranjando e integrando

$$\delta = \left[\frac{(n+1) C_1^n}{I} \right]^{\frac{1}{n+1}} u_\infty^{\frac{n-2}{n+1}} \cdot \left(\frac{k'}{\rho} \right)^{\frac{1}{n+1}} \cdot X^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\text{Fazendo } C(n) = \left[\frac{(n+1) C_1^n}{I} \right]^{\frac{1}{n+1}} \dots \dots \dots \quad (\text{IV.23})$$

e sabendo que o número de Reynolds é dado por

$$N_{Re_p}^o = \frac{X^n \cdot u_\infty^{2-n} \cdot \rho}{k'}$$

Assim,

$$\delta = C(n) \cdot N_{Re_p}^o^{-\frac{1}{n+1}} \cdot X \dots \dots \dots \quad (\text{IV.24})$$

Que aplicando a restrição $\delta_{\text{máx}} = D/2$, fica:

$$X = \frac{D \cdot N_{Re_p}^{\frac{1}{n+1}}}{2 \cdot C(n)} \dots \dots \dots \quad (\text{IV.25})$$

Substituindo as equações (IV.19) e (IV.20) na equação (II.6), derivando a equação (IV.20) e chamando a integral de "S", vem:

$$\frac{d}{dx} S = \frac{K}{\rho \cdot C_p} \cdot \frac{C_1 \cdot \theta_\infty}{\delta_t}$$

$$\text{Como } S = K_1 \cdot u_\infty \cdot \theta_\infty \cdot \delta \cdot \epsilon^2$$

Onde K_1 é a maior constante numérica obtida na solução da integral.

Logo:

$$\frac{d}{dx} [K_1 \cdot u_\infty \cdot \theta_\infty \cdot \delta \cdot \epsilon^2] = \frac{K}{\rho \cdot C_p} \cdot \frac{C_1 \cdot \theta_\infty}{\delta_t}$$

$$K_1 \cdot u_\infty \cdot \theta_\infty \cdot \frac{d\delta}{dx} \epsilon^2 = \frac{K}{\rho \cdot C_p} \cdot \frac{C_1 \theta_\infty}{\delta_t}$$

Derivando por partes, temos:

$$K_1 \cdot u_\infty \left[2 \epsilon \delta \frac{d\epsilon}{dx} + \epsilon^2 \frac{d\delta}{dx} \right] = \frac{K}{\rho \cdot C_p} \cdot \frac{C_1}{\delta \cdot \epsilon} \dots \dots \dots \text{(IV.26)}$$

Substituindo a equação (IV.24) juntamente com sua derivada na equação (IV.26) resulta em:

$$2 \cdot \epsilon^2 \cdot C^2(n) \cdot N_{Re_p}^{\frac{-2}{n+1}} \cdot x^2 \cdot \frac{d\epsilon}{dx} + \epsilon^3 \cdot \frac{C(n)^2}{(n+1)} \cdot N_{Re_p}^{\frac{-2}{n+1}} \cdot x = \frac{K}{\rho \cdot C_p} \cdot \frac{C_1}{K_1 \cdot u_\infty}$$

$$\text{Como } N_{Pr}^0 = \frac{C_p \cdot u_\infty \cdot \rho \cdot x}{K \cdot N_{Re_p}^0} \cdot \frac{2}{n+1}$$

Logo a equação fica:

$$x \cdot \frac{d\epsilon^3}{dx} + \frac{3}{2(n+1)} \cdot \epsilon^3 = \frac{3}{2} \left(\frac{C_1}{K_1} \right) \cdot \frac{1}{C^2(n)} \cdot \frac{1}{N_{Pr}^0} \dots \dots \dots \text{(IV.27)}$$

A equação (IV.27) é uma equação diferencial linear de primeira ordem, cuja solução é:

$$\varepsilon = \frac{\delta t}{\delta} = \left[\left(\frac{C_1}{K_1} \right) \cdot \frac{1}{C^2(n)} \cdot \frac{(n+1)}{N_{Pr}^0} \right]^{1/3} \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{X_0}{X} \right)^{\frac{3}{2(n+1)}} \right]^{1/3} \dots \dots \dots \quad (IV.28)$$

Aplicando a condição de $\delta_{\max} = D/2$, temos:

$$\delta_t = \frac{D}{2} \left[\left(\frac{C_1}{K_1} \right) \cdot \frac{1}{C^2(n)} \cdot \frac{(n+1)}{N_{Pr}^0} \right]^{1/3} \left[1 - \left(\frac{X_0}{X} \right)^{\frac{3}{2(n+1)}} \right]^{1/3} \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots \quad (IV.29)$$

Fazendo $n=1$ nas equações (IV.28) e (IV.29) e utilizando os perfis de temperatura e velocidade da Tabela 07, com as demais constantes, estas se reduzem as equações (IV.8) e (IV.9) respectivamente.

Sabe-se da lei combinada que o coeficiente local de transferência de calor é dado por:

$$h_x = \frac{-K \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{T_s - T_\infty}$$

Derivando a equação (IV.20) e substituindo, vem:

$$h_x = \frac{C_1 \cdot K}{\delta t} \dots \dots \dots \quad (\text{IV.30})$$

Substituindo a equação (IV.29) na equação (IV.30) e rearranjando, resulta:

$$\frac{h_x}{K} = \frac{2 \cdot C_1}{D \left[\left(\frac{C_1}{K_1} \right) \cdot \frac{1}{C^2(n)} \cdot \frac{(n+1)}{N_{Pr}^0} \right]^{1/3} \cdot \left[1 - \left(\frac{x_0}{X} \right)^{\frac{3}{2(n+1)}} \right]^{1/3}} \dots \dots \dots \quad (\text{IV.31})$$

Multiplicando os dois membros da equação (IV.31) por "X", tem-se então:

$$\frac{h_x \cdot X}{K} = \frac{X \cdot 2C_1}{D} \left[\left(\frac{K_1}{C_1} \right) C^2(n) \cdot \frac{N_{Pr}^0}{(n+1)} \right]^{1/3} \cdot \left[1 - \left(\frac{x_0}{X} \right)^{\frac{3}{2(n+1)}} \right]^{-1/3} \dots \dots \dots \quad (\text{IV.32})$$

Como $\frac{h_x \cdot X}{K} = NU_{xp}$ = número de Nusselt local

Assim, substituindo a equação (IV.25) na equação (IV.32).

$$\text{NU}_{xp} = \frac{D \cdot \text{Re}_p^{\frac{1}{n+1}}}{2 C_1(n)} \cdot \left(\frac{2 C_1}{D} \right) \left[\left(\frac{K_1}{C_1} \right) \cdot C_1^{2(n)} \cdot \frac{\text{Pr}^0}{(n+1)} \right]^{1/3} \cdot \left[1 - \left(\frac{X_0}{X} \right) \right]^{\frac{3}{2(n+1)} - 1/3}$$

Logo, substituindo a equação (IV.23), fica

$$\text{NU}_{xp} = \left\{ \left[\frac{C_1^{n+2} \cdot I}{(n+1)^{n+2}} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot K_1 \right\}^{1/3} \cdot \left[1 - \left(\frac{X_0}{X} \right) \right]^{\frac{3}{2(n+1)} - 1/3} \cdot \text{Re}_p^{\frac{1}{n+1}} \cdot \text{Pr}^0 \dots \dots \dots \quad (\text{IV.33})$$

Para $X_0=0$, a equação (IV.33) fica :

$$\text{NU}_{xp} = \left\{ \left[\frac{C_1^{n+2} \cdot I}{(n+1)^{n+2}} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot K_1 \right\}^{1/3} \cdot \text{Re}_p^{\frac{1}{n+1}} \cdot \text{Pr}^0 \dots \dots \dots \quad (\text{IV.34})$$

Utiliza-se a tabela 10 para representar os valores das constantes das equações (IV.33) e (IV.34). A equação (IV.34) pode ser utilizada para representar o número de

Nusselt obtido em placa plana, com a aplicação da restrição, para a região de entrada do tubo circular. (Região I da Figura 04).

IV.2.4.2. Transferência dos Resultados Obtidos em Placa Plana para Tubo Circular

Por definição tem-se que:

a) Número de Reynolds em placa plana

$$N_{Re_p}^o = \frac{X^n \cdot u_\infty^{2-n} \cdot \rho}{k'} \dots\dots\dots (IV.35)$$

b) Número de Reynolds em tubo circular

$$N_{Re}^o = \frac{D^n \cdot u_\infty^{2-n} \cdot \rho}{k'} \dots\dots\dots (IV.36)$$

c) Número de Nusselt para placa plana

$$NU_{xp} = \frac{h_x \cdot X}{K} \dots\dots\dots (IV.37)$$

d) Número de Nusselt para tubo circular

$$NU_x = \frac{h_x \cdot D}{K} \dots\dots\dots (IV.38)$$

Multiplicando e dividindo por " D^n " a equação (IV.35),

vem:

$$\begin{aligned}
 N_{Re\ p}^0 &= \frac{X^n \cdot u_\infty^{2-n} \cdot \rho \cdot D^n}{k'} = \frac{D^n \cdot u_\infty^{2-n} \cdot \rho \cdot X^n}{k' D^n} = \\
 &= N_{Re}^0 \cdot \left(\frac{X}{D}\right)^n \\
 \therefore N_{Re\ p}^0 &= \left(\frac{X}{D}\right)^n \cdot N_{Re}^0 \dots\dots\dots (IV.39)
 \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo por " D " a equação (IV.37),

tem-se:

$$\begin{aligned}
 NU_{xp} &= \frac{h_x \cdot X}{K} \cdot \frac{D}{D} = \frac{h_x \cdot D}{X} \cdot \frac{X}{D} = NU_x \cdot \frac{X}{D} \\
 \therefore NU_{xp} &= \left(\frac{X}{D}\right) \cdot NU_x
 \end{aligned}$$

Que igualando com a equação (IV.34) resulta em:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{X}{D}\right) \cdot NU_x &= \left\{ \left[\frac{C_1^{n+2} \cdot I}{(n+1)^{n+2}} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot K_1 \right\}^{1/3} \cdot x \\
 x \cdot N_{Re\ p}^0 \cdot N_{Pr}^0 &\dots\dots\dots (IV.40)
 \end{aligned}$$

Substituindo a equação (IV.39) na equação (IV.40)

$$\left(\frac{X}{D}\right) \cdot NU_x = \left\{ \left[\frac{C_1^{n+2} \cdot I}{(n+1)^{n+2}} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot K_1 \right\}^{1/3} \cdot \left[\left(\frac{X}{D}\right)^n \cdot N_{Re}^0 \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot N_{Pr}^0$$

Que rearranjando, fica:

$$\text{NU}_x = \left\{ \left[\begin{array}{cc} n+2 & \\ C_1 & \cdot I \\ (n+1) & n+2 \end{array} \right] \cdot K_1 \right\}^{1/3} \cdot \left(\frac{D}{X} \right)^{\frac{1}{n+1}} \cdot \text{N}_{\text{Re}}^{\frac{1}{n+1}} \cdot \text{N}_{\text{Pr}}^{\frac{1}{3}} \dots \dots \dots \quad (\text{IV.41})$$

A equação (IV.41) representa o número de Nusselt para entrada do tubo circular (Região I), para escoamento laminar, temperatura constante da parede e fluido não Newtoniano.

Para $n = 1$ e usando os valores da Tabela 10, a equação (IV.41) se reduz à equação (IV.18).

IV.3. ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR AO LONGO DO TUBO (REGIÃO II)

IV.3.1. Introdução

A transferência de calor ocorre entre a parede do tubo e o fluido. Quando um fluido entra em um tubo circular forma com este uma camada limite devido ao atrito com a parede do tubo (ver Figura 04). A uma certa distância da região de entrada, este fenômeno entra em regime e tanto o perfil da velocidade quanto o da temperatura passam a ser "uniformes". Diz-se, então, que os perfis da Velocidade e

temperatura estão totalmente desenvolvidos e que a transferência de calor nesta região entra em regime.

IV.3.2. Análise da Transferência de Calor, em Tubo Circular, para Fluido Newtoniano

A transferência de calor em tubo circular, com escoamento laminar totalmente desenvolvido, sem o efeito da convecção natural, se dá puramente pela condução [23, 24].

O fluxo calorífico total "Q", com o fluido a uma distância "y" da parede (conforme figura 04, Região II) é dado pela equação de Fourier:

$$Q = -K \cdot 2 \cdot \pi \cdot X \cdot (R - Y) \cdot \frac{dT}{dy} \dots \dots \dots \quad (\text{IV.42})$$

$$\left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = \frac{-Q}{2 \cdot \pi \cdot K \cdot X \cdot R} \dots \dots \dots \quad (\text{IV.43})$$

$$\frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot X \cdot R} = q_w = -K \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \dots \dots \dots \quad (\text{IV.44})$$

A temperatura Bulk [8, 9, 23, 24] do fluído é definida como a razão de calor contido e a capacidade de absorver calor por um fluído que escoar através de uma seção. Assim a temperatura Bulk é dada por:

$$T_B = \frac{\int_0^R C_p \cdot \rho \cdot T' \cdot u' \cdot 2 \cdot \pi \cdot (R-Y) dy}{\int_0^R C_p \cdot \rho \cdot u' \cdot 2 \cdot \pi \cdot (R-Y) dy} \dots\dots\dots (IV.45)$$

A distribuição do perfil adimensional da velocidade pode ser considerada como um polinômio da forma:

$$u' = \frac{u}{u_c} = b_0 + b_1 (y/R) + b_2 (y/R)^2 + \dots + b_{n'} (y/R)^{n'} \dots\dots\dots (IV.46)$$

Assumindo que a temperatura da parede permanece constante no instante em que a temperatura do fluído é a temperatura a uma distância y da parede, pode-se, portanto, assumir um perfil polinomial adimensional da temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_c} = a_0 + a_1 (y/R) + a_2 (y/R)^2 + \dots + a_{n'} (y/R)^{n'} \dots\dots\dots (IV.47)$$

Em regime permanente, a transferência de calor por condução deve ser igual à por convecção (Lei de Resfriamento de Newton), isto é:

$$q_{\text{cond.}} = q_{\text{conv.}}$$

$$\therefore -K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = h \cdot T_B$$

ou

$$h = \frac{-K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0}}{T_B} \dots \dots \dots \quad (\text{IV.48})$$

Observamos que o emprego da equação (IV.48) resultará no número de Nusselt para a Região II, figura 04, com perfil da temperatura e velocidade totalmente desenvolvido, regime laminar, temperatura constante da parede e fluido Newtoniano.

IV.3.2.1 Metodologia da Solução Analítica

Para a região de escoamento totalmente desenvolvido, assumindo-se que o perfil de distribuição da temperatura tem a forma de um polinômio, conforme equação (IV.47) e aplicando as condições de contorno, conforme Apêndice [D], podemos determinar estes perfis. Do mesmo modo, para equação (IV.45) podemos determinar os perfis da velocidade que sa-

tisfazem as condições de contorno. Assim, podemos representar os perfis adimensionais da temperatura e velocidade, obtidos pelas condições de contorno, na Tabela 11.

PERFIL DA VELOCIDADE $u' = \frac{u}{u_c}$	PERFIL DA TEMPERATURA $T' = \frac{T}{T_c}$
Y/R	-
$2(Y/R) - (Y/R)^2$	$2/3(Y/R) + 1/3(Y/R)^2$
$2/3(Y/R) - 1/2(Y/R)^3$	$3/5(Y/R) + 3/10(Y/R)^2 + 1/10(Y/R)^3$
$2(Y/R) - 2(Y/R)^3 + (Y/R)^4$	$24/41(Y/R) + 12/41(Y/R)^2 + 4/41(Y/R)^3 + 1/41(Y/R)^4$
$5/3(Y/R) - 5/3(Y/R)^4 + (Y/R)^5$	
$2(Y/R) - 5(Y/R)^4 + 6(Y/R)^5 - 2(Y/R)^6$	
$7/4(Y/R) - 21/4(Y/R)^5 + 7(Y/R)^6 - 5/2(Y/R)^7$	

Tabela 11: Perfis de Temperatura e Velocidade, obtidos pelas condições de contorno, para a Região II da Figura 04.

Substituindo os perfis da Tabela 11 na equação (IV.45) temos a temperatura Bulk dada por:

$$T_B = K_i \cdot T_c \quad \text{onde: } K_i = \text{constante numérica que varia segundo os perfis adotados}$$

Derivando a equação (IV.47) e substituindo na equação (IV.48) e juntamente com o valor de T_B acima, assim vem

que:

$$h = c \cdot \frac{K}{D} \quad \therefore \quad NU_x = \frac{h \cdot D}{K} = c$$

Onde: c - é um valor numérico que varia segundo os perfis adotados para a velocidade e temperatura e está indicado na Tabela 12.

Os dados com as soluções para os vários perfis da velocidade e temperatura são mostrados, com detalhes, no Apêndice [D].

O valor do número de Nusselt é bem representado pela Tabela 12, para os vários perfis de velocidade e temperatura.

A Tabela 12 mostra o número de Nusselt obtido para os vários perfis de temperatura e velocidade ao longo do tubo circular, figura 04 - Região II. Estes valores do número de Nusselt são comparados com a solução clássica de Graetz, para escoamento em regime laminar e temperatura constante da parede, onde apresentam um desvio máximo na ordem de 16%.

Isto mostra que os valores obtidos pelo método são aceitáveis e podem ser considerados satisfatórios.

Perfil de velocidade	Perfil de temperatura	$\frac{2}{3}\left(\frac{y}{R}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{R}\right)^2$	$\frac{3}{5}\left(\frac{y}{R}\right) + \frac{3}{10}\left(\frac{y}{R}\right)^2 + \frac{1}{10}\left(\frac{y}{R}\right)^3$	$\frac{24}{41}\left(\frac{y}{R}\right) + \frac{12}{41}\left(\frac{y}{R}\right)^2 + \frac{4}{41}\left(\frac{y}{R}\right)^3 + \frac{1}{41}\left(\frac{y}{R}\right)^4$	Solução de Graetz	(*) % de desvio com relação a Graetz
$\frac{y}{R}$		3.08	2.93	2.90		- 15.85
$2\left(\frac{y}{R}\right) - \left(\frac{y}{R}\right)^2$		3.33	3.18	3.16		- 9.02
$\frac{3}{2}\left(\frac{y}{R}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{R}\right)^3$		3.22	3.07	3.04		- 12.02
$2\left(\frac{y}{R}\right) - 2\left(\frac{y}{R}\right)^3 + \left(\frac{y}{R}\right)^4$		3.36	3.21	3.18	3.66	- 8.19
$\frac{5}{3}\left(\frac{y}{R}\right) - \frac{5}{3}\left(\frac{y}{R}\right)^4 + \left(\frac{y}{R}\right)^5$		3.26	3.11	3.09		- 10.93
$2\left(\frac{y}{R}\right) - 5\left(\frac{y}{R}\right)^4 + 6\left(\frac{y}{R}\right)^5 - 2\left(\frac{y}{R}\right)^6$		3.36	3.21	3.19		- 8.19
$\frac{7}{4}\left(\frac{y}{R}\right) - \frac{21}{4}\left(\frac{y}{R}\right)^5 + 7\left(\frac{y}{R}\right)^6 - \frac{5}{2}\left(\frac{y}{R}\right)^7$		3.29	3.14	3.12		- 10.11

Tabela 12 - Número de Nusselt para tubo circular, com temperatura constante na parede, em regime laminar, escoamento totalmente desenvolvido e fluido Newtoniano. [23, 24].

(*) menor porcentagem de desvio do número de Nusselt, por linha, com relação a solução de Graetz.

Analizando a Tabela 12, observa-se que o menor desvio encontrado é -8,19%, que corresponde ao valor calculado do número de Nusselt para perfil da velocidade do 4º e 6º graus e perfil da temperatura do 2º grau.

IV.3.3 Análise da Transferência de Calor, em Tubo Circular, para Fluido não Newtoniano

Como descrito no item IV.3.2, a transferência de calor em tubo circular, com escoamento em regime laminar e totalmente desenvolvido ocorre somente pela condução. A convecção natural é pequena e foi desprezada. O fluxo calorífico total " Q ", para um fluido não Newtoniano escoando no interior de um duto, com temperatura constante da parede é dado pela equação de Fourier, equação (IV.44). A temperatura "Bulk" é dada pela equação (IV.45) e, para o seu uso, é necessário um perfil da velocidade e outro para a temperatura.

Assumi-se um perfil polinomial adimensional para a temperatura, equação (IV.47) e outro para a velocidade, equação (IV.46) e, aplicando na equação (IV.45), pode-se determinar a temperatura "Bulk".

Pela Lei de Resfriamento de Newton, em regime permanente, a transferência de calor por condução, transferido para o fluido, deve ser igual à por convecção, resultando, assim, a equação (IV.48).

Empregando a equação (IV.48) resultará o número de Nusselt para a região II da figura 04 para escoamento de fluido não Newtoniano.

IV.3.3.1. Metodologia da Solução Analítica

Para a região II da figura 04, onde o escoamento é totalmente desenvolvido e utilizando a equação (IV.47) para representar o perfil da temperatura, pode-se obter estas equações mediante a aplicação das condições de contorno do Apêndice [D].

Da mesma forma para a equação (IV.46) pode-se determinar os perfis de velocidade que satisfazem estas condições de contorno. Para o caso de fluídos não newtonianos todos os perfis obtidos pelas condições de contorno são válidos e serão utilizados para a determinação do número de Nusselt. Os perfis de velocidade terão seus expoentes explicitados em função do índice de comportamento do escoamento (n).

Os perfis de velocidade e temperatura estão indicados na Tabela 13.

GRAU	PERFIL DA VELOCIDADE $u' = \frac{u}{u_c}$	PERFIL DA TEMPERATURA $T' = \frac{T}{T_c}$
1º	$(Y/R)^{1/n}$	-
2º	$2(Y/R)^{1/n} - (Y/R)^{(n+1)/n}$	$2/3(Y/R) + 1/3(Y/R)^2$
3º	$3/2(Y/R)^{1/n} - 1/2(Y/R)^{(2n+1)/n}$	$3/5(Y/R) + 3/10(Y/R)^2 + 1/10(Y/R)^3$
4º	$2(Y/R)^{1/n} - 2(Y/R)^{(2n+1)/n} + (Y/R)^{(3n+1)/n}$	$24/41(Y/R) + 12/41(Y/R)^2 + 4/41(Y/R)^3 + 1/41(Y/R)^4$
5º	$5/3(Y/R)^{1/n} - 5/3(Y/R)^{(3n+1)/n} + (Y/R)^{(4n+1)/n}$	-

cont.

cont.

6 ^o	$2(Y/R)^{1/n} - 5(Y/R)^{(3n+1)/n} +$ $+ 6(Y/R)^{(4n+1)/n} - 2(Y/R)^{(5n+1)/n}$	-
7 ^o	$7/4(Y/R)^{1/n} - 21/4(Y/R)^{(3n+1)/n} +$ $+ 7(Y/R)^{(5n+1)/n} - 5/2(Y/R)^{(6n+1)/n}$	-

Tabela 13: Perfis da Velocidade e Temperatura para Fluido não Newtoniano

A Tabela 13 apresenta os perfis da velocidade e temperatura para fluido não Newtoniano. Para o valor de $n = 1$ (escoamento Newtoniano) a Tabela 13 apresenta os mesmos perfis da Tabela 11.

Substituindo os perfis da velocidade e temperatura indicados na tabela 13 na equação (IV.45) e calculando, temos a temperatura Bulk dada por:

$$T_B = F(n) \cdot T_c$$

Substituindo a derivada primeira, em $y=0$, da equação (IV.47) na equação (IV.48) juntamente com o valor de T_B que resulta em:

$$h = c \cdot F(n) \cdot \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = c \cdot F(n) = NU$$

NU = Número de Nusselt

c = constante numérica que varia segundo os perfis adotados.

As soluções detalhadas são apresentadas no Apêndice [D] e os resultados, do número de Nusselt, estão reunidos e indicados na Tabela 14.

PERFIL DA VELOCIDADE	PERFIL DA TEMPERATURA	POSIÇÃO
$(Y/R)^{1/n}$		1
$2(Y/R)^{1/n} - (Y/R)^{(n+1)/n}$		2
$3/2(Y/R)^{1/n} - 1/2(Y/R)^{(2n+1)/n}$		3
$2(Y/R)^{1/n} - 2(Y/R)^{(2n+1)/n} + (Y/R)^{(3n+1)/n}$		4
$5/3(Y/R)^{1/n} - 5/3(Y/R)^{(3n+1)/n} + (Y/R)^{(4n+1)/n}$		5
$2(Y/R) - 5(Y/R)^{(3n+1)/n} + 6(Y/R)^{(4n+1)/n} - 2(Y/R)^{(5n+1)/n}$		6
$7/4(Y/R)^{1/n} - 21/4(Y/R)^{(4n+1)/n} + 7(Y/R)^{(5n+1)/n} - 5/2(Y/R)^{(6n+1)/n}$		7

Tabela 14: Número de Nusselt para Fluido não Newtoniano, com temperatura constante da parede, em regime laminar e escoamento totalmente desenvolvido.

A Tabela 14 apresenta o número de Nusselt em função do índice de comportamento do escoamento (n). Para $n = 1$ (fluido Newtoniano) os valores da Tabela 14 são idênticos aos da Tabela 12. Na Tabela 14 a análise foi feita apenas com o perfil de temperatura do 2º grau pois foi o perfil que forneceu os melhores resultados para o número de Nusselt (ver Tabela 12).

IV.4. ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR TOTAL EM TUBO CIRCULAR

IV.4.1. Para Fluido Não Newtoniano

A transferência de calor em tubo circular em regime laminar e com temperatura constante da parede se dá entre a parede do tubo e o fluido escoando. Na entrada do tubo ocorre a formação do perfil de velocidade devido ao atrito do fluido com a parede do tubo. A uma certa distância da entrada ocorre o desenvolvimento completo do perfil da velocidade e o escoamento entra em regime.

A análise da troca de calor foi restrita a duas áreas: entrada do tubo e ao longo do tubo.

No item IV.2 foi apresentado o número de Nusselt para a região de entrada do tubo, para os vários perfis de velocidade e temperatura. A análise foi estendida para fluido Newtoniano e fluido não Newtoniano.

No item IV.3 foi analisado a transferência de calor ao longo do tubo circular. O número de Nusselt foi obtido pelo uso dos vários perfis da velocidade e temperatura. Aqui também a análise se estendeu para fluídos Newtonianos e não Newtonianos.

A transferência de calor total para um fluído escoando por um tubo, com temperatura constante da parede, será obtido pela soma dos resultados, do número de Nusselt, calculado para a entrada do tubo com o número de Nusselt calculado ao longo do tubo, onde o escoamento está desenvolvido e a transferência de calor em regime. Somando-se analiticamente os resultados obtidos para a região de entrada de tubo circular (Região I da figura 04), com os obtidos ao longo do tubo (Região II da figura 04), resulta a expressão que representa o número de Nusselt total. O número de Nusselt total será o resultado da soma da equação (IV.41) com as equações da Tabela 14.

$NU_x = \text{Equação (IV.41)} + \text{Equações da Tabela 14.}$

$$NU_x = \left\{ \left[\begin{array}{c} n+2 \\ C_1 \cdot I \\ \frac{n+2}{(n+1)} \end{array} \right] \frac{1}{n+1} \cdot K_1 \right\}^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{D}{X} \right) \cdot N_{Re}^0 \cdot N_{Pr}^{\frac{1}{3}} + \text{Equações da Tabela 14... (IV.49)}$$

Os valores para as constantes da equação (IV.49). Poderão ser determinados na Tabela 10 para os vários perfis da velocidade e temperatura.

A equação (IV.49) representa o número de Nusselt total para escoamento de fluido não Newtoniano.

IV.4.2. Para Fluido Newtoniano

Para $n = 1$ a equação (IV.49) passa a representar o número de Nusselt total para escoamento de fluido Newtoniano. Substituindo os valores da Tabela 10 e fazendo $n = 1$ a equação (IV.49) se reduz a:

$$NU_x = G_1 + G_2 \cdot \left(\frac{D}{X}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot Re^{\frac{1}{2}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \dots \dots \dots \quad (IV.50)$$

As constantes G_1 e G_2 são determinadas em função do perfil da velocidade e temperatura adotados.

Representando as constantes G_1 e G_2 na Tabela 15, vem:

Eq. nº	1	2	3	4	5	6	7
Constantes							
G_1	3.36	3.36	3.36	3.36	3.36	3.36	3.36
G_2	0.28868	0.39334	0.33136	0.35752	0.32866	0.34017	0.32338

Tabela 15: Constantes do número de Nusselt total (equação IV.50) para fluido Newtoniano

A constante G_1 representa o número de Nusselt para região de escoamento totalmente desenvolvido e foi assumida igual a 3.36, pois é o mais próximo de 3.66 (solução exata de Graetz) quando fazemos $n=1$ na Tabela 14.

V - MÉTODOS EXISTENTES PARA A ANÁLISE DA TROCA DE CALOR EM TUBO CIRCULAR PARA ESCOAMENTO DE FLUÍDO NÃO

NEWTONIANO

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos pelos pesquisadores neste campo de atuação. Os trabalhos publicados na área de troca térmica para escoamento de fluido não Newtoniano são poucos. Os enfoques são parciais, pois apresentam a troca térmica ora considerando o escoamento em regime laminar, tubo longo e com total desenvolvimento da corrente, ou seja: sem os efeitos da região de entrada; ora, de outro modo, limitando a região de entrada, considerando tubo curto. Para todos os trabalhos apresentados neste capítulo, considera-se que:

- O escoamento é de Fluido não Newtoniano;
- A temperatura é constante na parede do tubo;
- O regime é laminar.

V.1. ANÁLISE DA TROCA DE CALOR PARA FLUÍDOS NÃO NEWTONIANOS EM TUBO CIRCULAR

Neste item, apresenta-se a solução encontrada por Raghuraman [20] para o cálculo da troca de calor em escoamento de fluido não Newtoniano. Raghuraman analisa a

troca térmica ocorrida em um fluido não Newtoniano que escoava através de um tubo cuja parte externa é aquecida pelo escoamento de um fluido Newtoniano. O escoamento interno do tubo é considerado completamente desenvolvido e laminar.

V.1.1. Análise Matemática

O comprimento do tubo é assumido como sendo suficientemente longo para que o equilíbrio térmico ocorra distante da entrada interna do tubo.

A temperatura da parede interna do tubo aproxima-se da temperatura de entrada da corrente exterior ao tubo. Este postulado impõe a condição que:

$$\Lambda = \frac{W_1 \quad C_{p1}}{W_2 \quad C_{p2}} < 1 \dots\dots (V.1)$$

A investigação está limitada na faixa de $0 < \Lambda < 1$.

A equação da energia para escoamento laminar completamente desenvolvido em tubo circular, desprezando a condução axial, é dado por:

$$\rho_1 \quad C_{p1} \quad v_z \quad \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{K_1}{r} \quad \frac{\partial}{\partial r} \left[r \quad \frac{\partial T_1}{\partial r} \right] \dots\dots\dots (V.2)$$

Para fluídos da lei de potência,

$$V_z = \langle V_z \rangle \left(\frac{3n + 1}{n + 1} \right) \left[1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^{(n+1)/n} \right] \dots\dots\dots (V.3)$$

supondo que o equilíbrio térmico é estabilizado distante da entrada, o fluxo de calor pode ser escrito:

$$\begin{aligned} & \pi \cdot R_0^2 \cdot \rho_1 \cdot Cp_1 \int_0^R V_z \cdot T_1 \cdot R_0 \cdot dR_0 - W_2 \cdot Cp_2 \cdot T_1 \Big|_{R_0 = R} = \\ & = W_1 \cdot Cp_1 - W_2 \cdot Cp_2 \quad T_{2\infty} \quad \dots\dots\dots (V.4) \end{aligned}$$

Subscritos para este item, conforme Referência [20] :

l - Local

∞ - valor assintótico

1 - fluxo interno

2 - fluxo externo

0 - entrada de fluxo interno

V_z - perfil da velocidade.

$\langle V_z \rangle$ - velocidade média no interior do tubo.

As equações (V. 2) e (V. 3) são escritas em termos de variáveis adimensionais.

$$\left(\frac{3n+1}{n+1} \right) \cdot \left(1 - R^{\frac{n+1}{n}} \right) \frac{\partial \theta^*}{\partial \xi} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta^*}{\partial R} \right) \dots \quad (V.5)$$

e

$$2 \cdot \Lambda \cdot \left(\frac{3n+1}{n+1} \right) \int_0^1 \left(1 - R^{\frac{n+1}{n}} \right) \cdot \theta^* \cdot R dR = \theta^* \Big|_{R=1} \dots \quad (V.6)$$

As condições limites são:

$$R = 0, \quad \frac{\partial \theta^*}{\partial R} = 0 \dots \dots \dots \quad (V.7)$$

As condições na entrada para o interior do tubo são dadas por

$$\xi = 0 \quad \begin{cases} \theta = 1 & (0 \leq R < 1) \\ = \Lambda & (R = 1) \dots \dots \dots \end{cases} \quad (V.8)$$

Para $\Lambda = 0$, a equação (V.6) trás $\theta^* \Big|_{R=1} = 0$, o que é a condição para o problema de Graetz (temperatura uniforme da parede).

A equação (V.5) pode ser resolvida por separação de variáveis:

$$\theta^* = \sum B_i \theta_i \exp. \left(- \frac{3n+1}{n+1} \beta_i^2 \cdot \xi \right) \dots \dots \dots \quad (V.9)$$

Onde a função oitava ϑ_i satisfaz a equação de sturm-liouville:

$$\frac{d^2\vartheta}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\vartheta}{dR} + \beta^2 \left(1 - R^{\frac{n+1}{n}}\right) \vartheta = 0 \quad \dots\dots\dots (V.10)$$

Com as condições limites:

$$\frac{d\vartheta}{dR} = 0 \quad \text{e} \quad R = 0 \quad \dots\dots\dots (V.11)$$

e

$$2.\Lambda \left(\frac{3n+1}{n+1}\right) \int_0^1 \left(1 - R^{\frac{n+1}{n}}\right) \vartheta.R.dR = \vartheta \Big|_{R=1} \quad \dots\dots\dots (V.12)$$

Combinando a equação (V.10) e (V.12) e resolvendo a integral, a equação (V.12) pode ser escrita na forma alternativa:

$$2.\Lambda \left(\frac{3n+1}{n+1}\right) \vartheta' \Big|_{R=1} + \beta^2 \vartheta \Big|_{R=1} = 0 \quad \dots\dots\dots (V.13)$$

A função oitava ϑ são ortogonais no intervalo $0 \leq R \leq 1$ com respeito a função de peso

$$F(R) = R \left(1 - R^{\frac{n+1}{n}}\right) - \frac{(n+1)}{2.\Lambda.(3n+1)} \delta(R=1) \quad \dots\dots\dots (V.14)$$

Onde δ é a função delta de DIRAC.

Usando as condições iniciais e a ortogonalidade da função oitava, a constante B_i , na equação (V.9) é obtida da relação:

Para $\Lambda = 0$

$$B_i = \frac{-1}{\beta_i^2} \frac{\left. \vartheta_i' \right|_{R=1}}{\int_0^1 R \left(1 - R^{\frac{n+1}{n}}\right) \vartheta_i^2 dR} \dots\dots\dots (V.15)$$

O número de Nusselt é obtido da relação

$$NU_x = \frac{-2 \left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R=1}}{\theta_b - \theta^* \Big|_{R=1}} \dots\dots\dots (V.16)$$

Onde θ_b é a temperatura da mistura do fluxo interno e é dado por:

$$\theta_b = \frac{2(3n+1)}{n+1} \int_0^1 \theta \left(1 - R^{\frac{n+1}{n}}\right) R dR \dots\dots\dots (V.17)$$

Combinando as equações (V.9), (V.16) e (V.17)

$$NU_x = \frac{(n+1)}{(3n+1)} \frac{\sum B_i \beta_i^2 \left. \vartheta_i' \right|_{R=1} \exp. \left(-\frac{3n+1}{n+1} \beta_i^2 \xi\right)}{\sum B_i \left. \vartheta_i' \right|_{R=1} \exp. \left(-\frac{3n+1}{n+1} \beta_i^2 \xi\right)} \dots\dots (V.18)$$

Para $\Lambda = 0$

A grande distância da região de entrada do tubo circular, apenas o primeiro termo da série é de significado maior e portanto, o número de Nusselt assintótico é dado por

$$NU_\infty = \frac{\beta^2 (n+1)}{(1-\Lambda)(3n+1)} \dots\dots\dots (V.19)$$

$\Lambda = 0$ corresponde ao caso de temperatura uniforme da parede.

Assim a equação (V.19) se reduz a

$$NU_{\infty} = \beta_1^2 \frac{(n+1)}{(3n+1)} \dots\dots\dots (V.20)$$

Os valores de β_1 são descritos abaixo:

	n				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
β_1	2.4493675	2.5287404	2.5992317	2.6590885	2.7043642

V.2 TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM TUBO CIRCULAR - SOLUÇÃO APROXIMADA DE LÉVÊQUE

Lévêque [11] obteve uma aproximação para a solução da equação:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{K}{\rho \cdot C_p \cdot u \cdot r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\alpha}{u} \cdot \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] \dots (V.21)$$

Assumindo que a temperatura da Camada Limite é confinada na zona próxima à parede do tubo, nos casos de alta velocidade de massa, para médios e pequenos tubos, com escoamento laminar. Estas condições correspondem a valores altos do número de Graetz e são de importância prática.

Um gradiente de velocidade linear é assumido próximo à temperatura da Camada Limite, assim:

$$u = \beta_v \cdot (R - r)$$

Nesta base a expressão final de Lévêque (originalmente para corrente em placa plana) será adaptada e acompanhará a faixa do número de Nusselt para escoamento com temperatura constante da parede. Assim:

$$NU_m = \frac{h \cdot D}{K} = 1.615 \left(\frac{\beta_v \cdot C_p \cdot \rho \cdot D^3}{8KX} \right)^{1/3} \dots\dots\dots(V.22)$$

Para o caso particular de fluídos Newtonianos

$\beta_v = \frac{8V}{D}$, em escoamento laminar, temos então que:

$$NU_m = 1.615 \left(\frac{4}{\pi} NGZ \right)^{1/3} = 1.75 (NGZ)^{1/3} \dots\dots\dots(V.23)$$

Onde:

h - é utilizado para o cálculo da temperatura ΔT da forma:

$$\Delta T = T_s - \left(\frac{1}{2} \right) (T_i + T_o)$$

A Camada Limite Térmica limita o uso da equação (V. 23) para $NGZ > 100$.

V.2.1. Generalizando a Expansão de Lévêque para Fluido não Newtoniano

Na equação (V.22), β_v é o gradiente de velocidade na parede do tubo, tendo um valor de $\frac{8V}{D}$, apenas para o caso especial de Fluidos Newtonianos. ^D A definição mais geral de β_v para fluidos não Newtonianos independentes do tempo foi escrita por Pigford [11, 15]:

$$\beta_v = \Omega \left(\frac{8V}{D} \right) \dots\dots\dots (V.24)$$

Onde:

$$\Omega = \frac{\left(\frac{-du}{dr} \right)_w \text{ para fluidos não Newtonianos}}{\left(\frac{-du}{dr} \right)_w \text{ para fluido Newtoniano}} = \frac{\beta_v}{\frac{8V}{D}}$$

Evidentemente $\Omega = 1$ para Fluido Newtoniano. Substituindo a equação (V.24) na equação (V.22), a extensão de Pigford na equação de Lévêque resulta:

$$NU_m = 1.75 \Omega^{1/3} (NGZ)^{1/3} \dots\dots\dots (V.25)$$

Para fluidos da Lei de Potência, tem-se:

$$\Omega = \frac{3n+1}{4n}$$

Os limites para o uso da equação (V.25) são:

- Número de Graetz > 100 ;
- $n > 0.1$
- As relações assumem que as propriedades físicas do fluido são independentes da temperatura
- A temperatura da parede permanece constante
- O perfil de velocidade estabiliza nas proximidades da parede

O número de Nusselt Médio NU_m , equação (V.25) contém h para ser usado com a média aritmética da temperatura, portanto a expressão de ΔT apresentada na equação (V.23) não pode ser usada aqui.

V.3. GENERALIZAÇÃO PARA FLUIDOS NÃO NEWTONIANOS

Duas modificações foram introduzidas por Metzner, Vaughn, & Houghton [11] na equação (V.25). A primeira foi a introdução do fator de correção $(\gamma/\gamma_s)^{0,14}$ de Sieder-Tate, onde é considerado a consistência do fluido com a temperatura. A segunda foi a troca de $\Omega^{1/3}$ por $\Delta^{1/3}$ para número de Graetz e n pequenos.

Estas modificações valem para temperatura constante da parede e convecção forçada.

1) Quando $NGZ > 20$ e $n > 0,10$ (casos mais comuns)

$$NU_m = 1,75 \cdot \Omega^{1/3} \cdot (NGZ)^{1/3} \cdot \left(\frac{\gamma}{\gamma_s}\right)^{0,14} \dots (V.26)$$

2) Quanto $NGZ < 20$ e $n < 0,10$

$$NU_m = 1,75 \cdot \Delta^{1/3} \cdot (NGZ)^{1/3} \cdot \left(\frac{\gamma}{\gamma_s}\right)^{0,14} \dots (V.27)$$

Os valores de Δ são obtidos de gráficos. Ver Ref. [11] figura 10.13 e 10.14.

V.4. CÁLCULO DO NÚMERO DE NUSSOLT PELA EQUAÇÃO DE HAUSEN [10]

Hausen [1,12] propõem uma equação que representa a solução clássica de Graetz para temperatura constante da parede e distribuição parabólica da velocidade. Esta equação é para calcular o número de Nusselt médio, para comprimento de tubo x e com escoamento em regime laminar.

$$NU_m = \frac{h \cdot D}{K} = 3,66 + \frac{0,0668 \left[\left(\frac{D}{X}\right) \cdot Re \cdot Pr \right]}{1 + 0,04 \left[\left(\frac{D}{X}\right) \cdot Re \cdot Pr \right]^{2/3}} \dots (V.28)$$

A equação (V. 28), aplica-se apenas para escoamento de fluido Newtoniano.

VI - RESULTADOS E COMPARAÇÕES

A transferência de calor em um tubo circular com temperatura constante da parede para um fluido não Newtoniano, escoando em regime laminar, é representada pela equação (IV.49). Esta equação fornece o número de Nusselt considerando a troca térmica ocorrendo na região de entrada, onde os perfis de velocidade e temperatura estão se formando e, na região de escoamento desenvolvido. A equação (IV.49) é bastante abrangente com relação à análise da troca, pois permite o cálculo nas duas regiões distintas do escoamento no tubo; isto é de grande importância do ponto de vista técnico/prático.

Por representar a troca térmica total em parcelas (Região I e II da figura 04), a equação (IV.49), pode ser adaptada para o cálculo de casos específicos. Para tubo muito longo a relação D/X tende para zero ou ainda, para o escoamento sem o efeito da região de entrada, a equação (IV.49) se reduz apenas à expressão da tabela 14.

Considerando esta situação, compara-se a equação (V.20) do número de Nusselt obtido por J. Raghuraman com o número de Nusselt obtido na equação (IV.49). Os resultados

com os desvios são apresentados na Tabela 16. Para a equação (IV.49) o índice do número de Nusselt corresponde à posição na Tabela 10 e 14. Para o caso de tubo " muito longo", utiliza-se apenas a expressão da Tabela 14. Assim NU_1 significa que o número de Nusselt foi calculado com a expressão da posição 1 da Tabela 14.

EQUAÇÃO (IV.49)

Equação (V.20) *		EQUAÇÃO (IV.49)													
n	NU _∞	NU ₁	DESVIO %	NU ₂	DESVIO %	NU ₃	DESVIO %	NU ₄	DESVIO %	NU ₅	DESVIO %	NU ₆	DESVIO %	NU ₇	DESVIO %
0,2	4,4995	3,7895	-15,78	3,8349	-13,66	3,8444	-14,57	3,8958	-13,42	3,8635	-14,13	3,8989	-13,35	3,8731	-13,92
0,4	4,0692	3,4354	-15,58	3,6028	-11,46	3,5322	-13,20	3,6219	-10,99	3,5651	-12,39	3,6273	-10,86	3,5815	-11,99
0,6	3,8605	3,2566	-15,64	3,4064	-10,21	3,3759	-12,55	3,4885	-9,54	3,4158	-11,52	3,4945	-9,48	3,4358	-11,00
0,8	3,7433	3,1488	-15,88	3,3362	-9,54	3,2812	-12,34	3,4089	-8,93	3,3249	-11,18	3,4150	-8,77	3,3471	-10,58
1,0	3,6567	3,0769	-15,86	3,3333	-8,84	3,2170	-12,02	3,3558	-8,23	3,2632	-10,76	3,3618	-8,06	3,2869	-10,11

Tabela 16 - Comparação entre o número de Nusselt obtido pela equação (IV.49) com o da equação (V.20)

* REFERÊNCIA [20]

Para o caso de tubo onde os efeitos da entrada são relevantes para a troca térmica tanto quanto o resto do tubo, ou seja: a parcela da troca térmica da região de entrada, juntamente com a parcela da troca térmica para a região de escoamento totalmente desenvolvido compõem a troca térmica total. A equação (IV.49) será comparada com a equação (V.18) de J. Raghuraman [20], que contém os efeitos da região de entrada na troca térmica de tubo circular e com a equação (V.25) de Lévêque para fluido não Newtoniano. Os resultados com as comparações estão indicados nos Gráficos 1, 2, 3 e 4. Os gráficos são traçados $NU_x \times \xi$ onde ξ é um comprimento adimensional e vale π/NGZ . Para traçar os gráficos 1, 2, 3 e 4. As equações (IV.49) e (V.25) foram expressas em função de ξ .

Explicitação da equação (V.25) em função ξ :

A equação de Lévêque é dada por:

$$NU_m = 1.75 \Omega^{1/3} \cdot (NGZ)^{1/3}$$

$$\text{Como } NGZ = \frac{w \cdot c_p}{KX} = \frac{\pi}{4} \cdot NRe^0 \cdot NPr^0 \cdot \left(\frac{D}{X}\right)$$

$$\text{Logo: } \xi = \frac{\pi}{NGZ} = \frac{4}{NRe \cdot NPr} \left(\frac{D}{X}\right)$$

Assim:

$$NU_m = 1.75 \cdot \Omega^{1/3} \left(\frac{\pi}{\xi}\right)^{1/3}$$

Explicitação da equação (IV.49) em função de ξ :

A equação (Iv. 49) é dada por:

$$NU_x = \left\{ \left[\frac{C_1 \cdot I}{(n+1)^{n+2}} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot k_1 \right\}^{1/3} \cdot \left(\frac{D}{X} \right)^{\frac{1}{n+1}} \cdot NRe^{\frac{1}{n+1}} \cdot NPr^{\frac{1}{n+1}}$$

+ Eq. Tabela 14

Sabemos que o número se Graetz é dado por:

$$NGZ = \frac{\pi}{4} \cdot NRe^{\circ} \cdot NPr^{\circ} \cdot \left(\frac{D}{X} \right) \quad \text{Como } \xi = \frac{\pi}{NGZ}$$

$$\text{Assim: } NGZ = \frac{\pi}{\xi} = \frac{\pi}{4} \cdot NRe^{\circ} \cdot NPr^{\circ} \cdot \left(\frac{D}{X} \right) = \frac{\pi}{\xi}$$

Logo: $NRe^{\circ} \left(\frac{D}{X} \right) = \frac{4}{\xi \cdot NPr^{\circ}}$ A equação (IV.49) fica:

$$NU_x = \left\{ \left[\frac{C_1 \cdot I}{(n+1)^{n+2}} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot K_1 \right\}^{1/3} \cdot \left[\frac{4}{\xi} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot NPr^{\frac{n-2}{3n+3}} + \text{Eq. Tabela 14}$$

Obs.: A equação (IV. 49) ficou explícita em função de n , ξ e do número de NPr°

Os resultados são apresentados nos gráficos 1, 2, 3 e 4 respectivamente para $n = 1; 0,6; 0,4$ e $0,2$.

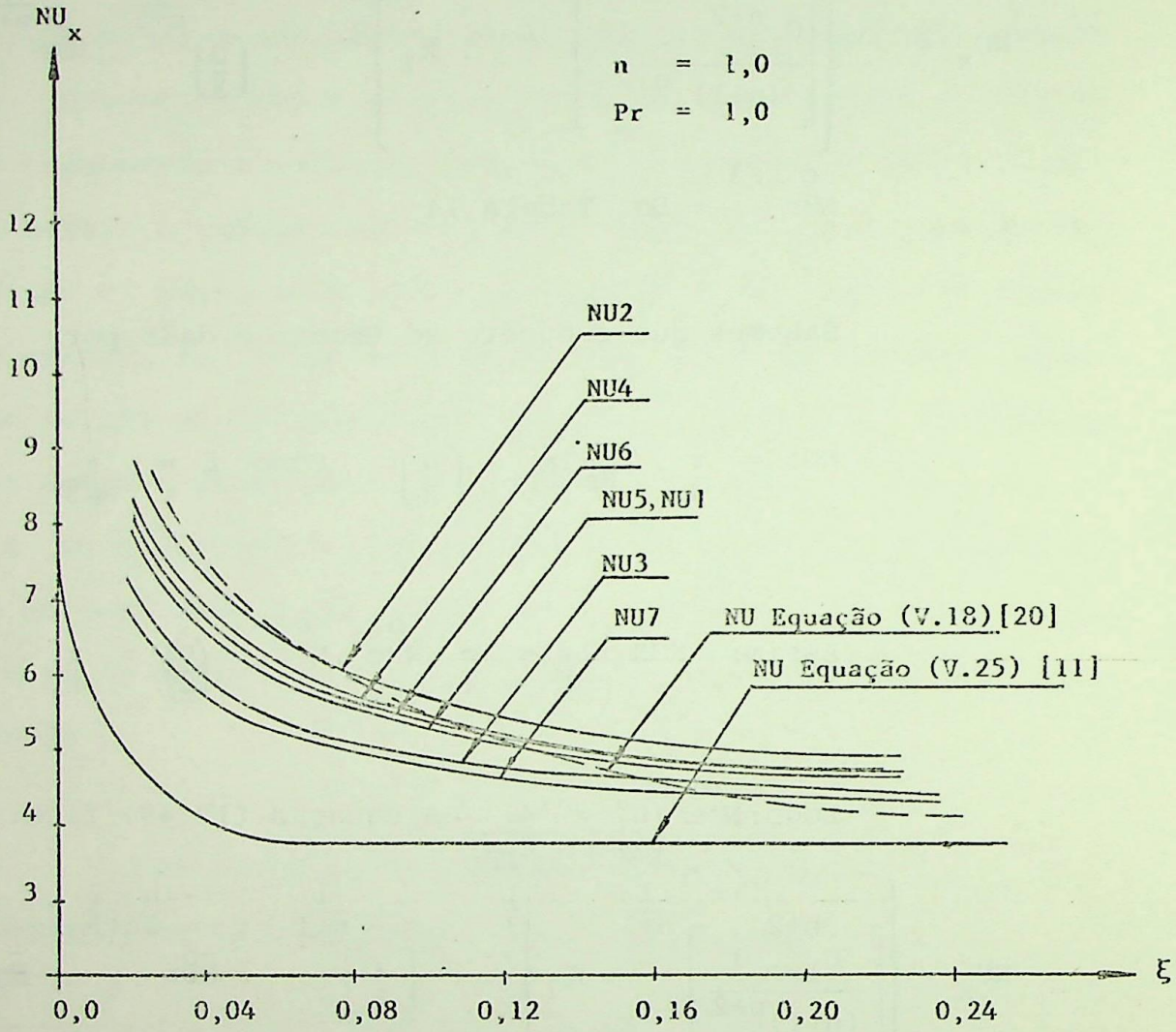


Gráfico 01 - Comparação da equação (IV.49) com as equações (V.18) e (V.25) para $n = 1$.

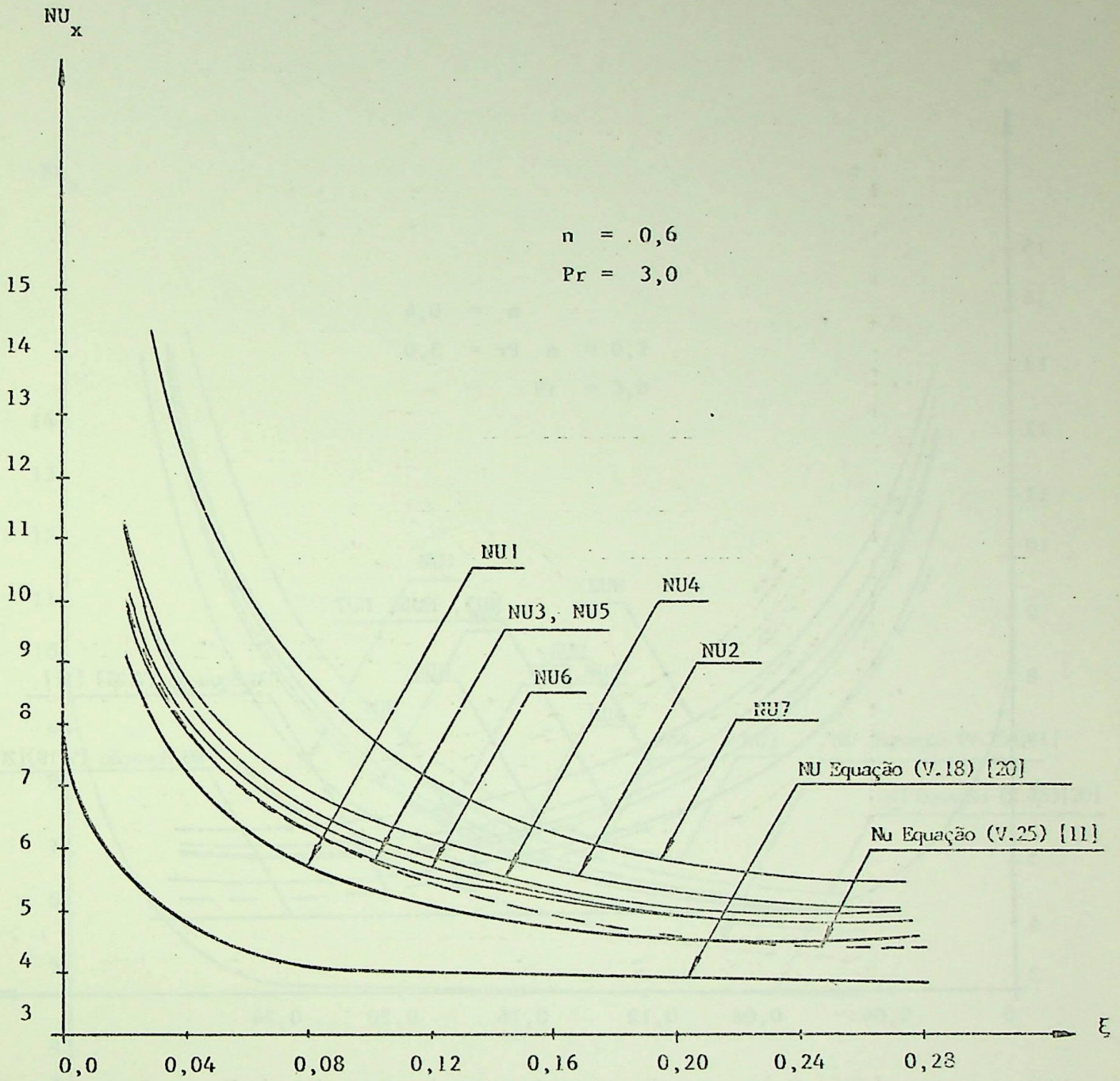


Gráfico 02 - Comparação da equação (IV.49) com as equações (IV.18) e (V.25) para $n = 0,6$.

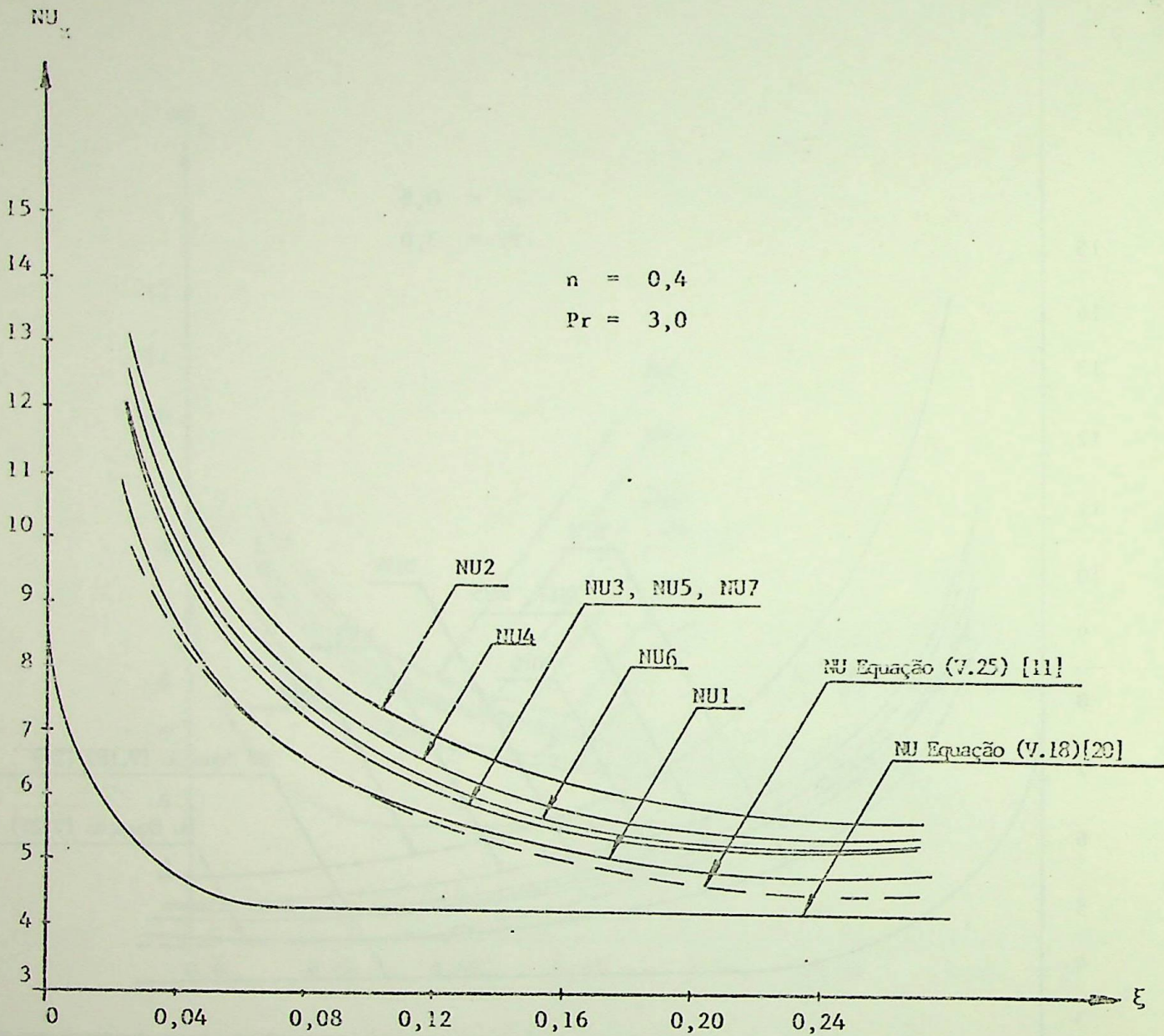


Gráfico 03- Comparação da equação (IV.49) com as equações (V.18) e (V.25) para $n = 0,4$.

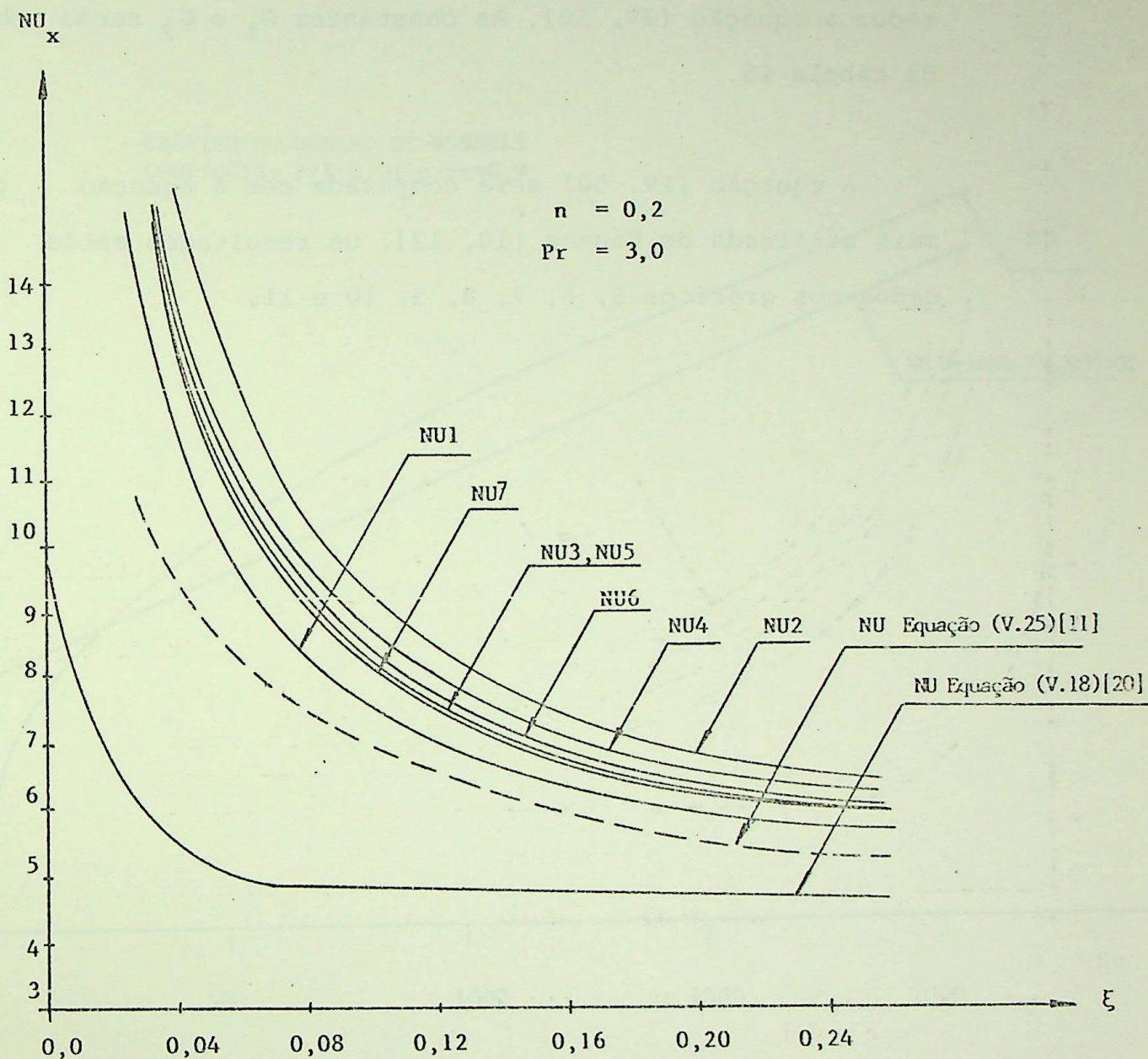


Gráfico 04 - Comparação da equação (IV.49) com as equações (V.18) e (V.25) para $n = 0,2$.

Para escoamento de fluido Newtoniano a troca térmica será obtida fazendo $n = 1$ na equação (IV. 49) que por sua vez se reduz a equação (IV. 50). As constantes G_1 e G_2 serão obtidas da tabela 15.

A equação (IV. 50) será comparada com a equação (V.28) mais utilizada de Hausen [10, 12]. Os resultados estão indicados nos gráficos 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11.

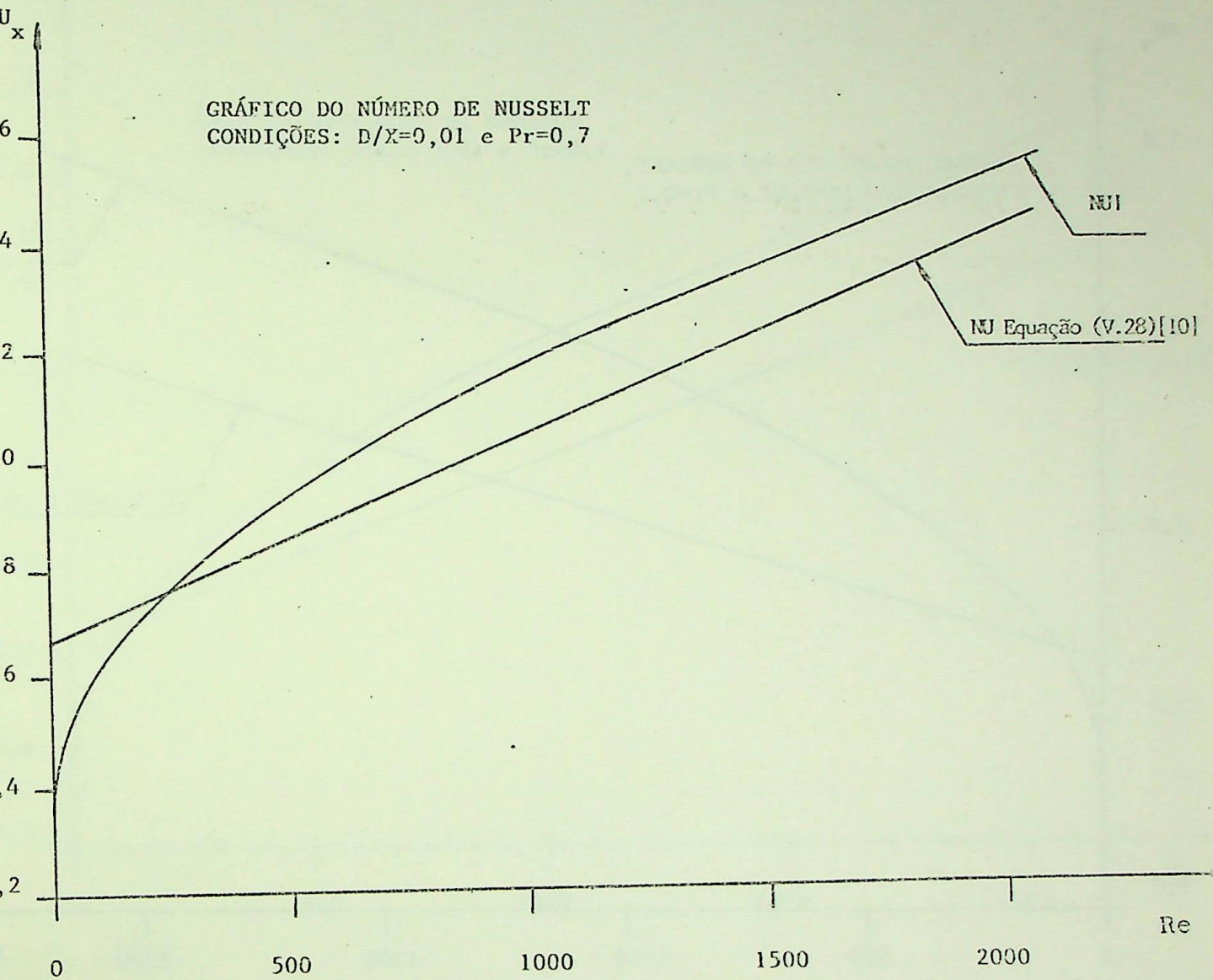


Gráfico 05 - Comparação entre o número de Nusselt obtido pela equação (IV.50) com o obtido pela equação (V.28) de Hausen.

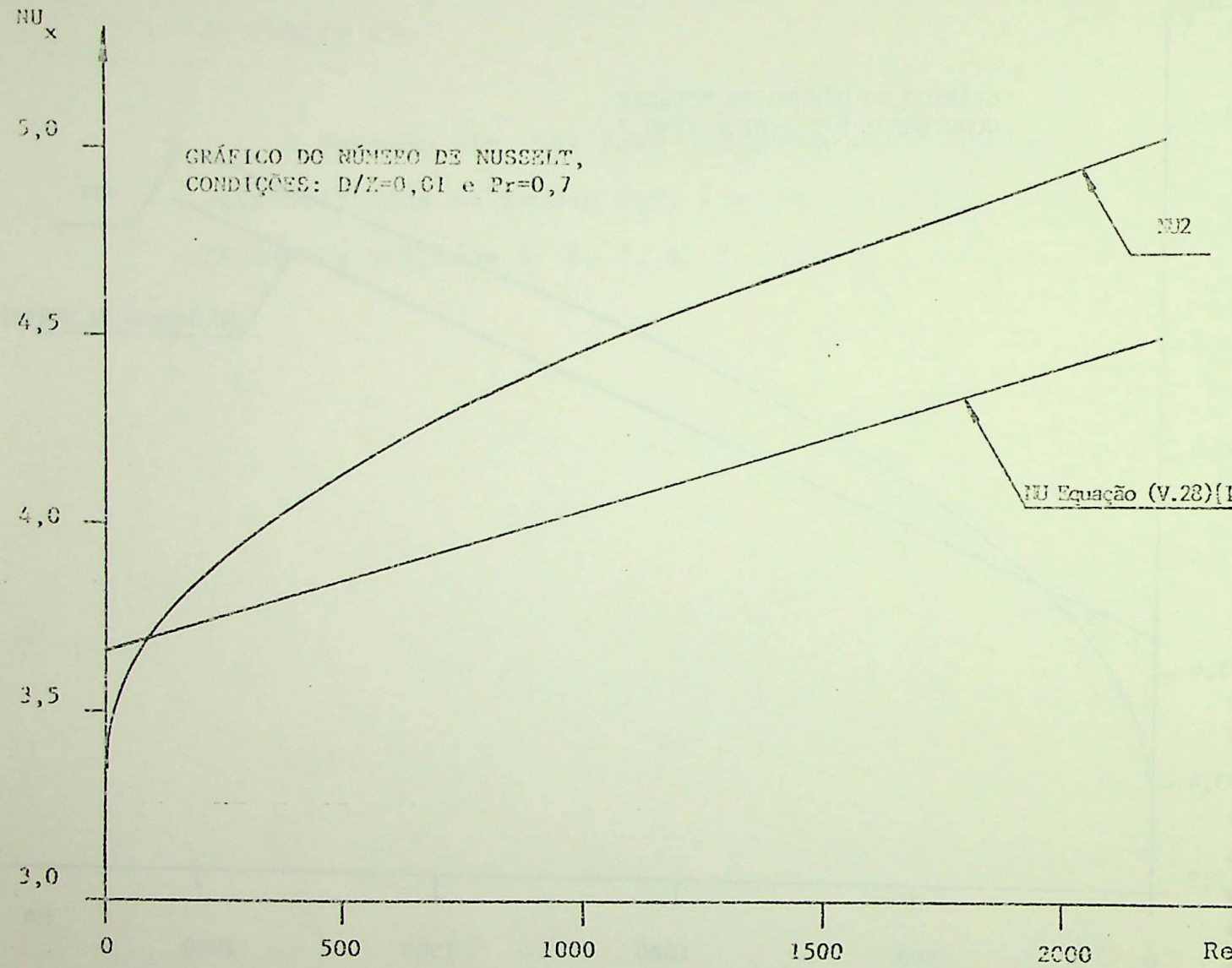


Gráfico 06 - Comparação entre o número de Nusselt obtido pela equação (IV.50) com o obtido pela equação (V.28) de Hausen.

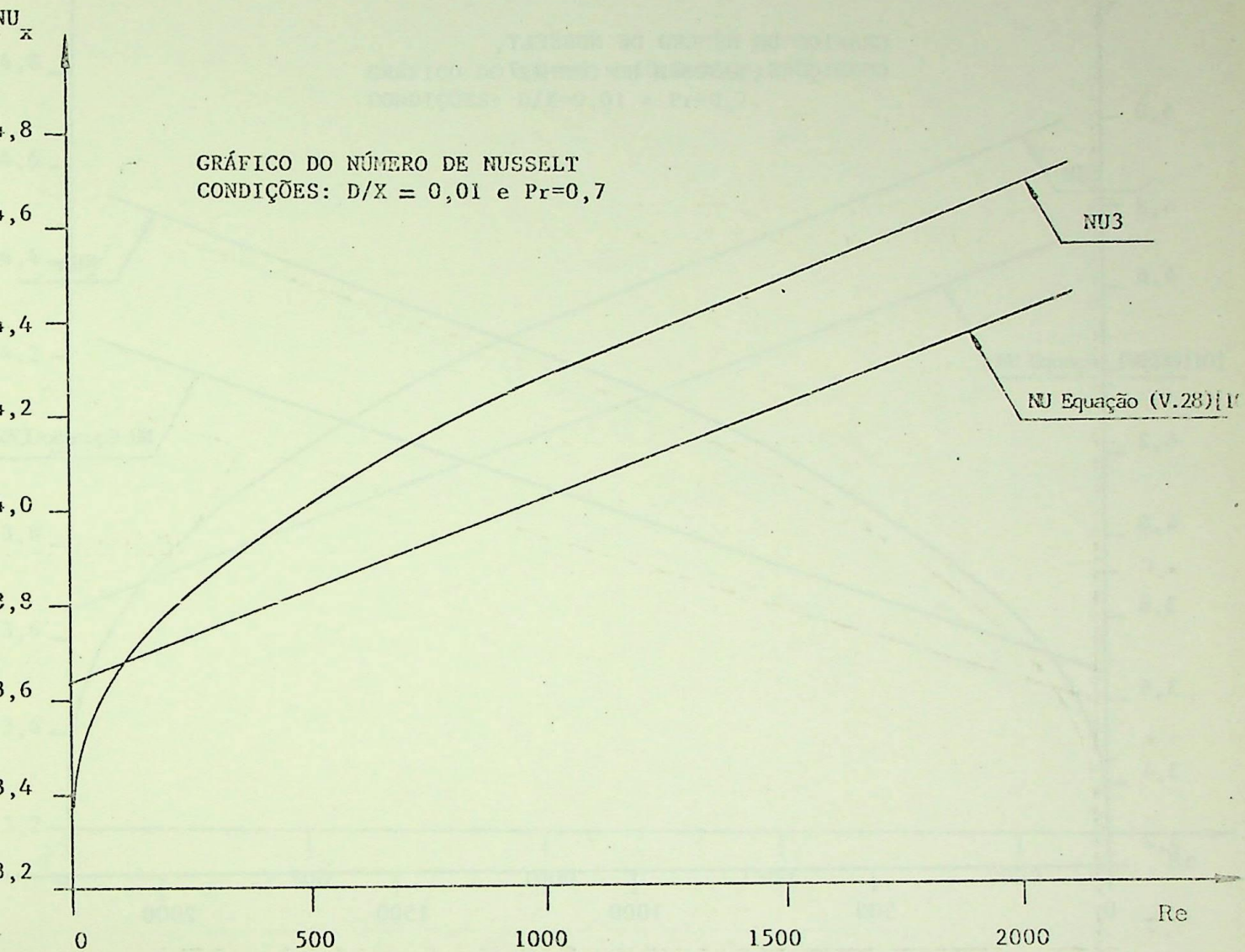


Gráfico 07 - Comparação entre o número de Nusselt obtido pela equação (IV.50) com o obtido pela equação (V.28) de Hausen.

GRÁFICO DO NÚMERO DE NUSSELT,
 CONDIÇÕES: $D/X=0,01$ e $Pr=0,7$

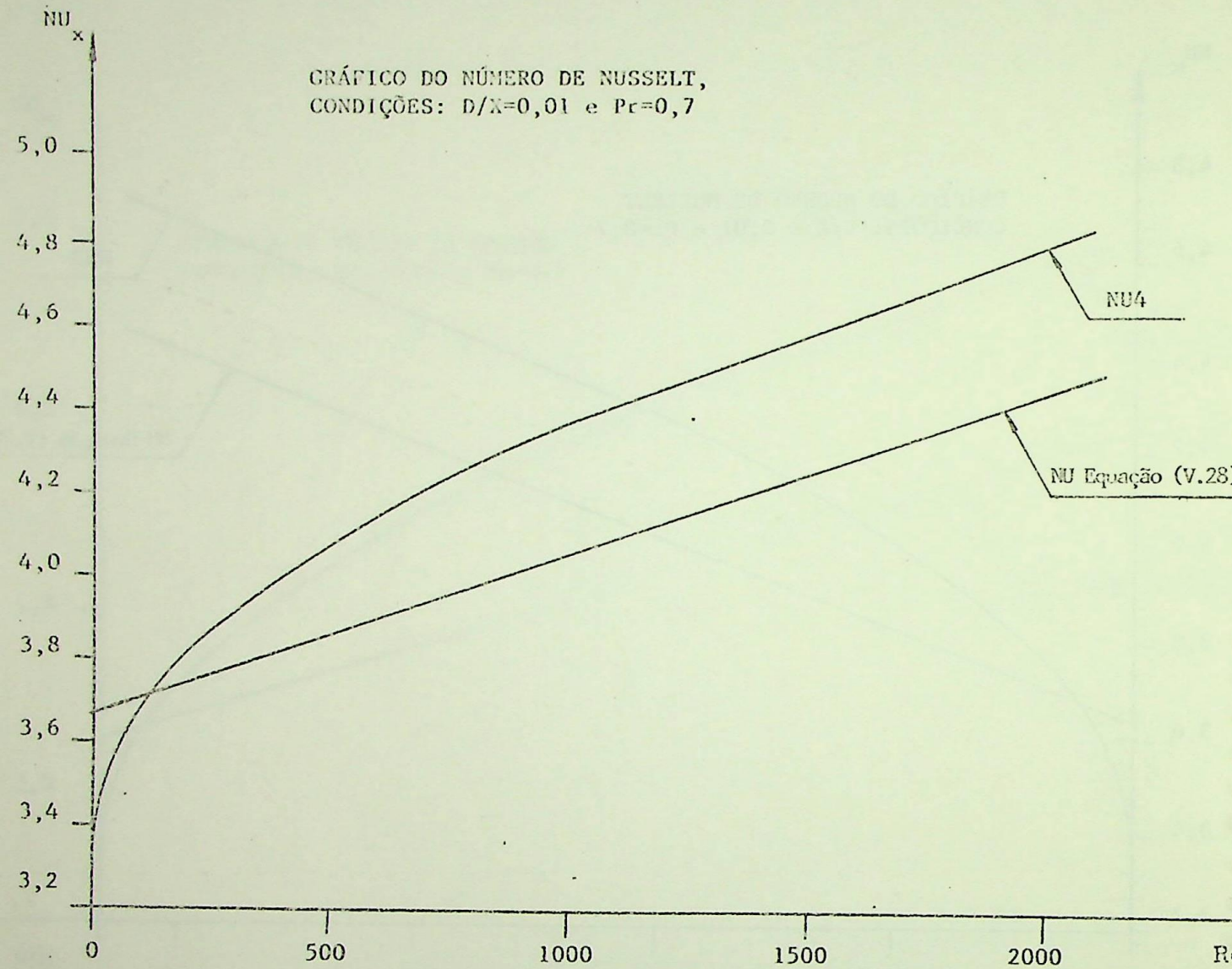


Gráfico 08- Comparação entre o número de Nusselt obtido pela equação (IV.50) com o obtido pela equação (V.28) de Hausen.

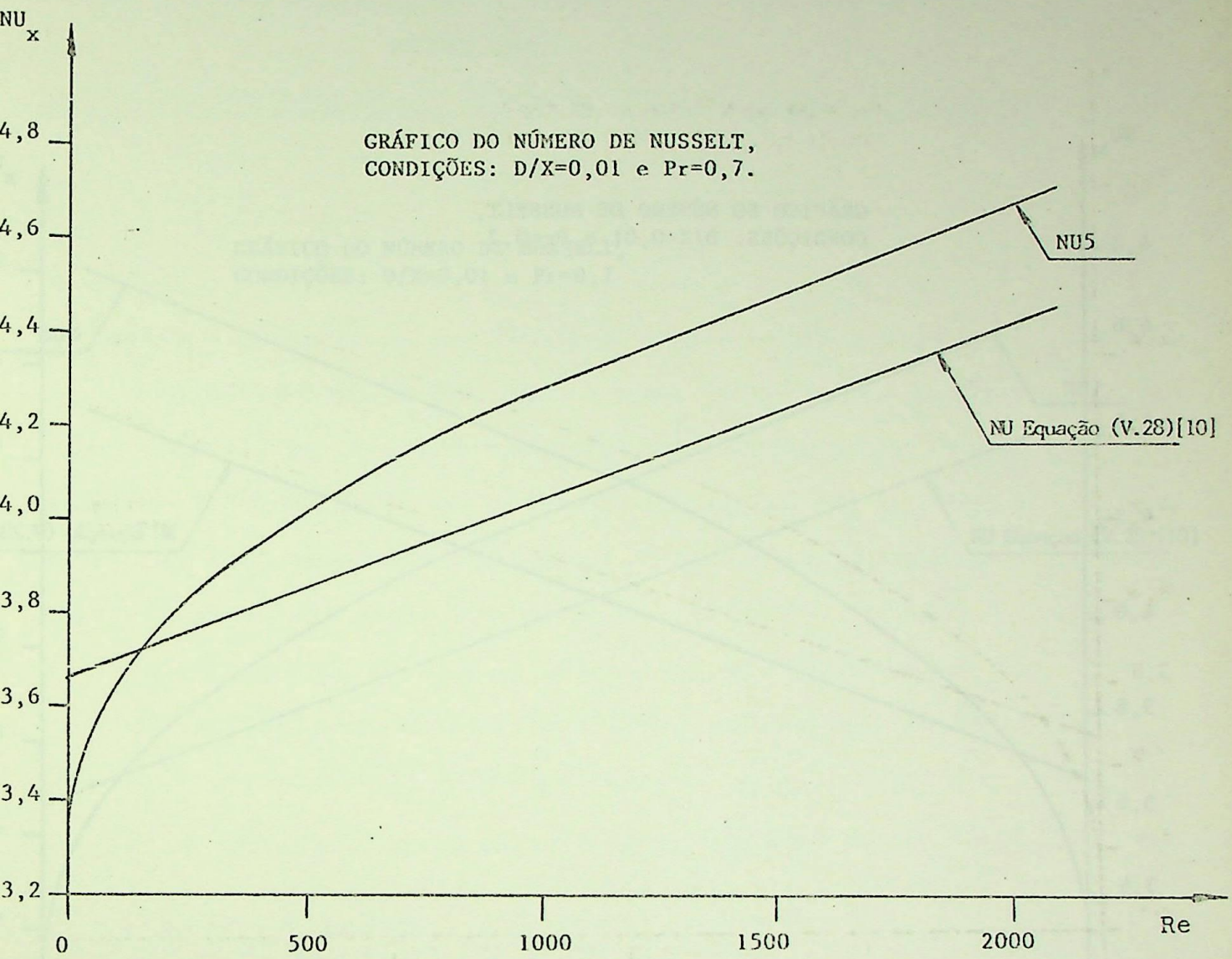


Gráfico 09 - Comparação entre o número de Nusselt obtido pela equação (IV.50) com o obtido pela equação (V.28) de Hausen.

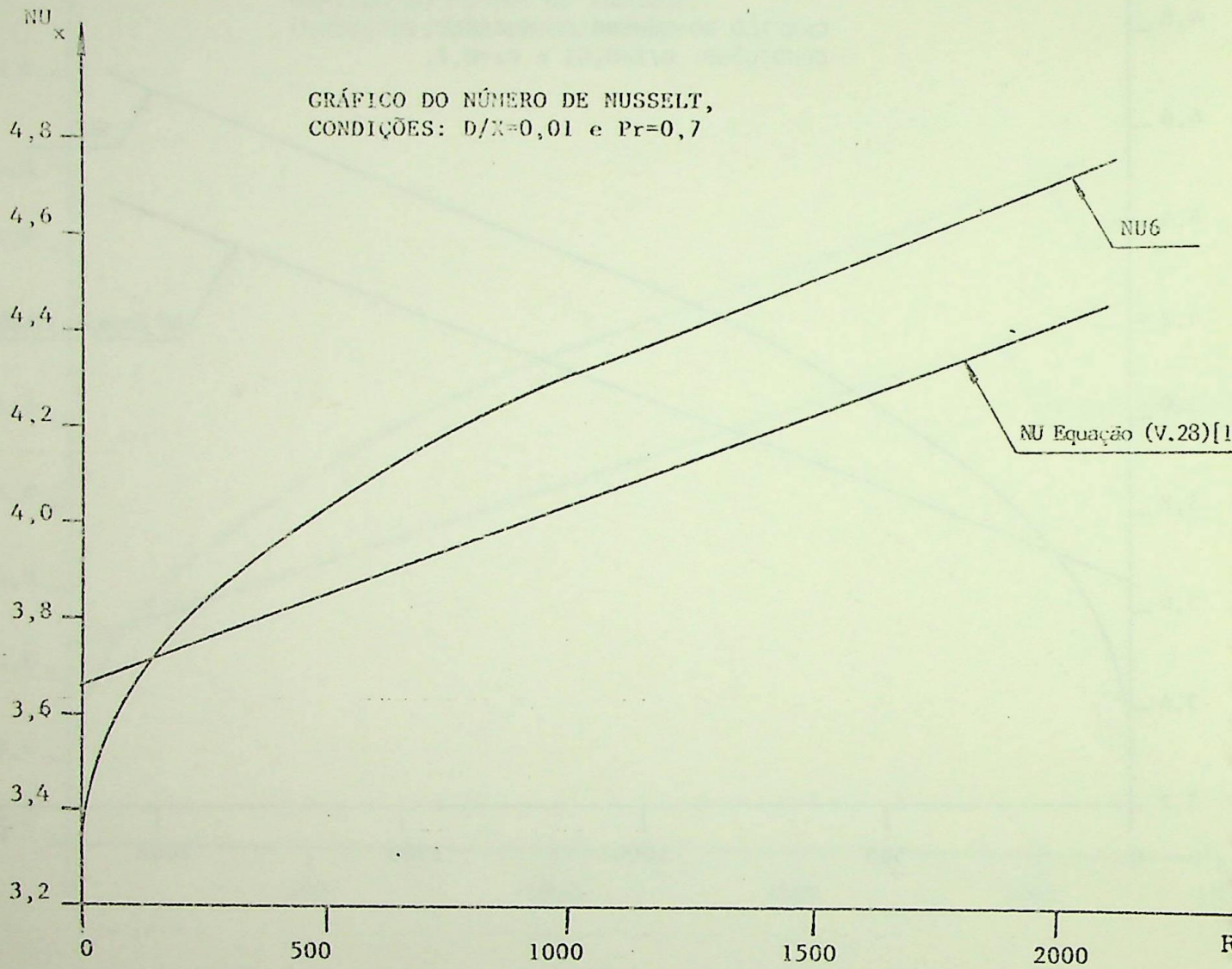


Gráfico 10 - Comparação entre o número de Nusselt obtido pela equação (IV.50) com o obtido pela equação (V.28) de Hausen.

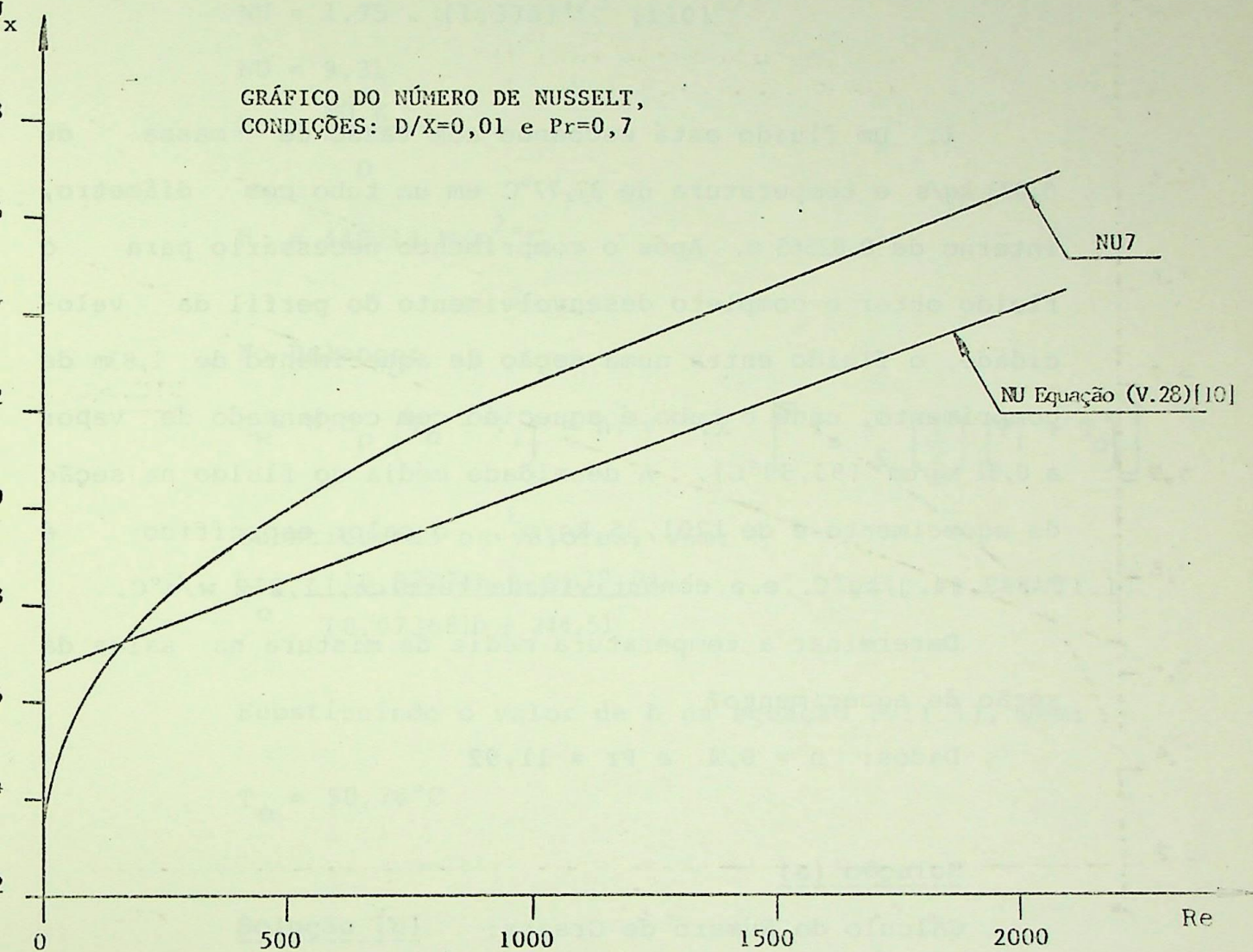


Gráfico 11 - Comparação entre o número de Nusselt obtido pela equação (1V.50) com o obtido pela equação (V.28) de Hausen.

VII - APLICAÇÃO

1. Um fluido está escoando com vazão de massa de 0,073 kg/s e temperatura de 37,77°C em um tubo com diâmetro, interno de 0,02565 m. Após o comprimento necessário para o fluido obter o completo desenvolvimento do perfil da velocidade, o fluido entra numa seção de aquecimento de 1,83m de comprimento, onde o tubo é aquecido com condensado de vapor a 0,81 kg/cm² (93,33°C). A densidade média do fluido na seção de aquecimento é de 1201,35 kg/m³, o calor específico é 3.349,44 j/kg°C e a condutividade térmica, 1,212 w/m°C.

Determinar a temperatura média da mistura na saída da seção de aquecimento?

Dados: $n = 0,4$ e $Pr = 11,92$

Solução (a)

Cálculo do Número de Graetz:

$$NGZ = \frac{W \cdot C_p}{K \cdot X} = \frac{0,073 \cdot (3349,44)}{(1,212) \cdot 1,83} = 110$$

Para utilizar a Equação (V.25) o número de Graetz tem que ser maior que 100.

$$\Omega = \frac{3.(0,4) + 1}{4.(0,4)} = 1,375$$

$$NU = 1,75 \cdot \Omega^{1/3} \cdot (NGZ)^{1/3} \dots\dots\dots (V.25)$$

$$NU = 1,75 \cdot (1,375)^{1/3} (110)^{1/3}$$

$$NU = 9,31$$

$$h = \frac{NU \cdot K}{D}$$

$$h = 440,14 \text{ W/m}^2\text{ }^\circ\text{C}$$

No Balanço:

$$q_w = W \cdot C_p (T_o - T_i) = h \cdot \pi \cdot D \cdot X \left[T_s - \left(\frac{1}{2}\right) (T_i + T_o) \right]$$

Substituindo os valores, vem:

$$T_o = \frac{(10,9717)h + 9237,01}{(0,07368)h + 244,51} \dots\dots\dots (VII.1)$$

Substituindo o valor de h na equação (VII.1), vem:

$$T_o = 50,70^\circ\text{C}$$

Solução (b)

Utilizando a equação (V.26)

$$NU = 1,75 \cdot \Omega^{1/3} \cdot (NGZ)^{1/3} \cdot \left(\frac{\gamma}{\gamma_s}\right)^{0,14} \dots\dots\dots (V.26)$$

Onde $\frac{\gamma}{\gamma_s} = \frac{K'_b}{K'_s} = \frac{K_b}{K_s}$

A referência [11] fornece: para,

$$T_{\text{Média}} = (37,77 + 50,79)/2 = 44,30^{\circ}\text{C}$$

$$K_b = K_{44,30} = 126,49 \text{ kg} \cdot \text{s}^{n-2} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$K_s = K_{93,33} = 64,44 \text{ kg} \cdot \text{s}^{n-2}, \text{ m}^{-1}$$

$$NU = 1,75 \cdot (1.375)^{1/3} \cdot (110)^{1/3} \cdot \left(\frac{126,49}{64,44}\right)^{0,14}$$

$$NU = 10,22 \text{ e}$$

$$h = 482,91 \text{ W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}$$

Que substituindo na equação (VII.1), temos:

$$T_o = 51,89^{\circ}\text{C}$$

Solução (c)

Usando a Equação (IV.49)

$$NU_x = \left\{ \left[\frac{C_1^{n+2} \cdot I}{(n+1)^{n+2}} \right]^{1/(n+1)} \cdot K_1 \right\}^{1/3} \left(\frac{D}{X} \right)^{1/(n+1)} \cdot NRe^{1/(n+1)} \cdot NPr^{1/3} +$$

+ Equação Tabela 14

Cálculo do Número de Reynolds:

$$NGZ = \frac{\pi}{4} \cdot (NRe) \cdot (NPr) \cdot \left(\frac{D}{X} \right) \Rightarrow$$

$$110 = \frac{\pi}{4} \cdot (NRe) \cdot 11,92 \cdot \left(\frac{0,02565}{1,83} \right) \Rightarrow$$

$$NRe^{\circ} = 838,28$$

Utilizando as constantes da posição 4 na tabela 10 vem:

$$C_1 = 2; \quad I = 0,1175 \quad \text{e} \quad K_1 = 0,1333$$

e calculando o Número de Nusselt para a posição 4 da tabela 14 com $n = 0,4$, que resulta em:

$$NU_x = \left\{ \left[\left(\frac{2}{1,4} \right)^{2,4} \cdot 0,1175 \right]^{1/1,4} \cdot 0,1333 \right\}^{1/3} \left(\frac{0,02565}{1,83} \right)^{1/1,4}$$

$$(838,28)^{1/1,4} (11,92)^{1/3} + 3,6219$$

$$NU_x = 4,9939 + 3,6219 = 8,6158$$

$$h = 407,11 \text{ w/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Substituindo na Equação (VII.1) resulta:

$$T_o = 49,92^\circ\text{C}$$

A Equação (IV.49) apresenta um desvio de $-7,46\%$ com relação a Equação (V.25) e $-15,70\%$ com relação a Equação (V.26).

Se se multiplica o segundo membro da Equação (IV.49) pelo fator de correção $\left(\frac{\gamma}{\gamma_s} \right)^{0,14}$, esta fornece $NU_x = 9,4691$ o que dá um desvio de $1,71\%$ quando comparado com a Equação (V.25) e $-7,35\%$, se comparado com a Equação (V.26). Para este caso a temperatura encontrada é de $T_o = 50,97^\circ\text{C}$

2. Para um perfil de velocidade plenamente desenvolvido, calcular o comprimento necessário de um tubo de 0,25cm de diâmetro interno para elevar a temperatura de mistura do benzeno desde 16°C até 38°C. A temperatura da parede do tubo é constante e igual a 66°C, e a velocidade média é 0,5 m/s. Para uma temperatura de mistura média de:

$$T = \frac{16 + 38}{2} = 27^{\circ}\text{C}$$

As propriedades do fluido são:

$$\rho = 874,6 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 5,89 \times 10^{-4} \text{ N.s/m}^2$$

$$C_p = 1.757,4 \text{ J/Kg.}^{\circ}\text{K}$$

$$K = 0,159 \text{ W/m.}^{\circ}\text{K}$$

$$\text{Pr} = 6,5$$

$$n = 1.0$$

O número de Reynolds é:

$$\text{Re} = \frac{V.D.\rho}{\mu} = 1856$$

Portanto, o escoamento é Laminar:

Solução (a)

Utilizando a equação (V.28) de Hausen

$$\text{NU}_m = \frac{h.D}{K} = 3,66 + \frac{0,0668 \left[\left(\frac{D}{X} \right) \cdot \text{Re} \cdot \text{Pr} \right]}{1 + 0,04 \left[\left(\frac{D}{X} \right) \text{Re} \cdot \text{Pr} \right]^{2/3}}$$

Substituindo os valores, obtém-se uma equação com duas incógnitas, h e X , que pode ser simplificada para dar:

$$h = 232,78 + \frac{128,13}{1 + 0,04 \left[\frac{30,16}{X} \right]^{2/3}} \dots\dots\dots (VII.2)$$

onde h está em $w/m^2 \cdot K$ e x está em metros. Torna-se necessário encontrar uma outra equação para resolver o sistema. Um balanço de energia no fluido fornece esta equação.

$$q_w = W \cdot C_p \Delta T = h \cdot \pi \cdot D \cdot X (T_s - T)$$

ou

$$h = \frac{\rho \cdot V \cdot D \cdot C_p \cdot \Delta T}{4 \cdot X \cdot (T_s - T)}$$

que, substituindo os valores fornece:

$$h = \frac{270,93}{X} \dots\dots\dots (VII.3)$$

Eliminando h entre (VII.2) e (VII.3), resulta:

$$\frac{270,93}{X} = 232,78 + \frac{\left(\frac{128,13}{X} \right)}{1 + 0,04 \left[\frac{30,16}{X} \right]^{2/3}}$$

Que pode ser resolvido por tentativas, fornecendo:

$$x = 0,786 \text{ m.}$$

Considerando a influência da variação da viscosidade, para temperatura superficial $T_s = 66^\circ\text{C}$, a viscosidade é :

$$\mu_s = 3,87 \times 10^{-4} \text{ N.S/m}^2; \text{ portanto}$$

$$\left(\frac{\mu}{\mu_s}\right)^{0,14} = \left[\frac{5,89 \times 10^{-4}}{3,87 \times 10^{-4}}\right]^{0,14} = 1,061$$

Multiplicando o segundo termo da Equação (V.28) por este fator e resolvendo simultaneamente com a equação do balanço de energia, o comprimento resultante é 0,765m, portanto, 2,7% menor que o obtido, sem levar-se em conta a correção da viscosidade.

Solução (b)

O Número de Nusselt é dado pela Equação (IV.50) com os parâmetros da posição 2 da tabela 15.

$$NU_2 = \frac{h \cdot D}{K} = 3,36 + 0,39334 \cdot \left(\frac{D}{X}\right)^{0,5} \cdot Re^{0,5} \cdot Pr^{1/3}$$

Substituindo os valores vem:

$$\frac{h \cdot (0,25 \times 10^{-2})}{0,159} = 3,36 + 0,39334 \cdot \left(\frac{0,25 \times 10^{-2}}{X}\right)^{0,5} \cdot (1856)^{0,5} \cdot x^{0,5}$$

$$(6,5)^{1/3} \Rightarrow 0,016h = 3,36 + \frac{1,581}{\sqrt{X}} \dots \dots \dots (VII.4)$$

Têm-se duas incógnitas, h e x , torna-se necessário encontrar uma outra equação. Utilizando o balanço de energia, equação (VII.3) da solução (a), tem-se:

$$h = \frac{270,93}{x} \text{ w/m}^{\circ}\text{K}$$

Que substituindo na equação (VII.4) fornece:

$$3,36X + 1,581 \sqrt{X} - 4,260 = 0$$

Cujo resultado é $X = 0,837 \text{ m}$

Multiplicando o segundo membro da equação (VII.4) pelo fator 1,061 e resolvendo simultaneamente com a equação do balanço da energia, o comprimento resultante é 0,779 m que é 6,93 por cento menor que o obtido, sem levar-se em conta a correção de viscosidade.

Analisando os resultados encontrados, observamos que o comprimento calculado na solução (b), sem a correção pelo fator da viscosidade, está 6,49% maior que o calculado pela equação (V.26) de Hausen, na solução (a). Se considerarmos a correção pela viscosidade a diferença será de 1,83%.

VIII - COMENTÁRIO, CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste capítulo apresenta-se um resumo dos capítulos anteriores com uma análise dos problemas encontrados para a elaboração do presente trabalho.

No Capítulo I, foi feita uma pesquisa dos trabalhos existentes sobre a troca térmica em tubo circular, com regime laminar, temperatura constante da parede e escoamento de fluido não Newtoniano. Juntamente com a pesquisa, foi apresentado um balizamento que orientou a linha de desenvolvimento deste trabalho.

No Capítulo II, definiu-se a equação integral da camada limite hidrodinâmica de Von Kármán e a equação da energia de Kruzhilin. Mostrou-se a metodologia desenvolvida para utilização das equações de Von Kármán e Kruzhilin, com as condições de contorno, para obter as equações que podem representar os perfis de velocidade e temperatura.

No Capítulo III, mostraram-se as definições e os desenvolvimentos clássicos da camada limite, solução exata da camada limite por Blasius. Partindo de uma placa plana sujeita a um escoamento, levantaram-se os principais parâmetros que regem o escoamento. Os parâmetros são: espessura

da camada limite laminar, coeficiente de arrasto, espessura de deslocamento, espessura da quantidade de movimento e parâmetro de forma da camada limite. Definiu-se, ainda, a metodologia para a utilização da equação integral da quantidade de movimento de Von Kármán. Através das condições de contorno, obteveram-se as principais equações que podem representar o perfil da velocidade em placa plana e, analisando os parâmetros que estes perfis geram, selecioná-los. Analisou-se, também, a transferência de calor em placa plana, método de Pohlhausen e método da determinação da equação integral da energia de Kruzhilin. Determinaram-se as equações que representam o perfil da camada limite térmica. Finalmente, examinou-se a transferência de calor ao longo da placa plana, com escoamento em regime laminar de fluido não Newtoniano.

No Capítulo IV, sobre transferência de calor em tubo circular, apresenta-se um método analítico baseado na teoria da camada limite hidrodinâmica e térmica para o cálculo do número de Nusselt com regime laminar e temperatura constante da parede. O método consiste em analisar o escoamento em duas partes. Na primeira parte é a região de entrada onde o escoamento está se desenvolvendo. Considerando a região de entrada como placa plana e mediante a aplicação das equações integrais de Von Kármán e Kruzhilin, calcula-se o número de Nusselt para camada limite térmica. Na segunda parte para escoamento totalmente desenvolvido. Nesta região, tanto o perfil da velocidade quanto o da temperatura já estão desenvol

vidos. A transferência de calor pode ser calculada mediante a aplicação da Lei de Fourier e do conceito de temperatura Bulk. As condições básicas são: temperatura constante da parede; escoamento totalmente desenvolvido; regime laminar e as propriedades constantes do fluido.

Para o cálculo, determina-se um perfil para a velocidade e temperatura, tanto para a região de entrada, como para a região de escoamento totalmente desenvolvido, mediante a aplicação das condições de contorno junto a parede do tubo. O fluxo total de calor será dado pelo número de Nusselt total que é a soma do número de Nusselt calculado na região de entrada, em que o escoamento está se desenvolvendo, com o número de Nusselt calculado na região de escoamento totalmente desenvolvido. A equação (IV.49) representa o número de Nusselt total para fluido não Newtoniano.

A aplicação do método foi feita considerando o fluido da Lei de Potência. A sugestão seria fazer a mesma análise considerando o escoamento de um plástico de Bingham.

O Capítulo V apresenta os principais trabalhos sobre trocas térmicas em tubo circular para escoamento de fluido não Newtoniano.

A análise de J. Raghuramam [20] considera um tubo circular trocando calor com um fluido da Lei de Potência escoando internamente no tubo. O escoamento é assumido completamente desenvolvido, em regime laminar e com temperatura cons-

tante de parede. Raghuraman considera que ocorrem regiões distintas de troca térmica (na entrada e ao longo do tubo). O seu trabalho impõe uma condição: a de que $\Lambda = W_1 \cdot Cp_1 / W_2 \cdot Cp_2 < 1$. A partir daí resolve a equação da energia (V.2), adotando um perfil adimensional de velocidade para fluido da Lei de Potência (V.5) e separando em variáveis que são somatórios cuja função deve satisfazer a equação de Sturm-Liouville (V.10). Assumindo, ainda, algumas condições limites, obtém as funções ortogonais para o intervalo $0 \leq R \leq 1$. Utilizando o conceito de número de Nusselt equação (V.16), a equação (V.9) da energia desmembrada em variáveis com a equação (V.17) da temperatura de fluxo interno, obtém a equação (V.18) do número de Nusselt local. Para tubos longos onde os efeitos da região de entrada são desprezados. A equação (V.18) pode ser representada pela equação (V.19). Ao final do trabalho o autor sugere que o número de Nusselt, equação (V.19), pode ser usado para projetos de trocas térmicas em tubos longos.

A solução de Lévêque [11] apresenta uma aproximação para a equação (V.21) da energia. O autor assume que a temperatura da camada limite é confinada na zona próxima à parede do tubo. O escoamento é laminar. Estas condições correspondem a valores altos do número de Graetz. Um Gradiente de velocidade linear é adotado próximo à temperatura da camada limite.

O resultado, para fluido Newtoniano é apresentado na equação (V.23). Pigford [11, 15] apresenta uma definição mais geral para o gradiente de velocidade quando trata de es-

coamento de fluido não Newtoniano. Utilizando a extensão de Pigford na equação de Lévêque, resulta na equa  o (V.25) do número de Nusselt. As condi  es para o uso da equa  o (V.25) são: número de Graetz > 100 ; $n > 0,1$; as propriedades físicas do fluido são independentes da temperatura; a temperatura da parede permanece constante; o perfil da velocidade se estabiliza nas proximidades da parede.

Hausen [12] propõe uma equa  o que representa a soluço clássica de Graetz para temperatura constante da parede e distribui  o parabólica da velocidade. A equa  o (V.28) calcula o número de Nusselt para o comprimento de tubo x , escoamento em regime laminar e fluido Newtoniano.

No capítulo 6 - resultados e compara  es, apresentam-se os resultados encontrados que são comparados com as equa  es dos trabalhos existentes. Para fluido não Newtoniano escoando um tubo circular com efeito da região de entrada no balanço total da troca térmica, a equa  o (V.49) foi encontrada e representa a troca térmica total, quando se analisa o escoamento em duas partes: região de entrada, onde a camada limite hidrodinâmica e térmica está se desenvolvendo, e região de escoamento desenvolvido.

Para tubo muito longo, onde o efeito da região de entrada    muito pequeno ou quando se desconsidera este efeito, a equa  o (IV.49) se reduz às equa  es indicadas na tabela 14, para perfis da temperatura e velocidade assumidos. Nesta con

dição a equação (IV.49) é comparada com a equação (V.20) de Raghuramam e os resultados apresentados na Tabela 16. O desvio máximo encontrado na tabela 16 está na ordem de 16%. Este resultado é considerado aceitável e satisfatório.

Para escoamento em tubo circular, quando se tem a região de entrada influenciando diretamente no balanço total da troca térmica, a equação (IV.49) se apresenta completa, com as equações da Tabela 14, juntamente com os valores da Tabela 10, para os vários perfis de velocidade e temperatura adotados. A equação (IV.49) completa é comparada com a equação (V.18) de Raghuramam e com a equação (V.25) de Lévêque.

Os resultados estão indicados nos Gráficos 1, 2, 3, 4 respectivamente para o índice de comportamento $n = 1; 0,6; 0,4$ e $0,2$. Os gráficos foram traçados $NU_x \times \xi$, onde NU_x = número de Nusselt local e ξ = comprimento adimensional. A equação (V.18) já está expressa em termos de ξ . Necessitamos, para a comparação, expressar a equação (IV.49) e (V.25) em termos de ξ . Para a equação (V.25) se consegue isto sem maiores problemas. Na equação (IV.49) não é possível expressar o número de Nusselt somente em função de n e ξ , continua aparecendo o número de Prandtl. Assim, quando se plota $NU_x \times \xi$ e se fixa n e se dão valores para ξ na equação (IV.49), esta apresenta um desvio com relação aos demais, pois tem o número de Prandtl, que é um termo de peso na equação. As demais equações são traçados NU_x em função de n e ξ , onde se fixa n e varia-se ξ . Na equação (IV.49) tem-se NU_x em função de n, ξ e Pr . O número de Prandtl vai influir diretamente na comparação,

pois depende exclusivamente do fluido que escoar no tubo. Como exemplo para comparação da equação (IV.49), adotou-se $Pr = 1,0$ no Gráfico 1 e $Pr = 3,0$ para os demais gráficos.

Os resultados quando comparados com a equação (V.25) de Lévêque estão bem próximos. Ao comparar-se com a equação (V.18), os desvios são significativos para ξ , tendendo a zero. A medida que ξ aumenta, o desvio diminui e os valores são aceitáveis.

Para a equação (V.18), Raghuraman parte de um valor de teste para β e θ nas equações (V.9) e (V.6) e, utilizando o método de Newton-Raphson, consegue determinar os seis primeiros valores de β para os vários valores de n e Λ . Para a faixa de valores usados para Λ apenas o primeiro valor de β era significativamente diferente. Os outros valores diferem apenas um pouco. Para o caso de temperatura constante da parede, Raghuraman adota $\Lambda = 0$ e o resultado encontrado na equação (V.18) não é muito preciso para valores de ξ tendendo a zero.

Quando ξ tende a zero, implica em número de Graetz tendendo ao infinito. Isto provoca altos valores do coeficiente de transferência de calor. Em seu artigo, Raghuraman recomenda apenas a utilização da equação (V.20) para projeto de tubos longos.

Concluimos, então, que para valores de ξ tendendo a zero a equação (IV.49) representa um pequeno desvio, quando

comparado com a equação (V.25) de Lévêque. Para tubos longos a equação (IV.49) apresenta um desvio na ordem de 16%, quando comparado com a equação (V.20) de Raghuramam. Da análise acima, concluímos que a equação (IV.49) pode ser utilizada para projeto de tubo circular, temperatura constante da parede, regime laminar e escoamento de fluido não Newtoniano.

Para escoamento de fluido Newtoniano o número de Nusselt será obtido pela equação (IV.50), que foi comparada com a equação (V.28), mais utilizada de Hausen. Os resultados estão indicados nos gráficos 5,6,7,8,9,10 e 11. Para a comparação foi fixado alguns parâmetros: a relação $(D/X)=0,01$ e o número de Prandtl, $Pr = 0,7$. O menor desvio encontrado, quando se compara a equação (IV.50) com (V.28), está na ordem de -8,19%, Gráfico número 5 e o maior desvio está na ordem de 11,42%, Gráfico número 6. Os desvios encontrados são pequenos quando comparados com outras equações que apresentam desvio superior a 20% da equação de Hausen. Isto justifica o emprego da equação (IV.50) para projeto de trocador de calor com temperatura constante da parede, regime laminar e escoamento de fluido Newtoniano.

No capítulo 7 - Aplicação, apresentam-se dois exemplos para o uso das equações (IV.49) e (IV.50). O exemplo número 1 é para fluido não Newtoniano e o exemplo número 2 é para fluido Newtoniano. Dos exemplos citados, conclui-se que as diferenças dos valores encontrados são pequenas e justificam o emprego da equação (IV.49) e (IV.50) no projeto de tro-

cadores de calor com regime laminar, temperatura constante da parede e escoamento de fluido Newtoniano e não Newtoniano.

Com os resultados e comparações e as aplicações mostradas nos capítulos 6 e 7, por si só justificam o uso da equação (IV.49) na área de projetos de trocadores de calor. Para salientar ainda mais o uso da equação (IV.49), apresentam-se, a seguir, algumas vantagens com relação as demais equações utilizadas:

- É válida tanto para fluido Newtoniano, quanto para fluido não Newtoniano;
- É uma expressão simples, com grande facilidade de utilização;
- Facilidade de obtenção dos parâmetros da equação, basta entrar nas Tabelas 10 e 14;
- Baixo desvio com relação as equações experimentais, na ordem de 16% máximo, enquanto as demais apresentam um desvio na ordem de 40% - 50%, referência [8];
- Uma equação gerada teóricamente cujo os resultados se aproximam dos obtidos experimentalmente.

Um exemplo prático da aplicação do presente trabalho, seria no projeto de trocadores de calor, utilizados em usinas nucleares, onde o calor gerado pelo reator é "transportado" pelo óxido de tório (que é um fluido não Newtoniano) para aquecer o sistema que vai produzir o vapor necessário para gerar energia.

APÊNDICE [A]

DETERMINAÇÃO DAS EQUAÇÕES DA CAMADA LIMITE EM PLACA PLANA

A equação será determinada mediante a aplicação das condições de contorno do Item II.2.

Supõe-se um tipo de perfil e determinam-se as constantes da equação.

Assim tem-se:

I.1. Perfil Polinomial

I.1.1. Equação do 1º Grau

Para equação do 1º grau, temos

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = c_0 + c_1(y/\delta) \text{ ou } u' = c_0 + c_1\eta$$

Aplicando as condições de contorno, temos:

$$1. u = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } u' = 0 \Rightarrow \eta = 0$$

$$c_0 = 0$$

$$2. u = u_\infty \Rightarrow y = \delta \text{ ou } u' = 1,0 \Rightarrow \eta = 1,0$$

$$1,0 = c_0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 1,0$$

Logo

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = y/\delta = \eta$$

I.1.2. Equação do 2º Grau

Para equação do 2º grau, temos perfil da forma:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = c_0 + c_1(y/\delta) + c_2(y/\delta)^2$$

ou

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2$$

Aplicando as condições de contorno, temos:

$$1. u = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad u' = 0 \Rightarrow \eta = 0$$

$$c_0 = 0$$

$$2. u = u_\infty \Rightarrow y = \delta \quad \text{ou} \quad u' = 1,0 \Rightarrow \eta = 1,0$$

$$1,0 = c_1 + c_2$$

$$3. \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow y = \delta \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u'}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow \eta = 1,0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = c_1 + 2c_2\eta \Rightarrow c_1 + 2c_2 = 0$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1,0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{temos: } c_1 = 2,0$$

$$c_2 = -1,0$$

Logo a equação fica:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = -\eta^2 + 2\eta$$

I.1.3. Equação do 3º Grau

Para equação da forma:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = C_0 + C_1(y/\delta) + C_2(y/\delta)^2 + C_3(y/\delta)^3$$

ou

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = C_0 + C_1\eta + C_2\eta^2 + C_3\eta^3$$

Aplicando as condições de contorno, vem:

$$1. \quad u = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad u' = 0 \Rightarrow \eta = 0$$

$$C_0 = 0$$

$$2. \quad u = u_\infty \Rightarrow y = \delta \quad \text{ou} \quad u' = 1,0 \Rightarrow \eta = 1,0$$

$$1,0 = C_1 + C_2 + C_3$$

$$3. \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow y = \delta \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u'}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow \eta = 1,0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = C_1 + 2C_2\eta + 3C_3\eta^2 \Rightarrow C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 0$$

$$4. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} = 0 \Rightarrow \eta = 0$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} = 2C_2 + 6C_3\eta$$

$$0 = 2C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

Resolvendo o sistema

$$C_3 + C_1 = 1,0$$

$$3C_3 + C_1 = 0$$

Como $C_2 = 0$ e $C_0 = 0$

Construindo a matriz aumentada do sistema vem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1,0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo, temos:

$$c_1 = 3/2 \quad c_0 = 0,0$$

$$c_2 = 0,0$$

$$c_3 = -1/2$$

A equação fica:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = -\frac{1}{2}\eta^3 + \frac{3}{2}\eta$$

I.1.4. Equação do 4º Grau

A equação é da forma:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = c_0 + c_1(y/\delta) + c_2(y/\delta)^2 + c_3(y/\delta)^3 + c_4(y/\delta)^4$$

ou

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2 + c_3\eta^3 + c_4\eta^4$$

Aplicando as condições de contorno, vem:

$$1. \quad u = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad u' = 0 \Rightarrow \eta = 0$$

$$c_0 = 0$$

$$2. \quad u = u_\infty \Rightarrow y = \delta \quad \text{ou} \quad u' = 1,0 \Rightarrow \eta = 1,0$$

$$1,0 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$$

$$3. \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow y = \delta \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u'}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow \eta = 1,0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = c_1 + 2c_2\eta + 3c_3\eta^2 + 4c_4\eta^3$$

$$0 = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4$$

$$4. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} = 0 \Rightarrow \eta = 0$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} = 2c_2 + 6c_3\eta + 12c_4\eta^2$$

$$0 = 2c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$5. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow y = \delta \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \eta = 1,0$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} = 2c_1 + 6c_3\eta + 12c_4\eta^2$$

$$0 = 2c_1 + 6c_3 + 12c_4 \quad \text{ou} \quad 6c_4 + 3c_3 + c_1 = 0$$

Resolvendo o sistema temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_4 + c_3 + c_1 = 1,0 \\ 4c_4 + 3c_3 + c_1 = 0,0 \\ 6c_4 + 3c_3 + c_1 = 0,0 \end{array} \right. \quad \text{com} \quad \begin{array}{l} c_0 = 0,0 \\ c_2 = 0,0 \end{array}$$

Fazendo a matriz aumentada do sistema, e resolvendo, vem

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad \text{logo, temos} \quad \begin{array}{l} c_1 = 2,0 \\ c_3 = -2,0 \\ c_4 = 1,0 \end{array}$$

O que resulta em:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = \eta^4 - 2\eta^3 + 2\eta$$

I.1.5. Equação do 5º Grau

Para equação da forma:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = c_0 + c_1 (y/\delta) + c_2 (y/\delta)^2 + c_3 (y/\delta)^3 + c_4 (y/\delta)^4 + c_5 (y/\delta)^5$$

ou

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = c_0 + c_1 \eta + c_2 \eta^2 + c_3 \eta^3 + c_4 \eta^4 + c_5 \eta^5$$

Aplicando as condições de contorno, temos:

$$1. u = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad u' = 0 \Rightarrow \eta = 0$$

$$c_0 = 0$$

$$2. u = u_\infty \Rightarrow y = \delta \quad \text{ou} \quad u' = 1,0 \Rightarrow \eta = 1,0$$

$$1,0 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5$$

$$3. \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow y = \delta \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u'}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow \eta = 1,0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = c_1 + 2c_2\eta + 3c_3\eta^2 + 4c_4\eta^3 + 5c_5\eta^4$$

$$0 = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + 5c_5$$

$$4. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} = 0 \Rightarrow \eta = 0$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} = 2c_2 + 6c_3\eta + 12c_4\eta^2 + 20c_5\eta^3$$

$$0 = 2c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$5. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow y = \delta \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} = 0 \Rightarrow \eta = 1,0$$

$$0 = 2c_2 + 6c_3 + 12c_4 + 20c_5 \quad \text{ou}$$

$$0 = c_2 + 3c_3 + 6c_4 + 10c_5$$

$$6. \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^3 u'}{\partial \eta^3} = 0 \Rightarrow \eta = 0$$

$$\frac{\partial^3 u'}{\partial \eta^3} = 6c_3 + 24c_4\eta + 60c_5\eta^2$$

$$0 = 6c_3 \quad \text{ou} \quad c_3 = 0$$

Resolvendo o sistema, tem-se:

$$\begin{cases} c_0 = 0; & c_2 = 0; & c_3 = 0 \\ c_1 + c_4 + c_5 = 1,0 \\ c_1 + 4c_4 + 5c_5 = 0,0 \\ 6c_4 + 10c_5 = 0,0 \end{cases}$$

Tomando a matriz aumentada do sistema e resolvendo, vem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 5/3 \\ c_4 = -5/3 \\ c_5 = 1,0 \end{cases}$$

O que resulta:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = \eta^5 - \frac{5}{3} \eta^4 + \frac{5}{3} \eta$$

II.1.6. Equação do 6º Grau

Equação da forma:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = c_0 + c_1(y/\delta) + c_2(y/\delta)^2 + c_3(y/\delta)^3 + c_4(y/\delta)^4 + c_5(y/\delta)^5 + c_6(y/\delta)^6$$

ou

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2 + c_3\eta^3 + c_4\eta^4 + c_5\eta^5 + c_6\eta^6$$

Aplicando as condições de contorno, vem:

$$1. \quad u = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad u' = 0 \Rightarrow \eta = 0$$

$$c_0 = 0$$

$$2. u = u_{\infty} \Rightarrow y = \delta \text{ ou } u' = 1,0 \Rightarrow \eta = 1,0$$

$$1,0 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6$$

$$3. \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow y = \delta \text{ ou } \frac{\partial u'}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow \eta = 1,0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = c_1 + 2c_2\eta + 3c_3\eta^2 + 4c_4\eta^3 + 5c_5\eta^4 + 6c_6\eta^5$$

$$0 = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + 5c_5 + 6c_6$$

$$4. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} = 0 \Rightarrow \eta = 0$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} = 2c_2 + 6c_3\eta + 12c_4\eta^2 + 20c_5\eta^3 + 30c_6\eta^4$$

$$0 = 2c_2 \quad c_2 = 0$$

$$5. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow y = \delta \text{ ou } \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} = 0 \Rightarrow \eta = 1,0$$

$$0 = 2c_2 + 6c_3 + 12c_4 + 20c_5 + 30c_6$$

$$6. \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } \frac{\partial^3 u'}{\partial \eta^3} = 0 \Rightarrow \eta = 0$$

$$\frac{\partial^3 u'}{\partial \eta^3} = 6c_3 + 24c_4\eta + 60c_5\eta^2 + 120c_6\eta^3$$

$$0 = 6c_3 \Rightarrow c_3 = 0$$

$$7. \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 \Rightarrow y = \delta \text{ ou } \frac{\partial^3 u'}{\partial \eta^3} = 0 \Rightarrow \eta = 1,0$$

$$0 = 6c_3 + 24c_4 + 60c_5 + 120c_6$$

Como: $c_0 = 0$; $c_2 = 0$; $c_3 = 0$

Temos o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_4 + c_5 + c_6 = 1,0 \\ c_1 + 4c_4 + 5c_5 + 6c_6 = 0,0 \\ 12c_4 + 20c_5 + 30c_6 = 0,0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + 4c_4 + 5c_5 + 6c_6 = 0,0 \\ 12c_4 + 20c_5 + 30c_6 = 0,0 \end{array} \right.$$

$$12c_4 + 20c_5 + 30c_6 = 0,0$$

Fazendo a matriz aumentada do sistema, e, resolvendo, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 12 & 20 & 30 & 0 \\ 0 & 24 & 60 & 120 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} c_1 = 2 \\ c_4 = -5 \\ c_5 = 6 \\ c_6 = -2 \end{array}$$

Resultando em:

$$u' = \frac{\dot{u}}{u_\infty} = -2\eta^6 + 6\eta^5 - 5\eta^4 + 2\eta$$

I.1.7. Equação do 7º Grau

Equação da forma:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = c_0 + c_1(y/\delta) + c_2(y/\delta)^2 + c_3(y/\delta)^3 + c_4(y/\delta)^4 + c_5(y/\delta)^5 + c_6(y/\delta)^6 + c_7(y/\delta)^7$$

ou

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2 + c_3\eta^3 + c_4\eta^4 + c_5\eta^5 + c_6\eta^6 + c_7\eta^7$$

Aplicando as condições de contorno, vem:

$$1. \quad u = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad u' = 0 \Rightarrow \eta = 0$$

$$c_0 = 0$$

$$2. \quad u = u_\infty \Rightarrow y = \delta \quad \text{ou} \quad u' = 1,0 \Rightarrow \eta = 1,0$$

$$1,0 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7$$

$$3. \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow y = \delta \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u'}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow \eta = 1,0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = c_1 + 2c_2\eta + 3c_3\eta^2 + 4c_4\eta^3 + 5c_5\eta^4 + 6c_6\eta^5 + 7c_7\eta^6$$

$$0 = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + 5c_5 + 6c_6 + 7c_7$$

$$4. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} = 0 \Rightarrow \eta = 0$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} = 2c_2 + 6c_3\eta + 12c_4\eta^2 + 20c_5\eta^3 + 30c_6\eta^4 + 42c_7\eta^5$$

$$0 = 2c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$5. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow y = \delta \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} = 0 \Rightarrow \eta = 1,0$$

$$0 = 2c_2 + 6c_3 + 12c_4 + 20c_5 + 30c_6 + 42c_7$$

$$6. \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^3 u'}{\partial \eta^3} = 0 \Rightarrow \eta = 0$$

$$\frac{\partial^3 u'}{\partial \eta^3} = 6c_3 + 24c_4\eta + 60c_5\eta^2 + 120c_6\eta^3 + 210c_7\eta^4$$

$$0 = 6c_3 \quad c_3 = 0$$

$$7. \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 \Rightarrow y = \delta \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^3 u'}{\partial \eta^3} = 0 \Rightarrow \eta = 1,0$$

$$0 = 6c_3 + 24c_4 + 60c_5 + 120c_6 + 210c_7$$

$$8. \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^4 u'}{\partial \eta^4} = 0 \Rightarrow \eta = 0$$

$$\frac{\partial^4 u'}{\partial \eta^4} = 24c_4 + 120c_5\eta + 360c_6\eta^2 + 840c_7\eta^3$$

$$0 = 24c_4 \Rightarrow c_4 = 0$$

Logo temos:

$$\begin{cases} c_7 + c_6 + c_5 + c_4 + c_3 + c_2 + c_1 = 1,0 \\ 7c_7 + 6c_6 + 5c_5 + 4c_4 + 3c_3 + 2c_2 + c_1 = 0 \\ 42c_7 + 30c_6 + 20c_5 + 12c_4 + 6c_3 + 2c_2 = 0 \\ 210c_7 + 120c_6 + 60c_5 + 24c_4 + 6c_3 = 0 \end{cases}$$

Como $c_0 = 0$; $c_2 = 0$; $c_3 = 0$ e $c_4 = 0$
 O sistema fica:

$$\begin{cases} c_7 + c_6 + c_5 + c_1 = 1,0 \\ 7c_7 + 6c_6 + 5c_5 + c_1 = 0,0 \\ 42c_7 + 30c_6 + 20c_5 = 0,0 \\ 210c_7 + 120c_6 + 60c_5 = 0,0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema pela matriz aumentada, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 0 \\ 42 & 30 & 20 & 0 & 0 \\ 210 & 120 & 60 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que resulta em:

$$c_1 = \frac{7}{4}; \quad c_5 = -\frac{21}{4}; \quad c_6 = 7 \quad \text{e} \quad c_7 = -\frac{5}{2}$$

Logo, temos:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = -\frac{5}{2}\eta^7 + 7\eta^6 - \frac{21}{4}\eta^5 + \frac{7}{4}\eta$$

I.2. Perfil Potencial

Equação da Forma

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = a(y/\delta)^b$$

ou

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = a\eta^b$$

Aplicando as condições de contorno, vem:

$$1. \text{ Para } y = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ ou } \eta = 0 \Rightarrow u' = 0$$

$$0 = a \cdot 0^b \Rightarrow 0 = 0$$

$$2. \text{ Para } y = \delta \Rightarrow u = u_\infty \text{ ou } \eta = 1 \Rightarrow u' = 1,0$$

$$1 = a \cdot 1^b \Rightarrow a = 1$$

$$3. \text{ Para } y = \delta \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ ou } \eta = 1 \Rightarrow \frac{\partial u'}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = a \cdot b \cdot \eta^{b-1}$$

$$0 = ab \cdot 1^{b-1} \Rightarrow ab = 0$$

$$\therefore b = 0$$

Logo, temos:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = 1$$

I.3. Perfil Exponencial

I.3.1. Equação da Forma

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = ae^{b\eta}$$

Aplicando as condições de contorno, tem-se:

$$1. \text{ Para } y = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ ou } \eta = 0 \Rightarrow u' = 0$$

$$0 = ae^{b0} \Rightarrow = 0 ae^0 \Rightarrow a = 0$$

$$2. \text{ Para } y = \delta \Rightarrow u = u_\infty \text{ ou } \eta = 1,0 \Rightarrow u' = 1,0$$

$$1,0 = ae^b \quad e^b = \frac{1}{a} \Rightarrow \ln e^b = \ln 1/a$$

$$b \frac{\ln}{1} e = \frac{\ln}{0} 1 - \ln a \quad b = -\ln a \quad b = \ln a^{-1}$$

Como $a = 0$ logo $\cancel{\neq} \ln 0$

Como $a = 0$, conclui-se que qualquer valor que b possa assumir tem-se sempre

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = 0$$

I.3.2. Equação da Forma

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = ae^\eta + c$$

Aplicando as condições de contorno, tem-se:

$$1. \text{ Para } y = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ ou } \eta = 0 \Rightarrow u' = 0$$

$$0 = a + c$$

$$2. \text{ Para } y = \delta \Rightarrow u = u_\infty \text{ ou } \eta = 1,0 \Rightarrow u' = 1,0$$

$$1,0 = ae^1 + c$$

Tem-se o sistema:

$$c + a = 0$$

$$c + ea = 1,0$$

Resolvendo o sistema, tem-se:

$$a = \frac{1}{e - 1} \quad e \quad c = \frac{-1}{e - 1}$$

Que resulta em:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = \frac{1}{e - 1} [e^\eta - 1]$$

1.4. Perfil Logaritmico

Equação da Forma:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = a + b \ln \eta$$

Aplicando as condições de contorno, tem-se:

1. Para $y = 0 \Rightarrow u = 0$ ou $\eta = 0 \Rightarrow u' = 0$

$0 = a + b \ln 0$ como $\ln 0$ não existe, não se consider esta equação.

2. Para $y = \delta \Rightarrow u = u_\infty$ ou $\eta = 1 \Rightarrow u' = 1,0$

$$1,0 = a + b \ln 1$$

Como $\ln 1 = 0$ Logo

$$a = 1$$

3. Para $y = \delta \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ou $\eta = 1,0 \Rightarrow \frac{\partial u'}{\partial \eta} = 0$

Sabemos que $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$

Logo:

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = 0 + b \cdot \frac{1}{\eta} \cdot 1 = \frac{b}{\eta}$$

$$0 = \frac{b}{1} \Rightarrow b = 0$$

Que resulta em:

$$u' = \frac{u}{u_{\infty}} = 1$$

I.5. Perfil Trigonométrico

I.5.1. Equação da Forma:

$$u' = \frac{u}{u_{\infty}} = a \operatorname{sen} b \eta$$

Aplicando as condições de contorno, vem:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Para } y = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ ou } \eta = 0 \Rightarrow u' = 0 \\ 0 = a \operatorname{sen} 0 \Rightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Para } y = \delta \Rightarrow u = u_{\infty} \text{ ou } \eta = 1,0 \Rightarrow u' = 1,0 \\ 1,0 = a \operatorname{sen} b \end{aligned}$$

$$3. \text{ Para } y = \delta \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ ou } \eta = 1,0 \Rightarrow \frac{\partial u'}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = a \cdot b \operatorname{cos} b \eta$$

$$0 = ab \operatorname{cos} b$$

Logo temos:

$$\begin{cases} 1,0 = a \operatorname{sen} b \dots\dots\dots (A.1) \\ 0 = ab \operatorname{cos} b \dots\dots\dots (A.2) \end{cases}$$

Operando com o sistema, vem:

$$\text{De (A.1)} a = \frac{1}{\operatorname{sen} b}$$

$$\text{Em (A.2)} 0 = \frac{1}{\operatorname{sen} b} \cdot b \cdot \operatorname{cos} b \Rightarrow 0 = b \frac{\operatorname{cos} b}{\operatorname{sen} b}$$

Como $\cotag b = \frac{\cos b}{\sen b}$ Logo:

$$b \cotag b = 0 \Rightarrow \cotag b = 0 \Rightarrow b = \text{arc cotag } 0$$

$$b = \frac{\pi}{2}$$

Em (A.1) vem:

$$a = \frac{1}{\sen b} = \frac{1}{\sen \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$a = 1,0$$

Que resulta

$$u' = \frac{u}{u_{\infty}} = \sen \frac{\pi}{2} \eta$$

1.5.2. Para perfil cossenooidal

Para equação da forma:

$$u' = \frac{u}{u_{\infty}} = a \cos b \eta$$

Aplicando as condições de contorno, vem:

$$1. \text{ Para } y = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ ou } \eta = 0 \Rightarrow u' = 0$$

$$0 = a \cos b \cdot 0 \Rightarrow 0 = a \cos 0 \Rightarrow a = 0$$

Concluimos então que para qualquer valor de b , tem-se sempre $u' = 0$.

Assim:

$$u' = \frac{u}{u_{\infty}} = 0$$

I.5.3. Para perfil tangencial

Para equação da forma:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = a \operatorname{tag} b\eta$$

Aplicando as condições de contorno, tem-se:

$$1. \text{ Para } y = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ ou } \eta = 0 \Rightarrow u' = 0$$

$$0 = a \operatorname{tag} b \cdot 0 \Rightarrow 0 = a \operatorname{tag} 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$2. \text{ Para } y = \delta \Rightarrow u = u_\infty \text{ ou } \eta = 1,0 \Rightarrow u' = 1,0$$

$$1 = a \operatorname{tag} b \Rightarrow \operatorname{tag} b = \frac{1}{a}$$

$$3. \text{ Para } y = \delta \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ ou } \eta = 1,0 \Rightarrow \frac{\partial u'}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = a \cdot \frac{1}{\cos^2 b\eta} \cdot b$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = \frac{ab}{\cos^2 b\eta}$$

$$0 = \frac{ab}{\cos^2 b} \quad \text{como} \quad \sec b = \frac{1}{\cos b} \quad e$$

$$\text{Substituindo, temos:} \quad \sec^2 b = \operatorname{tag}^2 b + 1$$

$$0 = ab \cdot \sec^2 b \quad \text{ou}$$

$$0 = ab(\operatorname{tag}^2 b + 1) \Rightarrow 0 = ab \operatorname{tag}^2 b + ab$$

$$\text{Como } \operatorname{tag} b = \frac{1}{a} \quad \text{logo}$$

$$0 = ab \left(\frac{1}{a} \right)^2 + ab \Rightarrow 0 = \frac{b}{a} + ab \quad \text{ou}$$

$$\frac{b}{a} = -ab \Rightarrow -a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = -1 \quad \therefore a = j$$

onde $a = 0 + j$ nº complexo.

$$\text{tomando o módulo de } |a| = \sqrt{0^2 + j^2} = 1$$

$$\text{Como } \operatorname{tag} b = \frac{1}{a} \Rightarrow b = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{a}$$

Substituindo a pelo seu módulo, vem:

$$b = \text{arc tag } 1 \Rightarrow b = \frac{\pi}{4}$$

Logo, temos:

$$u' = \frac{u}{u_{\infty}} = j \text{ tag } \frac{\pi}{4} \eta$$

Onde j é a parte imaginária do nº complexo.

I.5.4. Para perfil cotangente

Equação da forma:

$$u' = \frac{u}{u_{\infty}} = a \text{ cotag } b\eta$$

Aplicando as condições de contorno, tem-se:

1. Para $y = 0 \Rightarrow u = 0$ ou $\eta = 0 \Rightarrow u' = 0$

$0 = a \text{ cotag } 0$ como $\text{cotag } 0 = \infty$, não se considera esta equação

2. Para $y = \delta \Rightarrow u = u_{\infty}$ ou $\eta = 1 \Rightarrow u' = 1,0$

$$1 = a \text{ cotag } b$$

3. Para $y = \delta \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ou $\eta = 1 \Rightarrow \frac{\partial u'}{\partial \eta} = 0$

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = - \frac{ab \cdot \text{Sen}^2 b\eta + ba \cdot \text{Cos } b\eta \cdot \text{Cos } b\eta}{\text{sen}^2 b\eta} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = - \frac{ab(\text{sen}^2 b\eta + \text{cos}^2 b\eta)}{\text{sen}^2 b\eta} = \frac{-ab}{\text{sen}^2 b\eta}$$

$$0 = \frac{-ab}{\text{sen}^2 b} \quad \text{como} \quad \text{cossec } b = \frac{1}{\text{sen } b}$$

$$\text{e} \quad \text{cossec}^2 b = \text{cotg}^2 b + 1$$

temos:

$$0 = -ab \text{ cossec}^2 b \Rightarrow 0 = -ab(\text{cotg}^2 b + 1)$$

Sabemos que $\cotag b = \frac{1}{a}$, substituindo na equação anterior vem:

$$0 = -ab \left(\frac{1}{a^2} + 1 \right) \Rightarrow 0 = -\frac{b}{a} - ab \quad \text{ou}$$

$$0 = -b - a^2b \Rightarrow 0 = b(-1 - a^2) \Rightarrow -1 - a^2 = 0$$

$$-a^2 = 1 \Rightarrow a = j \quad \text{onde } a = n^{\circ} \text{ complexo}$$

Como $\cotag b = \frac{1}{a}$ e tomando o módulo de $|a| = 1$, tem-se:
 $\cotag b = 1 \Rightarrow b = \text{arc cotag } 1$

$$b = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Logo: } u' = \frac{u}{u_{\infty}} = j \cotag \frac{\pi}{4} \eta$$

Onde j é a parte imaginária do n° complexo.

II.5.5. Para perfil da forma secante

Equação da forma:

$$u' = \frac{u}{u_{\infty}} = a \sec b\eta$$

Aplicando as condições de contorno, vem:

$$1. \text{ Para } y = 0 \Rightarrow u = 0 \quad \text{ou} \quad \eta = 0 \Rightarrow u' = 0$$

$$0 = a \sec 0 \quad \text{como} \quad \sec 0 = 1$$

$$a = 0$$

Logo para qualquer valor de b , tem-se:

$$u' = \frac{u}{u_{\infty}} = 0$$

1.5.6. Para perfil da forma cossecante

Equação da forma:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = a \operatorname{cossec} b\eta$$

Aplicando as condições de contorno, tem-se:

$$1. \text{ Para } y = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ ou } \eta = 0 \Rightarrow u' = 0$$

$$0 = a \operatorname{cossec} 0 \text{ como } \operatorname{cossec} 0 = \infty$$

Logo, abandona-se esta equação:

$$2. \text{ Para } y = \delta \Rightarrow u = u_\infty \text{ ou } \eta = 1,0 \Rightarrow u' = 1,0$$

$$1 = a \operatorname{cossec} b \Rightarrow 1 = a \frac{1}{\operatorname{sen} b} \text{ ou}$$

$$a = \operatorname{sen} b$$

$$3. \text{ Para } y = \delta \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \eta = 1,0 \Rightarrow \frac{\partial u'}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = \frac{0 \cdot \operatorname{sen} b\eta - a \operatorname{cos} b\eta \cdot b}{\operatorname{sen}^2 b\eta}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = -\frac{ab \operatorname{cos} b\eta}{\operatorname{sen}^2 b\eta}$$

$$0 = -\frac{ab \operatorname{cos} b}{\operatorname{sen}^2 b}$$

Como $a = \operatorname{sen} b$, logo

$$0 = -\frac{ab \operatorname{cos} b}{a^2} = -\frac{b}{a} \operatorname{cos} b \quad \operatorname{cos} b = -\frac{a}{b} \cdot 0$$

$$\operatorname{cos} b = 0 \quad \therefore b = \operatorname{arc} \operatorname{cos} 0 \quad \therefore b = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$b = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Como } a = \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\therefore a = 1$$

Logo:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = 1 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} \eta$$

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} \eta$$

I.5.7. Para perfil da forma seno hiperbólico

Perfil da forma:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = a \operatorname{senh} b\eta = a \left(\frac{e^{b\eta} - e^{-b\eta}}{2} \right)$$

Aplicando as condições de contorno, tem-se:

1. Para $y = 0 \Rightarrow u = 0$ ou $\eta = 0 \Rightarrow u' = 0$

$$0 = a \left(\frac{e^0 - e^0}{2} \right) \Rightarrow 0 = 0$$

2. Para $y = \delta \Rightarrow u = u_\infty$ ou $\eta = 1,0 \Rightarrow u' = 1,0$

$$1 = a \left(\frac{e^b}{2} - \frac{e^{-b}}{2} \right)$$

$\frac{1}{a} = \frac{e^b}{2} - \frac{e^{-b}}{2}$ aplicando logaritmo neperiano nos dois membros, vem:

$$\ln \frac{1}{a} = \ln \frac{e^b}{2} - \ln \frac{e^{-b}}{2}$$

$$\ln 1 - \ln a = \ln e^b - \ln 2 - \ln e^{-b} + \ln 2$$

$$-\ln a = b \ln e + b \ln e$$

$$-\ln a = 2b$$

$$a = e^{-2b}$$

3. Para $y = \delta \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ou $\eta = 1,0 \Rightarrow \frac{\partial u'}{\partial \eta} = 0$

$$u' = a \left(\frac{e^{b\eta} - e^{-b\eta}}{2} \right)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = \frac{ab}{2} \left(e^{b\eta} + e^{-b\eta} \right) \quad \text{Logo: } p/\eta = 1 \text{ e } \frac{\partial u'}{\partial \eta} = 0$$

$$0 = \frac{ab}{2} \left(e^b + e^{-b} \right) \Rightarrow e^b + \frac{1}{e^b} = 0$$

$$\frac{e^{2b} + 1}{e^b} = 0 \Rightarrow e^{2b} + 1 = 0 \quad \therefore e^{2b} = 1$$

Aplicando logaritmo, tem-se:

$$\ln e^{2b} = \ln 1 \Rightarrow 2b \underset{1}{\ln e} = 0$$

$$\therefore 2b = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0$$

Sabe-se que

$$a = e^{-2b} = e^{-2 \cdot 0} = e^0 = 1$$

$$\therefore a = 1$$

Logo tem-se:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = \left(1 \frac{e^0 - e^0}{2} \right) = 0$$

$$\therefore u' = \frac{u}{u_\infty} = 0$$

I.5.8. Perfil do tipo cosseno hiperbólico

Perfil da forma: .

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = a \cosh b\eta = a \left(\frac{e^{b\eta} + e^{-b\eta}}{2} \right)$$

Aplicando as condições de contorno, tem-se:

$$1. \text{ Para } y = 0 \Rightarrow u = 0 \quad \text{ou} \quad \eta = 0 \Rightarrow u' = 0$$

$$u' = a \left(\frac{e^{b\eta} + e^{-b\eta}}{2} \right) \Rightarrow 0 = a \left(\frac{1 + 1}{2} \right) \quad \therefore a = 0$$

Logo qualquer valor que o b assumir, tem-se $u' = 0$ pois

$$a = 0$$

$$\text{Assim, } u' = \frac{u}{u_\infty} = 0$$

APÊNDICE [B]

CÁLCULO DOS PARÂMETROS DA CAMADA LIMITE EM PLACA PLANA PARA OS PERFIS OBTIDOS PELAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

I. PERFIL EXPONENCIAL

Da Tabela 2 - Posição 2.2 Temos a equação:

$$u' = \frac{u(y)}{u_\infty} = \frac{1}{1+e} \times \left[1 - e^\eta \right] \quad \text{onde } \eta = y/\delta$$

I.1. Tensão de Cisalhamento τ_w

Por Newton, tem-se que a tensão de cisalhamento τ_w é dada por:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \mu \left(\frac{u_\infty}{\delta} \right) \left. \frac{\partial u'}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = \frac{-1 \cdot e^\eta}{1+e} \dots \left. \frac{\partial u'}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \frac{-e^0}{1+e} = \frac{-1}{1+e}$$

Logo:

$$\tau_w = - \mu \cdot \left(\frac{u_\infty}{\delta} \right) \cdot \frac{1}{1+e}$$

Pela equação de Von Kármán, tem-se que:

$$\tau_w = \rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta u(u_\infty - u) dy.$$

Trocando as variáveis de integração, fazendo $y = \delta\eta$ e igualando com a equação de Newton vem:

$$\tau_w = - \mu \left(\frac{u_\infty}{\delta} \right) \frac{1}{1+e} = \rho u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 u'(1-u') d\eta$$

Fazendo $I = \int_0^1 u'(1-u') d\eta$ onde $u' = \left(\frac{1}{1+e} \right) (1 - e^\eta)$

Resolvendo a integral vem:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 u' - u'^2 \, d\eta = \int_0^1 u' \, d\eta - \int_0^1 u'^2 \, d\eta \\
 I &= \int_0^1 \frac{1}{1+e} (1-e^\eta) \, d\eta - \int_0^1 \frac{1}{(1+e)^2} (1-e^\eta)^2 \, d\eta \\
 I &= \frac{1}{1+e} \int_0^1 (1-e^\eta) \, d\eta - \frac{1}{(1+e)^2} \int_0^1 (1-e^\eta)^2 \, d\eta \\
 I &= \frac{1}{1+e} \left[\int_0^1 d\eta - \int_0^1 e^\eta \, d\eta \right] - \frac{1}{(1+e)^2} \int_0^1 (1-2e^\eta + e^{2\eta}) \, d\eta \\
 I &= \frac{1}{(1+e)} \left[\left. \eta \right|_0^1 - \left. e^\eta \right|_0^1 \right] - \frac{1}{(1+e)^2} \left[\int_0^1 d\eta - 2 \int_0^1 e^\eta \, d\eta + \int_0^1 e^{2\eta} \, d\eta \right] \Rightarrow \\
 I &= \frac{-1 + 5e - 2e^2}{2(1+e)^2}
 \end{aligned}$$

Logo:

$$\tau_w = -\left(\frac{\mu u_\infty}{\delta}\right) \frac{1}{(1+e)} = \rho u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \cdot \frac{(-1 + 5e - 2e^2)}{2(1+e)^2}$$

I.2 Relação entre espessura de Camada Limite e a borda de Ataque.

Operando com a equação da tensão de cisalhamento tem-se:

$$\begin{aligned}
 \tau_w &= \left(\frac{\mu u_\infty}{\delta}\right) \frac{1}{(1+e)} = \rho u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \frac{(-1 + 5e - 2e^2)}{2(1+e)^2} \\
 \delta d\delta &= \left(\frac{-\mu}{\rho u_\infty}\right) \frac{2(1+e)}{(-1 + 5e - 2e^2)} \cdot dx
 \end{aligned}$$

Integrando, vem:

$$\frac{\delta^2}{2} = -\left(\frac{\mu}{\rho u_\infty}\right) \frac{2(1+e)}{(-1+5e-2e^2)} \cdot x + C$$

Sabemos que para $X=0 \Rightarrow \delta=0$, logo por consequência

$C = 0$ assim:

$$\frac{\delta^2}{2} = -\left(\frac{\mu}{\rho u_\infty}\right) \frac{2(1+e)}{(-1+5e-2e^2)} x$$

$$\delta^2 = - \frac{\mu}{\rho u^\infty x} \cdot \frac{4(1+e)}{(-1+5e-2e^2)} \cdot x^2$$

$$\left(\frac{\delta}{x}\right)^2 = - \frac{4(1+e)}{(-1+5e-2e^2)} \cdot \frac{1}{Re_p}$$

ou

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{4+4e}{1-5e+2e^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}}$$

ou ainda:.

$$\frac{\delta}{x} \sqrt{Re_p} = \sqrt{\frac{4+4e}{1-5e+2e^2}} \quad \therefore \quad \frac{\delta}{x} \sqrt{Re_p} \cong 2,6079919$$

I:3 Coeficiente de Arrasto Local C_{Dx}

É dado por:

$$C_{Dx} = \frac{\tau_w}{\frac{\rho u^\infty{}^2}{2}} = - \frac{\frac{\mu u^\infty}{\delta} \cdot \frac{1}{(1+e)}}{\frac{\rho u^\infty{}^2}{2}} = - \frac{\mu}{\rho u^\infty \delta} \cdot \frac{2}{(1+e)}$$

$$C_{Dx} = - \frac{\frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{1}{u^\infty \cdot x}}{\delta} \cdot \frac{2}{(1+e)} = - \frac{1}{Re_p} \cdot \frac{\frac{2}{\delta/x}}{(1+e)}$$

$$C_{Dx} = \frac{-1}{Re_p} \cdot \frac{2}{(1+e)} \quad \text{como} \quad \frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{4+4e}{1-5e+2e^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}}$$

Substituindo, temos:

$$C_{Dx} = \frac{-1}{Re_p \sqrt{\frac{4+4e}{1-5e+2e^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}}} \cdot \frac{2}{(1+e)}$$

$$C_{Dx} = \frac{-1}{\sqrt{Re_p} \sqrt{\frac{4+4e}{1-5e+2e^2}}} \cdot \frac{2}{(1+e)}$$

$$C_{Dx} = \frac{-2}{(1+e) \sqrt{\frac{4+4e}{1-5e+2e^2}}} \times \frac{1}{\sqrt{Re_p}}$$

ou

$$C_{Dx} \cdot Re_p^{\frac{1}{2}} = -0,2062441$$

I.4 Coeficiente de Arrasto Médio

Sabemos que

$$C_{DM} = 2 \cdot \frac{\delta}{x} \cdot I = 2 \cdot \sqrt{\frac{4+4e}{1-5e+2e^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}} \cdot \frac{-1+5e-2e^2}{2(1+e)^2}$$

$$C_{DM} = \frac{-1+5e-2e^2}{(1+e)^2} \cdot \sqrt{\frac{4+4e}{1-5e+2e^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}}$$

$$C_{DM} = \sqrt{\frac{4(-1+5e-2e^2)}{(1+e)^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}}$$

ou

$$C_{DM} \cdot Re_p = \sqrt{\frac{4(-1+5e-2e^2)}{(1+e)^3}}$$

ou

$$C_{DM} \cdot Re_p = 0,4124881 \quad j$$

I.5 Relação entre espessura de deslocamento e espessura da Camada Limite

É definida por:

$$\delta^* = \delta \int_0^1 (1-u') d\eta \quad \text{onde } u' = \frac{1}{1+e} (1-e^\eta)$$

Logo:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = I^* = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+e} (1 - e^\eta) \right) d\eta$$

Calculando a integral I^* temos:

$$I^* = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+e} + \frac{e^\eta}{1+e} \right) d\eta = \int_0^1 \left(\frac{1+e-1}{1+e} + \frac{e^\eta}{1+e} \right) d\eta$$

$$I^* = \frac{e}{1+e} \int_0^1 d\eta + \frac{1}{1+e} \int_0^1 e^\eta d\eta$$

$$I^* = \frac{e}{1+e} \eta \Big|_0^1 + \frac{1}{1+e} e^\eta \Big|_0^1$$

$$I^* = \frac{e}{1+e} (1-0) + \frac{1}{1+e} (e - 1)$$

$$I^* = \frac{e}{1+e} + \frac{e-1}{1+e} = \frac{e+e-1}{1+e} = \frac{2e-1}{1+e}$$

$$I^* = \frac{2e-1}{1+e}$$

Logo:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = I^* = \frac{2e-1}{1+e}$$

ou

$$\frac{\delta^*}{\delta} = 1,1931757$$

I.6. Relação entre espessura de deslocamento e distância da borda de ataque

Sabe-se que:

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{4+4e}{1-5e+2e^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}}$$

e

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{2e-1}{1+e}$$

$$\frac{\delta^*}{\delta} = I^* \Rightarrow \delta = \frac{\delta^*}{I^*} \quad \text{substituindo na equação ante-}$$

rior vem:

$$\frac{\delta}{x} \cdot \sqrt{Re_p} = \sqrt{\frac{4+4e}{1-5e+2e^2}}$$

$$\frac{\delta^*}{I^*} \cdot \frac{\sqrt{Re_p}}{x} = \sqrt{\frac{4+4e}{1-5e+2e^2}}$$

$$\frac{\delta^*}{x} \cdot \sqrt{Re_p} = I^* \cdot \sqrt{\frac{4+4e}{1-5e+2e^2}}$$

$$\frac{\delta^*}{x} \sqrt{Re_p} = \left(\frac{2e-1}{1+e}\right) \cdot \sqrt{\frac{4(1+e)}{1-5e+2e^2}}$$

$$\frac{\delta^*}{x} \sqrt{Re_p} = \sqrt{\frac{(2e-1)^2}{1+e} \cdot \frac{4(1+e)}{1-5e+2e^2}}$$

$$\frac{\delta^*}{x} \sqrt{Re_p} = \sqrt{\frac{4 \cdot (2e-1)^2}{(1+e)(1-5e+2e^2)}}$$

ou

$$\frac{\delta^*}{x} \sqrt{Re_p} = 3,1117927$$

1.7. Espessura da Quantidade de Movimento

$$\theta = \delta \int_0^1 u'(1-u') d\eta = \delta \cdot I$$

$$\text{como } I = \frac{-1 + 5e - 2e^2}{2(1+e)^2}$$

$$\theta = \delta \cdot I$$

$$\frac{\theta}{\delta} = I$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{-1 + 5e - 2e^2}{2(1+e)^2}$$

ou

$$\frac{\theta}{\delta} = -0,0790816$$

I.8. Parâmetro de Forma da Camada Limite H

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{\delta^*}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\theta} = I^* \cdot \frac{1}{I} = \frac{I^*}{I}$$

$$H = \frac{I^*}{I} \quad \text{como} \quad I^* = \frac{2e-1}{1+e}$$

$$I = \frac{-1+5e-2e^2}{2(1+e)^2}$$

Logo:

$$H = \frac{\frac{2e-1}{1+e}}{\frac{-1+5e-2e^2}{2(1+e)^2}} = \frac{2e-1}{(1+e)} \times \frac{2(1+e)^2}{(-1+5e-2e^2)}$$

$$H = \frac{(2e-1)(2+2e)}{-1+5e-2e^2} = \frac{-2+2e+4e^2}{-1+5e-2e^2}$$

$$H = \frac{-2+2e+4e^2}{-1+5e-2e^2}$$

ou

$$H = -15,087916$$

I.9. Relação entre espessura da Quantidade de Movimento e distância da Borda de Ataque da Placa Plana

Sabemos que $\frac{\theta}{\delta} = I$ e $\frac{\delta}{x} \sqrt{Re_p} = \sqrt{\frac{4+4e}{1-5e+2e^2}}$

Assim:

$$\delta = \sqrt{\frac{4+4e}{1-5e+2e^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{Re_p}}$$

Logo

$$\frac{\theta}{\delta} = I \Rightarrow \frac{\theta}{\sqrt{\frac{4+4e}{1-5e+2e^2}} \frac{x}{\sqrt{Re_p}}} = I$$

$$\frac{\theta}{x} \sqrt{Re_p} = I \sqrt{\frac{4+4e}{1-5e+2e^2}} \quad \text{como } I = \frac{-1+5e-2e^2}{2(1+e)^2}$$

$$\frac{\theta}{x} \sqrt{Re_p} = \frac{-1+5e-2e^2}{2(1+e)^2} \sqrt{\frac{4(1+e)}{1-5e+2e^2}}$$

$$\frac{\theta}{x} \sqrt{Re_p} = \sqrt{\frac{(-1+5e-2e^2)^2}{2^2(1+e)}} \cdot \frac{4(1+e)}{(1-5e+2e^2)}$$

$$\frac{\theta}{x} \sqrt{Re_p} = \sqrt{\frac{(-1+5e-2e^2)^2}{(1-5e+2e^2)(1+e)^3}}$$

ou

$$\frac{\theta}{x} \sqrt{Re_p} = 0,2062441$$

II. PERFIL TRIGONÔMETRICO

II.1. Perfil senoidal

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = \frac{\text{sen } \frac{\pi \eta}{2}}$$

Por Newton, tem-se que a tensão de cisalhamento é dado por:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Para $u' = \text{Sen} \frac{\pi}{2} \eta$ temos:

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = \frac{\pi}{2} \text{Cos} \frac{\pi}{2} \eta$$

Logo

$$\left. \frac{\partial u'}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \frac{\pi}{2}$$

Assim:

$$\tau_w = \mu \frac{u_\infty}{\delta} \left. \frac{\partial u'}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}$$

ou

$$\tau_w = \mu \frac{u_\infty}{\delta} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Sabe-se, também, que a tensão de cisalhamento é dada pela equação da quantidade de movimento de Von Kármán, para Ca mada Limite Vale:

$$\tau_w = \rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta u (u_\infty - u) dy$$

Desta forma, trocando as variáveis de integração e fazendo $y = \delta \eta$, tem-se igualando com a equação de Newton, que:

$$\tau_w = \frac{\mu \cdot u_\infty \pi}{\delta \cdot 2} = \rho u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 u' (1-u') d\eta$$

Fazendo $I = \int_0^1 u' - u'^2 d\eta$ onde $u' = \text{Sen} \frac{\pi}{2} \eta$ e resolvendo,

tem-se:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\text{Sen } \frac{\pi \eta}{2} - \text{Sen}^2 \frac{\pi \eta}{2}}{2} \right) d\eta = \int_0^1 \frac{\text{Sen } \frac{\pi \eta}{2}}{2} d\eta - \int_0^1 \frac{\text{Sen}^2 \frac{\pi \eta}{2}}{2} d\eta$$

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\text{sen } \frac{\pi \eta}{2}}{2} d\eta - \int_0^1 \frac{1 - \text{Cos } \pi \eta}{2} d\eta$$

$$I = \frac{-2}{\pi} \text{Cos } \frac{\pi \eta}{2} \left[-\frac{1}{2} \left(\int_0^1 d\eta - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \text{cos } \pi \eta d\eta \right) \right]$$

$$I = \frac{-2}{\pi} \left(\text{Cos } \frac{\pi}{2} - \text{Cos} 0 \right) - \frac{1}{2} \left[\eta \left[-\frac{1}{\pi} \text{Sen } \pi \eta \right] \right]_0^1$$

$$I = \frac{4 - \pi}{2 \pi}$$

Logo:

$$\tau_w = \frac{\mu \cdot u_\infty}{\delta} \cdot \frac{\pi}{2} = \rho u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \cdot I = \rho u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \frac{(4 - \pi)}{2\pi}$$

II.1.2. Relação entre a espessura da camada Limite e a distância da borda de ataque

tem-se que

$$\tau_w = \frac{\mu u_\infty}{\delta} \cdot \frac{\pi}{2} = \rho u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \cdot I$$

$$\delta d\delta = \frac{\mu}{\rho u_\infty} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{I} dx$$

Integrando, vem:

$$\int \delta d\delta = \int \frac{\mu}{\rho u_\infty} \cdot \frac{\pi}{2} dx$$

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{\mu \cdot \pi}{\rho u_\infty \cdot 2} x + k$$

Mas, para $x = 0 \Rightarrow \delta = 0$, logo $k = 0$

Assim, tem-se que:

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{\mu \cdot \pi}{\rho u_{\infty}^2} x \Rightarrow \delta^2 = \frac{\pi \cdot x^2}{I \cdot Re_p}$$

$$\frac{\delta^2}{x^2} = \frac{\pi}{I} \cdot \frac{1}{Re_p} \Rightarrow \frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{\pi}{I}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}}$$

Como $I = \frac{4 - \pi}{2 \pi}$ Logo:

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{4 - \pi}{2 \pi}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}} = \sqrt{\frac{2 \pi^2}{4 - \pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}}$$

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{2 \pi^2}{4 - \pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}} \quad \text{ou} \quad \frac{\delta}{x} \sqrt{Re_p} = 4,795326$$

II.1.3. Coeficiente de Arrasto Local C_{Dx}

tem-se que

$$C_{Dx} = \frac{\tau_w}{\rho u_{\infty}^2} = \frac{\frac{\mu \cdot u_{\infty} \cdot \pi}{\delta}}{\frac{\rho u_{\infty}^2}{2}} = \frac{\mu \cdot \pi}{\delta \rho u_{\infty}} \left(\frac{x}{x} \right)$$

$$C_{Dx} = \frac{\mu \cdot \pi}{\frac{\delta}{x} \rho \cdot u_{\infty} x}$$

$$C_{Dx} = \frac{\pi}{\frac{\delta}{x} \cdot Re_p} \quad \text{como} \quad \frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{2 \pi^2}{4 - \pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}}$$

Substituindo, vem:

$$C_{Dx} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{2 \pi^2}{4 - \pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}} \cdot Re_p} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{2 \pi^2}{4 - \pi}} \cdot \sqrt{Re_p}}$$

$$C_{Dx} = \pi \cdot \sqrt{\frac{4 - \pi}{2 \pi^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 (4 - \pi)}{2 \pi^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}}$$

$$C_{Dx} = \sqrt{\frac{4 - \pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}}$$

ou

$$C_{Dx} \cdot \sqrt{Re_p} = 0,6551363776$$

II.1.4. Coeficiente de Arrasto Médio C_{DM}

Como $C_{DM} = \frac{2 \cdot \delta}{x} \cdot I$ logo

$$C_{DM} = \frac{2 \delta}{x} \cdot \left(\frac{4 - \pi}{2 \pi} \right) \quad \text{como} \quad \frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{2 \pi^2}{4 - \pi}} \frac{1}{\sqrt{Re_p}}$$

Substituindo, tem-se:

$$C_{DM} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \pi^2}{4 - \pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}} \cdot \left(\frac{4 - \pi}{2 \pi} \right)$$

$$C_{DM} = \sqrt{\frac{2 \pi^2}{(4 - \pi)}} \cdot \frac{(4 - \pi)^2}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{Re_p}}$$

$$C_{DM} = \sqrt{2 (4 - \pi)} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}}$$

ou

$$C_{DM} \sqrt{Re_p} = 1,310272755$$

II.1.5. Relação entre espessura de deslocamento e espessura da Camada Limite

É definida como:

$$\delta^* = \delta \int_0^1 (1 - u') d\eta \quad \text{onde} \quad u' = \text{sen} \frac{\pi}{2} \eta$$

Logo

$$\frac{\delta^*}{\delta} = I^* = \int_0^1 1 - \text{Sen} \frac{\pi}{2} \eta d\eta$$

Cálculo da Integral I^*

$$I^* = \int_0^1 1 - \text{Sen} \frac{\pi}{2} \eta d\eta = \int_0^1 d\eta - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \text{Sen} \frac{\pi}{2} \eta \left(\frac{\pi}{2} \right) d\eta$$

$$I^* = \eta \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi \eta}{2} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right. \right) \right]$$

$$I^* = (1-0) + \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right)$$

$$I^* = 1 + \frac{2}{\pi} (0 - 1)$$

$$I^* = 1 - \frac{2}{\pi}$$

$$I^* = \frac{\pi - 2}{\pi}$$

Logo

$$\frac{\delta^*}{\delta} = I^* = \frac{\pi - 2}{\pi}$$

II.1.6. Relação entre espessura de deslocamento e distância da borda de ataque.

Sabe-se que:

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{2\pi^2}{4-\pi}} \frac{1}{\sqrt{Re_p}} \quad e \quad \frac{\delta^*}{\delta} = I^* = \frac{\pi-2}{\pi}$$

$$\text{Logo} \quad \delta = \frac{\delta^*}{I^*} = \frac{\delta^*}{\frac{\pi-2}{\pi}} = \delta^* \cdot \frac{\pi}{\pi-2}$$

que substituindo na anterior resulta em:

$$\frac{\delta^*}{x} \left(\frac{\pi}{\pi-2} \right) = \sqrt{\frac{2\pi^2}{4-\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}}$$

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{\pi-2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2\pi^2}{4-\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}}$$

$$\frac{\delta^*}{x} = \sqrt{\frac{(\pi-2)^2}{\pi^2} \cdot \frac{2\pi^2}{4-\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}}$$

$$\frac{\delta^*}{x} = \sqrt{\frac{2(\pi-2)^2}{(4-\pi)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}}$$

ou

$$\frac{\delta^*}{x} \sqrt{\text{Re}_p} = 1,742526736$$

II.1.7 Espessura da Quantidade de Movimento

É definido por:

$$\Theta = \delta_0 \int_0^1 u' (1 - u') d\eta = \delta \cdot I$$

$$\Theta = \delta \cdot I \quad \therefore \quad \frac{\Theta}{\delta} = I$$

$$\frac{\Theta}{\delta} = \frac{4 - \pi}{2 \pi}$$

ou

$$\frac{\Theta}{\delta} = 0,1366197724$$

II.1.8. Parâmetros da Forma da Camada Limite

É definido por:

$$H = \frac{\delta^*}{\Theta} \quad \text{fazendo}$$

$$H = \frac{\delta^*}{\Theta} \cdot \frac{\delta}{\delta} = \frac{\delta^*}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\Theta} = I^* \cdot \frac{1}{I}$$

$$H = \frac{I^*}{I}$$

$$H = \frac{\frac{\pi-2}{\pi}}{\frac{4-\pi}{2\pi}} = \frac{\pi-2}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{4-\pi}$$

$$H = \frac{2(\pi-2)}{4-\pi}$$

ou

$$H = 2,659792365$$

II.1.9. Relação entre espessura da Quantidade de Movimento e Distância da Borda de Ataque da Placa Plana.

Sabe-se que

$$\frac{\theta}{\delta} = I \text{ e } \frac{\delta}{x} \sqrt{Re_p} = \sqrt{\frac{2\pi^2}{4-\pi}}$$

$$\text{como } \frac{\theta}{\delta} = I = \frac{4-\pi}{2\pi} \implies \delta = \frac{\theta}{\frac{4-\pi}{2\pi}}$$

$$\delta = \theta \left(\frac{2\pi}{4-\pi} \right)$$

$$\text{que substituindo em } \frac{\delta}{x} \sqrt{Re_p} = \sqrt{\frac{2\pi^2}{4-\pi}}$$

Resulta em:

$$\frac{\theta}{x} \sqrt{Re_p} \left(\frac{2\pi}{4-\pi} \right) = \sqrt{\frac{2\pi^2}{4-\pi}}$$

$$\frac{\theta}{x} \sqrt{Re_p} = \sqrt{\frac{2\pi^2}{4-\pi}} \left(\frac{4-\pi}{2\pi} \right)$$

$$\frac{\theta}{x} \sqrt{Re_p} = \sqrt{\frac{(4-\pi)^2}{(2\pi)^2} \cdot \frac{2\pi^2}{(4-\pi)}}$$

$$\frac{\theta}{x} \sqrt{Re_p} = \sqrt{\frac{4-\pi}{2}}$$

ou

$$\frac{\theta}{x} \sqrt{Re_p} = 0,6551363776$$

II.2. Perfil Cossecante

Perfil da forma:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = \text{Cossec} \frac{\pi}{2} \eta$$

II.2.1. Tensão de Cisalhamento τ_w

A tensão de cisalhamento é dada, por Newton, como:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

$$\text{Para } u' = \text{Cossec} \frac{\pi}{2} \eta = \frac{1}{\text{Sen} \frac{\pi}{2} \eta}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = \frac{0 \cdot \text{Sen}(\pi/2)\eta - \pi/2 \text{Cos}(\pi/2)\eta}{\text{Sen}^2 \frac{\pi}{2} \eta} =$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = -\frac{\pi}{2} \text{Cossec} \frac{\pi}{2} \eta \text{Cotag} \frac{\pi}{2} \eta$$

$$\left. \frac{\partial u'}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = -\frac{\pi}{2} \text{Cossec} 0 \cdot \text{Cotag} 0, \text{ como } \text{Cossec} 0 = \infty \text{ e } \text{Cotag} 0 = \infty$$

Logo

$$\left. \frac{\partial u'}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = -\frac{\pi}{2} + \infty + \infty = -\infty$$

Como, para a determinação dos parâmetros da Camada Limite, necessita-se do valor da derivada do perfil junto à placa, ou seja:

$$\left. \frac{\partial u'}{\partial \eta} \right|_{\eta=0},$$

este valor é necessário para a aplicação do Método de Von Kármán. Ao aplicar-se o Método, para perfil $u' = \text{Cossec} \frac{\pi}{2} \eta$, observa-se que o valor de sua derivada, junto a placa, deu resultado $-\infty$.

Concluí-se, então, que para o método de Von Kármán o

o perfil $u' = \text{Cossec } \frac{\pi}{2} \eta$ não pode ser usado para representar o perfil de distribuição da velocidade.

III. PERFIL POLINOMIAL

Para a equação do tipo:

$$u(y) = C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3 + C_4 y^4 + C_5 y^5 + C_6 y^6 + C_7 y^7$$

ou na forma adimensional com $u' = \frac{u(y)}{u_\infty}$ e $y/\delta = \eta$

Logo

$$u' = \frac{u(y)}{u_\infty} = C_0 + C_1 \eta + C_2 \eta^2 + C_3 \eta^3 + C_4 \eta^4 + C_5 \eta^5 + C_6 \eta^6 + C_7 \eta^7$$

Assumindo este perfil e aplicando o método de Vón Kármán tem-se:

III.1 Tensão de Cisalhamento Viscosa

É dado pela fórmula

$$\tau_w = \mu \cdot \left. \frac{\partial u'}{\partial Y} \right|_{y=0}$$

Calculando a derivada da função $u(y)$, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left[C_1 + 2 C_2 y + 3 C_3 y^2 + 4 C_4 y^3 + 5 C_5 y^4 + 6 C_6 y^5 + 7 C_7 y^6 \right] \frac{u_\infty}{\delta}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = C_1 \cdot \frac{u_\infty}{\delta} \quad \text{Logo:}$$

$$\tau_w = \frac{u_\infty}{\delta} \cdot C_1 = \rho u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 u' (1 - u') d\eta$$

Chamando a integral de I e resolvendo, vem:

$$I = \int_0^1 u' (1 - u') d\eta = (C_0 - C_0^2) + \frac{(C_1 - 2 C_1 C_0)}{2} + \frac{(C_2 - 2 C_0 C_2 - C_1^2)}{3} + \frac{(C_3 - 2 C_3 C_0 - 2 C_2 C_1)}{4} + \frac{(C_4 - 2 C_4 C_0 - 2 C_3 C_1 - C_2^2)}{5} + \dots$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(C_5 - 2C_5C_0 - 2C_4C_1 - 2C_3C_2)}{6} + \frac{(C_6 - 2C_6C_0 - 2C_5C_1 - 2C_4C_2 - C_3^2)}{7} \\
& + \frac{(C_7 - 2C_0C_7 - 2C_1C_6 - 2C_2C_5 - 2C_3 \cdot C_4)}{8} - \frac{(2C_1C_7 + 2C_6C_2 + 2C_5C_3 + C_4^2)}{9} \\
& + \frac{(2C_2C_7 + 2C_3C_6 + 2C_4C_5)}{10} - \frac{(2C_3C_7 + 2C_6C_4 + C_5^2)}{11} - \frac{(2C_4C_7 + 2C_5C_6)}{12} \\
& - \frac{(2C_5C_7 + C_6^2)}{13} - \frac{2C_6C_7}{14} - \frac{C_7^2}{15}
\end{aligned}$$

Logo

$$\tau_w = \mu \cdot \frac{u_\infty}{\delta} \cdot C_1 = \rho \cdot u_\infty^2 \cdot \frac{d\delta}{dx} \cdot I$$

III.2. Relação entre espessura da Camada Limite e a distância da borda de ataque

$$\text{Como: } \tau_w = \mu \frac{u_\infty}{\delta} C_1 = \rho u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \cdot I$$

Simplificando e manuseando, vem:

$$\delta \cdot d\delta = \frac{\mu \cdot C_1}{\rho \cdot u_\infty} \cdot \frac{1}{I} \cdot dx$$

Integrando, tem-se:

$$\int \delta \cdot d\delta = \int \frac{\mu C_1}{\rho u_\infty} \cdot \frac{1}{I} dx$$

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{1}{I} \frac{\mu \cdot C_1}{\rho \cdot u_\infty} x + K$$

Determinação da constante K. Sabe-se que para $X = 0$ tem-se

$$\delta = 0.$$

$$\text{Logo: } \frac{0^2}{2} = \frac{1}{I} \frac{\mu \cdot C_1}{\rho \cdot u_\infty} \cdot 0 + K \therefore K = 0$$

Assim tem-se:

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{1}{I} \frac{\mu C_1}{\rho u_\infty} x \implies \frac{\delta^2}{x^2} = \frac{2C_1}{I} \cdot \frac{1}{Re_p}$$

$$\frac{\delta}{x} \cdot Re_p^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2C_1}{I}}$$

III.3. Coeficiente de Arrasto Local

$$C_{DX} = \frac{\tau_w}{\frac{\rho u_\infty^2}{2}} = \frac{\frac{\mu u_\infty C_1}{\delta}}{\frac{\rho u_\infty^2}{2}} = \frac{2 \mu C_1}{\delta \rho u_\infty}$$

Manuseando esta fórmula tem-se:

$$C_{DX} = \frac{2C_1}{\frac{\delta Re_p}{x}} \cdot \frac{Re_p^{-\frac{1}{2}}}{Re_p^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2C_1 Re_p^{-\frac{1}{2}}}{\frac{\delta Re_p^{\frac{1}{2}}}{x}} = \frac{2C_1 Re_p^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{2C_1}{I}}}$$

$$C_{DX} = \frac{2C_1}{\sqrt{\frac{2C_1}{I}}} Re_p^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad C_{DX} = I \sqrt{\frac{2C_1}{I}} \cdot Re_p^{-\frac{1}{2}}$$

$$C_{DX} = \sqrt{2C_1 I} Re_p^{-\frac{1}{2}}$$

III.4. Coeficiente de Arrasto Médio

$$C_{DM} = \frac{2}{x} \delta \cdot I = 2 \sqrt{\frac{2C_1}{I}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}} \cdot I$$

$$C_{DM} = 2 \cdot I \cdot \sqrt{\frac{2C_1}{I}} \cdot Re_p^{-\frac{1}{2}}$$

$$C_{DM} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot I^2 \cdot 2C_1}}{I} \cdot Re_p^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{8 I C_1} Re_p^{-\frac{1}{2}}$$

$$C_{DM} = \sqrt{8 \cdot I C_1} Re_p^{-\frac{1}{2}}$$

III.5. Relação entre a Espessura de Deslocamento e a espessura da Camada Limite

$$\delta^* = \delta \int_0^1 (1-u') d\eta$$

Resolvendo a Integral, tem-se:

$$I^* = \int_0^1 (1 - C_0 - C_1\eta - C_2\eta^2 - C_3\eta^3 - C_4\eta^4 - C_5\eta^5 - C_6\eta^6 - C_7\eta^7) d\eta$$

$$I^* = 1 - C_0 - \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{3} - \frac{C_3}{4} - \frac{C_4}{5} - \frac{C_5}{6} - \frac{C_6}{7} - \frac{C_7}{8}$$

$$\frac{\delta^*}{\delta} = I^* = 1 - C_0 - \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{3} - \frac{C_3}{4} - \frac{C_4}{5} - \frac{C_5}{6} - \frac{C_6}{7} - \frac{C_7}{8}$$

III.6. Relação entre Espessura de Deslocamento e Distância da borda de Ataque

Sabe-se que: $\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{2C_1}{I}} \cdot Re_p^{-\frac{1}{2}}$

ou

$$\frac{\delta}{x} Re_p^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2C_1}{I}}$$

Como $\frac{\delta^*}{\delta} = I^* \Rightarrow \delta = \frac{\delta^*}{I^*}$ substituindo na anterior

or, vem:

$$\frac{\delta^*}{I^*} \cdot \frac{Re_p^{\frac{1}{2}}}{x} = \sqrt{\frac{2C_1}{I}} \Rightarrow \frac{\delta^*}{x} = I^* \sqrt{\frac{2C_1}{I}} Re_p^{-\frac{1}{2}}$$

ou

$$\frac{\delta^*}{x} = \sqrt{\frac{2C_1 I^{*2}}{I}} Re_p^{-\frac{1}{2}}$$

III.7 Espessura da Quantidade de Movimento

$$\theta = \delta_0 \int_0^1 u' (1 - u') d\eta$$

ou

$$\theta = \delta \cdot I$$

$$\frac{\theta}{\delta} = I$$

III.8. Parâmetro de Forma da Camada Limite

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{\delta^*}{\delta} \frac{\delta}{\theta} \Rightarrow \text{como } \frac{\delta^*}{\delta} = I^*, \text{ e } \frac{\theta}{\delta} = I$$

logo:

$$H = I^* \cdot \frac{1}{I}$$

$$H = \frac{I^*}{I}$$

III.9. Relação entre espessura da Quantidade de Movimento e distância da borda de ataque da placa plana

Sabe-se que:

$$\frac{\theta}{\delta} = I \dots\dots\dots (a)$$

$$\frac{\delta}{x} Re_p = \sqrt{\frac{2C_1}{I}} \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2C_1}{I}} \cdot \frac{x}{\sqrt{Re_p}}$$

Substituindo em (a)

$$\frac{\theta}{\sqrt{\frac{2C_1}{I}} \cdot \frac{x}{\sqrt{Re_p}}} = I$$

$$\text{Logo: } \frac{\theta}{x} \sqrt{Re_p} = \sqrt{2C_1} I$$

Os parâmetros obtidos para perfil polinomial estão apresentados na tabela 04.

PER FIL VELO- CIDADE $u' = \frac{u(y)}{u_{\infty}}$	PARÂMETROS	$\frac{\theta}{x} \sqrt{Re_p}$	$\frac{\delta}{x} \sqrt{Re_p}$	$\frac{\delta^*}{x} \sqrt{Re_p}$	$H = \frac{\delta^*}{\theta}$	$I = \frac{\delta^*}{\delta}$	$I = \frac{\theta}{\delta}$	$C_{DX} \sqrt{Re_p}$	$C_{Dx} \sqrt{Re_p}$
	(Y/δ)	0.5774	3.4641	1.7321	3.0	0.5	0.1667	0.5774	1.1547
	$2 (Y/\delta) - (Y/\delta)^2$	0.7303	5.4772	1.8257	2.5	0.333	0.1333	0.7303	1.4606
	$\frac{2}{3} (Y/\delta) - \frac{1}{2} (Y/\delta)^3$	0.6464	4.6410	1.7404	2.6923	0.375	0.1393	0.6464	1.2928
	$2 (Y/\delta) - 2 (Y/\delta)^3 + (Y/\delta)^4$	0.6854	5.8356	1.7507	2.5541	0.30	0.1175	0.6854	1.3709
	$\frac{5}{3} (Y/\delta) - \frac{5}{3} (Y/\delta)^4 + (Y/\delta)^5$	0.6436	5.1794	1.7265	2.6826	0.333	0.1243	0.6436	1.2872
	$2 (Y/\delta) - 5 (Y/\delta)^4 + 5 (Y/\delta)^5 - 2 (Y/\delta)^6$	0.6613	6.0485	1.7282	2.6132	0.2857	0.1093	0.6613	1.3226
	$\frac{7}{4} (Y/\delta) - \frac{21}{4} (Y/\delta)^5 + 7 (Y/\delta)^6 - \frac{5}{2} (Y/\delta)^7$	0.6360	5.503	1.7197	2.7038	0.3125	0.1156	0.6360	1.2720

TABELA 04. CÁLCULO DOS PARÂMETROS DA CAMADA LIMITE EM PLACA PLANA PARA PERFIL POLINOMIAL DA VELOCIDADE OBTIDO PELAS CONDIÇÕES DE CONTORNO.

APÊNDICE [C]

Equações para calcular a transferência de calor em uma placa plana, com temperatura constante da parede, sujeita a um escoamento laminar, pelo método descrito no item III.4.

I. DESENVOLVIMENTO

Para o desenvolvimento, deve-se supor um tipo de equação para representar o perfil de distribuição da velocidade e temperatura ao longo da placa plana.

Como a investigação está ocorrendo no campo das equações polinomiais, deve-se impor um perfil polinomial. Para o perfil senoidal, que é, além das equações polinomiais, a única função trigonométrica capaz de representar os perfis de velocidade e temperatura, o problema é contornado, bastando para isto, desenvolver a função senoidal em série de Taylor.

I.1. Cálculo da Relação entre Camada Limite Hidrodinâmica e Térmica

Seja a distribuição da velocidade para perfil polinomial de grau sete.

$$u(y) = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + c_4 y^4 + c_5 y^5 + c_6 y^6 + c_7 y^7$$

ou em forma adimensional:

$$u' = \frac{u(y)}{u_\infty} = C_0 + C_1 \eta + C_2 \eta^2 + C_3 \eta^3 + C_4 \eta^4 + C_5 \eta^5 + C_6 \eta^6 + C_7 \eta^7$$

onde $\eta = y/\delta$

Ao longo da placa, a distribuição da temperatura deverá ter a forma:

$$\theta' = \frac{\theta(y)}{\theta_\infty} = C_0 + C_1 (y/\delta_t) + C_2 (y/\delta_t)^2 + C_3 (y/\delta_t)^3 + C_4 (y/\delta_t)^4 + C_5 (y/\delta_t)^5 + C_6 (y/\delta_t)^6 + C_7 (y/\delta_t)^7$$

ou ainda:

$$\theta' = \frac{\theta(y)}{\theta_\infty} = C_0 + C_1 \eta_t + C_2 \eta_t^2 + C_3 \eta_t^3 + C_4 \eta_t^4 + C_5 \eta_t^5 + C_6 \eta_t^6 + C_7 \eta_t^7$$

Aplicando a equação de Newton (III.1), tem-se:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\mu \cdot u_\infty}{\delta} \left. \frac{\partial u'}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}$$

como:

$$u' = \frac{u(y)}{u_\infty} = C_0 + C_1 \eta + C_2 \eta^2 + C_3 \eta^3 + C_4 \eta^4 + C_5 \eta^5 + C_6 \eta^6 + C_7 \eta^7$$

$$\left. \frac{\partial u'}{\partial \eta} \right| = C_1 + 2C_2 \eta + 3C_3 \eta^2 + 4C_4 \eta^3 + 5C_5 \eta^4 + 6C_6 \eta^5 + 7C_7 \eta^6$$

$$\left. \frac{\partial u'}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = C_1$$

Assim vem que:

$$\tau_w = \mu \cdot \frac{u_\infty}{\delta} C_1 \dots \dots \dots (C.1)$$

Da equação da quantidade de Movimento de Von Kármán (II.2), resulta em:

$$\tau_w = \rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta u (u_\infty - u) dy$$

ou ainda,

$$\tau_w = \rho u_\infty^2 \frac{d}{dx} \left[\delta \int_0^1 u' (1 - u') d\eta \right]$$

$$\tau_w = \rho u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 u' (1 - u') d\eta$$

Chamando a integral de I, substituindo os valores, tem-se que:

$$I = \int_0^1 u' - u'^2 d\eta = \int_0^1 u' d\eta - \int_0^1 u'^2 d\eta$$

Como:

$$u' = C_0 + C_1\eta + C_2\eta^2 + C_3\eta^3 + C_4\eta^4 + C_5\eta^5 + C_6\eta^6 + C_7\eta^7$$

Logo:

$$I = \int_0^1 (C_0 + C_1\eta + C_2\eta^2 + C_3\eta^3 + C_4\eta^4 + C_5\eta^5 + C_6\eta^6 + C_7\eta^7) d\eta - \\ - \int_0^1 (C_0 + C_1\eta + C_2\eta^2 + C_3\eta^3 + C_4\eta^4 + C_5\eta^5 + C_6\eta^6 + C_7\eta^7)^2 d\eta$$

$$\begin{aligned}
I = & -\frac{C_7^2}{15} - \left(\frac{2C_6 C_7}{14} \right) - \left(\frac{2C_5 C_7 + C_6^2}{13} \right) - \left(\frac{2C_4 C_7 + 2C_5 C_6}{12} \right) - \\
& - \left(\frac{2C_3 C_7 + 2C_4 C_6 + C_5^2}{11} \right) - \left(\frac{2C_2 C_7 + 2C_3 C_6 + 2C_4 C_5}{10} \right) - \\
& - \left(\frac{2C_1 C_7 + 2C_2 C_6 + 2C_3 C_5 + C_4^2}{9} \right) + \left(\frac{C_7 - 2C_0 C_7 - 2C_1 C_6}{8} - \right. \\
& - \left. \frac{2C_2 C_5 - 2C_3 C_4}{8} \right) + \left(\frac{C_6 - 2C_0 C_6 - 2C_1 C_5 - 2C_2 C_4 - C_3^2}{7} \right) + \\
& + \left(\frac{C_5 - 2C_0 C_5 - 2C_2 C_3 - 2C_1 C_4}{6} \right) + \left(\frac{C_4 - 2C_0 C_4 - 2C_1 C_3 - C_2^2}{5} \right) + \\
& + \left(\frac{C_3 - 2C_0 C_3 - 2C_2 C_1}{4} \right) + \left(\frac{C_2 - 2C_0 C_2 - C_1}{3} \right) + \left(\frac{C_1 - 2C_0 C_1}{2} \right) + \\
& + \left(C_0 - C_0^2 \right)
\end{aligned}$$

Como a solução da integral deu uma expressão um pouco longa, mantém-se para a aplicação do método, a solução como "I". Deixa-se para substituir as constantes no final da aplicação do método.

Desta forma, temos que:

$$\tau_w = \rho u_\infty^2 \cdot I \cdot \frac{d\delta}{dx} \dots\dots\dots(C.2).$$

Igualando com a equação da tensão de cisalhamento de Newton, vem:

$$\tau_w = \rho u_\infty^2 \cdot I \cdot \frac{d\delta}{dx} = \mu \cdot \frac{u_\infty}{\delta} \cdot C_1$$

Logo:

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\mu C_1}{\rho u_\infty I}$$

Como: $\gamma = \frac{\mu}{\rho}$

Assim: $\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\gamma C_1}{u_\infty \cdot I}$

Aplicando a equação da energia de Kruzhilin (II.6), vem:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} u (T_\infty - T) dy = \alpha \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Como: $\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{C_1 \theta_\infty}{\delta_t}$

$$e \quad u' = \frac{u}{l_{\infty}} = C_0 + C_1 \eta + C_2 \eta^2 + C_3 \eta^3 + C_4 \eta^4 + C_5 \eta^5 + C_6 \eta^6 + C_7 \eta^7$$

$$\theta' = \frac{\theta}{\theta_{\infty}} = C_0 + C_1 \eta_t + C_2 \eta_t^2 + C_3 \eta_t^3 + C_4 \eta_t^4 + C_5 \eta_t^5 + C_6 \eta_t^6 + C_7 \eta_t^7$$

Que substituindo na equação da energia resulta em:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} u (T_{\infty} - T) dy = \alpha \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[u_{\infty} \theta_{\infty} \int_0^{\delta_t} u' (1 - \theta') dy = \alpha \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \right. \\ \left. \frac{d}{dx} \left[u_{\infty} \theta_{\infty} \int_0^{\delta_t} (C_0 + C_1 \eta + C_2 \eta^2 + C_3 \eta^3 + C_4 \eta^4 + C_5 \eta^5 + C_6 \eta^6 + \right. \right. \\ \left. \left. + C_7 \eta^7) (1 - (C_0 + C_1 \eta_t + C_2 \eta_t^2 + C_3 \eta_t^3 + C_4 \eta_t^4 + C_5 \eta_t^5 + C_6 \eta_t^6 + \right. \right. \\ \left. \left. + C_7 \eta_t^7)) dy \right] = \alpha \frac{C_1 \theta_{\infty}}{\delta_t} \right. \end{aligned}$$

Chamando a integral de "S" e resolvendo, tem-se:

$$S = \int_0^{\delta_t} u' (1 - \theta') dy$$

$$\begin{aligned} S = \delta \left[\left(\frac{C_7}{8} - \frac{C_7^2}{15} - \frac{C_6 C_7}{14} - \frac{C_5 C_7}{13} - \frac{C_4 C_7}{12} - \frac{C_7 C_3}{11} - \frac{C_2 C_7}{10} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{C_1 C_7}{9} - \frac{C_0 C_7}{8} \right) \varepsilon^8 + \left(\frac{C_6}{7} - \frac{C_6 C_7}{14} - \frac{C_6^2}{13} - \frac{C_5 C_6}{12} - \frac{C_4 C_6}{11} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{C_3 C_6}{10} - \frac{C_2 C_6}{9} - \frac{C_1 C_6}{8} - \frac{C_0 C_6}{7} \right) \epsilon^7 + \left(\frac{C_5}{6} - \frac{C_5 C_7}{13} - \frac{C_5 C_6}{12} \right. \\
 & - \left. \frac{C_5^2}{11} - \frac{C_5 C_4}{10} - \frac{C_5 C_3}{9} - \frac{C_5 C_2}{8} - \frac{C_5 C_1}{7} - \frac{C_5 C_0}{6} \right) \epsilon^6 + \\
 & + \left(\frac{C_4}{5} - \frac{C_4 C_7}{12} - \frac{C_4 C_6}{11} - \frac{C_4 C_5}{10} - \frac{C_4^2}{9} - \frac{C_3 C_4}{8} - \frac{C_2 C_4}{7} \right. \\
 & - \left. \frac{C_1 C_4}{6} - \frac{C_0 C_4}{5} \right) \epsilon^5 + \left(\frac{C_3}{4} - \frac{C_7 C_3}{11} - \frac{C_3 C_6}{10} - \frac{C_3 C_5}{9} \right. \\
 & - \left. \frac{C_3 C_4}{8} - \frac{C_3^2}{7} - \frac{C_2 C_3}{6} - \frac{C_1 C_3}{5} - \frac{C_0 C_3}{4} \right) \epsilon^4 + \left(\frac{C_2}{3} - \frac{C_7 C_2}{10} \right. \\
 & - \left. \frac{C_2 C_6}{9} - \frac{C_2 C_5}{8} - \frac{C_2 C_4}{7} - \frac{C_2 C_3}{6} - \frac{C_2^2}{5} - \frac{C_2 C_1}{4} - \frac{C_2 C_0}{3} \right) \\
 & \epsilon^3 + \left(\frac{C_1}{2} - \frac{C_1 C_7}{9} - \frac{C_1 C_6}{8} - \frac{C_1 C_5}{7} - \frac{C_1 C_4}{6} - \frac{C_1 C_3}{5} \right. \\
 & - \left. \frac{C_1 C_2}{4} - \frac{C_1^2}{3} - \frac{C_1 C_0}{2} \right) \epsilon^2 + \left(\frac{C_0^2}{8} - \frac{C_0 C_7}{8} \right. \\
 & \left. - \frac{C_0 C_6}{7} - \frac{C_0 C_5}{6} - \frac{C_0 C_4}{5} - \frac{C_0 C_3}{4} - \frac{C_0 C_2}{3} - \frac{C_0 C_1}{2} + C_0^2 \right) \epsilon \left. \right]
 \end{aligned}$$

Onde $\epsilon = \frac{\delta_t}{\delta}$

Substituindo a integral "S" na equação da energia, resulta em:

$$\frac{d}{dx} \left[u^\infty \theta^\infty S \right] = \frac{\alpha C_1 \theta^\infty}{\delta_t}$$

Como " u^∞ " e " θ^∞ " são constantes, logo:

$$u^\infty \theta^\infty \frac{d}{dx} S = \alpha \frac{C_1 \theta^\infty}{\delta_t}$$

Para facilitar trabalhar com a solução da integral "S" da energia, adota-se a seguinte nomenclatura:

$$K_1 = \frac{C_0}{8} - \frac{C_0 C_7}{7} - \frac{C_0 C_6}{6} - \frac{C_0 C_5}{5} - \frac{C_0 C_4}{4} - \frac{C_0 C_3}{3} - \frac{C_0 C_2}{2} - \frac{C_0 C_1}{2} - C_0^2$$

$$K_2 = \frac{C_1}{9} - \frac{C_1 C_7}{8} - \frac{C_1 C_6}{7} - \frac{C_1 C_5}{6} - \frac{C_1 C_4}{5} - \frac{C_1 C_3}{4} - \frac{C_1 C_2}{3} - \frac{C_1^2}{2} - \frac{C_1 C_0}{2}$$

$$K_3 = \frac{C_2}{3} - \frac{C_2 C_7}{10} - \frac{C_2 C_6}{9} - \frac{C_2 C_5}{8} - \frac{C_2 C_4}{7} - \frac{C_2 C_3}{6} - \frac{C_2^2}{5} - \frac{C_2 C_1}{4} - \frac{C_2 C_0}{3}$$

$$K_4 = \frac{C_3}{4} - \frac{C_3 C_7}{11} - \frac{C_3 C_6}{10} - \frac{C_3 C_5}{9} - \frac{C_3 C_4}{8} - \frac{C_3^2}{7} - \frac{C_3 C_2}{6} - \frac{C_3 C_1}{5} - \frac{C_3 C_0}{4}$$

$$K_5 = \frac{C_4}{5} - \frac{C_4 C_7}{12} - \frac{C_4 C_6}{11} - \frac{C_4 C_5}{10} - \frac{C_4^2}{9} - \frac{C_4 C_3}{8} - \frac{C_4 C_2}{7} - \frac{C_4 C_1}{6} - \frac{C_4 C_0}{5}$$

$$K_6 = \frac{C_5}{6} - \frac{C_5 C_7}{13} - \frac{C_5 C_6}{12} - \frac{C_5^2}{11} - \frac{C_5 C_4}{10} - \frac{C_5 C_3}{9} - \frac{C_5 C_2}{8} - \frac{C_5 C_1}{7} - \frac{C_5 C_0}{6}$$

$$K_7 = \frac{C_6}{7} - \frac{C_6 C_7}{14} - \frac{C_6^2}{13} - \frac{C_6 C_5}{12} - \frac{C_6 C_4}{11} - \frac{C_6 C_3}{10} - \frac{C_6 C_2}{9} - \frac{C_6 C_1}{8} - \frac{C_6 C_0}{7}$$

$$K_8 = \frac{C_7}{8} - \frac{C_7^2}{15} - \frac{C_7 C_6}{14} - \frac{C_7 C_5}{13} - \frac{C_7 C_4}{12} - \frac{C_7 C_3}{11} - \frac{C_7 C_2}{10} - \frac{C_7 C_1}{9} - \frac{C_7 C_0}{8}$$

O que vai facilitar bem na aplicação do método.

Assim vem que:

$$S = \delta [K_8 \epsilon^8 + K_7 \epsilon^7 + K_6 \epsilon^6 + K_5 \epsilon^5 + K_4 \epsilon^4 + K_3 \epsilon^3 + K_2 \epsilon^2 + K_1 \cdot \epsilon]$$

$$S = \delta \sum_{i=1}^8 K_i \cdot \epsilon^i$$

Como, ao resolver a integral "S", tem-se um polimônio em "ε" de grau 8, deve-se, para facilitar os cálculos, considerar apenas o maior "K_i" e desprezar os outros K_i's. Isto é feito por 3 motivos:

- tem-se uma equação diferencial mais simples para solucionar;
- pôde-se desprezar valores, cujo K_i ≈ 0,0;
- há facilidade para implantação do programa;

Assim a integral "S" deverá ter apenas a constante "K_i" de maior valor. Como esta constante "K_i", depende do valor das constantes "C_i" dos polinômios, indica-se "S", co-

mo sendo $S = \delta \sum_1^8 K_i \epsilon^i$.

Note-se bem que "S" é para o maior K_i , que ainda não se sabe qual é:

Assim procedendo, tem-se:

$$u_{\infty} \frac{dS}{dx} = \frac{\alpha C_1}{\delta_t}$$

$$u_{\infty} \frac{d}{dx} \delta \sum_{i=1}^8 K_i \epsilon^i = \frac{\alpha C_1}{\delta_t}$$

$$u_{\infty} \sum_{i=1}^8 K_i \frac{d}{dx} (\epsilon^i \delta) = \frac{\alpha C_1}{\delta_t} \quad \text{derivando por partes}$$

vem:

$$u_{\infty} \sum_{i=1}^8 K_i \left(i \epsilon^{i-1} \delta \frac{d\epsilon}{dx} + \epsilon^i \frac{d\delta}{dx} \right) = \frac{\alpha C_1}{\delta_t}$$

Ou seja,

$$u_{\infty} \sum_{i=1}^8 K_i \left[\sum_{i=1}^8 i \epsilon^{i-1} \cdot \delta \frac{d\epsilon}{dx} + \sum_{i=1}^8 \epsilon^i \frac{d\delta}{dx} \right] = \frac{\alpha C_1}{\delta_t}$$

Multiplicando e dividindo o 2º Membro da equação por δ e fazendo $\epsilon = \frac{\delta}{t}$, vem:

$$u_{\infty} \sum_{i=1}^8 K_i \left[\sum_{i=1}^8 i \epsilon^{i-1} \cdot \delta \frac{d\epsilon}{dx} + \sum_{i=1}^8 \epsilon^i \frac{d\delta}{dx} \right] = \frac{\alpha C_1}{\delta \epsilon}$$

Logo resulta em:

$$u^\infty \sum_{i=1}^8 K_i \left[\sum_{i=1}^8 i \epsilon^i \delta^2 \frac{d\epsilon}{dx} + \sum_{i=1}^8 \epsilon^{i+1} \delta \frac{d\delta}{dx} \right] = \alpha C_1$$

Como:

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\gamma C_1}{u^\infty I}$$

que integrando resulta em:

$$\int \delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\gamma C_1}{u^\infty I} \int dx \Rightarrow \frac{\delta^2}{2} = \frac{\gamma C_1}{u^\infty I} x + C$$

Onde: $C =$ Constante de integração.

Pelas condições de contorno, tem-se que para $x = 0$, ponta da placa, $\delta = 0$ o que dá $C = 0$.

Logo,

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{\gamma C_1}{u^\infty I} x \Rightarrow \delta^2 = 2 \frac{\gamma C_1}{u^\infty I} x$$

Que substituindo na equação anterior resulta em:

$$u^\infty \sum_{i=1}^8 K_i \left[\sum_{i=1}^8 i \epsilon^i \frac{2\gamma C_1 x}{u^\infty I} \frac{d\epsilon}{dx} + \sum_{i=1}^8 \epsilon^{i+1} \frac{\gamma C_1}{u^\infty I} \right] = \alpha C_1$$

$$\sum_{i=1}^8 K_i \left[\sum_{i=1}^8 i \epsilon^i \frac{2x}{I} \frac{d\epsilon}{dx} + \sum_{i=1}^8 \epsilon^{i+1} \frac{1}{I} \right] = \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1}{Pr}$$

Sabe-se que:

$$\frac{d}{dx} \epsilon^{i+1} = (i+1) \epsilon^i \frac{d\epsilon}{dx}$$

ou

$$\left(\frac{1}{i+1} \right) \frac{d\epsilon^{i+1}}{dx} = \epsilon^i \frac{d\epsilon}{dx}$$

Assim, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^8 K_i \left[\frac{\sum_{i=1}^8 2x}{1} \left(\frac{1}{i+1} \right) \frac{d\epsilon^{i+1}}{dx} + \sum_{i=1}^8 \epsilon^{i+1} \frac{1}{1} \right] = \frac{1}{Pr}$$

$$2x \sum_{i=1}^8 \left(\frac{i}{i+1} \right) \frac{d\epsilon^{i+1}}{dx} + \sum_{i=1}^8 \epsilon^{i+1} = \frac{1}{Pr \sum_{i=1}^8 K_i}$$

$$x \sum_{i=1}^8 \frac{d\epsilon^{i+1}}{dx} + \sum_{i=1}^8 \left(\frac{i+1}{2i} \right) \epsilon^{i+1} = \frac{1}{Pr \sum_{i=1}^8 K_i \left(\frac{2i}{i+1} \right)}$$

$$x \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^8 \epsilon^{i+1} + \sum_{i=1}^8 \epsilon^{i+1} \left(\frac{i+1}{2i} \right) = \frac{1}{Pr \sum_{i=1}^8 K_i \left(\frac{2i}{i+1} \right)}$$

Fazendo:

$$Y = \sum_{i=1}^8 \epsilon^{i+1} ; \quad X = x ; \quad A = \sum_{i=1}^8 \frac{i+1}{2i}$$

$$B = \frac{1}{Pr \sum_{i=1}^8 K_i \left(\frac{2i}{i+1} \right)}$$

Que resulta em:

$$X \frac{dy}{dx} + Ay = B$$

Que é uma equação diferencial linear de 1ª Ordem, em

$$y = \sum_{i=1}^8 \epsilon^{i+1}$$

A solução particular desta equação é dada por:

$$Y_p = \frac{B}{A}$$

A solução homogênea da equação é dada por:

$$Y_h = x^{-A}$$

A solução completa é dada por:

$$Y = Y_p + Y_h$$

$$Y = C X^{-A} + \frac{B}{A}$$

Onde C = Constante de integração.

Assim tem-se que:

$$\sum_{i=1}^8 \epsilon^{i+1} = CX^{-\sum_{i=1}^8 \frac{i+1}{2i}} + \frac{I}{Pr \sum_{i=1}^8 K_i \left(\frac{2i}{i+1} \right)} \cdot \frac{i+1}{2i}$$

Logo:

$$\sum_{i=1}^8 \epsilon^{i+1} = CX^{-\sum_{i=1}^8 \frac{i+1}{2i}} + \frac{I}{Pr \sum_{i=1}^8 K_i}$$

Sabe-se que para $x = x_0 \Rightarrow \delta_t = 0$ ou seja

$$x = x_0 \Rightarrow \epsilon = 0$$

Assim:

$$\sum_{i=1}^8 \epsilon^{i+1} X^{\sum_{i=1}^8 \frac{i+1}{2i}} = C + \frac{I X^{\sum_{i=1}^8 \frac{i+1}{2i}}}{Pr \sum_{i=1}^8 K_i}$$

Logo:

$$C = - \frac{I}{\Pr \sum_{i=1}^8 K_i} X_0^{\sum_{i=1}^8 \frac{i+1}{2i}}$$

Logo:

$$\sum_{i=1}^8 \epsilon^{i+1} = \frac{-I}{\Pr \sum_{i=1}^8 K_i} \left(\frac{X_0}{X} \right)^{\sum_{i=1}^8 \frac{i+1}{2i}} + \frac{I}{\Pr \sum_{i=1}^8 K_i}$$

$$\sum_{i=1}^8 \epsilon^{i+1} = \frac{I}{\Pr \sum_{i=1}^8 K_i} \left[1 - \left(\frac{X_0}{X} \right)^{\sum_{i=1}^8 \frac{i+1}{2i}} \right]$$

$$\epsilon = \sum_{i=1}^8 \frac{I}{\Pr \cdot K_i} \left[1 - \left(\frac{X_0}{X} \right)^{\frac{i+1}{2i}} \right] \frac{1}{i+1}$$

Ou ainda:

$$\epsilon = \sum_{i=1}^8 \left[\frac{I}{\Pr \cdot K_i} \right]^{\frac{1}{i+1}} \cdot \left[1 - \left(\frac{X_0}{X} \right)^{\frac{i+1}{2i}} \right]^{\frac{1}{i+1}}$$

Fazendo:

$$S_0 = \sum_{i=1}^8 \left[\frac{I}{K_i} \right]^{k_2}$$

$$k_1 = \sum_{i=1}^8 \frac{i+1}{2i}$$

$$k_2 = \sum_{i=1}^8 \frac{1}{i+1}$$

Assim:

$$\epsilon = \frac{\delta_t}{\delta} = S_0 \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{k_1} \right]^{k_2} \cdot Pr^{-k_2}$$

I.2. Determinação do Coeficiente Local de Transferência de Calor

Como o perfil de distribuição da velocidade e temperatura é de forma polinomial, tem-se, então, por análise da equação de distribuição da temperatura que:.

$$h_x = \frac{-K}{(T_s - T_\infty)} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Mas:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} = C_1 \frac{\theta_\infty}{\delta_t} = \frac{C_1 (T_\infty - T_s)}{\delta_t}$$

Logo:

$$h_x = \frac{q_w}{T_s - T_\infty} = - \frac{K (T_\infty - T_s)}{(T_s - T_\infty)} \frac{C_1}{\delta_t} = C_1 \frac{K}{\delta_t}$$

Ou se multiplicar e dividir por δ e fazer $\epsilon = \frac{\delta_t}{\delta}$, tem-se

$$h_x = \frac{q_w}{T_s - T_\infty} = \frac{-K (T_\infty - T_s)}{(T_s - T_\infty)} \frac{C_1}{\delta_t} = C_1 \frac{K}{\delta \epsilon}$$

$$h_x = \frac{C_1 \cdot K}{\delta \cdot \epsilon}$$

I.3. Cálculo do Número de Nusselt

Da equação de Newton (C.1) e da Equação da quantidade de Movimento de Von Kármán (C.2), tem-se:

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\gamma C_1}{u^\infty I}$$

Que integrando vem:

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{\gamma C_1}{u^\infty I} \cdot x$$

Logo:

$$\delta^2 = \frac{2\gamma C_1}{u^\infty \cdot I} \cdot x \quad \text{ou} \quad \delta = \sqrt{\frac{2\gamma C_1}{u^\infty \cdot I} \cdot x}$$

Multiplicando e dividindo por x, vem que:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\gamma C_1 x^2}{u^\infty x \cdot I}} = x \sqrt{\frac{2 C_1}{I}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_p}}$$

Logo:

$$\delta = \sqrt{\frac{2 \cdot C_1}{I}} \cdot \frac{x}{\sqrt{Re_p}}$$

Sabe-se que:

$$\epsilon = \frac{\delta_t}{\delta} = \frac{8}{\sum_{i=1}^8} \left[\frac{I}{Pr \cdot K_i} \right]^{\frac{1}{i+1}} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\frac{i+1}{2i}} \right]^{\frac{1}{i+1}}$$

Que substituindo em:

$$h_x = \frac{C_1 K}{\delta \epsilon} \quad \text{resulta em:}$$

$$h_x = \frac{C_1 K}{\sqrt{\frac{2 C_1}{I}} \cdot \frac{x}{\sqrt{Re_p}}} \cdot \frac{1}{\epsilon}$$

$$h_x = \frac{C_1 \cdot \sqrt{Re_p} \cdot \frac{K}{x} \cdot \frac{1}{\epsilon}}{\sqrt{\frac{2 C_1}{I}}}$$

ou

$$h_x = \sqrt{\frac{I C_1}{2}} \cdot \sqrt{Re_p} \cdot \frac{K}{x} \cdot \frac{1}{\epsilon}$$

Substituindo o valor de ϵ , vem:

$$h_x = \sqrt{\frac{I C_1}{2}} \cdot \sqrt{Re_p} \left(\frac{K}{x} \right) \frac{1}{\frac{8}{\sum_{i=1}^8} \left[\frac{I}{Pr \cdot K_i} \right]^{\frac{1}{i+1}} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\frac{i+1}{2i}} \right]^{\frac{1}{i+1}}}$$

Sabe-se que:

$$\frac{h_x \cdot X}{K} = NU_{xp} = \text{número de Nusselt local.}$$

Logo:

$$\frac{h_x \cdot X}{K} = NU_{xp} = \sqrt{\frac{I C_1}{2}} \frac{\sqrt{Re_p}}{\sum_{i=1}^8 \left[\frac{I}{Pr \cdot K_i} \right]^{\frac{1}{i+1}} \cdot \left[1 - \left(\frac{X_0}{X} \right)^{\frac{i+1}{2i}} \right]^{\frac{1}{i+1}}}$$

Fazendo:

$$S_1 = \sum_{i=1}^8 \left[\frac{K_i}{I} \right]^{k_2} \cdot \sqrt{\frac{I C_1}{2}}$$

$$k_1 = \sum_{i=1}^8 \frac{i+1}{2i}$$

$$k_2 = \sum_{i=1}^8 \frac{1}{i+1}$$

Desta forma a equação do número de Nusselt Local pode ser escrita como:

$$NU_{xp} = S_1 * \left[1 - \left(\frac{X_0}{X} \right) \right]^{k_1 k_2} * Pr^{k_2} * Re_p^{1/2}$$

Analisando o número de Nusselt Local, observa-se que para $X_0 = 0$ o número de Nusselt se reduz a:

$$NU_{xp} = \sqrt{\frac{IC_1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{Re_p}}{\sum_{i=1}^8 \left[\frac{1}{Pr \cdot K_i} \right]^{\frac{1}{i+1}}}$$

Fazendo:

$$S_1 = \sum_{i=1}^8 \left[\frac{K_i}{I} \right]^{k_2} \cdot \sqrt{\frac{IC_1}{2}}$$

$$k_2 = \sum_{i=1}^8 \frac{1}{i+1} \quad \text{o que resulta em:}$$

$$NU_{xp} = S_1 \cdot Pr^{k_2} \cdot Re_p^{\frac{1}{2}}$$

O coeficiente médio de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{\int_0^X h_x dx}{\int_0^X dx} = 2h_x$$

∴

$h = 2h_x$ onde h = coeficiente médio de transferência de calor.

Da mesma forma, prova-se que número de Nusselt Médio é dado por:

$$NU_m = \frac{h X}{K} = \frac{2h_x X}{K} = 2NU_{xp}$$

Logo o número de Nusselt Médio, para $X_0=0$, fica:

$$NU_m = 2NU_{xp} = \sqrt{2IC_1} \frac{\sqrt{Re_p}}{\sum_{i=1}^8 \left[\frac{I}{Pr \cdot K_i} \right]^{1/(i+1)}}$$

Ou fazendo:

$$S_2 = \sum_{i=1}^8 \left[\frac{K_i}{I} \right]^{k_1} \cdot \sqrt{2 \cdot I \cdot C_1}$$

$$k_1 = \sum_{i=1}^8 \frac{1}{i+1}$$

Assim a equação fica:

$$NU_m = S_2 \cdot Pr^{k_1} \cdot Re_p^{1/2}$$

O fluxograma e o programa, em linguagem Fortran, estão indicados no apêndice [E].

APÊNDICE [D]

TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM TUBO CIRCULAR COM PERFIS DE VELOCIDADE E TEMPERATURA TOTALMENTE DESENVOLVIDOS

I. ESCOAMENTO DE FLUÍDO NEWTONIANO

I.1. Determinação das Equações dos perfis de Temperatura para Tubo Circular, com Regime Laminar e Temperatura Constante da Parede.

I.1.1. Condições de Contorno

As condições de contorno para tubo circular (ver figura 04 - Região II) são:

$$1) y = 0 \implies T_c = T_s \quad \therefore T = T_c - T_s = 0$$

ou seja, para $y = 0$ tem-se que a temperatura do centro do tubo (T_c) é igual a temperatura da parede do tubo (T_s).

$$2) y = 0 \implies \left. \frac{d^2 T}{dy^2} \right|_{y=0} = \frac{1}{R} \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0}$$

Para $y = 0$, a derivada segunda da temperatura (T) é igual à derivada primeira da temperatura, vezes o inverso do raio.

$$3) y = R \implies T = T_c \quad \therefore T = T_c - T_s = \text{constante}$$

Para y igual ao raio do tubo (R) a temperatura (T) é igual à temperatura de corrente do centro do tubo (T_c).

$$4) y = 0 \implies \left. \frac{d^3 T}{dy^3} \right|_{y=0} = \frac{1}{R} \left. \frac{d^2 T}{dy^2} \right|_{y=0}$$

Para $y = 0$ a derivada terceira da temperatura (T) é igual à derivada segunda da temperatura, vezes o inverso do raio do tubo (R).

$$5) y = 0 \implies \left. \frac{d^4 T}{dy^4} \right|_{y=0} = \frac{1}{R} \left. \frac{d^3 T}{dy^3} \right|_{y=0}$$

Para $y = 0$ a derivada quarta da temperatura (T) é igual à derivada terceira da temperatura, vezes o inverso do raio do tubo (R).

As condições de contorno devem parar por aqui, pois a partir deste ponto, o perfil determinado não representa, necessariamente, o perfil real da temperatura. A condição de contorno perde o sentido físico. Por este motivo, obtêm-se perfis polinomiais de 4^a Ordem no máximo.

I.1.2. Deduções dos Perfis Polinomiais de Temperatura

I.1.2.1. Perfil Polinomial do 1º Grau

Seja o perfil da temperatura da forma:

$$T = a_0 + a_1 y \quad \dots \dots \dots (D.1)$$

Derivando a equação (D.1)

$$\frac{dT}{dy} = a_1 \implies \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = a_1$$

Derivada novamente,

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = 0$$

Aplicando a condição de contorno número (2), tem-se:

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d^2 T}{dy^2} \right|_{y=0} = \frac{1}{R} \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0}$$

assim, $0 = \frac{1}{R} \cdot a_1 \quad \therefore a_1 = 0$

Aplicando a condição de contorno número (1), vem:

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_C = T_S \quad \therefore T = T_C - T_S = 0$$

em (D.1), $T = a_0 + a_1 y \quad p/y = 0 \quad e \quad a_1 = 0$

$$0 = a_0 + 0 \quad \therefore a_0 = 0$$

assim, $T' = \frac{T}{T_C} = 0$

I.1.2.2. Perfil Polinomial do 2º Grau

Perfil de temperatura da forma:

$$T = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 \dots \dots \dots (D.2)$$

Derivando a equação (D.2) vem:

$$\frac{dT}{dy} = a_1 + 2a_2 y \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = a_1$$

Novamente derivando, tem-se:

$$\frac{d^2T}{dy^2} = 2a_2 \implies \left. \frac{d^2T}{dy^2} \right|_{y=0} = 2a_2$$

Aplicando a condição (1)

$$y = 0 \implies T_C = T_S \quad \therefore T = T_C - T_S = 0$$

$$\text{em (D.2) vem que: } 0 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 \quad \therefore a_0 = 0$$

Aplicando a condição (2)

$$y = 0 \implies \left. \frac{d^2T}{dy^2} \right|_{y=0} = \frac{1}{R} \quad \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = 0$$

$$\text{assim: } 2a_2 = \frac{1}{R} \cdot a_1 \quad \therefore a_2 = \frac{a_1}{2R} \dots\dots\dots (D.3)$$

Aplicando a condição (3)

$$y = R \implies T = T_C \quad \therefore T = T_C - T_S = \text{Constante}$$

$$\text{tem-se que: } T_C = a_0 + a_1 R + a_2 R^2$$

Que substituindo os valores de a_0 e a_2 resulta em:

$$T_C = 0 + a_1 R + \frac{a_1}{2R} \cdot R^2 = \frac{3}{2} a_1 R$$

$$T_C = \frac{3}{2} a_1 R \implies a_1 = \frac{2}{3} \frac{T_C}{R}$$

Que substituindo na equação (D.3) vem que:

$$a_2 = \frac{\frac{2}{3} \frac{T_C}{R}}{2R} = \frac{T_C}{3R^2} \quad \therefore a_2 = \frac{T_C}{3R^2}$$

Que substituindo na equação (D.2) tem-se:

$$T = 0 + \frac{2}{3} \frac{T_c}{R} \cdot y + \frac{T_c}{3} \frac{y^2}{R^2}$$

logo:

$$T' = \frac{T}{T_c} = \frac{2}{3} (y/R) + \frac{1}{3} (y/R)^2$$

1.1.2.3. Perfil Polinomial do 3º Grau

Para o perfil polinomial de temperatura na forma:

$$T = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 \dots \dots \dots (D.4)$$

Derivando a equação (D.4) vem:

$$\frac{dT}{dy} = a_1 + 2a_2 y + 3a_3 y^2 \implies \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = a_1$$

Derivando novamente:

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = 2a_2 + 6a_3 y \implies \left. \frac{d^2 T}{dy^2} \right|_{y=0} = 2a_2$$

Novamente derivando, tem-se:

$$\frac{d^3 T}{dy^3} = 6a_3 \implies \left. \frac{d^3 T}{dy^3} \right|_{y=0} = 6a_3$$

Aplicando a condição 1, tem-se:

$$y = 0 \implies T_c = T_s \quad \therefore T = T_c - T_s = 0$$

$$0 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3$$

$$a_0 = 0$$

Aplicando a condição (2), vem

$$y = 0 \implies \left. \frac{d^2 T}{dy^2} \right|_{y=0} = \frac{1}{R} \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0}$$

$$2a_2 = \frac{1}{R} a_1$$

$$a_2 = \frac{1}{R} \frac{a_1}{2} \dots \dots \dots (D.5)$$

Aplicando a condição (3), vem:

$$y = 0 \implies \left. \frac{d^3 T}{dy^3} \right|_{y=0} = \frac{1}{R} \left. \frac{d^2 T}{dy^2} \right|_{y=0}$$

$$6a_3 = \frac{1}{R} \cdot 2a_2$$

$$a_3 = \frac{1}{R} \frac{2a_2}{6} = \frac{a_2}{R} \cdot \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{a_1}{R \cdot 2} = \frac{a_1}{6R^2}$$

$$a_3 = \frac{a_1}{6R^2} \dots \dots \dots (D.6)$$

Aplicando a condição (4), tem-se:

$$Y = R \implies T = T_C$$

Da equação (D.4) resulta em:

$$T_C = 0 + a_1 R + \frac{a_1}{2R} R + \frac{a_1}{6R^2} \cdot R^3$$

$$T_C = \frac{5}{3} a_1 R, \quad \therefore a_1 = \frac{3}{5} \frac{T_C}{R} \dots \dots \dots (D.9)$$

Que substituindo nas equações (D.5) e (D.6); vem:

$$a_2 = \frac{1}{R} \cdot \frac{a_1}{2} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{T_C}{R}}{2}$$

$$a_2 = \frac{3}{10} \frac{T_C}{R^2} \dots \dots \dots (D.7)$$

$$a_3 = \frac{a_1}{6R^2} = \frac{\frac{3}{5} \frac{T_C}{R}}{6R^2}$$

$$a_3 = \frac{1}{10} \frac{T_C}{R^3} \dots \dots \dots (D.8)$$

Substituindo as equações (D.7), (D.8) e (D.9) na equação (D.4), resulta em

$$T = 0 + \frac{3}{5} \frac{T_C}{R} \cdot y + \frac{3}{10} \frac{T_C}{R^2} y^2 + \frac{1}{10} \frac{T_C}{R^3} \cdot y^3$$

$$T' = \frac{T}{T_C} = \frac{3}{5} (y/R) + \frac{3}{10} (y/R)^2 + \frac{1}{10} (y/R)^3$$

I.1.2.4. Perfil Polinomial do 4º Grau

Seja o perfil polinomial do quarto grau de temperatura na forma:

$$T = a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4 \dots \dots \dots (D.10)$$

Derivando a equação (D.10) vem:

$$\frac{dT}{dy} = a_1 + 2a_2y + 3a_3y^2 + 4a_4y^3 \implies \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = a_1$$

Novamente derivando, tem-se:

$$\frac{d^2T}{dy^2} = 2a_2 + 6a_3y + 12a_4y^2 \implies \left. \frac{d^2T}{dy^2} \right|_{y=0} = 2a_2$$

Derivando resulta em:

$$\frac{d^3T}{dy^3} = 6a_3 + 24a_4y \implies \left. \frac{d^3T}{dy^3} \right|_{y=0} = 6a_3$$

Assim derivando novamente, tem-se que:

$$\frac{d^4T}{dy^4} = 24a_4 \implies \left. \frac{d^4T}{dy^4} \right|_{y=0} = 24a_4$$

Aplicando a condição (1), vem:

$$y = 0 \implies T_c = T_s \quad \therefore T = T_c - T_s = 0$$

Da equação (D.10)

$$0 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 + a_4 \cdot 0^4 \quad \therefore a_0 = 0$$

Aplicando a condição (2), tem-se que:

$$y = 0 \implies \left. \frac{d^2 T}{dy^2} \right|_{y=0} = \frac{1}{R} \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0}$$

$$2a_2 = \frac{1}{R} a_1 \quad \therefore \quad a_2 = \frac{a_1}{2R} \dots \dots \dots (D.11)$$

Aplicando a condição (3), vem que:

$$y = 0 \implies \left. \frac{d^3 T}{dy^3} \right|_{y=0} = \frac{1}{R} \left. \frac{d^2 T}{dy^2} \right|_{y=0}$$

$$6a_3 = \frac{1}{R} 2a_2 \quad \therefore \quad a_3 = \frac{a_2}{3R}$$

$$a_3 = \frac{\frac{a_1}{2R}}{3R} = \frac{a_1}{6R^2} \quad \therefore \quad a_3 = \frac{a_1}{6R^2} \dots \dots \dots (D.12)$$

Aplicando a condição (4), resulta em:

$$y = 0 \implies \left. \frac{d^4 T}{dy^4} \right|_{y=0} = \frac{1}{R} \left. \frac{d^3 T}{dy^3} \right|_{y=0}$$

$$24a_4 = (1/R) \cdot 6a_3 \implies a_4 = a_3/(4R)$$

$$a_4 = \frac{a_1}{24R^3} \dots \dots \dots (D.13)$$

Usando a condição 5 e substituindo as equações (D.11) (D.12) e (D.13), tem-se então:

$$Y = R \implies T = T_C \quad \text{Logo da equação (D.10)}$$

$$T_C = 0 + a_1 R + \frac{a_1}{2R} R^2 + \frac{a_1}{6R^2} R^3 + \frac{a_1}{24R^3} R^4$$

$$T_C = \frac{41}{24} a_1 \cdot R \implies a_1 = \frac{24}{41} \cdot \frac{T_C}{R} \dots\dots\dots (D.14)$$

Que substituindo nas equações (D.11), (D.12) e (D.13) resulta em:

$$a_2 = \frac{a_1}{2R} = \frac{12}{41} \frac{T_C}{R^2} \dots\dots\dots (D.15)$$

$$a_3 = \frac{a_1}{6R^2} = \frac{4}{41} \frac{T_C}{R^3} \dots\dots\dots (D.16)$$

$$a_4 = \frac{a_1}{24R^3} = \frac{1}{41} \cdot \frac{T_C}{R^4} \dots\dots\dots (D.17)$$

Substituindo as equações (D.14), (D.15), (D.16) e (D.17) na equação (D.10), vem:

$$T = \frac{24}{41} \frac{T_C}{R} \cdot y + \frac{12}{41} \frac{T_C}{R^2} y^2 + \frac{4}{41} \frac{T_C}{R^3} y^3 + \frac{1}{41} \frac{T_C}{R^4} \cdot y^4$$

$$T' = \frac{T}{T_C} = \frac{24}{41} (y/R) + \frac{12}{41} (y/R)^2 + \frac{4}{41} (y/R)^3 + \frac{1}{41} (y/R)^4$$

As equações, obtidas pelas condições de contorno, que representam os perfis de temperatura para tubo circular, em regime laminar e temperatura constante da parede estão indicadas na tabela 11.

I.2. Determinação das Equações dos Perfis de Velocidade Para Tubo Circular, com Regime laminar e Temperatura Constante da Parede

I.2.1. Condições de Contorno

As condições de contorno para figura 04, Região II, são:

1) Para $y = 0$ tem-se $u = 0$

Para $y = 0$ a velocidade junto a parede do tubo "u" é zero.

2) Para $y = R$ tem-se $u = u_c$

Para "y" igual ao raio do tubo (R), tem-se que a velocidade "u" é igual a velocidade no centro do tubo " u_c ".

3) Para $y = R$ tem-se $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

Para "y" igual ao raio do tubo (R), tem-se que a derivada primeira da velocidade "u" é zero.

4) Para $y = 0$ tem-se $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Para "y" igual a zero, tem-se que a derivada segunda da velocidade "u" é igual a zero.

5) Para $y = R$ tem-se que $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Para "y" igual ao raio do tubo "R" tem-se que a derivada segunda da velocidade "u" é igual a zero.

I.2.2 Deduções dos Perfis Polinomiais da Velocidade

Analisando as condições de contorno do item I.2.1, nota-se que elas são semelhantes às condições de contorno da placa plana (Ver apêndice [A] e item II.3) onde se tem " δ " no lugar de " R " e " u_∞ " no lugar de " u_c ".

As mesmas equações obtidas para placa plana serão também obtidas para tubo circular quando se fizer uso das condições de contorno do item I.2.1. Assim as mesmas equações utilizadas para representar o perfil da velocidade em placa plana deverão ser também utilizados para representar o perfil da velocidade em tubo circular, bastando para isto trocar " δ " por " R " e " u_∞ " por " u_c ".

Os perfis polinomiais que melhor representam a distribuição da velocidade em tubo circular, com temperatura constante da parede, estão indicados na tabela 11.

I.3 Metodologia da Solução Matemática

As soluções serão apresentadas com as combinações dos perfis de velocidade e temperatura indicados na tabela 11.

1.3.1 Perfil da Velocidade do 1º Grau e Temperatura do 2º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_C} = \frac{2}{3} (y/R) + \frac{1}{3} (y/R)^2 \dots \dots \dots (D.18)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_C} = y/R \dots \dots \dots (D.22)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área, na parede é:

$$q_w = -K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-2}{3} \cdot K \cdot \frac{T_C}{R} \dots \dots \dots (D.19)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r - y) dy}{\int_0^R u \cdot (r - y) dy} \dots \dots \dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.18) e (D.22) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{13}{30} T_C$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots \dots \dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.19) na equação (D.21) resulta em: Como $R = D/2$

$$h = \frac{20}{13} \frac{K}{R} \quad \text{Logo} \quad h = \frac{40}{13} \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = \frac{40}{13}$$

$$\text{logo: } NU = \frac{h \cdot D}{K} = \frac{40}{13} \quad (\text{Número de Nusselt}).$$

assim, $NU = 3,07692$

I.3.2 Perfil da Velocidade do 2º Grau e Temperatura do 2º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_c} = \frac{2}{3} (y/R) + \frac{1}{3} (y/R)^2 \dots \dots \dots (D.18)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_c} = 2(y/R) - (y/R)^2 \dots \dots \dots (D.23)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área, na parede é:

$$q_w = -K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-2}{3} \cdot K \cdot \frac{T_c}{R} \dots \dots \dots (D.19)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r - y) dy}{\int_0^R u \cdot (r - y) dy} \dots \dots \dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.18) e (D.23) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{2}{5} T_c$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots \dots \dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.19) na equação (D.21) resulta em: Como $R = D/2$

$$h = \frac{5}{3} \frac{K}{R} \quad \text{Logo:} \quad h = \frac{10}{3} \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = \frac{10}{3}$$

$$\text{logo: } NU = \frac{h \cdot D}{K} = \frac{10}{3} \quad (\text{Número de Nusselt}).$$

assim, $NU = 3,33333$

I.3.3. Perfil da Velocidade do 3º Grau e Temperatura do 2º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_c} = \frac{2}{3} (y/R) + \frac{1}{3} (y/R)^2 \dots \dots \dots (D.18)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_c} = \frac{3}{2} (y/R) - \frac{1}{2} (y/R)^3 \dots \dots \dots (D.24)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área na parede é:

$$q_w = -K \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-2}{3} \cdot K \cdot \frac{T_c}{R} \dots \dots \dots (D.19)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r - y) dy}{\int_0^R u \cdot (r - y) dy} \dots \dots \dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.18) e (D.24) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{235}{567} T_c$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots \dots \dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.19) na equação (D.21) resulta em: Como $R = D/2$

$$h = \frac{378}{235} \frac{K}{R} \quad \text{Logo:} \quad h = \frac{756}{235} \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = \frac{756}{235}$$

$$\text{logo: } NU = \frac{h \cdot D}{K} = \frac{756}{235} \quad (\text{Número de Nusselt}).$$

assim, $NU = 3,21702$

I.3.4. Perfil da Velocidade do 4º Grau e Temperatura do 2º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_c} = \frac{2}{3} (y/R) + \frac{1}{3} (y/R)^2 \dots \dots \dots (D.18)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_c} = 2(y/R) - 2(y/R)^3 + (y/R)^4 \dots \dots \dots (D.25)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área, na parede é:

$$q_w = -K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-2}{3} \cdot K \cdot \frac{T_c}{R} \dots \dots \dots (D.19)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r - y) dy}{\int_0^R u \cdot (r - y) dy} \dots \dots \dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.18) e (D.25) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{89}{224} T_c$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots \dots \dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.19) na equação (D.21) resulta em: Como $R=D/2$

$$h = \frac{448}{267} \frac{K}{R} \text{ Logo: } h = \frac{896}{267} \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = \frac{896}{267}$$

$$\text{logo: } NU = \frac{h \cdot D}{K} = \frac{896}{267} \quad (\text{Número de Nusselt}).$$

assim, $NU = 3,35580$

1.3.5. Perfil da Velocidade do 5º Grau e Temperatura do 2º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_C} = \frac{2}{3} (y/R) + \frac{1}{3} (y/R)^2 \dots \dots \dots (D.18)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_C} = \frac{5}{3} (y/R) - \frac{5}{3} (y/R)^4 + (y/R)^5 \dots \dots \dots (D.26)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área na parede é:

$$q_w = -K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-2}{3} \cdot K \cdot \frac{T_C}{R} \dots \dots \dots (D.19)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r - y) dy}{\int_0^R u \cdot (r - y) dy} \dots \dots \dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.18) e (D.26) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{38}{93} T_C$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots \dots \dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.19) na equação (D.21) resulta em:

$$h = \frac{31}{19} \frac{K}{R} \quad \text{Logo:} \quad h = \frac{62}{19} \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = \frac{62}{19}$$

$$\text{logo: } NU = \frac{h \cdot D}{K} = \frac{62}{19} \quad (\text{Número de Nusselt}).$$

assim, $NU = 3,26315$

I.3.6. Perfil da Velocidade do 6º Grau e Temperatura do 2º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_c} = \frac{2}{3} (y/R) + \frac{1}{3} (y/R)^2 \dots \dots \dots (D.18)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_c} = 2(y/R) - 5(y/R)^4 + 6(y/R)^5 + 2(y/R)^6 \dots (D.27)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área, na parede é:

$$q_w = -K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-2}{3} \cdot K \cdot \frac{T_c}{R} \dots \dots \dots (D.19)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r - y) dy}{\int_0^R u \cdot (r - y) dy} \dots \dots \dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.18) e (D.27) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{821}{2070} T_c$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots \dots \dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.19) na equação (D.21) resulta em:

$$h = \frac{1380}{821} \frac{K}{R} \quad \text{Logo: } h = \frac{2760}{821} \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = \frac{2760}{821}$$

$$\text{logo: } NU = \frac{h \cdot D}{K} = \frac{2760}{821} \quad (\text{Número de Nusselt}).$$

$$\text{assim, } NU = 3,36175$$

I.3.7. Perfil da Velocidade do 7º Grau e Temperatura do 2º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T - T_c}{T_c} = \frac{2}{3} (y/R) + \frac{1}{3} (y/R)^2 \dots \dots \dots (D.18)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_c} = \frac{7}{4} (y/R) - \frac{21}{4} (y/R)^5 + 7 (y/R)^6 - \frac{5}{2} (y/R)^7 \dots (D.28)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área na parede é:

$$q_w = -K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-2}{3} \cdot K \cdot \frac{T_c}{R} \dots \dots \dots (D.19)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r - y) dy}{\int_0^R u \cdot (r - y) dy} \dots \dots \dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.18) e (D.28) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{1651}{4070} T_c$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots \dots \dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.19) na equação (D.21) resulta em:

$$h = \frac{8140}{4953} \frac{K}{R} \quad \text{Logo: } h = \frac{16280}{4953} \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = \frac{16280}{4953}$$

$$\text{logo: } NU = \frac{h \cdot D}{K} = \frac{16280}{4953} \quad (\text{Número de Nusselt}).$$

assim, $NU = 3,28689$

1.3.8 Perfil da Velocidade do 1º Grau e Temperatura do 3º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T - T_c}{T_c} = \frac{3}{5} (y/R) + \frac{3}{10} (y/R)^2 + \frac{1}{10} (y/R)^3 \dots (D.29)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = y/R \dots (D.31)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área, na parede é:

$$q_w = -K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-3}{5} \cdot \frac{K}{R} \cdot T_c \dots (D.30)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r - y) dy}{\int_0^R u (r - y) dy} \dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.29) e (D.31) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{41}{100} T_c$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.30) na equação (D.21) resulta em:

$$h = \frac{60}{41} \frac{K}{R} \text{ Como } R=D/2 \text{ Logo: } h = \frac{120}{41} \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = \frac{120}{41}$$

$$\text{logo: } NU = \frac{h \cdot D}{K} = \frac{120}{41} \quad NU = \text{(número de Nusselt)}$$

assim, $NU = 2,92682$

I.3.9. Perfil da Velocidade do 2º Grau e Temperatura do 3º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_c} = \frac{3}{5} (y/R) + \frac{3}{10} (y/R)^2 + \frac{1}{10} (y/R)^3 \dots (D.29)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = 2(y/R) - (y/R)^2 \dots (D.32)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área, na parede é:

$$q_w = -K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-3}{5} \cdot \frac{K \cdot T_c}{R} \dots (D.30)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r-y) dy}{\int_0^R u \cdot (r-y) dy} \dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.29) e (D.32) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{66}{175} T_c$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.30) na equação (D.21) resulta em:

$$h = \frac{35}{22} \frac{K}{R} \quad \text{Como } R=D/2 \quad \text{Logo: } h = \frac{70}{22} \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = \frac{70}{22}$$

$$\text{logo: } NU = \frac{h \cdot D}{K} = \frac{70}{22} \quad NU = (\text{número de Nusselt})$$

$$\text{assim, } NU = 3,18181$$

I.3.10. Perfil da Velocidade do 3º Grau e Temperatura do 3º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T - T_c}{T_c} = \frac{3}{5} (y/R) + \frac{3}{10} (y/R)^2 + \frac{1}{10} (y/R)^3 \dots\dots (D.29)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2} (y/R) - \frac{1}{2} (y/R)^3 \dots\dots\dots (D.33)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área, na parede é:

$$q_w = -K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-3}{5} \cdot \frac{K \cdot T_c}{R} \dots\dots (D.30)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r - y) dy}{\int_0^R u \cdot (r - y) dy} \dots\dots\dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.29) e (D.33) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{493}{1260} T_c$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots\dots\dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.30) na equação (D.21) resulta em:

$$h = \frac{756}{493} \frac{K}{R} \text{ Como } R=D/2 \text{ Logo: } h = \frac{1512}{493} \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = \frac{1512}{493}$$

$$\text{logo: } NU = \frac{h \cdot D}{K} = \frac{1512}{493} \quad NU = (\text{número de Nusselt})$$

assim, $NU = 3.06693$

1.3.11. Perfil da Velocidade do 4º Grau e Temperatura do 3º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_c} = \frac{3}{5} (y/R) + \frac{3}{10} (y/R)^2 + \frac{1}{10} (y/R)^3 \dots \dots (D.29)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = 2(y/R) - 2(y/R)^3 + (y/R)^4 \dots \dots \dots (D.34)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área, na parede é:

$$q_w = -K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-3}{5} \cdot \frac{K}{R} \cdot T_c \dots \dots \dots (D.30)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r-y) dy}{\int_0^R u (r-y) dy} \dots \dots \dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.29) e (D.34) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{629}{1680} T_c$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots \dots \dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.30) na equação (D.21) resulta em:

$$h = \frac{1008}{629} \frac{K}{R} \quad \text{Como } R=D/2 \quad \text{Logo: } h = \frac{2016}{629} \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = \frac{2016}{629}$$

$$\text{logo: } NU = \frac{h \cdot D}{K} = \frac{2016}{629} \quad NU = (\text{número de Nusselt})$$

assim, $NU = 3,20508$

I.3.12. Perfil da Velocidade do 5º Grau e Temperatura do 3º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_c} = \frac{3}{5} (y/R) + \frac{3}{10} (y/R)^2 + \frac{1}{10} (y/R)^3 \dots (D.29)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = \frac{5}{3} (y/R) - \frac{5}{3} (y/R)^4 + (y/R)^5 \dots (D.35)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área, na parede é:

$$q_w = -K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-3}{5} \cdot \frac{K \cdot T_c}{R} \dots (D.30)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r-y) dy}{\int_0^R u \cdot (r-y) dy} \dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.29) e (D.35) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{7169}{18600} T_c$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.30) na equação (D.21) resulta em:

$$h = \frac{11160}{7169} \frac{K}{R} \text{ Como } R=D/2 \text{ Logo: } h = \frac{22320}{7169} \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = \frac{22320}{7169}$$

$$\text{logo: } NU = \frac{h \cdot D}{K} = \frac{22320}{7169} = NU \text{ (número de Nusselt)}$$

assim, $NU = 3,113405$

I.3.13. Perfil da Velocidade do 6º Grau e Temperatura do 3º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_C} = \frac{3}{5} (y/R) + \frac{3}{10} (y/R)^2 + \frac{1}{10} (y/R)^3 \dots (D.29)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = 2(y/R) - 5(y/R)^4 + 6(y/R)^5 - 2(y/R)^6 \dots (D.36)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área, na parede é:

$$q_w = -K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-3}{5} \cdot \frac{K}{R} \cdot T_C \dots (D.30)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r-y) dy}{\int_0^R u \cdot (r-y) dy} \dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.29) e (D.36) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{29778}{79695} T_C$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.30) na equação (D.21) resulta em:

$$h = \frac{47817}{29778} \frac{K}{R} \text{ Como } R=D/2 \text{ Logo: } h = \frac{95634}{29778} \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = \frac{95634}{29778}$$

$$\text{logo: } NU = \frac{h \cdot D}{K} = \frac{95634}{29778} \quad NU = \text{ (número de Nusselt)}$$

assim, $NU = 3,21156$

I.3.14. Perfil da Velocidade do 7º Grau e Temperatura do 3º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_c} = \frac{3}{5} (y/R) + \frac{3}{10} (y/R)^2 + \frac{1}{10} (y/R)^3 \dots (D.29)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = \frac{7}{4} (y/R) - \frac{21}{4} (y/R)^5 + \frac{7}{2} (y/R)^6 - \frac{5}{2} (y/R)^7 \dots (D.37)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área, na parede é:

$$q_w = -K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-3}{5} \cdot \frac{K \cdot T_c}{R} \dots (D.30)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r-y) dy}{\int_0^R u \cdot (r-y) dy} \dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.29) e (D.37) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{15.567}{40.700} T_c$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.30) na equação (D.21) resulta em:

$$h = \frac{8140}{5189} \frac{K}{R} \text{ Como } R=D/2 \text{ Logo: } h = \frac{16.280}{5.189} \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = \frac{16280}{5189}$$

$$\text{logo: } NU = \frac{h \cdot D}{K} = \frac{16280}{189} \quad NU = (\text{número de Nusselt})$$

assim, $NU = 3,137406$

1.3.15. Perfil da Velocidade do 1º Grau e Temperatura do 4º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_c} = \frac{24}{41} (y/R) + \frac{12}{41} (y/R)^2 + \frac{4}{41} (y/R)^3 + \frac{1}{41} (y/R)^4 \dots\dots\dots (D.38)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = (y/R) \dots\dots\dots (D.40)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área, na parede é:

$$q_w = -K \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-24}{41} \frac{K \cdot T_c}{R} \dots\dots\dots (D.39)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r - y) dy}{\int_0^R u \cdot (r - y) dy} \dots\dots\dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.38) e (D.40) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{579}{1435} T_c$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots\dots\dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.39) na equação (D.21) resulta em:

$$h = \frac{840}{579} \frac{K}{R} \quad \text{Como } R=D/2 \quad \text{Logo: } h = \frac{1680}{579} \frac{K}{D} \quad \frac{h \cdot D}{K} = \frac{1680}{579}$$

logo:

$$NU = \frac{h \cdot D}{K} = \frac{1680}{579} \quad NU = (\text{número de Nusselt})$$

assim, $NU = 2,901554$

I.3.16. Perfil da Velocidade do 2º Grau e Temperatura do 4º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T - T_C}{T_C} = \frac{24}{41} (y/R) + \frac{12}{41} (y/R)^2 + \frac{4}{41} (y/R)^3 + \frac{1}{41} (y/R)^4 \dots\dots\dots (D.38)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = 2(y/R) - (y/R)^2 \dots\dots\dots (D.41)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área, na parede é:

$$q_w = -K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-24}{41} \frac{K \cdot T_C}{R} \dots\dots\dots (D.39)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r - y) dy}{\int_0^R u \cdot (r - y) dy} \dots\dots\dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.38) e (D.41) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{3193}{8610} T_C$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots\dots\dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.39) na equação (D.21) resulta em:

$$h = \frac{5040}{3193} \frac{K}{R} \text{ Como } R=D/2 \text{ Logo: } \frac{10.080}{3.193} \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = \frac{10.080}{3.193}$$

logo:

$$NU = \frac{h \cdot D}{K} \Rightarrow NU = \text{(número de Nusselt)}$$

assim, $NU = 3,156905$

I.3.17. Perfil da Velocidade do 3º Grau e Temperatura do 4º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_C} = \frac{24}{41} (y/R) + \frac{12}{41} (y/R)^2 + \frac{4}{41} (y/R)^3 + \frac{1}{41} (y/R)^4 \dots\dots\dots (D.38)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2} (y/R) - \frac{1}{2} (y/R)^3 \dots\dots\dots (D.42)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área, na parede é:

$$q_w = -K \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-24}{41} \frac{K \cdot T_C}{R} \dots\dots\dots (D.39)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r - y) dy}{\int_0^R u \cdot (r - y) dy} \dots\dots\dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.38) e (D.42) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{17893}{46494} T_C$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots\dots\dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.39) na equação (D.21) resulta em:

$$h = \frac{27.216 K}{17.893 R} \text{ Como } R=D/2 \text{ Logo: } h = \frac{54432}{17893} \frac{K}{D} \quad \frac{h \cdot D}{K} = \frac{54432}{17893}$$

logo:

$$NU = \frac{h \cdot D}{K} \implies NU = (\text{número de Nusselt})$$

assim, $NU = 3,04208$

I.3.18. Perfil da Velocidade do 4º Grau e Temperatura do 4º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T - T_c}{T_c} = \frac{24}{41} (y/R) + \frac{12}{41} (y/R)^2 + \frac{4}{41} (y/R)^3 + \frac{1}{41} (y/R)^4 \dots\dots\dots(D.38)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = 2(y/R) - 2(y/R)^3 + (y/R)^4 \dots\dots\dots(D.43)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área, na parede é:

$$q_w = -K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-24}{41} \frac{K \cdot T_c}{R} \dots\dots\dots(D.39)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r - y) dy}{\int_0^R u \cdot (r - y) dy} \dots\dots\dots(D.20)$$

Substituindo as equações (D.38) e (D.43) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{5071}{13776} T_c$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots\dots\dots(D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.39) na equação (D.21) resulta em:

$$h = \frac{8064}{5071} \frac{K}{R} \text{ Como } R=D/2 \text{ Logo: } h = \frac{16128}{5071} \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = \frac{16128}{5071}$$

logo:

$$NU = \frac{h \cdot D}{K} = \frac{16128}{5071} \quad (\text{número de Nusselt})$$

assim, $NU = 3,180437$

I.3.19. Perfil da Velocidade do 5º Grau e Temperatura do 4º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_C} = \frac{24}{41} (y/R) + \frac{12}{41} (y/R)^2 + \frac{4}{41} (y/R)^3 + \frac{1}{41} (y/R)^4 \dots\dots\dots (D.38)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = \frac{5}{3} (y/R) - \frac{5}{3} (y/R)^4 + (y/R)^5 \dots\dots\dots (D.44)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área, na parede é:

$$q_w = -K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-24}{41} \frac{K \cdot T_C}{R} \dots\dots\dots (D.39)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r - y) dy}{\int_0^R u \cdot (r - y) dy} \dots\dots\dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.38) e (D.44) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{185.472}{489.335} T_C$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots\dots\dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.39) na equação (D.21) resulta em:

$$h = \frac{11.935}{7.728} \frac{K}{R} \text{ Como } R=D/2 \text{ Logo: } h = \frac{23870}{7728} \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = \frac{23.870}{7728}$$

logo:

$$NU = \frac{h \cdot D}{K} = \frac{23870}{7728} = \text{(número de Nusselt)}$$

assim, $NU = 3,088768$

I.3.20. Perfil da Velocidade do 6º Grau e Temperatura do 4º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_C} = \frac{24}{41} (y/R) + \frac{12}{41} (y/R)^2 + \frac{4}{41} (y/R)^3 + \frac{1}{41} (y/R)^4 \dots \dots \dots (D.38)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = 2(y/R) - 5(y/R)^4 + 6(y/R)^5 - 2(y/R)^6 \dots (D.45)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área, na parede é:

$$q_w = -K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-24}{41} \frac{K \cdot T_C}{R} \dots \dots \dots (D.39)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r - y) dy}{\int_0^R u \cdot (r - y) dy} \dots \dots \dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.38) e (D.45) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{36372}{99015} T_C$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots \dots \dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.39) na equação (D.21) resulta em:

$$h = \frac{57960}{36372} \frac{K}{R} \text{ Como } R=D/2 \text{ Logo: } h = \frac{57960}{18186} \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = \frac{57960}{18186}$$

logo:

$$NU = \frac{h \cdot D}{K} = \frac{57960}{18186} = (\text{número de Nusselt})$$

assim, $NU = 3,18706$

I.3.21. Perfil da Velocidade do 7º Grau e Temperatura do 4º Grau

Perfil Adimensional da Temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_C} = \frac{24}{41} (y/R) + \frac{12}{41} (y/R)^2 + \frac{4}{41} (y/R)^3 + \frac{1}{41} (y/R)^4 \dots \dots \dots (D.38)$$

Perfil Adimensional da Velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_\infty} = \frac{7}{4} (y/R) - \frac{21}{4} (y/R)^5 + 7 (y/R)^6 - \frac{5}{2} (y/R)^7 \dots (D.46)$$

A taxa de calor transferido, por unidade de área, na parede é:

$$q_w = -K \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} \therefore q_w = \frac{-24}{41} \frac{K \cdot T_C}{R} \dots \dots \dots (D.39)$$

Cálculo da Temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r - y) dy}{\int_0^R u \cdot (r - y) dy} \dots \dots \dots (D.20)$$

Substituindo as equações (D.38) e (D.46) na equação (D.20) e calculando, vem:

$$T_B = \frac{407.928}{1084655} T_C$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots \dots \dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.39) na equação (D.21) resulta em:

$$h = \frac{26455}{16997} \frac{K}{R} \text{ Como } R=D/2 \text{ logo: } h = \frac{52910}{16997} \frac{K}{D} \Rightarrow \frac{h \cdot D}{K} = \frac{52910}{16997}$$

logo:

$$NU = \frac{h \cdot D}{K} = \frac{52910}{16997} = (\text{número de Nusselt})$$

assim, $NU = 3,112902$

Os resultados obtidos do Número de Nusselt pela aplicação do método para fluido Newtoniano, soluções apresentadas nos itens I.3.1 a I.3.21, estão reunidas e indicadas na tabela 12.

III. ESCOAMENTO DE FLUIDO NÃO NEWTONIANO

II.1. Determinação das Equações dos Perfis de Temperatura para Tubo Circular, com Regime Laminar e Temperatura Constante da Parede

II.1.1. Condições de Contorno

As condições de contorno são as mesmas do item I.1.1.

II.1.2. Dedução dos Perfis Polinomiais de Temperatura

Com as condições de contorno idênticas as do item I.1.1., isto implica ter as mesmas equações do item I.1.2 para representar os perfis de temperatura.

II.2. Determinação das Equações dos Perfis de Velocidade para Tubo Circular, com Regime Laminar e Temperatura Constante da Parede

II.2.1. Condições de Contorno

As condições de contorno são as mesmas do item I.2.1.

II.2.2. Deduções dos Perfis Polinomiais da Velocidade

Com as condições de contorno do Item I.2.1 obtemos as mesmas equações do Item I.2.2.

Para representar o perfil da velocidade para escoamento não Newtoniano é necessário expressar o perfil da velocidade em função do índice de comportamento "n". Assim sendo, representa-se, isoladamente, cada termo do polinômio da velocidade em função do índice "n". Para $n = 1$, caso de fluido newtoniano, a expressão da velocidade passa a ser idêntica aquela obtida no item I.2.2. Os perfis da velocidade, obtido pelas condições de contorno, são:

Fluido Newtoniano

$$(y/R)$$

$$2(y/R) - (y/R)^2$$

$$\frac{3}{2}(y/R) - \frac{1}{2}(y/R)^3$$

$$2(y/R) - 2(y/R)^3 + (y/R)^4$$

Fluido não Newtoniano

$$(y/R)^{1/n}$$

$$(y/R)^{1/n} - (y/R)^{\frac{n+1}{n}}$$

$$\frac{3}{2}(y/R)^{1/n} - \frac{1}{2}(y/R)^{\frac{2n+1}{n}}$$

$$2(y/R)^{1/n} - 2(y/R)^{\frac{2n+1}{n}} + (y/R)^{\frac{3n+1}{n}}$$

Fluido Newtoniano

$$\frac{5}{3} \left(\frac{y}{R}\right) - \frac{5}{3} \left(\frac{y}{R}\right)^4 + \left(\frac{y}{R}\right)^5$$

$$2 \left(\frac{y}{R}\right) - 5 \left(\frac{y}{R}\right)^4 + 6 \left(\frac{y}{R}\right)^5 - 2 \left(\frac{y}{R}\right)^6$$

$$\frac{7}{4} \left(\frac{y}{R}\right) - \frac{21}{4} \left(\frac{y}{R}\right)^5 + 7 \left(\frac{y}{R}\right)^6 - \frac{5}{2} \left(\frac{y}{R}\right)^7$$

Fluido não Newtoniano

$$\frac{5}{3} \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n} - \frac{5}{3} \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{3n+1}{n}} +$$

$$+ \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{4n+1}{n}}$$

$$2 \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n} - 5 \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{3n+1}{n}} + 6 \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{4n+1}{n}} - 2 \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{5n+1}{n}} +$$

$$\frac{7}{4} \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n} - \frac{21}{4} \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{4n+1}{n}} + 7 \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{5n+1}{n}} - \frac{5}{2} \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{6n+1}{n}}$$

Os perfis de velocidade e temperatura para fluido não newtoniano estão indicados na tabela 13.

II.3 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO MATEMÁTICA

As soluções serão apresentadas com a combinação dos perfis de velocidade e temperatura (somente perfil do 2º Grau), indicados na tabela 13.

A análise, restringiu-se apenas ao perfil de temperatura do 2º Grau, pois foi o que apresentou melhor resultado do número de Nusselt para escoamento do fluido newtoniano.

II.3.1 Perfil de Velocidade do 1º Grau e Temperatura do 2º Grau

Perfil adimensional da temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_c} = \frac{2}{3} (y/R) + \frac{1}{3} (y/R)^2$$

Trocando de variável, para facilitar a integração, vem:

$$y = R - r \Rightarrow dy = -dr$$

$$T' = \frac{T}{T_c} = \frac{2}{3} (y/R) + \frac{1}{3} (y/R)^2 = 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \dots\dots\dots (D.47)$$

Perfil Adimensional da velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_c} = (y/R)^{1/n} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{1/n} \dots\dots\dots (D.50)$$

Obs.: A equação (D.50) e todas as demais equações da velocidade e temperatura indicadas nos próximos itens, estarão com suas variáveis trocadas (y/R para r/R) como foi feito para a equação (D.47).

A taxa de calor transferido por unidade de área na parede é

$$q_w = -K \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0} \therefore q_w = -\frac{2}{3} \frac{K \cdot T_c}{R} \text{ fazendo } R=D/2 \quad q_w = -\frac{4}{3} \frac{K \cdot T_c}{D} \dots (D.48)$$

Cálculo da temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r-y) dy}{\int_0^R u \cdot (r-y) dy}, \text{ ou trocando de variável, } T_B \text{ se}$$

$$\text{reduz a: } T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot r (-dr)}{\int_0^R u \cdot r (-dr)} \dots\dots\dots (D.49)$$

Substituindo as equações (D.47) e (D.50) na equação (D.49) que calculando resulta em:

$$T_B = T_c \left[\frac{106n^2 + 45n + 5}{18(3n+1)(4n+1)} \right]$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots\dots\dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.48) na equação (D.21) resulta tem:

$$h = \frac{K}{D} \left[\frac{288n^2 + 168n + 24}{106n^2 + 45n + 5} \right]$$

Como $\frac{h \cdot D}{K} = NU = \text{Número de Nusselt}$

$$\text{Assim, } NU = \left[\frac{288n^2 + 168n + 24}{106n^2 + 45n + 5} \right]$$

II.3.2 Perfil de Velocidade do 2º Grau e Temperatura do 2º Grau

Perfil adimensional da temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_c} = \frac{2}{3} (y/R) + \frac{1}{3} (y/R)^2$$

Trocando de variável, para facilitar a integração, vem:

$$y = R - r \Rightarrow dy = -dr$$

$$T' = \frac{T}{T_c} = \frac{2}{3} (y/R) + \frac{1}{3} (y/R)^2 = 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \dots\dots\dots(D.47)$$

Perfil Adimensional da velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_c} = 2(y/R)^{1/n} - (y/R)^{\frac{n+1}{n}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}} \dots\dots\dots(D.51)$$

Obs.: A equação (D.51) e todas as demais equações da velocidade e temperatura indicadas nos próximos itens, estarão com suas variáveis trocadas (y/R para r/R) como foi feito para a equação (D.47).

A taxa de calor transferido por unidade de área na parede é:

$$q_w = -K \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0} \therefore q_w = -\frac{2}{3} \frac{K \cdot T_c}{R} \text{ fazendo } R=D/2 \quad q_w = -\frac{4}{3} \frac{K \cdot T_c}{D} \dots(D.48)$$

Cálculo da temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r-y) dy}{\int_0^R u \cdot (r-y) dy}, \text{ ou trocando de variável, } T_B \text{ se}$$

$$\text{reduz a: } T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot r (-dr)}{\int_0^R u \cdot r (-dr)} \dots\dots\dots(D.49)$$

Substituindo as equações (D.47) e (D.51) na equação (D.49) que calculando resulta em:

$$T_B = T_c \left[\frac{156n^2 + 211n^2 + 60n + 5}{18(n+1)(4n+1)(5n+1)} \right]$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots\dots\dots(D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.48) na equação (D.21) resulta tem:

$$h = \frac{K}{D} = \left[\frac{480n^3 + 696n^2 + 240n + 24}{156n^3 + 211n^2 + 60n + 5} \right]$$

Como $\frac{h \cdot D}{K} = NU = \text{Número de Nusselt}$

$$\text{Assim, } NU = \frac{480n^2 + 696n^2 + 240n + 24}{156n^3 + 211n^2 + 60n + 5}$$

II.3.3. Perfil de Velocidade do 3º Grau e Temperatura do 2º Grau

Perfil adimensional da temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_c} = \frac{2}{3} (y/R) + \frac{1}{3} (y/R)^2$$

Trocando de variável, para facilitar a integração, vem:

$$y = R - r \Rightarrow dy = -dr$$

$$T' = \frac{T}{T_c} = \frac{2}{3} (y/R) + \frac{1}{3} (y/R)^2 = 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \dots\dots\dots (D.47)$$

Perfil Adimensional da velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_c} = \frac{3}{2} (y/R)^{1/n} - \frac{1}{2} (y/R)^{2n+1/n} = 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1/n} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1/n} \dots (D.52)$$

Obs.: A equação (D.52) e todas as demais equações da velocidade e temperatura indicadas nos próximos itens, estarão com suas variáveis trocadas (y/R para r/R) como foi feito para a equação (D.47).

A taxa de calor transferido por unidade de área na parede é

$$q_w = -K \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0} \therefore q_w = -\frac{2}{3} \frac{K \cdot T_c}{R} \text{ fazendo } R=D/2 \quad q_w = -\frac{4}{3} \frac{K \cdot T_c}{D} \dots (D.48)$$

Cálculo da temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot (r-y) dy}{\int_0^R u \cdot (r-y) dy}, \text{ ou trocando de variável, } T_B = \dots$$

$$\text{reduz a: } T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot r (-dr)}{\int_0^R u \cdot r (-dr)} \dots\dots\dots (D.49)$$

Substituindo as equações (D.47) e (D.52) na equação (D.49) que calculando resulta em:

$$T_B = T_c \left[\frac{756n^4 + 1398n^3 + 571n^2 + 90n + 5}{18(5n+1)(6n+1)(3n^2+5n+1)} \right]$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots\dots\dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.48) na equação (D.21) resulta tem:

$$h = \frac{K}{D} = \left[\frac{2160n^4 + 4392n^3 + 2112n^2 + 384n + 24}{756n^4 + 1398n^3 + 571n^2 + 90n + 5} \right]$$

Como $\frac{h \cdot D}{K} = NU = \text{Número de Nusselt}$

$$\text{Assim, } NU = \frac{2160n^4 + 4392n^3 + 2112n^2 + 384n + 24}{756n^4 + 1398n^3 + 571n^2 + 90n + 5}$$

II.3.4. Perfil da Velocidade do 4º Grau e Temperatura do 2º Grau

Perfil adimensional da temperatura:

$$T = \frac{T}{T_c} = \frac{2}{3} (y/R) + \frac{1}{3} (y/R)^2 = 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \dots \dots \dots (D.47)$$

Perfil adimensional da velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_c} = 2(y/R)^{1/n} - 2(y/R)^{2n+1/n} + (y/R)^{3n+1/n} =$$

$$= 1 - 2 \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1/n} + \left(\frac{r}{R}\right)^{3n+1/n} \dots \dots \dots (D.53)$$

A taxa de calor transferida por unidade de área na parede é:

$$q_w = -K \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0} \quad \therefore \quad q_w = \frac{-4}{3} \frac{K \cdot T_c}{D} \dots \dots \dots (D.48)$$

Cálculo da temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot r (-dr)}{\int_0^R u \cdot r (-dr)} \dots \dots \dots (D.49)$$

Substituindo as equações (D.47) e (D.53) na equação (D.49) e calculando, resulta em:

$$T_B = T_c \left[\frac{2616n^4 + 2806n^3 + 871n^2 + 110n + 5}{18(336n^4 + 398n^3 + 141n^2 + 20n + 1)} \right]$$

O coeficiente de transferência de calor é dada por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots \dots \dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.48) na equação (D.21), resulta em:

$$h = \frac{K}{D} \cdot \left[\frac{8064n^4 + 9552n^3 + 3384n^2 + 480n + 24}{2616n^4 + 2806n^3 + 871n^2 + 110n + 5} \right]$$

Como $\frac{h \cdot D}{K} = NU$ - Número de Nusselt

$$NU = \frac{8064n^4 + 9552n^3 + 3384n^2 + 480n + 24}{2616n^4 + 2806n^3 + 871n^2 + 110n + 5}$$

para $n = 1 \Rightarrow$ Fluido Newtoniano, temos: $NU = 3,3558052$

II.3.5. Perfil de Velocidade do 5º Grau e Temperatura do 2º Grau

Perfil adimensional de temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_C} = \frac{2}{3}(y/R) + \frac{1}{3}(y/R)^2 = 1 - \frac{4}{3}\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \dots\dots\dots (D.47)$$

Perfil adimensional de velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_C} = 1 - \frac{10}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1/n} + \frac{10}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^{3n+1/n} - \left(\frac{r}{R}\right)^{4n+1/n} \dots (D.54)$$

A taxa de calor transferida por unidade de área na parede é:

$$q_w = -K \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0} \therefore q_w = -\frac{4}{3} \frac{K \cdot T_C}{D} \dots\dots\dots (D.48)$$

Cálculo da temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot r \cdot (dr)}{\int_0^R u \cdot r \cdot (-dr)} \dots\dots\dots (D.49)$$

Substituindo as equações (D.47) e (D.54) na equação (D.49) e calculando, resulta em:

$$T_B = T_C \left[\frac{18400n^5 + 24656n^4 + 9758n^3 + 1751n^2 + 150n + 5}{6(6720n^5 + 10088n^4 + 4524n^3 + 901n^2 + 84n + 3)} \right]$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots\dots\dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.48) na equação (D.21), resulta em:

$$h = \frac{K}{D} \left[\frac{53760n^5 + 80704n^4 + 36192n^3 + 7208n^2 + 672n + 24}{18400n^5 + 24656n^4 + 9758n^3 + 1751n^2 + 150n + 5} \right]$$

Como $\frac{h \cdot D}{K} = NU =$ Número de Nusselt

$$NU = \frac{53.760n^5 + 80704n^4 + 36192n^3 + 7208n^2 + 672n + 24}{18400n^5 + 24656n^4 + 9758n^3 + 1751n^2 + 150n + 5}$$

para $n = 1 \Rightarrow$ Fluido Newtoniano, temos: $NU = 3,2631579$

II.3.6. Perfil de Velocidade do 6º Grau e Temperatura do 2º Grau

Perfil adimensional da temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_C} = \frac{2}{3}(y/R) + \frac{1}{3}(y/R)^2 = 1 - \frac{4}{3}\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \dots\dots (D.47)$$

Perfil adimensional da velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_C} = 1 - 5\left(\frac{r}{R}\right)^{3n+1/n} + 6\left(\frac{r}{R}\right)^{4n+1/n} - 2\left(\frac{r}{R}\right)^{5n+1/n} \dots\dots (D.5)$$

A taxa de calor transferida por unidade de área na parede é:

$$q_w = -K \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0} \dots\dots q_w = -\frac{4}{3} \frac{K \cdot T_C}{D} \dots\dots\dots (D.48)$$

Cálculo da temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot R \cdot (-dr)}{\int_0^R u \cdot r \cdot (-dr)} \dots\dots\dots (D.49)$$

Substituindo as equações (D.47) e (D.55) na equação (D.49) e calculando, resulta em:

$$T_B = T_C \left[\frac{50400n^5 + 49314n^4 + 15929n^3 + 2401n^2 + 175n + 5}{18(72n^2 + 17n + 1)(90n^3 + 77n^2 + 16n + 1)} \right]$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots\dots\dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.48) na equação (D.21) vem que:

$$h = \frac{K}{D} = \left[\frac{155520n^5 + 169.776n^4 + 61224n^3 + 10104n^2 + 792n + 24}{50400n^5 + 49.314n^4 + 15929n^3 + 2401n^2 + 175n + 5} \right]$$

Como $\frac{h \cdot D}{K} = NU = \text{Número de Nusselt}$

$$NU = \frac{155520n^5 + 169776n^4 + 61224n^3 + 10104n^2 + 792n + 24}{50400n^5 + 49314n^4 + 15929n^3 + 2401n^2 + 175n + 5}$$

para $n = 1 \Rightarrow$ Fluido Newtoniano, $NU = 3,361754$

11.3.7. Perfil de Velocidade do 7º Grau e Temperatura do 2º Grau

Perfil adimensional da temperatura:

$$T' = \frac{T}{T_c} = \frac{2}{3}(y/R) + \frac{1}{3}(y/R)^2 = 1 - \frac{4}{3}\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \dots\dots (D.47)$$

Perfil adimensional da velocidade:

$$u' = \frac{u}{u_c} = 1 - \frac{35}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^{3n+1/n} + \frac{63}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^{4n+1/n} - \frac{21}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^{5n+1/n} + \frac{5}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^{6n+1/n} \dots (D.56)$$

A taxa de calor transferida por unidade de área na parede é:

$$q_w = -K \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0} \dots \dots q_w = -\frac{4}{3} \frac{K \cdot T_c}{D} \dots\dots\dots (D.48)$$

Cálculo da temperatura Bulk:

$$T_B = \frac{\int_0^R T \cdot u \cdot R \cdot (-dr)}{\int_0^R u \cdot r \cdot (-dr)} \dots\dots\dots (D.49)$$

Substituindo as equações (D.47) e (D.56) na equação(D.49) e calculando, resulta em:

$$T_B = T_c \left[\frac{459900n^6 + 535830n^5 + 208118n^4 + 39927n^3 + 4151n^2 + 225n + 5}{9(113400n^6 + 148950n^5 + 64461n^4 + 13480n^3 + 1501n^2 + 86n + 2)} \right]$$

O coeficiente de transferência de calor é dado por:

$$h = \frac{-q_w}{T_B} \dots\dots\dots (D.21)$$

Substituindo T_B e a equação (D.48) na equação (D.21) vem que:

$$h = \frac{K}{D} \left[\frac{1360800n^6 + 1787400n^5 + 773532n^4 + 161760n^3 + 18012n^2 + 1032n + 24}{459900n^6 + 535830n^5 + 208118n^4 + 39927n^3 + 4151n^2 + 225n + 5} \right]$$

Como $\frac{h \cdot D}{K} = NU = \text{Número de Nusselt}$

$$NU = \frac{1360800n^6 + 1787400n^5 + 773532n^4 + 161760n^3 + 18012n^2 + 1032n + 24}{459900n^6 + 535830n^5 + 208118n^4 + 39927n^3 + 4151n^2 + 225n + 5}$$

para $n = 1 \Rightarrow$ Fluido Newtoniano, $NU = 3,2868968$

A tabela 14 apresenta os resultados, calculados nos itens II.3.1 a II.3.7, do número de Nusselt para fluido não Newtoniano.

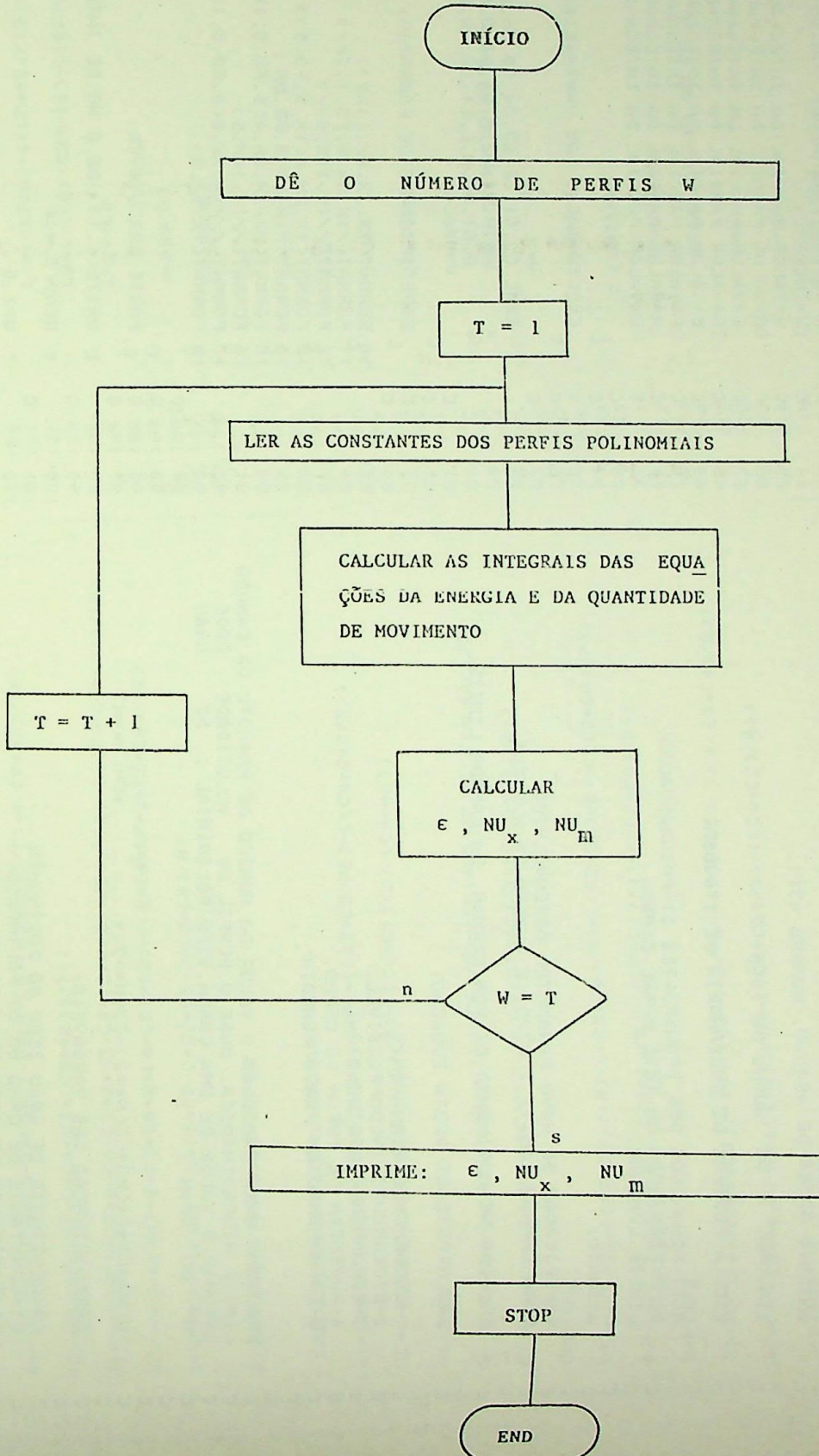
APENDICE [E]

DIAGRAMA DE BLOCOS SIMPLIFICADOS E LISTAGEM DO PROGRAMA

I. FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO PARA CALCULAR A RELAÇÃO ENTRE A CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA E O NÚMERO DE NUSSELT LOCAL E MÉDIO

O Método de Solução já foi descrito neste trabalho, ver Apêndice [C]. Neste anexo, o autor apresenta o Diagrama de Blocos e a listagem do Programa em Linguagem Fortran.

FLUXOGRAMA PARA CALCULAR A RELAÇÃO DA
CAMADA LÍMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA E O
NÚMERO DE NUSSELT LOCAL E MÉDIO



DETERMINACAO DA RELACAO ENTRE A CAMADA LIMITE LAMINAR E TERMICA E O NUMERO DE NUSSELT LOCAL E MEDIO, COM O USO DAS EQUACOES DA ENERGIA E DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO.

ANTONIO GOMES DE ARAUJO, NUMERO 4311, ITAJUBA, 1 DE JUNHO DE 1985. ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBA.

M811-FENOMENOS DOS TRANSPORTES II-POSGRADUACAO. COMPLEMENTACAO DA TESE SOBRE CAMADA LIMITE LAMINAR.

ASSUNTO:

VERIFICACAO DO NOVO PARAMETRO DESENVOLVIDO PARA CAMADA LIMITE ; DT/δ E NUMERO DE NUSSELT.

EQUACAO DE MOVIMENTO DE VON KARMAN, DA CAMADA LIMITE:

SAO HIPOTHESES DESTA EQUACAO:

- 1-ESCOAMENTO PERMANENTE
- 2-ESCOAMENTO INCOMPRESSIVEL.
- 3-ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL.
- 4-AUSENCIA DE FORCA DE CORPO.
- 5-ESCOAMENTO EM PLACA PLANA.

PROGRAMA PARA CALCULAR O VALOR DO NUMERO DE PRANDTL DA CAMADA LIMITE HIDRODINAMICA, ONDE O PERFIL DE VELOCIDADE PODE ASSUMIR O VALOR DE UMA CURVA, TIPO POLINOMIAL, DE GRAU "N"; OU SEJA :

U(N)=C0+C1(N)+C2(N**2)+C3(N**3)+.....+CN(N**N)

ESPECIFICACAO DAS VARIAVEIS:

- C0=CONSTANTE DE GRAU ZERO DO POLINOMIO.
- C1=CONSTANTE DE GRAU UM DO POLINOMIO.
- C2=CONSTANTE DE GRAU DOIS DO POLINOMIO.
- C3=CONSTANTE DE GRAU TRES DO POLINOMIO.
- C4=CONSTANTE DE GRAU QUATRO DO POLINOMIO.
- C5=CONSTANTE DE GRAU CINCO DO POLINOMIO.
- C6=CONSTANTE DE GRAU SEIS DO POLINOMIO.
- C7=CONSTANTE DE GRAU SETE DO POLINOMIO.
- N=VARIÁVEL DO VALOR PARCIAL DA INTEGRAL KURZHILIN.
- R=VALOR DA INTEGRAL DA DERIVADA DA VELOCIDADE.
- I1=VALOR PARCIAL DA INTEGRAL DE VON KARMAN.
- I2=VALOR PARCIAL DA INTEGRAL DE VON KARMAN.
- I3=VALOR PARCIAL DA INTEGRAL DE VON KARMAN.

- I5=VALOR PARCIAL DA INTEGRAL DE VON KARMAN.
- I6=VALOR PARCIAL DA INTEGRAL DE VON KARMAN.
- I7=VALOR PARCIAL DA INTEGRAL DE VON KARMAN.
- I8=VALOR PARCIAL DA INTEGRAL DE VON KARMAN.
- D=ESPESURA DA CAMADA LIMITE.
- K= NO DE INTERACOES (NO INTEIRO).
- M=INCREMENTO.
- R=VALOR PARCIAL DA INTEGRAL DE KURZHILIN.
- B=VALOR PARCIAL DA INTEGRAL DE KURZHILIN.
- G=VALOR PARCIAL DA INTEGRAL DE KURZHILIN.
- D=VALOR PARCIAL DA INTEGRAL DE KURZHILIN.
- E=VALOR PARCIAL DA INTEGRAL DE KURZHILIN.
- F=VALOR PARCIAL DA INTEGRAL DE KURZHILIN.
- H=VALOR PARCIAL DA INTEGRAL DE KURZHILIN.
- L=VALOR PARCIAL DA INTEGRAL DE KURZHILIN.

EXPLICITACAO DAS VARIAVEIS:

- REAL C0,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,R,I1,I2,I3,I4,I5,I6,I7
- * A2,A,F1,F2,F,D1,D2,D,E,E1,E2,F,F1,F2,H,H1,H2
- * B,B1,B2,N,L,L1,L2,PR,X,M,I7,I8,R1,R2,S1,S2,S3

ESPECIFICACAO DE FORMATOS:

- 10 FORMAT(1X,3X,S7,(1X,S))
- 11 FORMAT(1X,5X,S,F3.1,S//)
- 12 FORMAT(//1X,10X,S//)
- 13 FORMAT(1X,2X,4(1X,S),F8.5))
- 14 FORMAT(1X,3X,S,F8.5)
- 15 FORMAT(//1X,3X,4(S,F8.5,1X))
- 16 FORMAT(//1X,10X,S)
- 17 FORMAT(//1X,3X,2(S,F8.5,1X))
- 18 FORMAT(1X,9X,S)

PARTE EXECUTAVEL

WRITE(6,10)'DE O NO DE INTERACOES K:', 'K='

READ(5,*)K

M=1.0

9 CONTINUE

WRITE(6,10)'DE O VALOR DE:', 'C0,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7'

READ(5,*) C0,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7

WRITE(6,10)'DE O GRAU DA EQUACAO:', 'N='

READ(5,*) T

1 C
2 C
3 C
4 C
5 C
6 C
7 C
8 C
9 C
10 C
11 C
12 C
13 C
14 C
15 C
16 C
17 C
18 C
19 C
20 C
21 C
22 C
23 C
24 C
25 C
26 C
27 C
28 C
29 C
30 C
31 C
32 C
33 C
34 C
35 C
36 C
37 C
38 C
39 C
40 C
41 C
42 C
43 C
44 C
45 C
46 C
47 C
48 C
49 C
50 C
51 C
52 C
53 C
54 C
55 C
56 C


```

15 C CALCULO DA INTEGRAL:
16 C I1= (C0-(C0**2))+(C1-2*C1*C0)/2+(C2-2*C0*C2-(C1**2))/3
17 C I2= (C3-2*C3*C0-2*C2*C1)/4+(C4-2*C4*C0-2*C3*C1-(C2**2))/5
18 C I3= (C5-2*C5*C0-2*C4*C1-2*C3*C2)/6-(C2*C6*C7)/14
19 C I4= (C6-2*C6*C0-2*C5*C1-2*C4*C2-(C3**2))/7-(C7**2)/15
20 C I5=-(2*C3*C7+2*C6*C4+(C5**2))/11
21 C I6=-(2*C1*C7+2*C6*C2+2*C5*C3+(C4**2))/9-(2*C5*C7+(C6**2))/13
22 C I7=-(2*C2*C7+2*C3*C6+2*C4*C5)/10-(2*C4*C7+2*C5*C6)/12
23 C I8=-(C7-2*C0*C7-2*C1*C6-2*C2*C5-2*C3*C4)/8
24 C
25 C R=I1+I2+I3+I4+I5+I6+I7+I8
26 C
27 C CALCULO DA INTEGRAL DE KURZHILIN.
28 C H1=(C0-(C0*C7)/8)-(C0+C6)/7-(C0*C5)/6-(C0*C4)/5
29 C H2=(-(C0*C3)/4)-(C0*C2)/3-(C0*C1)/2-(C0**2)
30 C H=H1+H2
31 C B1=(C1/2)-(C1*C7)/9-(C1+C6)/8-(C1*C5)/7-(C1+C4)/6
32 C B2=(-(C1+C3)/5)-(C1+C2)/4-(C1**2)/3-(C1*C0)/2
33 C B=B1+B2
34 C P1=(C2/3)-(C7*C2)/10-(C2*C6)/9-(C2+C5)/8-(C2*C4)/7
35 C P2=(-(C2*C3)/6)-(C2**2)/5-(C2*C1)/4-(C2*C0)/3
36 C P=P1+P2
37 C D1=(C3/4)-(C7*C3)/11-(C3*C6)/10-(C3*C5)/9-(C3*C4)/8
38 C D2=(-(C3**2)/7)-(C2*C3)/6-(C1*C3)/5-(C0*C3)/4
39 C D=D1+D2
40 C E1=(C4/5)-(C4*C7)/12-(C4+C6)/11-(C4+C5)/10-(C4**2)/9
41 C E2=(-(C3+C4)/8)-(C2*C4)/7-(C1*C4)/6-(C0*C4)/5
42 C E=E1+E2
43 C F1=(C5/6)-(C5*C7)/13-(C5*C6)/12-(C5**2)/11-(C5*C4)/10
44 C F2=(-(C5*C3)/9)-(C5+C2)/8-(C5*C1)/7-(C5*C0)/6

```

```

172 C F=F1+F2
173 C H1=(C6/7)-(C6*C7)/14-(C6**2)/13-(C5+C6)/12-(C4
174 C H2=(-(C3+C6)/10)-(C2*C6)/9-(C1+C6)/8-(C0+C6)/7
175 C H=H1+H2
176 C L1=(C7/8)-(C7**2)/15-(C6*C7)/14-(C5*C7)/13-(C4
177 C L2=(-(C7*C3)/11)-(C2*C7)/10-(C1*C7)/9-(C0*C7)/8
178 C L=L1+L2
179 C M=ABS(A)
180 C N=ABS(B)
181 C J=1
182 C IF(N.GT.N) GO TO 1
183 C M=N
184 C J=J+1
185 C 1 CONTINUE
186 C N=ABS(P)
187 C IF(N.GT.N) GO TO 2
188 C M=N
189 C J=J+1
190 C 2 CONTINUE
191 C N=ABS(D)
192 C IF(N.GT.N) GO TO 3
193 C M=N
194 C J=J+1
195 C 3 CONTINUE
196 C N=ABS(E)
197 C IF(N.GT.N) GO TO 4
198 C M=N
199 C J=J+1
200 C 4 CONTINUE
201 C N=ABS(F)
202 C IF(N.GT.N) GO TO 5
203 C M=N
204 C J=J+1
205 C 5 CONTINUE
206 C N=ABS(G)
207 C IF(N.GT.N) GO TO 6
208 C M=N
209 C J=J+1
210 C 6 CONTINUE
211 C N=ABS(H)
212 C IF(N.GT.N) GO TO 7
213 C M=N
214 C J=J+1
215 C 7 CONTINUE
216 C N=ABS(I)
217 C IF(N.GT.N) GO TO 8
218 C M=N
219 C J=J+1
220 C 8 CONTINUE
221 C N=ABS(J)
222 C IF(N.GT.N) GO TO 9
223 C M=N
224 C J=J+1
225 C 9 CONTINUE
226 C N=ABS(K)
227 C IF(N.GT.N) GO TO 10
228 C M=N
229 C J=J+1

```

```

C 4 CONTINUE
C N=ABS(F)
C IF(N .GT. N) GO TO 5
C N=N
C J=J+1
C 5 CONTINUE
C N=ABS(H)
C IF(N .GT. N) GO TO 6
C N=N
C J=J+1
C 6 CONTINUE
C N=ABS(L)
C IF(N .GT. N) GO TO 7
C N=N
C J=J+1
C 7 CONTINUE
C CALCULO DO NUMERO DE NUSSELT E DT/D:
R1=(1./J+1.)
R2=((J+1.)/(2.*J))
S1=((R/M)**R1)
S2=((R*C1)/2.)*S1
S3=2*S2
DISPLAY R1,R2,S1,S2,S3

```

```

WRITE(4,13) 'C4=',C4, 'C5=',C5, 'C6=',C6, 'C7=',C7
WRITE(4,12) 'OS COEFICIENTES DA INTEGRAL DE KURCHILIN SAO :
WRITE(4,13) 'K1=',A, 'K2=',B, 'K3=',P, 'K4=',D
WRITE(4,13) 'K5=',E, 'K6=',F, 'K7=',H, 'K8=',L
WRITE(4,12) 'TEMOS ENTAO QUE A RELACAO E=DT/D E:
WRITE(4,15) 'DT/D=',S1, 'E1-((X0/X)**R2, 'J**',R1, 'PR**',R1
WRITE(4,15) 'NUX=',S2, 'E2-((1-(X0/X)**R2, 'J**',R1, 'PRE**',S+FR**',R1
WRITE(4,16) 'NUMERO DE NUSSELT LOCAL PARA X0=0'
WRITE(4,17) 'NUXL=',S2, 'ERE**0.5J+PR**',R1
WRITE(4,16) 'NUMERO DE NUSSELT MEDIO : '
WRITE(4,17) 'NUM=',S3, 'E[(PE**0.5J+PR**',R1
WRITE(4,18) '
IF(M .GE. K) GO TO 8
M=M+1
GO TO 9
8 CONTINUE
STOP
END

```

```

WRITE(4,11) 'PARA EQUACAO DO J, T, 'GRAU.'
WRITE(4,12) 'OS COEFICIENTES DA FUNCAO SAO : '
WRITE(4,13) 'OS COEFICIENTES DA FUNCAO SAO : '
WRITE(4,13) 'C0=',C0, 'C1=',C1, 'C2=',C2, 'C3=',C3

```

APÊNDICE [F]

GENERALIDADES SOBRE FLUÍDOS

I. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

I.1. A Lei da Viscosidade de NEWTON [25]

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{du_x}{dy} \quad (I.1)$$

impõe que o fluxo viscoso da componente x da quantidade de movimento seja dirigida em sentido contrário ao gradiente de velocidade. O fator de proporcionalidade μ , também chamado de viscosidade do fluido, é independente do gradiente de velocidade e a linearidade da relação (I.1) é que caracteriza todos os fluidos chamados Newtonianos. Como exemplo pode-se citar a maioria dos gases e líquidos não poliméricos. (Fig.05)

Os demais fluidos que não apresentam a linearidade descrita acima, entre tensão de cisalhamento e o gradiente de velocidade, são chamados fluidos não Newtonianos. Como por exemplo; margarinas, vernizes, pasta de celulose, lamas, altos-polímeros, tintas, etc. (Fig. 06).

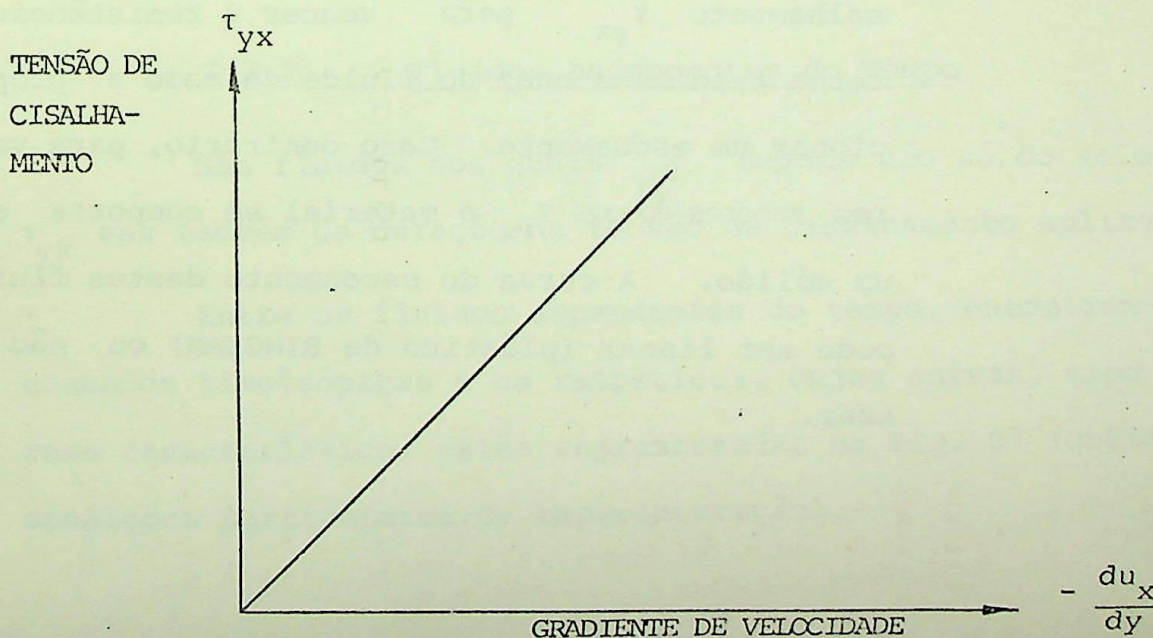


FIG. 05 CURVA DE ESCOAMENTO PARA FLUIDO NEWTONIANO

1.2. Classificação dos Fluidos não Newtonianos

Os fluidos não Newtonianos, agrupam-se em tres grandes famílias [22] :

1.2.1. Fluidos independentes do tempo

São os fluidos nos quais $\frac{du_x}{dy}$ num dado ponto é função exclusiva de τ_{yx} naquele ponto.

Entre os fluidos independentes do tempo, agrupam-se os das seguintes espécies:

- a) - Fluidos pseudoplásticos, cuja inclinação da curva de escoamento diminui com o aumento do gradiente da velocidade.
- b) - Fluidos dilatantes, cuja inclinação aumenta com o gradiente da velocidade.
- c) - Fluidos com tensão de escoamento, ou seja, em que é necessário atingir um valor mínimo de tensão de cisalhamento τ_{yx} para vencer a resistência interna tridimensional do fluido de modo a proporcionar um escoamento. Caso contrário, para valores menores do que τ_{yx} o material se comporta como um sólido. A curva do escoamento destes fluidos pode ser linear (plástico de BINGHAM) ou não linear.

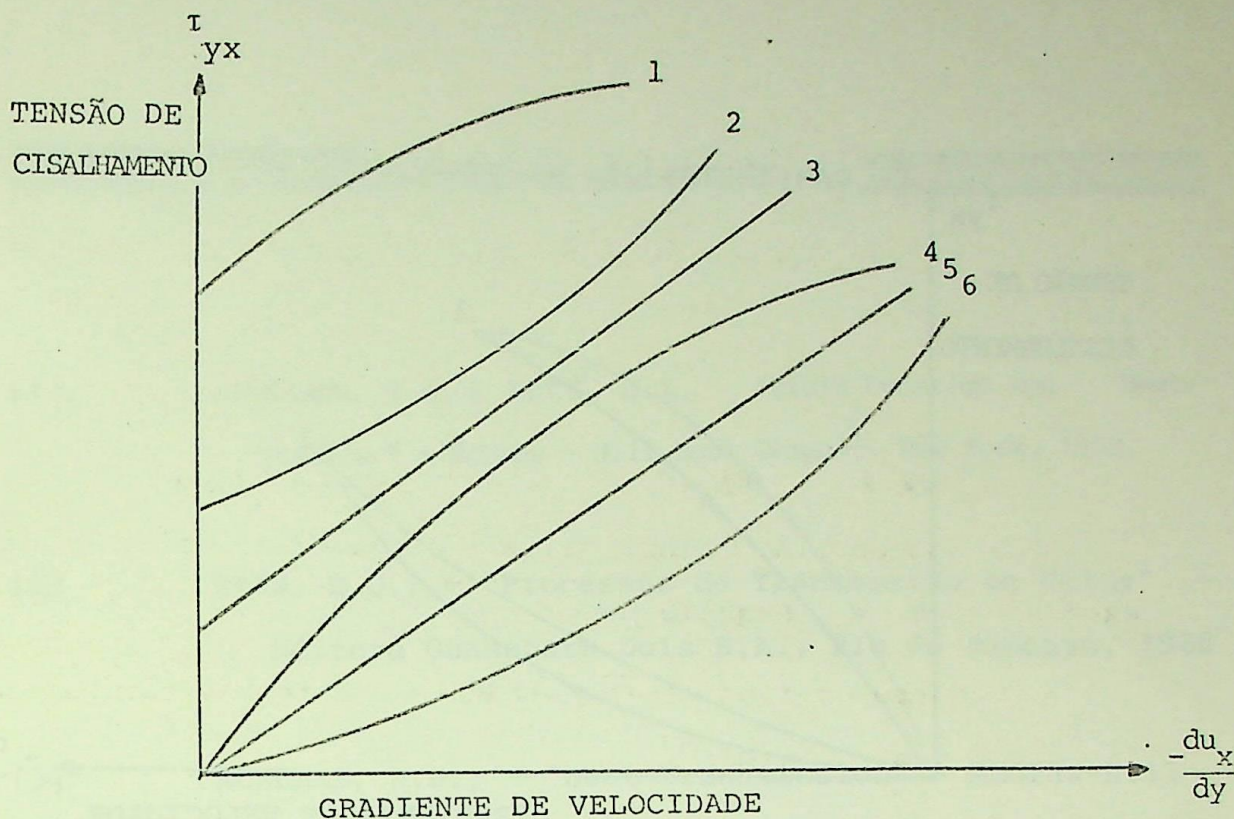


FIG. 06 CURVAS DE ESCOAMENTO PARA FLUIDOS INDEPENDENTES DO TEMPO: 1,2 - FLUIDOS COM TENSÃO DE CEDÊNCIA E COM ESCOAMENTO NÃO LINEAR; 3 - PLÁSTICO DE BINGHAM, 4 - FLUIDO PSEUDOPLÁSTICO; 5 - FLUIDO NEWTONIANO e 6 - FLUIDO DILATANTE.

I.2.2. Fluidos Dependentes do Tempo

são fluidos nos quais $\frac{du_x}{dy}$ depende não só do valor de τ_{yx} mas também da duração da tensão de cisalhamento aplicada.

Entre os fluidos dependentes do tempo, encontram-se os chamados tixotrópicos e os reopéticos, cujas curvas, tipo histerese característica, estão representadas na Fig. 07 (obtidas sob condições particulares de experimentação).

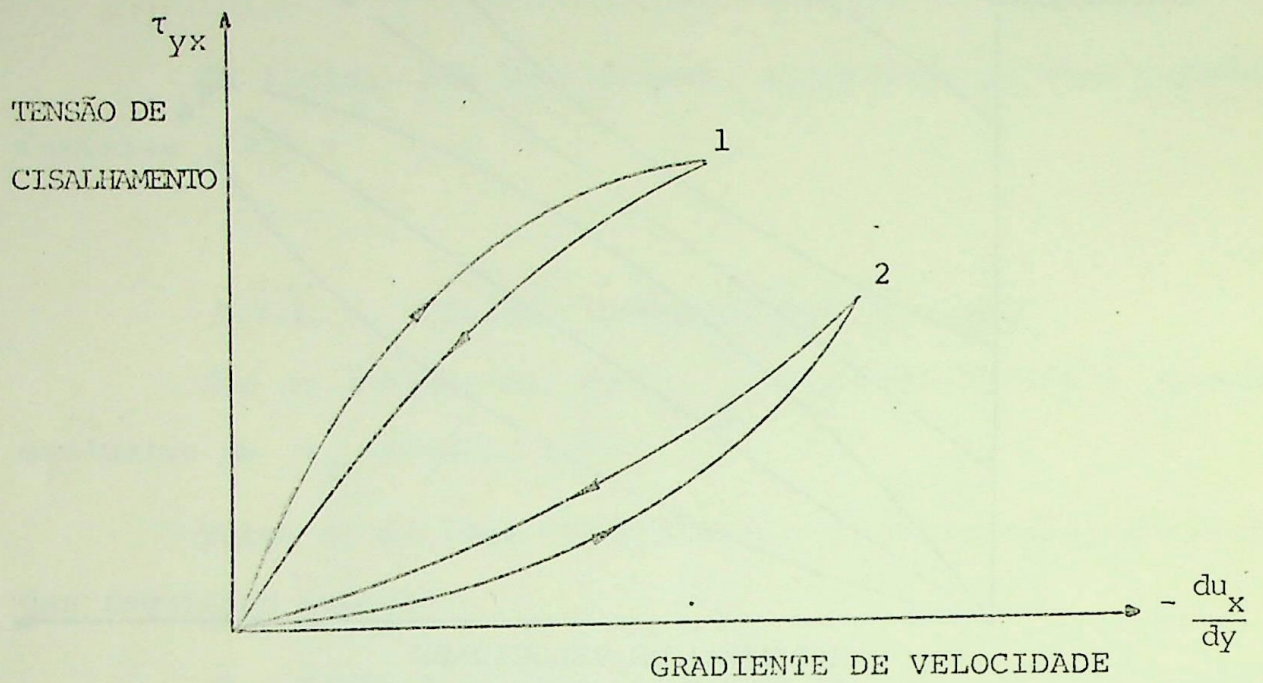


FIG. 07 CURVAS DE ESCOAMENTO PARA FLUIDOS DEPENDENTES DO TEMPO: 1.- FLUIDOS TIXOTRÓPICOS E 2.- FLUIDOS REOPÉTICOS

I.2.3. Fluídos visco-elásticos

São os fluídos que apresentam recuperações elásticas após a remoção da tensão deformante.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] KNUDSEN, J.G. & KATZ, D.L. - "Fluid Dynamics And Heat Transfer" - McGraw - Hill Book Company, New York, 1958.
- [2] KERN, D.Q.; - "Processos de Transmissão de Calor" - Editora Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro, 1980
- [3] McADAMS, W.H.; - "Heat Transmission" - McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. Tokyo, 1954.
- [4] COULSON, J.M. & RICHARDSON, J.F.; "Chemical Engineering", Volume 1 - Pergamon Press Ltd., Oxford, 1977.
- [5] BEJAN, A.; - "Convection Heat Transfer" - John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [6] WELTY, J.R.; - "Engineering Heat Transfer" - John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [7] KAYS, W.M.; - "Convective Heat And Mass Transfer" - McGraw - Hill Book Company, New York, 1966
- [8] BENNETT, C.O. & MYERS, J.E.; - "Fenômenos de Transporte" - Editora McGraw - Hill do Brasil Ltda, São Paulo, 1978.

- [9] ISACHENKO, V.P., OSIPOVA, V.A. & SUKOMEL, A.S.; -
"Heat Transfer" - Mir Publishers, Moscou, 1977
- [10] KREITH, F.; - "Princípios da Transmissão de Calor"-
Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1977
- [11] SKELLAND, A.H.P. - "Non - Newtonian Flow And Heat
Transfer" - John Wiley & Sons, New York, 1967.
- [12] HOLMAN, J.P.; - "Heat Transfer" - International Stu
dent Edition - Third Edition, New York, 1976.
- [13] SCHLICHTING, H.; - "Boundary Layer Theory"- McGraw -
Hill Book Company- 4ª Edição, New York, 1960.
- [14] LYCHE, B.C., & BIRD, R.B.; - Chemical Eng. Sci, 6,34
1956.
- [15] PIGFORD, R.L.; - Chemical Eng. Prog. Symposium Se
ries nº 17, 51, 79-92, 1955.
- [16] ACRIVOS, A., - SHAH, M.J. & - PETERSON, E.E.; - A.I.
Ch. E.J., 6, 312-7, 1960.
- [17] BIZELL, G.D., & SLATTERY, J.C.; - Chem. Eng. Sci.,
17, 777 - 82, 1962.
- [18] SLATTERY, J.C.; - CHEM. Eng. Sci, 17, 689-91, 1962

- [19] LEE & AMES; - A.I. Ch. E. J., 12, 700, 1966.
- [20] RAGHURAMAN, J.; - "Analysis Of Counter Flow Heat Exchanger For Non-Newtonian Fluids" - Int. J. Heat Mass Transfer - vol. 20, pp. 994-996, 1977
- [21] NORRIS, R.H. & STREID, D.D.; - "Laminar - Flow Heat Transfer Coefficients For Ducts" - Trans. A.S.M.E. 525-533, 1940.
- [22] SULTAN, A.A.; - "Sizing Pipe For Non-Newtonian Flow" - Chemical Engineering, pp. 140-146, 19 Dezembro 1988.
- [23] SEN, T.K. & ARAÚJO, A.G.; - "Transferência de Calor em Tubo Circular e em Regime Laminar com Temperatura Constante da Parede" - 10º Seminário ADUNESP pp.373-380, novembro, 1989.
- [24] SEN, T.K. & ARAÚJO, A.G.; "Perfis Polinomiais da Velocidade e Temperatura Para escoamento Laminar , em Tubo Circular e Com Temperatura Constante da Parede" - Pesquisa e Desenvolvimento Tecnológico. Vol. 16 nº 2 - Junho de 1990.
- [25] MERINO, F.E.I - "Contribuição ao Estudo das Propriedades Reológicas das Pastas Nitrocelulósicas", tese de Mestrado, EFEL, 1981.