ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A EQUAÇÃO DE RICCATI E SUA CONTRIBUIÇÃO AOS SISTEMAS DINÂMICOS

ANGELA RIBEIRO LEMOS

ORIENTADOR:
Prof. Jerzy Tadeuz Sielawa

CO-ORIENTADOR:
Prof. Márcio Tadeu de Almeida

Itajubá - MG
1993

Ministério da Educação
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

A N E X O I

PRONUNCIAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

A Banca Examinadora, abaixo assinada, nomeada por Portaria nº 153 de 05.04.93, considerando o resultado do Julgamento da Prova de Defesa Pública da Dissertação de Mestrado intitulada: ***"A Equação de Ricatti e sua Contribuição aos Sistemas Dinâmicos"*** apresenta pronunciamento no sentido de que o Coordenador dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Escola Federal de Engenharia de Itajubá solicite ao DRA (Departamento de Registro Acadêmico) a expedição do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica, na Área de Máquinas de Fluxo, satisfeitas as demais exigências regimentais, a **Angela Ribeiro Lemos**.

Itajubá, 07 de Abril de 1993.

Prof. Demétrio Bastos Netto
1º Examinador - INPE

Prof. Márcio Tadeu de Almeida
2º Examinador

Genézio José Menon
Prof. Genézio José Menon
3º Examinador - EFEI

Prof. Jerzy Tadeuz Sielawa
4º Examinador - EFEI - Orientador

Ministério da Educação
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

A N E X O I I

FOLHA DE JULGAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

Título da Dissertação ***" A Equação de Ricatti e sua Contribuição aos Sistemas Dinâmicos "***.

Autor: **ANGELA RIBEIRO LEMOS**

JULGAMENTO

EXAMINADORES	CONCEITO	RUBRICA
1º	A	
2º	A	
3º	A	
4º	A	

Resultado Médio: Conceito A, ou seja, Aprovado

Observações:

Itajubá, 07 de Abril de 1993.

Prof. Demétrio Bastos Netto
1º Examinador - INPE

Prof. Márcio Tadeu de Almeida
2º Examinador

Genésio José Menon
Prof. Genézio José Menon
3º Examinador - EFEI

Prof. Jerzy Tadeuz Sielawa
4º Examinador - Orientador - EFEI

A EQUAÇÃO DE RICCATI E SUA CONTRIBUIÇÃO AOS SISTEMAS DINÂMICOS

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado da Escola Federal de Engenharia de Itajubá, como um dos requisitos à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Jerzy Tadeuz Sielawa
Escola Federal de Engenharia de Itajubá.

Itajubá
Escola Federal de Engenharia de Itajubá
1993

A Deus

À memória de meu pai
Antonio

À minha querida mãe
Francisca

AGRADECIMENTOS

Ao amigo e orientador Prof. Jerzy Tadeuz Sielawa, pelo carinho e apoio prestados no decorrer deste trabalho.

Ao Prof. Élcio Rogério Barrak, Diretor do ICI, pelo apoio prestado na confecção desta dissertação.

Ao Prof. Ernani Ferreira da Silva, Prof. Sdnei de Brito Alves, Prof. Newton de Figueiredo Filho e Prof. Américo Tetuo Miyazima pela amizade e colaboração.

A Matilde B. Pereira pelo excelente trabalho de digitação do manuscrito.

RESUMO

A teoria das equações de Riccati, na sua forma escalar e matricial, é desenvolvida sistematicamente de modo a oferecer o embasamento teórico necessário à análise do Método da Transformação Generalizada de Riccati, que é apresentado logo após. O referido método utiliza uma transformação de variáveis para converter um problema de valores de contorno de dois pontos em um problema de valor inicial constituído pela equação de Riccati. Esta conversão permite eliminar a instabilidade numérica associada ao cálculo numérico direto de problemas de valores de contorno de dois pontos que apresentam soluções exponenciais positivas.

O Método da Transformação Generalizada de Riccati mostra-se uma técnica computacionalmente eficiente de ampla aplicação em engenharia mecânica.

ABSTRACT

The theory of Riccati equation, in its scalar and matricial form, is sistematically developed in order to give necessary theoretical knowledge to analyze Riccati Generalized Transformation Method, wich is subsequently presented. The above mentioned method uses a change of variables to transform two-point boundary value problem into initial value problem, constituted by Riccati equation. This transformation allows us to eliminate the numerical instabilities associated with direct numerical determination of two-point boundary value problems containing positive exponential solutions.

Riccati Generalized Transformation Method shows to be a computationally efficient tecnique with ample use in mechanical engineering.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS

CARACTERES LATINOS

Símbolo	**Designação**
a	constante real
a_0, a_1, a_2	constantes reais
A	função genérica escalar (Cap. 3), função matricial
b	constante real
B	função escalar genérica (Cap. 3); função matricial genérica (Cap. 4 e 6)
B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}	funções matriciais constantes
c	constante real
c_1, c_2, c_3, c_4	constantes reais
C	constante de integração (Cap. 3); função matricial genérica (Cap.4)
$\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$	funções matriciais constantes
d	constante real
D	função matricial genérica; domínio (Apêndice A)
E	função matricial genérica; módulo de Young (Cap. 7)

f .... função escalar genérica

F .... função matricial genérica

g .... função escalar genérica

g_1, g_2, g_3 e g_4 .... funções escalares genéricas

G .... função matricial genérica

G_1, G_2, G_3, G_4 .... funções matriciais genéricas

h .... função escalar genérica

H, H^* .... funções matriciais genéricas

H_1, H_2, H_1^*, H_2^* .... funções matriciais genéricas

i .... índice

I .... intervalo de definição

I .... matriz identidade

j .... índice

J .... segundo momento da área

k .... constante real

K .... função matricial constante

L .... função matricial genérica

ℓ .... comprimento intervalo integração

m .... constante real

M .... função escalar genérica (Cap. 3); função matricial genérica (Cap.4)

M_1, M_2, M_3, M_4 .... funçẽs matriciais genéricas

n .... constante inteira positiva

n_1, n_2 .... constantes inteiras positivas

N .... função matricial genérica

N_1, N_2, N_3, N_4 .... funções matriciais genéricas

$\mathbb{O}$ .... função nula

p .... função escalar genérica

P .... função escalar genérica (Cap. 2 e 3); função matricial genérica (Cap. 4)

q .... função escalar genérica

Q .... função escalar genérica (Cap. 2 e 3); função matricial genérica (Cap. 4)

R .... função escalar genérica

R_x .... "Cross-ratio"

R_{12} .... solução genérica da equação matricial de Riccati

s .... função escalar genérica

t .... função escalar genérica (Cap. 3); variável independente (Cap. 4, 5 e 6)

T .... função matricial genérica

u .... função escalar genérica

u_1, u_2 .... funções escalares genéricas

u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22} .... funções escalares genéricas

U .... função matricial genérica

U_1 .... função matricial genérica

v .... função escalar genérica

v_1, v_2 .... funções escalares genéricas

V .... funcão matricial genérica

x .... variável independente (Cap.2, 3 e 7); variável dependente (Cap. 5)

X .... função matricial genérica

X_1, X_2, X_3, X_4 .... funções matriciais genéricas

z .... função escalar genérica

Z .... função matricial genérica

y .... função escalar genérica, solução da equacão escalar de Riccati

y_1, y_2, y_3, y_4 .... soluções particulares da equação escalar de Riccati

Y .... função matricial genérica

W .... função matricial genérica, solução da equação matricial de Riccati

W_1, W_2, W_3, W_4............soluções particulares da equação matricial de Riccati

CARACTERES GREGOS

Símbolo	Designação
α	constante real
β	constante real
γ	função escalar genérica
Γ, Γ^*	funções matriciais genéricas
Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{21}, Γ_{22}	funções matriciais genéricas
Γ^*_{11}, Γ^*_{12}, Γ^*_{21}, Γ^*_{2}	funções matriciais genéricas
Δ	função matricial genérica
η	função escalar genérica
η_1, η_2	funções escalares genéricas
θ_1, θ_2	vetores
Θ	função matricial genérica
μ	coeficiente de Poisson
ξ	variável muda
ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4	funções escalares genéricas
Ξ	matriz fundamental
ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4	funções escalares genéricas
φ	funcão escalar genérica

Φ .... função matricial genérica

ψ .... função escalar genérica

Ψ_1 .... função matricial genérica, variável auxiliar da Transformação Generalizada de Riccati

ω .... frequência natural

Ω .... função matricial genérica

LISTA DE NOTAÇÕES

Símbolo	Designação
$'$	denota diferenciação ordinária
•	indica fim de nota
▪	indica fim de prova
$(\ )^{IV}$	$\frac{d^4(\ )}{dt^4}$
$\lvert\ \rvert$, det	determinante
sinh	seno hiperbólico
cosh	cosseno hiperbólico
tanh	tangente hiperbólica
tan	tangente

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A motivação para elaboração da presente dissertação surgiu da observação da necessidade em se conhecer os fundamentos matemáticos de técnicas utilizadas na resolução de muitos problemas de engenharia. A análise e a interpretação física corretas do comportamento dos resultados matemáticos obtidos com a aplicação dessas técnicas só se fazem possíveis com o domínio da teoria matemática envolvida. A proposta, então, é abordar uma técnica atual e de ampla aplicação em engenharia mecânica concomitantemente a um tratamento sistemático dos conceitos matemáticos intrínsecos a ela.

Os objetivos principais são adquirir o domínio de uma técnica que permita resolver, de modo satisfatório, muitos problemas em engenharia mecânica e internalizar o sentimento da importantíssima inter-relação entre a matemática pura e a engenharia.

O tema escolhido é uma nova técnica que permite resolver problemas de valores de contorno de dois pontos com grande precisão - o Método da Transformação Generalizada de Riccati. Técnicas numéricas usuais de resolução direta de problemas de valores de contorno de dois pontos, frequentemente são acompanhados de sérias instabilidades numéricas, as quais surgem devido a presença de um termo exponencial positivo entre as soluções da equação diferencial que governa o problema. Entretanto, muitos sistemas mecânicos são formulados matematicamente por problemas de valores de contorno de dois pontos onde um termo exponencial negativo é a solução desejada. O acúmulo de erros de fórmula e de arredondamento ao longo dos cálculos faz com que a solução do problema envolva não somente o termo exponencial negativo, mas também o positivo com um pequeno coeficiente. No entanto, como o termo exponencial negativo tende a zero, e o positivo cresce muito rapidamente, este último termo dominará, e a solução numérica será simplesmente um múltiplo do termo exponencial positivo. O Método da Transformação Generalizada de Riccati elimina essa instabilidade numérica com a transformação do problema de valores de contorno de dois pontos original em um problema de valor inicial constituído por uma equação diferencial não-linear de comportamento bastante estável: *a equação de Riccati*. A eficiência desta técnica em eliminar a instabilidade numérica acima referida, explica-se pelas propriedades da equação de Riccati. Por esta razão, os capítulos 3 e 4 são dedicados a um desenvolvimento sistemático da teoria da equação de Riccati na sua forma escalar e matricial. Considerações a respeito do comportamento estável da solução da equação de Riccati são apresentadas no capítulo 5. Estes capítulos preliminares proporcionam os conhecimentos prévios necessários para a análise e compreensão dos fundamentos do Método da Transformação Generalizada de Riccati apresentado no capítulo 6 e, com isto, são alcançados os objetivos a que se propôs o presente trabalho.

CAPÍTULO 2

INTRODUÇÃO HISTÓRICA E REVISÃO DA LITERATURA

2.1. EQUAÇÕES DE RICCATI

Uma equação diferencial ordinária da forma

$$y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0 \tag{2.1}$$

é conhecida hoje como Equação de Riccati Generalizada. A primeira aparição em Análise de uma equação do tipo acima ocorreu em um artigo* publicado em 1694 por John Bernoulli a respeito de geometria diferencial de curvas.

Neste artigo, Bernoulli apresenta a equacão

$$x^2dx + y^2dx = a^2dy \tag{2.2}$$

e declara que não conseguiu resolvê-la.

Entre 1697 e 1704, em várias cartas† escritas a Leibniz, James Bernoulli se refere a essa equação na forma

$$dy = yydx + xxdx \tag{2.3}$$

e declara, mais uma vez, sua inabilidade para resolvê-la. Entretanto, em 1702, James Bernoulli conseguiu reduzir a equação

* Acta Eruditorum publicata Lipsiae, 1694, pp. 435-437 (apud)

† Leibnizens gesamellte Werke, Dritte Falge (Mathematik), III (Halle, 1855) pp (apud)

em uma equação diferencial linear de 2ª ordem. O procedimento de Bernoulli foi fazer na equação

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \tag{2.4}$$

a seguinte substituição de variável:

$$y = -\frac{1}{u}\frac{du}{dx} \tag{2.5}$$

e, deste modo, reduzir a equação original a uma equação diferencial linear homogênea de 2ª ordem na nova variável u. Esta última equação poderia ser resolvida por séries de potências e, assim, obter a solução da equação original como um quociente de duas séries de potências através da relação (2.5). Face esta descoberta, os matemáticos da época voltaram seus estudos ao problema de obter soluções em *termos finitos*.

Vinte anos mais tarde, em 1724, um matemático italiano, Conde Jacopo Riccati, publicou um artigo* no qual fazia referência a seguinte equação diferencial

$$x^m\, dq = du + \frac{uudx}{q} \tag{2.6}$$

equação esta a primeira a receber seu nome. Riccati admitiu que q fosse uma potência de x, ou seja, $q = x^n$, de tal modo a reduzir a equação para

* Acta Eurditorum, Suplementum VIII, 1724, pp. 66-73. (apud)

$$n\,x^{m+n-1} = \frac{du}{dx} + u^2 x^{-n} \qquad (2.7)$$

O artigo de Riccati foi seguido por uma nota* de Daniel Bernoulli mencionando que ele mais três outros membros de sua família haviam obtido os valores de n para os quais a equação (2.7) é resolvida em finitos termos. Esta solução não é conhecida; Daniel Bernoulli ocultou sua solução por um anagrama o qual ainda não foi decifrado.

Um ano após a publicação do anagrama, Daniel Bernoulli publicou sua solução† da equação, escrita na forma equivalente a

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m \qquad (2.8)$$

A solução consiste na determinação de um conjunto de valores de m, a saber

$$m = \frac{-\,4k}{2k \pm 1}$$

onde k é um inteiro positivo, para os quais a equação é integrada em finitos termos.

Devido a importância dada a trabalho de Riccati por Daniel Bernoulli, o nome de Riccati passou a ser associado a um tipo mais geral de equação. Hoje, dá-se o nome de *Equação de Riccati Generalizada* a qualquer equação da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$$

* Ibid pp. 73-75 (apud)

† Exercitationes quaedam mathematicae (Venice, 1724), pp. 77-80; Acta Erudito (apud)

a qual, obviamente, consiste na generalização da equação (2.8).

Em 1763, Euler publicou um artigo* no qual mostrava que, quando uma solução particular y_1 da equação de Riccati generalizada é conhecida, a equação pode ser reduzida a uma equação diferencial de 1ª ordem linear mediante a substuição $y = y_1 + 1/u$, e a solução geral pode, então, ser obtida por intermédio de duas quadraturas. Euler também mostrou que, se duas soluções particulares da equação de Riccati são conhecidas, a equação pode ser resolvida por intermédio de apenas uma quadratura. Estes resultados constituem hoje os teoremas fundamentais da teoria geral da equação de Riccati, tratadas, por exemplo, em [1], [18] e [23].

A teoria geral da equação escalar de Riccati e da sua generalização matricial, sob diversos aspectos científicos, se desenvolveu muito entre os anos de 1950 e 1970. Este desenvolvimento se deve a trabalhos de autores como Reid [2, 7, 9, 12, 15], Coles [3, 16]. Redheffer [4, 5, 8, 11], Levin [6], Bucy [20, 21], Bellman [19], Kaplan e Stock [13] e Jacobson [22], que aplicaram a equação de Riccati à teoria dos Sistemas Dinâmicos, especialmente ao problema de controle. Os resultados apresentados por esses autores que julgamos como fundamentais, encontram-se reunidos e desenvolvidos no presente trabalho.

2.2. TRANSFORMAÇÃO GENERALIZADA DE RICCATI

Rybicki, G.B. e Usher, P.D. [17], em 1966, apresentaram o Método da Transformação Generalizada de Riccati como uma alternativa para o método de "Invariant Imbedding". Foram discutidas a estabilidade numérica do método e a sua relação com o método de "Invariant Imbedding".

Em 1975, Horner [25, 26] empregou o Método da Transformação Generalizada de Riccati no desenvolvimento da técnica Matrizes de Transferência de Riccati para a determinação numérica de

* Novi Comm. Acad. Petrop. VIII (1760-1761), p. 32. (apud)

tensões e deformações em membros estruturais. Os resultados de seu trabalho indicam que o método Matrizes de Transferência de Riccati é numericamente estável e elimina as dificuldades numéricas do método Matrizes de Transferência.

Trabalhos mais recentes, de diversas áreas científicas, dão enfoque à Transformação Generalizada de Riccati como uma ferramenta muito poderosa utilizada para eliminar a instabilidade numérica de métodos numéricos usuais de resolução de problemas de valores de contorno de dois pontos. O mais recente desses trabalhos encontrado, escrito por Chu [27, 28] em 1978, utiliza a Transformação Generalizada de Riccati no desenvolvimento de uma técnica que permite resolver, com precisão, problemas de valores de contorno de dois pontos constituidos por equações diferenciais parciais.

A eficiência da Transformada Generalizada de Riccati em eliminar a instabilidade numérica associada a problemas de valores de contorno que admitem soluções exponenciais positivas, explica-se através das propriedades da equação de Riccati. Daí a motivação para realizar um trabalho no qual a Transformação Generalizada de Riccati fosse apresentada concomitantemente a um tratamento sistemático das propriedades da equação de Riccati.

CAPÍTULO 3

A EQUAÇÃO DE RICCATI

3.1. INTRODUÇÃO

Uma equação diferencial ordinária não-linear de $1^{\underline{a}}$ ordem da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0 \tag{3.1}$$

em que P, Q e R são funções contínuas da variável independente num intervalo I e $P \neq 0$ em I, é conhecida como *Equação de Riccati Generalizada* ou, simplesmente, *Equação de Riccati*.

Ainda não se conhece qualquer método geral de resolução da equação de Riccati, mas um estudo da natureza qualitativa de suas soluções permite levantar um número de fatos concernentes a elas.

3.2. INVARIÂNCIA DA EQUAÇÃO SOB TRANSFORMAÇÃO DE MÖBIUS

Provavelmente a propriedade mais característica (e que resulta em várias outras propriedades) é a invariância da equação de Riccati sob a transformação de Möbius (vide Apêndice B).

É fácil ver que, substituindo

$$y = \frac{a + b\eta}{c + d\eta}, \qquad c + d\eta \neq 0 \tag{3.2}$$

obtemos:

$$y' = \frac{b\eta'\left(c + d\eta\right) - \left(a + b\eta\right)d\eta'}{\left(c + d\eta\right)^2} = \frac{bc\eta' + bd\eta\eta' - ad\eta' - bd\eta\eta'}{\left(c + d\eta\right)^2} =$$

$$= \frac{bc - ad}{\left(c + d\eta\right)^2}\,\eta' \tag{3.3}$$

$$y^2 = \frac{a^2 + 2ab\eta - b^2\eta^2}{\left(c + d\eta\right)^2} \tag{3.4}$$

Substituindo (3.2), (3.3) e (3.4) na equação (3.1) obtemos:

$$\frac{bc - ad}{\left(c + d\eta\right)^2}\,\eta' + P\,\frac{a^2 + 2ab\eta + b^2\eta^2}{\left(c + d\eta\right)^2} + Q\,\frac{ac + \left(ad + bc\right)\eta + bd\eta^2}{\left(c + d\eta\right)^2} +$$

$$+ R\,\frac{c^2 + 2cd\eta + d^2\eta^2}{\left(c + d\eta\right)^2} = 0$$

ou, então:

$$\left(bc-ad\right)\eta' + \left(b^2P + bdQ + d^2R\right)\eta^2 + \left[2abP + \left(ad + bc\right)Q + 2cdR\right]\eta +$$

$$+\left(a^2P + acQ + c^2R\right) = 0$$

Dividindo por $\left(bc - ad\right)$ vem:

$$\eta' + \frac{b^2P + bdQ + d^2R}{bc - ad}\,\eta^2 + \frac{2abP + \left(ad + bc\right)Q + 2cdR}{bc - ad}\,\eta$$

$$+ \frac{a^2P + acQ + c^2R}{bc - ad} = 0 \qquad (3.5)$$

que é, obviamente, uma equação de Riccati.

Nota 1: Em particular, se admitirmos a = 1, b = 0, c = 0, d = 1, obtemos:

$$\eta = 1/y$$

que satisfaz

$$\eta' - R\eta^2 - Q\eta - P = 0$$ ●

3.3. CONSTRUÇÃO DA SOLUÇÃO GERAL A PARTIR DE UMA SOLUÇÃO PARTICULAR

Conhecendo-se uma das soluções particulares da equação (3.1), é possível determinar sua solução geral através de duas quadraturas.

De fato, se y_1 for uma solução particular de (3.1), substituimos:

$$u = \frac{1}{y - y_1} \qquad (3.6)$$

ou seja:

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \tag{3.7}$$

$$y' = y_1' - \frac{1}{u^2}\, u'$$

Substituindo os valores acima na equação (3.1) vem:

$$y_1' - \frac{1}{u^2}\, u' + P\left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2 + Q\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + R = 0$$

ou então:

$$y_1' - \frac{1}{u^2}\, u' + Py_1^2 + 2P\,\frac{1}{u}\, y_1 + P\,\frac{1}{u^2} + Qy_1 + \frac{1}{u}\, Q + R = 0$$

$$\left(y_1' + Py_1^2 + Qy_1 + R\right) - \frac{1}{u^2}\left(u' - 2y_1 Pu - P + Qu\right) = 0$$

Como y_1 satisfaz (3.1), a variável u deve satisfazer

$$u' + \left(Q - 2y_1 P\right)u - P = 0 \tag{3.8}$$

Esta equação é linear, não homogênea, de ordem 1 e, portanto, pode ser resolvida por duas quadraturas (uma, correspondendo à equação homogênea e a outra, à não homogênea).

Nota 1: A solução geral da equação

$$u' + A(x)u = B(x)$$

é

$$u = Ce^{-\int A dx} + e^{-\int A dx} \int B e^{\int A dx}\, dx$$

onde C é constante de integração •

A solução geral de (3.8) é:

$$u = Ce^{-\int \left(Q - 2Py_1\right)dx} + e^{-\int \left(Q - 2Py_1\right)dx} \int P e^{\int \left(Q - 2Py_1\right)dx}\, dx \tag{3.9}$$

A solução geral da equação (3.1), levando em conta (3.7) é:

$$y = y_1(x) + \frac{1}{CA(x) + B(x)} = \frac{Cy_1 A + \left(1 + y_1 B\right)}{CA + B} \tag{3.10}$$

Com A e B claramente definidos pela equação (3.9).

Nota 2: Observemos que a solução (3.10) é uma função fracional linear do parâmetro C (vide Apêndice B), isto é, do tipo

$$y = \frac{Cf(x) + \varphi(x)}{Cg(x) + \gamma(x)} \tag{3.11}$$

Como a equação de RICCATI sempre possui uma solução particular, a solução geral da mesma é constituida sempre de uma função fracional da constante de integração, C. •

Nota 3: Seja a condição inicial associada com a solução (3.11):

$$x = x_0 \Rightarrow y = y_0$$

Chamemos:

$$f(x_0) = f_0,\quad \varphi(x_0) = \varphi_0,\quad g(x_0) = g_0,\quad \gamma(x_0) = \gamma_0$$

Assim, da equação (3.11) resulta que:

$$y_0 = \frac{Cf_0 + \varphi_0}{Cg_0 + \varphi_0}$$

Logo, C é transformação de Möbius de y_0 (vide Apêndice B). De fato:

$$Cf_0 + \varphi_0 = y_0\, Cg_0 + y_0\gamma_0$$

$$C = \frac{y_0\gamma_0 - \varphi_0}{-y_0 g_0 + f_0}$$

Como sabemos de (3.11), a solução geral da equação de RICCATI é função fracional linear de C; sendo C, por seu turno, transformada de Möbius de y_0, a solução y da equação de Riccati é função fracional linear de y_0.

De fato, substituindo C na equação (3.11) vem:

$$y = \frac{\dfrac{y_0\gamma_0 - \varphi_0}{-y_0g_0 + f_0} f(x) + \varphi(x)}{\dfrac{y_0\gamma_0 - \varphi_0}{-y_0g_0 + f_0} f(x) + \gamma(x)} =$$

$$= \frac{\left(y_0\gamma_0 - \varphi_0\right)f(x) + \left(-y_0g_0 + f_0\right)\varphi(x)}{\left(y_0\gamma_0 - \varphi_0\right)g(x) + \left(-y_0g_0 + f_0\right)\gamma(x)} =$$

$$= \frac{y_0\left(\gamma_0 f(x) - g_0\varphi(x)\right) + \left(f_0\varphi(x) - \varphi_0 f(x)\right)}{y_0\left(\gamma_0 g(x) - g_0\gamma(x)\right) + \left(f_0\gamma(x) - \varphi_0 g(x)\right)}$$

Desta maneira vemos que a solução geral da equação de Riccati é função fracional linear do seu valor inicial $y_0 = y(x_0)$. ●

3.4. CONSTRUÇÃO DA SOLUÇÃO GERAL A PARTIR DE DUAS SOLUÇÕES PARTICULARES

Conhecendo-se duas soluções particulares distintas da equação (3.1), é possível determinar sua solução geral através de uma única quadratura.

De fato, se y_1 e y_2 forem duas soluções particulares, substituimos

$$u = \frac{y - y_1}{y - y_2} \qquad (3.12)$$

ou seja

$$y - y_1 = u\left(y - y_2\right)$$

$$y = \frac{y_1 - uy_2}{1 - u} \qquad (3.13)$$

Daí:

$$y' = \frac{\left(y_1' - u'y_2 - uy_2'\right)\left(1 - u\right) - \left(y_1 - uy_2\right)\left(-u'\right)}{\left(1 - u\right)^2}$$

$$y' = \frac{\left(y_1 - y_2\right)u' + y_2' u^2 - \left(y_1' + y_2'\right)u + y_1'}{\left(1 - u\right)^2} \qquad (3.14)$$

$$Py^2 = \frac{Py_2^2 u^2 - 2Py_1y_2u + Py_1^2}{\left(1 - y\right)^2} \qquad (3.15)$$

$$Qy = \frac{Q\left(y_1 - y_2u\right)\left(1 - u\right)}{\left(1 - u\right)^2} = \frac{Qy_2u^2 - Q\left(y_1 + y_2\right)u + Qy_1}{\left(1 - u\right)^2} \qquad (3.16)$$

$$R = \frac{R\left(1 - u\right)^2}{\left(1 - u\right)^2} = \frac{Ru^2 - 2Ru + R}{\left(1 - u\right)^2} \qquad (3.17)$$

Substituindo (3.14), (3.15), (3.16) e (3.17) na equação (3.1), vem:

$$\left(y_1 - y_2\right)u' + y_2'u^2 - \left(y_1' + y_2'\right)u + y_1' + Py_2^2u^2 - 2Py_1y_2u + Py_1^2 +$$

$$+ Qy_2u^2 - Q\left(y_1 + y_2\right)u + Qy_1 + Ru^2 - 2Ru + R = 0$$

Ordenando os termos, obtemos

$$\left(y_1' + Py_1^2 + Qy_1 + R\right) + \left(y_2' + Py_2^2 + Qy_2 + R\right)u^2 + \left(y_1 - y_2\right)u' +$$

$$+ \left[\left(-y_1' - Qy_1 - R\right)u + \left(-y_2' - Qy_2 - R\right)u - 2Py_1y_2\right] = 0 \qquad (3.18)$$

Mas, como y_1 e y_2 satisfazem a equação (3.1), teremos:

$$-y_1' - Qy_1 - R = Py_1^2$$

$$-y_2' - Qy_2 - R = Py_2^2$$

e assim, a equação (3.18) fica:

$$\left(y_1 - y_2\right)u' + \left(Py_1^2 - 2Py_1y_2 + Py_2^2\right) u = 0$$

ou, então, se $y_1 \neq y_2$:

$$u' + P\left(y_1 - y_2\right) u = 0 \qquad (3.19)$$

de onde, após uma única quadratura:

$$u = Ce^{\int P\left(y_2 - y_1\right)dx} \qquad (3.20)$$

ou, então, da equação (3.12)

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = Ce^{\int P\left(y_2 - y_1\right)dx} \qquad (3.21)$$

Logo, recorrendo à (3.13)

$$y = \frac{y_1 - C\, y_2 e^{\int P\left(y_2 - y_1\right)dx}}{1 - Ce^{\int P\left(y_2 - y_1\right)dx}} \qquad (3.22)$$

que é fração linear do parâmetro C (vide a NOTA 2 da seção 3.3).

3.5. CONSTRUÇÃO DA SOLUÇÃO GERAL A PARTIR DE TRÊS SOLUÇÕES PARTICULARES

Recorrendo à (3.21), pondo C = C', obtemos uma solução particular da equação (3.1), digamos y_3. Assim

$$\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C' e^{\int P\left(y_1 - y_2\right)dx} \tag{3.23}$$

Dividindo (3.23) por (3.21), obtemos:

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} \; \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{C'}{C} \; (= \text{cte}) \tag{3.24}$$

Substituindo-se C'/C por C, a equação (3.24) pode ser escrita

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} = C \; \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} \tag{3.25}$$

Calculando y, obtemos:

$$y = \frac{Cy_1\left(y_3 - y_2\right) - y_2\left(y_3 - y_1\right)}{C\left(y_3 - y_2\right) - \left(y_3 - y_1\right)} \tag{3.26}$$

O resultado acima constitui solução geral da equação (3.1),

pois depende de uma constante de integração, C.
Por outro lado, a expressão (3.26), mais uma vez, constitui fração linear do parâmetro C, do tipo (3.11).

3.6. QUATRO SOLUÇÕES PARTICULARES - "CROSS RATIO"

Define-se "Cross-ratio" (vide apêndice B) como:

$$R_X(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{a_1 - a_3}{a_1 - a_4} \div \frac{a_2 - a_3}{a_2 - a_4}$$

ou então,

$$R_X(a_1,a_2,a_3,a_4) = \frac{\left(a_1 - a_3\right)\left(a_2 - a_4\right)}{\left(a_1 - a_4\right)\left(a_2 - a_3\right)} \tag{3.27}$$

Da equação (3.25) vemos que para qualquer solução $y = y_4$ da equação (3.1) temos

$$\frac{y_3 - y_1}{y_4 - y_1} = C\,\frac{y_3 - y_2}{y_4 - y_2} \tag{3.28}$$

ou, então

$$\frac{y_1 - y_3}{y_1 - y_4} \cdot \frac{y_2 - y_4}{y_2 - y_3} = C \tag{3.29}$$

de onde vem que para uma determinada equação de Riccati com soluções particulares y_1, y_2, y_3 e y_4

$$R_x(y_1, y_2, y_3, y_4) = C \tag{3.30}$$

Nota 1: Como sabemos do Apêndice B, se aplicarmos a transformação de Möbius às funções y_1, y_2, y_3, y_4

$$\eta_i = \frac{a + by_i}{c + dy_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{3.31}$$

teremos

$$R_x(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = R_x(y_1, y_2, y_3, y_4) \tag{3.32}$$

Por outro lado, sabemos da Nota 3 da seção 3.3 que as soluções da equação de Riccati são transformações de Möbius aplicadas às condições iniciais num ponto x_0.

Sejam

$$y_{0i} = y_i(x_0)$$

Logo,

$$R_x(y_1, y_2, y_3, y_4) = R_x(y_{01}, y_{02}, y_{03}, y_{04}) \quad \bullet \tag{3.33}$$

3.7. FRAÇÃO LINEAR DE UMA CONSTANTE SATISFAZ A EQUAÇÃO DE RICCATI

Na Nota 2 da seção 3.3 mostramos que a solução geral da equação de Riccati (3.1) sempre é fração linear da constante de integração, isto é

$$y = \frac{Cf(x) + \varphi(x)}{Cg(x) + \gamma(x)} \tag{3.34}$$

Agora mostraremos que, inversamente, qualquer fração linear do tipo (3.34) com

$$f\gamma - g\gamma \neq 0 \tag{3.35}$$

ou seja, irredutível (vide apêndice A), satisfaz uma equação de Riccati.

Prova: vai ser conduzida por construção, isto é, construiremos a equação que é satisfeita por (3.34):

Da equação (3.34) resulta que

$$\left(Cg + \gamma\right)y = Cf + \varphi$$

$$C = \frac{-\gamma y + \varphi}{gy - f} \tag{3.36}$$

Diferenciando (3.34), vem

$$y' = \frac{\left(Cf' + \varphi'\right)\left(Cg + \gamma\right) - \left(Cf + \varphi\right)\left(Cg' + \gamma'\right)}{\left(Cg + \gamma\right)^2}$$

Mas, da equação (3.34)

$$Cf + \varphi = \left(Cg + \gamma\right)y$$

Logo

$$y' = \frac{\left(Cf' + \varphi'\right)\left(Cg + \gamma\right) - \left(Cg + \gamma\right)y\left(Cg' + \gamma'\right)}{\left(Cg + \gamma\right)^2} =$$

$$= \frac{C\left(-g'y + f'\right) + \left(-\gamma'y + \varphi'\right)}{Cg + \gamma} \tag{3.37}$$

Substituindo (3.36) na equação (3.37), vem:

$$y' = \frac{\left(-\gamma y + \varphi\right)\left(f' - g'y\right) + \left(\varphi' - \gamma'y\right)\left(gy - f\right)}{\left(-\gamma y + \varphi\right)g + \left(gy - f\right)\gamma} =$$

$$= \frac{-f'\gamma y + g'\gamma y^2 + f'\varphi - g'\varphi y + g\varphi'y - f\varphi' - g\gamma'y^2 + f\gamma'y}{-g\gamma y + g\varphi + g\gamma y - \gamma f}$$

Ordenando os termos, obtemos:

$$y' + \frac{g'\gamma - g\gamma'}{f\gamma - g\gamma} y^2 + \frac{f\gamma' - f'\gamma + g\varphi' - g'\varphi}{f\gamma - g\varphi} y + \frac{f'\varphi - f\varphi'}{f\gamma - g\varphi} = 0$$

(3.38)

que é, obviamente, uma equação de Riccati. ∎

3.8. CONSTRUÇÃO DA EQUAÇÃO DE RICCATI DADAS TRÊS SOLUÇÕES PARTICULARES

Como sabemos, a solução geral da equação de Riccati, conhecidas três soluções particulares y_1, y_2 e y_3, é dada por:

$$y = \frac{Cy_1\left(y_3 - y_2\right) - y_2\left(y_3 - y_1\right)}{C\left(y_3 - y_2\right) - \left(y_3 - y_1\right)} \tag{3.39}$$

Mas, de acordo com o exposto na seção 3.7, dada a solução na forma

$$y = \frac{Cf(x) + \varphi(x)}{Cg(x) + \gamma(x)} \quad , \tag{3.40}$$

a equação de Riccati correspondente é da forma

$$y' + \frac{M}{P} y^2 + \frac{N}{P} y + \frac{Q}{P} = 0$$

onde, comparando com (3.38):

$$M = g'\gamma - g\gamma' \tag{3.41}$$

$$N = f\gamma' - f'\gamma + g\varphi' - g'\varphi \tag{3.42}$$

$$Q = f'\varphi - f\varphi' \tag{3.43}$$

$$P = f\gamma - g\varphi \tag{3.44}$$

Comparando (3.39) e (3.40) vemos que:

$$f(x) = y_1\left(y_3 - y_2\right)$$

$$\varphi(x) = y_2\left(y_1 - y_3\right)$$

$$g(x) = y_3 - y_2$$

$$\gamma(x) = y_1 - y_3$$

Logo, obtemos:

$$M = g'\gamma - g\gamma' = \left(y_3' - y_2'\right)\left(y_1 - y_3\right) - \left(y_3 - y_2\right)\left(y_1' - y_3'\right) =$$

$$= y_1 y_3' - y_1 y_2' - y_3 y_3' + y_3 y_2' - y_3 y_1' + y_3 y_3' + y_2 y_1' - y_2 y_3' =$$

$$= y_1'\left(y_2 - y_3\right) + y_2'\left(y_3 - y_1\right) + y_3'\left(y_1 - y_2\right) \tag{3.45}$$

$$N = f\gamma' - f'\gamma + g\varphi' - g'\varphi =$$

$$= \left(y_1y_3 - y_1y_2\right)\left(y_1' - y_3'\right) - \left(y_1'y_3 + y_1y_3' +\right.$$

$$\left. - y_1'y_2 - y_1y_2'\right)\left(y_1 - y_3\right) + \left(y_3 - y_2\right)\left(y_2'y_1 +\right.$$

$$\left. + y_2y_1' - y_2'y_3 - y_2y_3'\right) - \left(y_3' - y_2'\right)\left(y_1y_2 - y_2y_3\right) =$$

$$= y_1'\left(y_1y_3 - y_1y_2 - y_1y_3 + y_3^2 + y_1y_2 - y_2y_3 + y_2y_3 - y_2^2\right) +$$

$$+ y_2'\left(y_1^2 - y_1y_3 + y_1y_3 - y_1y_2 - y_3^2 + y_2y_3 + y_1y_2 - y_2y_3\right) +$$

$$+ y_3'\left(-y_1y_3 + y_1y_2 - y_1^2 + y_1y_3 - y_2y_3 + y_2^2 - y_1y_2 + y_2y_3\right) =$$

$$= y_1'\left(y_3^2 - y_2^2\right) + y_2'\left(y_1^2 - y_3^2\right) + y_3'\left(y_2^2 - y_1^2\right) \qquad (3.46)$$

$$Q = f'\varphi - f\varphi' = \left[y_1'\left(y_3 - y_2\right) + y_1\left(y_3' - y_2'\right)\right] y_2\left(y_1 - y_3\right) +$$

$$- y_1\left(y_3 - y_2\right) \left[y_2'\left(y_1 - y_3\right) + y_2\left(y_1' - y_3'\right) \right] =$$

$$= y_1'\left[\left(y_3 - y_2\right)\left(y_1 - y_3\right)y_2 - y_2 y_1\left(y_3 - y_2\right)\right] +$$

$$+ y_2'\left[-y_1 y_2\left(y_1 - y_3\right) - y_1\left(y_3 - y_2\right)\left(y_1 - y_3\right)\right] +$$

$$+ y_3' \left[y_1 y_2\left(y_1 - y_3\right) + y_1 y_2\left(y_3 - y_2\right)\right] = y_1'\left[\left(y_3 - y_2\right)\left(y_1 y_2 +\right.\right.$$

$$\left.\left. - y_2 y_3 - y_1 y_2\right)\right] + y_2' \left[\left(y_1 - y_3\right)\left(- y_1 y_2 - y_1 y_3 + y_1 y_2\right)\right]$$

$$+ y_3' \left[y_1^2 y_2 - y_1 y_2 y_3 + y_1 y_2 y_3 - y_1 y_2^2\right] = y_1' y_2 y_3\left(y_2 - y_3\right) +$$

$$- y_2' y_1 y_3\left(y_3 - y_1\right) + y_3' y_1 y_2\left(y_1 - y_2\right) \qquad (3.47)$$

$$P = f\gamma - g\varphi = y_1\left(y_3 - y_2\right)\left(y_1 - y_3\right) - \left(y_3 - y_2\right) y_2\left(y_1 - y_3\right) =$$

$$= \left(y_1 - y_2\right)\left(y_2 - y_3\right) - \left(y_3 - y_1\right) \qquad (3.48)$$

Assim, a equação de Riccati satisfeita por

$y = y_1$, $y = y_2$ e $y = y_3$

é

$$y' + \frac{y_1'\left(y_2 - y_3\right) + y_2'\left(y_3 - y_1\right) + y_3'\left(y_1 - y_2\right)}{\left(y_1 - y_2\right)\left(y_2 - y_3\right)\left(y_3 - y_1\right)} y^2 +$$

$$+ \frac{y_1'\left(y_3^2 - y_2^2\right) + y_2'\left(y_1^2 - y_3^2\right) + y_3'\left(y_2^2 - y_1^2\right)}{\left(y_1 - y_2\right)\left(y_2 - y_3\right)\left(y_3 - y_1\right)} y +$$

$$+ \frac{y_1'y_2y_3\left(y_2 - y_3\right) + y_2'y_1y_3\left(y_3 - y_1\right) + y_3'y_1y_2\left(y_1 - y_2\right)}{\left(y_1 - y_2\right)\left(y_2 - y_3\right)\left(y_3 - y_1\right)} = 0$$

(3.49)

3.9. EQUIVALÊNCIA COM EQUAÇÃO DIFERENCIAL LINEAR HOMOGÊNEA DE 2ª ORDEM

Vamos agora mostrar que, por uma mudança adequada de variáveis, podemos estabelecer uma relação entre uma equação de Riccati e uma equação diferencial linear homogênea de 2ª ordem.

· Seja a equação de Riccati dada por (3.1) e façamos a seguinte mudança de variável:

$$y = \frac{u'}{Pu} \quad , \quad u = u(x) \tag{3.50}$$

onde y é qualquer solução da equação (3.1).

Deste modo:

$$y' = \frac{u''Pu - u'\left(P'u + Pu'\right)}{\left(Pu\right)^2} = \frac{u''Pu - P'uu' - P\left(u'\right)^2}{P^2u^2} \tag{3.51}$$

Substituindo (3.50) e (3.51) na equação (3.1), vem:

$$\frac{Puu'' - P'uu' - P\left(u'\right)^2}{P^2u^2} + \frac{P\left(u'\right)^2}{P^2u^2} + \frac{Qu'}{Pu} + R = 0 \quad \Big| \; . \; Pu$$

$$u'' - \frac{P'u'}{P} + Qu' + RPu = 0$$

$$u'' + \left(Q - \frac{P'}{P}\right)u' + RPu = 0 \tag{3.52}$$

A equação (3.52) é uma equação diferencial linear homogênea de 2ª ordem.

· Reciprocamente, qualquer equação diferencial linear homogênea de 2ª ordem do tipo

$$u'' + s(x)u' + t(x)u = 0 \quad , \quad u = u(x) \tag{3.53}$$

pode ser transformada em uma equação de Riccati. Para isso, façamos a seguinte substituição de variável:

$$\frac{u'}{u} = h(x)y(x) \tag{3.54}$$

onde h é uma função *arbitrária* não nula.

Integrando ambos os lados a expressão (3.54), com relação a x, vem:

$$\int \frac{u'}{u}\, dx = \int^x h(\xi)y(\xi)d\xi$$

$$\ell_n \, |u| = \int^x h(\xi)y(\xi)d\xi$$

$$u = e^{\int^x h(\xi)y(\xi)d\xi} \tag{3.55}$$

Deste modo:

$$u' = hye^{\int^x h(\xi)y(\xi)d\xi} \tag{3.56}$$

$$u'' = h'ye^{\int^x h(\xi)y(\xi)d\xi} + hy'e^{\int^x h(\xi)y(\xi)d\xi} + h^2y^2e^{\int^x h(\xi)y(\xi)d\xi} \tag{3.57}$$

Substituindo (3.55), (3.56) e (3.57) na equação (3.53), vem:

$$h'ye^{\int^x h(\xi)y(\xi)d\xi} + hy'e^{\int^x h(\xi)y(\xi)d\xi} + h^2y^2e^{\int^x h(\xi)y(\xi)d\xi} +$$

$$+ shye^{\int^x h(\xi)y(\xi)d\xi} + te^{\int^x h(\xi)y(\xi)d\xi} = 0$$

$$h'y + hy' + h^2y^2 + shy + t = 0$$

$$y' + hy^2 + \left(s + \frac{h'}{h}\right)y + \frac{t}{h} = 0 \tag{3.58}$$

que é, obviamente, equação de Riccati onde h é uma função parâmetro.

Nota 1: Devemos observar que a correspondência entre a equação (3.1) e a equação (3.52) é unívoca. Entretanto, a correspondência entre a equação (3.53) e a equação de Riccati (3.58) *não* é unívoca (a função h é uma função parâmetro). A uma determinada equação diferencial linear homogênea de $2^{\underline{a}}$ ordem corresponde um *conjunto* de equações de Riccati. •

Assim, fica demonstrado que a teoria das equações de Riccati pode se basear na teoria das equações diferenciais lineares homogêneas de 2ª ordem.

· Temos que a *solução geral* de (3.52) é de forma:

$$u = C_1 \; u_1(x) + C_2 \; u_2(x) \tag{3.59}$$

onde $u_1(x)$ e $u_2(x)$ são soluções particulares linearmente independentes da equação (3.52). C_1 e C_2 são constantes arbitrárias essenciais.

Sendo assim, qualquer solução y da equação de Riccati, recorrendo-se a (3.50), é dada por:

$$y = \frac{C_1 u_1'(x) + C_2 u_2'(x)}{P\left[C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x)\right]} \tag{3.60}$$

Devemos aqui observar que devido ao fato de u, dado por (3.59) ser a *solução geral* de (3.52), podemos afirmar que (3.60) é a *solução geral* da equação de Riccati, já que y é determinado univocamente por intermédio de u de acordo com (3.50).

Para se obter uma solução *não trivial*, pelo menos uma das constantes arbitrárias C_1 e C_2 tem que ser diferente de zero. Admitindo-se então, que $C_2 \neq 0$ e fazendo:

$$\frac{C_1}{C_2} = C$$

obtemos a seguinte forma para a solução geral da equação de Riccati.

$$y = \frac{Cu_1'(x) + u_2'(x)}{CPu_1(x) + Pu_2(x)} \qquad (3.61)$$

o que sempre pode ser apresentado na forma da expressão (3.34). Com isto, concluimos que (3.34) realmente consiste na forma *geral da solução* geral da equação de Riccati.

Nota 2: A equação (3.26) é, obviamente, uma forma particular da equação (3.61). •

3.10. ASSOCIAÇÃO COM UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL LINEAR MATRICIAL HOMOGÊNEA DE $1^{\underline{a}}$ ORDEM 2X2:

3.10.1. Associação com um Sistema Homogêneo Linear de $1^{\underline{a}}$ Ordem

Seja uma matriz quadrada U de ordem 2:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \qquad (3.62)$$

com u_{11}, u_{12}, u_{21} e u_{22} funções contínuas da variável independente num intervalo I e um vetor coluna

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

satisfazendo a equação matricial

$$V' = UV \tag{3.63}$$

Então a razão v_1/v_2 satisfaz a equação de Riccati (3.1) com $P = u_{21}$, $Q = u_{22} - u_{11}$ e $R = -u_{12}$.

Prova:

A equação matricial

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

equivale ao sistema linear:

$$\begin{cases} v_1' = u_{11}\, v_1 + u_{12}\, v_2 \\ v_2' = u_{21}\, v_1 + u_{22}\, v_2 \end{cases} \tag{3.64}$$

Sejam v_1 e v_2 soluções do sistema (3.64). Queremos verificar se a razão

$$\frac{v_1}{v_2} \tag{3.65}$$

é solução da equação de Riccati.

$$y' + u_{21}\, y^2 - \left(u_{11} - u_{22}\right) y - u_{12} = \mathbb{O} \qquad (3.66)$$

Substituindo (3.65) no lado esquerdo da equação (3.66) temos:

$$LE = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)' + u_{21}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 - \left(u_{11} - u_{22}\right)\left(\frac{v_1}{v_2}\right) - u_{12} =$$

$$= \frac{v_1' v_2 - v_2' v_1}{v_2^2} + u_{21}\,\frac{v_1^2}{v_2^2} - \left(u_{11} - u_{22}\right)\frac{v_1 v_2}{v_2^2} - \frac{u_{12} v_2^2}{v_2^2} =$$

$$= \left[v_1' v_2 - v_2' v_1 + u_{21} v_1^2 - \left(u_{11} - u_{22}\right) v_1 v_2 - u_{12} v_2^2\right] \frac{1}{v_2^2} =$$

$$= \frac{1}{v_2^2}\left[\left(u_{11} v_1 + u_{12} v_2\right) v_2 - \left(u_{21} v_1 + u_{22} v_2\right) v_1 + u_{21} v_1^2 + \right.$$

$$\left. - u_{11} v_1 v_2 + u_{22} v_1 v_2 - u_{12} v_2^2 \right]$$

Os termos entre colchetes se cancelam. Logo $LE = \mathbb{O} = LD$, o que conclui a prova. ∎

3.10.2. Construção da Solução Geral da Equação de Riccati a Partir da Matriz Fundamental do Sistema Associado

Seja equação diferencial matricial

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{3.67}$$

associada à equação de Riccati:

$$y' + g_3 y^2 + \left(g_4 - g_1\right) y - g_2 = 0 \tag{3.68}$$

Se

$$\Xi = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_3 & \xi_4 \end{bmatrix}$$

é a matriz fundamental de (3.67) e C uma constante arbitrária, então:

$$y = \frac{C\xi_1 + \xi_2}{C\xi_3 + \xi_4} \tag{3.69}$$

para $\xi_3 + \xi_4 \neq 0$, é a solução da equação (3.68).

Prova:

Se Ξ é a matriz fundamental de (3.67), então:

$$\begin{bmatrix} \xi_1' & \xi_2' \\ \xi_3' & \xi_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_3 & \xi_4 \end{bmatrix}$$

de onde resulta:

$$\begin{aligned} \xi_1' &= g_1\xi_1 + g_2\xi_3 \\ \xi_2' &= g_1\xi_2 + g_2\xi_4 \\ \xi_3' &= g_3\xi_1 + g_4\xi_3 \\ \xi_4' &= g_3\xi_2 + g_4\xi_4 \end{aligned} \tag{3.70}$$

Substituindo (3.69) no lado esquerdo da equação (3.68), vem:

$$LE = \frac{\left(c\xi_1' + \xi_2'\right)\left(c\xi_3 + \xi_4\right) - \left(c\xi_3' + \xi_4'\right)\left(c\xi_1 + \xi_2\right)}{\left(c\xi_3 + \xi_4\right)^2} +$$

$$+ g_3 \frac{c^2\xi_1^2 + 2c\xi_1\xi_2 + \xi_2^2}{\left(c\xi_3 + \xi_4\right)^2} + \left(g_4 - g_1\right) \frac{c\xi_1 + \xi_2}{c\xi_3 + \xi_4} - g_2 =$$

$$= \frac{1}{\left(c\xi_3 + \xi_4\right)^2} \left[c^2\xi_1'\xi_3 + c\,\xi_1'\xi_4 + c\,\xi_2'\xi_3 + \xi_2'\xi_4 - c^2\xi_3'\xi_1 + \right.$$

$$- c\,\xi_3'\xi_2 - c\,\xi_4'\xi_1 - \xi_4'\xi_2 + c^2 g_3\xi_1^2 + 2cg_3\xi_1\xi_2 + g_3\xi_2^2 +$$

$$\left. + \left(g_4 - g_1\right)\left(c\xi_1 + \xi_2\right)\left(c\xi_3 + \xi_4\right) - g_2\left(c^2\xi_3^2 + 2c\xi_3\xi_4 + \xi_4^2\right)\right]$$

Arrumando os termos:

$$\left(c\xi_3 + \xi_4\right)^2 (LE) = c^2\left(\xi_1'\xi_3 - \xi_3'\xi_1 + g_3\xi_1^2 + g_4\xi_1\xi_3 - g_2\xi_3^2 + \right.$$

$$\left. - g_1\xi_1\xi_3\right) + c\left(\xi_1'\,\xi_4 + \xi_2'\xi_3 - \xi_4'\xi_1 - \xi_3'\xi_2 + 2g_3\xi_1\xi_2 + g_4\xi_1\xi_4 + \right.$$

$$- g_1\xi_1\xi_4 + g_4\xi_2\xi_3 - g_1\xi_2\xi_3 - 2g_2\xi_3\xi_4\Big) + \Big(\xi_2'\xi_4 - \xi_2\xi_4' + g_3\xi_2^2 +$$

$$+ g_4\xi_2\xi_4 - g_1\xi_2\xi_4 - g_4\xi_4^2\Big)$$

Substituindo (3.70) na equação acima, obtemos:

$$\Big(c\xi_3 + \xi_4\Big)^2 \text{(LE)} = c^2\Big(g_1\xi_1\xi_3 + g_2\xi_3^2 - g_3\xi_1^2 - g_4\xi_1\xi_3 + g_3\xi_1^2 +$$

$$+ g_4\xi_1\xi_3 - g_2\xi_3^2 - g_1\xi_1\xi_3\Big) + c\Big(g_1\xi_1\xi_4 + g_2\xi_3\xi_4 + g_1\xi_2\xi_3 +$$

$$+ g_2\xi_4\xi_3 - g_3\xi_1\xi_2 - g_4\xi_1\xi_4 - g_3\xi_1\xi_2 - g_4\xi_2\xi_3 + 2g_3\xi_1\xi_2 +$$

$$+ g_4\xi_1\xi_4 - g_1\xi_1\xi_4 + g_4\xi_2\xi_3 - g_1\xi_2\xi_3 - 2g_2\xi_3\xi_4\Big) + \Big(g_1\xi_2\xi_4 +$$

$$+ g_2\xi_4^2 - g_3\xi_2^2 - g_4\xi_2\xi_4 + g_3\xi_2^2 + g_4\xi_2\xi_4 - g_1\xi_2\xi_4 - g_2\xi_4^2\Big).$$

É fácil ver que os termos acima se cancelam. Logo:

$$\Big(c\xi_3 + \xi_4\Big)^2 \text{(LE)} \equiv 0$$

e, portanto, levando em conta que $C\xi_3 + \xi_4 \neq 0$, LE ≡ 0 ≡ LD

o que conclui a prova. ∎

3.10.3. Construção de uma Solução da Equação de Riccati a Partir da Matriz Fundamental do Sistema Associado

Seja x_0 um ponto do intervalo I e seja a função matricial

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix} \tag{3.71}$$

cujas colunas, os vetores

$$\theta_1(x) = \begin{bmatrix} \xi_1(x, x_0) \\ \xi_3(x, x_0) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \theta_2(x) = \begin{bmatrix} \xi_2(x, x_0) \\ \xi_4(x, x_0) \end{bmatrix} ,$$

são soluções particulares da equação diferencial matricial (3.67) que satisfazem as condições iniciais.

$$\theta_1(x_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \theta_2(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

de modo que $\Theta(x_0) = I$

Então,

$$y = \frac{\xi_1(x, x_0)\ y(x_0) + \xi_2(x, x_0)}{\xi_3(x, x_0)\ y(x_0) + \xi_4(x, x_0)} \tag{3.73}$$

é, para x suficiente próximo de x_0, a solução da equação (3.68) possuindo a condição inicial $y(x_0)$.

Prova:

A existência e unicidade da solução do sistema (3.67), em I, são garantidas pela continuidade das funções g_1, g_2, g_3 e g_4 em I [24].

Não é difícil verificar que os vetores $\theta_1(x_0)$ e $\theta_2(x_0)$ são linearmente independentes. Portanto, $\theta_1(x)$ e $\theta_2(x)$ são soluções linearmente independentes e formam um conjunto fundamental de soluções.

Desta maneira, a solução (3.69) pode ser escrita:

$$y(x, x_0) = \frac{C\xi_1(x, x_0) + \xi_2(x, x_0)}{C\xi_3(x, x_0) + \xi_4(x, x_0)} \tag{3.74}$$

Ainda, como $\xi_1(x_0) = 1$, $\xi_2(x_0) = 0$, $\xi_3(x_0) = 0$, $\xi_4(x_0) = 1$, temos:

$$y(x_0) = \frac{C\ + 0}{C\ 0 + 1} = C \quad \therefore \quad C = y(x_0) \tag{3.75}$$

Substituindo (3.75) na equação (3.74), vem:

$$y(x, x_0) = \frac{\xi_1(x, x_0)\, y(x_0) + \xi_2(x, x_0)}{\xi_3(x, x_0)\, y(x_0) + \xi_4(x, x_0)} \tag{3.76}$$

o que conclui a prova. ■

3.11. ALGUNS CASOS PARTICULARES DA EQUAÇÃO DE RICCATI, SOLÚVEIS POR QUADRATURAS

3.11.1. Caso $R(x) = 0$

Neste caso, a equação de Riccati fica

$$y' + P(x)y^2 + Q(x)y = 0 \tag{3.77}$$

Mas este é um caso particular da equação de Bernoulli,

$$y' + f(x)y + g(x)y^n = 0$$

com $n = 2$. A solução pode ser obtida através da substituição

$$v = y^{1-n} \tag{3.78}$$

No presente caso:

$$v = y^{-1}$$

$$y' = (v^{-1})' = -v^{-2}\, v' \tag{3.79}$$

A equação fica

$$-v^{-2}\, v' + Pv^{-2} + Qv^{-1} = 0$$

ou, então

$$v' - Qv = P \tag{3.80}$$

Esta é uma equação linear de ordem 1, não homogênea. De acordo com a Nota 1 da seção 3.3:

$$v = C\, e^{\int Qdx} + e^{\int Qdx} \int Pe^{-\int Qdx}\, dx \tag{3.81}$$

e, assim

$$y = \frac{1}{v} = \frac{1}{Ce^{\int Qdx} + e^{\int Qdx} \int Pe^{-\int Qdx}\, dx} \tag{3.82}$$

que é, obviamente função fracional linear de C.

3.11.2. Equação de Riccati de Coeficientes Constantes

Consideremos agora uma equação de Riccati da forma:

$$y' = a_0 y^2 + a_1 y + a_2 \quad , \qquad y = y(x) \tag{3.83}$$

com a_0, a_1 e a_2 constantes.

Separando as variáveis em (3.83), vem:

$$\frac{dy}{a_0 y^2 + a_1 y + a_2} = dx \tag{3.84}$$

Sejam $y = \eta_1$ e $y = \eta_2$ os dois zeros da equação

$$a_0 y^2 + a_1 y + a_2 = 0$$

Assim, temos:

$$\frac{dy}{a_0 \left(y - \eta_1\right) \left(y - \eta_2\right)} = dx \tag{3.85}$$

e a solução y pode ser obtida por integração direta.

• No caso em que $\eta_1 \neq \eta_2$, precisamos recorrer a uma substituição adequada de variável de modo a permitir a integração direta do lado esquerdo da expressão (3.85).

Façamos então:

$$\frac{\left(y - \eta_1\right)}{\left(y - \eta_2\right)} = z \qquad (3.86)$$

$$y = \frac{\eta_1 - z\eta_2}{1 - z} \qquad (3.87)$$

Deste modo:

$$dy = \frac{-\eta_2\left(1 - z\right) - \left(\eta_1 - z\eta_2\right)\left(-1\right)}{\left(1 - z\right)^2} dz = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\left(1 - z\right)^2} dz \qquad (3.88)$$

Substituindo (3.87) e (3.88) na equação (3.85), vem:

$$\frac{\dfrac{\eta_1 - \eta_2}{\left(1 - z\right)^2} dz}{a_0\left(\dfrac{\eta_1 - z\eta_2}{1 - z} - \eta_1\right) \left(\dfrac{\eta_1 - z\eta_2}{1 - z} - \eta_2 \right)} = dx$$

$$\frac{\dfrac{\eta_1 - \eta_2}{\left(1 - z\right)^2} dz}{\left(\dfrac{\eta_1 - \eta_2 z - \eta_1 + z\eta_1}{1 - z} \right) \left(\dfrac{\eta_1 - \eta_2 z - \eta_2 + z\eta_2}{1 - z} \right)} = a_0\ dx$$

$$\frac{\left(\eta_1 - \eta_2\right)dz}{\left(\eta_1 - \eta_2\right)\left(\eta_1 - \eta_2\right)z} = a_0 dx$$

$$\frac{dz}{\left(\eta_1 - \eta_2\right)z} = a_0\,dx$$

$$\frac{dz}{z} = a_0\left(\eta_1 - \eta_2\right)dx \tag{3.89}$$

Integrando os dois lados da equação (3.89)

$$\ell n|z| = a_0 x\left(\eta_1 - \eta_2\right) + C$$

$$z = C\,e^{a_0 x\left(\eta_1 - \eta_2\right)}$$

Recorrendo a (3.86) obtemos uma fórmula implícita para a solução geral de (3.83).

$$\frac{y - \eta_1}{y - \eta_2} = C\,e^{a_0 x\left(\eta_1 - \eta_2\right)}$$

• No caso em que $\eta_1 = \eta_2$, obtemos de (3.85):

$$\frac{dy}{\left(y - \eta\right)^2} = a_0 dx \tag{3.90}$$

e a resolução pode ser obtida por integração direta, sem a necessidade de se recorrer a uma substituição de variável. Deste modo, temos:

$$-\left(y - \eta\right)^{-1} = a_0 x - C$$

$$y - \eta = \frac{1}{C - a_0 x}$$

$$y = \eta + \frac{1}{C - a_0 x} \tag{3.91}$$

CAPÍTULO 4

A EQUAÇÃO MATRICIAL DE RICCATI

4.1. INTRODUÇÃO

A Equação Matricial Generalizada de Riccati consiste em uma extensão da equação escalar de Riccati (3.1) que substitui as funções escalares por funções matriciais. É, portanto, uma equação diferencial matricial de 1ª ordem, não-homogênea e não-linear. Sua forma mais comum é:

$$W' + WAW + BW + WC + D = \mathbb{O} \qquad (4.1)$$

onde W, A, B, C e D são funções matriciais reais contínuas* em um intervalo finito I.

Vários autores fazem diferentes considerações a respeito da dimensão das matrizes W, A, B, C e D, tal como apresenta o quadro a seguir:

* Uma função matricial contínua em I é uma função matricial cujos elementos são funções contínuas em I.

Autor	Características
Levin, J.J. [6]	W, A, B, C e D são, respectivamente, matrizes $n_1 \times n_2$, $n_2 \times n_1$, $n_1 \times n_1$, $n_2 \times n_2$ e $n_1 \times n_2$,
Reid, W.T. [2, 9, 12]	W, A, B, C e D são matrizes quadradas $n \times n$
Coles, W.J. [3]	W, A, B e D são, respectivamente, matrizes $n_1 \times 1$, $1 \times n_1$, $n_1 \times n_1$, $n_1 \times 1$ e C uma função escalar

Bucy, R.E. [21] desenvolveu a teoria da equação matricial de Riccati considerando a seguinte forma geral:

$$P = F(t)P + PF'(t) - PH(t)R^{-1}(t)\ H(t)P + G(t)\ Q(t)\ G'(t)$$

$$P(t_0) = \Gamma$$

onde P é uma matriz $n \times n$, Γ uma matriz simétrica $n \times n$, F(t) uma matriz $n \times n$, H(t) uma matriz $s \times n$, G(t) uma matriz $n \times r$, R(t) uma matriz $s \times s$ definida positiva (todos seus autovalores são maiores que zero) e Q(t) uma matriz $r \times r$ semi-definida positiva (todos os seus autovalores são maiores ou iguais a zero).

No sentido de atender estritamente aos nossos propósitos, discutiremos a associação da equação matricial de Riccati com um sistema linear de $1^{\underline{a}}$ ordem baseando-se na consideração de Levin. A generalização matricial das demais propriedades da equação escalar de Riccati será feita com base na consideração de Reid.

4.2. PROPRIEDADES DA EQUACÃO MATRICIAL DE RICCATI

Consideraremos, nesta seção, a equação do tipo (4.1) na qual W, A, B, C e D são funções matriciais de dimensão n × n.

4.2.1. Uma Solução Particular é Conhecida:

Seja $W = W_1$ uma solução particular da equação (4.1).

Mediante a substituição da variável

$$W = V + W_1 \tag{4.2}$$

onde V é uma função matricial n × n contínua em I não-singular, a equação matricial de Riccati (4.1) se transforma em uma equação matricial de Riccati *homogênea*.

De fato, substituindo (4.2) em (4.1) vem:

$$V' + W_1' + VAV + VAW_1 + W_1AV + W_1AW_1 + BV +$$

$$+ BW_1 + VC + W_1C + D = \mathbb{O}$$

$$V' + VAV + \left(B + W_1A\right)V + V\left(C + AW_1\right) +$$

$$+ \left(W_1' + W_1AW_1 + BW_1 + W_1C + D\right) = \mathbb{O}$$

Como W_1 é solução da equação (4.1), então:

$$W_1' + W_1AW_1 + BW_1 + W_1C + D = \mathbb{O}$$

Logo

$$V' + VAV + \left(B + W_1A\right)V + V\left(C + AW_1\right) = \mathbb{O} \qquad (4.3)$$

A equação (4.3) consiste em uma equação matricial de Riccati homogênea que, obviamente, pode ser colocada na seguinte forma geral:

$$V' + VAV + EV + VF = \mathbb{O} \qquad (4.4)$$

onde E e F são funções matriciais $n \times n$ contínuas em I, definidas por:

$$E = B + W_1A \qquad (4.5)$$

$$F = C + AW_1 \qquad (4.6)$$

Substituindo na equação (4.4)

$$V = U^{-1} \quad \text{(U também é não-singular)} \tag{4.7}$$

obtemos uma *equação diferencial linear matricial de 1ª ordem não homogênea*.

De fato

$$\begin{aligned} VU = I \quad \therefore \quad V'U + VU' &= \mathbb{O} \\ V'U &= -VU' \\ V' &= -VU'U^{-1} \\ V' &= -U^{-1}U'U^{-1} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Levando (4.7) e (4.8) na equação (4.4), obtemos

$$-U^{-1}U'U^{-1} + U^{-1}AU^{-1} + EU^{-1} + U^{-1}F = \mathbb{O}$$

Pré-multiplicando e pós-multiplicando a equação acima por U, vem

$$-U' + A + UE + FU = \mathbb{O}$$

ou, então

$$U' - FU - UE - A = \mathbb{O} \tag{4.9}$$

A equação (4.9) consiste em uma equação diferencial linear matricial de 1ª ordem não-homogênea que, obviamente, pode ser colocada na forma geral

$$U' + GU + UH + L = \mathbb{O} \qquad (4.10)$$

onde G, H e L são funções matriciais n $\times$ n, contínuas em I, definidas por:

$$G = -F = - C - AW_1 \qquad (4.11)$$

$$H = - E = - B - W_1A \qquad (4.12)$$

$$L = - A \qquad (4.13)$$

Determinando-se a solução geral da equação (4.10), por intermédio de duas quadraturas, a solução geral da equação (4.1) é obtida recorrendo-se às relações (4.7) e (4.2).

Nota 1: O resultado acima corresponde à generalização matricial da propriedade da equação escalar de Riccati enunciada na seção 3.3. •

4.2.2. Uma Solução Particular da Equação $U' + GU + UH + L = \mathbb{O}$ é Conhecida

Seja $U = U_1$ uma solução particular (não-singular) da equação (4.10).

Mediante a substituição de variável

$$U = T + U_1 \tag{4.14}$$

onde T é uma função matricial n × n não-singular contínua em I, a equação (4.10) se reduz a *uma equação diferencial linear matricial de 1ª ordem homogênea.*

De fato, substituindo (4.14) na equação (4.10), vem:

$$T' + U_1' + GT + GU_1 + TH + U_1H + L = \mathbb{O}$$

$$T' + GT + TH + \left(U_1' + GU_1 + U_1H + L\right) = \mathbb{O}$$

Como U_1 é solução de (4.10), então:

$$U_1' + GU_1 + U_1H + L = \mathbb{O}$$

Logo

$$T' + GT + TH = \mathbb{O} \tag{4.15}$$

A equação (4.15) consiste em uma equação diferencial linear matricial de 1ª ordem homogênea.

Determinando-se a solução geral da equação (4.15), por intermédio de uma quadratura, a solução geral da equação (4.1) é obtida recorrendo-se às relações (4.14), (4.17) e (4.2).

Nota 2: O resultado acima corresponde à generalização matricial da propriedade da equação escalar de Riccati enunciada na seção 3.4. Aqui, a segunda solução particular W_2 é construída, à partir de (4.2) e (4.7), como:

$$W_2 = U_1^{-1} + W_1 \qquad \bullet$$

4.2.3. Solução da Equação T' + GT +TH = $\mathbb{0}$

Se Δ é uma matriz não-singular n $\times$ n que satisfaz a equação:

$$\Delta' + G\Delta = \mathbb{0} \tag{4.16}$$

e se Ω é uma matriz não-singular n $\times$ n que satisfaz a equação:

$$\Omega' + \Omega H = \mathbb{0} \tag{4.17}$$

a expressão

$$T = \Delta K \Omega \tag{4.18}$$

onde K é qualquer matriz constante não singular n x n, satisfaz a equação (4.15).

De fato, derivando (4.18):

$$T' = \Delta' K \Omega + \Delta K \Omega' \tag{4.19}$$

e substituindo (4.19) na equação (4.15), vem:

$$\Delta' K \Omega + \Delta K \Omega' + G \Delta K \Omega + \Delta K \Omega H = \left(\Delta' + G\Delta\right) K \Omega + \Delta K \left(\Omega' + \Omega H\right) = \mathbb{0}$$

4.2.4 Quatro Soluções Particulares são Conhecidas - Cross Ratio

Sejam W_1, W_2, W_3 e W_4, soluções particulares da equação (4.1), tal que $W_i - W_j$ seja não-singular para $i \neq j$. De acordo com a equação (4.2) definimos:

$$V_i = W_{i+1} - W_1 \quad (i = 1,\ 2 \text{ e } 3) \tag{4.20}$$

Vimos na seção 4.2.1 que as funções V_i, dados por (4.20), são soluções (não-singulares) da equação (4.3).

Definimos ainda, de acordo com (4.7):

$$V_i = U_i^{-1} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \qquad (4.21)$$

As funções U_i dadas por (4.21) são soluções (não-singulares) da equação (4.9), tal como mostrado na seção 4.2.1.

De acordo com (4.14) definimos:

$$T_i = U_{i+1} - U_1 \qquad (i = 1,\ 2) \qquad (4.22)$$

Então, como vimos na seção 4.2.2, as funções T_i dadas por (4.22), são soluções (não-singulares) da equação (4.15).

De (4.18), temos que

$$T_i = \Delta K_i \Omega \qquad (i = 1,\ 2) \qquad (4.23)$$

onde Δ e Ω são matrizes não-singulares que satisfazem, respectivamente, (4.16) e (4.17).

De (4.20) e (4.21), sucessivamente, temos:

$$V_i = W_{i+1} - W_1$$

$$U_i^{-1} = W_{i+1} - W_1 \tag{4.24}$$

Fazendo-se i = i + 1 em (4.24), vem:

$$U_{i+1}^{-1} = W_{i+2} - W_1 \tag{4.25}$$

Mas, de (4.22)

$$U_{i+1}^{-1} = \left(T_i - U_1\right)^{-1} \tag{4.26}$$

Levando (4.26) em (4.25):

$$\left(T_i + U_1\right)^{-1} = W_{i+2} - W_1$$

$$T_i + U_1 = \left(W_{i+2} - W_1\right)^{-1} \tag{4.27}$$

Substituindo (4.23) em (4.27)

$$\Delta K_i \Omega + U_1 = \left(W_{i+2} - W_1\right)^{-1} \tag{4.28}$$

Mas, de (4.24) temos, para i = 1:

$$U_1 = \left(W_2 - W_1\right)^{-1} \tag{4.29}$$

Levando (4.29) em (4.28):

$$\Delta K_i \Omega + \left(W_2 - W_1\right)^{-1} = \left(W_{i+2} - W_1\right)^{-1}$$

$$\left(W_{i+2} - W_1\right)^{-1} - \left(W_2 - W_1\right)^{-1} = \Delta K_i \Omega \qquad (i = 1,\ 2) \tag{4.30}$$

Pré-multiplicando e pós-multiplicando (4.30), respectivamente por $\left(W_{i+2} - W_1\right)$ e $\left(W_2 - W_1\right)$, vem:

$$\left(W_2 - W_1\right) - \left(W_{i+2} - W_1\right) = \left(W_{i+2} - W_1\right) \Delta K_i \Omega \left(W_2 - W_1\right)$$

$$W_2 - W_{i+2} = \left(W_{i+2} - W_1\right) \Delta K_i \Omega \left(W_2 - W_1\right)$$

$$I = \left(W_2 - W_{i+2}\right)^{-1} \left[\left(W_{i+2} - W_1\right) \Delta K_i \Omega \left(W_2 - W_1\right)\right] \qquad (i = 1,\ 2)$$

Para i = 1, vem:

$$I = \left(W_2 - W_3\right)^{-1} \left[\left(W_3 - W_1\right) \Delta K_1 \Omega \left(W_2 - W_1\right)\right] \tag{4.31}$$

e para i = 2:

$$I = \left(W_2 - W_4\right)^{-1} \left[\left(W_4 - W_1\right) \Delta K_2 \Omega \left(W_2 - W_1\right)\right] \tag{4.32}$$

Como (4.31) = (4.32), temos:

$$\left(W_2 - W_3\right)^{-1} \left[\left(W_3 - W_1\right) \Delta K_1 \Omega \left(W_2 - W_1\right)\right] =$$

$$= \left(W_2 - W_4\right)^{-1} \left[\left(W_4 - W_1\right) \Delta K_2 \Omega \left(W_2 - W_1\right)\right] \tag{4.33}$$

De (4.33), vem:

$$\left(W_3 - W_1\right) \Delta K_1 \Omega \left(W_2 - W_1\right) =$$

$$= \left(W_2 - W_3\right)\left(W_2 - W_4\right)^{-1}\left(W_4 - W_1\right)\Delta K_2\Omega\left(W_2 - W_1\right)$$

$$\Delta K_1 = \left(W_3 - W_1\right)^{-1}\left(W_2 - W_3\right)\left(W_2 - W_4\right)^{-1}\left(W_4 - W_1\right)\Delta K_2$$

$$\Delta K_1 K_2^{-1}\Delta^{-1} = \left(W_3 - W_1\right)^{-1}\left(W_2 - W_3\right)\left(W_2 - W_4\right)^{-1}\left(W_4 - W_1\right)$$

Fazendo-se $Q = K_1 K_2^{-1}$, vem:

$$\left(W_3 - W_1\right)^{-1}\left(W_2 - W_3\right)\left(W_2 - W_4\right)^{-1}\left(W_4 - W_1\right) = \Delta Q \Delta^{-1}$$

Mas como

$$\left(W_2 - W_4\right)^{-1} = \left[-\left(W_4 - W_2\right)\right]^{-1} = \left(-1\right)\left(W_4 - W_2\right)^{-1}$$

podemos escrever:

$$\left(W_3 - W_1\right)^{-1}\left(W_3 - W_2\right)\left(W_4 - W_2\right)^{-1}\left(W_4 - W_1\right) = \Delta Q \Delta^{-1} \qquad (4.34)$$

Nota 3: O resultado acima corresponde à generalização matricial da propriedade "cross-ratio" para as soluções da equação escalar de Riccati enunciada na seção 3.6. •

4.3. ASSOCIAÇÃO DA EQUACÃO MATRICIAL DE RICCATI COM UM SISTEMA LINEAR MATRICIAL DE 1ª ORDEM (I):

Consideraremos, nesta seção, a equação do tipo (4.1) na qual as funções W, A, B, C e D são, respectivamente, matrizes de dimensão $n_1 \times n_2$, $n_2 \times n_1$, $n_1 \times n_1$ $n_2 \times n_2$ e $n_1 \times n_2$.

Obs.: Devemos observar que para as dimensões mencionadas os produtos das funções matriciais que figuram na equação são definidas e cada parcela corresponde a uma função matricial de dimensão $n_1 \times n_2$.

À equação (4.1) associa-se o seguinte sistema linear matricial de 1ª ordem de dimensão $n_1 \times n_2$:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B & -D \\ A & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \qquad (4.35)$$

onde A, B, C e D são as mesmas funções matriciais da equação (4.1) e X_1, X_2, X_3, X_4, são funções matriciais contínuas em I de dimensões $n_1 \times n_1$, $n_1 \times n_2$, $n_2 \times n_1$ e $n_2 \times n_2$, respectivamente.

A seguir, enunciaremos e provaremos as principais consequências desta associação.

4.3.1. Construção da Solução da Equação Matricial de Riccati a Partir de Qualquer Matriz Solução do Sistema Associado:

Seja:

$$N(t) = \begin{bmatrix} N_1(t) & N_2(t) \\ N_1(t) & N_2(t) \end{bmatrix} \qquad (4.36)$$

qualquer matriz solução do sistema (4.35), onde N_1, N_2, N_3, N_4 são, respectivamente, matrizes de dimensão $n_1 \times n_1$, $n_1 \times n_2$, $n_2 \times n_1$ e $n_2 \times n_2$. Se K é uma matriz constante de dimensão $n_1 \times n_2$, então:

$$W(t) = \left[N_1(t)K + N_2(t) \right] \left[N_3(t)K + N_4(t) \right]^{-1} \qquad (4.37)$$

para $\left(N_3K + N_4\right)$ não-singular, é solução da equação (4.1).

Prova:

Levando (4.37) em (4.1), vem:

$$LE \equiv \left[N_1K + N_2\right] \frac{d}{dt} \left[N_3K + N_4\right]^{-1} + \left\{ \frac{d}{dt} \left[N_1K + N_2\right] \right\} \left[N_3K + N_4\right]^{-1} +$$

$$+ \left[N_1K + N_2 \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} A \left[N_1K + N_2\right]\left[N_3K + N_4\right]^{-1}$$

$$+ B\left[N_1K + N_2\right] \left[N_3K + N_4\right]^{-1} + \left[N_1K + N_2\right] \left[N_3K + N_4\right]^{-1} + C + D$$

Mas temos

$$\left[N_3K + N_4 \right]^{-1} \left[N_3K + N_4 \right] = I$$

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left[N_3K + N_4\right]^{-1}\right\}\left[N_3K + N_4\right] + \left[N_3K + N_4\right]^{-1} \frac{d}{dt} \left[N_3K + N_4\right] = 0$$

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left[N_3K + N_4\right]^{-1}\right\}\left[N_3K + N_4\right] = - \left[N_3K + N_4\right]^{-1} \frac{d}{dt} \left[N_3K + N_4\right]$$

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left[N_3K + N_4\right]^{-1}\right\} = - \left[N_3K + N_4\right]^{-1} \frac{d}{dt} \left[N_3K + N_4\right] \left[N_3K + N_4\right]^{-1}$$

Assim,

$$LE \equiv - \left[N_1K + N_2 \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} \left[N_3'K + N_4' \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} +$$

$$+ \left[N_1'K + N_2' \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} +$$

$$+ \left[N_1K + N_2 \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} AN_1K \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} +$$

$$+ \left[N_1K + N_2 \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} AN_2 \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} +$$

$$+ BN_1K \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} + BN_2 \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} +$$

$$+ \left[N_1K + N_2 \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} C + D$$

Mas, como N_1, N_2, N_3, N_4 são soluções do sistema (4.35), as seguintes igualdades se verificam

$$N_1' = -BN_1 - DN_3$$

$$N_2' = -BN_2 - DN_4$$

$$N_3' = AN_1 + CN_3$$

$$N_4' = AN_2 + CN_4$$

Assim:

$$LE \equiv - \left[N_1K + N_2 \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} \left[AN_1K + CN_3K \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} +$$

$$- \left[N_1K + N_2 \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} \left[AN_2 + CN_4 \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} +$$

$$- \left[BN_1K + DN_3K \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} - \left[BN_2 + DN_4 \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} +$$

$$+ \left[N_1K + N_2 \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} AN_1K \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} +$$

$$+ \left[N_1K + N_2 \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} AN_2 \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} +$$

$$+ BN_1K \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} + BN_2 \left[N_3K + N_4 \right]^{1} +$$

$$+ \left[N_1K + N_2 \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} C + D =$$

$$= - \left[N_1K + N_2 \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} AN_1K \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} +$$

$$- \left[N_1K + N_2 \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} CN_3K \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} +$$

$$- \left[N_1K + N_2 \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} AN_2 \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} +$$

$$- \left[N_1K + N_2 \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} CN_4 \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} +$$

$$- BN_1K \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} - DN_3K \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} - BN_2 \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} +$$

$$- DN_4\left[N_3K + N_4\right]^{-1} + \left[N_1K + N_2\right]\left[N_3K + N_4\right]^{-1} AN_1K\left[N_3K + N_4\right]^{-1} +$$

$$+ \left[N_1K + N_2 \right]\left[N_3K + N_4 \right]^{-1} AN_2\left[N_3K + N_4 \right]^{-1} +$$

$$+ BN_1K\left[N_3K + N_4 \right]^{-1} + BN_2 \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} +$$

$$+ \left[N_1K + N_2 \right] \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} C + D =$$

$$= - \left[N_1K + N_2 \right]\left[N_3K + N_4 \right]^{-1} C \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} \left[N_3K + N_4 \right]^{-1} +$$

$$- D\left[N_3K + N_4 \right]\left[N_3K + N_4 \right]^{-1} + \left[N_1K + N_2 \right]\left[N_3K + N_4 \right] C + D =$$

$$= \mathbb{O} \equiv LD$$

o que conclui a prova. ■

4.3.2. Construção de uma Solução da Equação Matricial de Riccati a Partir da Matriz Fundamental do Sistema Associado:

Como vimos, a fórmula (4.37) foi construida para qualquer matriz solução do sistema (4.35). Em particular, seja:

$$M(t) = \begin{bmatrix} M_1(t) & M_2(t) \\ M_3(t) & M_4(t) \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

onde M_1, M_2, M_3 e M_4 são, respectivamente, matrizes de dimensão $n_1 \times n_1$, $n_1 \times n_2$, $n_2 \times n_1$ e $n_2 \times n_2$, a matriz fundamental para o sistema (4.35) tal que $M(t_0) = I$, $t_0 \in I$. Então:

$$W(t) = \left[M_1(t)K + M_2(t) \right] \left[M_3(t)K + M_4(t) \right]^{-1} \tag{4.39}$$

é solução da equação (4.1) para K uma matriz constante de dimensão $n_1 \times n_2$.

Devemos observar que a condição $M(t_0) = I$, $t_0 \in I$, é suficiente para garantir a não-singularidade da matriz

$$\left[M_3(t)K + M_4(t) \right]$$

pois, como sabemos, se uma matriz for não-singular para um ponto $t_0 \varepsilon I$, então será não-singular para qualquer ponto $t \varepsilon I$ [30].

Deste modo, a solução (4.39) pode ser escrita como:

$$W(t, t_0) = \Big[M_1(t, t_0)K + M_2(t, t_0)\Big] \Big[M_3(t, t_0)K + M_4(t, t_0)\Big]^{-1} \tag{4.40}$$

Mas como $M_1(t_0) = I$, $M_2(t_0) = \mathbb{O}$, $M_3(t_0) = \mathbb{O}$ e $M_4(t_0) = I$, temos de (4.40) para $t = t_0$:

$$W(t_0) = \Big[IK + \mathbb{O} \Big] \Big[\mathbb{O}K + I \Big]^{-1} = K$$

Substituindo em (4.40), vem:

$$W(t,t_0)=\Big[M_1(t,t_0)\ W(t_0) + M_2(t,t_0)\Big]\Big[M_3(t,t_0)W(t_0) + M_4(t,t_0)\Big]^{-1} \tag{4.41}$$

que, para t suficientemente próximo de t_0, consiste na solução da equação (4.1) possuindo a matriz inicial $W(t_0)$.

Nota 1: O resultado acima corresponde à generalização matricial da propriedade da equação escalar de Riccati enunciada na seção 3.10.3. ●

4.3.3. Fração Linear (Matricial) de uma Constante Satisfaz a Equação Matricial de Riccati:

Sejam $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$ e $N_4(t)$ matrizes continuamente diferenciáveis em I de dimensão $n_1 x n_1$, $n_1 x n_2$, $n_2 x n_1$ e $n_2 x n_2$, respectivamente, e

$$N(t) = \begin{bmatrix} N_1(t) & N_2(t) \\ N_3(t) & N_4(t) \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

não-singular em I. Então,

$$W(t) = \Big[N_1(t)K + N_2(t) \Big] \Big[N_3(t)K + N_4(t) \Big]^{-1} \tag{4.43}$$

onde K é uma matriz constante de dimensão $n_1 \times n_2$, define uma equação matricial de Riccati do tipo (4.1) e é uma solução desta equação.

Prova:

Se definimos

$$G(t) = \left[\frac{d}{dt} N(t) \right] N^{-1}(t) = \begin{bmatrix} G_1(t) & G_2(t) \\ G_3(t) & G_4(t) \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

então N(t) será a matriz fundamental do sistema

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(t) & G_2(t) \\ G_3(t) & G_4(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

onde, G_1, G_2, G_3 e G_4 são matrizes de dimensão $n_1 \times n_1$, $n_1 \times n_2$, $n_2 \times n_1$ e $n_2 \times n_2$, respectivamente. Mas, como sabemos, o sistema (4.45) está associado à equação diferencial matricial de Riccati dada por

$$W' + WG_3W + WG_4 - G_1W - G_2 = \mathbb{O} \tag{4.46}$$

que é do tipo dado por (4.1).

Ainda, como N(t) é uma matriz solução do sistema (4.45), associado à equação (4.46), então (4.43) consiste na solução da equação (4.46). E a prova está completa. ∎

Nota 2: O resultado acima corresponde à generalização matricial da propriedade da equação escalar de Riccati enunciada na seção 3.7. •

4.4. ASSOCIACÃO DA EQUACÃO MATRICIAL DE RICCATI COM UM SISTEMA LINEAR MATRICIAL DE 1ª ORDEM (II):

Seja a matriz quadrada:

$$L(t) = \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & D(t) \end{bmatrix} \qquad (4.47)$$

com A, B, C e D funções matriciais, definidas num intervalo I, de dimensões $n \times n$.

Seja ainda o vetor:

$$V(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} \qquad (4.48)$$

com X e Y funções matriciais contínuas em I não-singulares de dimensão $n \times n$, satisfazendo o seguinte sistema linear matricial

$$\begin{aligned} X' &= AX + BY \\ Y' &= CX + DY \end{aligned} \qquad (4.49)$$

Então, a matriz definida por

$$Z = XY^{-1} \tag{4.50}$$

satisfaz a equação matricial de Riccati

$$Z' = AZ + B - ZCZ - ZD \tag{4.51}$$

Prova:

Derivando (4.50) em ambos os lados, obtemos:

$$Z' = X'Y^{-1} - X(Y^{-1})' = X'Y^{-1} - XY^{-1}\, Y'Y^{-1} =$$

$$= \left(AX + BY\right)Y^{-1} - XY^{-1}\left(CX + DY\right)Y^{-1} =$$

$$= AXY^{-1} + B - XY^{-1}\, CXY^{-1} - XY^{-1}D = AZ + B - ZCZ - ZD$$

o que conclui a prova. ∎

Nota 1: O resultado demonstrado acima corresponde à generalização matricial da propriedade da equação escalar de Riccati enunciada na seção 3.10.1. •

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES NUMÉRICAS E A TRANSFORMAÇÃO DE RICCATI

5.1. O PROBLEMA DA INSTABILIDADE NUMÉRICA E A TRANSFORMAÇÃO DE RICCATI

Muitos dos problemas significativos da engenharia são formulados matematicamente em termos de uma equação diferencial linear ordinária de 2ª ordem

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \qquad (5.1)$$

Estas equações admitem soluções linearmente independentes do tipo

$$x_i(t) = e^{p_i t} , \qquad i = 1, 2 \qquad (5.2)$$

com p_i um número complexo.

Se um dos valores p_i tiver a parte real positiva, resultados desastrosos, sem coerência física, podem ser obtidos caso o problema seja resolvido por técnicas numéricas. A existência de um termo exponencial positivo entre as soluções de uma equação diferencial que rege uma situação em que as condições físicas correspondem a uma solução exponencial negativa, nos traz dificuldades sutis para calcular numericamente a solução correta num intervalo grande. A razão é que, a cada passo do cálculo, introduzimos erros de fórmula e/ou arredondamento. Assim, em qualquer ponto do intervalo, os dados a serem usados para irmos ao próximo ponto não são exatos. A solução do problema com esses dados envolverá não somente o termo exponencial negativo mas também o positivo. Em virtude do erro nos dados ser pequeno em cada ponto do intervalo, o último termo aparecerá com um coeficiente muito pequeno. No entanto, como o termo exponencial negativo tende a zero e o termo exponencial positivo cresce muito rapidamente, este último termo dominará finalmente, e a solução calculada será simplesmente um múltiplo do termo exponencial positivo. Isto é ilustrado no exemplo seguinte.

Suponhamos um sistema físico governado pelo seguinte problema de valor inicial

$$x'' - 9x' - 10\,x = 0 \tag{5.3}$$

$$x(0) = 1,\ x'(0) = -1 \tag{5.4}$$

O Teorema de existência e unicidade para equações de 2ª ordem [24] garante a existência, em $\mathbb{R}$, de uma única solução do problema acima.

Resolvendo analiticamente, encontramos as duas soluções linearmnte independentes da equação (5.3):

$$x_1(t) = e^{10t} \tag{5.5}$$

$$x_2(t) = e^{-t} \tag{5.6}$$

e sua solução geral é

$$x(t) = C_1\, e^{10t} + C_2\, e^{-t} \tag{5.7}$$

Vemos que qualquer combinação linear das soluções (5.5) e (5.6) também é solução da equação (5.3). Mas, a única solução que satisfaz as condições iniciais dadas é

$$x = e^{-t} \qquad (5.8)$$

a qual, portanto, consiste na solução do problema - solução esta que apresenta um comportamento fisicamente razoável* (ver figura 5.1).

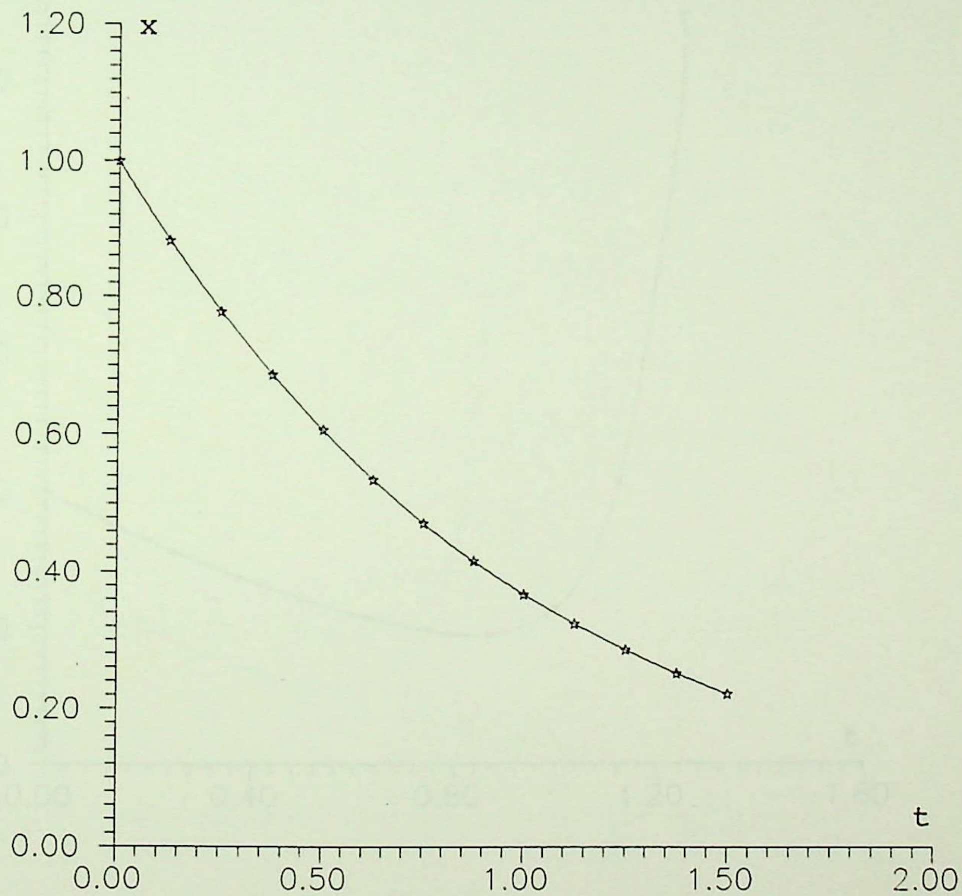

Figura 5.1 - Solução analítica da equação (5.3) sujeita às condições (5.4).

---

* Um problema de valor inicial constituído por uma equação diferencial homogênea traduz um estado transitório.

Entretanto, resolvendo o mesmo problema numericamente*, a solução encontrada apresenta o comportamento ilustrado na figura 5.2.

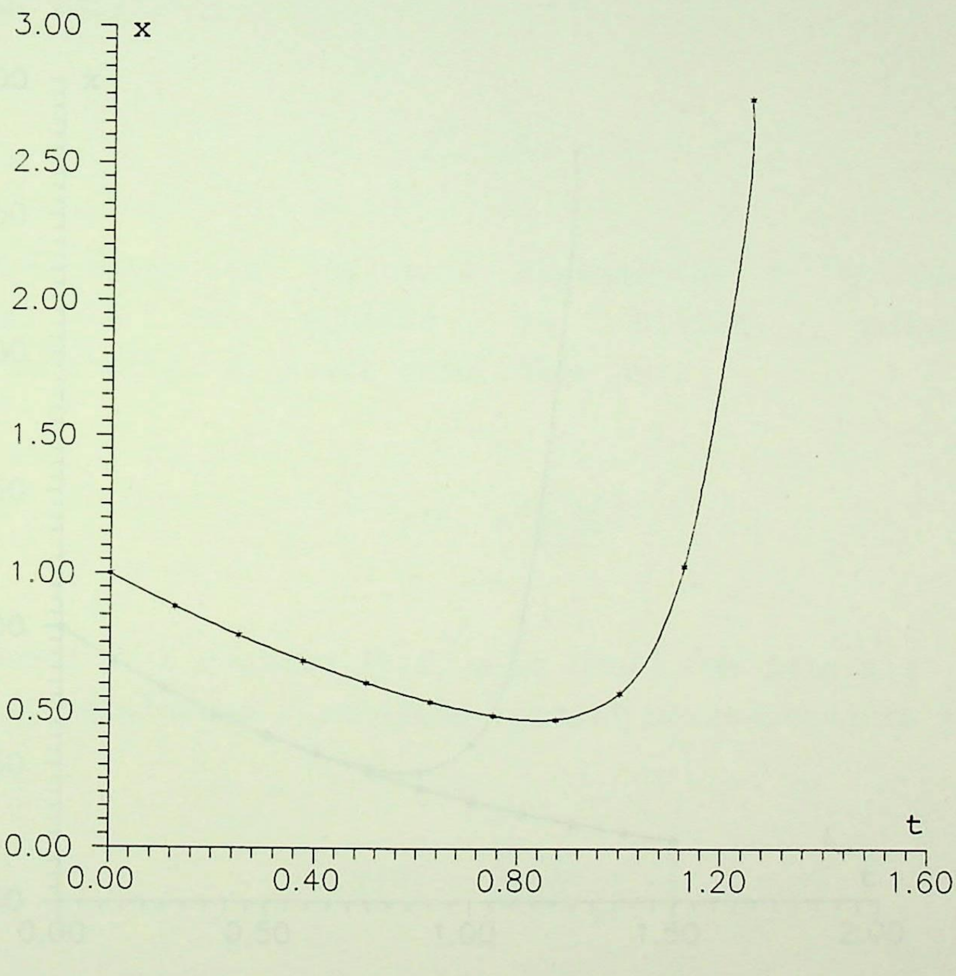

Figura 5.2 - Solução numérica da equação (5.3) sujeita às condições (5.4)*. A curva foi interpolada por Splines Cubicas.

---

* O problema foi resolvido pelo método Runge-Kutt-Nystron [29], em um microcomputador, com passo $h = 0.125$.

Observamos que após uma pequena distância, dentro do intervalo de integração, a solução exponencial positiva passa a dominar (ver figura 5.3), tornando o procedimento numericamente instável e nos levando a um resultado final espúrio, inconsistente com o sistema físico.

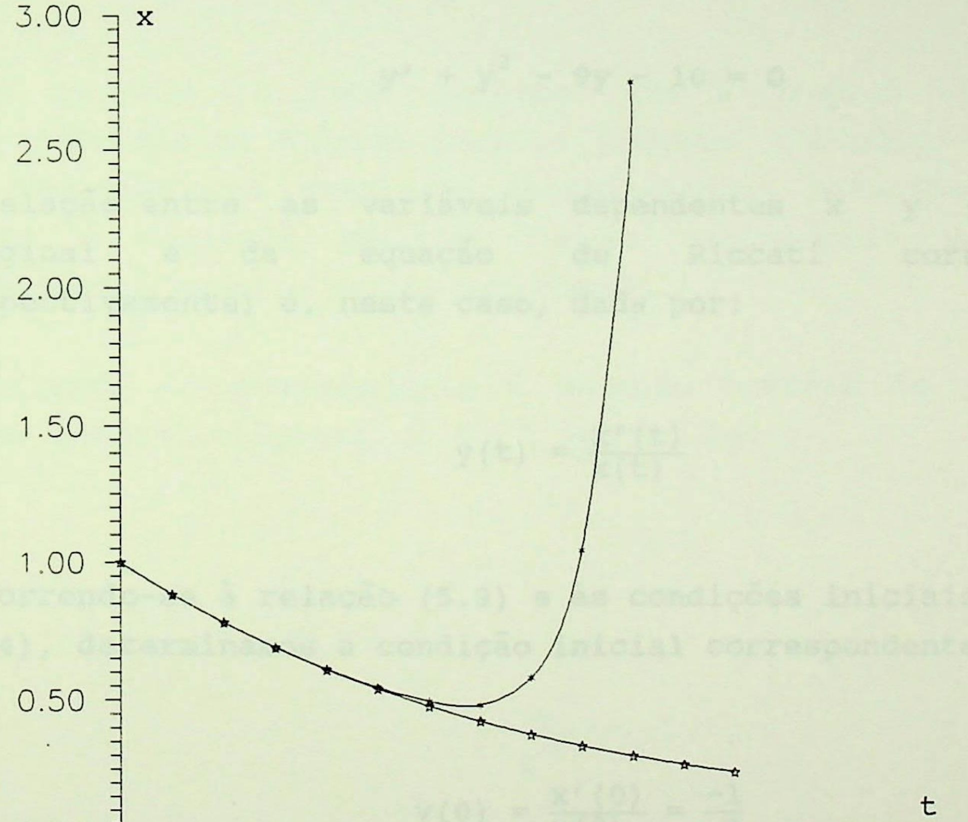

Figura 5.3 - Comparação entre a solução correta e a solução numérica.

Resultados numéricos satisfatórios poderão eventualmente ser obtidos se o intervalo de integração for pequeno e se o expoente da solução exponencial positiva for de pequena magnitude. Entretanto, isto é muito relativo e muito cuidado deve ser tomado.

Analisemos, agora, o comportamento da equação de Riccati correspondente à equação (5.3). Seguindo o procedimento apresentado na seção 3.9 e considerando como função parâmetro $h(t) \equiv 1$, determinamos a equação de Riccati correspondente à equação (5.3):

$$y' + y^2 - 9y - 10 = 0 \tag{5.9}$$

A relação entre as variáveis dependentes x y (da equação original e da equação de Riccati correspondente, respectivamente) é, neste caso, dada por:

$$y(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} \tag{5.10}$$

Recorrendo-se à relação (5.9) e às condições iniciais originais (5.4), determinamos a condição inicial correspondente $y(0)$:

$$y(0) = \frac{x'(0)}{x(0)} = \frac{-1}{1}$$

$$y(0) = -1 \tag{5.11}$$

A equação (5.9) juntamente com a condição inicial (5.11) constituem um problema de valor inicial corresondente ao problema original. As soluções correspondentes x e y se relacionam através de (5.10). A relação (5.10) é conhecida como *Transformação de Riccati*.

Observamos que a Transformação de Riccati converte uma equação de 2ª ordem em uma de 1ª ordem, permitindo isolar, uma da outra, as duas soluções linearmente independentes que constituem a base para o espaço solução da equação original. Para obtermos a solução exponencial positiva, a condição inicial correspondente deveria ser determinada a partir de valores para as condições iniciais x(0) e x'(0) que requerem $C_2 = 0$ na solução geral original (5.7). Deste modo, no caso em questão, a solução exponencial positiva ficará isolada, não interferindo no cálculo, por técnicas numéricas, da solução desejada.

Além do mais, é fácil perceber que a própria estrutura da Transformação de Riccati permite eliminar soluções exponenciais e, com elas, as eventuais instabilidades numéricas (a razão entre a derivada de uma função exponencial e a função exponencial resulta em uma constante).

A solução y correspondente à solução correta do problema de valor inicial original, $x = e^{-t}$, deverá ser

$$y = \frac{-e^{-t}}{e^{-t}} = -1 \tag{5.12}$$

resultado este que se confirma se resolvermos (numericamente)* a equação (5.9) sujeita à condição inicial (5.11). Veja a figura 5.4:

O problema de valor inicial correspondente, mesmo sendo constituido por uma equação diferencial não-linear, apresenta agora uma solução numérica de comportamento estável.

Nota 1: É importante observar que a questão da instabilidade discutida recai apenas sobre a *resposta livre* do sistema físico, uma vez que, em engenharia, a resposta a uma função forçante é sempre estável (caso contrário, esta função forçante não seria aplicada).

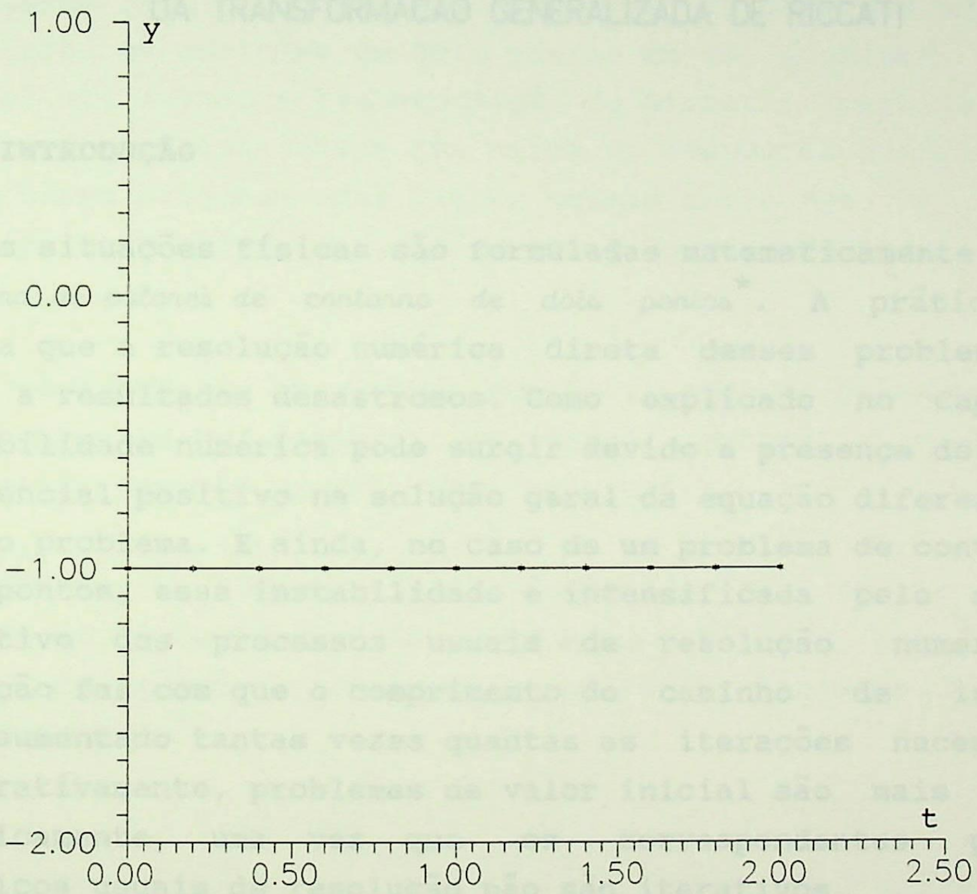

Figura 5.4 - Solução numérica da equação (5.9) sujeita à condição inicial (5.11)*

*O problema foi resolvido pelo método de Runge-Kutta de 4.ª ordem [29], em um microcomputador, com passo h = 0.2.

CAPÍTULO 6

A EQUAÇÃO DE RICCATI NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE VALORES DE CONTORNO DE DOIS PONTOS - O MÉTODO DA TRANSFORMAÇÃO GENERALIZADA DE RICCATI

6.1. INTRODUÇÃO

Muitas situações físicas são formuladas matematicamente por um *problema de valores de contorno de dois pontos**. A prática mostra que a resolução numérica direta desses problemas pode levar a resultados desastrosos. Como explicado no Cap. 5, a instabilidade numérica pode surgir devido a presença de um termo exponencial positivo na solução geral da equação diferencial que rege o problema. E ainda, no caso de um problema de contorno de dois pontos, essa instabilidade é intensificada pelo mecanismo iterativo dos processos usuais de resolução numérica (a iteração faz com que o comprimento do caminho de integração seja aumentado tantas vezes quantas as iterações necessárias). Comparativamente, problemas de valor inicial são mais estáveis numericamente, uma vez que os correspondentes processos numéricos usuais de resolução não são iterativos.

A idéia, então, foi desenvolver técnicas que permitem a redução de um problema de valores de contorno de dois pontos em um problema de valor inicial. Algumas dessas técnicas utilizam uma

---

* Problema de valores de contorno de dois pontos é a denominação dada ao problema de solucionar uma equação diferencial ordinária num intervalo, sujeita a condições de contorno em cada extremo.

transformação de variáveis - a *Transformação de Riccati* - que converte o problema de valores de contorno original em um correspondente problema de valor inicial constituído pela equação matricial de Riccati. Como exemplos, citamos as técnicas "Invariant Imbedding" [17, 25] e o Método de Campo (Field Method) [25]. Mostramos, no Cap. 5, que um problema de valor inicial constituído pela equação de Riccati possui solução numérica de comportamento estável. Sendo assim, podemos facilmente concluir que o processo de se transformar um problema de valores de contorno de dois pontos em um problema de valor inicial utilizando a Transformação de Riccati, permite não só "driblar" a instabilidade que surge na resolução numérica direta do problema original, mas também aquela que surge na resolução numérica do problema de valor inicial correspondente.

6.2. TRANSFORMAÇÃO DE UM PROBLEMA DE VALORES DE CONTORNO DE DOIS PONTOS EM UM PROBLEMA DE VALOR INICIAL - O MÉTODO DA TRANSFORMAÇÃO GENERALIZADA DE RICCATI

Consideremos um sistema físico governado por um problema de valores de contorno de dois pontos constituído pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias lineares de $1^{\underline{a}}$ ordem não-homogêneas*:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \Gamma(t)\Phi(t) + H(t) \tag{6.1}$$

e pelas condições de contorno de dois pontos:

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \mathbb{C}_1 \\ \Phi(\ell) &= \mathbb{C}_2 \end{aligned} \tag{6.2}$$

---

* Um sistema de n equações diferenciais ordinárias lineares de $1^{\underline{a}}$ ordem pode corresponder a uma equação diferencial linear de ordem n.

$\Phi(t)$, $\Gamma(t)$, $H(t)$, $\mathbb{C}_1$ e $\mathbb{C}_2$ são funções matriciais de dimensão $n \times 1$, $n \times n$, $n \times 1$, $n_1 \times 1$, $n_2 \times 1$ $(n = n_1 + n_2)$, respectivamente. Podemos partir essas matrizes de acordo com os conjuntos de valores dos índices $i = 1, 2, \ldots, n_1$ e $i = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_1 + n_2$, ($n_1$ e n_2 não precisam ser necessariamente iguais). Deste modo, a equação (6.1) escreve-se:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \Gamma_{11}\Phi_1 + \Gamma_{12}\,\Phi_2 + H_1 \tag{6.3}$$

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = \Gamma_{21}\Phi_1 + \Gamma_{22}\,\Phi_2 + H_2 \tag{6.4}$$

onde Φ_1, Φ_2, H_1, H_2, Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{21}, Γ_{22} são funções matriciais de dimensão $n_1 \times 1$, $n_2 \times 1$, $n_1 \times 1$, $n_2 \times 1$, $n_1 \times n_1$, $n_1 \times n_2$, $n_2 \times n_1$ e $n_2 \times n_2$, respectivamente.

As condições de contorno podem, agora, ser escritas como:

$$\Phi_1(0) = \mathbb{C}_1 \tag{6.5}$$

$$\Phi_2(\ell) = \mathbb{C}_2 \tag{6.6}$$

Como mencionamos, a má resolução numérica direta do problema acima pode conduzir a sérias instabilidades numéricas, as quais podem ser evitadas se o problema original for reduzido a um problemade valor inicial. Isto pode ser efetuado através de uma adequada transformação de variáveis. Seja, então $\Psi_1(t)$ uma função matricial contínua de dimensão $n_1 \times 1$ definida pela relação:

$$\Phi_1(t) = R_{12}(t)\ \Phi_2(t) + \Psi_1(t) \tag{6.7}$$

onde R_{12} é uma função matricial contínua (desconhecida) de dimensão $n_1 \times n_2$. A relação (6.7) é chamada *Transformação Generalizada de Riccati*. As novas variáveis, Ψ_1 e R_{12}, safisfazem determinadas equações diferenciais, as quais serão deduzidas a seguir

6.2.1. Determinação das Variáveis Auxiliares Ψ_1 e R_{12}:

Derivando a equação (6.7), obtemos:

$$\Phi_1{}' = R_{12}\Phi_2' + R_{12}'\Phi_2 + \Psi_1' \tag{6.8}$$

Substituindo a equação (6.7) na equação (6.4), vem:

$$\Phi_2' = \Gamma_{21}\left(R_{12}\Phi_2 + \Psi_1\right) + \Gamma_{22}\Phi_2 + H_2$$

$$\Phi_2' = \left(\Gamma_{21}R_{12} + \Gamma_{22}\right)\Phi_2 + \Gamma_{21}\Psi_1 + H_2 \tag{6.9}$$

Substituindo (6.7), (6.8) e (6.9) em (6.3), vem:

$$R'_{12}\Phi_2 + R'_{12}\Phi_2 + \Psi'_1 = \Gamma_{11}\left(R'_{12}\Phi_2 + \Psi_1\right) + \Gamma_{12}\Phi_2 + H_1$$

$$R_{12}\left[\left(\Gamma_{21}R_{12} + \Gamma_{22}\right)\Phi_2 + \Gamma_{21}\Psi_1 + H_2\right] + R'_{12}\Phi_2 + \Psi'_1 =$$

$$= \Gamma_{11}R_{12}\Phi_2 + \Gamma_{11}\Psi_1 + \Gamma_{12}\Phi_2 + H_1$$

$$R_{12}\Gamma_{21}R_{12}\Phi_2 + R_{12}\Gamma_{22}\Phi_2 + R_{12}\Gamma_{21}\Psi_1 + R_{12}H_2 + R'_{12}\Phi_2 + \Psi'_1 +$$

$$- \Gamma_{11}R_{12}\Phi_2 - \Gamma_{11}\Psi_1 - \Gamma_{12}\Phi_2 - H_1 = 0$$

$$\Psi'_1 = \left(\Gamma_{11} - R_{12}\Gamma_{21}\right)\Psi_1 - \left(R'_{12} + R_{12}\Gamma_{22} + R_{12}\Gamma_{21}R_{12} - \Gamma_{11}R_{12} +\right.$$

$$\left. - \Gamma_{12}\right)\Phi_2 + \left(H_1 - R_{12}H_2\right) \qquad (6.10)$$

As equações (6.9) e (6.10) formam um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem nas incógnitas Φ_2 e Ψ_1. Essas equações e suas condições de contorno podem ser desacopladas se definirmos $R_{12}(t)$ e $R_{12}(0)$ pelas condições

$$R'_{12} + R_{12}\Gamma_{22} + R_{12}\Gamma_{21}R_{12} - \Gamma_{11}R_{12} - \Gamma_{12} = \mathbb{0} \tag{6.11}$$

$$R_{12}(0) = \mathbb{0} \tag{6.12}$$

Ou seja, $R_{12}(t)$ *é a solução do problema de valor inicial constituído pela equação matricial de Riccati (6.11) e pela condição inicial (6.12).*

Deste modo, a equação (6.10) se reduz a

$$\Psi'_1 = \left(\Gamma_{11} - R_{12}\Gamma_{21}\right)\Psi_1 + \left(H_1 - R_{12}H_2\right) \tag{6.13}$$

a qual não contém Φ_2!

A condição inicial para esta equação pode ser encontrada fazendo-se t = 0 na equação (6.7) e usando as equações (6.5) e (6.12):

$$\Phi_1(0) = R_{12}(0)\ \Phi_2(0) + \Psi_1(0)$$

$$\Psi_1(0) = \mathbb{C}_1 \tag{6.14}$$

A equação (6.13) juntamente com a condição inicial (6.14) constituem um problema de valor inicial que, resolvida, fornece $\Psi_1(t)$.

Uma vez que R_{12} e Ψ_1 são determinados, podemos obter a condição $\Phi_1(\ell)$ fazendo-se $t = \ell$ na equação (6.7) e usando a equação (6.6):

$$\Phi_1(\ell) = R_{12}(\ell)\ \Phi_2(\ell) + \Psi_1(\ell)$$

$$\Phi_1(\ell) = R_{12}(\ell)\ \mathbb{C}_2 + \Psi_1(\ell) \tag{6.15}$$

6.2.2. Determinação das Variáveis Originais Φ_1 e Φ_2 - A Solução do Problema de Valores de Contorno Original:

Substituindo as funções R_{12} e Ψ_1 na equação (6.9), esta juntamente com a condição (6.6), passa a constituir um problema de valor inicial. Resolvendo este problema, determinamos a solução Φ_2. A solução Φ_1 pode, agora, ser determinada diretamente substituindo R_{12}, Ψ_1 e Φ_2 na equação (6.7). E o problema de valores de contorno de dois pontos original está satisfatoriamente resolvido.

6.3. GENERALIZAÇÃO DO MÉTODO DA TRANSFORMAÇÃO GENERALIZADA DE RICCATI:

Podemos eventualmente nos deparar com situacões físicas que são matematicamente formuladas por um problema de valores de contorno de dois pontos constituidos por um sistema de equações diferenciais lineares de ordem superior a 1 e condições de contorno mais gerais. Neste caso, para que o método apresentado na seção 6.2 possa ser aplicado, o problema em questão deverá ser colocado na forma das equações (6.3) e (6.4) e das condições de contorno (6.5) e (6.6). Sabemos que um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares constituído por uma ou mais equações de ordem superior a 1, pode ser transformado em um sistema do tipo (6.1). O processo de transformação se baseia em definir as derivadas de uma variável dependente como novas variáveis dependentes. Entretanto, esta simples transformação, em geral, não converte as condições de contorno de dois pontos gerais em condições na forma simples, tal como (6.5) e (6.6). Em lugar desta forma simples, as condições de contorno correspondentes podem se apresentar na seguinte forma geral

$$B_{11}\Phi_1(0) + B_{12}\Phi_2(0) = \mathbb{C}_1 \qquad (6.16)$$

$$B_{21}\Phi_1(\ell) + B_{22}\Phi_2(\ell) = \mathbb{C}_2 \qquad (6.17)$$

onde B_{11}, B_{12}, B_{21} e B_{22} são funções matriciais constantes de dimensão $n_1 \times n_1$, $n_1 \times n_2$, $n_2 \times n_1$ e $n_2 \times n_2$, respectivamente.

Devemos, então, adotar procedimentos que possibilitem reduzir um problema de valores de contorno de dois pontos geral em um problema correspondente do tipo tratado na seção 6.2. Isto nos levará à generalização do Método da Transformação Generalizada de Riccati. Serão considerados dois casos, os quais estão relacionados com a existência da inversa da matriz

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

6.3.1. 1º Caso: A Matriz B é Não-Singular

Se a matriz B possui inversa, as variáveis originais Φ, Γ e H podem ser transformadas através das relações

$$\Phi^{*}(t) = B\Phi(t) \tag{6.19}$$

$$\Gamma^{*}(t) = B\Gamma(t)B^{-1} \tag{6.20}$$

$$H^{*}(t) = BH(t) \tag{6.21}$$

onde B^{-1} é a inversa da matriz B.

Vamos agora mostrar que mediante as transformações (6.19), (6.20) e (6.21), o problema de valores de contorno de dois pontos original será reduzido à forma tratada na seção 6.2

Derivando (6.19):

$$\frac{d\Phi^{*}(t)}{dt} = B\,\frac{d\Phi(t)}{dt} \tag{6.22}$$

Substituindo (6.1) em (6.22), vem:

$$\frac{d\Phi^*(t)}{dt} = B\left[\Gamma(t)\Phi(t) + H(t)\right] \tag{6.23}$$

$$\frac{d\Phi^*(t)}{dt} = B\Gamma(t)\Phi(t) + BH(t) \tag{6.24}$$

De (6.19) e de (6.20), temos:

$$\Gamma^*(t)\Phi^*(t) = B\Gamma(t)B^{-1}B\Phi(t) = B\Gamma(t)\Phi(t) \tag{6.25}$$

Substituindo (6.25) e (6.21) em (6.24), obtemos:

$$\frac{d\Phi^*(t)}{dt} = \Gamma^*(t)\Phi^*(t) + H^*(t) \tag{6.26}$$

A equação (6.26) tem a forma da equação (6.1). Repartindo as matrizes Φ^*, Γ^* e H^*, a equação (6.26) passa à forma das equações (6.3) e (6.4):

$$\frac{d\Phi_1^*(t)}{dt} = \Gamma_{11}^*(t)\Phi_1^*(t) + \Gamma_{12}^*(t)\ \Phi_2^*(t) + H_1^*(t) \qquad (6.27)$$

$$\frac{d\Phi_2^*(t)}{dt} = \Gamma_{21}^*(t)\Phi_1^*(t) + \Gamma_{22}^*(t)\ \Phi_2^*(t) + H_2^*(t) \qquad (6.28)$$

Com a partição da função matricial Φ^* nas submatrizes Φ_1^* e Φ_2^*, a relação (6.19) pode escrever-se:

$$\begin{bmatrix} \Phi_1^*(t) \\ \\ \Phi_2^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1(t) \\ \\ \Phi_2(t) \end{bmatrix}$$

de onde tiramos as igualdades:

$$\Phi_1^*(t) = B_{11}\Phi_1(t) + B_{12}\Phi_2(t) \qquad (6.29)$$

$$\Phi_2^*(t) = B_{21}\Phi_1(t) + B_{22}\Phi_2(t) \qquad (6.30)$$

Fazendo-se t = 0 na equação (6.29) e usando (6.16), obtemos a condição de contorno correspondente $\Phi_1^*(0)$:

$$\Phi_1^*(0) = B_{11}\Phi_1(0) + B_{12}\Phi_2(0)$$

$$\Phi_1^*(0) = \mathbb{C}_1 \tag{6.31}$$

Fazendo-se t = ℓ na equação (6.30) e usando (6.17), obtemos a condição de contorno correspondente $\Phi_2^*(\ell)$

$$\Phi_2^*(\ell) = B_{21}\Phi_1(\ell) + B_{22}\Phi_2(\ell)$$

$$\Phi_2^*(\ell) = \mathbb{C}_2 \tag{6.32}$$

As condições de contorno de dois pontos (6.31) e (6.32) apresentam-se na forma das condições (6.5) e (6.6).

As equações (6.27) e (6.28) juntamente com as condições (6.31) e (6.32) constituem um problema de valores de contorno de dois pontos na forma para a qual foi desenvolvido o Método da Transformação Generalizada de Riccati. Uma vez resolvido esse problema em Φ_1^* e Φ_2^*, as soluções desejadas Φ_1 e Φ_2 são recuperadas através da transformação (6.19).

6.3.2. 2º Caso: A Matriz B é Singular

6.3.2.1. A Matriz B_{11} é Não-Singular

Uma vez que o problema original foi reduzido à forma das equações (6.3) e (6.4) e das condições de contorno (6.16) e (6.17), o Método da Transformação Generalizada de Riccati é normalmente aplicado de modo a obtermos as equações (6.7), (6.8), (6.9), (6.10), (6.11) e (6.13). Entretanto, as invés de adotarmos (6.12) como condição inicial para (6.11), escolhemos

$$R_{12}(0) = -B_{11}^{-1} B_{12} \tag{6.33}$$

Segue-se, então, das equações (6.7), (6.33) e (6.16), para t = 0 que:

$$\Phi_1(0) = R_{12}(0)\Phi_2(0) + \Psi_1(0)$$

$$\Phi_1(0) = -B_{11}^{-1}B_{12}(0)\Phi_2(0) + \Psi_1'(0)$$

$$B_{11}\Phi_1(0) = -B_{12}\Phi_2(0) + B_{11}\Psi_1(0)$$

$$B_{11}\Psi_1(0) = B_{11}\Phi_1(0)+B_{12}\Phi_2(0) = \mathbb{C}_1$$

$$\Psi_1(0) = -B_{11}^{-1} \mathbb{C}_1 \tag{6.34}$$

A condição (6.34) substitui, agora, a condição (6.14).

As equações (6.11) e (6.13), juntamente com as respectivas condições iniciais (6.33) e (6.34), podem ser numericamente integrados no intervalo $[0, \ell]$ fornecendo as funções $R_{12}(t)$ e $\Psi_1(t)$.
Substituindo R_{12} e $\Psi_1(t)$ na equação (6.7) e fazendo $t = \ell$, obtemos;

$$\Phi_1(\ell) = R_{12}(\ell)\,\Phi_2(\ell) + \Psi_1(\ell) \tag{6.35}$$

Substituindo (6.35) na equação (6.17)

$$B_{21}\left[R_{12}(\ell)\Phi_2(\ell) + \Psi_1(\ell)\right] + B_{22}\Phi_2(\ell) = \mathbb{C}_2$$

$$B_{21}\,R_{12}(\ell)\Phi_2(\ell) + B_{22}\Psi_1(\ell) + B_{22}\Phi_2(\ell) = \mathbb{C}_2$$

$$\left[B_{21}\;R_{12}(\ell) + B_{22}\right]\,\Phi_2(\ell) = \mathbb{C}_2 - B_{21}\Psi_1(\ell)$$

$$\Phi_2(\ell) = \left[B_{21}\;R_{12}(\ell) + B_{22}\right]^{-1}\left[\mathbb{C}_2 - B_{21}\Psi_1(\ell)\right] \tag{6.36}$$

A equação (6.36) se apresenta na forma da condição (6.6).

Substituindo as funções R_{12} e Ψ_1 na equação (6.9) esta, juntamente com a condição (6.36), passa a constituir um problema de valor inicial. Resolvendo este problema, determinamos a solução Φ_2. A solução Φ_1 pode, agora, ser determinada diretamente substituindo R_{12}, Ψ_1 e Φ_2 na equação (6.7).

6.3.2.2. A Matriz B_{11} é Singular

Admitindo que as condições de contorno para t = 0 sejam linearmente independentes*, podemos sempre reorganizar as colunas da matriz B de modo que B_{11} seja não-singular. Para evitar complicações de uma prova formal, ilustraremos o procedimento através de um exemplo, sem perda de generalidade.

Consideremos uma situação física na qual as condições de contorno se expressem através do seguinte sistema de equações:

$$b_{11}\phi_1(0) + b_{12}\phi_2(0) + b_{13}\phi_3(0) + b_{14}\phi_4(0) = c_1 \qquad (6.37)$$

$$b_{21}\phi_1(0) + b_{22}\phi_2(0) + b_{23}\phi_3(0) + b_{24}\phi_4(0) = c_2 \qquad (6.38)$$

$$b_{31}\phi_1(\ell) + b_{32}\phi_2(\ell) + b_{33}\phi_3(\ell) + b_{34}\phi_4(\ell) = c_3 \qquad (6.39)$$

$$b_{41}\phi_1(\ell) + b_{42}\phi_2(\ell) + b_{43}\phi_3(\ell) + b_{44}\phi_4(\ell) = c_4 \qquad (6.40)$$

---

* Uma condição de contorno linearmente dependente a outra pode ser abandonada, uma vez que não representa informações adicionais.

Neste caso a matriz B e:

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array}\right] \qquad (6.41)$$

Partindo a matriz B, tal como mostrado acima, identificamos B_{11}.

$$B_{11} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \qquad (6.42)$$

Por hipótese, B_{11} é singular. Logo:

$$\det B_{11} = b_{11}b_{12} - b_{21}b_{12} = 0$$

e podemos escrever:

$$\frac{b_{11}}{b_{21}} = \frac{b_{12}}{b_{22}} = \frac{1}{\alpha}\ , \quad \alpha \ \varepsilon\ \mathbb{R}^* \qquad (6.43)$$

ou seja,

$$\alpha\, b_{11} = b_{21} \tag{6.44}$$

e

$$\alpha\, b_{12} = b_{22} \tag{6.45}$$

Admitindo que as condições de contorno para $t = 0$, (6.37) e (6.38), sejam linearmente independentes, deveremos ter:

$$\alpha\, b_{13} \neq b_{23} \tag{6.46}$$

ou

$$\alpha\, b_{14} \neq b_{24} \tag{6.47}$$

Entretanto, podemos escrever:

$$\beta\, b_{13} = b_{23}\,, \qquad \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \beta \neq \alpha \tag{6.48}$$

Agora, se reorganizarmos as parcelas do lado esquerdo das condições de contorno (6.37)-(6.40) de modo que as mesmas sejam colocadas na forma

$$b_{11}\phi_1(0) + b_{13}\phi_3(0) + b_{12}\phi_2(0) + b_{14}\phi_4(0) = c_1 \qquad (6.49)$$

$$b_{21}\phi_1(0) + b_{23}\phi_3(0) + b_{22}\phi_2(0) + b_{24}\phi_4(0) = c_2 \qquad (6.50)$$

$$b_{31}\phi_1(\ell) + b_{33}\phi_3(\ell) + b_{32}\phi_2(\ell) + b_{34}\phi_4(\ell) = c_3 \qquad (6.51)$$

$$b_{41}\phi_1(\ell) + b_{43}\phi_3(\ell) + b_{42}\phi_2(\ell) + b_{44}\phi_4(\ell) = c_4 \qquad (6.52)$$

A matriz B_{11} passa a ser

$$B_{11} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{13} \\ \alpha b_{11} & \beta b_{13} \end{bmatrix} \qquad (6.53)$$

e temos

$$\det B_{11} = b_{11}\beta b_{13} - b_{13}\alpha b_{11} = (\beta - \alpha) b_{11} b_{13} = 0$$

uma vez que $\beta \neq \alpha$

Ou seja, a nova matriz B_{11} é não-singular. O procedimento apresentado na seção 6.3.2.1 pode agora ser aplicado ao problema com suas equações convenientemente reorganizadas.

Nota 1: O procedimento apresentado na seção 6.3.2.1 será falho quando a matriz inversa da equação (6.36) não existir. •

CAPÍTULO 7

UM CASO DIFERENTE DA TRANSFORMAÇÃO GENERALIZADA DE RICCATI

7.1. UM DESDOBRAMENTO DO MÉTODO DA TRANSFORMAÇÃO GENERALIZADA DE RICCATI

O Método da Transformação Generalizada de Riccati possui ainda um desdobramento, de especial interesse, que se refere à resolução de um problema de valores de contorno de dois pontos constituído por um sistema de equações diferenciais lineares de 2ª ordem homogêneas do tipo

$$\begin{cases} z_2'' + a\, z_1 = 0 \\ z_1'' + b\, z_2 = 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

(com a e b constantes) e pelas seguintes condições de contorno de dois pontos homogêneas

$$z_1(0) = 0\ , \quad z_1(\ell) = 0\ , \quad z_2(0) = 0\ , \quad z_2(\ell) = 0\ , \tag{7.2}$$

O problema acima trata-se de um caso excepcional no qual as condições de contorno (7.2) não se reduzem à forma das condições (6.16) e (6.17) por ocasião da transformação do sistema (7.1) em um sistema linear de 1ª ordem do tipo (6.1).

Sendo assim, não podemos aplicar o Método da Transformação Generalizada de Riccati do modo que foi apresentado no capítulo 6. É necessário desenvolver o método de um modo diferente, tal como apresentado a seguir.

Primeiramente, admitimos uma relação linear entre as variáveis z_1 e z_2 e suas derivadas z'_1 e z'_2

$$\begin{cases} z_1 = u_{11}\, z'_1 + u_{12} z'_2 \\ z_2 = u_{21}\, z'_1 + u_{22} z'_2 \end{cases} \tag{7.3}$$

As relações (7.3) podem ser consideradas como uma outra generalização da Transformação de Riccati apresentada no capítulo 5, isto é:

$$x(t) = u(t)x'(t)$$

onde

$$u(t) = 1/y(t)$$

Diferenciando (7.3), vem:

$$\begin{cases} z'_1 = u_{11}\, z''_1 + u'_{11}\, z'_1 + u_{12}\, z''_2 + u'_{12}\, z'_2 + \\ z'_2 = u_{21}\, z''_1 + u'_{21}\, z'_1 + u_{22}\, z''_2 + u'_{22}\, z'_2 \end{cases} \tag{7.4}$$

Substituindo (7.1) em (7.4), vem:

$$\begin{cases} z_1' = u_{11}\left(-bz_2\right) + u_{11}' \; z_1' + u_{12} \left(-az_1\right) + u_{12}' \; z_2' \\ \\ z_2' = u_{21}\left(-bz_2\right) + u_{21}' \; z_1' + u_{22} \left(-az_1\right) + u_{22}' \; z_2' \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1' = -bu_{11} \; z_2 + u_{11}' \; z_1' - au_{12} \; z_1 + u_{12}' \; z_2' \\ \\ z_2' = -bu_{21} \; z_2 + u_{21}' \; z_1' - au_{22} \; z_1 + u_{22}' \; z_2' \end{cases}$$

Substituindo (7.3) em (7.5), vem:

$$\begin{cases} z_1' = -bu_{11}\left(u_{21}z_1' + u_{22}z_2'\right) + u_{11}'z_1' - au_{12}\left(u_{11}z_1' + u_{12}z_2'\right) + u_{12}'z_2' \\ \\ z_2' = -bu_{21}\left(u_{21}z_1' + u_{22}z_2'\right) + u_{21}'z_1' - au_{22}\left(u_{11}z_1' + u_{12}z_2'\right) + u_{22}'z_2' \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1'\left(1 + bu_{11}u_{21} + u_{11}' + au_{12}u_{11}\right) = z_2'\left(-bu_{11}u_{22} - au_{12}^2 + u_1'\right) \\ \\ z_1'\left(bu_{21}^2 - u_{21}' + au_{22}u_{11}\right) = z_2'\left(- 1 - bu_{21}u_{22} - au_{12}u_{22} + u_2'\right) \end{cases} \tag{7.6}$$

As equações (7.6) serão satisfeitas se forem impostas as seguintes condições:

$$\begin{cases} u'_{11} - bu_{11}u_{21} - au_{12}u_{11} = 1 \\ u'_{12} - bu_{11}u_{22} - au_{12}^2 = 0 \\ u'_{21} - bu_{21}^2 - au_{11}u_{22} = 0 \\ u'_{22} - bu_{21}u_{22} - au_{12}u_{22} = 1 \end{cases} \tag{7.7}$$

O sistema (7.7) pode ser considerado como um *sistema de equações de Riccati com termos cruzados*.

Após o desacoplamento, como veremos, o sistema (7.7) resultará em equações de Riccati (ver equações (7.43) e (7.44)).

Como $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = 0$ e $z'_1(0)$ e $z'_2(0)$ são arbitrários, resulta de (7.3) que:

$$u_{11}(0) = u_{12}(0) = u_{21}(0) = u_{22}(0) = 0 \tag{7.8}$$

O sistema (7.7) juntamente com as condições iniciais homogêneas (7.8), constituem um problema de valor inicial que, resolvido, fornece as funções u_{ij} (observar que as funções u_{ij} dependem das constantes a e b).

Uma vez determinadas as funções u_{ij}, o sistema (7.3), sujeito às condições $z_1(\ell) = 0$ e $z_2(\ell) = 0$, pode ser resolvido fornecendo as soluções z_1 e z_2.

Nota 1: Notemos que o problema é de autovalores, pois para que o sistema (7.3) possua soluções não-nulas é necessário que, no ponto $x = \ell$

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{7.8-a}$$

Isto, obvidamente, imporá um certo relacionamento entre a e b. Para a e b não satisfazendo este relacionamento, a solução para z_1 e z_2 será trivial.
A condição (7.8-a) é chamada de *autocondição* [30].
Os valores de a e b que satisfazem a autocondição são chamados de *autovalores*. •

7.2. UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO ÀS VIBRAÇÕES MECÂNICAS

Para ilustrar o método ora descrito, seja resolver o problema de valores de contorno de dois pontos constituído pela equação de Euler-Bernoulli [14].

$$y^{IV} - \lambda^4 y = 0 \tag{7.9}$$

onde $\lambda^4 = \dfrac{\mu\omega^2}{EJ}$

e pelas condições de contorno de dois pontos

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \quad , \quad y(1) = 0 \\ y''(0) &= 0 \quad , \quad y''(1) = 0 \end{aligned} \tag{7.10}$$

O problema acima consiste no modelo matemático para o cálculo do deslocamento vertical das várias seções de um eixo biapoiado, de seção constante, vibrando transversalmente sem influência do amortecimento.

Definindo variáveis auxiliares z_1 e z_2 como

$$z_1 = y \tag{7.11}$$

$$z_2 = y'' = z_1'' \tag{7.12}$$

A equação (7.9) escreve-se:

$$\begin{aligned} y^{IV} &= \lambda^4 y \\ z_2'' &= \lambda^4 z_1 \end{aligned} \tag{7.13}$$

As equações (7.12) e (7.13) constituem o sistema

$$\begin{cases} z_2'' - \lambda^4 z_1 = 0 \\ z_1'' - z_2 = 0 \end{cases} \tag{7.14}$$

que é a forma do sistema (7.1).
As condições iniciais para z_1 e z_2 são determinadas recorrendo-se às equações (7.11), (7.12) e (7.10):

$$z_1(0) = 0 \quad , \; z_2(0) = 0 \quad , \; z_1(1) = 0 \quad , \; z_2(1) = 0 \tag{7.15}$$

As condições (7.15) encontram-se na forma das condições (7.2). Neste ponto, o método pode ser aplicado.

Admitindo a relação linear (7.3) entre as variáveis z_1 e z_2 e suas derivadas z_1' e z_2' e substituindo (7.14) em (7.4), temos:

$$\begin{cases} z_1' = u_{11}z_2 + u_{11}'z_1' + u_{12}\lambda^4 z_1 + u_{12}'z_2 \\ z_2' = u_{21}z_2 + u_{21}'z_1' + u_{22}\lambda^4 z_1 + u_{22}'z_2' \end{cases} \tag{7.16}$$

Substituindo (7.3) em (7.16), vem:

$$\begin{cases} z_1'\left(1 - u_{11}u_{21} - u_{11}' - \lambda^4 u_{12}u_{11}\right) = z_2'\left(u_{11}u_{22} + \lambda^4 u_{12}^2 + u_{12}'\right) \\ z_1'\left(-u_{21}^2 - u_{21}' - \lambda^4 u_{22}u_{21}\right) = z_2'\left(-1 + u_{21}u_{22} + \lambda^4 u_{12}u_{22} + u_{22}'\right) \end{cases} \tag{7.17}$$

As equações (7.17) serão satisfeitas se u_{11}, u_{12}, u_{21} e u_{22} forem soluções do sistema

$$\begin{cases} u_{11}' + u_{11}u_{21} + \lambda^4 u_{12}u_{11} = 1 \\ u_{12}' + u_{11}u_{22} + \lambda^4 u_{12}^2 = 0 \\ u_{21}' + u_{21}^2 + \lambda^4 u_{11}u_{22} = 0 \\ u_{22}' + u_{21}u_{22} + \lambda^4 u_{12}u_{22} = 1 \end{cases} \tag{7.18}$$

sujeito às condições (7.8)

As funções u_{11}, u_{12}, u_{21} e u_{22} são obviamente, funções de λ. Deste modo, construindo a autocondição

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = 0$$

obtemos uma certa relação do tipo

$$f(\lambda) = 0$$

que, resolvida, vai fornecer os autovalores λ.

7.3. SOLUÇÃO ANALÍTICA DO SISTEMA (7.18)

Vamos agora mostrar um método, bastante direto, para se resolver o sistema de equações (7.18) sujeito às condições (7.8).

Substituindo u_{11} por u_{22} e u_{22} por u_{11} nas equações do sistema (7.18), obtemos as equações

$$u'_{22} + u_{22}u_{21} + \lambda^4 u_{12}u_{22} = 1 \tag{7.19}$$

$$u'_{11} + u_{21}u_{11} + \lambda^4 u_{12}u_{11} = 1 \tag{7.20}$$

$$u'_{12} + u_{22}u_{11} + \lambda^4 u_{12}^2 = 0 \qquad (7.21)$$

$$u'_{21} + u_{21}^2 + \lambda^4 u_{22}u_{11} = 0 \qquad (7.22)$$

as quais constituem o mesmo sistema (7.18). Isto significa dizer que o sistema (7.18) permanece invariante com as substituições $u_{11} = u_{22}$ e $u_{22} = u_{11}$. Logo:

$$u_{11} = u_{22} = u \qquad (7.23)$$

Recorrendo a (7.8), determinamos:

$$u(0) = 0 \qquad (7.24)$$

Substituindo (7.23) nas equações (7.19) a (7.22), vem:

$$u' + uu_{21} + \lambda^4 u_{12}u = 1 \qquad (7.25)$$

$$u' + uu_{21} + \lambda^4 u_{12}u = 1 \qquad (7.26)$$

$$u'_{12} + u^2 + \lambda^4 u_{12}^2 = 0 \qquad (7.27)$$

$$u'_{21} + u_{21}^2 + \lambda^4 u^2 = 0 \qquad (7.28)$$

As equações (7.25) e (7.26) são idênticas. Desprezando, então, a equação (7.25), o sistema resultante fica sendo constituído apenas pelas equações (7.26) a (.728), as quais permanecem invariantes se substituirmos

$$u_{21} = \lambda^4 u_{12} \text{ e } u_{12} = \frac{u_{21}}{\lambda^4}$$

Logo

$$u_{21} = \lambda^4 u_{12} \tag{7.29}$$

Chamando

$$u_{21} = v \tag{7.30}$$

então

$$u_{21} = \lambda^4 v \tag{7.31}$$

Substituindo (7.30) e (7.31) nas equações (7.26) a (7.28), vem:

$$u' + 2u\lambda^4 v = 1 \tag{7.32}$$

$$v' + u^2 + \lambda^4 v^2 = 0 \tag{7.33}$$

$$\lambda^4 v' + \lambda^8 v^2 + \lambda^4 u^2 = 0 \qquad (7.34)$$

As equações (7.33) e (7.34) são idênticas. Desprezando, então, a equação (7.34), o sistema resultante fica constituído pelas equações (7.32) e (7.33).

Recorrendo a (7.8), (7.30) e (7.24), determinamos as condições iniciais para este último sistema:

$$u(0) = v(0) = 0 \qquad (7.35)$$

Finalmente, para tornar as equações (7.32) e (7.33) mais homogêneas em relação ao coeficiente λ, introduzimos

$$u = \varphi \qquad (7.36)$$

$$v = \frac{\eta}{\lambda^2} \qquad (7.37)$$

e as equações (7.32) e (7.33) tornam-se:

$$\varphi' + 2\varphi\lambda^2\eta = 1 \qquad (7.38)$$

$$\eta' + \lambda^2\left(\varphi^2 + \eta^2\right) = 0 \qquad (7.39)$$

com condições iniciais

$$\varphi(0) = \eta(0) = 0 \qquad (7.40)$$

O sistema constituído pelas equações (7.38) e (7.39) pode ser imediatamente desacoplado somando e subtraindo respectivamente as equações. Chamando

$$\varphi + \eta = \gamma \tag{7.41}$$

$$\varphi - \eta = \psi \tag{7.42}$$

obtemos, assim:

$$\varphi' + \eta' + 2\varphi\lambda^2\eta + \lambda^2\varphi^2 + \lambda^2\eta^2 = 1$$

$$\gamma' + \lambda^2\gamma^2 = 1 \tag{7.43}$$

$$\varphi' - \eta' + 2\varphi\lambda^2\eta - \lambda^2\varphi^2 - \lambda^2\eta^2 = 1$$

$$\psi' - \lambda^2\psi^2 = 1 \tag{7.44}$$

com condições iniciais

$$\gamma(0) = \psi(0) = 0 \tag{7.45}$$

As equações (7.43) e (7.44) são, obviamente, *equações de Riccati com coeficientes constantes*.

De acordo com o exposto na seção 3.9, para determinar a solução geral de (7.43), fazemos

$$\gamma = \frac{f'}{\lambda^2 f} \qquad (7.46)$$

de onde

$$\gamma' = \frac{f''f - \left(f'\right)^2}{\lambda^2 f^2} \qquad (7.47)$$

e a equação (7.43) fica

$$\frac{f''f - \left(f'\right)^2}{\lambda^2 f^2} + \frac{\left(f'\right)^2}{\lambda^2 f^2} = 1$$

$$f''f = \lambda^2 f^2$$

$$f'' - \lambda^2 f = 0 \qquad (7.48)$$

cuja solução é:

$$f = C_1 e^{\lambda x} + C_2{}^{-\lambda x} \qquad (7.49)$$

Logo, de (7.46)

$$\gamma = \frac{\lambda C_1 e^{\lambda x} - \lambda C_2 e^{-\lambda x}}{\lambda^2 \left(C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}\right)}$$

$$\gamma = \frac{C_1 e^{\lambda x} - C_2 e^{-\lambda x}}{\lambda \left(C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} \right)}$$

Fazendo $C = C_2/C_1$, para $C_1 \neq 0$, vem

$$\gamma = \frac{e^{\lambda x} - C\, e^{-\lambda x}}{\lambda \left(e^{\lambda x} + C\, e^{-\lambda x} \right)} \tag{7.50}$$

Da condição inicial (7.45), determinamos

$$C = 1$$

e assim, a solução da equação (7.43) sujeita à condição $\gamma(0) = 0$, é:

$$\gamma = \frac{\sinh(\lambda x)}{\lambda \cos(\lambda x)} = \frac{1}{\lambda} \tanh(\lambda x) \tag{7.51}$$

Procedendo de modo análogo com a equação (7.44), obtemos sua solução que satisfaz a condição $\psi(0) = 0$

$$\psi = \frac{1}{\lambda} \tan\,(\lambda x) \tag{7.52}$$

Retroagindo, obtemos das equações (7.41) e (7.42)

$$\varphi + \eta = \frac{1}{\lambda} \tanh(\lambda x) \tag{7.53}$$

$$\varphi - \eta = \frac{1}{\lambda} \tan(\lambda x) \tag{7.54}$$

de onde

$$\varphi = \frac{1}{2\lambda} \left[\tanh(\lambda x) + \tan(\lambda x)\right] \tag{7.55}$$

$$\eta = \frac{1}{2\lambda} \left[\tanh(\lambda x) - \tan(\lambda x)\right] \tag{7.56}$$

Das equações (7.36) e (7.37), vem:

$$u = \frac{1}{2\lambda} \left[\tanh(\lambda x) + \tan(\lambda x)\right] \tag{7.57}$$

$$v = \frac{1}{2\lambda^3} \left[\tanh(\lambda x) - \tan(\lambda x)\right] \tag{7.58}$$

e, finalmente das equacões (7.23) (7.30) e (7.31) obtemos:

$$u_{11} = \frac{1}{2\lambda}\left[\tanh(\lambda x) + \tan(\lambda x)\right] \tag{7.59}$$

$$u_{12} = \frac{1}{2\lambda^3}\left[\tanh(\lambda x) - \tan(\lambda x)\right] \tag{7.60}$$

$$u_{21} = \frac{\lambda}{2}\left[\tanh(\lambda x) - \tan(\lambda x)\right] \tag{7.61}$$

$$u_{22} = \frac{1}{2\lambda}\left[\tanh(\lambda x) + \tan(\lambda x)\right] \tag{7.62}$$

A autocondição é, para x = 1:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2\lambda}\left(\tanh\lambda + \tan\lambda\right) & \frac{1}{2\lambda^3}\left(\tanh\lambda - \tan\lambda\right) \\ \frac{\lambda}{2}\left(\tanh\lambda - \tan\lambda\right) & \frac{1}{2\lambda}\left(\tanh\lambda + \tan\lambda\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{7.63}$$

ou, então

$$\frac{1}{4\lambda^2}\left(\tanh\lambda + \tan\lambda\right)^2 - \frac{1}{4\lambda^2}\left(\tanh\lambda - \tan\lambda\right)^2 = 0$$

$$\tanh \lambda \tan \lambda = 0$$

$$\tan \lambda = 0$$

Assim,

$$\lambda = 0, \pi, 2\pi, \ldots \tag{7.64}$$

Se, além dos autovalores λ, quisermos ainda determinar a deflexão da viga, agora temos a disposição o sistema (7.3) com condições iniciais

$$z_1(0) = 0 \quad \text{e} \quad z_2(0) = 0$$

Para resolver o sistema (7.3) sujeito às condições acima, é mais conveniente explicitar z_1' e z_2'

$$z_1' = \frac{u_{22} z_1 - u_{12} z_2}{u_{11} u_{22} - u_{12} u_{21}}$$

$$z_2' = \frac{-u_{21} z_1 + u_{11} z_2}{u_{11} u_{22} - u_{12} u_{21}}$$

Notemos que nas funções u_{ij} das equações (7.59) a (7.62), devemos substituir agora $\lambda = k\pi$, com $k = 0, 1, 2, \ldots$

Nota 1: Observemos que, neste caso, devido à simplicidade da equação de Euler-Bernoulli, poderia ser mais fácil resolver analiticamente a equação original (isto é, de ordem 4 e com dois pontos de contorno) do que o sistema (7.18) com um único ponto inicial. Porém, com qualquer complicação (por exemplo, se admitirmos que a viga tenha seção transversal variável e portanto, onde $\lambda = \lambda(x)$), a solução numérica da equação original seria dificultada pelas condições de contorno de dois pontos, ao passo que o sistema (7.18) correspondente poderia ser integrado diretamente. $\bullet$

CAPÍTULO 8

CONTRIBUICÕES E CONCLUSÕES

8.1. CONTRIBUIÇÕES DO PRESENTE TRABALHO

Acreditamos que as principais contribuições do presente trabalho tenham sido:

- O desenvolvimento da teoria das equações de riccati de um modo sistemático e didático;

- A Apresentação e a Generalização do Método da Transformação Generalizda de Riccati;

- A análise da viabilidade do uso do Método da Transformação Generalizada de Riccati para se obter melhoramento no cálculo numérico de problemas em engenharia.

8.2. CONCLUSÕES

- As dificuldades numéricas (instabilidades) associadas ao cálculo numérico de problemas de valor inicial e problemas de valores de contorno de dois pontos que admitem soluções exponenciais positivas, são eliminadas com a Transformação de Riccati.

- O Método da Transformação Generalizada de Riccati consiste em uma técnica computacionalmente eficiente que pode ser aplicada à análise estrutural mecânica.

APÊNDICE A

FUNÇÃO FRACIONÁRIA IRREDUTÍVEL

A função fracionária

$$y = \frac{h(x) + cv(x)}{p(x) + cq(x)}$$

é irredutível se, e somente se,

$$h(x)q(x) - p(x)v(x) = \begin{vmatrix} h(x) & v(x) \\ p(x) & q(x) \end{vmatrix} \neq 0, \ \forall \ x \ \varepsilon \ D(y)$$

Prova

A demonstração será feita pelo método de redução ao absurdo. Sendo assim, suponhamos, por absurdo, que

$$\begin{vmatrix} h(x) & v(x) \\ p(x) & q(x) \end{vmatrix} = 0$$

para algum x ε D(y). Nestas condições, as linhas deste determinante são linearmente dependendes *quando consideradas como vetores de* $\mathbb{R}^n$. Isto significa que existem escalares α e β, não todos nulos, tais que

$$\alpha[h(x),\ v(x)] + \beta[p(x),\ q(x)] = (0,0).$$

Devido a isto, admitindo $\alpha \neq 0$, podemos concluir que:

$$\begin{matrix} \alpha h(x) + \beta p(x) = 0 \\ \\ \alpha v(x) + \beta q(x) = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h(x) = -\dfrac{\beta}{\alpha}\, p(x) \\ \\ v(x) = -\dfrac{\beta}{\alpha}\, q(x) \end{cases}$$

Por outro lado, temos que:

$$y = \frac{h(x) + cv(x)}{p(x) + cq(x)} = \frac{-\dfrac{\beta}{\alpha}\, p(x) - c\,\dfrac{\beta}{\alpha}\, q(x)}{p(x) + cq(x)} = -\frac{\beta}{\alpha}\ ,$$

significando com isto que y é redutível a uma expressão mais simples que é $y = -\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Ora, mas por hipótese, y é irredutível. Logo, para evitar o absurdo, deveremos ter que

$$\begin{vmatrix} h(x) & v(x) \\ p(x) & q(x) \end{vmatrix} = h(x)q(x) - p(x)v(x) \neq 0$$

APÊNDICE B

TRANSFORMAÇÃO DE MÖBIUS

B.1. Transformação de Möbius

Definição: Transformação de Möbius é a relação entre duas funções, digamos u e v, do tipo

$$v = \frac{a + bu}{c + du}\,, \quad (a,\ b,\ c \text{ e } d \text{ constantes}) \tag{B.1}$$

onde a, b, c e d são constantes tais que v seja irredutível (vide Apêndice A).

Dizemos que a função fracionária v é a transformação de Möbius da função u.

B.2. Transformação de Möbius Composta

Se v é a transformação de Möbius de u:

$$v = \frac{a + bu}{c + du}\,, \quad (a,\ b,\ c,\ d,\ \text{constantes})$$

e w é a transformação de Möbius de v:

$$w = \frac{e + fv}{g + hv}\,, \quad (e,\ f,\ g,\ h,\ \text{constantes})$$

Logo

$$w = \frac{e + \dfrac{af + bfu}{c + du}}{g + \dfrac{ah + bhu}{c + du}} = \frac{ec + deu + af + bfu}{cg + dgu + ah + bhu} = \frac{(ec + af) + (de + bf)u}{(cg + ah) + (dg + bh)u} \tag{B.2}$$

isto é, w é transformação de Möbius de u!

B.3. Transformação de Möbius Inversa

Se v é a transformaçao de Möbius de u

$$v = \frac{a + bu}{c + du}$$

então

$$a + bu = cv + duv$$

$$u = \frac{-a + cv}{b - dv} \tag{B.3}$$

isto é, u é transformação de Möbius v!

B.4. Funções Fracionais Lineares

Se

$$B = \frac{Cf(x) + \varphi(x)}{Cg(x) + \gamma(x)} \tag{B.4}$$

dizemos que B é uma função fracional linear de C.

B.5. Cross Ratio R_x:

Definição

$$R_x(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{(a_1 - a_3)(a_2 - a_4)}{(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)} \tag{B.5}$$

Sejam V_1, V_2, V_3, V_4 as transformações de Möbius de u_1, u_2, u_3, u_4, respectivamente, isto é

$$V_i = \frac{a + bu_i}{c + du_i} \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{B.6}$$

Assim

$$\frac{(V_1 - V_3)(V_2 - V_4)}{(V_1 - V_4)(V_2 - V_3)} = \frac{\left(\frac{a + bu_1}{c + du_1} - \frac{a + bu_3}{c + du_3}\right)\left(\frac{a + bu_2}{c + du_2} - \frac{a + bu_4}{c + du_4}\right)}{\left(\frac{a + bu_1}{c + du_1} - \frac{a + bu_4}{c + du_4}\right)\left(\frac{a + bu_2}{c + du_2} - \frac{a + bu_3}{c + du_3}\right)} =$$

$$= \frac{\left[\left(a+bu_1\right)\left(c+du_3\right) - \left(a+bu_3\right)\left(c+du_1\right)\right]\left[\left(a+bu_2\right)\left(c+du_4\right) - \left(a+bu_4\right)\left(c+du_2\right)\right]}{\left[\left(a+bu_1\right)\left(c+du_4\right) - \left(a+bu_4\right)\left(c+du_1\right)\right]\left[\left(a+bu_2\right)\left(c+du_3\right) - \left(a+bu_3\right)\left(c+du_2\right)\right]}$$

Determinaremos um fator típico da expresssão acima:

$$\left(a + bu_1\right)\left(c + du_3\right) - \left(a + bu_3\right)\left(c + du_1\right) =$$

$$= ac + adu_3 + bcu_1 + bdu_1u_3 - ac - adu_1 - bcu_3 - bdu_1u_3 =$$

$$= ad\left(u_3 - u_1\right) - bc\left(u_3 - u_1\right) = \left(bc - ad\right)\left(u_1 - u_3\right)$$

Analogamente

$$\left(a + bu_2\right)\left(c + du_4\right) - \left(a + bu_4\right)\left(c + du_2\right) = \left(bc - ad\right)\left(u_2 - u_4\right)$$

$$\left(a + bu_1\right)\left(c + du_4\right) - \left(a + bu_4\right)\left(c + du_1\right) = \left(bc - ad\right)\left(u_1 - u_4\right)$$

$$\left(a + bu_2\right)\left(c + du_3\right) - \left(a + bu_3\right)\left(c + du_2\right) = \left(bc - ad\right)\left(u_2 - u_3\right)$$

Assim

$$\frac{\left(V_1 - V_3\right)\left(V_2 - V_4\right)}{\left(V_1 - V_4\right)\left(V_2 - V_3\right)} = \frac{\left(bc - ad\right)^2\left(u_1 - u_3\right)\left(u_2 - u_4\right)}{\left(bc - ad\right)^2\left(u_1 - u_4\right)\left(u_2 - u_3\right)} =$$

$$= \frac{\left(u_1 - u_3\right)\left(u_2 - u_4\right)}{\left(u_1 - u_4\right)\left(u_2 - u_3\right)}$$

A divisão do numerador e denominador por $(bc - cd)^2$ foi possível uma vez que a fração (B.6) é, por hipótese, irredutível (ver Apêndice A).

Assim,

$$R_x(V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4) = R_x(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4) \tag{B.7}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] INCE, E.L., Ordinary Differential Equations, New York, Dover Publications, Inc., p. 23, 293-295, 532-533, 1926.

[2] REID, W.T., A Matrix Differential Equation of Riccati Type, Amer. J. Math, 68, p. 237-246, 1946.

[3] COLES, W.J., Linear and Riccati Systems, Duke Math. J., 22, p. 333-338, 1955.

[4] REDHEFFER, R.M. On Solutions of Riccati's Equation as Functions of Initial Values, J. Rat. Mech. Analysis, 5, p. 835-848, 1956.

[5] REDHEFFER, R.M.,The Riccati Initial Values and Inequalites, Math. Amalen, Bd 133, 5, 235-250, 1957.

[6] LEVIN, J.J., On the Matrix Riccati Equation, Proc. Amer. Math. Soc., 10, p. 519-524, 1959.

[7] REID, W.T., Solutions of a Riccati Matrix Differential Equation as Functions of Initial Values, J. Math. Mec., 9, p. 221-230, 1959.

[8] REDHEFFER, R.M., Inequalities for a Matrix Riccati Equation, Journal of Mathematics and Mech., vol. 8, nº 3, p. 349-367, 1959.

[9] REID, W.T., Properties of Solutions of a Riccati Matrix Differential Equation, J. Math. Mec., 9, p. 749-770, 1960.

[10] McCARTY, G.S. Jr., Solutions to Riccati's Problem as Functions of Initial Values, J. Math. Mech., 9, p. 919-925, 1960.

[11] REDHEFFER, R.M. Supplementary note on Matrix Riccati Equations, _J. Math. Mech._, 9, p. 745-748, 1960.

[12] REID, W.T., _Riccati Differential Equations_, Mathematics in Science and Engineering, New York, Academic Press, vol. 86, 1960.

[13] KAPLAN, E.J. and STOCK, D.J.R., A Generalization of the Matrix Riccati Equation and the "Star" Multiplication of Redheffer, _J. Math. Mec._, 11, p. 927-928, 1962.

[14] PESTEL, E.C. and LECKIE, F.A., _Matrix Methods in Elastomechanics_, New York, McGraw Hill, p. 130-408, 1963.

[15] REID, W.T., Riccati Matrix Differential Equations and Non-Oscillation Criteria for associated linear differential systems, _Pacific J. Math._, 13, p. 665-685, 1963.

[16] COLES, W.J., Matrix Riccati Differential Equations, _SIAM J. Appl. Math._, 13, p. 627-634, 1965.

[17] RYBICKI, G.B. and USHER, P.D., The Generalized Riccati Transformation as a Simple Alternative to Invariant Imbedding, _Astrophysical Journal_, vol. 146, nº 3, mar. 1966, p. 871-879.

[18] WATSON, G.N., _A Treatise on the Theory of Bessel Functions_, Cambridge University Press, 1966, p. 1-3, 85-94.

[19] BELLMAN, R., Upper and Lower Bounds for the Solutions of the Matrix Riccati Equation, _J. Math. Anal. Appl._, 17, p. 373-379, 1967.

[20] BUCY, R.S., Two-Point Boundary value Problems for Linear Hamiltonian Systems, SIAM J. Appl. Math., 15, p. 1385-1389, 1967.

[21] BUCY, R.S., Global Theory of the Riccati Equation, J. Computer System Sci, 1, p. 349-361, 1967.

[22] JACOBSON, D.H., New Conditions for Boundedness of the Solutions of a Matrix Riccati Differential Equation, J. Differential Equations, 8, p. 258-263, 1970.

[23] HILLE, E., Ordinary Differential Equation in the complex Domain, John Wiley & Sons, Inc. p. 103-110, 1976.

[24] BOYCE, W.E., DIPRIMA, R.C., Equações Differenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 3ª edição, Rio de Janeiro, Editora Guanabara Koogan S.A., p. 584, 1977.

[25] HORNER, G.C., The Riccati Transfer Matrix Method, University of Virginia, Ph.D, Engineering Mechanics, p. 112, 1975.

[26] HORNER, G.C. e PILKEY, W.D., The Riccati Transfer Matrix Method, ASME Journal of Mechanical Design, vol. 100, april, p. 297, 1978.

[27] CHU, F.H., Transient Analysis of Structural Members by the csdt Riccati Transfer Matrix Method, ph.D. Dissertation, University of Virginia, Charlottesville, Virginia, 1978.

[28] CHU, F.H. and PILKEY, W.D., Transient Analysis of Structural Members by the csdt Riccati Transfer Matrix Method, Computers Structure, vol. 10, p. 599, 1979.

[29] SILVA, Ernani, F., Cálculo Numérico, Itajubá, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, p. 284, 1989 (notas de aula).

[30] MIKHAILOV, M.D. e ÖZISIK, M.N., Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion, Wiley, 1984.