UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Interpolação e Aproximação por Conjuntos Convexos

Luana de Lima Silva

Itajubá, 26 de fevereiro de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Luana de Lima Silva

Interpolação e Aproximação por Conjuntos Convexos

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática.

Área de Concentração: Análise Matemática

Orientadora: Márcia Sayuri Kashimoto

Fevereiro de 2015
Itajubá - MG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Luana de Lima Silva

Interpolação e Aproximação por Conjuntos Convexos

Dissertação aprovada por banca examinadora em 26 de fevereiro de 2015, conferindo ao autor o título de Mestre em Ciências em Matemática.

Banca Examinadora:
Prof^{a}. Dr^{a}. Márcia Sayuri Kashimoto (Orientadora)
Prof. Dr. Sérgio Antonio Tozoni
Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes

Itajubá-MG
2015

Sumário

Lista de Símbolos

ℓ^∞ Espaço vetorial das sequências complexas limitadas

$\text{mon}(C[a,b])$ Cone do conjunto das funções contínuas não decrescentes definidas em $[a,b]$

$\text{mon}(C^k(\overline{\Omega}))$ Cone das funções $f \in C^k(\overline{\Omega})$ monótonas não decrescentes

$\text{mon}(P[a,b])$ Cone dos polinômios não decrescentes definidos em $[a,b]$

$B(x,\delta)$ Bola aberta centrada em x com raio δ

$B_n(f)$ Polinômio de Bernstein associado a função f

$C[a,b]$ Espaço das funções contínuas em $[a,b]$

$C^{k,k}(\overline{\Omega})$ Espaço das funções f cujas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k f}{\partial x^k}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^k f}{\partial y^k}$ existem e são contínuas em Ω e podem ser continuamente estendidas para $\overline{\Omega}$

$C^k(\overline{\Omega})$ Espaço das funções de classe C^k em Ω tal que suas derivadas parciais podem ser continuamente estendidas para $\overline{\Omega}$

$P[a,b]$ Espaço dos polinômios reais definidos em $[a,b]$

Aff(B) Envoltória afim de B

co (B) Envoltória convexa de B

cone F Cone gerado por F

cone co F Cone convexo gerado por F

cor(M) Core de M

rec F Cone recessivo de B

ri (M) Interior relativo de M

span(B) Span linear de B

Agradecimentos

Quero agradecer, em primeiro lugar, a Deus, que sempre guiou meus passos. Agradeço a minha família, Maria José, Luiz Carlos e Matheus, pelo apoio incondicional, e ao meu noivo Caio Cesar, pelo incentivo e companheirismo. Agradeço também a todos os professores que me acompanharam durante o mestrado, em especial à professora Márcia Sayuri Kashimoto responsável pela orientação deste trabalho. Finalmente, agradeço à FAPEMIG, Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de Minas Gerais, pelo apoio financeiro.

"A razão é o passo final
para reconhecer que há uma
infinidade de coisas além dela."
Blaise Pascal

Resumo

Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos de Hausdorff reais, $A : X \longrightarrow Y$ uma transformação linear contínua, C um subconjunto de X, B um subconjunto convexo denso em C e $d \in Y$. O objetivo deste trabalho é estudar condições que garantam que $B \cap A^{-1}(d)$ seja não vazio e denso em $C \cap A^{-1}(d)$. Apresentaremos aplicações relacionadas com extensões monótonas suaves de funções definidas na fronteira do quadrado unitário e problemas de interpolação e aproximação de funções contínuas monótonas por polinômios monótonos.

Palavras-chave Espaços vetoriais topológicos, interpolação, aproximação, conjuntos convexos.

Abstract

Let X and Y be real topological vector Hausdorff spaces, $A : X \longrightarrow Y$ be a continuous linear map, $C \subset X$, B a convex subset dense in C, and $d \in Y$. In this work we are mainly concerned in presenting conditions which guarantee that the set $B \cap A^{-1}(d)$ will be nonempty and dense in $C \cap A^{-1}(d)$. Some applications to shape preserving interpolation and approximation, and the existence of smooth monotone extensions of functions defined on the boundary of the unit square are described.

Keyword Topological vector space, interpolation, approximation, convex sets.

Introdução

Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos de Hausdorff reais, C um subconjunto de X e $A : X \to Y$ uma transformação linear contínua. Consideremos o seguinte problema de interpolação abstrata:

$$\text{dado } d \in Y \text{ encontrar } x \in C \text{ tal que } Ax = d. \tag{1}$$

Quando o problema (1) tem uma solução para um dado $d \in Y$, dizemos que d é *admissível*, isto é, $d \in A[C] := \{Ax : x \in C\}$ ou equivalentemente $C \cap A^{-1}(d) \neq \varnothing$, com $A^{-1}(d) := \{x \in X : Ax = d\}$. Se C é um subconjunto próprio de X, tal problema é conhecido como *problema de interpolação com vínculos*. Se $C = X$, o problema é denominado *problema de interpolação sem vínculos*.

O problema de interpolação com vínculos tem sido estudado por vários autores, dentre os quais destacamos Wong [14], Neamtu e Mulansky [8],[9]. Possui aplicações em Teoria de Splines e em CAD. Problemas envolvendo extensões de funções também podem ser vistos como problemas de interpolação infinita.

O presente trabalho consiste em estudar resultados sobre aproximação e interpolação com vínculos quando o conjunto C é substituído por um subconjunto convexo B de C, conforme os artigos de Mulansky e Neamtu [8] e [9]. Basicamente, o problema se resume em encontrar condições para que $B \cap A^{-1}(d)$ seja não vazio e denso em $C \cap A^{-1}(d)$. Vale ressaltar que se d é um ponto admissível em C, não necessariamente d é um ponto admissível em B.

O capítulo 1 expõe uma síntese do principais resultados sobre espaços topológicos e apresenta uma seção de espaços vetoriais topológicos, que contém conceitos essenciais para a elaboração dos capítulos posteriores.

O Capítulo 2 trata do problema de interpolação e aproximação por elementos do conjunto B quando Y tem dimensão finita. A análise convexa é a ferramenta principal para o desenvolvimento deste capítulo. Veremos que se B é denso em C e d é um ponto do interior relativo de $A[C]$, então os elementos de C poderão ser aproximados e interpolados simultaneamente por elementos de B. Veremos também alguns casos particulares quando substituímos X por um subespaço S de dimensão finita. Uma aplicação do principal resultado é a garantia de interpolação e aproximação de funções contínuas monótonas por polinômios monótonos.

O Capítulo 3 trata dos problemas de interpolação e aproximação para o caso em que Y tem dimensão qualquer. Se Y tiver dimensão infinita, o problema (1) é chamado de *interpolação em dimensão infinita* ou simplesmente *interpolação infinita*. Apresentaremos neste capítulo extensões de alguns resultados de aproximação e interpolação finita decorrentes do Capítulo 2. Veremos que, neste contexto, para a garantia da interpolação e aproximação simultâneas por elementos de B serão necessárias as hipóteses utilizadas no caso de dimensão finita e mais uma relação entre a transformação A e o conjunto B. Esta relação se resume em tomar A B-aberta. Como aplicação, estudaremos as extensões monótonas suaves de funções definidas na fronteira do quadrado unitário.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos conceitos e resultados de Topologia Geral e Espaços Vetoriais Topológicos que serão utilizados nos capítulos que se seguirão. As referências utilizadas são [4], [10], [12] e [13].

1.1 Espaços Topológicos

Definição 1. Uma *topologia* sobre um conjunto X é uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X tendo as seguintes propriedades:

T1. $\varnothing$ e X pertencem a $\mathcal{T}$;

T2. A união de elementos de qualquer subcoleção de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$;

T3. A interseção de elementos de qualquer subcoleção finita de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$.

Um *espaço topológico* é um par $(X, \mathcal{T})$, onde X é um conjunto e $\mathcal{T}$ uma topologia para X. Se X é um espaço topológico munido com a topologia $\mathcal{T}$, dizemos que um subconjunto U de X é um *conjunto aberto* de X se U pertence à coleção $\mathcal{T}$. Dizemos que U é uma *vizinhança* de $x \in X$ se U é um aberto contendo x. Um subconjunto F de X é dito ser *fechado* se $X \setminus F$ é aberto.

Dado um subconjunto U de um espaço topológico X, definimos o *interior topológico* de U, denotado por $\mathrm{int}(U)$, como a união de todos os conjuntos abertos contidos em U. E definimos o *fecho* de F, denotado por $\overline{F}$, como a interseção de todos os fechados que contém F. Portanto, se U é aberto, $U = \mathrm{int}(U)$ e se F é fechado, $F = \overline{F}$.

Proposição 2. *Seja F um subconjunto de um espaço topológico X. Então, $x \in \overline{F}$ se, e somente se, toda vizinhança de x intercepta F.*

Definição 3. Suponha que $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ são duas topologias para um dado conjunto X. Se $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, dizemos que $\mathcal{T}'$ é *mais fina* que $\mathcal{T}$. Dizemos que $\mathcal{T}$ é *comparável* com $\mathcal{T}'$ se $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ ou $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

Se $\mathcal{T}'$ é mais fina que $\mathcal{T}$, é usual também dizer que $\mathcal{T}$ é *mais grossa* que $\mathcal{T}'$, ou que a topologia $\mathcal{T}'$ é *mais forte* que a topologia $\mathcal{T}$.

Definição 4. Se X é um conjunto, uma *base* de uma topologia para X é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X, chamados de *abertos básicos*, tal que

B1. Para todo $x \in X$, existe pelo menos um aberto básico B contendo x;

B2. Se x pertence à interseção de dois abertos básicos B_1 e B_2, então existe um aberto básico B_3 contendo x tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Sejam X um conjunto e $\mathcal{B}$ uma base como na definição acima. Definimos a topologia $\mathcal{T}$ *gerada* por $\mathcal{B}$ da seguinte forma. Um subconjunto $U \subset X$ é dito pertencer a $\mathcal{T}$ se para todo $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ e $B \subset U$. É fácil mostrar que $\mathcal{T}$ assim definida é de fato uma topologia para X. Note que dado qualquer espaço topológico X, sempre existe uma base de sua topologia. De fato, a própria topologia para X é uma base para si mesma.

Uma outra forma de caracterizar a topologia gerada por uma base é dada no resultado abaixo.

Proposição 5. *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma base da topologia $\mathcal{T}$ de X. Então, $\mathcal{T}$ é igual à coleção de todas as uniões de elementos de $\mathcal{B}$.*

Esta proposição afirma que todo aberto U de X é expresso como união de abertos básicos, onde esta expressão para U não é única. Note que um aberto básico contendo x é uma vizinhança de x. Esta vizinhança será chamada de vizinhança básica de x.

Definição 6. Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é chamado *espaço topológico de Hausdorff* se para cada par de pontos distintos x, y em X, existem vizinhanças U e V de x e y, respectivamente, que são disjuntas.

Também iremos nos referir a espaços topológicos de Hausdorff dizendo que X está munido com uma topologia de Hausdorff.

Definição 7. Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita ser contínua se para cada subconjunto aberto U de Y, o conjunto $f^{-1}(U) := \{x \in X : f(x) \in U\}$ é aberto em X.

Proposição 8. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *f é contínua;*

(ii) *Para todo subconjunto U de X temos que $f(\overline{U}) \subset \overline{f(U)}$;*

(iii) *Para todo conjunto F fechado em Y, o conjunto $f^{-1}(F)$ é fechado em X;*

(iv) *Para cada $x \in X$ e cada vizinhança V de $f(x)$, existe uma vizinhança U de x tal que $f(U) \subset V$.*

Se a condição (iv) vale para $x \in X$, dizemos que f é contínua em x.

Proposição 9. *Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos e M um subconjunto de X. Se $A : X \longrightarrow Y$ é contínua, então $\overline{A[M]} = \overline{A[\overline{M}]}$.*

Demonstração. Note que $A[M] \subset A[\overline{M}]$ e disso segue que $\overline{A[M]} \subset \overline{A[\overline{M}]}$. Por outro lado, pela continuidade de A, temos que $A[\overline{M}] \subset \overline{A[M]}$ e assim a outra inclusão é válida. ∎

Definição 10. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma bijeção. Se a função f e a sua inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ forem contínuas, diremos que f é um *homeomorfismo*.

Chamaremos uma função f entre espaços topológicos de aberta se para todo aberto U de X tivermos $f(U)$ aberto em Y. É simples verificar que um homeomorfismo f é caracterizado por ser uma bijeção aberta e contínua.

O próximo resultado pode ser encontrado em [10].

Teorema 11. [Teorema do Valor Intermediário] *Sejam X um espaço topológico conexo e Y um conjunto ordenado com a topologia da ordem e $f : X \longrightarrow Y$ contínua. Se a, b são pontos em X e r está entre os pontos $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in X$ tal que $f(c) = r$.*

A seguir apresentaremos um resultado importante da Teoria da Aproximação. Em suma, o teorema garante que toda função real contínua definida em um intervalo compacto pode ser uniformemente aproximada por um polinômio.

Teorema 12. [Teorema de Bernstein] *Seja $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - B_n(f;x)| < \varepsilon$, para todo $x \in [0,1]$ onde $B_n(f,\cdot) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é o polinômio de Bernstein associado à função f e $B_n(f;x) := \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.*

A demonstração deste teorema pode ser vista em [11]. Há também uma versão análoga deste teorema para o caso n dimensional que pode ser encontrado em [6]. No caso em que $n = 2$, por exemplo, o polinômio de Bernstein associado a uma função $g : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$B_n(g;(x_1,x_2)) = \sum_{0 \le i_1, i_2 \le n} g\left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n}\right) \prod_{k=1}^{2} \binom{n}{i_k} x_k^{i_k}(1-x_k)^{n-i_k}.$$

Observação 13. Os polinômios de Bernstein, $B_n(f;\cdot)$, associados a uma função f não decrescente são não decrescentes. E ainda, se f é de classe C^k, então $B_n^{(i)}(f;\cdot) \longrightarrow f^{(i)}$ uniformemente, para $i = 1, \ldots, k$. O caso unidimensional pode ser encontrado com mais detalhes em [11]. O caso bidimencional, garante a aproximação simultânea das derivadas parciais de f pelas derivadas parciais do polinômios de Bernstein [5].

1.2 Espaços Vetoriais Topológicos

Definição 14. Seja $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos. Um *espaço vetorial topológico* sobre $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial X sobre $\mathbb{K}$, munido com uma topologia $\mathcal{T}$ tal que:

- **ET 1.** A aplicação de $X \times X$ em X definida por $(x, y) \longmapsto x + y$ é contínua, sendo $X \times X$ munido com a topologia produto;

- **ET 2.** A aplicação de $\mathbb{K} \times X$ em X definida por $(t, x) \longmapsto tx$ é contínua, com $\mathbb{K}$ munido da topologia usual e $\mathbb{K} \times X$ com a topologia produto.

Em outra palavras, dizemos que o espaço vetorial topológico é um espaço vetorial com uma topologia tal que a soma e o produto por escalar são funções contínuas. A topologia $\mathcal{T}$ do espaço vetorial topológico é usualmente chamada de topologia vetorial do espaço vetorial X ou de topologia compatível com a estrutura vetorial de X. Indicaremos por EVT, a abreviação de espaço vetorial topológico.

Exemplo 15. Todo espaço vetorial normado X real ou complexo é um espaço vetorial topológico munido com a topologia induzida pela norma. Em outras palavras, a topologia de X é gerada pelas vizinhanças básicas $B(x, \delta) := \{y \in X : ||x - y|| < \delta\}$. A soma é uma função contínua. De fato, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$, então $||(x_n + y_n) - (x + y)|| \leq ||x_n - x|| + ||y_n - y|| \to 0$ quando $n \to \infty$. Analogamente, verifica-se que o produto por escalar é uma operação contínua.

Um espaço vetorial topológico $(X, \mathcal{T})$ é dito *de Hausdorff* se a topologia $\mathcal{T}$ é de Hausdorff.

Todo conjunto X não vazio pode ser munido com uma topologia de Hausdorff, por exemplo, a topologia discreta. Desta forma, é razoável perguntar se todo espaço vetorial não trivial pode ser munido com uma topologia de Hausdorff compatível. A topologia discreta é a mais fina para tal tentativa. Como cada ponto forma uma vizinhança dele mesmo na topologia discreta, e a vizinhança $\{x\} \times \{y\}$ de (x, y) é levada na vizinhança $\{x + y\}$ de $x + y$ da soma, a adição é contínua. Entretanto, a multiplicação por escalar não é contínua. Considere a vizinhança $W = \{sx_0\}$ de sx_0 em X. Não existe uma vizinhança V de s em $\mathbb{K}$ tal que $tx_0 \in W$ para todo $t \in V$.

Por outro lado, todo espaço vetorial pode ser normado. Com efeito, consideremos B uma base de Hamel para X. Assim, qualquer $x \in X$ não nulo pode ser escrito de maneira única como $x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$ e $u_i \in B$ para $i = 1, \ldots, m$. Então, $||x|| = |\alpha_1| + \cdots |\alpha_m|$ e $||0|| = 0$ define uma norma em X, e como a topologia induzida pela norma é de Hausdorff, concluímos que X é um espaço vetorial topológico de Hausdorff.

Iremos agora fixar algumas notações que serão utilizadas. Sejam X um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{K}$ e $A, B \subset X$. Considere os conjuntos

$$A \pm B = \{a \pm b : a \in A \text{ e } b \in B\},$$
$$tA = \{ta : a \in A\},$$
$$A + z = A + \{z\} = \{a + z : a \in A\}.$$

É oportuno observar que $(s + t)A \subset sA + tA$, mas a igualdade não é válida em geral. Basta considerar $X = \mathbb{C}$ e $A = \{1, i\}$; então $2A = \{2, 2i\}$, enquanto $A + A = \{2, 2i, 1 + i\}$.

Proposição 16. *Seja X um espaço vetorial topológico.*

(i) *Dados $a \in X$ e $s \in \mathbb{K}$ com $s \neq 0$, a translação $T_a : X \to X$ dada por $T_a(x) = x + a$ e a multiplicação por escalar $M_s : X \to X$ dada por $M_s(x) = sx$ são homeomorfismos.*

(ii) *Se G é um aberto em X, então $a + G$, sG e $A + G$ são abertos em X para quaisquer $a \in X$, $A \subset X$ e $s \in \mathbb{K}$, $s \neq 0$. Em particular, se U é uma vizinhança da origem, tU também é, para qualquer $t \in \mathbb{K}$ não nulo.*

Demonstração. **(i)** Consideremos $\Phi : X \times X \to X$ sendo a soma e $\Psi : \mathbb{K} \times X \to X$ a multiplicação por escalar. Como X é um espaço vetorial topológico, temos que Φ e Ψ são contínuas e assim também as restrições $\Phi|_{X \times \{a\}}$ e $\Psi|_{\{s\} \times X}$. Sabemos que as projeções $\pi_1 : X \times \{a\} \to X$ e $\pi_2 : \{s\} \times X \to X$ são homeomorfismos. Note que $T_a = \Phi|_{X \times \{a\}} \circ \pi_1^{-1}$ e $M_s = \Psi|_{\{s\} \times X} \circ \pi_2^{-1}$ são contínuas, pois são composições de funções contínuas. Como T_a tem inversa T_{-a} e M_s tem inversa $M_{s^{-1}}$, o resultado segue.

(ii) Como T_a e M_s são homeomorfismos, em particular são aplicações abertas. Assim, $T_a(G) = a + G$ e $M_s(G) = sG$ são abertos em X. Para finalizar, note que $A + G = \bigcup_{a \in A}(G + a)$ é união de abertos, logo é aberto. ∎

Uma consequência fundamental da proposição anterior é que se V é uma vizinhança de a, então $b - a + V$ é uma vizinhança de b para quaisquer $a, b \in X$. Se considerarmos $a = 0$, então $b + V$ é uma vizinhança de b para toda vizinhança V da origem. Desta forma a estrutura topológica de um espaço vetorial topológico é determinado por qualquer conjunto de vizinhanças básicas da origem.

Proposição 17. *Seja X um espaço vetorial topológico. Para qualquer vizinhança U de 0 em X, existe uma vizinhança V de 0 tal que $V + V \subset U$. Além disso, V pode ser escolhida como sendo simétrica, isto é, $V = -V$.*

Demonstração. Seja $\Phi : X \times X \to X$ a aplicação soma. Seja U qualquer vizinhança de $\Phi(x, y) = x + y$. Como Φ é contínua, $\Phi^{-1}(U)$ é uma vizinhança de (x, y) em $X \times X$. Desta forma, existem abertos básicos V_1 de x e V_2 de y de modo que $V_1 \times V_2 \subset \Phi^{-1}(U)$. Disso seque que $\Phi(V_1 \times V_2) \subset U$, que é equivalente a $V_1 + V_2 \subset U$.

Se tomarmos $x = y = 0$, segue que existem vizinhanças V_1 e V_2 da origem tais que $V_1 + V_2 \subset U$. Defina $V = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$. Então V é uma vizinhança da origem pela Proposição 16 e é uma vizinhança simétrica. ∎

Por indução, podemos generalizar a Proposição 17, de modo que para qualquer vizinhança U de 0 e para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe uma vizinhança simétrica V de 0 tal que $V + \cdots + V \subset U$, sendo a soma em n termos. Para isso, basta considerar a aplicação contínua $\Phi_n : X \times \cdots \times X \to X$ definida por $\Phi_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$.

A próxima definição será importante para a compreensão de resultados que serão discutidos nos próximos capítulos.

Definição 18. Um subconjunto B de um espaço vetorial X é dito ser um *conjunto absorvente* se para qualquer $x \in X$, existe $\mu_x > 0$ tal que $x \in tB$ sempre que $|t| > \mu_x$, $t \in \mathbb{K}$. Equivalentemente, B é um conjunto absorvente se para qualquer $x \in X$, existe $\delta_x > 0$ tal que $sx \in B$ para todo $s \in \mathbb{K}$ com $|s| < \delta_x$.

Segue direto da definição que todo conjunto absorvente contém o vetor nulo, basta tomar $x = 0 \in X$. A seguir veremos algumas propriedades acerca de conjuntos absorventes.

Proposição 19. *A interseção finita de conjuntos absorventes é absorvente.*

Demonstração. Seja $\{B_i\}_{i=1}^n$ uma família de conjuntos absorventes, ou seja, para qualquer $x \in X$ existe $\lambda_i > 0$ tal que $sx \in B_i$ se $|s| < \lambda_i$ para $i = 1, \dots, n$. Defina $\lambda = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Então, para todo $x \in X$, $sx \in \bigcap_{i=1}^n B_i$ sempre que $|s| < \lambda$. Portanto, $\bigcap_{i=1}^n B_i$ é absorvente. ∎

A proposição acima não é válida para interseção infinita de conjuntos absorventes. De fato, considere $X = \ell^\infty$ e para cada $m \in \mathbb{N}$, considere $B_m = \{(a_n)_n \in \ell^\infty : |a_m| < 1/m\}$. É fácil verificar que cada B_m é um conjunto absorvente, mas a interseção $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} B_m$ não é absorvente. Com efeito, considere a sequência $x = (x_n)_n$ dada por $x_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $sx \notin \bigcap_{m\in\mathbb{N}} B_m$ para todo $s \neq 0$.

Definição 20. Um subconjunto não vazio B de um espaço vetorial X é dito ser um *conjunto balanceado* se $sB \subset B$ para todo $s \in \mathbb{K}$ tal que $|s| \leq 1$.

Segue direto da definição que todo conjunto balanceado contém o vetor nulo, basta tomar $s = 0$. E ainda se B é balanceado então $B \subset rB$ para todo $r \in \mathbb{K}$ com $|r| \geq 1$.

Exemplo 21. Os subconjuntos balanceados do espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre o corpo $\mathbb{C}$ são todos os discos (com ou sem as fronteiras) centrados na origem e o próprio espaço $\mathbb{C}$. Se consideramos o espaço vetorial $\mathbb{R}$, os conjuntos balanceados são os intervalos simétricos centrados na origem e o próprio $\mathbb{R}$. Se $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$, então os conjuntos balanceados são uniões de segmentos de reta simétricos passando pela origem. Por exemplo, o retângulo $\{z \in \mathbb{C} : |Re(z)| < 1 \text{ e } |Im(z)| \leq 1\}$ é um conjunto balanceado.

Proposição 22. *Seja B um subconjunto balanceado de um espaço vetorial topológico. Então, $\overline{B}$ é balanceado. E se $0 \in \operatorname{int}(B)$ então $\operatorname{int}(B)$ também é um conjunto balanceado.*

Demonstração. Seja M_s como na Proposição 16. Para todo $s \in \mathbb{K}$ com $0 < |s| \leq 1$, usando a continuidade da aplicação M_s e a hipótese de B ser balanceado, concluímos que $s\overline{B} = M_s(\overline{B}) \subset \overline{M_s(B)} = \overline{sB} \subset \overline{B}$. Para $s = 0$ também vale que $s\overline{B} \subset \overline{B}$, pois B é balanceado e por isso contém 0. Portanto, $\overline{B}$ é balanceado.

Agora, suponha que $0 \in \operatorname{int}(B)$. Então, para $s \in \mathbb{K}$ tal que $0 < |s| \leq 1$, temos $s\operatorname{int}(B) = \operatorname{int}(sB) \subset sB \subset B$. Mas, $s\operatorname{int}(B)$ é aberto pela Proposição 16, de onde $s\operatorname{int}(B) \subset \operatorname{int}(B)$. Como por hipótese isso vale para $s = 0$, $\operatorname{int}(B)$ é balanceado. ∎

Proposição 23. *Seja X um espaço vetorial topológico.*

(i) *Toda vizinhança de 0 é absorvente.*

(ii) *Toda vizinhança de 0 contém uma vizinhança balanceada.*

(iii) *Para toda vizinhança U de 0, existe uma vizinhança balanceada e absorvente V tal que $V + V \subset U$.*

Demonstração. **(i)** Seja V uma vizinhança de 0, $x \in V$ arbitrário e denotemos por $\Psi : \mathbb{K} \times X \to X$ a multiplicação por escalar. Pela continuidade de Ψ em $(0, x)$ segue que existe um $\delta > 0$ e uma vizinhança básica W de x tal que $\Psi(B(0, \delta) \times W) \subset V$ e isso implica que $tx \in V$ sempre que $|t| < \delta$.

(ii) Sejam V e Ψ como anteriormente. Pela continuidade de Ψ em $(0, 0)$ segue que existe um $\delta > 0$ e uma vizinhança básica W de 0 tal que $\Psi(B(0, \delta) \times W) \subset V$, isto é, $tW \subset V$ se $|t| < \delta$. Defina $U = \bigcup_{|t|<\delta} tW$. É fácil ver que U é uma vizinhança de 0. A vizinhança U é a vizinhança balanceada procurada. Com efeito, seja $s \in \mathbb{K}$ com $|s| \leq 1$ e $x \in U$. Então $x \in tW$ para algum $|t| < \delta$. Logo, $sx \in stW \subset U$, pois $|st| \leq |t| < \delta$.

(iii) Basta usar os itens anteriores e a Proposição 17. ∎

No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ é simples visualizar que os seus subespaços vetoriais próprios, retas e planos que passam pela origem, não contêm pontos interiores, uma vez que todo conjunto aberto não vazio deve conter uma bola aberta do $\mathbb{R}^3$. Consequentemente, os subespaços próprios do $\mathbb{R}^3$ não podem ser abertos. Este resultado é mais geral e válido para espaços vetoriais topológicos, e é uma consequência da existência da vizinhança absorvente da origem, vista na Proposição 23.

Proposição 24. *O único subespaço vetorial aberto de um espaço vetorial topológico X é ele mesmo.*

Demonstração. Seja M um subespaço vetorial aberto de X. Como M é um espaço vetorial aberto e $0 \in M$, existe uma vizinhança V de 0 tal que $V \subset M$ e esta vizinhança é absorvente pela Proposição 23. Então, dado $x \in X$ arbitrário, existe um $\delta > 0$ tal que $tx \in V$ sempre que $|t| < \delta$. Assim, $tx \in M$ para algum $t \neq 0$ e suficientemente pequeno. Mas como M é um subespaço vetorial, $x = t^{-1}tx \in M$. Portanto, $M = X$. ∎

Uma consequência da proposição anterior é que se M é um subespaço vetorial próprio de X, então M não tem pontos interiores. Com efeito, suponha que $x \in M$ é um ponto interior de M. Então existe uma vizinhança V de x tal que $V \subset M$. Note que $V - x$ é uma vizinhança de 0 inteiramente contida em M, uma vez que M é um subespaço vetorial. Usando o mesmo argumento da Proposição 24, concluímos que $M = X$.

A seguir, recordaremos a definição de conjunto dirigido e redes e nos próximos resultados admitiremos as propriedades dos mesmos. Para maiores detalhes, sugerimos que consulte [10] ou [13].

Definição 25. Um *conjunto dirigido* I é um conjunto com uma ordem parcial $\prec$ tal que para qualquer par de elementos $\alpha, \beta \in I$ existe $\gamma \in I$ tal que $\alpha \prec \gamma$ e $\beta \prec \gamma$.

Exemplo 26. O conjunto $I = \mathbb{N}$ com a ordem usual é um conjunto dirigido. A coleção de todas as vizinhanças, $\mathcal{V}_x$, de um dado ponto x em um espaço topológico, é um conjunto dirigido munido com a ordem da inclusão reversa, *i. e.*, $U \prec V$ se, e somente se, $V \subset U$. A coleção de todas as vizinhanças básicas de x, denotada por $\mathcal{N}_x$, é um conjunto dirigido com a ordem da inclusão reversa.

Definição 27. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Uma *rede* em X é uma função f de um conjunto dirigido I em X. Se $\alpha \in I$, usualmente denotamos $f(\alpha)$ por x_α. Denotamos a rede f pelo símbolo $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$, ou apenas por (x_α).

Dizemos que a rede $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ *converge* para o ponto $x \in X$, denotando por $x_\alpha \longrightarrow x$, se para toda vizinhança U de x existe $\alpha \in I$ tal que se $\alpha \prec \beta$ então $x_\beta \in U$.

Se X é um espaço topológico de Hausdorff o limite de rede convergente é único. Os resultados a seguir serão utilizados com frequência.

Teorema 28. *Sejam X um espaço topológico e $B \subset X$. Então, $x \in \overline{B}$ se, e somente se, existe uma rede em B convergindo para x.*

Teorema 29. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$. Então, f é contínua se, e somente se, para toda rede (x_α) convergindo para x, $f(x_\alpha)$ converge para $f(x)$.*

Proposição 30. *Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos e $T : X \longrightarrow Y$ uma transformação linear. Então, T é contínua se, e somente se, T é contínua em 0.*

Demonstração. Seja $x \in X$ e suponha que (x_ν) seja uma rede em X tal que $x_\nu \longrightarrow x$. Então $x_\nu - x \longrightarrow 0$. Usando a hipótese de T ser contínua em 0, obtemos $T(x_\nu - x) \longrightarrow T(0) = 0$. Pela linearidade obtemos $T(x_\nu) \longrightarrow Tx$ em Y. Portanto, T é contínua em $x \in X$. ■

Teorema 31. *Seja T um funcional linear definido em um espaço vetorial topológico X tal que $T(x) \neq 0$ para algum $x \in X$. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

(i) *T é contínuo;*

(ii) Ker T *é fechado;*

(iii) *T é limitado em alguma vizinhança da origem.*

Demonstração. Como Ker $T = T^{-1}(0)$ e $\{0\}$ é fechado em $\mathbb{K}$, é claro que **(i)** implica **(ii)**. Mostraremos agora que **(ii)** implica **(iii)**. De fato, uma vez que Ker $T \neq X$, segue que $V := X \setminus$ Ker T é um aberto não vazio de X. Como existe $x \notin$ Ker T, então V é uma vizinhança de $x \in X$. Assim, $V - x$ é uma vizinhança da origem e usando a Proposição 23, segue que existe uma vizinhança balanceada W de 0 tal que $0 \in W \subset V - x$. Disso obtemos que $W + x \subset V$ e assim $(W + x) \cap$ Ker $T = \varnothing$. Como W é balanceado e T é linear, então $T(W)$ é um subconjunto balanceado de $\mathbb{K}$ e ainda $T(W)$ é limitado ou igual a $\mathbb{K}$, vide Exemplo 21. Se $T(W) = \mathbb{K}$, então existe $w \in W$ tal que $Tw = -Tx$ e isso implica que $T(w + x) = 0$, contradizendo o fato de $(W + x) \cap$ Ker $T = \varnothing$. Portanto, $T(W)$ deve ser limitado e concluímos o resultado.

Para finalizar, basta verificarmos que **(iii)** implica **(i)**. Seja V uma vizinhança de $0 \in X$ tal que $T(V)$ é um conjunto limitado, isto é, existe um $K > 0$ tal que $|T(v)| < K$ para todo $v \in V$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, vimos que $\frac{\varepsilon}{K}V$ é uma vizinhança de 0. Seja $y \in \frac{\varepsilon}{K}V$. Então $\frac{Ky}{\varepsilon} \in V$. Usando a hipótese, temos que $|T(Ky/\varepsilon)| < K$, ou equivalentemente, $|Ty| < \varepsilon$. Disso segue que T é contínua em 0, e então T é contínua em X, pela Proposição 30. ■

Teorema 32. *Todo espaço vetorial topológico de Hausdorff* $(X, \mathcal{T})$ *sobre o corpo* $\mathbb{K}$ *de dimensão* n *é linearmente homeomorfo a* $\mathbb{K}^n$.

Demonstração. Suponha que dim $X = n$ e $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é uma base para X. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base usual para $\mathbb{K}^n$ e seja $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow X$ a transformação linear definida por $\varphi(e_i) = x_i$. Desta forma,

$$\varphi((t_1, \ldots, t_n)) = \varphi(t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n) = t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n.$$

É claro que φ é um isomorfismo de $\mathbb{K}^n$ em X. Além disso, φ é contínua, pois a soma e o produto por escalar são contínuos em um espaço vetorial topológico. Para completar a primeira parte, precisamos mostrar que a transformação linear φ^{-1} é contínua. Seja

$$K := \{\psi \in \mathbb{K}^n : ||\psi|| = 1\}.$$

Como K é um compacto em $\mathbb{K}^n$ e φ é contínua, $\varphi(K)$ é compacto em X. Visto que X é de Hausdorff, segue que $\varphi(K)$ é fechado. Note que $0 \notin K$, de onde $0 = \varphi(0)$ não é um elemento em $\varphi(K)$. Em outras palavras, $X \setminus \varphi(K)$ é uma vizinhança de 0. Pela Proposição 23, existe uma vizinhança balanceada W de 0 tal que

$$W \subset X \setminus \varphi(K).$$

Em particular, $W \cap \varphi(K) = \varnothing$. Uma vez que φ^{-1} é linear, segue que $\varphi^{-1}(W)$ é um conjunto balanceado em $\mathbb{K}^n$ satisfazendo $\varphi^{-1}(W) \cap K = \varnothing$. Afirmamos que $||\varsigma|| < 1$ para todo $\varsigma \in \varphi^{-1}(W)$. De fato, se $\varsigma \in \varphi^{-1}(W)$ e $||\varsigma|| \geq 1$, então $\varsigma||\varsigma||^{-1} \in K$ e também pertence ao conjunto balanceado $\varphi^{-1}(W)$. Isso contradiz o fato de $\varphi^{-1}(W) \cap K = \varnothing$, donde concluímos que todo $\varsigma \in \varphi^{-1}(W)$ satisfaz $||\varsigma|| < 1$.

Para cada $1 \leq i \leq n$, seja $\pi_i : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ a aplicação projeção $\pi_i((t_1, \ldots, t_n)) = t_i$. Então, $\pi_i \circ \varphi^{-1} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear tal que $|\pi_i \circ \varphi^{-1}(x)| < 1$ para todo $x \in W$. Pelo Teorema 31, segue que $\pi_i \circ \varphi^{-1}$ é contínuo para cada $1 \leq i \leq n$ e assim $\varphi^{-1} : x \longrightarrow (\pi_1 \circ \varphi^{-1}, \ldots, \pi_n \circ \varphi^{-1})$ é contínua. Portanto, φ é um homeomorfismo linear.

∎

Proposição 33. *Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos. Se X é de Hausdorff com dimensão finita, então toda transformação linear $T : X \longrightarrow Y$ é contínua.*

Demonstração. Consideremos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base para X. Então, T é a composição das aplicações

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend left, "T"] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \longmapsto (t_1, \ldots, t_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} t_i T x_i$$

Como ψ é contínua pela demonstração do Teorema 32 e f é contínua porque a soma e o produto por escalar são contínuas em Y, concluímos que T é contínua. ∎

Proposição 34. *Se M é um subespaço vetorial do espaço vetorial topológico X, então $\overline{M}$ também é um subespaço vetorial de X. Em particular, qualquer subespaço vetorial maximal próprio é denso ou fechado em X.*

Demonstração. Sejam M um subespaço vetorial de X, $x, y \in \overline{M}$ e $t \in \mathbb{K}$. Mostraremos que $tx + y \in \overline{M}$. Com efeito, existem redes (x_ν) e (y_ν) em M indexadas nas vizinhanças básicas de 0 tais que $x_\nu \to x$ e $y_\nu \to y$. Assim $tx_\nu + y_\nu \to tx + y$. Usando o fato de M ser um subespaço vetorial, concluímos que $tx + y \in \overline{M}$.

Se M é um subespaço maximal próprio de X, como $M \subset \overline{M} \subset X$ e M é maximal, isso implica que $M = \overline{M}$ donde M é fechado, ou $\overline{M} = X$, isto é M é denso em X. ∎

Corolário 35. *Seja $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear sobre o espaço vetorial topológico X. Então, ou φ é contínuo ou* Ker *φ é um subespaço próprio denso em X.*

Demonstração. Se φ é a aplicação nula, então φ é contínua. Caso contrário, Ker φ é um subespaço maximal próprio de X. De fato, seja M um subespaço vetorial de X tal que Ker $\varphi \subset M$. Se $M \neq$ Ker φ, mostraremos que $M = X$. Como $M \neq$ Ker φ, existe $x \in M$ tal que $\varphi(x) = \beta \neq 0$. Considere $y \in X$ arbitrário. Se $\varphi(y) = 0$, segue que $y \in M$; caso contrário, $\varphi(y) = \alpha \neq 0$. Disso, existe um único $c \neq 0$ tal que $\alpha = c \cdot \beta$ e assim obtemos que $y - cx \in$ Ker $\varphi \subset M$. Defina, $z = y - cx$. Como $z, x \in M$ e M é um subespaço vetorial, segue que $y \in M$.

Como Ker φ é um subespaço vetorial próprio, aplicando a Proposição 34, obtemos que Ker φ é fechado ou denso em X. No entanto, pelo Teorema 31 φ é contínuo se, e somente se, Ker φ é fechado e isso conclui. ∎

Definição 36. Um F-*espaço* é um espaço vetorial topológico $(X, \mathcal{T})$ tal que a topologia $\mathcal{T}$ é induzida por uma métrica d completa e invariante.

Teorema 37. [Teorema da Aplicação Aberta] *Se T é uma transformação linear contínua de um F-espaço X sobre um F-espaço Y, então T é aberta.*

Ainda há vários resultados interessantes sobre espaços vetoriais topológicos, que serão omitidos aqui. Um estudo detalhado sobre espaços vetoriais topológicos pode ser encontrado em [12], [13].

CAPÍTULO 2

Interpolação e Aproximação Finita

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Utilizando o Teorema de Singer-Yamabe [4] podemos afirmar que dados $\varepsilon > 0$ e qualquer subconjunto finito S de $[a, b]$, existe um polinômio p tal que

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in [a, b] \text{ e}$$

$$f(x) = p(x) \text{ para todo } x \in S.$$

Mas se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e não decrescente, é possível aproximar e interpolar f por um polinômio não decrescente?

Esse problema pode ser resolvido através do teorema de interpolação e aproximação finita do artigo [8] que apresentaremos neste capítulo.

Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos de Hausdorff reais com $\dim Y$ finita, $A : X \longrightarrow Y$ linear e contínua, B e C subconjuntos de X tais que $B \subset C$ e $d \in Y$. Estudaremos as condições que garantem que $B \cap A^{-1}(d)$ é não vazio e denso em $C \cap A^{-1}(d)$. Veremos que tais condições são menos restritivas do que aquelas obtidas por Wong [14].

Consideraremos também o caso em que o domínio X de A é substituído por um subespaço vetorial S de dimensão finita.

2.1 Convexidade, Conjuntos Afins e Interior Relativo

Nesta seção, introduziremos notações e propriedades a cerca de convexidade, conjuntos afins e interiores relativos, que serão essenciais para desenvolver este capítulo. Nos pautamos em [1], [3], [4] e [15].

Inicialmente, fixaremos algumas notações. Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dados $x, y \in X$, o segmento de reta ligando x a y em X será denotado por $[x, y] = \{(1-t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\}$. De maneira análoga, denotaremos os segmentos de reta semi-abertos e abertos por $[x, y[= [x, y] - \{y\}$, $]x, y] = [x, y] - \{x\}$ e $]x, y[= [x, y] - \{x, y\}$, respectivamente.

Definição 38. Sejam X um espaço vetorial e $B \subset X$. Dizemos que B é um *conjunto convexo* se o segmento $[x, y]$ está contido em B para quaisquer x, y em B.

Usando indução podemos mostrar que o conjunto B é convexo se, e somente se, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in B$ sempre que $\alpha_i \geq 0$, $x_i \in B$, $i = 1, \ldots, n$ e $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, com $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 39. O vazio e o espaço vetorial X são exemplos triviais de conjuntos convexos. Se X for um espaço vetorial normado, a bola centrada em x de raio r, $B(x, r) = \{y \in X : ||y - x|| < r\}$, também é um conjunto convexo.

Definição 40. Um espaço vetorial topológico $(X, \mathcal{T})$ é dito ser *localmente convexo*, se X é um espaço topológico localmente convexo, *i.e.*, $\mathcal{T}$ admite uma base $\mathcal{B}$ formada por conjuntos convexos.

Proposição 41. *Sejam X um espaço vetorial topológico e B um subconjunto convexo de X. Então, $\overline{B}$ e $\operatorname{int}(B)$ são convexos.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que $\overline{B}$ é convexo. De fato, sejam $x \in \overline{tB}$ e $y \in \overline{(1-t)B}$, para $0 \leq t \leq 1$, e U uma vizinhança arbitrária da origem. Pela Proposição 23 existe uma vizinhança da origem V tal que $(x + V) + (y + V) \subset x + y + U$. Visto que $x \in \overline{tB}$ e $y \in \overline{(1-t)B}$, existem $a \in tB \cap (x + V)$ e $b \in (1-t)B \cap (y + V)$. Desse modo, $a + b \in x + y + U$ e então $x + y \in \overline{tB + (1-t)B}$. Como M_t é um homeomorfismo, pela Proposição 16, valem as igualdades $\overline{tB} = t\overline{B}$ e $\overline{(1-t)B} = (1-t)\overline{B}$. Portanto, pela convexidade de B temos que $t\overline{B} + (1-t)\overline{B} \subset \overline{tB + (1-t)B} \subset \overline{B}$ e isso conclui a primeira parte. Agora, note que $t\text{int}(B) + (1-t)\text{int}(B) \subset B$ para $0 \leq t \leq 1$, pois o conjunto B é convexo. Pela Proposição 16 temos que $t\text{int}(B) + (1-t)\text{int}(B)$ é um aberto em X, logo $t\text{int}(B) + (1-t)\text{int}(B) \subset \text{int}(B)$ para $0 \leq t \leq 1$, ou seja, $\text{int}(B)$ é convexo. ∎

Proposição 42. *Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos. Se $T : X \longrightarrow Y$ é uma transformação linear e $B \subset X$ é convexo, então $T(B)$ é convexo.*

Demonstração. Sejam $x, y \in T(B)$. Então existem $x', y' \in B$ tais que $T(x') = x$ e $T(y') = y$. Como B é convexo, para $0 \leq t \leq 1$, temos que $tx' + (1-t)y' \in B$. Pela linearidade de T segue que $tx + (1-t)y = tT(x') + (1-t)T(y') = T(tx' + (1-t)y') \in T(B)$. ∎

Proposição 43. *Seja B um subconjunto convexo de um espaço vetorial topológico X. Se B for um conjunto sólido, isto é, com $\text{int}(B) \neq \varnothing$, então:*

(i) $t\overline{B} + (1-t)\text{int}(B) \subset \text{int}(B)$ *para* $0 \leq t < 1$.

(ii) $\overline{B} = \overline{\text{int}(B)}$ *(Em particular,* $\text{int}(B)$ *é denso em* B*).*

Demonstração. **(i)** Observe que basta mostrar que $t\overline{B} + (1-t)\text{int}(B) \subset B$, pois $t\overline{B} + (1-t)\text{int}(B)$ é aberto pela Proposição 16. Seja $p \in \text{int}(B)$; então $(1-t)(\text{int}B - p)$ é uma vizinhança de $0 \in X$. Como M_t é um homeomorfismo, pela Proposição 16, vale a igualdade $t\overline{B} = \overline{tB}$. Afirmamos que $\overline{tB} \subset tB + (1-t)(\text{int}B - p)$. De fato, sejam $y \in \overline{tB}$ e a vizinhança $V_y = y - (1-t)(\text{int}B - p)$ de y. Como $y \in \overline{tB}$, temos que $tB \cap V_y \neq \varnothing$, isto é, existe $z = y - (1-t)(a_0 - p) = ta_1$, com $a_0 \in \text{int}(B)$ e $a_1 \in B$. Desta forma, $y = ta_1 + (1-t)(a_0 - p) \in tB + (1-t)(\text{int}B - p)$. Para finalizar, usamos a convexidade de B e a afirmação anterior. Portanto, $t\overline{B} = \overline{tB} \subset tB + (1-t)(\text{int}B - p) = tB + (1-t)\text{int}B - (1-t)p \subset B - (1-t)p$, e como p é arbitrário em $\text{int}(B)$ resulta em $t\overline{B} + (1-t)\text{int}(B) \subset B$.

(ii) É fácil ver que $\overline{\text{int}B} \subset \overline{B}$. Seja $x \in \overline{B}$ e $p \in \text{int}(B)$. Logo o segmento de reta $[p, x) \subset \text{int}(B)$ pelo item anterior, e isso implica que $x \in \overline{\text{int}(B)}$. ∎

Definição 44. A *envoltória convexa* de B, denotada por co (B), é a interseção de todos os conjuntos convexos que contém B. Ou equivalentemente,

$$\text{co }(B) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : x_i \in B, \alpha_i \geq 0, i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Observe que co (B) é um conjunto convexo e se B for convexo, co $(B) = B$. A envoltória convexa de B é o menor conjunto convexo que contém B.

Definição 45. Sejam X um espaço vetorial e $B \subset X$. Dizemos que B é um *conjunto afim* se, dados $x, y \in B$, a reta passando por x e y está inteiramente contida em B, isto é, se $x, y \in B$, então $tx + (1-t)y \in B$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Usando indução podemos mostrar que o conjunto B é afim se, e somente se, $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in B$ sempre que $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in B$, $i = 1, \ldots, n$, e $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, com $n \in \mathbb{N}$.

É fácil verificar que um conjunto B é afim se, e somente se, existe um $b \in X$ e um subespaço vetorial X_0 tal que $B = X_0 + b$, ou seja, um conjunto afim é uma translação de um subespaço vetorial.

Exemplo 46. O vazio e o espaço vetorial X são exemplos triviais de conjuntos afins. Uma reta em $\mathbb{R}^2$ e um plano em $\mathbb{R}^3$ são conjuntos afins. Em $\mathbb{R}$ os conjuntos afins são os conjuntos unitários e o próprio $\mathbb{R}$.

Definição 47. Seja X um espaço vetorial. A *envoltória afim* de um subconjunto B de X, denotado por $\text{Aff}(B)$, é a interseção de todos os conjuntos afins que contém B. Ou equivalentemente,

$$\text{Aff}(B) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i : x_i \in B, \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Observe que a envoltória afim é o menor conjunto afim que contém B. Note ainda que se B é um conjunto afim, vale a igualdade $\text{Aff}(B) = B$ e $B - b$ é subespaço vetorial de X para todo $b \in B$.

Proposição 48. *Seja B um subconjunto não vazio de um espaço vetorial X.*

(i) $\text{Aff}(B) + y = \text{Aff}(B + y)$ *para todo* $y \in X$.

(ii) *Se* $0 \in B$, *então* $\text{Aff}(B) = \text{span}(B)$.

Demonstração. Seja $y \in X$. Se $x \in \text{Aff}(B) + y$, então $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i + y$ com $b_i \in B$ e $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Assim $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i (b_i + y) \in \text{Aff}(B + y)$. Isso prova que $\text{Aff}(B) + y \subset \text{Aff}(B + y)$. Como B e y são arbitrários segue que $\text{Aff}(B + y) - y \subset$

$\text{Aff}(B + y - y) = \text{Aff}(B)$ e assim obtemos que $\text{Aff}(B + y) \subset \text{Aff}(B) + y$ e isso conclui o item **(i)**.

Que $\text{Aff}(B) \subset \text{span}(B)$ é trivial. Seja $x \in \text{span}(B)$, por definição $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i$ com $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $b_i \in B$ para $i = 1, \ldots, m$. Como por hipótese $0 \in B$, obtemos que $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i + (1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i)0 \in \text{Aff}(B)$. ∎

Proposição 49. *Se* $B \subset \mathbb{R}^n$*, então* $\text{Aff}(\overline{B}) = \text{Aff}(B)$.

Demonstração. É fácil ver que $\text{Aff}(B) \subset \text{Aff}(\overline{B})$, pois $\overline{B} \supset B$. Por outro lado,

$$\text{Aff}(\overline{B}) \subset \text{Aff}(\overline{\text{Aff}(B)}) = \text{Aff}(\text{Aff}(B)) = \text{Aff}(B).$$

O conjunto $\text{Aff}(B)$ é fechado pois é a translação de um subespaço vetorial do espaço vetorial topológico $\mathbb{R}^n$. Assim, $\text{Aff}(\overline{B}) \subset \text{Aff}(B)$. ∎

Definição 50. Seja M um subconjunto de um espaço vetorial topológico X. O *interior relativo* de M, ri (M), é o interior de M relativo ao conjunto $\overline{\text{Aff}(M)}$ visto com a topologia induzida. Mais precisamente,

$$\text{ri } (M) = \{x \in M : V \cap \overline{\text{Aff}(M)} \subset M \quad \text{para alguma vizinhança } V \text{ de } x\}.$$

Note que ri (M) é por definição um conjunto aberto em $\overline{\text{Aff}(M)}$. Observe também que o interior topológico $\text{int}(M)$ é um subconjunto de ri (M).

Observação 51. Os conjuntos afins são translações de subespaços vetoriais. Se considerarmos X um espaço vetorial topológico de dimensão finita, na definição de interior relativo obtemos que ri $(M) = \{x \in M : V \cap \text{Aff}(M) \subset M \quad \text{para alguma vizinhança } V \text{ de } x\}$, pois $\text{Aff}(M) = \overline{\text{Aff}(M)}$ uma vez que os subespaços vetoriais de um espaço de dimensão finita são fechados.

O conceito de interior relativo de um conjunto M será bastante utilizado neste capítulo e tendo em vista que faremos uso desta definição somente em espaços vetoriais de dimensão finita, é suficiente nos restringirmos no que se segue ao $\mathbb{R}^n$.

Proposição 52. *Sejam* $M_1 \subset M_2$ *subconjuntos do* $\mathbb{R}^n$ *tais que* $\text{Aff}(M_1) = \text{Aff}(M_2)$. *Então* $\text{ri}\ (M_1) \subset \text{ri}\ (M_2)$.

Demonstração. Defina $A = \text{Aff}(M_1) = \text{Aff}(M_2)$. Se $x \in \text{ri}\ (M_1)$, temos que existe uma vizinhança V de x tal que $V \cap A \subset M_1 \subset M_2$, de onde segue que $x \in \text{ri}\ (M_2)$. ∎

A Proposição 52 não é válida se retirarmos a hipótese $\text{Aff}(M_1) = \text{Aff}(M_2)$. De fato, seja D um cubo no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Considere M_1 como sendo uma aresta de D e M_2 como a face de D que contém M_1. Então os interiores relativos $\text{ri}\ (M_1)$ e $\text{ri}\ (M_2)$ são não vazios e disjuntos. O conjunto $\text{Aff}(M_1)$ é a reta contendo M_1, enquanto o $\text{Aff}(M_2)$ é o plano contendo M_2.

Teorema 53. *Seja* B *um subconjunto convexo e não vazio do* $\mathbb{R}^m$. *Então valem:*

(i) [Princípio do Segmento de Reta] *Se* $x \in \text{ri}\ (B)$ *e* $y \in \overline{B}$ *então o segmento de reta* $]x, y[$ *está inteiramente contido em* $\text{ri}\ (B)$*;*

(ii) $\text{ri}\ (B) \neq \varnothing$*;*

(iii) [Princípio do Prolongamento] $x \in \text{ri}\ (B)$ *se, e somente se, todo segmento de reta em* B *tendo* x *como ponto final pode ser prolongado para além de* x *sem sair de* B*, i.e., para todo* $y \in B$*, existe* $t > 1$ *tal que* $x + (t-1)(x-y) = tx + (1-t)y \in B$.

Demonstração. Vamos inicialmente verificar o item **(i)**. Seja $z = \lambda x + \mu y$ com $\lambda, \mu > 0$ e $\lambda + \mu = 1$. Primeiramente verificaremos que existem $x' \in \text{ri}\ (B)$ e $y' \in B$ tal que $z = \lambda x' + \mu y'$. Em outras palavras, mostraremos que é suficiente provar o resultado sobre a hipótese mais forte de $y \in B$. Para isso, seja $U \subset B$ uma vizinhança de x em $\text{Aff}(B)$. Então, $V := \frac{1}{\mu}(z - \lambda U)$ é uma vizinhança de $y = \frac{1}{\mu}(z - \lambda x)$ em $\text{Aff}(B)$. Como $y \in \overline{B}$ então existe $y' \in B \cap V$. Defina $x' := \frac{1}{\lambda}(z - \mu y')$. Então, x' pertence a U e logo $x' \in \text{ri}\ (B)$. Como $z = \lambda x' + \mu z'$, isso prova a primeira parte. Vamos agora assumir que $y \in B$ e que λ, z e U são como antes. Então, $W := \lambda U + \mu y \subset B$, pois B é convexo e, além disso, W é uma vizinhança de z em $\text{Aff}(B)$. Isso mostra que $z \in \text{ri}\ (B)$.

Verifiquemos agora o item **(ii)**. Fixe $x_0 \in B$. Então, $\text{Aff}(B) = M + x_0$ para algum subespaço M de dimensão digamos n, $n \geq 0$. Se $n = 0$, então $M = \{0\}$ e

$\text{Aff}(B) = \{x_0\} = B$ implicando que ri $(B) = B$. Vamos assumir agora que $n \geq 1$. Desta forma, pela Proposição 48

$$M = \text{Aff}(B) - x_0 = \text{Aff}(B - x_0) = \text{span}(B - x_0).$$

Como M tem dimensão n, existem n vetores $x_1, \ldots, x_n \in B$ tal que o conjunto $\{x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0\}$ é uma base para M. Fixemos $z = \frac{1}{n+1}(x_0 + \cdots + x_n)$. Mostraremos que $z \in$ ri (B).

Primeiramente note que

$$z = \frac{1}{n+1}(x_1 - x_0) + \frac{1}{n+1}(x_2 - x_0) + \cdots + \frac{1}{n+1}(x_n - x_0) + x_0.$$

Visto que $\text{Aff}(B) = M + x_0$ e $\{x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0\}$ é uma base para M, temos que para todo $y \in \text{Aff}(B)$,

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - x_0) + x_0 \tag{2.1}$$

para escalares α_i unicamente determinados. Também,

$$||y - z|| = ||(y - x_0) - (z - x_0)|| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i - \frac{1}{n+1} \right) (x_i - x_0) \right\|.$$

Considere a norma $|| \cdot ||_1$ em $\mathbb{R}^m$ tal que para todo $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_0) \in M$, $||w||_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$.

Como todas as normas em $\mathbb{R}^m$ são equivalentes, existe uma constante $k > 0$ tal que

$$\left| \alpha_i - \frac{1}{n+1} \right| < \sum_{i=1}^{n} \left| \alpha_i - \frac{1}{n+1} \right| = ||y - z||_1 \leq k||y - z||, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Tome $\varepsilon = \frac{1}{k(n+1)^2}$. Se $y \in B(z, \varepsilon) \cap \text{Aff}(B)$, então

$$\left| \alpha_i - \frac{1}{n+1} \right| \leq k||y - z|| < \frac{k}{k(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2}, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Em particular, (2.2) implica que $\alpha_i > 0$ para todo i e

$$0 < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\left| \alpha_i - \frac{1}{n+1} \right| + \frac{1}{n+1} \right) < \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{n+1} = \frac{n + n(n+1)}{(n+1)^2} < \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Mas então (2.1) implica que

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - x_0) + x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) x_0$$

é uma combinação convexa de $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e assim $y \in B$, pois B é um conjunto convexo. Portanto, $B(z, \varepsilon) \cap \mathrm{Aff}(B) \subset B$, que é equivalente a dizer que $z \in \mathrm{ri}\ (B)$.

Vamos agora verificar o item **(iii)**. Se $x \in \mathrm{ri}\ (B)$, pela definição de interior relativo a condição vale. Suponha que $x \in \mathbb{R}^n$ satisfaz a condição dada em **(iii)**. Queremos mostrar que $x \in \mathrm{ri}\ (B)$. Pelo item **(ii)** deste teorema, garantimos a existência de $x' \in \mathrm{ri}\ (B)$. Se $x = x'$, não há nada para se provar. Vamos assumir que $x \neq x'$. Como $x' \in \mathrm{ri}\ (B) \subset B$, por hipótese, existe $\gamma > 1$ tal que $y = x + (\gamma - 1)(x - x') \in B$. Mas isso é equivalente a $x = \lambda y + (1 - \lambda)x'$, onde $\lambda = 1/\gamma$. Como $x' \in \mathrm{ri}\ (B)$ e $y \in B$, pelo Princípio do segmento de reta segue que $x \in \mathrm{ri}\ (B)$. ∎

Corolário 54. *Se B é um subconjunto não vazio e convexo do $\mathbb{R}^n$, então* $\mathrm{ri}\ (B)$ *é um conjunto convexo.*

Demonstração. Como $\mathrm{ri}\ (B) \subset B$, dados $x, y \in \mathrm{ri}\ (B)$, segue do Princípio do Segmento de Reta que $]x, y[$ está contido em $\mathrm{ri}\ (B)$ e isso garante sua convexidade. ∎

Corolário 55. *Se B é um subconjunto convexo não vazio de um espaço de dimensão finita, então valem as igualdades:*

$$\overline{\mathrm{ri}\ (B)} = \overline{B} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{ri}\ (\overline{B}) = \mathrm{ri}\ (B).$$

Demonstração. Note que $\mathrm{ri}\ (B) \subset B$ e disso segue que $\overline{\mathrm{ri}\ (B)} \subset \overline{B}$. Por outro lado, seja $y \in \overline{B}$ e $x \in \mathrm{ri}\ (B)$. Pelo Princípio do Segmento de Reta segue que o segmento $]x, y[$ está contido em $\mathrm{ri}\ (B)$ e assim $y \in \overline{\mathrm{ri}\ (B)}$. Portanto, $\overline{\mathrm{ri}\ (B)} = \overline{B}$.

Para a outra igualdade, note que B e $\overline{B}$ têm a mesma envoltória afim pela Proposição 49, e aplicando a Proposição 52, segue que $\mathrm{ri}\ (B) \subset \mathrm{ri}\ (\overline{B})$. Por outro lado, suponha que $x \in \mathrm{ri}\ (\overline{B})$. Visto que B é não vazio, segue do Teorema 53 que existe $x' \in \mathrm{ri}\ B \subset \overline{B}$. Se $x = x'$ não temos o que fazer. Se $x \neq x'$, podemos encontrar $\gamma > 1$ suficientemente próximo de 1 tal que, aplicando o Princípio do Prolongamento, $y = x + (\gamma - 1)(x - x') \in \overline{B}$.

Fixe $\lambda = 1/\gamma$. Pelo Princípio do Segmento de Reta segue que $x = (1-\lambda)x' + \lambda y \in \text{ri } (B)$.

$\blacksquare$

Corolário 56. *Se B_1 e B_2 são subconjuntos convexos não vazios do $\mathbb{R}^n$, então* $\text{ri } (B_1) \cap \text{ri } (B_2) \subset \text{ri } (B_1 \cap B_2)$. *Em particular, se* $\text{ri } (B_1) \cap \text{ri } (B_2) \neq \varnothing$, *temos que* $\overline{B_1 \cap B_2} = \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$ *e* $\text{ri } (B_1) \cap \text{ri } (B_2) = \text{ri } (B_1 \cap B_2)$.

Demonstração. Suponha que $x \in \text{ri } (B_1) \cap \text{ri } (B_2)$ e seja $y \in B_1 \cap B_2$. Pelo Princípio do Prolongamento, existem $\gamma_i > 1$, $i = 1, 2$ tais que $x+(\gamma_1-1)(x-y) \in B_1$ e $x+(\gamma_2-1)(x-y) \in B_2$. Escolhendo $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$, a condição acima se reduz a $x+(\gamma-1)(x-y) \in B_1 \cap B_2$ e aplicando novamente o Princípio do Prolongamento, resulta que $x \in \text{ri } (B_1 \cap B_2)$.

Agora, suponhamos que $\text{ri } (B_1) \cap \text{ri } (B_2) \neq \varnothing$. Sejam $x \in \text{ri } (B_1) \cap \text{ri } (B_2)$ e $y \in \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$. Pelo Princípio do Segmento de Reta, segue que para todo $\lambda \in [0, 1)$, temos que $(1-\lambda)x + \lambda y \in \text{ri } (B_1) \cap \text{ri } (B_2)$. Note que a sequência $\{(1-\lambda_k)x + \lambda_k y\}$ está contida em $\text{ri } (B_1) \cap \text{ri } (B_2)$ se $0 \leq \lambda_k < 1$. Se $\lambda_k \longrightarrow 1$, então $(1-\lambda_k)x + \lambda_k y \to y$ e disso segue que $y \in \overline{\text{ri } (B_1) \cap \text{ri } (B_2)}$. Com isso temos que $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \subset \overline{\text{ri } (B_1) \cap \text{ri } (B_2)} \subset \overline{B_1 \cap B_2}$. Por outro lado, é trivial que $\overline{B_1 \cap B_2} \subset \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$. Portanto, concluímos que $\overline{B_1 \cap B_2} = \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$.

Para finalizar, se $\text{ri } (B_1) \cap \text{ri } (B_2) \neq \varnothing$ como consequência dos argumentos precedentes temos que $\overline{\text{ri } (B_1) \cap \text{ri } (B_2)} = \overline{B_1 \cap B_2}$. Isso juntamente com o Corolário 55 resulta em $\text{ri } (\text{ri } (B_1) \cap \text{ri } (B_2)) = \text{ri } (\overline{\text{ri } (B_1) \cap \text{ri } (B_2)}) = \text{ri } (\overline{B_1 \cap B_2}) = \text{ri } (B_1 \cap B_2)$. Portanto, $\text{ri } (B_1 \cap B_2) = \text{ri } (\text{ri } (B_1) \cap \text{ri } (B_2)) \subset \text{ri } (B_1) \cap \text{ri } (B_2)$. $\blacksquare$

Uma aplicação imediata deste corolário consiste em consideramos B_2 como sendo um conjunto afim. Note que os conjuntos afins, em espaços vetoriais com dimensão finita, são fechados pois são translações de um subespaço vetorial. Desta forma, $\text{ri } (B_2) = B_2 = \overline{B_2}$ e resulta que $\text{ri } (B_1) \cap B_2 = \text{ri } (B_1 \cap B_2)$.

Vale ressaltar que em geral não vale a igualdade $\overline{B_1 \cap B_2} = \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$. Considere $B_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ e $B_2 = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$. Então $\overline{B_1 \cap B_2} = \varnothing$, enquanto $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} = \{0\}$.

Corolário 57. *Sejam $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação linear e B um subconjunto convexo não vazio do $\mathbb{R}^n$. Então,* $T(\text{ri } (B)) = \text{ri } (T(B))$.

Demonstração. Antes de provarmos o resultado, iremos verificar uma igualdade que será utilizada. Note que $\text{ri } (B) \subset B$. Aplicando a transformação T e tomando o fecho, obtemos

$\overline{T(\text{ri }(B))} \subset \overline{T(B)}$. Usando o fato de que $B \subset \overline{B}$, o Corolário 55 e a continuidade de T, garantida pela Proposição 33, obtemos $T(B) \subset T(\overline{B}) = T(\overline{\text{ri }(B)}) \subset \overline{T(\text{ri }(B))}$. Disso segue que $\overline{T(B)} \subset \overline{T(\text{ri }(B))}$. Logo, $\overline{T(B)} = \overline{T(\text{ri }(B))}$.

Usando o fato de B ser convexo e T ser linear, segue da Proposição 42 que $T(B)$ é convexo e aplicando o Corolário 55, obtemos que ri $(T(B)) = \text{ri }(\overline{T(B)}) = \text{ri }(\overline{T(\text{ri }(B))}) =$ ri $(T(\text{ri }(B))) \subset T(\text{ri }(B))$. Isso prova um lado da igualdade.

Para mostrarmos que $T(\text{ri }(B)) \subset \text{ri }(T(B))$, suponha que $x' \in T(\text{ri }(B))$. Então existe $x \in \text{ri }(B)$ tal que $x' = T(x)$. Considere qualquer $y' \in T(B)$ e $y \in B$ tal que $T(y) = y'$. Pelo Princípio do Prolongamento, existe $\gamma > 1$ tal que $\gamma x + (1-\gamma)y \in B$. Como T é linear isso implica que $\gamma x' + (1-\gamma)y' \in T(B)$. Uma vez que $y' \in T(B)$ é arbitrário, aplicando novamente o Princípio do Prolongamento, segue que $x' \in \text{ri }(T(B))$. ∎

Algumas consequências diretas do Corolário 57 são que ri $(\alpha B) = \alpha\text{ri }(B)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e ri $(B_1 + B_2) = \text{ri }(B_1) + \text{ri }(B_2)$. Basta considerar as transformações lineares $x \mapsto \alpha x$ e $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

2.2 Aproximação e Interpolação Finita

Sejam X um espaço vetorial topológico de Hausdorff real e Y um espaço vetorial topológico real de dimensão finita, identificado com $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, munido com a topologia usual. Consideraremos $A : X \longrightarrow Y$ uma transformação linear e contínua, $C \subset X$ e $B \subset C$. Diremos que B é denso em C se $B \subset C \subset \overline{B}$ sendo $\overline{B}$ o fecho topológico de B.

Nesta seção, apresentaremos condições que garantem que elementos f em C podem ser interpolados e aproximados simultaneamente por elementos de B, desde que B seja convexo e denso em C.

Uma aplicação deste resultado é a interpolação e aproximação simultâneas de funções contínuas monótonas por polinômios monótonos num intervalo compacto.

Nos baseamos no artigo [8] de Mulansky e Neamtu.

O próximo teorema pode ser interpretado como um resultado de interpolação. Dado $d \in \text{ri }(A[C])$, existe $x \in B$ tal que $Ax = d$.

Teorema 58. [Mulansky-Neamtu] *Sejam X um EVT de Hausdorff real e $A : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear contínua. Se B é um subconjunto não vazio convexo e denso em $C \subset X$, então* $\mathrm{ri}\ (A[C]) = \mathrm{ri}\ (A[B]) \neq \varnothing$.

Demonstração. Aplicando a Proposição 9 com a transformação linear contínua $A : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e os subconjuntos B e C, obtemos

$$\overline{A[B]} = \overline{A[\overline{B}]} \qquad \text{e} \qquad \overline{A[C]} = \overline{A[\overline{C}]}.$$

Como por hipótese $\overline{C} = \overline{B}$, resulta que $\overline{A[B]} = \overline{A[C]}$. Usando a Proposição 49, temos

$$\mathrm{Aff}(A[C]) = \mathrm{Aff}(\overline{A[C]}) = \mathrm{Aff}(\overline{A[\overline{C}]}) = \mathrm{Aff}(\overline{A[\overline{B}]}) = \mathrm{Aff}(\overline{A[B]}) = \mathrm{Aff}(A[B])$$

e visto que $A[B] \subset A[C] \subset \overline{A[C]} = \overline{A[B]}$, aplicando a Proposição 52 duas vezes resulta que

$$\mathrm{ri}\ (A[B]) \subset \mathrm{ri}\ (A[C]) \subset \mathrm{ri}\ (\overline{A[B]}).$$

Além disso, $A[B]$ é convexo pela Proposição 42, e pelo Corolário 55 obtemos $\mathrm{ri}\ (A[B]) = \mathrm{ri}\ (\overline{A[B]})$. Com isso, concluímos a igualdade. Que $\mathrm{ri}\ (A[B]) \neq \varnothing$ segue do fato de $A[B]$ ser um convexo não vazio do $\mathbb{R}^n$ juntamente com o Teorema 53. ∎

Observação 59. O Teorema 58 não é válido se substituirmos o contradomínio da aplicação A por um espaço vetorial topológico Y com $\dim Y = \infty$. Por exemplo, considere $X = Y = C[a, b]$ o espaço das funções reais contínuas em $[a, b]$, munido da norma do supremo e seja $A = I : X \longrightarrow Y$ o operador identidade. Tomando $C = X$ e $B = P[a, b]$ o espaço dos polinômios reais definidos em $[a, b]$ temos que B é convexo e denso em C, mas $\mathrm{ri}\ (I[B]) \neq \mathrm{ri}\ (I[C])$ pois $\mathrm{ri}\ (I[C]) = \mathrm{ri}\ (I[X]) = \mathrm{ri}\ (X) = X$ enquanto $\mathrm{ri}\ (I[B]) = \mathrm{ri}\ (B) = \mathrm{int}(B) = \varnothing$.

Lema 60. *Seja φ um funcional linear contínuo em um EVT de Hausdorff real X e seja B um subconjunto convexo não vazio e denso em $C \subset X$. Suponha que $r \in \mathrm{ri}\ (\varphi[C])$. Então, $B \cap \varphi^{-1}(r)$ é denso em $C \cap \varphi^{-1}(r)$.*

Demonstração. Note que se $\varphi = 0$, o resultado é trivial. Se $\varphi \neq 0$, então φ é sobrejetora, pois, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, existe $u \in X$ tal que $\varphi(u) \neq 0$ e então $\varphi(\frac{\lambda u}{\varphi(u)}) = \lambda$.

Se ri $(\varphi[C]) = \{r\}$, então $\varphi[C] = \{r\}$. De fato, usando a Proposição 9, o Corolário 55 e o Teorema 58, temos que $\varphi[C] \subset \overline{\varphi[C]} = \overline{\varphi[B]} = \overline{\text{ri }(\varphi[B])} = \overline{\text{ri }(\varphi[C])} = \{r\}$. Neste caso, $C \subset H := \varphi^{-1}(r)$ e o resultado é válido trivialmente. Caso contrário, se $\varphi[C] \neq \{r\}$, então ri $\varphi[C] = \text{int}\varphi[C]$. Com efeito, segue da definição que $\text{int}(\varphi[C]) \subset \text{ri }(\varphi[C])$. Por outro lado, se $y \in \text{ri }(\varphi[C])$, então existe $\delta > 0$ tal que $B(y, \delta) \cap \text{Aff}(\varphi[C]) \subset \varphi[C] \subset \mathbb{R}$. Temos duas possibilidade para $\text{Aff}(\varphi[C])$, a saber, ou ele é igual a $\mathbb{R}$ ou é igual a um conjunto unitário, digamos $\{p\}$ com $p \in \mathbb{R}$. Se $\text{Aff}(\varphi[C]) = \mathbb{R}$, o resultado segue. Se $\text{Aff}(\varphi[C]) = \{p\}$, como $\varphi[C] \neq \{r\}$, então existe $s \in \varphi[C]$, $s \neq r$ tal que $\{r, s\} \subset \varphi[C]$, mas isso implica que $\{r, s\} \subset \varphi[C] \subset \text{Aff}[\varphi[C]] = \{p\}$, o que é um absurdo, e com isso concluímos a igualdade.

Para mostrarmos que $B \cap H$ é denso em $C \cap H$, é suficiente provar que para toda vizinhança U de $0 \in X$ e para todo $x \in C \cap H$ temos que $(x + U) \cap B \cap H \neq \varnothing$. Pela Proposição 23, existe uma vizinhança balanceada e absorvente V da origem tal que $V + V \subset U$. Considere $x^+ \in (x + V) \cap \overline{C} \cap H^+$, onde $H^+ := \varphi^{-1}[(r, \infty)]$ é um aberto pela continuidade de φ. Tal x^+ existe porque $r \in \text{int}(\varphi[C])$, V é absorvente e $\varphi \neq 0$. De fato, existe $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo $(r - \varepsilon, r + \varepsilon) \subset \varphi[C]$, e existe $u \in X$ tal que $\varphi(u) > 0$. Como V é absorvente, existe $\theta_u > 0$ tal que $su \in V$ para todo $|s| < \theta_u$. Defina $\mu := \min\{\frac{\varepsilon}{2\varphi(u)}, \frac{\theta_u}{2}\}$. Então podemos considerar, por exemplo, $x^+ = x + \mu u$. Que $x^+ \in (x+V) \cap H^+$ é trivial. E $x^+ \in \overline{C}$, pois $r < \varphi(x^+) = r + \mu\varphi(u) < r + \varepsilon$. Similarmente, existe $x^- \in (x + V) \cap \overline{C} \cap H^-$, onde $H^- := \varphi^{-1}[(-\infty, r)]$. Note que $(x + V) \cap H^+$ e $(x + V) \cap H^-$ são vizinhanças de x^+ e x^-, respectivamente. Usando a densidade de B em C, garantimos a existência de elementos b^+ e b^-, tais que, $b^+ \in (x + V) \cap B \cap H^+$ e $b^- \in (x + V) \cap B \cap H^-$.

Visto que $\varphi(b^-) < r < \varphi(b^+)$, pelo Teorema do Valor Intermediário existe $t \in (0, 1)$ tal que $b = tb^- + (1 - t)b^+ = x + t(b^- - x) + (1 - t)(b^+ - x)$ e $\varphi(b) = r$. Como B é convexo, V é uma vizinhança balanceada e $\varphi(b) = r$, obtemos $b \in (x + V + V) \cap B \cap H$. Portanto, $(x + U) \cap B \cap H \neq \varnothing$ e isso conclui o lema. ∎

O próximo teorema é o principal resultado deste capítulo. Ele pode ser visto como uma generalização do *Teorema de Singer-Yamabe* [4], que apresenta condições suficientes para aproximação e interpolação simultâneas.

Teorema 61. [Mulansky-Neamtu] *Sejam X um EVT de Hausdorff real e $A : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, contínua e sobrejetora. Se B é um subconjunto não vazio, convexo e denso em $C \subset X$ e $d \in \text{ri}\,(A[C])$, então $B \cap A^{-1}(d)$ é denso em $C \cap A^{-1}(d)$.*

Demonstração. Faremos a prova por indução em n, a dimensão da imagem da transformação A. Para $n = 1$ o resultado segue do Lema 60 considerando $d = r$. Suponhamos que o teorema é valido para $\mathbb{R}^n$. Considere $E : X \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear dada por $Ex = (r_1, \ldots, r_n)$ e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ um funcional dado por $\varphi(x) = r_{n+1}$, onde $Ax = (r_1, \ldots, r_n, r_{n+1})$, $x \in X$. Como, por hipótese, A é contínua, segue que E e φ também são contínuas.

Seja $d = (d_1, \ldots, d_n, d_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $d \in \text{ri}\,(A[C])$. Então $(d_1, \ldots, d_n) \in \text{ri}\,(E[C])$ e $d_{n+1} \in \text{ri}\,(\varphi[C \cap E^{-1}(d_1, \ldots, d_n)])$. De fato, primeiro verificaremos que $(d_1, \ldots, d_n) \in \text{ri}\,(E[C])$. Seja $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a transformação linear definida por $\psi(r_1, \ldots, r_n, r_{n+1}) = (r_1, \ldots, r_n)$. Note que $\psi(A[B]) = E[B]$. Usando o Teorema 58 e o Corolário 57, temos que $\text{ri}\,(E[C]) = \text{ri}\,(E[B]) = \text{ri}\,(\psi[A[B]]) = \psi[\text{ri}\,(A[B])] = \psi[\text{ri}\,(A[C])]$. Assim, $(d_1, \ldots, d_n) = \psi(d) \in \text{ri}\,(E[C])$. Vamos agora verificar que $d_{n+1} \in \text{ri}\,(\varphi[C \cap E^{-1}(d_1, \ldots, d_n)])$. Com efeito, fixe $F = \{(d_1, \ldots, d_n)\} \times \mathbb{R}$ e note que F é um conjunto afim. Usando o Corolário 56 e a Proposição 9, obtemos que $A[B] \cap F$ é denso em $A[C] \cap F$. Considere $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $\phi((x_1, \ldots, x_{n+1})) = x_{n+1}$. Então $\varphi = \phi \circ A$ e com isso obtemos a igualdade $\varphi[C \cap E^{-1}(d_1, \ldots, d_n)] = \phi[A[C \cap A^{-1}[(d_1, \ldots, d_n) \times \mathbb{R}]]] = \phi[A[C] \cap F]$. Pelo Teorema 58, segue que $d \in \text{ri}\,(A[B])$, e assim $d \in \text{ri}\,(A[B]) \cap F$. Logo, segue do Corolário 56 que $d \in \text{ri}\,(A[B] \cap F)$. Utilizando as igualdades anteriores, juntamente com o Corolário 57 e o Teorema 58, para a função ϕ e os conjuntos $A[B] \cap F$, $A[C] \cap F$, resulta que $d_{n+1} \in \phi[\text{ri}\,(A[B] \cap F)] = \text{ri}\,(\phi[A[B] \cap F]) = \text{ri}\,(\phi[A[C] \cap F]) = \text{ri}\,(\varphi[C \cap E^{-1}(d_1, \ldots, d_n)])$.

Pela hipótese de indução, $B \cap E^{-1}(d_1, \ldots, d_n)$ é denso em $C \cap E^{-1}(d_1, \ldots, d_n)$. Aplicando o Lema 60 para os conjuntos $B \cap E^{-1}(d_1, \ldots, d_n)$, $C \cap E^{-1}(d_1, \ldots, d_n)$ e considerando o funcional linear contínuo $\varphi = \phi \circ A : X \to \mathbb{R}$ e que $r = d_{n+1} \in \text{ri}\,(\varphi[C \cap E^{-1}(d_1, \ldots, d_n)])$, segue que $B \cap E^{-1}(d_1, \ldots, d_n) \cap \varphi^{-1}(d_{n+1})$ é denso em $C \cap E^{-1}(d_1, \ldots, d_n) \cap \varphi^{-1}(d_{n+1})$. Mas note que $E^{-1}(d_1, \ldots, d_n) \cap \varphi^{-1}(d_{n+1}) = A^{-1}(d)$ e isso finaliza o teorema. ∎

Observação 62. Note que no Teorema 61, $B \cap A^{-1}(d) \neq \varnothing$. De fato, pelo Teorema 58 temos que ri $(A[C]) =$ ri $(A[B])$. Disso segue que existe $b \in B$ tal que $Ab = d$.

Observação 63. O Teorema 61 não é válido se o contradomínio de A é um EVT Y com dimensão infinita. De fato, tome $C = X = Y = C[a, b]$, $A = I$ identidade e $B = P[a, b]$, como na Observação 59. Seja $d = f$, $f(x) = e^x$, $x \in [a, b]$. Temos que $d \in$ ri $(A[C]) = C[a, b]$, mas $B \cap A^{-1}(d) = \varnothing$ não é denso em $C \cap A^{-1}(d) = \{d\}$.

Teorema 64. [Singer-Yamabe] *Seja B um subconjunto convexo e denso de um EVT de Hausdorff real X e sejam $\phi_1, \ldots, \phi_n$ funcionais lineares reais contínuos em X. Dado qualquer $x_0 \in X$ e qualquer vizinhança V de x_0, existe $z \in B$ tal que $z \in V$ e $\phi_i(x_0) = \phi_i(z)$ para $i = 1, \ldots, n$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos assumir que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ são linearmente independentes. Seja $A : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$Ax = (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)) \text{ para todo } x \in X.$$

Como $\phi_1, \ldots, \phi_n$ são linearmente independentes, existem $u_1, \ldots, u_n$ em X tais que

$$\phi_i(u_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Isso mostra que $A[X] = \mathbb{R}^n$. Dado $x_0 \in X$, temos que

$$d := A(x_0) = (\phi_1(x_0), \ldots, \phi_n(x_0)) \in \mathbb{R}^n = \text{ri } (\mathbb{R}^n) = \text{ri } (A[X]).$$

Como B é um subconjunto convexo e denso em X, segue do Teorema 61 que $B \cap A^{-1}(d)$ é denso em $X \cap A^{-1}(d)$. Assim, para toda vizinhança V de x_0, $V \cap B \cap A^{-1}(d) \neq \varnothing$, isto é, existe $z \in V \cap B$ tal que $Az = d$. Logo, $\phi_i(z) = \phi_i(x_0)$, $i = 1, \ldots, n$.

■

Algumas variações mais fracas dos Teoremas 58 e 61 foram obtidos por Wong [14]. Os resultados são considerados quando $d \in A[\text{int}(C)]$ ou, equivalentemente, $\text{int}(C) \cap A^{-1}(d) \neq \varnothing$. A seguir veremos um desses resultados como consequência do Teorema 61.

Lema 65. *Sejam X um EVT de Hausdorff real, S um subespaço vetorial denso em X e C um subconjunto convexo de X tal que* $\mathrm{int}(C) \neq \varnothing$. *Então, $C \cap S$ é denso em C.*

Demonstração. Seja $x \in \mathrm{int}(C)$. Então, para toda vizinhança U de x em X, $\mathrm{int}(C) \cap U$ é aberto e não vazio. Como S é denso em X, segue que $\mathrm{int}(C) \cap U \cap S \neq \varnothing$. Isso significa que $\mathrm{int}(C) \cap S$ é denso em $\mathrm{int}(C)$. Para finalizar, como $\mathrm{int}(C) \neq \varnothing$ e C é convexo, pela Proposição 43, temos $C \subset \overline{C} = \overline{\mathrm{int}(C)} = \overline{\mathrm{int} C \cap S} \subset \overline{C \cap S}$. Portanto, $C \cap S \subset C \subset \overline{C \cap S}$. ∎

Corolário 66. [Wong [14]] *Sejam X um espaço de Banach real e $A : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, contínua e sobrejetora. Se S é um subespaço vetorial denso em X e $C \subset X$ é convexo tal que* $\mathrm{int}(C) \cap A^{-1}(d) \neq \varnothing$, *então $C \cap S \cap A^{-1}(d)$ é denso em $C \cap A^{-1}(d)$.*

Demonstração. Por hipótese, $\mathrm{int}(C) \cap A^{-1}(d) \neq \varnothing$. Então, $\mathrm{int}(C) \neq \varnothing$. Aplicando o Lema 65, temos que $C \cap S$ é denso em C. Como X e $\mathbb{R}^n$ são espaços de Banach, segue do Teorema da Aplicação Aberta que A é aberta. Assim, para cada $d \in A[\mathrm{int}(C)]$, segue que $d \in \mathrm{int}(A[C])$. Note que $C \cap S$ é convexo e $d \in \mathrm{ri}\ A[C]$. Aplicando o Teorema 61, o resultado segue. ∎

O próximo teorema é uma aplicação do Corolário 66.

Teorema 67. *Sejam $a \leq x^1 < \ldots < x^n \leq b$ números reais e $n \in \mathbb{N}$. Se $f \in C[a,b]$ e f>0 então para todo $\varepsilon > 0$ existe $p \in P[a,b]$, $p \geq 0$, tal que $||f - p|| < \varepsilon$ e $f(x^i) = p(x^i)$ para $i = 1, \ldots, n$.*

Demonstração. Usaremos o Corolário 66. Considere $X = C[a,b]$ munido com a norma do supremo, $S = P[a,b]$ e $C = \{f \in C[a,b] : f \geq 0\}$. Note que $P[a,b]$ é denso em $C[a,b]$ e C é convexo. Defina $A : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $Af = (f(x^1), \ldots, f(x^n))$. Claramente A é linear e contínua. Afirmamos que a aplicação A é sobrejetora. Com efeito, dado $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, considere p o polinômio interpolador de Lagrange que passa pelos pontos $(x^1, y_1), \ldots, (x^n, y_n)$. Então $Ap = y$. Temos que $\mathrm{int}(C) = \{f \in C : f > 0\}$ e $A[\mathrm{int}(C)] = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_i > 0, i = 1, \ldots, n\}$. Assim, se $f \in C[a,b]$ e $f > 0$, então $d := (f(x^1), \ldots, f(x^n)) \in A[\text{int}(C)]$. Logo, pelo Corolário 66, para todo $\varepsilon > 0$ existe $p \in P[a,b]$, $p \geq 0$, tal que $||p - f|| < \varepsilon$ e $Ap = d$ e portanto, $p(x^i) = f(x^i)$, $i = 1, \ldots, n$. ∎

Apresentaremos uma aplicação do Teorema 58 e do Teorema 61 em que o resultado de Wong não se aplica. Denotaremos o conjunto das funções contínuas não decrescentes definidas em $[a,b]$ por $\text{mon}(C[a,b])$. Analogamente, o conjunto dos polinômios não decrescentes definidos em $[a,b]$ por $\text{mon}(P[a,b])$.

Teorema 68. *Sejam $0 \leq x^1 < \ldots < x^n \leq 1$ números reais, $n \in \mathbb{N}$ e f uma função real contínua estritamente crescente em $[0,1]$. Então, existe um polinômio p não decrescente em $[0,1]$ tal que $p(x^i) = f(x^i)$, $i = 1, \ldots n$. Além disso, o conjunto de todos os polinômios não decrescentes interpolantes, com $d = (f(x^1), \ldots, f(x^n))$, contém uma sequência convergindo uniformemente para f.*

Demonstração. Considere os conjuntos $X = C[0,1]$, $C = \text{mon}(C[0,1])$, $B = \text{mon}(P[0,1]) = C \cap P[0,1]$, $Y = \mathbb{R}^n$ e seja $A : X \to Y$ dada por $Af = (f(x^1), \ldots, f(x^n))$. A aplicação A é sobrejetora pelo mesmo argumento do Teorema 67.

Claramente, B é convexo. Vamos mostrar agora que B é denso em C. De fato, pelo Teorema de Bernstein [11], dado $\varepsilon > 0$ e $f \in C$, existe um polinômio de Bernstein $B_n(f, \cdot)$ tal que $||f - B_n(f, \cdot)|| < \varepsilon$. Como o polinômio de Bernstein de funções não decrescentes é não decrescente, Observação 13, segue que $B_n(f, \cdot) \in B$.

Vamos denotar $f(x^i)$ por f_i. Seja f a função do enunciado e $d = (f_1, \ldots, f_n)$. Observe que $\text{int}(A[C]) = \{(f_1, \ldots, f_n) : f_i < f_{i+1}\}$ e $d \in \text{int}(A[C])$, pois a aplicação f é estritamente crescente. Por outro lado, $\text{int}(A[C]) \subset \text{ri}\ (A[C])$ e usando o Teorema 58, temos que $d \in \text{ri}\ (A[B]) \subset A[B]$. Ou seja, existe um polinômio $p \in B$ tal que $Ap = d$. Em outras palavras, $p(x^i) = f_i$ para $i = 1, \ldots n$.

Para concluir a última parte, usamos o Teorema 61. Como $f \in C \cap A^{-1}(d)$, pela densidade de $B \cap A^{-1}(d)$ em $C \cap A^{-1}(d)$, segue que existe um sequência de polinômios $(p_n)_n \in B \cap A^{-1}(d)$ tal que $p_n \longrightarrow f$. ∎

Observação 69. O Teorema 68 também é válido para o intervalo $[a,b]$. Considere no Teorema 68 $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $a < b$ e f não decrescente. Defina a função $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(a + (b-a)x)$. Note que g é não decrescente, $g(0) = f(a)$ e $g(1) =$

$f(b)$. Como g é contínua em $[0,1]$, então dado $\varepsilon > 0$ existe um polinômio de Bernstein $B_n(g;\cdot) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|g(y) - B_n(g;y)| < \varepsilon$ para todo $y \in [0,1]$. Para $x \in [a,b]$, considerando $y = \frac{x-a}{b-a}$ temos que $y \in [0,1]$ e $g(y) = g(\frac{x-a}{b-a}) = f(a + (b-a)\frac{x-a}{b-a}) = f(x)$. Então, $|f(x) - B_n(g, \frac{x-a}{b-a})| < \varepsilon$ para todo $x \in [a,b]$. Definindo $P : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $P(x) = B_n(g, \frac{x-a}{b-a})$ temos que P é um polinômio não decrescente e está bem definido pois $P(a) = B_n(g;0)$ e $P(b) = B_n(g;1)$. Portanto, $|f(x) - P(x)| = |g(\frac{x-a}{b-a}) - B_n(g;\frac{x-a}{b-a})| = |g(y) - B_n(g;y)| < \varepsilon$ para todo $x \in [a,b]$.

Não é possível utilizar o Corolário 66 para provar o Teorema 68 pois $\mathrm{int}(\mathrm{mon}(C[a,b])) = \varnothing$ na topologia usual de $C[a,b]$.

2.3 Cones Recessivos

Na seção anterior, estudamos a interpolação considerando a transformação linear contínua A de X em $\mathbb{R}^n$, sendo X um espaço vetorial topológico de Hausdorff real. Na próxima seção, trataremos o caso em que X é substituído por um subespaço vetorial $S \subset X$ de dimensão finita. Para isso será necessário fazer uso de resultados sobre cones recessivos que apresentamos a seguir.

Definição 70. Um subconjunto B do $\mathbb{R}^n$ é dito ser um *cone* se, para todo $x \in B$ e $\lambda \geq 0$, tivermos $\lambda x \in B$. Se $F \subset \mathbb{R}^n$, o *cone gerado por* F, denotado por cone F, é definido por cone $F = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda F = \{z \in \mathbb{R}^n : z = \lambda x, \quad x \in F, \quad \lambda \geq 0\}$.

Note que todo cone contém a origem. Observe também que o cone F pode ou não ser convexo. Considere, por exemplo, o cone gerado por $F_1 = \{(1,1),(2,2)\}$, que é convexo, enquanto o cone gerado por $F_2 = \{(-1,1),(1,1)\}$ não é convexo.

Definição 71. Um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é dito ser um *cone convexo* se B é um cone e é um conjunto convexo. Assim, para todo conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$, o *cone convexo gerado por* F é denotado por cone co F e é expresso como o conjunto que contém todas as combinações cônicas de elementos do conjunto F, isto é,

$$\text{cone co } F = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, x_i \in F, \lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, m \text{ e } m \in \mathbb{N}\}$$

O cone convexo gerado por F é o menor cone convexo contendo F. Um resultado simples e relevante é que B é um cone convexo se, e somente se, $B + B \subset B$.

Definição 72. Para um conjunto convexo $B \subset \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$ é chamada de *direção de recessão de* B se $x + \lambda d \in B$ para todo $x \in B$ e $\lambda \geq 0$. A coleção de todas as direções de recessão do conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ forma um cone, chamado de *cone recessivo de* B, denotado por rec (B). Mais explicitamente, rec $(B) = \{d \in \mathbb{R}^n : B + d \subset B\}$.

Proposição 73. *Considere um conjunto convexo fechado* $B \subset \mathbb{R}^n$. *Então valem:*

(i) rec (B) *é um cone convexo fechado;*

(ii) $d \in$ rec (B) *se, e somente se, existe* $x \in B$ *tal que* $x + \lambda d \in B$ *para todo* $\lambda \geq 0$*;*

(iii) *Se* B *é um cone convexo, então* rec $(B) = B$.

Demonstração. **(i)** Primeiramente verificaremos que rec (B) é um cone. Com efeito, seja $d \in$ rec (B), isto é, para todo $x \in B$ e $\lambda \geq 0$, temos que $x + \lambda d \in B$. Considere $\alpha > 0$. Denote por $\lambda' = \lambda/\alpha \geq 0$. Então, $x + \lambda'(\alpha d) = x + \lambda d \in B$, ou seja, $\alpha d \in$ rec (B) para todo $\alpha > 0$. Para o caso de $\alpha = 0$, basta notar que $x + \lambda(\alpha d) = x \in B$.

Verifiquemos agora que rec (B) é convexo. Sejam $d_1, d_2 \in$ rec (B). Isso implica que para todo $x \in B$ e $\lambda \geq 0$, $x + \lambda d_i \in B$ $i = 1, 2$. Pela convexidade de B, para todo $\lambda' \in [0, 1]$

$$(1 - \lambda')(x + \lambda d_1) + \lambda'(x + \lambda d_2) = x + \lambda((1 - \lambda')d_1 + \lambda' d_2) \in B,$$

donde segue que $(1 - \lambda')d_1 + \lambda' d_2 \in$ rec (B). Para finalizar, basta provar que rec (B) é fechado. De fato, seja $d \in \overline{\text{rec }(B)}$. Isso implica que existe uma sequência $(d_k)_k \in$ rec (B) tal que $d_k \to d$. Mas, para todo $x \in B$ e $\lambda \geq 0$, visto que a soma e a multiplicação por escalar são contínuas, obtemos $x + \lambda d_k \to x + \lambda d$. Como $x + \lambda d_k \in B$, então $x + \lambda d \in \overline{B}$. Mas, B é fechado por hipótese, e, então, $\overline{B} = B$ donde $d \in$ rec (B).

(ii) Se $d \in$ rec (B), a condição segue direto da definição do cone recessivo. Reciprocamente, suponha que $d \in \mathbb{R}^n$ e que existe $x \in B$ satisfazendo $x + \lambda d \in B$ para todo $\lambda \geq 0$. Se $d = 0$, é trivial. Suponha que $d \neq 0$ e considere $x' \in B$ arbitrário. Visto que rec (B) é um cone, é suficiente mostrar que $x' + d \in B$. Defina $x_k = x + kd$, $k \in \mathbb{N}$. Segue da hipótese que $x_k \in B$. Se $x' = x_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então $x' + d = x + (k+1)d \in B$ e concluímos. Se $x' \neq x_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, defina $d_k = \frac{(x_k - x')||d||}{||x_k - x'||}$. Desta forma, considerando $\lambda' = \frac{||d||}{||x_k - x'||} \geq 0$, temos que $x' + d_k = (1 - \lambda')x' + \lambda' x_k$. Isso significa que $x' + d_k$ pertence ao segmento de reta que passa por x' e x_k. Agora considere

$$
\begin{aligned}
\frac{d_k}{||d||} &= \frac{x_k - x'}{||x_k - x'||} \\
&= \frac{x_k - x}{||x_k - x'||} + \frac{x - x'}{||x_k - x'||} \\
&= \frac{||x_k - x||}{||x_k - x'||} \frac{x_k - x}{||x_k - x||} + \frac{x - x'}{||x_k - x'||} \\
&= \frac{||x_k - x||}{||x_k - x'||} \frac{d}{||d||} + \frac{x - x'}{||x_k - x'||}
\end{aligned}
$$

Pela construção da sequência $(x_k)_k$ é fácil ver que esta é uma sequência ilimitada. Então,

$$
\frac{||x_k - x||}{||x_k - x'||} \longrightarrow 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{x - x'}{||x_k - x'||} = \frac{x - x'}{||x - x' + kd||} \longrightarrow 0,
$$

e isso juntamente com a igualdade precedente resulta em $d_k \to d$. Observe que o vetor $x' + d_k \in (x', x_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $||x_k - x'|| \geq ||d||$, pois $\lambda' = \frac{||d||}{||x_k - x||} \leq 1$. Como $x', x_k \in B$ e B é convexo, resulta que $x' + d_k \in B$. Para finalizar, visto que $x' + d_k \to x' + d$ e B é fechado, concluímos que $x' + d \in B$.

(iii) Que $B \subset \text{rec}\,(B)$ segue do fato de B ser um cone, pois $0 \in B$ e $0 + \lambda x \in B$ para todo $\lambda \geq 0$ e $x \in B$. Assim, aplicando o item **(ii)** desse teorema, obtemos que $x \in \text{rec}\,(B)$. Por outro lado, se $d \in \text{rec}\,(B)$, como $0 \in B$, temos que $d = 0 + d \in B + d \subset B$. ∎

Entretanto, se B não for fechado, então $\text{rec}\,(B)$ não é necessariamente fechado e também não necessariamente vale o item **(ii)** da Proposição 73. Com efeito, considere $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \cup \{(0, 0)\}$, que não é fechado. Neste caso, $\text{rec}\,(B) = B$, que não é fechado, e também $(1, 0) \notin \text{rec}\,(B)$ enquanto $(1, 1) + \lambda(1, 0) \in \text{rec}\,(B)$ para todo $\lambda \geq 0$.

Proposição 74. *Sejam B_1 e B_2 subconjuntos fechados e convexos em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$. Então,* $\text{rec}\,(B_1 \cap B_2) = \text{rec}\,(B_1) \cap \text{rec}\,(B_2)$.

Demonstração. Se $d \in \text{rec}\,(B_1) \cap \text{rec}\,(B_2)$, então para $\lambda \geq 0$ temos que $x + \lambda d \in B_1$

para todo $x \in B_1$ e $y + \lambda d \in B_2$ para todo $y \in B_2$. Assim, se $z \in B_1 \cap B_2$, temos que $z+\lambda d \in B_1 \cap B_2$, e disso segue que $d \in \text{rec } (B_1 \cap B_2)$. Reciprocamente, se $d \in \text{rec } (B_1 \cap B_2)$, como $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$, existe $z \in B_1 \cap B_2$. Desta forma, $z + \lambda d \in B_1 \cap B_2$ para todo $\lambda \geq 0$ e segue do item **(ii)** da Proposição 73 que $d \in \text{rec } (B_1 \cap B_2)$. ■

Proposição 75. *Seja B um subconjunto convexo, fechado e não vazio do $\mathbb{R}^n$. Então, B é limitado se, e somente se,* $\text{rec } (B) = \{0\}$.

Demonstração. Suponha que B é limitado e que exista $d \in \text{rec } (B)$ sendo $d \neq 0$. Isso implica que para todo $x \in B$, $x + \lambda d \in B$ para todo $\lambda \geq 0$. Desta forma, $||x + \lambda d|| \longrightarrow \infty$ se $\lambda \longrightarrow \infty$, contradizendo o fato de B ser limitado. Logo, $\text{rec } (B) = \{0\}$.

Reciprocamente, suponha que B é ilimitado. Considere $x \in B$ e seja (x_k) uma sequência ilimitada em B. Defina a sequência limitada $d_k = \frac{x_k - x}{||x_k - x||}$. Logo, esta sequência possui uma subsequência convergente. Continuaremos denotando tal subsequência convergente por $(d_k)_k$. Considere d o limite desta subsequência $(d_k)_k$. Então, $||d_k|| = ||d|| = 1$. Consideremos $\lambda \geq 0$ fixado, porém arbitrário e

$$x + \lambda d_k = (1 - \frac{\lambda}{||x_k - x||})x + \frac{\lambda}{||x_k - x||} x_k.$$

Se $||x_k - x|| \geq \lambda$, segue que $x + \lambda d_k$ pertence ao segmento $[x, x_k]$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como B é convexo, segue que $x + \lambda d_k \in B$. Além disso, B é fechado e $x + \lambda d_k \longrightarrow x + \lambda d$. Desta forma, $x + \lambda d \in B$ e pela Proposição 73, segue que $d \in \text{rec } (B)$, mas $d \neq 0$ pois $||d|| = 1$.

■

2.4 Interpolação em Subespaços de Dimensão Finita

Nesta seção apresentaremos alguns resultados de interpolação quando substituímos o espaço vetorial topológico X da Seção 2.2 por um subespaço vetorial S de X com dimensão finita. Também substituiremos B por $C \cap S$ para algum subconjunto convexo, fechado e não vazio C de X. Observe que $C \cap S$ é um fechado pois é a interseção de fechados. Consideraremos Y um espaço vetorial de dimensão finita com a topologia usual.

A seguir, iremos enunciar dois resultados que podem ser encontrado na referência [4] página 104 juntamente com o Exercício 2.60 e página 142.

Lema 76. *Sejam X um EVT de Hausdorff real e B_1,B_2 subconjuntos fechados e convexos de X. Se B_1 é localmente compacto e* rec $(B_1) \cap$ rec (B_2) *é um subespaço vetorial de X, então $B_1 - B_2$ é fechado.*

Lema 77. *Sejam X e Y espaços de Banach e $B(X, Y)$ o espaço das transformações lineares limitadas de X em Y. Se $T \in B(X, Y)$ é sobrejetora com núcleo N, então um subconjunto M de X tem a propriedade de $T(M)$ ser fechado em Y se, e somente se, $M + N$ é fechado em X.*

Teorema 78. *Sejam S um EVT real de dimensão finita, $A : S \longrightarrow Y$ uma transformação linear, $B \subset S$ não vazio, fechado e convexo. Se* rec $(B) \cap A^{-1}(0)$ *é um subespaço vetorial de S, então $A[B]$ é fechado.*

Demonstração. A transformação linear A é contínua pela Proposição 33. Fixe $B_1 = B$ e $B_2 = A^{-1}(0)$. Note que $A^{-1}(0)$ é um cone convexo. Assim, pela Proposição 73, temos rec $(A^{-1}(0)) = A^{-1}(0)$. Dessa forma, segue do Lema 76 que $B + A^{-1}(0)$ é fechado.

Como $\dim S$ é finita, existe um homeomorfismo linear $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow S$, sendo $\mathbb{R}^n$ um espaço de Banach. Se considerarmos A sobrejetora, então $A \circ \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow Y$ é sobrejetora. Como $B + A^{-1}(0)$ é fechado, temos que $\varphi^{-1}[B + A^{-1}(0)] = \varphi^{-1}[B] + \varphi^{-1}[A^{-1}(0)] = \varphi^{-1}[B] + \text{Ker } (A \circ \varphi)$ é fechado. Assim, segue do Lema 77 que $(A \circ \varphi)[\varphi^{-1}[B]] = A[B]$ é fechado. Caso, A não seja sobrejetora, consideramos $Y = A[S]$ e concluímos.

■

Se considerarmos no Teorema 78, o subconjunto B como sendo um cone convexo, visto que rec $(B) = B$, garantir que $A[B]$ é fechado se resume a mostrar que $B \cap A^{-1}(0)$ é um subespaço vetorial. Em particular, $A[B]$ é fechado se $B \cap A^{-1}(0) = \{0\}$.

Corolário 79. *Sejam X um EVT de Hausdorff real, S um subespaço vetorial de X, de dimensão finita e $A : X \longrightarrow Y$ uma transformação linear. Seja C um subconjunto não vazio, fechado e convexo de X tal que* rec $(B) \cap A^{-1}(0)$ *é um subespaço vetorial, sendo $B = C \cap S$. Se $A[C] \setminus A[B] \neq \varnothing$, então* ri $(A[C]) \setminus A[B] \neq \varnothing$.

Demonstração. Se $B = \varnothing$, como C é convexo e A é linear, então, pela Proposição 42, temos que $A[C]$ é convexo, e o resultado segue do Teorema 53. Suponha que $B \neq \varnothing$.

Considerando a restrição de A a S, $A|_S$, segue do Teorema 78 que $A[B]$ é fechado. Pelo Corolário 55, temos $\overline{A[C]} = \overline{\text{ri }(A[C])}$. Suponha, por contradição, que ri $(A[C]) \backslash A[B] = \varnothing$. Disso segue que ri $(A[C]) \subset A[B]$ e assim $A[C] \subset \overline{A[C]} = \overline{\text{ri }(A[C])} \subset \overline{A[B]} = A[B]$. Como $B \subset C$, então $A[B] \subset A[C]$ e obtém-se $A[B] = A[C]$. Logo, $A[C] \backslash A[B] = \varnothing$, que contradiz a hipótese. ∎

O Corolário 79 pode ser interpretado da seguinte forma. Se $d \in A[C]$ mas não pode ser interpolado por elementos de B, então existe $y \in$ ri $(A[C])$ que não é interpolado por B. Apresentaremos uma aplicação do Corolário 79 que afirma que fixados os nós de interpolação, não é possível especificar previamente o grau do polinômio interpolador. Denotaremos por $P_k[a, b]$ o conjunto dos polinômios reais definidos em $[a, b]$ com grau menor ou igual k. O cone do conjuntos do polinômios de grau menor ou igual a k, não decrescentes, definidos em $[a, b]$, será denotado por $\text{mon}(P_k[a, b])$.

Teorema 80. *Sejam $a \leq x^1 < \ldots < x^n \leq b$ números reais, $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 3$ e $A : C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a transformação linear contínua e sobrejetora dada por $Af = (f(x^1), \ldots, f(x^n))$. Considere $C = \text{mon}(C[a, b])$ e $S = P_k[a, b]$ com $k \in \mathbb{N}$. Então, existem números reais $f_1 < f_2 < \ldots < f_n$ tais que não existe um polinômio $p \in C \cap S = \text{mon}(P_k[a, b])$ tal que $p(x^i) = f_i$ para $i = 1, \ldots, n$.*

Demonstração. Escolha números reais $y_1, \ldots, y_n$ tal que $y_1 = y_2 < y_3 < \ldots < y_n$. Note que $(y_1, \ldots, y_n) \in A[C]$ e $(y_1, \ldots, y_n) \notin A[C \cap S]$, pois um polinômio não decrescente e não constante não assume valores iguais em dois pontos distintos. Disso obtemos que $A[C] - A[C \cap S] \neq \varnothing$. Além disso, rec $(C \cap S) \cap A^{-1}(0) = \{0\}$. De fato, seja $g \in$ rec $(C \cap S) \cap A^{-1}(0)$. Visto que $g \in$ rec $(C \cap S)$ e que a aplicação nula pertence a $C \cap S$, segue da definição de cone recessivo que $g \in C \cap S$. Usando agora que $g \in A^{-1}(0)$ segue que g é um polinômio não decrescente que se anula em n pontos distintos. Logo, $g = 0$. Aplicando agora o Corolário 79 segue que ri $(A[C]) \setminus A[C \cap S] \neq \varnothing$. Observe que ri $(A[C]) = \text{int}(A[C])$. Portanto, existem números reais $f_1 < f_2 < \ldots < f_n$ tal que $d = (f_1, \ldots, f_n) \in \text{int}(A[C])$ e $d \notin A[C \cap S]$, em outras palavras, não existe um polinômio $p \in C \cap S$ tal que $p(x^i) = f_i$ para $i = 1, \ldots, n$. ∎

Teorema 81. *Sob as hipóteses do Teorema 78, sejam* $d \in Y$ *e* $B \cap A^{-1}(d) \neq \varnothing$. *Então,* $B \cap A^{-1}(d)$ *é compacto se, e somente se,* $\text{rec}\,(B) \cap A^{-1}(0) = \{0\}$.

Demonstração. Note que $A^{-1}(d)$ é fechado e convexo e que $\text{rec}\,(A^{-1}(d)) = A^{-1}(0)$. Usando a Proposição 74 nos conjuntos $A^{-1}(d)$ e B, segue que $\text{rec}\,(B \cap A^{-1}(d)) = \text{rec}\,(B) \cap A^{-1}(0)$. Note que $B \cap A^{-1}(d)$ é convexo e fechado, pois é a interseção de convexos e fechados. Pela Proposição 75, segue que $B \cap A^{-1}(d)$ é limitado se, e somente se, $\text{rec}\,(B \cap A^{-1}(d)) = \text{rec}\,(B) \cap A^{-1}(0) = \{0\}$. Logo, pelo Teorema de Heine-Borel, concluímos que $B \cap A^{-1}(d)$ é compacto se, e somente se, $\text{rec}\,(B) \cap A^{-1}(0) = \{0\}$. ∎

Para ilustrar o Teorema 81, precisamos do seguinte resultado que pode ser encontrado em [7].

Lema 82. *Seja* X *um espaço normado. Se* $\varnothing \neq M \subset X$ *é compacto, então para todo* $f \in X$, *existe* $h \in M$ *tal que* $||f - h|| = \inf_{p \in M} ||f - p||$.

Teorema 83. *Seja* X *um espaço normado real. Sob as hipóteses do Teorema 78, sejam* $d \in Y$, $B \cap A^{-1}(d) \neq \varnothing$ *e* $\text{rec}\,(B) \cap A^{-1}(0) = \{0\}$. *Então existe* $x_0 \in B \cap A^{-1}(d)$ *tal que* $||x_0|| = \inf_{x \in B \cap A^{-1}(d)} ||x||$.

Demonstração. Segue do Teorema 81 que $B \cap A^{-1}(d)$ é compacto. Logo, tomando $f = 0$ no Lema 82, existe $x_0 \in B \cap A^{-1}(d)$ tal que $||x_0|| = \inf_{x \in B \cap A^{-1}(d)} ||x||$. ∎

CAPÍTULO 3

Interpolação e Aproximação em Espaços de Dimensão Infinita

Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos de Hausdorff reais, $A : X \longrightarrow Y$ linear e contínua, $C \subset X$, B um subconjunto não vazio, convexo e denso em C e $d \in Y$. Neste capítulo, apresentaremos extensões de resultados de aproximação e interpolação finita decorrentes do Capítulo 2, para o caso em que Y tem dimensão infinita.

Condições são obtidas garantindo que $B \cap A^{-1}(d)$ seja não vazio e denso em $C \cap A^{-1}(d)$.

A hipótese dimensão de Y finita será substituída por uma certa interação entre o conjunto convexo B e a transformação linear A.

A teoria é ilustrada com um exemplo sobre a existência de extensões monótonas suaves de funções definidas na fronteira do quadrado unitário.

As referências para este capítulo são [2], [4], [9].

3.1 Propriedades do Core

Nesta seção, introduziremos notações e propriedades a cerca do core de um conjunto M. Nos pautamos nas referências [4] e [9].

Definição 84. Sejam Y um espaço vetorial e $M \subset Y$. O *core* de M, denotado por $\operatorname{cor}(M)$, é o conjunto de todos os elementos $x \in M$ tal que para todo $y \in Y$, $y \neq x$, existe $z \in]x, y[$ com $[x, z] \subset M$.

O $\operatorname{cor}(M)$ também é conhecido como o interior algébrico de M. A seguir, veremos algumas propriedades sobre o core de subconjuntos de um espaço vetorial topológico de Hausdorff real.

Proposição 85. *Sejam Y EVT de Hausdorff real e $M \subset Y$. Então,*

(i) *M é absorvente se, e somente se, $0 \in \operatorname{cor}(M)$;*

(ii) $\operatorname{int}(M) \subset \operatorname{cor}(M)$.

Demonstração. **(i)** Suponha que $0 \in \operatorname{cor}(M)$ e seja $x \in Y$ arbitrário. Pela definição de $\operatorname{cor}(M)$, existe $z_1 \in]0, x[$, digamos $z_1 = t_1 x$, $0 < t_1 < 1$ tal que $[0, z_1] \subset M$ e existe $z_2 \in]0, -x[$, digamos $z_2 = -t_2 x$, $0 < t_2 < 1$ tal que $[0, z_2] \subset M$. Fixemos $\lambda_x = \min\{t_1, t_2\} > 0$. Então, se $|r| < \lambda_x$ segue que $rx \in M$. Portanto, M é um conjunto absorvente.

Reciprocamente, suponha que M é absorvente. Dado $x \in Y$, existe $\lambda_x > 0$ tal que $rx \in M$ para todo $r \in \mathbb{R}$ com $|r| < \lambda_x$. Seja $z = \frac{\lambda_x}{2} x$. Note que o segmento $[0, z] = \{tz : 0 \leq t \leq 1\}$ está inteiramente contido em M, porque $|\frac{t\lambda_x}{2}| < \lambda_x$. Se $\frac{\lambda_x}{2} < 1$, então $z \in]0, x[$ e isso finaliza. Caso contrário, se $\frac{\lambda_x}{2} \geq 1$ consideramos $z' = \frac{1}{\lambda_x} x$. Então, $z' \in]0, x[$ e $[0, z'] \subset [0, z] \subset M$. Portanto, $0 \in \operatorname{cor}(M)$.

(ii) Dado $x \in \operatorname{int}(M)$ existe uma vizinhança da origem U tal que $x + U \subset M$. Seja $y \in Y - \{x\}$ arbitrário. A vizinhança U é absorvente pela Proposição 23. Logo, $0 \in \operatorname{cor}(U)$ pelo item anterior. Dessa forma, existe $z' \in]0, y - x[$ tal que $[0, z'] \subset U$. Fixemos $z = x + z'$. Então, $[x, z] = [x, x + z'] = x + [0, z'] \subset x + U \subset M$ e $z = x + z' \in x +]0, y - x[=]x, y[$. Portanto, $x \in \operatorname{cor}(M)$. ∎

Proposição 86. *Seja Y um EVT de Hausdorff real. Se $M \subset Y$ é convexo e sólido, então* $\operatorname{int}(M) = \operatorname{cor}(M)$ *e* $\operatorname{int}(M) = \operatorname{int}(\overline{M})$.

Demonstração. Verifiquemos inicialmente que $\operatorname{int}(M) = \operatorname{cor}(M)$. A inclusão $\operatorname{int}(M) \subset \operatorname{cor}(M)$ já foi verificada na Proposição 85. Por outro lado, consideremos $x \in \operatorname{cor}(M)$ e

$p \in \text{int}(M)$. Fixemos $y' = sx + (1-s)p$ para algum $s > 1$. Visto que $x \in \text{cor}(M)$, existe $y \in\,]x, y'[$ tal que $[x, y] \subset M$. Uma vez que $y \in M$ e $p \in \text{int}(M)$, aplicando a Proposição 43, resulta que o segmento $[p, y[\subset \text{int}(M)$. Mas $x \in [p, y[$, e então $x \in \text{int}(M)$.

Verificaremos agora a outra identidade. É fácil ver que $\text{int}(M) \subset \text{int}(\overline{M})$. Por outro lado, tome $x \in \text{int}(\overline{M})$ e $p \in \text{int}(M)$. Se garantirmos que existe $y \in \overline{M}$ tal que $x \in [p, y[$, usando a Proposição 43 concluímos que $x \in \text{int}(M)$. Verifiquemos então que existe $y \in \overline{M}$ tal que $x \in [p, y[$. De fato, fixemos $z = tx + (1-t)p$ para algum $t > 1$. Como $\text{int}(\overline{M}) \subset \text{cor}(\overline{M})$, temos que $x \in \text{cor}(\overline{M})$. Logo, existe $y \in\,]x, z[$ tal que o segmento $[x, y] \subset \overline{M}$. Então, $y \in \overline{M}$ e $x \in [p, y[$. ∎

Proposição 87. *Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos de Hausdorff reais e $A : X \longrightarrow Y$ linear. Seja $M \subset X$ um conjunto convexo tal que $0 \in M$ e $0 \in \text{cor}(A[M])$, e seja $U \subset X$ absorvente. Então, $0 \in \text{cor}(A[M \cap U])$.*

Demonstração. A hipótese do $0 \in \text{cor}(A[M])$ significa que dado qualquer $y \in Y$, $y \neq 0$, existe $y' \in (0, y)$ tal que $[0, y'] \subset A[M]$. Em particular, $y' = Ax'$ para algum $x' \in M - \{0\}$. Usando o fato de U ser absorvente em X, segue da Proposição 85 que $0 \in \text{cor}(U)$. Assim, podemos encontrar $z \in (0, x')$ tal que o segmento $[0, z] \subset U$. Note que $[0, z] \subset [0, x']$. Como M é convexo, concluímos que o segmento $[0, x'] \subset M$. Logo, $[0, z] \subset M \cap U$. Usando agora a linearidade de A, obtemos $[0, Az] \subset A[M \cap U]$ e $Az \in (0, y)$. Portanto, $0 \in \text{cor}(A[M \cap U])$. ∎

3.2 Interpolação e Aproximação

O objetivo desta seção é estender os dois resultados abaixo para o caso em que o contradomínio da transformação linear e contínua $A : X \longrightarrow Y$ tem dimensão infinita. Nos pautamos na referência [9].

Teorema 88. *Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos de Hausdorff reais com $\dim Y$ finita e $A : X \longrightarrow Y$ uma transformação linear contínua. Se B é um subconjunto não vazio, convexo e denso em $C \subset X$, então $\text{int}(A[C]) = \text{int}(A[B])$*

Demonstração. Como $A[B] \subset A[C]$, temos $\text{Aff}(A[B]) \subset \text{Aff}(A[C])$. Se $\text{Aff}(A[B]) = Y$, então $\text{Aff}(A[C]) = Y$. Logo $\text{int}(A[B]) = \text{ri}\,(A[B])$ e $\text{int}(A[C]) = \text{ri}\,(A[C])$. Assim, usando o Teorema 58, obtemos $\text{int}(A[C]) = \text{ri}\,(A[C]) = \text{ri}\,(A[B]) = \text{int}(A[B])$.

Suponha que $\text{Aff}(A[B]) \neq Y$. Temos que $\text{Aff}(A[B])$ é fechado pois é translação de um subespaço vetorial de dimensão finita, e não tem pontos interiores. Como $\text{int}(A[B]) \subset \text{int}(\overline{A[B]}) \subset \text{int}(\overline{\text{Aff}(A[B])}) = \text{int}(\text{Aff}(A[B])) = \varnothing$, segue que $\text{int}(A[B]) = \text{int}(\overline{A[B]}) = \varnothing$. Usando a densidade de B em C e a continuidade de A obtemos $A[B] \subset A[C] \subset A[\overline{B}] \subset \overline{A[B]}$. Assim, $\text{int}(A[B]) \subset \text{int}(A[C]) \subset \text{int}(\overline{A[B]}) = \text{int}(A[B]) = \varnothing$. Portanto, $\text{int}(A[C]) = \text{int}(A[B]) = \varnothing$. ∎

Esse teorema de interpolação afirma que todo $d \in \text{int}(A[C])$ pode ser interpolado por elementos de B, desde que B seja convexo e denso em C. Tal resultado pode ser melhorado da seguinte forma: todo ponto interpolante $x \in C$ tal que $Ax = d \in \text{int}(A[C])$ pode ser simultaneamente aproximado por elementos de B.

Teorema 89. *Sejam X e Y espaços vetoriais de Hausdorff reais com $\dim Y$ finita e $A : X \longrightarrow Y$ linear, contínua e sobrejetora. Se B é um subconjunto não vazio, convexo e denso em C, e $d \in \text{int}(A[C])$, então $B \cap A^{-1}(d)$ e denso em $C \cap A^{-1}(d)$.*

Demonstração. Como $d \in \text{int}(A[C]) \subset \text{ri}\,(A[C])$, segue do Teorema 61 que $B \cap A^{-1}(d)$ é denso em $C \cap A^{-1}(d)$. ∎

Os exemplos mencionados nas Observações 59 e 63 mostram que os Teoremas 88 e 89 não são válidos quando o contradomínio da aplicação A tem dimensão infinita.

Acrescentando a condição de $A[B]$ ser sólido no Teorema 88 obtemos um resultado de interpolação que pode ser aplicado quando $\dim Y = \infty$.

Teorema 90. [Mulansky-Neamtu] *Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos de Hausdorff reais e $A : X \longrightarrow Y$ linear e contínua. Se B é um subconjunto convexo e denso em $C \subset X$, tal que $\text{int}(A[B]) \neq \varnothing$, então $\text{int}(A[B]) = \text{int}(A[C])$.*

Demonstração. Pela continuidade da transformação linear A, segue da Proposição 9 que $\overline{A[B]} = \overline{A[\overline{B}]}$. Visto que B é convexo e A é linear, pela Proposição 42, temos que $A[B]$ é um subconjunto convexo de Y e por hipótese $\text{int}(A[B]) \neq \varnothing$. Dessa forma, utilizando a

Proposição 86 obtemos

$$\operatorname{int}(A[B]) = \operatorname{int}(\overline{A[B]}) = \operatorname{int}(\overline{A[\overline{B}]}) = \operatorname{int}(A[\overline{B}]).$$

Usando a hipótese de B ser denso em C, resulta que $\operatorname{int}(A[B]) \subset \operatorname{int}(A[C]) \subset \operatorname{int}(A[\overline{B}])$. Utilizando a igualdade verificada anteriormente, a saber, $\operatorname{int}(A[B]) = \operatorname{int}(A[\overline{B}])$, concluímos que $\operatorname{int}(A[B]) = \operatorname{int}(A[C])$. ■

O teorema precedente pode ser interpretado da seguinte forma. Para cada dado $d \in \operatorname{int}(A[C])$, existe um elemento $x \in B$ tal que $Ax = d$ desde que o conjunto $A[B]$ seja sólido.

Observação 91. O Teorema 90 também é válido se os interiores dos conjuntos considerados forem substituídos por interiores relativos, X por $\overline{\operatorname{span}(C)}$ e Y por $\overline{\operatorname{span}(A[C])}$. Para isso, inicialmente transladamos a origem em X e Y, se necessário, e assumimos que $0 \in C$. Consideremos $X = \overline{\operatorname{span}(C)}$ e $Y = \overline{A[\operatorname{Aff}(B)]} = \overline{\operatorname{span}(A[C])}$.

Verifiquemos a igualdade $\overline{A[\operatorname{Aff}(B)]} = \overline{\operatorname{span}(A[C])}$. Afirmamos que

$$\operatorname{Aff}(B) \subset \operatorname{Aff}(C) = \operatorname{span}(C) \subset \operatorname{span}(\overline{B}) \subset \overline{\operatorname{Aff}(B)}. \tag{3.1}$$

Vamos verificar apenas a última inclusão, pois as outras são triviais. Com efeito, note que $\overline{B} \subset \overline{\operatorname{Aff}(B)}$ e como $\overline{\operatorname{Aff}(B)}$ é um conjunto afim obtemos que $\operatorname{Aff}(\overline{B}) \subset \operatorname{Aff}(\overline{\operatorname{Aff}(B)}) = \overline{\operatorname{Aff}(B)}$, usando o fato de $0 \in \overline{B}$ e a Proposição 48 o resultado segue. Aplicando a transformação A nas inclusões de 3.1 obtemos:

$$A[\operatorname{Aff}(B)] \subset A[\operatorname{span}(C)] \subset A[\overline{\operatorname{Aff}(B)}]$$

Usando a continuidade de A segue que $A[\overline{\operatorname{Aff}(B)}] \subset \overline{A[\operatorname{Aff}(B)]}$. Para concluirmos o resultado basta verificarmos que $\overline{A[\overline{\operatorname{Aff}(B)}]} = \overline{A[\operatorname{Aff}(B)]}$. De fato, é fácil ver que $A[\operatorname{Aff}(B)] \subset A[\overline{\operatorname{Aff}(B)}]$ aplicando o fecho em ambos os lados obtemos uma das inclusões. Por outro lado, pela continuidade da A temos que $A[\overline{\operatorname{Aff}(B)}] \subset \overline{\operatorname{Aff}(B)}$ e aplicando o fecho ambos os lados concluímos a igualdade. E fácil verificar que $\overline{\operatorname{span}(A[C])} = \overline{A[\operatorname{span}(C)]}$ e isso finaliza.

A fim de estender o Teorema 89 para o caso em que $\dim Y = \infty$, precisamos do resultado abaixo e da definição de aplicação aberta relativa a um conjunto $M \subset X$.

Proposição 92. *Sejam* X *e* Y *espaços vetoriais topológicos de Hausdorff reais e* $A : X \longrightarrow Y$ *linear. Sejam* $M \subset X$ *convexo e* $V \subset X$ *balanceado tal que* $\text{int}(A[M \cap V]) \neq \varnothing$*. Então,* $\text{cor}(\overline{A[M \cap V]}) \subset \text{int}(A[M \cap (V+V)])$.

Demonstração. Inicialmente iremos provar que para todo $t \in [0,1)$,

$$t(\overline{A[M \cap V]}) + (1-t)\text{int}(A[M \cap V]) \subset \text{int}(A[M \cap (V+V)]). \tag{3.2}$$

Seja $p \in \text{int}(A[M \cap V])$. Então, $(1-t)(\text{int}(A[M \cap V]) - p)$ é uma vizinhança da origem em Y. Dessa forma, usando a mesma justificativa da Proposição 43, obtemos

$$\begin{aligned} t\overline{A[M \cap V]} &\subset tA[M \cap V] + (1-t)(\text{int}(A[M \cap V]) - p) \\ &\subset tA[M \cap V] + (1-t)\text{int}A[M \cap V] - (1-t)p \\ &\subset A[M \cap (V+V)] - (1-t)p. \end{aligned}$$

Usamos na última passagem o fato de M se convexo e V ser balanceado. Com efeito, sejam $Ax, Ay \in A[M \cap V]$. Usando o fato de M ser convexo e V balanceado, resulta que $tx + (1-t)y \in M \cap (V+V)$ para todo $t \in [0,1)$. Para concluir, usamos a linearidade de A, donde $tAx + (1-t)Ay = A(tx + (1-t)y) \in A[M \cap (V+V)]$. Como $p \in \text{int}(A[M \cap V])$ é arbitrário, obtemos $t\overline{A[M \cap V]} + (1-t)\text{int}(A[M \cap V]) \subset A[M \cap (V+V)]$. Observe que $t\overline{A[M \cap V]} + (1-t)\text{int}(A[M \cap V])$ é aberto pela Proposição 16 e portanto está contido em $\text{int}(A[M \cap (V+V)])$.

Para finalizar a demonstração, considere $x \in \text{cor}(\overline{A[M \cap V]})$ e $p \in \text{int}(A[M \cap V])$ distinto de x. Usando a definição do core, podemos encontrar $y \in \,]x, 2x-p[$ de modo que $[x,y] \subset \overline{A[M \cap V]}$. Temos $y = (1+t')x - t'p$ para um certo $t' \in (0,1)$. Com isso, $x = ty + (1-t)p$ para $t = \frac{1}{t'+1} \in (0,1)$. Usando (3.2) concluímos que $x \in \text{int}(A[M \cap V + V])$.

∎

É conveniente introduzir a seguinte definição.

Definição 93. Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos de Hausdorff reais, $A : X \longrightarrow Y$ uma transformação linear contínua e $M \subset X$ não vazio. A aplicação A é chamada de *aberta relativa a* M, ou M*-aberta* se $\text{int}(A[M \cap U]) \neq \varnothing$ para todo aberto $U \subset X$ tal que $M \cap U \neq \varnothing$.

O próximo resultado fornece condições que garantem a interpolação e aproximação simultâneas quando o contradomínio da aplicação $A : X \longrightarrow Y$ tem dimensão infinita.

Teorema 94. [Mulansky-Neamtu] *Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos de Hausdorff reais e $C \subset X$. Sejam B um subconjunto convexo e denso em C, $A : X \longrightarrow Y$ uma aplicação B-aberta e $d \in \operatorname{int}(A[C])$. Então, $B \cap A^{-1}(d)$ é denso em $C \cap A^{-1}(d)$.*

Demonstração. Seja $x \in C$ tal que $d = Ax \in \operatorname{int}(A[C])$. Vamos assumir sem perda de generalidade que $x = 0$ e assim $d = 0 \in \operatorname{int}(A[C])$. Seja U uma vizinhança de $0 \in X$. Mostraremos que $B \cap A^{-1}(0) \cap U \neq \varnothing$, ou equivalentemente, que $0 \in A[B \cap U]$ para toda vizinhança U.

Consideremos V uma vizinhança balanceada de $0 \in X$ tal que $V + V \subset U$. Como estamos supondo que $0 \in \operatorname{int}(A[C])$, temos que $0 \in \operatorname{int}(A[C]) \subset \operatorname{int}(A[\overline{B}]) \subset \operatorname{cor}(A[\overline{B}])$. Aplicando a Proposição 87, resulta que $0 \in \operatorname{cor}(A[\overline{B} \cap V])$.

Usando o fato de que $0 \in C \subset \overline{B}$ e A é B-aberta, segue que $V \cap B \neq \varnothing$ e, então $\operatorname{int}(A[V \cap B]) \neq \varnothing$. Considerando $M = B$ na Proposição 92, obtemos que $\operatorname{cor}(\overline{A[B \cap V]}) \subset \operatorname{int}(A[B \cap (V + V)])$. Finalmente, usando o fato de $B \cap V$ ser denso em $\overline{B} \cap V$ e a continuidade da transformação linear A, segue que $A[\overline{B} \cap V] \subset \overline{A[B \cap V]}$. Com isso obtemos que $0 \in \operatorname{cor}(A[\overline{B} \cap V]) \subset \operatorname{cor}(\overline{A[B \cap V]}) \subset \operatorname{int}(A[B \cap (V + V)]) \subset \operatorname{int}(A[B \cap U]) \subset A[B \cap U]$. ■

Observação 95. No Teorema 94, $B \cap A^{-1}(d) \neq \varnothing$. Com efeito, como A é B-aberta, então $\operatorname{int}(A[B]) \neq \varnothing$. Logo, pelo Teorema 90, $\operatorname{int}(A[C]) = \operatorname{int}(A[B])$ e como $d \in \operatorname{int}(A[C])$, existe $b \in B$ tal que $d = A(b)$, isto é, $B \cap A^{-1}(d) \neq \varnothing$.

O Teorema 94 também é válido se $\operatorname{int}(A[C])$ for substituído por ri $(A[C])$. A justificativa é análoga a explicada na Observação 91.

Observação 96. A prova deste resultado para espaços localmente convexos pode ser simplificada. Com efeito, considere a vizinhança U do Teorema 94 sendo convexa e absorvente. Temos que $0 \in C \subset \overline{B}$, $0 \in \operatorname{int}(A[C]) \subset \operatorname{int}(A[\overline{B}]) \subset \operatorname{cor}(A[\overline{B}])$ e U é absorvente. Assim, podemos aplicar a Proposição 87 e obter que $0 \in \operatorname{cor}(A[\overline{B} \cap U])$. Usando o fato de que $0 \in \overline{B}$ e A é B-aberta, segue que $B \cap U \neq \varnothing$ e $\operatorname{int}(A[B \cap U]) \neq \varnothing$. Assim, $A[B \cap U]$

é sólido e consequentemente $A[\overline{B} \cap U]$ é sólido. Dessa forma, utilizando a Proposição 86, temos que $\mathrm{cor}(A[\overline{B} \cap U]) = \mathrm{int}(A[\overline{B} \cap U])$. Logo, $0 \in \mathrm{int}(A[\overline{B} \cap C])$. Visto que $B \cap U$ é convexo e denso em $\overline{B} \cap U$, segue do Teorema 90 que $\mathrm{int}(A[B \cap U]) = \mathrm{int}(A[\overline{B} \cap U])$. Logo, $0 \in \mathrm{int}(A[B \cap C])$ e, portanto, $0 \in A[B \cap C]$.

Observação 97. Se A é aberta relativamente a um conjunto convexo $M \subset X$, então A é uma aplicação aberta (leva abertos de X em abertos de Y). Com efeito, note que se A é M-aberta, então $\mathrm{int}(A[M]) \neq \varnothing$. Vamos assumir sem perda de generalidade que $0 \in M$, $0 \in \mathrm{int}(A[M])$ e que U e V são como no Teorema 94. Vimos na demonstração do Teorema 94 que $0 \in \mathrm{int}(A[M \cap (V + V)]) \subset \mathrm{int}(A[M \cap U]) \subset \mathrm{int}(A[U])$ para toda vizinhança U de $0 \in X$. Logo, 0 é ponto interior de $A[U]$. Para finalizar, seja W um aberto em X e $y \in A[W]$. Mostraremos que $A[W]$ é aberto. Considere $y = Aw$ para algum $w \in W$ e $U' = W - w$ uma vizinhança da origem. Então, $A[W] = Aw + A[U']$. Pela parte anterior, temos que $0 \in \mathrm{int}(A[U'])$, ou seja, existe uma vizinhança B_0 de $0 \in X$ tal que $B_0 \subset A[U']$. Assim, $B_0 + y$ é uma vizinhança de y inteiramente contida em $A[W]$. Portanto, y é ponto interior de $A[W]$.

Observe que se X e Y são espaços vetoriais topológicos e $A : X \longrightarrow Y$ é uma transformação linear e aberta, então A é sobrejetora. Com efeito, note que $A(X)$ é um subespaço aberto de Y. Desta forma, segue da Proposição 24 que $A(X) = Y$. As aplicações B-abertas também são sobrejetoras e segue da Observação 97.

Vimos que a hipótese de A ser B-aberta é mais forte do que A ser uma aplicação aberta. Desta forma, é natural perguntar quais condições devem ser adicionadas no conjunto convexo B para que uma aplicação aberta seja também B-aberta. A resposta para isso é acrescentar a hipótese de B ser sólido, conforme veremos a seguir.

Proposição 98. *Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos de Hausdorff reais e $A : X \longrightarrow Y$ uma transformação linear, contínua e aberta. Se $B \subset X$ é convexo e $\mathrm{int}(B) \neq \varnothing$, então A é B-aberta.*

Demonstração. Seja U um aberto de X tal que $B \cap U \neq \varnothing$. Usando a hipótese de B ser sólido, segue da Proposição 43 que $\overline{B} = \overline{\mathrm{int}(B)}$. Com isso, $\mathrm{int}(B) \cap U \neq \varnothing$. De fato, como existe $x \in B \cap U$, em particular, $x \in \overline{\mathrm{int}(B)}$ e U é uma vizinhança de x. Logo, $U \cap \mathrm{int}(B)$ é um aberto não vazio em X. Usando a hipótese de A ser aberta, obtemos que $\varnothing \neq A[U \cap \mathrm{int}(B)] = \mathrm{int}(A[U \cap \mathrm{int}(B)]) \subset \mathrm{int}(A[U \cap B])$, donde resulta que $\mathrm{int}(A[U \cap B]) \neq \varnothing$. ∎

Exemplos apresentados em [8] mostram que a hipótese de B ser sólido não é boa, mas sugerem que B poderia ser sólido em um subespaço vetorial S de X munido com uma topologia $\mathcal{T}$ mais fina que a topologia induzida por X. Assim, S equipado com $\mathcal{T}$ deve ser *continuamente mergulhada* em X, ou seja, a inclusão $S \hookrightarrow X$ é contínua. Neste contexto, obtemos os seguintes resultados.

Teorema 99. *Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos de Hausdorff reais e $A : X \longrightarrow Y$ linear e contínua. Seja $S \subset X$ um EVT, com topologia $\mathcal{T}$, continuamente mergulhada em X. Suponha que a restrição $A|_S : S \longrightarrow Y$ é aberta e que o conjunto convexo $B \subset S$ é sólido na topologia $\mathcal{T}$ de S. Então, A é B-aberta.*

Demonstração. Denotaremos o fecho de $M \subset S$ com respeito a topologia $\mathcal{T}$ por $\overline{M}^{\mathcal{T}}$. Afirmamos primeiramente que $\overline{\overline{M}^{\mathcal{T}}} = \overline{M}$. Com efeito, seja (S, σ) o espaço topológico S com a topologia induzida por X. Visto que $\mathcal{T}$ é mais fina que σ, segue que a identidade $I : (S, \mathcal{T}) \longrightarrow (S, \sigma)$ é contínua e disso temos que $\overline{M}^{\mathcal{T}} = I(\overline{M}^{\mathcal{T}}) \subset \overline{I(M)} = \overline{M}$ e assim $\overline{\overline{M}^{\mathcal{T}}} \subset \overline{M}$. Por outro lado, $M \subset \overline{M}^{\mathcal{T}}$ e, então $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}^{\mathcal{T}}}$.

Denotemos por $\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(B)$ o interior do conjunto B relativo a topologia $\mathcal{T}$ de S. Por hipótese, $\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(B) \neq \varnothing$ e usando a Proposição 43 segue que $\overline{B}^{\mathcal{T}} = \overline{\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(B)}^{\mathcal{T}}$. Tomando o fecho em ambos os lados na última igualdade, resulta em $\overline{B} = \overline{\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(B)}$.

Seja U um aberto de X tal que $B \cap U \neq \varnothing$. Então, existe $x \in B \cap U$. Em particular, $x \in \overline{B} = \overline{\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(B)}$. Note que $U \cap S$ é uma vizinhança de x, e então $\varnothing \neq \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(B) \cap (U \cap S) = \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(B) \cap U$. Logo, $V := \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(B) \cap U$ é aberto não vazio em S, com respeito a topologia $\mathcal{T}$. Usando a hipótese de $A|_S$ ser aberto com respeito a $\mathcal{T}$, resulta que $\varnothing \neq A[V] = \mathrm{int}(A[V]) \subset \mathrm{int}(A[B \cap U])$. Portanto, A é B-aberta. ∎

Combinando o Teorema 99 com o Teorema 94 obtemos o seguinte resultado.

Teorema 100. *Suponha que as hipóteses do Teorema 99 sejam satisfeitas. Se B é denso em $C \subset X$, $d \in \mathrm{int}(A[C])$, então $B \cap A^{-1}(d)$ é denso em $C \cap A^{-1}(d)$.*

Para aplicar este resultado em uma situação concreta é necessário garantir que a restrição da aplicação A ao subespaço S munido com a topologia $\mathcal{T}$ seja aberta. Para isso, precisamos de resultados como por exemplo o Teorema da Aplicação Aberta (Teorema 37). Faremos a seguir uma reinterpretação do Teorema 100 no contexto de F-espaços.

Teorema 101. *Suponha que as condições abaixo são satisfeitas:*

(i) *X é um EVT de Hausdorff real e Y um F-espaço real;*

(ii) *A é uma transformação linear e contínua de X em Y;*

(iii) *$C \subset X$ é não vazio e B convexo e denso em C;*

(iv) *S é um F-espaço real, com topologia $\mathcal{T}$, continuamente mergulhada em X;*

(v) *A restrição de A ao subespaço S, $A|_S : S \longrightarrow Y$, é sobrejetora;*

(vi) *$B \subset S$ é tal que o seu interior com respeito a topologia $\mathcal{T}$ é não vazio, ie, $\operatorname{int}_{\mathcal{T}}(B) \neq \varnothing$.*

Então, $B \cap A^{-1}(d)$ é denso em $C \cap A^{-1}(d)$ sempre que $d \in \operatorname{int}(A[C])$.

Demonstração. Inicialmente note que a topologia $\mathcal{T}$ de S é mais fina que a topologia de S induzida por X e que a aplicação $A|_S$ é contínua e aplica o F-espaço S sobre o F-espaço Y. Pelo Teorema da Aplicação Aberta para F-espaços (Teorema 37), segue que $A|_S$ é aberta. Como por hipótese B é sólido em S com a topologia $\mathcal{T}$, pelo Teorema 99 segue que A é B-aberta e aplicando o Teorema 100, o resultado segue. ∎

3.3 Existência de Extensões Monótonas Suaves

Veremos uma aplicação do Teorema 101 em problemas envolvendo extensões de funções. Para isso, vamos interpretar um dado problema de extensão de função como um problema de interpolação infinita. Antes de enunciarmos este resultado, precisaremos fixar algumas notações e enunciaremos um lema necessário.

Diremos que Ω é um *domínio* em $\mathbb{R}^2$ se for um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$. Denotaremos por $C^k(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$, o espaço das funções de classe C^k em Ω tais que suas derivadas parciais podem ser continuamente estendidas para $\overline{\Omega}$ e $C^{k,k}(\overline{\Omega})$ o espaço das funções f cujas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k f}{\partial x^k}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^k f}{\partial y^k}$ existem e são contínuas em Ω e podem ser continuamente estendidas para $\overline{\Omega}$.

Definição 102. Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^2$. Uma função $f \in C^k(\overline{\Omega})$ é dita ser *não decrescente* (*crescente*) se $f(x) \leq f(y)$ $(f(x) < f(y))$, sempre que $y - x \in \mathbb{R}^2_+ - \{0\}$, para todo $x, y \in \overline{\Omega}$.

O cone das funções $f \in C^k(\overline{\Omega})$ monótonas não decrescentes será denotado por $\text{mon}(C^k(\overline{\Omega}))$.

Observação 103. Vimos nas preliminares, a saber na Observação 13, que os polinômios de Bernstein associados à funções unidimensionais não decrescentes são não decrescentes. Tal afirmação também é válida para o caso bidimensional, sendo a definição de função não decrescente, neste caso, como na Definição 102. Para a verificação de que $B_n(f;(x,y))$ é não decrescente se $f(x,y)$ é não decrescente, basta verificar que a derivada direcional, $D_tB_n(f;(x,y))$ com $t \in [0,1]^2 - \{0\}$, é positiva e utilizar o Teorema do Valor Médio.

O lema a seguir será necessário para fazer a demonstração da aplicação do Teorema 101 e pode ser encontrado com mais detalhes em [2].

Lema 104. *Suponha que Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^s$. Toda função monótona f definida na fronteira de Ω, denotado por $\partial\Omega$, possui uma extensão monótona, F, de f em $\overline{\Omega}$. Além disso, se Ω é convexo e f é contínua em $\partial\Omega$, então F é contínua em $\overline{\Omega}$.*

Apresentaremos a seguir uma prova alternativa do Teorema da Extensão de Dahmen, DeVore e Micchelli [2]. Por simplicidade nos restringimos, como em [2], ao caso bidimensional com $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$.

Teorema 105. *Sejam $f_i \in C^k([0,1])$, $1 \leq k < \infty$, $i = 1, \ldots, 4$ funções estritamente crescentes, i.e, $f_i'(t) > 0$, $t \in [0,1]$, para $i = 1, \ldots, 4$, tal que*

$$f_1(0) = f_2(0), \quad f_2(1) = f_3(0), \quad f_3(1) = f_4(1), \quad f_4(0) = f_1(1) \quad \text{e}$$

$$f_3(t) > f_1(t), \quad f_4(t) > f_2(t), \quad t \in [0,1]. \tag{3.3}$$

Então, existe uma função $f \in \mathrm{mon}(C^{k,k}(\overline{\Omega}))$ tal que para todo $t \in [0,1]$

$$f(t,0) = f_1(t), \quad f(0,t) = f_2(t), \quad f(t,1) = f_3(t), \quad f(1,t) = f_4(t). \tag{3.4}$$

Demonstração. Para a demonstração iremos utilizar o Teorema 101. Sejam

$X = \{f \in C(\overline{\Omega}) : f|_{\partial\Omega} \in C^k(\partial\Omega)\}$,

$C = \mathrm{mon}C(\overline{\Omega}) \cap X$,

$S = C^{k,k}(\overline{\Omega}), \quad B = C \cap S$,

$Y = C^k(\partial\Omega)$,

$A : X \longrightarrow Y$ definida como $Af = f|_{\partial\Omega}$ para todo $f \in X$.

A notação $C^k(\partial\Omega)$ designa o espaço das funções f contínuas na fronteira, $\partial\Omega$, tal que f é C^k em cada parte suave de $\partial\Omega$, ou seja, f é C^k em cada lado do quadrado unitário. Definimos em X a seguinte norma:

$$||f||_X = ||f||_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{i=0}^{1} ||f(\cdot, i)||_{C^k[0,1]} + \sum_{i=0}^{1} ||f(i, \cdot)||_{C^k[0,1]}.$$

Por $||\cdot||_{C(\overline{\Omega})}$ denotamos a norma usual do supremo e por $||\cdot||_{C^k[0,1]}$ denotamos a norma usual em $C^k[0,1]$, que é dada por $||g||_{C^k[0,1]} = ||g|| + ||g'|| + ||g''|| + \cdots + ||g^{(k)}||$ com $||g^{(i)}|| = \sup_{x\in[0,1]} |g^{(i)}(x)|$. Além disso, a topologia em Y será definida pela norma:

$$||g||_Y = \sum_{i=1}^{4} ||g_i||_{C^k[0,1]}$$

onde g_i para $i = 1, \ldots 4$ são as quatro partes da função $g \in Y$ definida de acordo com a convenção (3.4). A norma em S é a usual $C^{k,k}$ norma, que é dada por:

$$||f||_{C^{k,k}(\overline{\Omega})} = ||f||_{C(\overline{\Omega})} + \sup_{y\in[0,1]} ||f(\cdot, y)||_{C^k[0,1]} + \sup_{x\in[0,1]} ||f(x, \cdot)||_{C^k[0,1]}.$$

Iremos agora verificar as hipóteses do Teorema 101. Os espaços X, S e Y são Banach. O espaço S é continuamente mergulhado em X. De fato, considere a identidade $I : S \longrightarrow X$. Mostraremos que I é contínua. Como I é linear, basta verificar que é limitada. Com efeito, observe que $||f(\cdot, i)||_{C^k[0,1]} \leq \sup_{y\in[0,1]} ||f(\cdot, y)||_{C^k[0,1]}$ e $||f(i, \cdot)||_{C^k[0,1]} \leq \sup_{x\in[0,1]} ||f(x, \cdot)||_{C^k[0,1]}$. Com isso, temos:

$$\begin{aligned} ||I(f)||_X = ||f||_X &= ||f||_{C(\overline{\Omega})} + \textstyle\sum_{i=0}^{1} ||f(\cdot, i)||_{C^k[0,1]} + \sum_{i=0}^{1} ||f(i, \cdot)||_{C^k[0,1]} \\ &\leq 2||f||_{C(\overline{\Omega})} + 2\sup_{y\in[0,1]} ||f(\cdot, y)||_{C^k[0,1]} + 2\sup_{x\in[0,1]} ||f(x, \cdot)||_{C^k[0,1]} \\ &= 2||f||_S. \end{aligned}$$

Logo, $||I|| \leq 2$.

Verifiquemos que $A|_S : S \longrightarrow Y$ é sobrejetora. Dado $f \in Y$, considere $\varphi, \psi \in C^k[0, 1]$ dadas por $\varphi(x) = 1-x$ e $\psi(y) = 1-y^2$ com $\varphi(0) = \psi(0) = 1$ e $\varphi(1) = \psi(1) = 0$. Considere a função soma booleana interpolante,

$$\begin{aligned} L(x, y) := {} & \varphi(x)f(0, y) + (1 - \varphi(x))f(1, y) + \psi(y)f(x, 0) \\ & +(1 - \psi(y))f(x, 1) - \{f(0, 0)\varphi(x)\psi(y) \\ & +f(0, 1)\varphi(x)(1 - \psi(y)) + f(1, 0)(1 - \varphi(x))\psi(y) \\ & +f(1, 1)(1 - \varphi(x))(1 - \psi(y))\}, \text{ para cada } (x, y) \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

A função $L \in C^{k,k}(\overline{\Omega})$, pois as funções f, φ e ψ são C^k. E ainda, $L(0, y) = f(0, y)$, $L(1, y) = f(1, y)$, $L(x, 0) = f(x, 0)$ e $L(x, 1) = f(x, 1)$. Portanto, $A(L) = f$.

Agora, iremos verificar que $B = C \cap S$ é denso em C. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ e $f \in C$, pelo Teorema de Bernstein, existe uma sequência de polinômios de Bernstein $(B_n(f, \cdot))_n$ tal que $||f - B_n(f, \cdot)||_{C(\overline{\Omega})} \longrightarrow 0$. Como cada $B_n(f, \cdot)$ é um polinômio, é trivial que $B_n(f, \cdot) \in S$. Pela Observação 103, garantimos que $B_n(f, \cdot) \in C$. Logo, $B_n(f, \cdot) \in B$. Usando o fato, de que as derivadas dos polinômios de Bernstein associados a f convergem para as derivadas da f, conforme a Observação 13, segue que $||f - B_n(f, \cdot)|| = ||f - B_n(f, \cdot)||_X \longrightarrow 0$ e isso conclui a afirmação.

O interior de B é não vazio, com respeito a topologia da norma de S, porque as funções estritamente crescentes pertencentes a B pertencem ao $\text{int}(B)$.

Para finalizar, precisamos saber o que significa $d \in \text{int}(A[C])$. Visto que Ω é um domínio limitado e convexo, segue do Lema 104 que toda f contínua e monótona não decrescente em $\partial\Omega$ possui um extensão $F \in C$ tal que $A(F) = F|_{\partial\Omega} = f$. E disso concluímos que $A[C] = \text{mon}(C(\partial\Omega))$. Consequentemente, dada uma função $f|_{\partial\Omega}$ descrita através das funções $f_1, \ldots, f_4$, da hipótese do Teorema 105, concluímos que $f|_{\partial\Omega} \in \text{int}(A[C])$ pois cada f_i é estritamente crescente e a condição (3.3) é satisfeita. Dessa maneira, segue do Teorema 101 que existe $f \in B$ não decrescente pertencente a $C^{k,k}(\overline{\Omega})$ satisfazendo (3.4).

■

Bibliografia

[1] A. Dahara and J. Dutta, *Optimality conditions in convex optimization - A finite-dimensional view*, USA: New York, CRC Press, 2012.

[2] W. Dahmen and R.A Devore and C.A. Micchelli, *On monotone extensions of boundary data*, Numer. Math. 60 (1992), 477-492.

[3] F. Deutsch, *Best approximation in inner product space*, USA: New York, Springer,1936.

[4] R. B. Homes, *Geometric functional analysis and its applications*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 24, USA: New York, Springer, 1975.

[5] E. H. Kingsley, *Bernstein polynomials for functions of two variables of class $C^{(k)}$*, Proceedings of the American Mathematical Society, 2 (1951), pp.64-71.

[6] E. Kowalski, *Bernstein polynomials and brownian motion*, The American Mathematical Monthly 10 (2006), 865-886.

[7] H. N. Mhaskar and D. V. Pai, *Fundamentals of approximation theory*, USA: Los Angeles, Oxford, 2007.

[8] B. Mulansky, M. Neamtu, *Interpolation and approximation from convex sets*, J. Approx. Theory 92 (1998) 82-100.

[9] B. Mulansky, M. Neamtu, *Interpolation and approximation from convex sets. II. Infinite-dimension interpolation*, J. of Computation and Applied Mathematics 119 (2000) 333-346.

[10] J. R. Munkres, *Topology*, 2nd ed., USA: New Jersey, Prentice Hall, 1975.

[11] J. D. Philip, *Interpolation and approximation*, USA: New York, Dover, 1975.

[12] W. Rudin, *Functional analysis*, USA: New York, McCraw-Hill, 1991.

[13] I. Wilde, *Topological vector spaces, lecture notes*, King's College London.

[14] W.H. Wong, *On constrained multivariate splines and their approximations*, Numer. Math. 43 (1989),141-152.

[15] C. Zalinescu, *Convex analysis in general vector space*, USA: New Jersey, Word Scientific, 1952.

Índice Remissivo