

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

## **Invariantes Intrínsecos do Cross Cap**

**Maria Carolina Zanardo**

**Orientador: Prof. Dr. Fabio Scalco Dias**

ITAJUBÁ, FEVEREIRO DE 2015.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Maria Carolina Zanardo**

## **Invariantes Intrínsecos do Cross Cap**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Itajubá como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

**Área de Concentração:** Topologia/Geometria

**Orientador:** Prof. Dr. Fabio Scalco Dias

ITAJUBÁ – MG

FEVEREIRO DE 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Maria Carolina Zanardo**

## **Invariantes Intrínsecos do Cross Cap**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 24 de Fevereiro de 2015, conferindo ao autor o título de Mestre em Ciências em Matemática

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Fabio Scalco Dias

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes

ITAJUBÁ – MG

2015

*Dedico este trabalho aos meus pais José Antonio e Enilce, ao meu irmão Junior e ao meu companheiro Rodrigo, pois sem vocês nada teria sentido.*

# Agradecimentos

Agradeço, acima de tudo, aos meus pais e ao meu irmão, por todo o incentivo e por sempre acreditarem que eu era capaz. Não teria chegado tão longe sem o apoio incondicional da minha amada família. Obrigada por toda a dedicação, por vibrarem a cada conquista, por se orgulharem de cada passo dado e por estarem sempre presentes em todos os momentos.

Ao meu querido companheiro Rodrigo, que esteve sempre ao meu lado, aguentando os momentos mais difíceis com toda paciência do mundo. Sou eternamente grata por toda sua ajuda, compreensão e carinho.

Ao meu orientador Fabio, que nunca desistiu de mim ao longo desses anos. Obrigada por estar sempre disposto a ajudar e ensinar, pelas conversas, paciência, conselhos e “puxões de orelha”. Obrigada por todo incentivo, por ser essa pessoa admirável e por ser o melhor orientador que eu poderia ter desejado.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação, pelo comprometimento com as disciplinas e pela disposição infindável. Em especial, ao professor Baêta (nosso amado mestre!), por toda a inspiração proporcionada e por suas aulas incríveis. Obrigada pelos ensinamentos maravilhosos, não só em relação à matemática, mas também pelas lições de vida que carregarei para sempre. E também ao professor Luis Fernando, a quem admiro profundamente, como pessoa e professor. Um grande exemplo para todos nós!

A todos os meus colegas do ICE que, direta ou indiretamente, compartilharam esta jornada comigo, especialmente minhas queridas amigas Sueni e Jerusa, com as quais sempre pude contar em todas as horas. Obrigada pela amizade, pelas risadas e por todos os momentos inesquecíveis!

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

*Muito obrigada!!!*

“Don’t bother just to be better than your contemporaries or predecessors. Try to be better than yourself.”  
*(William Faulkner)*

# Resumo

Dada uma superfície parametrizada por  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , Whitney mostrou que  $f$  pode ter uma singularidade estável sob mudanças de coordenadas na fonte e na meta. Um modelo local desta singularidade é dado pela aplicação

$$(u, v) \mapsto (u, uv, v^2).$$

A imagem desta aplicação é uma superfície singular chamada cross cap. Graças a esta estabilidade do cross cap, é natural estudarmos um pouco de sua geometria diferencial. Podemos entender esta geometria do cross cap por meio das singularidades das funções altura e distância ao quadrado. Em especial, o objetivo principal desta dissertação é estudar os invariantes intrínsecos do cross cap, ou seja, os elementos que podem ser descritos em termos de uma métrica semi-definida positiva.

**Palavras-chave:** Cross cap, função altura, função distância ao quadrado, deformação isométrica, invariantes intrínsecos, invariantes extrínsecos.

# Abstract

Given a surface parametrized by  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , Whitney proved that  $f$  can have a stable singularity under coordinate changes in the source and the target. A local model for this singularity is given by the map

$$(u, v) \mapsto (u, uv, v^2).$$

The image of this map is the singular surface we call the cross cap. Because of its stability, it is natural we seek to understand some of its differential geometry. This geometry of the cross cap can be understood by the study of height and distance squared functions' singularities. In particular, the main goal of this work is to study the intrinsic invariants of the cross cap, that is, the elements which can be described in terms of an induced positive semidefinite metric.

**Key-words:** Cross cap, height function, distance squared function, isometric deformation, intrinsic invariants, extrinsic invariants.



# Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Lista de Figuras	viii
Introdução	1
<b>1 Parametrização do Cross Cap</b>	<b>4</b>
1.1 Geometria Diferencial do Cross Cap . . . . .	4
1.2 Propriedades Geométricas dos Cross Caps . . . . .	10
1.3 Geometria Flat do Cross Cap . . . . .	13
<b>2 Geometria das Singularidades de Projeções</b>	<b>16</b>
2.1 Função Altura . . . . .	16
2.1.1 Função Altura em Superfícies Suaves . . . . .	17
2.1.2 Função Altura no Cross Cap . . . . .	20
2.2 Função Distância ao Quadrado e Conjunto Focal . . . . .	26
<b>3 Invariantes Intrínsecos do Cross Cap</b>	<b>35</b>
3.1 Algumas Definições . . . . .	36
3.2 Deformações Isométricas de Superfícies Regradas com Singularidades . . . . .	37
3.3 Deformações Isométricas de Cross Caps Quadráticos Degenerados . . . . .	38
3.3.1 Fórmulas de Frenet para Curvas na Esfera . . . . .	39

3.3.2	Deformações Isométricas de Cross Caps Quadráticos Degenerados . . . . .	40
3.4	Invariantes Extrínsecos e Intrínsecos do Cross Cap . . . . .	44
	<b>Bibliografia</b>	<b>54</b>

# Lista de Figuras

1	Cross Cap Padrão. . . . .	1
1.1	(a) Cross Cap Elíptico, (b) Cross Cap Hiperbólico, (c) Cross Cap Parabólico	10
1.2	Forma normal flat: (a) Cross Cap Elíptico, (b) Cross Cap Hiperbólico, (c) Cross Cap Parabólico . . . . .	14
2.1	Conjunto parabólico para $a > 0$ , $a = 0$ e $a < 0$ . . . . .	22
2.2	Seções cônicas: (a) Elipse, (b) Hipérbole, (c) Parábola . . . . .	29
3.1	(a) Cuspidal Edge, (b) Swallowtail, (c) Cuspidal Cross Cap . . . . .	38
3.2	Deformação isométrica do cross cap padrão, com $k_g = 0$ (a), $k_g = 1$ (b) e $k_g = 3$ (c). . . . .	44

# Introdução

A geometria diferencial de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  tem sido amplamente estudada ao longo dos anos. Superfícies em  $\mathbb{R}^3$  podem ser descritas por mais de uma maneira: Por exemplo, uma superfície pode ser dada implicitamente, ou seja, dada por uma única equação  $g(x, y, z) = 0$  para algum germe de aplicação suave  $g : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ . O guarda chuva de Whitney é um exemplo dessa superfície, definida pela equação  $y^2 - x^2z = 0$ . O guarda chuva de Whitney intersecta o plano  $z = 0$  em uma reta (com contato 2), e os planos  $z - k = 0$  em pares de retas  $y^2 = kx^2$ , onde  $k$  é uma constante positiva. Se  $c$  é uma constante, o guarda chuva de Whitney intersecta o plano  $x - c = 0$  nas parábolas  $c^2z = y^2$ . A única parte do guarda chuva de Whitney que pertence a região  $z < 0$  é o eixo  $z$ .

Outra maneira de definir superfícies é explicitamente, ou parametrizadas por uma função suave  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com  $U$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^2$ . O cross cap surge desta forma: considerando  $f_{std} : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  o germe definido por  $f_{std}(u, v) = (u, uv, v^2)$ , conhecido como cross cap padrão. A imagem de  $f_{std}$  é o guarda chuva de Whitney sem a sua “alça” (semi-reta  $x = y = 0, z < 0$ ). A ilustração pode ser vista na Figura 1.

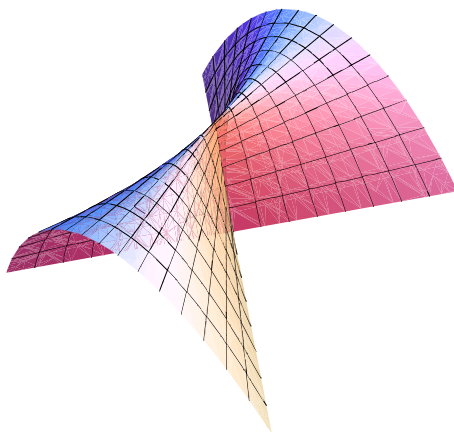


Figura 1: Cross Cap Padrão.

No entanto, não é necessariamente verdade que tais parametrizações irão gerar variedades. A superfície pode conter auto-interseções, mas este não é o problema de maior importância. O maior problema é que elas podem possuir pontos singulares.

Um ponto  $p \in U$  é chamado ponto singular se o posto da matriz Jacobiana de  $f$  em  $p$  é menor que 2. Desta forma  $(0,0)$  é um ponto singular de  $f_{std}$ , chamado de ponto cross cap padrão. Um ponto singular  $p$  de uma aplicação  $f : U \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  é chamado de cross cap se existe um difeomorfismo local  $\varphi$  em  $\mathbb{R}^2$  e um difeomorfismo local  $\psi$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\psi \circ f = f_{std} \circ \varphi$ . Nota-se que a imagem da derivada na origem de um germe que parametriza um cross cap é sempre uma reta. Cometemos um abuso de linguagem e chamamos esta reta de reta tangente ao cross cap.

Whitney provou que uma aplicação suave  $f : U \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  possui uma singularidade cross cap em  $(0,0) \in U$  se existe um sistema de coordenadas locais  $(u, v)$ , centrado em  $(0,0)$ , tal que

$$f_v(0,0) := \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$$

e tal que os três vetores

$$f_u(0,0) := \frac{\partial f}{\partial u}(0,0), \quad f_{uv}(0,0) := \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(0,0), \quad f_{vv}(0,0) := \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0,0)$$

sejam linearmente independentes. Além disso, Whitney mostrou que se perturbarmos estas aplicações, essas singularidades persistirão, ou seja eles são estáveis (ver [12] ou [19] para detalhes). Conseqüentemente, quando estudamos a geometria diferencial de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , existem boas razões para estudarmos superfícies com cross caps.

Em [13] os autores consideraram uma parametrização do cross cap dada por

$$f(u, v) = \left( u, uv + \sum_{i=3}^n \frac{b_i}{i!} v^i, \sum_{r=2}^n \sum_{j=0}^r \frac{a_{jr-j}}{j!(r-j)!} u^j v^{r-j} \right) + O(u, v)^{n+1} \quad (1)$$

onde  $a_{02} \neq 0$ . Quando  $a_{20} = 0$ ,  $a_{jk} = 0$  para  $j + k \geq 3$  e  $b_i = 0$  para  $i \geq 3$ , denominamos  $f$  por cross cap quadrático degenerado. Usando deformações isométricas de superfícies regradas, os autores mostraram que cada cross cap quadrático degenerado induz uma família de deformações isométricas não triviais. Com isso os autores mostraram que os invariantes  $a_{03}$ ,  $a_{12}$  e  $b_3$  de (1) são extrínsecos, ou seja, esses invariantes se alteram de acordo com a deformação isométrica. Vale notar ainda que utilizando esse mesmo método,

os autores observaram a existência de deformações isométricas não triviais para outros tipos de singularidades conhecidas, como cuspidal cross caps, swallowtails e cuspidal edges. Mas, neste trabalho, fixamos nossa atenção apenas no cross cap.

A geometria diferencial do cross cap em  $\mathbb{R}^3$  tem sido discutida por vários autores (ver [5], [8], [7], [10], [14], [17] e [18]). Contudo, a distinção entre invariantes intrínsecos e extrínsecos não havia sido discutida anteriormente ao trabalho [13]. Esta dissertação está baseada nos trabalhos *The differential geometry of the Crosscap*, de M. J. West e *Intrinsic invariants of cross caps*, de M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara e K. Yamada (respectivamente, [18] e [13]) e tem como objetivo o estudo da geometria flat do cross cap e também o estudo dos invariantes intrínsecos e extrínsecos do cross cap. Esta dissertação está disposta da seguinte maneira:

No Capítulo 1 obtemos duas parametrizações do cross cap. Uma parametrização é obtida via mudanças de coordenadas na fonte ( $\mathcal{R}$ -mudanças) e isometrias na meta. Para a outra parametrização, utilizamos as  $\mathcal{R}$ -mudanças e transformações lineares na meta (transformações que preservam a geometria flat).

No Capítulo 2 damos ênfase à geometria flat do cross cap, que são as características geométricas que podem ser medidas por contato com planos e retas. O contato com planos pode ser medido considerando funções altura no cross cap. Também investigamos as singularidades da família de funções distância ao quadrado, que medem o contato com esferas e, além disso, nos dão informações a respeito do conjunto focal do cross cap.

No Capítulo 3 estudamos os invariantes intrínsecos e extrínsecos do cross cap. Quando  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma imersão,  $f$  induz uma métrica Riemanniana em  $U$ , chamada de primeira forma fundamental. Sabemos que “intrínseco” significa que o dado invariante pode ser escrito em termos dessa estrutura Riemanniana em  $U$ . Desta forma, mostramos neste capítulo que os invariantes  $a_{02}$ ,  $a_{11}$  e  $a_{20}$  do cross cap são intrínsecos.

Finalmente, em toda esta dissertação estamos assumindo um conhecimento prévio da teoria das singularidades. Desta forma, vários conceitos clássicos serão usados nesta dissertação sem a prévia definição. Para referências da teoria das singularidades, sugerimos por exemplo: [4], [11] e [16].

# Capítulo 1

## Parametrização do Cross Cap

O objetivo deste capítulo é estudar a geometria diferencial local de uma singularidade cross cap. Ter uma singularidade cross cap significa o seguinte: ser a imagem de qualquer germe  $g$  que esteja na  $\mathcal{A}$ -órbita do germe da aplicação

$$\begin{aligned} f_{std} : (\mathbb{R}^2, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^3, 0) \\ (u, v) &\longmapsto (u, uv, v^2). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Em outras palavras, existe um difeomorfismo local  $\varphi$  em  $\mathbb{R}^2$  e um difeomorfismo local  $\psi$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\psi \circ g = f_{std} \circ \varphi$ . Desta forma, obtemos uma família de germes de aplicações que são  $\mathcal{A}$ -equivalentes a  $f_{std}$ . Porém, a geometria diferencial local pode diferir. Consideramos, então, propriedades geométricas dessa família. Pode ser mostrado (usando subgrupos de isotropia (ver [18])) que, em um certo sentido, esta família não pode ser reduzida a nenhuma outra. Neste capítulo obtemos duas famílias de parametrizações do cross cap, uma família utilizando mudanças de coordenadas que preservam a geometria diferencial e a outra preservando a geometria flat, isto é, aquela cujas propriedades podem ser medidas em termos de contato com planos e retas.

Em todo este trabalho, denominamos  $f_{std}$  por **cross cap padrão**.

### 1.1 Geometria Diferencial do Cross Cap

Mudanças de coordenadas na fonte (difeomorfismos) não afetam a geometria diferencial local da imagem de um germe de aplicação. Na meta, as mudanças de coordenadas que preservam a geometria diferencial local da imagem de um germe são as isometrias que

fixam a origem, isto é, as transformações ortogonais. A mudança na meta corresponde à ação de  $O(3) \times \mathbb{R}^+$  em  $\mathcal{E}(2, 3)$ , onde  $O(3)$  são as matrizes ortogonais de ordem 3, cuja ação é definida da seguinte maneira: Considere  $g \in \mathcal{E}(2, 3)$ , a matriz ortogonal  $L \in O(3)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ , então  $(L, \lambda).g = \lambda.L(g)$ . Passamos, então, a encontrar a forma normal do cross cap em termos da ação acima. Antes, precisaremos do seguinte lema cuja demonstração pode ser encontrada em [2] ou [18].

**Lema 1.1.** *Seja  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  definido por  $f(u, v) = (u, uv + r(u, v))$  com  $r \in \mathcal{M}_2^3$ . Então, por mudanças de coordenadas na fonte, podemos reduzir  $f$  à forma normal*

$$f(u, v) = (u, uv + r'(v)), \quad r' \in \mathcal{M}_1^3.$$

**Proposição 1.1.** *Seja  $f_{std} : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  um germe de aplicação dado por  $f_{std}(u, v) = (u, uv, v^2)$ . Seja  $g$  um germe de aplicação  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $f_{std}$ . Então, com as mudanças de coordenadas descrita acima, reduzimos  $g$  à forma*

$$g'(u, v) = (u, uv + p(v), v^2 + au^2 + buv + q(u, v)), \quad (1.2)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes,  $p \in \mathcal{M}_1^3$  e  $q \in \mathcal{M}_2^3$ .

**Demonstração:** Temos que  $f_{std}$  tem posto 1 na origem. Logo, como  $g$  é  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $f_{std}$ , segue que  $g$  também possui posto 1 na origem. Assim, podemos escolher uma rotação  $\rho_1 \in O(3)$  tal que

$$\rho_1 \circ g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v)),$$

onde  $g_2, g_3 \in \mathcal{M}_2^2$  e  $g_1 = l_1u + l_2v + \dots$ ,  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$  não simultaneamente nulos. Portanto, pela forma local das submersões, existe um difeomorfismo  $\phi_1 : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ , tal que  $g_1 \circ \phi_1(u, v) = u$ . Então,

$$\rho_1 \circ g \circ \phi_1(u, v) = (u, g'_2(u, v), g'_3(u, v)),$$

com  $g'_2$  e  $g'_3 \in \mathcal{M}_2^2$ . Denotemos os 2-jatos de  $g'_2$  e  $g'_3$  por, respectivamente,

$$j^2 g'_2 = a_1u^2 + a_2uv + a_3v^2 \quad \text{e} \quad j^2 g'_3 = b_1u^2 + b_2uv + b_3v^2,$$



com  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ . Como  $\rho_1 \circ g \circ \phi_1$  é  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $f_{std}$ , segue que  $a_2b_3 - b_2a_3 \neq 0$ . Considere uma rotação  $\rho_2 \in O(3)$  de um ângulo  $\theta$  com o eixo- $x$  (na meta). Aplicando a matriz de rotação dada por

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ em } (u, g'_2(u, v), g'_3(u, v)), \text{ obtemos}$$

$$\rho_2 \circ \rho_1 \circ g \circ \phi_1(u, v) = (u, \cos \theta g'_2(u, v) + \text{sen } \theta g'_3(u, v), -\text{sen } \theta g'_2(u, v) + \cos \theta g'_3(u, v)). \quad (1.3)$$

Podemos então escolher  $\theta$  de forma que

$$\rho_2 \circ \rho_1 \circ g \circ \phi_1(u, v) = (u, c_1uv + c_2u^2 + p_1(u, v), d_1u^2 + d_2uv + d_3v^2 + q_1(u, v))$$

com  $c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ ,  $c_1, d_3 \in \mathbb{R} - \{0\}$  e  $p_1, q_1 \in \mathcal{M}_2^3$ . De fato, a segunda componente do germe dado em (1.3) fica sendo

$$(a_1 \cos \theta + b_1 \text{sen } \theta)u^2 + (a_2 \cos \theta + b_2 \text{sen } \theta)uv + (a_3 \cos \theta + b_3 \text{sen } \theta)v^2 + O(u, v)^3,$$

onde  $O(u, v)^3$  são termos de ordem maior ou igual a 3 nas variáveis  $u$  e  $v$ . Basta escolher  $\theta$  tal que o coeficiente de  $v^2$  seja nulo. Como  $a_3$  e  $b_3$  não são simultaneamente nulos, podemos tomar  $\theta$  de modo que

$$\text{sen } \theta = \frac{a_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{-b_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}.$$

É fácil ver que o coeficiente de  $uv$  na segunda componente é diferente de zero pois  $a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0$  e o coeficiente de  $v^2$  é zero. Agora, na terceira componente do germe dado em (1.3), obtemos

$$(b_1 \cos \theta - a_1 \text{sen } \theta)u^2 + (b_2 \cos \theta - a_2 \text{sen } \theta)uv + (b_3 \cos \theta - a_3 \text{sen } \theta)v^2 + O(u, v)^3.$$

Assim, o coeficiente de  $v^2$  na terceira componente é diferente de zero, pois  $a_3$  e  $b_3$  não são simultaneamente nulos. Portanto,

$$\rho_2 \circ \rho_1 \circ g \circ \phi_1(u, v) = (u, c_1uv + c_2u^2 + p_1(u, v), d_1u^2 + d_2uv + d_3v^2 + q_1(u, v)), \quad (1.4)$$

com  $c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ ,  $c_1, d_3 \in \mathbb{R} - \{0\}$  e  $p_1, q_1 \in \mathcal{M}_2^3$ . Agora, com a seguinte mudança de coordenadas na fonte

$$v = \frac{v' - c_2 u}{c_1}$$

levamos o germe  $\rho_2 \circ \rho_1 \circ g \circ \phi_1$  no germe

$$(u, uv' + p(u, v'), d_1'(v')^2 + d_2'uv' + d_3'u^2 + q(u, v')), \quad (1.5)$$

com  $d_1' \in \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $d_2', d_3' \in \mathbb{R}$  e  $p, q \in \mathcal{M}_2^3$ . Por abuso de linguagem, chamando  $v'$  de  $v$  e aplicando o Lema 1.1, podemos reduzir o germe (1.5) (mudança de coordenadas na fonte) para

$$(u, uv + p(v), d_1''v^2 + d_2''uv + d_3''u^2 + q(u, v)). \quad (1.6)$$

Trocando  $u$  por  $\lambda_1 u$  e  $v$  por  $\lambda_2 v$  na equação (1.6), com  $\lambda_1$  e  $\lambda_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ , obtemos

$$(\lambda_1 u, \lambda_1 \lambda_2 uv + p_2(\lambda_2 v), d_1''\lambda_2^2 v^2 + d_2''\lambda_1 \lambda_2 uv + d_3''\lambda_1^2 u^2 + q_2(\lambda_1 u, \lambda_2 v)).$$

Na meta podemos usar uma dilatação da forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

onde  $\lambda > 0$ . Aplicando no germe acima obtemos

$$(\lambda \lambda_1 u, \lambda \lambda_1 \lambda_2 uv + \lambda p_2(\lambda_2 v), \lambda d_1''\lambda_2^2 v^2 + \lambda d_2''\lambda_1 \lambda_2 uv + \lambda d_3''\lambda_1^2 u^2 + \lambda q_2(\lambda_1 u, \lambda_2 v)).$$

Fazendo,  $\lambda_1 = d_1''$ ,  $\lambda_2 = 1$  e  $\lambda = 1/\lambda_1$ , temos o seguinte germe

$$(u, uv + \lambda p_2(v), v^2 + d_2''uv + d_3''d_1''u^2 + \lambda q_2(\lambda_1 u, v)).$$

Agora basta tomar,  $\lambda p_2(v) = p(v)$ ,  $\lambda q_2(\lambda_1 u, v) = q(u, v)$ ,  $d_2'' = b$  e  $d_3''d_1'' = a$ . Com essas mudanças, obtemos a forma requerida

$$g'(u, v) = (u, uv + p(v), v^2 + au^2 + buv + q(u, v)),$$

com  $p \in \mathcal{M}_1^3$  e  $q \in \mathcal{M}_2^3$ , e a proposição está provada. ■

Dada uma superfície suave  $M$  em  $\mathbb{R}^3$  com uma família de normais  $N$ , temos a aplicação de Gauss  $N : M \rightarrow S^2$ , onde  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  é a esfera unitária. Se  $M$  é parametrizada por  $f(u, v)$ , os coeficientes da primeira forma fundamental  $I_p$  (em um ponto  $p$ ) são dados por

$$E = f_u \cdot f_u, \quad F = f_u \cdot f_v, \quad G = f_v \cdot f_v,$$

onde  $\cdot$  denota o produto interno canônico. Os coeficientes da segunda forma fundamental  $II_p$  são dados por

$$l = N \cdot f_{uu}, \quad m = N \cdot f_{uv}, \quad n = N \cdot f_{vv}.$$

Quando consideramos a singularidade cross cap, deparamos com um problema, já que a normal à superfície em seu ponto singular não está bem definida. Fora do ponto cross cap, a normal unitária  $N$  é dada por

$$N = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|},$$

onde  $\times$  denota o produto vetorial em  $\mathbb{R}^3$  e  $\|\cdot\|$  a norma usual em  $\mathbb{R}^3$ . No entanto, podemos multiplicar os coeficientes  $l$ ,  $m$  e  $n$  por um termo  $\|f_u \times f_v\|$ , substituindo assim os coeficientes  $l$ ,  $m$  e  $n$  por, respectivamente,

$$L = (f_u \times f_v) \cdot f_{uu}, \quad M = (f_u \times f_v) \cdot f_{uv}, \quad N = (f_u \times f_v) \cdot f_{vv}.$$

Isto é feito pois estamos interessados nos zeros da curvatura Gaussiana  $K$ , que, com esta mudança, é dada por

$$K = LN - M^2.$$

Sendo assim, vemos agora que a curva de pontos parabólicos para a forma normal do cross cap dada em (1.2) depende do sinal de  $a$ .

**Corolário 1.1.** *Considere o cross cap dado em (1.2). Se  $a > 0$ , então existem duas curvas transversais na fonte que são as pré-imagens das curvas de pontos parabólicos do cross cap. No caso onde  $a < 0$ , não existem pontos parabólicos no cross cap.*

**Demonstração:** Lembramos que um ponto é parabólico se a curvatura Gaussiana  $K$  é nula neste ponto. Assim,

$$K(u, v) = 0 \Leftrightarrow (LN - M^2)(u, v) = 0.$$

Definindo  $h(u, v) = (LN - M^2)(u, v)$ , e sendo

$$f(u, v) = (u, uv + p(v), v^2 + au^2 + buv + q(u, v)),$$

com  $p \in \mathcal{M}_1^3$  e  $q \in \mathcal{M}_2^3$ , temos

$$h(u, v) = 0 \Leftrightarrow (f_u \times f_v \cdot f_{uu})(f_u \times f_v \cdot f_{vv}) - (f_u \times f_v \cdot f_{uv})^2 = 0.$$

Calculando as derivadas de  $f$ , temos

$$f_u = (1, v, 2au + bv + q_u), \quad f_v = (0, u + p', 2v + bu + q_v),$$

$$f_{uu} = (0, 0, 2a + q_{uu}), \quad f_{uv} = (0, 1, b + q_{uv}), \quad f_{vv} = (0, p'', 2 + q_{vv}).$$

Assim,

$$f_u \times f_v = (2v^2 - 2au^2 + vq_v - uq_u - p_v q_u, -(2v + bu + q_v), u + p').$$

Logo, temos que o 2-jato de  $h$  tem a forma

$$j^2 h(u, v) = 4au^2 - 4v^2.$$

Portanto,  $h(u, v)$  tem uma singularidade do tipo Morse na origem se  $a \neq 0$  e segue o resultado. ■

Podemos caracterizar os cross caps de acordo com o sinal de  $a$ , como pode ser observado na definição a seguir.

**Definição 1.1.** *Seja  $g'(u, v)$  a forma normal (1.2). Então definimos:*

*a) **Cross cap elíptico** quando  $a > 0$  em  $g'$  (Ver figura 1.1 (a)).*

b) **Cross cap hiperbólico** quando  $a < 0$  em  $g'$  (Ver figura 1.1 (b)).

c) **Cross cap parabólico** quando  $a = 0$  em  $g'$  (Ver figura 1.1 (c)).

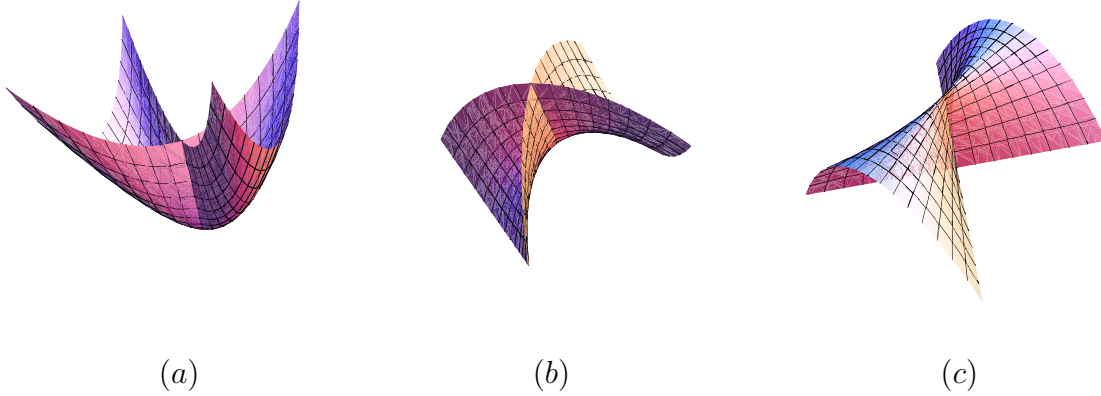


Figura 1.1: (a) Cross Cap Elíptico, (b) Cross Cap Hiperbólico, (c) Cross Cap Parabólico

## 1.2 Propriedades Geométricas dos Cross Caps

Agora podemos obter algumas informações geométricas do cross cap parametrizado pela família de formas normais vista em (1.2), ou seja,

$$f(u, v) = (u, uv + p(v), v^2 + au^2 + buv + q(u, v)),$$

com  $p \in \mathcal{M}_1^3$  e  $q \in \mathcal{M}_2^3$ . Parametrizar uma superfície suave em uma vizinhança da origem na forma de Monge tem o efeito de fixar a posição do plano tangente na origem. No caso do cross cap, não existe plano tangente na origem. Ao invés disso temos um objeto chamado *cone tangente* que pode ser considerado um refinamento da noção de espaço tangente. O objetivo da rotação  $\rho_2$  na demonstração da Proposição 1.1 é justamente fixar o cone tangente no plano  $y = 0$ . Neste trabalho não realizamos o estudo do cone tangente e suas propriedades. Para detalhes sobre esse assunto, ver [18]. Mostramos, no entanto, os significados geométricos da rotação  $\rho_1$  e do difeomorfismo  $\phi_1$  nas proposições a seguir.

**Proposição 1.2.** *O efeito de  $\rho_1$  na demonstração da Proposição 1.1 é uma rotação na meta de forma que a reta tangente ao ponto cross cap seja o eixo  $x$ .*

**Demonstração:** : Seja  $\rho_1 \circ g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ , como na demonstração da Proposição 1.1, ou seja,  $\rho_1 \circ g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v))$ , com  $g_1(u, v) = l_1u + l_2v + O(s)$  e  $g_2, g_3 \in \mathcal{M}_2^2$ . Assim é claro que  $d(\rho_1 \circ g)_0$  é o eixo  $x$ .

■

**Proposição 1.3.** *O difeomorfismo  $\phi_1$  na demonstração da Proposição 1.1 leva a pré-imagem da tangente à curva de pontos duplos na origem para o eixo  $v$ .*

**Demonstração:** Escrevemos  $g'$  ao invés de  $\rho_1 \circ g \circ \phi_1$ . Seja  $C \subset \mathbb{R}^2$  a pré-imagem da curva de pontos duplos do cross cap parametrizado por  $g'$ . Como  $g'$  é  $\mathcal{A}$ -equivalente ao cross cap padrão  $f_{std}$ , temos que  $C$  é uma curva suave. Sejam dois pontos  $(u, v)$  e  $(U, V)$  tais que  $f(u, v) = f(U, V)$ . Assim,

$$\begin{cases} u = U \\ uv = UV \\ v^2 = V^2 \end{cases} \Rightarrow u = U \quad e \quad v = -V.$$

Logo, uma parametrização para a pré-imagem da curva de pontos duplos do cross cap padrão é  $\gamma(t) = (0, t)$ . Então,  $f_{std}(\gamma(t)) = f_{std}(\gamma(-t))$ . Assim, podemos escolher uma parametrização local  $\bar{\gamma} : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  de  $C$  tal que  $g'(\bar{\gamma}(t)) = g'(\bar{\gamma}(-t))$ . De fato, usando o fato de que  $g'$  é  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $f_{std}$ , temos que existem difeomorfismos locais  $\varphi$  em  $\mathbb{R}^2$  e  $\psi$  em  $\mathbb{R}^3$  tais que  $\psi \circ g' = f_{std} \circ \varphi$ . Assim,  $f_{std}(u, v) = \psi \circ g' \circ \varphi^{-1}(u, v)$  e, como  $f_{std}(\gamma(t)) = f_{std}(\gamma(-t))$ , temos

$$\begin{aligned} \psi \circ g' \circ \varphi^{-1}(\gamma(t)) &= \psi \circ g' \circ \varphi^{-1}(\gamma(-t)) \\ \Rightarrow g' \circ \varphi^{-1}(\gamma(t)) &= g' \circ \varphi^{-1}(\gamma(-t)). \end{aligned}$$

Tomando  $\bar{\gamma}(t) = g' \circ \varphi^{-1}(\gamma(t))$ , temos  $g'(\bar{\gamma}(t)) = g'(\bar{\gamma}(-t))$ . Escrevendo  $\bar{\gamma}(t) = (\bar{\gamma}_1(t), \bar{\gamma}_2(t))$  e inspecionando a primeira componente de  $g' \circ \bar{\gamma}$ , vemos que  $\bar{\gamma}_1(t) = \bar{\gamma}_1(-t)$ , para todo  $t$ . Portanto,  $\bar{\gamma}_1$  pode ser escrito em função de  $t^2$ , e o resultado segue.

■

**Observação 1.1.** *Segue da demonstração da proposição anterior que a pré-imagem da curva de pontos duplos pode sempre ser escrita como  $u = h(v)$ , com  $h \in \mathcal{M}_1^2$ .*

Motivados pela demonstração da Proposição 1.3, temos a proposição a seguir.

**Proposição 1.4.** *Sejam  $g'$  como em (1.2) e  $C \in \mathbb{R}^2$  a pré-imagem da curva de pontos duplos de  $g'$  e escreva  $j^3p = p_3v^3$ . Então,  $C$  pode ser escrita como*

$$u = -p_3v^2 + \psi(v), \quad \text{onde } \psi \in \mathcal{M}_1^3.$$

**Demonstração:** Pela Proposição 1.3 sabemos que  $C$  é uma curva suave que é tangente ao eixo  $v$ . Assim  $C$  pode ser escrita como

$$u = \alpha(v), \quad \alpha \in \mathcal{M}_1^2.$$

A curva de pontos duplos de  $g'(u, v)$  é dada pelos pontos  $(u, v)$  tais que  $g'(u, v) = g'(U, V)$ . Então,  $U = u$  e segue ainda que

$$\begin{aligned} uv + p(v) &= uV + p(V) \\ \Rightarrow u(V - v) &= -(p(V) - p(v)) \\ \Rightarrow u &= \frac{-(p(V) - p(v))}{V - v}. \end{aligned}$$

Como por hipótese  $j^3p = p_3v^3$ , segue que

$$u = -p_3(V^2 + Vv + v^2) + O(v, V)^3. \quad (1.7)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} au^2 + buv + v^2 + q(u, v) &= au^2 + buV + V^2 + q(u, V) \\ \Rightarrow bu(v - V) &= V^2 - v^2 + q(u, V) - q(u, v) \\ \Rightarrow V^2 - v^2 &= bu(v - V) - q(u, V) + q(u, v) \\ \Rightarrow (V + v)(V - v) &= -bu(V - v) - q(u, V) + q(u, v) \\ \Rightarrow V + v &= -bu - \frac{q(u, V) - q(u, v)}{V - v}, \quad q \in \mathcal{M}_2^3. \end{aligned}$$

O segundo membro desta última igualdade é uma equação de ordem 2 nas variáveis  $V$  e  $v$ , depois de substituirmos o valor de  $u$  encontrado em (1.7). Assim, obtemos  $V = -v$  e o resultado segue. ■

### 1.3 Geometria Flat do Cross Cap

Quando focamos na geometria flat do cross cap, podemos reduzir sua forma normal ainda mais, pois temos mais mudanças de coordenadas à disposição. Na geometria flat, as propriedades geométricas podem ser medidas em termos de contato com planos e retas. Propriedades geométricas flat da imagem de um germe de aplicação são preservadas por transformações lineares. Essas mudanças de coordenadas correspondem ao subgrupo  $GL(3, \mathbb{R})$  de  $\mathcal{L}$ , onde, neste caso,  $\mathcal{L}$  é o grupo dos germes de difeomorfismos  $(\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ .

**Proposição 1.5.** *Seja  $f_{std} : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  o germe de aplicação definido por  $f_{std}(u, v) = (u, uv, v^2)$ . Seja  $g$  um germe que é  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $f_{std}$ . Então, usando mudanças  $GL(3, \mathbb{R})$  na meta e difeomorfismos na fonte, podemos reduzir  $g$  à forma*

$$g'(u, v) = (u, uv + p(v), v^2 + au^2 + q(u, v)), \quad (1.8)$$

onde  $p \in \mathcal{M}_1^3$  e  $q \in \mathcal{M}_2^3$ . Quando  $a \neq 0$ , podemos fixar o coeficiente de  $u^2$  na terceira componente sendo 1, se  $a > 0$ , e  $-1$ , se  $a < 0$ .

podemos considerar  $g$  da forma

$$g'(u, v) = (u, uv + p(v), v^2 + au^2 + buv + q(u, v)),$$

**Demonstração:** Pela Proposição 1.1 onde  $a$  e  $b$  são constantes,  $p \in \mathcal{M}_1^3$  e  $q \in \mathcal{M}_2^3$ .

Assumindo  $a \neq 0$  podemos reduzir  $g'$  para a seguinte forma

$$(u, uv + p(v), v^2 \pm u^2 + q(u, v)).$$

De fato, aplicando a mudança  $x \rightarrow x$ ,  $y \rightarrow y$ ,  $z \rightarrow z - by$  na meta, a terceira componente de  $g'$  fica sendo

$$v^2 + au^2 + \bar{q}(u, v).$$

Na fonte, fazemos a mudança  $u \rightarrow \frac{u}{\sqrt{|a|}}$ . Assim, obtemos

$$\left( \frac{u}{\sqrt{|a|}}, \frac{uv}{\sqrt{|a|}} + p(v), v^2 \pm u^2 + \bar{q}(u, v) \right).$$

Agora, no germe acima, fazendo a mudança  $x \rightarrow \sqrt{|a|x}$ ,  $y \rightarrow \sqrt{|a|y}$  e  $z \rightarrow z$  na meta,



obtemos o germe

$$(u, uv + p(v), v^2 \pm u^2 + q(u, v)),$$

onde o coeficiente de  $u^2$  é 1, se  $a > 0$  e  $-1$ , se  $a < 0$ . E assim a proposição está demonstrada. ■

**Corolário 1.2.** *O cross cap parametrizado pela forma normal determinada em (1.8) possui duas curvas parabólicas quando  $a > 0$  (podemos fixar  $a = 1$ ). No caso onde  $a < 0$ , não existem pontos parabólicos no cross cap.*

Analogamente à Definição 1.1, temos a definição de acordo com a forma normal do cross cap como em (1.8).

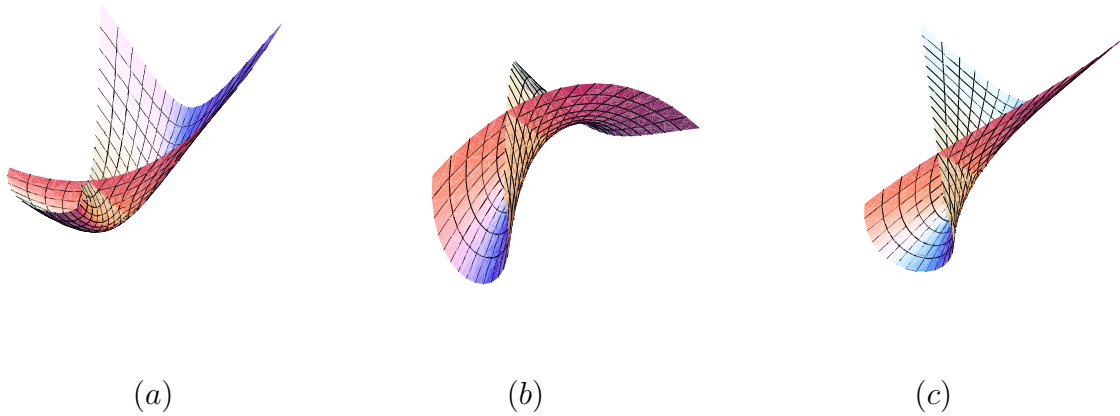


Figura 1.2: Forma normal flat: (a) Cross Cap Elíptico, (b) Cross Cap Hiperbólico, (c) Cross Cap Parabólico

**Definição 1.2.** *Em se tratando da geometria flat do cross cap, definimos:*

- **Cross cap elíptico** o cross cap parametrizado por

$$g'(u, v) = (u, uv + p(v), v^2 + u^2 + q(u, v)),$$

- **Cross cap hiperbólico** o cross cap parametrizado por

$$g'(u, v) = (u, uv + p(v), v^2 - u^2 + q(u, v)),$$

- **Cross cap parabólico** o *cross cap parametrizado por*

$$g'(u, v) = (u, uv + p(v), v^2 + q(u, v)),$$

com  $p \in \mathcal{M}_1^3$  e  $q \in \mathcal{M}_2^3$  nos três casos.

Para exemplos de cross caps elíptico, hiperbólico e parabólico, ver Figura 1.2.

# Capítulo 2

## Geometria das Singularidades de Projeções

### 2.1 Função Altura

Uma abordagem usual quando se estuda geometria flat de superfícies suaves é considerar a composição da parametrização de uma superfície, usualmente na sua forma de Monge, com famílias a dois parâmetros de projeções em planos e retas. Como motivação, consideramos nesta seção as singularidades da função altura em uma superfície suave. Em seguida, imitamos o processo para o cross cap, utilizando sua parametrização dada por (1.8).

**Definição 2.1.** *Seja  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de uma superfície suave  $M$  em  $\mathbb{R}^3$ . Denominamos **família de funções altura** a família de aplicações dada por*

$$H : M \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, u) \mapsto H(x, u) := x \cdot u.$$

Para  $u$  fixo, a função  $H_u$  é a função altura na direção  $u$ . Tomando coordenadas  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , podemos associar a cada ponto  $(u_1, u_2, u_3) \in S^2$  o plano cuja equação é dada por

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (u_1, u_2, u_3) = 0.$$

Logo, se  $H(x, u) = 0$ , então a função  $H_u$  mede o contato entre a superfície  $M$  e o plano  $(x_1, x_2, x_3) \cdot (u_1, u_2, u_3) = 0$ .

### 2.1.1 Função Altura em Superfícies Suaves

Sejam  $M$  uma superfície suave e a família de funções altura  $H$  como anteriormente. Como nosso interesse é a geometria diferencial local, sendo  $p \in M$ , podemos identificar  $p$  com a origem e fixar coordenadas locais  $(u, v, w)$  em  $p = (0, 0, 0)$  tal que o eixo  $w$  seja normal a  $M$  em  $p$  e o plano tangente seja formado pelo plano  $(u, v)$ . Assim, escrevemos  $M$  localmente na forma de Monge, como um gráfico de função  $w = f(u, v)$  tal que  $f = f_u = f_v = 0$  em  $(0, 0)$ .

Escolhemos uma carta em  $S^2$  próxima a  $(0, 0, 1)$  dada por  $(u_1, u_2, 1)$ . Então, a família modificada de funções altura é dada por

$$H : M \times (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$((u, v), (u_1, u_2)) \mapsto H_{(u_1, u_2)}(u, v) = u_1 u + u_2 v + f(u, v).$$

Fixando  $u_0 = (0, 0, 1)$ , temos  $H_{u_0}(u, v) = f(u, v)$ .

A função  $H_{(u_1, u_2)}$  é singular na origem se, e somente se,  $u_1 = u_2 = 0$ . Se  $u_1 \neq 0$  ou  $u_2 \neq 0$ , então  $H_{(u_1, u_2)}$  é uma submersão. Este caso não nos interessa pois não há singularidades. Desta forma, considere  $u_0 = (0, 0, 1)$  e, então, estudemos as singularidades de  $H_{u_0}(u, v) = f(u, v)$  e suas descrições geométricas.

Em superfícies suaves, a função altura  $H_u$  possui apenas singularidades do tipo  $A_k$ , com  $k \leq 3$ . Este é um resultado do teorema a seguir, que não será demonstrado aqui. Para detalhes, ver [1].

**Teorema 2.1.** *Sejam  $M$  uma superfície suave e  $(x, u) \in M \times S^2$  com  $u$  normal à  $M$  em  $x$ . Então, a função altura  $H_u$  pode ter apenas os seguintes tipos de singularidades:*

$$A_1^\pm \quad f(x, y) = x^2 \pm y^2,$$

$$A_2 \quad f(x, y) = x^2 + y^3,$$

$$A_3^\pm \quad f(x, y) = x^2 \pm y^4.$$

A seguinte proposição estabelece condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor de  $f$  em  $(0, 0)$ , para que  $H_{u_0}$  tenha um dos tipos de singularidades do Teorema 2.1. Denotaremos por  $a_{ki}$  o coeficiente do monômio  $u^k v^i$  na expansão de Taylor de  $f$  na origem.

**Proposição 2.1.** *A função altura  $H_{u_0} = f(u, v)$  possui as seguintes singularidades:*

$$i) A_1 \Leftrightarrow 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 \neq 0;$$

$$ii) A_2 \Leftrightarrow 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0 \text{ e } a_{03} \neq 0;$$

$$iii) A_3 \Leftrightarrow 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0, a_{03} = 0 \text{ e } 4a_{20}a_{04} - a_{12}^2 \neq 0.$$

**Demonstração:** Como  $f(0, 0) = f_u(0, 0) = f_v(0, 0) = 0$ , temos que  $f$  possui uma singularidade na origem.

*i)* O 2-jato de  $f$  é dado por

$$j^2 f(0, 0) = a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2.$$

Sem perda de generalidade, seja  $a_{20} \neq 0$  e considere a seguinte mudança de variável na fonte:

$$u = U - \frac{a_{11}V}{2a_{20}}, \quad v = V.$$

Logo, temos que  $j^2 f(0, 0)$  pode ser escrito da forma

$$a_{20}U^2 + \left( \frac{4a_{20}a_{02} - a_{11}^2}{4a_{20}} \right) V^2,$$

que é uma singularidade  $A_1$  (Morse) se, e somente se,  $4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 \neq 0$ .

*ii)* Considerando  $4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0$ , o 3-jato de  $f$  pode ser escrito como

$$j^3 f(0, 0) = a_{20}u^2 + a_{30}u^3 + a_{21}u^2v + a_{12}uv^2 + a_{03}v^3.$$

Com a mudança de variável

$$u = U - \frac{(a_{30}U^2 + a_{21}UV + a_{12}V^2)}{2a_{20}}, \quad v = V,$$

podemos escrever  $j^3 f(0, 0)$  da forma  $a_{20}U^2 + a_{03}V^3$ . Logo, a singularidade é do tipo  $A_2$  se, e somente se,  $4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0$  e  $a_{03} \neq 0$ .

*iii)* Considerando  $4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0$ ,  $a_{03} = 0$  e fazendo mudanças de coordenadas similares

às anteriores, chegamos que o 4-jato de  $f$  pode ser escrito como

$$a_{20}u^2 + \left( \frac{4a_{20}a_{04} - a_{12}^2}{4a_{20}} \right) v^4,$$

que é uma singularidade  $A_3$  se, e somente se,  $4a_{20}a_{04} - a_{12}^2 \neq 0$ .

■

Seja  $p$  um ponto da superfície  $M$ , escrita na forma de Monge. Sabemos que  $H_{u_0}$  é singular se, e somente se,  $u_0$  é a direção normal de  $M$  em  $p$ .

A proposição a seguir identifica geometricamente os tipos de singularidades da função altura  $H_{u_0}$ .

**Proposição 2.2.** *As singularidades genéricas da função altura  $H_{u_0} = f(u, v)$  ao longo da direção  $u_0$  ocorrem em  $p \in M$  da seguinte maneira:*

- i)  $A_1 \Leftrightarrow p$  não é ponto parabólico;*
- ii)  $A_2 \Leftrightarrow p$  é ponto parabólico e a direção assintótica é transversal ao conjunto parabólico da superfície em  $p$ ;*
- iii)  $A_3 \Leftrightarrow p$  é ponto parabólico e a direção assintótica é tangente ao conjunto parabólico da superfície em  $p$ . Este ponto é chamado **cúspide de Gauss**.*

**Demonstração:** *i)* Sejam  $p \in M$  e  $j^2 f(p) = a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2$ . A curvatura Gaussiana  $K$  em  $p$  é dada por  $K(p) = f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2 = 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2$ . Se  $K(p) \neq 0$ , então  $p$  não é ponto parabólico. Pela Proposição 2.1, a função altura  $H_{u_0}$  tem singularidade do tipo  $A_1$  se, e somente se,  $4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 \neq 0$ . Logo,  $p$  não é ponto parabólico se, e somente se,  $H_{u_0}$  tem uma singularidade do tipo  $A_1$ .

*ii)* Seja  $p \in M$  ponto parabólico, ou seja,  $4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0$ . Podemos, então, escrever  $j^3 f(u, v) = a_{20}u^2 + a_{30}u^3 + a_{21}u^2v + a_{12}uv^2 + a_{03}v^3$ . Temos, ainda, que o conjunto parabólico de uma superfície  $w = f(u, v)$  é dado pelos pontos  $(u, v)$  que anulam o determinante da matriz Hessiana de  $f(u, v)$ . A parte linear desta equação é dada por

$$a_{20}a_{12}u + 3a_{20}a_{03}v = 0$$

e as singularidades são dadas por

$$\nabla \left( \det \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{pmatrix} \right) = a_{20}(a_{12}, 3a_{03}) = 0.$$

O normal ao conjunto parabólico pode ser dado por  $(a_{12}, 3a_{03})$ . A direção assintótica é igual a  $(0, 1)$ . Logo,  $(0, 1)$  é transversal ao conjunto parabólico se, e somente se,  $a_{03} \neq 0$ , ou seja, pela Proposição 2.1, se, e somente se,  $H_{u_0}$  tem singularidade do tipo  $A_2$ .

iii) Considere  $p \in M$  ponto parabólico, ou seja,  $4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0$ . Se  $a_{03} = 0$  a direção assintótica é tangente ao conjunto parabólico. Novamente pela Proposição 2.1,  $4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0$  e  $a_{03} = 0$  são condições para que  $H_{u_0}$  tenha singularidade do tipo  $A_3$ . ■

### 2.1.2 Função Altura no Cross Cap

Agora que já discutimos as singularidades da função altura com superfícies suaves em sua forma de Monge, podemos realizar um estudo similar no cross cap. Como a função altura mede o contato com planos, usaremos a forma normal

$$f(u, v) = (u, uv + p(v), v^2 + au^2 + q(u, v)),$$

onde  $p \in \mathcal{M}_1^3$  e  $q \in \mathcal{M}_2^3$ . Pelo Corolário 1.1, sabemos que o conjunto parabólico na fonte é vazio quando  $a < 0$  e, quando  $a > 0$ , o conjunto parabólico é formado por duas curvas regulares. Vimos na Proposição 1.5 que  $a$  pode ser tomado como  $\pm 1$ , mas estamos interessados na transição do sinal de  $a$ . Estudamos a família de funções altura em torno das direções em  $S^2$  dadas por  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ . Estas direções podem ser parametrizadas, respectivamente, por  $(1, u_1, u_2)$ ,  $(u_1, 1, u_2)$  e  $(u_1, u_2, 1)$ .

**Proposição 2.3.** *Considere a família de funções altura em torno da direção  $(1, 0, 0)$ , dada por*

$$H_{(u_1, u_2)}(u, v) = u + u_1(uv + p(v)) + u_2(v^2 + au^2 + q(u, v)).$$

*Então,  $H_{(u_1, u_2)}$  não possui singularidades.*

**Demonstração:** Temos que  $H_{(u_1, u_2)}$  é uma submersão. Portanto, não possui singularidades. ■

**Proposição 2.4.** *Considere a família de funções altura em torno da direção  $(0, 0, 1)$ , dada por*

$$H_{(u_1, u_2)}(u, v) = u_1 u + u_2(uv + p(v)) + (v^2 + au^2 + q(u, v)).$$

Então,

- i)  $H_{(u_1, u_2)}$  possui singularidade em  $(0, 0)$  se, e somente se,  $u_1 = 0$ .
- ii)  $H_{(u_1, u_2)}$  possui singularidade do tipo  $A_1$  se, e somente se,  $u_1 = 0$  e  $u_2^2 - 4a \neq 0$ .
- iii)  $H_{(u_1, u_2)}$  possui singularidade do tipo  $A_2$  se, e somente se,  $u_1 = 0$  e  $u_2 = \pm 2\sqrt{a}$ . A direção  $(0, \pm 2\sqrt{a}, 1)$  é chamada **direção normal degenerada**.

**Demonstração:** i) Imediato.

ii) Considere  $u_1 = 0$ . Neste caso, o 2-jato de  $H_{(u_1, u_2)}$  é dado por:

$$v^2 + au^2 + u_2 uv.$$

Assim,  $H_{(u_1, u_2)}$  possui uma singularidade do tipo  $A_1$  se, e somente se,  $u_2^2 - 4a \neq 0$ .

iii) Seja agora  $u_2^2 - 4a = 0$ . Considerando  $a > 0$ , a família de funções altura na direção  $(0, \pm 2\sqrt{a}, 1)$  é dada por

$$H_{(0, \pm 2\sqrt{a}, 1)}(u, v) = (\sqrt{a}u \pm v)^2 + q(u, v) \pm 2\sqrt{a}p(v).$$

Fazendo a mudança

$$U = \sqrt{a}u \pm v, \quad V = v,$$

temos

$$U^2 + q\left(\frac{1}{\sqrt{a}}(U \mp V), V\right) \pm 2\sqrt{a}p(V).$$

Para termos uma singularidade do tipo  $A_2$ , o coeficiente de  $V^3$  dever ser não nulo. Este coeficiente é dado por  $q_3(\mp 1/\sqrt{a}, 1) \pm 2\sqrt{a}p_3(1)$ , onde  $q_3$  é a cúbica homogênea de  $q$  e  $p_3$  é a parte cúbica de  $p$ . Genericamente, este coeficiente é não nulo e o resultado segue. ■



**Proposição 2.5.** *Considere a família de funções altura em torno da direção  $(0, 1, 0)$ , dada por*

$$H_{(u_1, u_2)}(u, v) = u_2(au^2 + v^2 + q(u, v)) + u_1u + uv + p(v).$$

Então,

- i)  $H_{(u_1, u_2)}$  possui singularidade em  $(0, 0)$  se, e somente se,  $u_1 = 0$ .
- ii)  $H_{(u_1, u_2)}$  possui singularidade do tipo  $A_1$  se, e somente se,  $u_1 = 0$  e  $1 - 4au_2^2 \neq 0$ .
- iii)  $H_{(u_1, u_2)}$  possui singularidade do tipo  $A_2$  se, e somente se,  $u_1 = 0$  e  $u_2 = \pm 1/2\sqrt{a}$ .

**Demonstração:** Segue de forma análoga à demonstração da Proposição 2.4. ■

Vimos no Corolário 1.1 que o conjunto parabólico na fonte, quando  $a > 0$ , consiste em duas curvas transversais intersectando na origem. Uma outra maneira de determinar o conjunto parabólico na fonte é através da função altura, mas não apenas no caso onde  $a > 0$  e sim na transição entre os casos  $a > 0$  e  $a < 0$ . A próxima proposição mostra que o conjunto parabólico na fonte, quando  $a = 0$ , é uma cúspide e o comportamento deste conjunto (fora do ponto cross cap) é observado na Figura 2.1.

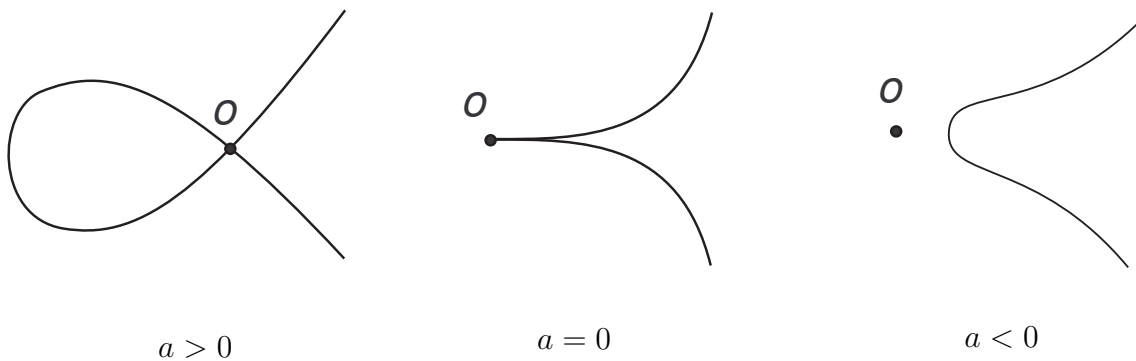


Figura 2.1: Conjunto parabólico para  $a > 0$ ,  $a = 0$  e  $a < 0$

Assim, no caso do cross cap elíptico, ao invés de termos duas curvas transversais na fonte, podemos pensar que o conjunto parabólico é formado apenas por uma curva que se intersecta na origem. Quando  $a$  tende a zero, esta curva se transforma em uma cúspide e, quando  $a < 0$ , o conjunto parabólico se afasta do ponto cross cap. É claro que esta é uma análise local, não podemos afirmar o que realmente acontece com o conjunto parabólico longe do ponto cross cap.

**Proposição 2.6.** *Quando  $a = 0$ , o conjunto parabólico na fonte é uma cúspide.*

**Demonstração:** Considere a função altura

$$H_{(u_1, u_2)}(u, v) = u_1 u + u_2(uv + p(v)) + v^2 + au^2 + q(u, v).$$

O conjunto parabólico é obtido pela projeção do conjunto dado por  $H_u = H_v = H_{uu}H_{vv} - H_{uv}^2 = 0$  no espaço  $(u, v)$ . Assim, temos

$$H_u = 2au + q_u + u_2 v + u_1, \quad H_v = 2v + u_2(u + p'(v)) + q_v,$$

$$H_{uu} = 2a + q_{uu}, \quad H_{uv} = u_2 + q_{uv} \quad e \quad H_{vv} = 2 + q_{vv} + p''(v).$$

Considerando  $H_u = 0$ , obtemos  $u_1 = -(2au + q_u + u_2 v)$ . Como  $u_1$  só aparece nessa equação, podemos apenas considerar  $H_v = H_{uu}H_{vv} - H_{uv}^2 = 0$ . Para facilitar a notação, escrevemos  $u_2 = w$ . Assim,

$$2v + w(u + p'(v)) + q_v = 0 \tag{2.1}$$

e

$$(2a + q_{uu})(2 + q_{vv} + p''(v)) - (w + q_{uv})^2 = 0. \tag{2.2}$$

Pelo teorema da função implícita, a equação (2.1) implica que  $v$  pode ser escrito em termos de  $u$  e  $w$ . Escrevendo

$$q(u, v) = q_0 v^3 + q_1 u v^2 + q_2 u^2 v + q_3 u^3 + q_4 u^4 + \dots,$$

observamos que os termos de ordem mais baixa de sua expansão em Taylor são dados por

$$v = -\frac{1}{2}(wu + q_2 u^2) + \dots. \tag{2.3}$$

Expandindo a equação (2.2), temos

$$4a + 12q_3 u + 4q_2 v + u^2(24q_4 + 12q_1 q_3 - 4q_2^2) + 4q_1 a u - 4q_2 w u - w^2 + v\phi_1(u, v, w, a) + \phi_2(u, a, w) = 0, \quad \phi_1 \in \mathcal{M}_2, \quad \phi_2 \in \mathcal{M}_3^3. \tag{2.4}$$

Substituindo  $v$  dada em (2.3), temos

$$2a + 12q_3u + u^2(24q_4 + 12q_1q_3 - 6q_2^2) + 4q_1au - 6q_2wu - w^2 + \phi_3(u, a, w) = 0,$$

onde  $\phi_3 \in \mathcal{M}_3^3$ . Novamente pelo teorema da função implícita, escrevemos  $u$  em função de  $w$  e  $a$ , e os termos de ordem menor são dados por

$$u = -\frac{1}{12}q_3(4a - w^2 - 24q_2aw + 16(q_1 + 24q_4 + 12q_1q_3 - 6q_2^2)a^2) + \dots \quad (2.5)$$

Substituindo (2.5) em (2.3), obtemos a seguinte parametrização para o conjunto parabólico na fonte:

$$\psi(w, a) = \left( -\frac{1}{12}q_3(4a - w^2 - 24q_2aw) + \dots, \frac{1}{24}q_3(4aw - w^3 - 24q_2aw^2) + \dots \right).$$

Quando  $a = 0$ ,  $\psi(w)$  é genericamente uma cúspide. ■

Ainda em relação ao conjunto parabólico, podemos encontrar uma relação interessante entre geometria diferencial e singularidades. Vimos que, quando  $a > 0$ , o 2-jato do conjunto parabólico dado por  $K = 0$ , como no Corolário 1.1, é dado por

$$4(\sqrt{au} - v)(\sqrt{au} + v).$$

Parametrizando os ramos deste conjunto, obtemos duas curvas espaciais. Assim, podemos fazer uma associação entre os tipos de singularidades da função altura com as respectivas torções desses ramos (curvas espaciais). É o que mostra a proposição seguinte.

**Proposição 2.7.** *Sejam  $P_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , as parametrizações dos ramos do conjunto parabólico em um cross cap elíptico (com  $P_i(0)$  sendo o ponto cross cap) e denote por  $\tau_i(t)$  a torção dessas curvas espaciais. Então, a função altura ao longo da direção normal degenerada associada ao ramo  $P_i$  possui singularidade no ponto cross cap do tipo*

$$A_2 \Leftrightarrow \tau_i(0) \neq 0,$$

$$A_3 \Leftrightarrow \tau_i(0) = 0, \tau_i'(0) \neq 0.$$

**Demonstração:** Considere o cross cap

$$g'(u, v) = (u, uv + p(v), u^2 + av^2 + q(u, v)),$$

parametrizado como em (1.8). Fixamos aqui  $j^4p = p_3v^3 + p_4v^4$  e  $j^4q = q_3 + q_4$ , com  $q_i = \sum_{j=0}^i q_{ij}u^{i-j}v^j$ . Vimos que podemos fixar  $a = 1$ , já que o cross cap em questão é o elíptico ( $a > 0$ ). Assim, o 2-jato do conjunto parabólico  $K = 0$ , como no Corolário 1.1, é dado por  $j^2K(u, v) = 4(u - v)(u + v)$ . A prova deste resultado segue através de cálculos diretos realizados no programa computacional Maple. Considere, por exemplo, o ramo com direção tangente  $(1, 1)$ , o qual é o gráfico da função  $v(u) = u + \alpha_2u^2 + \alpha_3u^3 + O(u)^4$  com

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= q_{31} + \frac{1}{2}q_{32} + \frac{3}{2}q_{30}, \\ \alpha_3 &= -\frac{3}{4}q_{31}q_{33} + \frac{3}{8}q_{31}^2 + \frac{1}{2}q_{31}q_{32} - \frac{1}{8}q_{32}^2 + \frac{3}{4}q_{30}q_{32} - \frac{9}{8}q_{30}^2 + 3q_{40} + 2q_{42} + \frac{3}{2}q_{43} + \frac{5}{2}q_{41} + \\ &\quad + q_{44} - \frac{9}{8}q_{33}^2 - \frac{3}{2}q_{33}q_{32} - 2p_4 + p_3\left(3q_{32} - \frac{9}{2}p_3 + \frac{3}{2}q_{31} + \frac{9}{2}q_{33}\right). \end{aligned}$$

Calculando a torção da curva  $g'(u, v(u))$  e sua primeira derivada em  $u = 0$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \tau(0) \neq 0 &\Leftrightarrow 2p_3 - q_{30} - q_{31} - q_{32} - q_{33} \neq 0, \\ \tau(0) = 0 \text{ e } \tau'(0) = 0 &\Leftrightarrow 2p_3 - q_{30} - q_{31} - q_{32} - q_{33} = 0 \quad e \quad \Gamma \neq 0 \end{aligned}$$

onde

$$\Gamma = 12(6p_3 - 3q_{33} - 2q_{32} - q_{31})^2 + 48(-q_{40} - q_{41} - q_{42} - q_{43} - q_{44} + 2p_4).$$

Por outro lado, a função altura ao longo da direção normal degenerada  $u_1 = (0, -2, 1)$ , que corresponde ao ramo  $(u, v(u))$  do conjunto parabólico, é dada por

$$\begin{aligned} H_{u_1}(u, v) &= (0, -2, 1) \cdot (u, uv + p(v), v^2 + u^2 + q(u, v)) \\ &= (v - u)^2 - 2p(v) + q(u, v). \end{aligned}$$

Agora não é difícil ver que  $H_{u_1}$  possui uma singularidade na origem do tipo

$$A_2 \Leftrightarrow 2p_3 - q_{30} - q_{31} - q_{32} - q_{33} \neq 0 \Leftrightarrow \tau(0) \neq 0,$$

$$A_3 \Leftrightarrow 2p_3 - q_{30} - q_{31} - q_{32} - q_{33} = 0 \text{ e } \Gamma \neq 0 \Leftrightarrow \tau(0) = 0 \text{ e } \tau'(0) = 0.$$

■

## 2.2 Função Distância ao Quadrado e Conjunto Focal

O objetivo desta seção é analisar o conjunto focal do cross cap em um ponto cross cap. Para superfícies suaves, este estudo é realizado considerando as singularidades da função distância ao quadrado. Imitaremos este processo para descrever o conjunto focal do cross cap, tendo em mente que isso é um pouco mais delicado, já que o cross cap não possui uma única direção normal em sua singularidade. Iniciamos a seção com as definições de função distância ao quadrado e conjunto focal e enunciamos um resultado semelhante ao Teorema 2.1, mas para função distância ao quadrado. Em seguida, apresentamos a descrição do conjunto focal no ponto cross cap.

**Definição 2.2.** *Sejam  $M \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície suave e  $p \in M$ . Definimos a **função distância ao quadrado** por*

$$\begin{aligned} d : M \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, u) &\mapsto d(p, u) := \|p - u\|^2. \end{aligned}$$

Escolhendo uma parametrização  $\phi$  de uma vizinhança de  $p$ , consideraremos o tipo de singularidade (usando  $\mathcal{R}$ -equivalência) do germe

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^2, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}, 0) \\ (x, y) &\mapsto d_u(x, y) = d(\phi(x, y), u), \end{aligned}$$

para cada  $u \in \mathbb{R}^3$ .

**Definição 2.3.** *Sejam  $M \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície suave e  $p \in M$ . O **conjunto focal** de  $M$  em  $p$  é o local geométrico de pontos  $u \in \mathbb{R}^3$  tal que a função distância ao quadrado em  $M$ ,  $d_u$ , possui singularidade do tipo  $A_{\geq 2}$  em  $p$ .*

**Observação 2.1.** *O conjunto focal é o local geométrico de pontos no  $\mathbb{R}^3$  os quais são centros de esferas com contato degenerado com  $M$  em  $p$  (ver [15]).*

Assim como na família de funções altura, a função distância ao quadrado pode apresentar apenas certos tipos de singularidades, como enuncia o teorema abaixo.

**Teorema 2.2.** *Seja  $M \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície suave genérica. Então a função distância ao quadrado  $d_u$  pode ter apenas singularidades dos tipos  $A_1, A_2, A_3, A_4$  e  $D_4$ , onde as singularidades  $A_k$  são as singularidades  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$   $\mathcal{R}$ -equivalentes a*

$$(x, y) \mapsto \pm x^2 \pm y^{k+1}, \quad k \geq 1,$$

*e a singularidade  $D_4$  é uma das singularidades  $D_k$   $\mathcal{R}$ -equivalentes a*

$$(x, y) \mapsto x^2 y \pm y^{k-1}, \quad k \geq 4.$$

**Demonstração:** Ver [3].

■

Estudemos agora o conjunto focal do cross cap. No que segue, usamos a forma normal como na Proposição 1.1, ou seja,

$$f(u, v) = (u, uv + p(v), v^2 + au^2 + buv + q(u, v)), \quad p \in \mathcal{M}_1^3 \quad e \quad q \in \mathcal{M}_2^3,$$

pois estamos lidando com contato com esferas, então só podemos utilizar a ação do grupo  $O(3) \times \mathbb{R}^+$  na meta.

**Proposição 2.8.** *A parte do conjunto focal que corresponde ao ponto cross cap é uma seção cônica no plano ortogonal à reta tangente (plano  $(u_2, u_3)$ ) com equação*

$$2u_3(1 - 2au_3) + (bu_3 + u_2)^2 = 0.$$

- i) Para o cross cap hiperbólico ( $a < 0$ ), esta seção cônica é uma elipse.*
- ii) Para o cross cap elíptico ( $a > 0$ ), esta seção cônica é uma hipérbole.*
- iii) Para o cross cap parabólico ( $a = 0$ ), esta seção cônica é uma parábola.*

**Demonstração:** A função distância ao quadrado no cross cap é dada pela composição da parametrização do cross cap com a função distância ao quadrado, ou seja,

$$F_{(u_1, u_2, u_3)}(u, v) = (u - u_1)^2 + (uv + p(v) - u_2)^2 + (v^2 + au^2 + buv + q(u, v) - u_3)^2.$$

Vamos analisar as singularidades de  $F$  em  $(0, 0)$ . As derivadas parciais de  $F$  são dadas por

$$F_u = 2(u - u_1) + 2v(uv + p(v) - u_2) + 2(2au + bv + q_u(u, v))(v^2 + au^2 + buv + q(u, v) - u_3) \text{ e}$$

$$F_v = 2(u + p'(v))(uv + p(v) - u_2) + 2(2v + bu + q_v(u, v))(v^2 + au^2 + buv + q(u, v) - u_3).$$

Assim, em  $(0, 0)$ , temos

$$(F_{(u_1, u_2, u_3)})_u(0, 0) = -2u_1, \quad (F_{(u_1, u_2, u_3)})_v(0, 0) = 0.$$

Logo,  $F_u = F_v = 0$  em  $(0, 0)$  se, e somente se,  $u_1 = 0$ . Portanto, a parte da cônica focal correspondendo a singularidade cross cap está no plano  $u_1 = 0$ , ou seja, o plano normal à reta tangente. Consideramos o conjunto no plano  $(u_2, u_3)$  no qual  $F$  possui singularidade degenerada em  $(0, 0)$ . Isto é dado pela condição

$$F_{uu}F_{vv} - F_{uv}^2 = 0$$

em  $(0, 0)$ . Calculando as respectivas derivadas em  $(0, 0)$ , obtemos

$$F_{uu} = 2 - 4au_3, \quad F_{uv} = -2u_2 - 2bu_3, \quad F_{vv} = -4u_3.$$

Logo,

$$F_{uu}F_{vv} - F_{uv}^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2u_3(1 - 2au_3) + (bu_3 + u_2)^2 = 0. \quad (2.6)$$

Quando  $a \neq 0$ , podemos reescrever (2.6) como

$$(bu_3 + u_2)^2 - 4a \left( u_3 - \frac{1}{4a} \right)^2 + \frac{1}{4a} = 0.$$

Assim, temos que (2.6) é a equação de uma seção cônica no plano  $(u_2, u_3)$ . No caso do cross cap elíptico ( $a > 0$ ), esta cônica é uma hipérbole. Para o cross cap hiperbólico ( $a < 0$ ), esta cônica é uma elipse. Por fim, para o cross cap parabólico ( $a = 0$ ), esta cônica é uma parábola e o resultado está demonstrado. ■

A Figura 2.2 mostra os três tipos de seções cônicas descritas pela Proposição 2.8: elipse para o cross cap hiperbólico, hipérbole para o cross cap elíptico e parábola para o cross cap parabólico.

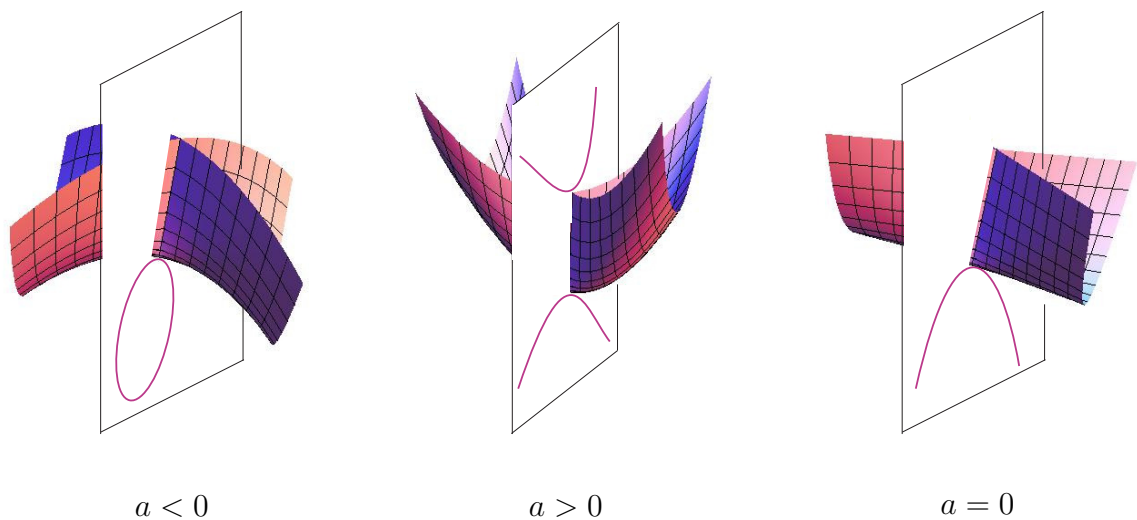


Figura 2.2: Seções cônicas: (a) Elipse, (b) Hipérbole, (c) Parábola

**Corolário 2.1.** *No caso do cross cap elíptico, as assíntotas da hipérbole são as retas no plano  $(u_2, u_3)$  com equações  $u_2 + u_3(b \pm 2\sqrt{a}) \mp 2\sqrt{a}$ .*

**Demonstração:** Imediato, já que obtemos a equação da hipérbole na Proposição 2.8. ■

Para o cross cap elíptico, esperamos que as assíntotas das hipérboles correspondam aos planos com contato do tipo  $A_2$  na singularidade cross cap. Estes planos podem ser pensados como esferas de raio infinito, cujos centros se encontram nas assíntotas da hipérbole. Mais precisamente, se considerarmos pontos  $p$  pertencentes a qualquer um dos ramos da hipérbole, e a esfera centrada em  $p$  que passa pela origem, então a medida que  $p$  tende a infinito, a esfera tende ao plano ortogonal à reta que liga a origem e  $p$ . No limite, esta reta tende à reta que passa pela origem e é paralela a uma das assíntotas.



Consideraremos a natureza das singularidades da função distância ao quadrado em um ponto cross cap. O caso  $(u_2, u_3) = (0, 0)$  não será tratado aqui mas será comentado mais adiante.

**Proposição 2.9.** *Quando  $u_1 = 0$  e  $(u_2, u_3)$  está na cônica especificada na Proposição 2.8 (mas longe de  $(0, 0)$ ), a função distância ao quadrado possui uma singularidade de corank 1 quando  $(u, v) = (0, 0)$ . Estas são do tipo  $A_2$  exceto para 0, 2 ou 4 pontos na cônica, onde elas são, genericamente, do tipo  $A_3$ .*

**Demonstração:** A função distância ao quadrado no cross cap é dada por

$$F_{(u_1, u_2, u_3)}(u, v) = (u - u_1)^2 + (uv + p(v) - u_2)^2 + (v^2 + au^2 + buv + q(u, v) - u_3)^2.$$

Para obtermos uma singularidade de corank 2, devemos ter  $F_{uu} = F_{uv} = F_{vv} = 0$  em  $(0, 0)$ , ou seja,

$$\begin{cases} 2 - 4au_3 = 0, \\ -2bu_3 - 2u_2 = 0, \\ -4u_3 = 0, \end{cases}$$

o que não pode ocorrer. Assim,  $F$  deve possuir singularidade de corank 1 quando  $u = v = u_1 = 0$  e  $u_2, u_3$  satisfizerem

$$2u_3(1 - 2au_3) + (bu_3 + u_2)^2 = 0.$$

Isto significa que a parte quadrática de  $F_{(0, u_2, u_3)}(u, v)$  nas variáveis  $u$  e  $v$ , ou seja,

$$(1 - 2au_3)u^2 - 2(u_2 + bu_3)uv - 2u_3v^2, \quad (2.7)$$

é o quadrado de uma forma linear para valores apropriados de  $u_2$  e  $u_3$ . A demonstração da segunda parte deste resultado será feita da seguinte maneira: Primeiramente, encontramos parametrizações das cônicas vistas na Proposição 2.8. Feito isso, determinamos a forma linear, que denotaremos por  $L(u, v, t)$ , da parte quadrática de  $F$  dada em (2.7). É fácil verificar que a parte cúbica de  $F_{(0, u_2, u_3)}(u, v)$ , denotada por  $C(u, v, u_2, u_3)$ , é dada por

$$C(u, v, u_2, u_3) = -2u_2p_3v^3 - 2u_3(q_0u^3 + q_1u^2v + q_2uv^2 + q_3v^3),$$

onde  $p_3v^3$  e  $q_0u^3 + q_1u^2v + q_2uv^2 + q_3v^3$  são as partes cúbicas de  $p$  e  $q$ , respectivamente. Temos que  $F$  possui singularidade  $A_2$  quando  $(u_2, u_3)$  pertence à cônica como em (2.6), a não ser que sua parte cúbica  $C$  seja divisível pela forma linear  $L$  a ser encontrada. Para determinar se  $F$  possui singularidade  $A_{\geq 3}$ , primeiramente substituímos a parametrização da cônica em questão por  $u_2$  e  $u_3$ . Rearranjamos a forma linear  $L(u, v, t) = 0$  de forma a obtermos uma expressão para  $v$  em termos de  $u$  e  $t$  e substituímos em  $C$  para encontrarmos um polinômio  $P(u, t)$  que é homogêneo e de grau 3 em  $u$ . A condição para  $L$  dividir  $C$  é equivalente a condição  $P(u, t) = 0$  para todo  $u$ , isto é,  $P(u, t)/u^3 = 0$ .

Faremos este procedimento para os casos  $a > 0$ ,  $a < 0$  e  $a = 0$  separadamente, sendo que apresentaremos o primeiro caso com mais detalhes.

• Cross Cap Elíptico ( $a > 0$ ):

Neste caso, escrevemos  $a = \lambda^2$  e assim a parte do conjunto focal correspondendo ao cross cap é uma hipérbole contida no plano  $u_1 = 0$  de equação

$$\begin{aligned} (bu_3 + u_2)^2 - 4\lambda^2 \left( u_3 - \frac{1}{4\lambda^2} \right)^2 + \frac{1}{4\lambda^2} &= 0 \\ \Rightarrow 16\lambda^4 \left( u_3 - \frac{1}{4\lambda^2} \right)^2 - 4\lambda^2 (bu_3 + u_2)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Parametrizamos a hipérbole como segue: Faça a mudança de coordenadas

$$16\lambda^4 \left( u_3 - \frac{1}{4\lambda^2} \right)^2 = \cosh^2 \theta \quad e \quad 4\lambda^2 (bu_3 + u_2)^2 = \sinh^2 \theta.$$

Assim, temos

$$u_3 = \frac{1 \pm \cosh \theta}{4\lambda^2} \quad e \quad u_2 = \frac{\sinh \theta}{2\lambda} - bu_3.$$

Cada escolha de sinal corresponde a um ramo da hipérbole. Substituindo  $u_2$  e  $u_3$  em (2.7), temos

$$\left( \frac{1 \mp \cosh \theta}{2} \right) u^2 - \left( \frac{\sinh \theta}{\lambda} \right) uv - \left( \frac{1 \pm \cosh \theta}{2\lambda^2} \right) v^2.$$

Fazendo a mudança

$$t = e^\theta, \quad t \geq 0 \quad e \quad t = -e^\theta, \quad t < 0,$$

obtemos

$$\pm \cosh \theta = \frac{t^2 + 1}{2t} \quad e \quad \sinh \theta = \frac{t^2 - 1}{2t}.$$

Assim,

$$u_3 = \frac{(t+1)^2}{8\lambda^2 t} \quad e \quad u_2 = \frac{(t+1)((2\lambda-b)t - (2\lambda+b))}{8\lambda^2 t}.$$

Note que  $t = 0$  corresponde às assíntotas da hipérbole e  $t = -1$  nos dá a origem. Substituindo os novos valores de  $u_2$  e  $u_3$  em (2.7) (com  $a = \lambda^2$ ), temos

$$\left(\frac{2t - (t^2 + 1)}{4t}\right) u^2 - \left(\frac{t^2 - 1}{2\lambda t}\right) uv - \left(\frac{2t + (t^2 + 1)}{4\lambda^2 t}\right) v^2.$$

Isto nos dá a forma quadrática

$$\frac{-1}{t} \left( \frac{(t-1)^2}{4} u^2 + \frac{(t-1)(t+1)}{2\lambda} uv + \frac{(t+1)^2}{4\lambda^2} v^2 \right) = \frac{-1}{t} \left( \frac{(t-1)}{2} u + \frac{(t+1)}{2\lambda} v \right)^2,$$

ou seja, a forma linear é dada por

$$L(u, v, t) = \frac{(t-1)}{2} u + \frac{(t+1)}{2\lambda} v.$$

Então,

$$L(u, v, t) = 0 \Rightarrow v = -\frac{\lambda(t-1)}{t+1} u.$$

Substituindo na cúbica  $C$ , obtemos o polinômio

$$P(u, t) = \frac{u^3}{4\lambda^2 t} \left( \frac{\lambda^3 p_3 ((2\lambda-b)t - (2\lambda+b)) (t-1)^3}{(t+1)^2} - \right. \\ \left. - q_0 (t+1)^2 \lambda q_1 (t-1)(t+1) - \lambda^2 q_2 (t-1)^2 + \lambda^3 q_3 \frac{(t-1)^3}{(t+1)} \right).$$

Quando  $t \neq 0$  ou  $-1$  (então estamos longe da origem e das assíntotas), a condição  $P(u, t)/u^3 = 0$  é equivalente a

$$\lambda^3 p_3 ((2\lambda-b)t - (2\lambda+b)) (t-1)^3 - q_0 (t+1)^4 + \\ + \lambda q_1 (t-1)(t+1)^3 - \lambda^2 q_2 (t-1)^2 (t+1)^2 + \lambda^3 q_3 (t-1)^3 (t+1) = 0.$$

Expandindo, obtemos

$$(\lambda^3 p_3 (2\lambda-b) - q_0 + \lambda q_1 - \lambda^2 q_2 + \lambda^3 q_3) t^4 + (\lambda^3 p_3 (-8\lambda + 2b) - 4q_0 + 2\lambda q_1 - 2\lambda^3 q_3) t^3 +$$

$$\begin{aligned}
& + (12\lambda^4 p_3 - 6q_0 + 2\lambda^2 q_2) t^2 + (\lambda^3 p_3(-8\lambda - 2b) - 4q_0 - 2\lambda q_1 + 2\lambda^3 q_3) t + \\
& + \lambda^3 p_3(2\lambda + b) - q_0 - \lambda q_1 - \lambda^2 q_2 - \lambda^3 q_3 = 0.
\end{aligned}$$

Logo, temos uma quártica geral, que, genericamente, possui 0, 2 ou 4 raízes reais. Assim, cada raiz da quártica obtida nos dá um ponto na hipérbole do plano  $u_1 = 0$ , onde o contato de uma esfera centrada nesse ponto com o cross cap é do tipo  $A_{\geq 3}$ .

- **Cross Cap Hiperbólico** ( $a < 0$ ):

Neste caso, escrevemos  $a = -\lambda^2$ . Assim, a parte do conjunto focal correspondendo ao cross cap é uma elipse contida no plano  $u_1 = 0$  com equação

$$16\lambda^4 \left( u_3 + \frac{1}{4\lambda^2} \right)^2 + 4\lambda^2 (bu_3 + u_2)^2 = 1.$$

O procedimento é análogo ao caso do cross cap elíptico. Fazemos a parametrização da elipse com as seguintes mudanças:

$$u_3 + \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{\text{sen } \theta}{4\lambda^2} \quad e \quad bu_3 + u_2 = \frac{\cos \theta}{2\lambda}.$$

Tomando  $t = \tan \theta/2$  ( $t = 1$  nos dará a origem) e fazendo as substituições, chegamos na forma quadrática

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{(1+t)^2}{2(1+t^2)} \right) u^2 - \left( \frac{(1-t)(1+t)}{\lambda(1+t^2)} \right) uv + \left( \frac{(1-t^2)}{2\lambda^2(1+t^2)} \right) v^2 \\
& = \frac{1}{2(1+t^2)} \left( (1+t)u - \frac{(1-t)}{\lambda}v \right)^2.
\end{aligned}$$

Assim, a forma linear é dada por

$$L(u, v, t) = (1+t)u - \frac{(1-t)}{\lambda}v.$$

Substituindo

$$v = \frac{\lambda(1+t)}{(1-t)}u$$

em  $C$ , obtemos o polinômio

$$P(u, t) = \frac{u^3}{2\lambda^2(1+t^2)} \left( -\lambda^3 p_3 \frac{((2\lambda - b) + (2\lambda + b)t)(1+t^3)}{(1-t)^2} + \right. \\ \left. + q_0(1-t)^2 + \lambda q_1(1+t)(1-t) + \lambda^2 q_2(1+t)^2 + \lambda^3 q_3 \frac{(1+t)^3}{(1-t)} \right).$$

Fazendo  $P(u, t)/u^3 = 0$  quando  $t \neq 1$  (o que corresponde a origem) e expandindo, obtemos o polinômio

$$(-\lambda^3 p_3(2\lambda + b) + q_0 - \lambda q_1 - \lambda^2 q_2 - \lambda^3 q_3) t^4 + (-\lambda^3 p_3(8\lambda + 2b) - 4q_0 - 2\lambda q_1 - 2\lambda^3 q_3) t^3 + \\ + (-12\lambda^4 p_3 + 6q_0 - 2\lambda^2 q_2 + 2\lambda^3 q_3) t^2 + (-\lambda^3 p_3(8\lambda + 2b) - 4q_0 - 2\lambda q_1 + 2\lambda^3 q_3) t - \\ - \lambda^3 p_3(2\lambda - b) + q_0 + \lambda q_1 - \lambda^2 q_2 + \lambda^3 q_3 = 0.$$

Logo, novamente temos uma quártica geral, que, genericamente, possui 0, 2 ou 4 raízes reais. Assim, cada raiz da quártica obtida nos dá um ponto na elipse do plano  $u_1 = 0$ , onde o contato de uma esfera centrada nesse ponto com o cross cap é do tipo  $A_{\geq 3}$ .

• Cross Cap Parabólico ( $a = 0$ ):

O procedimento é totalmente análogo aos casos anteriores. A parte do conjunto focal correspondendo ao cross cap parabólico é uma parábola no plano  $u_1 = 0$  com equação

$$2u_3 + (bu_3 + u_2)^2 = 0.$$

Basta fazer a mudança  $2u_3 = -t^2$ ,  $bu_3 + u_2 = -t$  e o resultado segue de forma similar. ■

A função distância ao quadrado possui precisamente uma singularidade do tipo  $A_3$  em  $(0, 0)$  quando  $(u_1, u_2, u_3) = (0, 0, 0)$ . Este resultado será apenas enunciado, mas não será demonstrado aqui. Sua demonstração exige definições e resultados sobre *funções quase homogêneas* e *filtrações*.

**Proposição 2.10.** *Quando  $(u_1, u_2, u_3) = (0, 0, 0)$ , a função distância ao quadrado possui uma singularidade do tipo  $A_3$  em  $(u, v) = (0, 0)$ .*

**Demonstração:** Ver [18] ■

## Capítulo 3

# Invariantes Intrínsecos do Cross Cap

No Capítulo 1, vimos que, após algumas mudanças de coordenadas, podemos reduzir um germe  $g$   $\mathcal{A}$ -equivalente a  $(u, v) \mapsto (u, uv, v^2)$  à forma

$$g'(u, v) = (u, uv + p(v), v^2 + au^2 + buv + q(u, v)),$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes,  $p \in \mathcal{M}_1^3$  e  $q \in \mathcal{M}_2^3$ . Estudamos neste capítulo os invariantes intrínsecos e extrínsecos do cross cap. Utilizamos a notação do artigo [13], uma vez que este capítulo é baseado neste artigo, no qual os autores estudaram este assunto pela primeira vez. Dessa forma, de agora em diante chamamos de **forma normal** do cross cap a aplicação  $f$  dada por

$$f(u, v) = \left( u, uv + \sum_{i=3}^n \frac{b_i}{i!} v^i, \sum_{r=2}^n \sum_{j=0}^r \frac{a_{jr-j}}{j!(r-j)!} u^j v^{r-j} \right) + O(u, v)^{n+1}, \quad (3.1)$$

onde  $a_{02} > 0$ . Um sistema de coordenadas  $(u, v)$  que nos dá essa forma normal é chamado de **sistema canônico de coordenadas** de  $f$  em uma singularidade cross cap. Esta expansão do cross cap implica que os coeficientes  $a_{jk}$  e  $b_i$  podem ser considerados invariantes geométricos do cross cap  $f$ . Desta forma, o objetivo deste capítulo é mostrar quais desses invariantes são extrínsecos e intrínsecos. Usando a existência de deformações isométricas não triviais de cross caps quadráticos degenerados, mostramos que os invariantes  $a_{12}$ ,  $a_{03}$  e  $b_3$  na expressão (3.1) são extrínsecos. Em seguida, mostramos que os invariantes  $a_{02}$ ,  $a_{20}$  e  $a_{11}$  podem ser escritos somente em termos da métrica induzida pelo cross cap e suas derivadas em  $(0, 0)$ , ou seja, esses invariantes são intrínsecos.

### 3.1 Algumas Definições

Apresentamos nesta seção algumas definições, as quais serão utilizadas até o final deste capítulo. De agora em diante, denotamos o cross cap  $f$  com a forma normal dada em (3.1).

**Definição 3.1.** *Diremos que o cross cap  $f$  é*

- **não degenerado** se  $a_{20} \neq 0$ ,
- **degenerado ou parabólico** se  $a_{20} = 0$ ,
- **quadrático** se  $a_{jk} = 0$  para  $j + k \geq 3$  e  $b_i = 0$  para  $i \geq 3$ .

Observe que o cross cap padrão  $f_{std}$  dado em (1.1) é um exemplo de cross cap quadrático degenerado.

Denotamos por  $f_0$  um cross cap quadrático degenerado no sistema canônico de coordenadas  $(u, v)$ . Note que  $f_0$  pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} f_0(u, v) &= \left( u, uv, \frac{a_{02}}{2}v^2 + a_{11}uv \right) \\ &= \frac{1}{2} (0, 0, a_{02}v^2) + u(1, v, a_{11}v), \quad a_{02} > 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Em particular,  $f_0$  é uma superfície regrada. Os coeficientes de sua primeira forma fundamental são dados por

$$\begin{aligned} E_0 &= 1 + (1 + a_{11}^2)v^2, \\ F_0 &= (1 + a_{11}^2)uv + a_{02}a_{11}v^2, \\ G_0 &= (1 + a_{11}^2)u^2 + 2a_{02}a_{11}uv + a_{02}^2v^2. \end{aligned}$$

Em seguida, serão definidos os conceitos de aplicações isométricas, congruentes e de deformação isométrica, o que será de grande importância daqui para frente.

**Definição 3.2.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  um aberto contendo a origem e sejam  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $i = 0, 1$ ) duas aplicações suaves possuindo singularidades cross cap em  $(0, 0)$ . Dizemos que  $f_0$  é **isométrica** a  $f_1$  se as primeiras formas fundamentais de  $f_0$  e  $f_1$  coincidem.*

Neste trabalho, consideramos **movimento rígido** como sendo uma aplicação

$$R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x \mapsto Ax + T,$$

onde  $A$  é uma matriz ortogonal com determinante positivo e  $T(x) = t+x$  é uma translação em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 3.3.** *Seja  $f_0$  como na Definição 3.2 e considere  $f_t : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $|t| < \epsilon$ , onde  $\epsilon$  é uma constante positiva) uma família suave a 1-parâmetro de aplicações com singularidades cross cap em  $(0, 0)$ . Então,  $\{f_t\}_{|t| < \epsilon}$  é chamada **deformação isométrica** de  $f_0$  se cada  $f_t$  é isométrica a  $f_0$ . Uma deformação isométrica  $\{f_t\}_{|t| < \epsilon}$  de  $f_0$  é **não trivial** se cada  $f_t$  é não congruente a  $f_0$  para  $t \neq 0$ , ou seja, não existe uma família  $g_t$  de movimentos rígidos com  $f_t = g_t \circ f_0$ .*

## 3.2 Deformações Isométricas de Superfícies Regradas com Singularidades

Em geral, superfícies regradas admitem deformações isométricas não triviais. Considere primeiramente  $\gamma(v)$  uma curva em  $\mathbb{R}^3$  definida em uma vizinhança de  $v = 0$ . Seja ainda  $\xi(v)$  um campo vetorial ao longo da curva  $\gamma$  tal que  $\xi$  não se anula e  $\xi'(0) \neq 0$ . Então, a superfície regradada  $f(u, v) = \gamma(v) + u\xi(v)$  possui deformação isométrica não trivial. Este processo é feito da seguinte maneira.

Por uma mudança de coordenadas da forma  $(u, v) \mapsto (u/\|\xi(v)\|, v)$ , podemos assumir que  $\|\xi(v)\| = 1$ . Como  $\xi'(0) \neq 0$ , também podemos assumir que  $\|\xi'(v)\| = 1$ . Assim,

$$\{\xi(v), \xi'(v), \xi(v) \times \xi'(v)\}$$

forma um referencial ortonormal e a derivada de  $\gamma(v)$  neste referencial possui a seguinte expressão

$$\gamma'(v) = a(v)\xi(v) + b(v)\xi'(v) + c(v)(\xi(v) \times \xi'(v)).$$

Seja  $\tilde{\xi}(v)$  uma curva esférica arbitrária, parametrizada pelo comprimento de arco, e



seja  $\tilde{\gamma}$  a curva cuja derivada é dada por

$$\tilde{\gamma}'(v) = a(v)\tilde{\xi}(v) + b(v)\tilde{\xi}'(v) + c(v)(\tilde{\xi}(v) \times \tilde{\xi}'(v)).$$

Então,  $\tilde{f}(u, v) = \tilde{\gamma}(v) + u\tilde{\xi}(v)$  possui a mesma primeira forma fundamental de  $f(u, v)$ . Agora, calculando a segunda forma fundamental, verifica-se que  $f$  e  $\tilde{f}$  são congruentes se, e somente se,  $\xi$  e  $\tilde{\xi}$  são congruentes como curvas esféricas. Isso implica que algumas singularidades já conhecidas sobre superfícies admitem deformações isométricas. Em particular,  $(0, 0)$  é um cross cap se, e somente se,  $\gamma'(0) = 0$  e  $\det(\gamma''(0), \xi(0), \xi'(0)) \neq 0$ . Pode-se escolher  $\gamma$  e  $\xi$  de forma que os critérios acima sejam satisfeitos. Isto implica que os cross caps e outras singularidades conhecidas na literatura como, por exemplo, cuspidal edges (Figura 3.1 (a)), swallowtails (Figura 3.1 (b)) e cuspidal cross caps (Figura 3.1 (c)) admitem, de fato, deformações isométricas não triviais em uma certa classe de superfícies regradas. Ver [6] para mais detalhes.

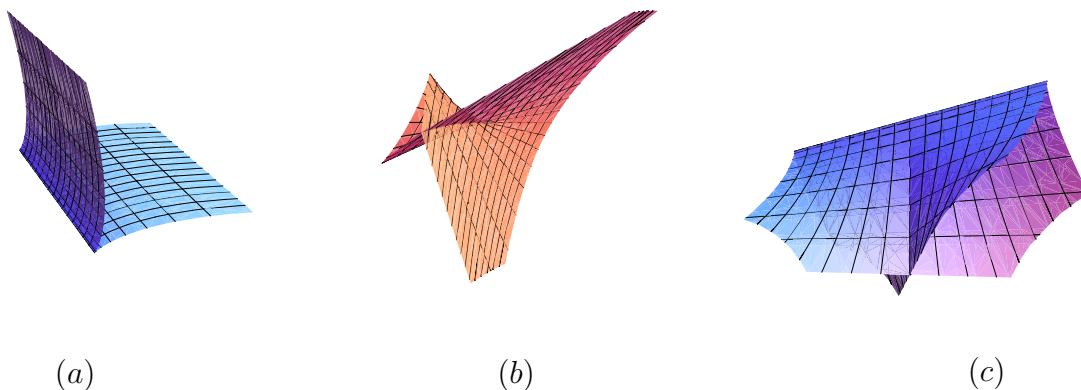


Figura 3.1: (a) Cuspidal Edge, (b) Swallowtail, (c) Cuspidal Cross Cap

### 3.3 Deformações Isométricas de Cross Caps Quadráticos Degenerados

A Seção 3.2 sugere que superfícies regradas com singularidades podem admitir deformações isométricas. Motivados por este resultado, obtemos uma deformação isométrica de um cross cap (visto como superfície regrada) a partir do cross cap quadrático degenerado e de uma curva esférica. Antes de enunciarmos este resultado, faremos algumas considerações

sobre curvas na esfera.

### 3.3.1 Fórmulas de Frenet para Curvas na Esfera

**Definição 3.4.** Considere  $c(s)$  uma curva regular em  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , parametrizada pelo comprimento de arco. Sua **curvatura geodésica**,  $\kappa_g(s)$ , em  $c(s)$ , é dada por

$$\kappa_g(s) = c''(s) \cdot c(s) \times c'(s).$$

Seja  $c(s)$  uma curva regular em  $S^2$ , parametrizada pelo comprimento de arco. Defina

$$\mathbf{e} = c' \quad \text{e} \quad \mathbf{n} = c \times c'.$$

Como  $c(s)$  está em  $S^2$ , seu vetor posição  $c(s)$  é ortogonal a  $c'(s)$ . Logo,  $\{c, \mathbf{e}, \mathbf{n}\}$  é um referencial ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Assim, existem únicos  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  tais que  $\mathbf{e}' = c'' = \alpha c + \beta \mathbf{e} + \gamma \mathbf{n}$ , onde

$$\alpha = \mathbf{e}' \cdot c, \quad \beta = \mathbf{e}' \cdot \mathbf{e} \quad \text{e} \quad \gamma = \mathbf{e}' \cdot \mathbf{n}.$$

**Lema 3.1.** Nas condições anteriores, temos que  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 0$  e  $\gamma = \kappa_g$ .

**Demonstração:** Como a curva  $c(s)$  está em  $S^2$ , segue que  $\|c\|^2 = c \cdot c = 1$ . Logo,

$$(c \cdot c)' = 0 \Rightarrow \mathbf{e} \cdot c = 0.$$

Derivando  $\mathbf{e} \cdot c$  com relação a  $s$ , vem:

$$\mathbf{e}' \cdot c + \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 0 \Rightarrow \alpha = -1.$$

Como  $c$  está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que  $\|\mathbf{e}\|^2 = 1$ . Derivando  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}$ , obtemos  $\beta = 0$ . Para finalizar, temos que  $\gamma$  é a curvatura geodésica de  $c$  em  $c(s)$ . De fato,

$$\kappa_g = \mathbf{e}' \cdot \mathbf{n} = (\alpha c + \beta \mathbf{e} + \gamma \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \gamma.$$

Portanto, temos as igualdades desejadas. ■

Segue do Lema 3.1 que  $\mathbf{e}'$  pode ser escrito (no referencial  $\{c, \mathbf{e}, \mathbf{n}\}$ ) como

$$\mathbf{e}' = -c + \kappa_g \mathbf{n}.$$

Por outro lado,

$$\mathbf{n}' = \mathbf{e} \times \mathbf{e}' + c \times \mathbf{e}' = c \times (-c + \kappa_g \mathbf{n}) = -\kappa_g \mathbf{e}.$$

Assim, temos as fórmulas de Frenet para curvas em  $S^2$  dadas a seguir

$$\begin{cases} c' = \mathbf{e} \\ \mathbf{e}' = -c + \kappa_g \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -\kappa_g \mathbf{e}. \end{cases}$$

### 3.3.2 Deformações Isométricas de Cross Caps Quadráticos Degenerados

Mostramos agora a existência de deformações isométricas não triviais para cross caps quadráticos degenerados. Este resultado será útil para mostrarmos que os invariantes  $a_{12}$ ,  $a_{03}$  e  $b_3$  do cross cap (3.1) são extrínsecos.

**Teorema 3.1.** *Seja  $c(s)$  ( $|s| < \pi/2$ ) uma curva regular em  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , parametrizada pelo comprimento de arco. Defina*

$$\xi(v) := \sqrt{1 + (1 + a_{11}^2)v^2} \hat{c}(v), \quad \hat{c}(v) := c \left( \arctan(v\sqrt{1 + a_{11}^2}) \right),$$

para cada  $v \in \mathbb{R}$ , e

$$\gamma(v) := \frac{a_{02}}{1 + a_{11}^2} \int_0^v tB(t) dt, \quad B(v) := a_{11}\xi'(v) + \xi(v) \times \xi'(v).$$

Então, a superfície regrada  $f_c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por

$$f_c(u, v) := \gamma(v) + u\xi(v)$$

possui uma singularidade cross cap na origem, tal que  $f_c$  é isométrica ao cross cap quadrático degenerado  $f_0$ . Além disso, sejam  $c_i(s)$  ( $|s| < \pi/2$ ,  $i = 1, 2$ ) duas curvas

regulares em  $S^2$  parametrizadas pelo comprimento de arco. Então,  $f_{c_1}$  é congruente a  $f_{c_2}$  se, e somente se,  $c_1$  é congruente a  $c_2$  em  $S^2$ . Nesta correspondência  $c \mapsto f_c$  entre curvas esféricas e cross caps, o cross cap quadrático degenerado inicial  $f_0$  corresponde a uma geodésica em  $S^2$ . Mais precisamente,  $f_c$  é congruente a  $f_0$  como em (3.2) se, e somente se,  $c(s)$  é uma geodésica em  $S^2$ .

**Demonstração:** Primeiramente, mostremos que a superfície regrada  $f_c$  possui uma singularidade cross cap na origem. Temos que

$$(f_c)_v(0,0) = \gamma'(0) + 0\xi'(0) = 0, \quad (f_c)_u(0,0) = \xi(0) = c(0),$$

$$(f_c)_{uv}(0,0) = \xi'(0) = \sqrt{1 + a_{11}^2}c'(0),$$

$$(f_c)_{vv}(0,0) = \gamma''(0) = \frac{a_{02}\sqrt{1 + a_{11}^2}}{1 + a_{11}^2}(a_{11}c'(0) + c(0) \times c'(0)).$$

Logo, como  $(f_c)_v(0,0) = 0$  e os vetores  $(f_c)_u(0,0)$ ,  $(f_c)_{uv}(0,0)$  e  $(f_c)_{vv}(0,0)$  são linearmente independentes, segue que  $f_c$  possui uma singularidade cross cap em  $(0,0)$ .

Mostremos agora que  $f_c$  é isométrico a um cross cap quadrático degenerado  $f_0$ . Temos que  $f_0$  é dado por

$$f_0(u,v) = \left( u, uv, \frac{a_{02}}{2}v^2 + a_{11}uv \right), \quad a_{02} > 0.$$

Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental de  $f_0$  são dados por

$$E_0 = (f_0)_u \cdot (f_0)_u = 1 + (1 + a_{11}^2)v^2,$$

$$F_0 = (f_0)_u \cdot (f_0)_v = (1 + a_{11}^2)uv + a_{02}a_{11}v^2,$$

$$G_0 = (f_0)_v \cdot (f_0)_v = (1 + a_{11}^2)u^2 + a_{02}v^2 + 2a_{02}a_{11}uv.$$

Seja  $f_c(u,v) = \gamma(v) + u\xi(v)$ . Denotando por  $E_c$ ,  $F_c$  e  $G_c$  os coeficientes da primeira forma fundamental de  $f_c$ , devemos mostrar que

$$E_0 = E_c, \quad F_0 = F_c \quad e \quad G_0 = G_c.$$

Calculando os coeficientes:

$$E_c = (f_c)_u \cdot (f_c)_u = \xi(v) \cdot \xi(v) = 1 + (1 + a_{11}^2)v^2 = E_0,$$

onde usamos o fato de que  $\hat{c}(v)$  é uma curva em  $S^2$ . Além disso, como  $\hat{c}(v)$  é ortogonal a  $\hat{c}'(v)$ , vem que

$$\begin{aligned} F_c &= (f_c)_u \cdot (f_c)_v = \xi(v) \cdot \gamma'(v) + u\xi(v) \cdot \xi'(v) \\ &= a_{02}a_{11}v^2 + (1 + a_{11}^2)uv = F_0. \end{aligned}$$

Para o cálculo de  $G_c$ , usamos as relações a seguir, que surgem através de um cálculo imediato:

- $\xi'(v) \cdot \xi'(v) = 1 + a_{11}^2$ ,
- $\gamma'(v) \cdot \xi'(v) = a_{02}a_{11}v$ ,
- $\gamma'(v) \cdot \gamma'(v) = a_{02}^2v^2$ .

Note que, na última relação, usamos

$$\begin{aligned} B(v) \cdot B(v) &= a_{11}^2(1 + a_{11}^2) + \|\xi(v) \times \xi(v)\|^2 \\ &= a_{11}^2(1 + a_{11}^2) + \|\xi(v)\|^2\|\xi(v)\|^2 \left(1 - \frac{(\xi(v) \cdot \xi'(v))^2}{\|\xi(v)\|^2\|\xi'(v)\|^2}\right) \\ &= (1 + a_{11}^2)^2. \end{aligned}$$

Assim, com o auxílio das relações acima, temos

$$\begin{aligned} G_c &= (f_c)_v \cdot (f_c)_v = \gamma'(v) \cdot \gamma'(v) + 2u(\gamma'(v) \cdot \xi'(v)) + u^2(\xi'(v) \cdot \xi'(v)) \\ &= (1 + a_{11}^2)u^2 + a_{02}^2v^2 + 2a_{02}a_{11}uv = G_0. \end{aligned}$$

Portanto, como os coeficientes da primeira forma fundamental de  $f_0$  e  $f_c$  coincidem, segue que estas aplicações são isométricas.

Passamos agora para a demonstração da afirmação  $f_{c_1}$  é congruente a  $f_{c_2}$  se, e somente se,  $c_1$  é congruente a  $c_2$  em  $S^2$ . Assim, devemos calcular os coeficientes da segunda forma fundamental de  $f_c$ :  $L$ ,  $N$  e  $M$ . Para isto, considere o campo vetorial normal unitário  $\nu$

dado por

$$\nu(u, v) = \frac{(f_c)_u(u, v) \times (f_c)_v(u, v)}{\|(f_c)_u(u, v) \times (f_c)_v(u, v)\|}.$$

Fazendo  $\mathbf{e} = dc/ds$  e  $\mathbf{n} = c \times \mathbf{e}$ , temos que

$$(f_c)_u(u, v) \times (f_c)_v(u, v) = \frac{-a_{02}v\sqrt{1 + (1 + a_{11}^2)v^2}}{\sqrt{1 + a_{11}^2}} \mathbf{e}$$

e

$$\|(f_c)_u(u, v) \times (f_c)_v(u, v)\| = \sqrt{(1 + a_{11}^2)u^2 + 2a_{02}a_{11}uv + a_{02}^2v^2(1 + v^2)}.$$

Logo, o campo vetorial normal unitário  $\nu$  é dado por

$$\nu(u, v) = \frac{1}{\delta} \left( - \left( a_{02}v\sqrt{1 + (1 + a_{11}^2)v^2} \right) \mathbf{e}(v) + \left( (1 + a_{11}^2)u + a_{02}a_{11}v \right) \mathbf{n}(v) \right),$$

onde

$$\delta = \sqrt{1 + a_{11}^2} \sqrt{(1 + a_{11}^2)u^2 + 2a_{02}a_{11}uv + a_{02}^2v^2(1 + v^2)}.$$

Um cálculo simples porém enfadonho nos mostra que os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por

$$L = \nu \cdot (f_c)_{uu} = 0, \tag{3.3}$$

$$M = \nu \cdot (f_c)_{uv} = \frac{-a_{02}v\sqrt{1 + a_{11}^2}}{\delta}, \tag{3.4}$$

$$N = \nu \cdot (f_c)_{vv} = \frac{a_{02}\sqrt{1 + a_{11}^2}}{\delta}u + \frac{\delta\kappa_g(v)}{(1 + (1 + a_{11}^2)v^2)^{3/2}}, \tag{3.5}$$

onde  $\kappa_g(v)$  é a função curvatura geodésica de  $c(s)$ .

Sejam  $c_i(s)$  ( $|s| < \pi/2$ ;  $i = 1, 2$ ) duas curvas regulares em  $S^2$  parametrizadas pelo comprimento de arco e  $\kappa_{g_i}(s)$  a função curvatura geodésica de  $c_i(s)$ . Então,  $f_{c_1}$  é congruente a  $f_{c_2}$  se, e somente se,  $c_1$  é congruente a  $c_2$  em  $S^2$ . De fato, os coeficientes da segunda forma fundamental de  $f_{c_1}$  e  $f_{c_2}$ , dados por (3.3), (3.4) e (3.5) coincidem se, e somente se,  $\kappa_{g_1}$  coincide com  $\kappa_{g_2}$ . Para finalizar a demonstração, o exemplo seguinte mostrará que cross caps quadráticos degenerados correspondem aos grandes círculos, que são as geodésicas de  $S^2$ .

■

**Exemplo 3.1.** *Seja  $\kappa_g$  uma constante e defina*

$$c_{\kappa_g}(s) := \frac{1}{\mu^2} (\kappa_g^2 + \cos(\mu s), \mu \operatorname{sen}(\mu s), \kappa_g(1 - \cos(\mu s))), \quad \left( |s| < \frac{\pi}{2}, \mu := \sqrt{1 + \kappa_g^2} \right).$$

*Observe que  $c_{\kappa_g}(s)$  define um círculo em  $S^2$ , parametrizado pelo comprimento de arco e com curvatura geodésica constante  $\kappa_g$ . Assim,  $c_{\kappa_g}$  produz uma deformação do cross cap padrão, onde  $c_0$  corresponde ao cross cap padrão  $f_{std}$ .*

A Figura 3.2 mostra a deformação isométrica do cross cap padrão para  $c_{k_g}$  do Exemplo 3.1, onde os valores de  $k_g$  são dados por 0 (ou seja, o cross cap padrão  $f_{std}$ ), 1 e 3, respectivamente.

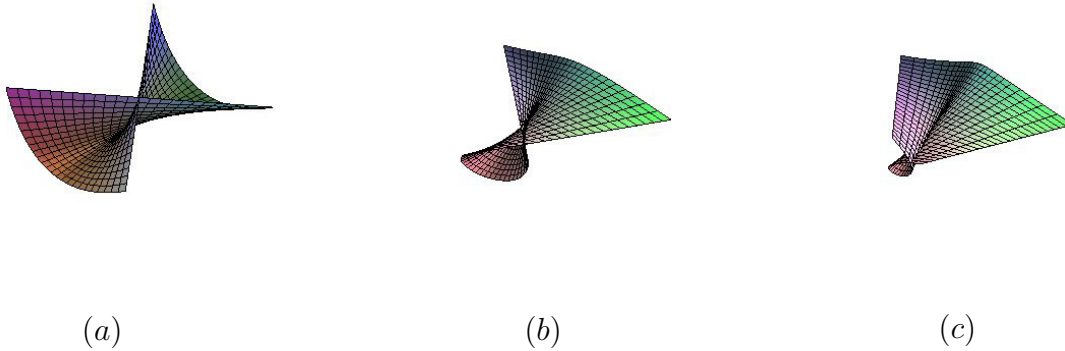


Figura 3.2: Deformação isométrica do cross cap padrão, com  $k_g = 0$  (a),  $k_g = 1$  (b) e  $k_g = 3$  (c).

## 3.4 Invariantes Extrínsecos e Intrínsecos do Cross Cap

Usando a existência de deformações isométricas não triviais de cross caps quadráticos degenerados, podemos demonstrar que os invariantes  $a_{12}$ ,  $a_{03}$  e  $b_3$  são extrínsecos. Para provarmos este resultado, faremos uso das fórmulas de Frenet para curvas na esfera, como apresentado na Subseção 3.3.1.

**Teorema 3.2.** *Existe uma deformação isométrica de uma singularidade cross cap tal que esta deformação modifica os três invariantes  $a_{12}$ ,  $a_{03}$  e  $b_3$ , ou seja, esses invariantes são extrínsecos.*

**Demonstração:** Para provarmos o resultado, basta exibirmos uma deformação isométrica que altera os invariantes citados acima. Para isso, tome uma curva esférica  $c(s)$ , parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , de modo que

$$c(0) = (1, 0, 0), \quad \frac{dc}{ds}(0) = \frac{1}{\sqrt{1 + a_{11}^2}}(0, 1, a_{11}).$$

Fazendo  $\mathbf{e} = c'$  e  $\mathbf{n} = c \times \mathbf{e}$ , temos que as fórmulas de Frenet para  $c(s)$  são dadas por

$$\begin{cases} c'(s) = \mathbf{e} \\ \mathbf{e}'(s) = \kappa_g(s)\mathbf{n}(s) - c(s) \\ \mathbf{n}'(s) = -\kappa_g(s)\mathbf{e}(s), \end{cases}$$

onde  $\kappa_g(s)$  é a curvatura geodésica de  $c$  em  $c(s)$ . Dada esta curva  $c(s)$ , considere o cross cap  $f = f_c$ , como no Teorema 3.1. A expansão em Taylor de  $f$  é dada por

$$\begin{aligned} f(u, v) = & f(0, 0) + uf_u(0, 0) + vf_v(0, 0) + uvf_{uv}(0, 0) + \\ & + \frac{u^2}{2}f_{uu}(0, 0) + \frac{v^2}{2}f_{vv}(0, 0) + \frac{u^3}{6}f_{uuu}(0, 0) + \frac{v^3}{6}f_{vvv}(0, 0) + \\ & + \frac{1}{2}u^2vf_{uuv}(0, 0) + \frac{1}{2}uv^2f_{uvv}(0, 0) + O(u, v)^4. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Um cálculo simples mostra que  $f$  e suas derivadas em  $(0, 0)$  são:

- $f(0, 0) = f_v(0, 0) = f_{uu}(0, 0) = f_{uuu}(0, 0) = f_{uuv}(0, 0) = 0$ ,
- $f_u(0, 0) = (1, 0, 0)$ ,
- $f_{uv}(0, 0) = (0, 1, a_{11})$ ,
- $f_{vv}(0, 0) = (0, 0, a_{02})$ ,
- $f_{uuv}(0, 0) = \kappa_g(0)\sqrt{1 + a_{11}^2}(0, -a_{11}, 1)$ ,
- $f_{vvv}(0, 0) = -2a_{02}\kappa_g(0)\sqrt{1 + a_{11}^2}(0, 1, 0)$ .

Substituindo esses valores em (3.6), obtemos

$$\begin{aligned} f(u, v) = & \left( u, uv, a_{11}uv + \frac{1}{2}a_{02}v^2 \right) + \\ & + \frac{\kappa_g(0)\sqrt{1 + a_{11}^2}}{6} (0, -3a_{11}uv^2 - 2a_{02}v^3, 3uv^2) + O(u, v)^4. \end{aligned} \quad (3.7)$$



Fazendo a mudança de parâmetros  $v = w + \frac{1}{2}a_{11}\kappa_g(0)\sqrt{1+a_{11}^2}w^2$ , (3.7) pode ser reescrita como

$$f(u, w) = \left( u, uw, a_{11}uw + \frac{1}{2}a_{02}w^2 \right) + \frac{\kappa_g(0)\sqrt{1+a_{11}^2}}{6} (0, -2a_{02}w^3, 3(1+a_{11}^2)uw^2 + 3a_{11}a_{02}w^3) + O(u, w)^4.$$

Assim,  $(u, w)$  forma um sistema canônico de coordenadas até os termos de terceira ordem.

Logo, os coeficientes  $a_{12}$ ,  $a_{03}$  e  $b_3$  podem ser expressos da seguinte forma:

$$a_{12} = \kappa_g(0)(1+a_{11}^2)^{3/2}, \quad a_{03} = 3a_{02}a_{11}\kappa_g(0)\sqrt{1+a_{11}^2},$$

$$b_3 = -2a_{02}\kappa_g(0)\sqrt{1+a_{11}^2}.$$

Portanto, os invariantes  $a_{12}$ ,  $a_{03}$  e  $b_3$  são extrínsecos, já que dependem do valor da curvatura geodésica  $\kappa_g(0)$ . ■

Do Teorema 3.2, temos que os invariantes  $a_{12}$ ,  $a_{03}$  e  $b_3$  do cross cap são extrínsecos. O objetivo agora é mostrar que os invariantes  $a_{02}$ ,  $a_{20}$  e  $a_{11}$  do cross cap são intrínsecos, ou seja, estes invariantes só dependem dos coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas.

**Definição 3.5.** *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma aplicação suave possuindo uma singularidade cross cap em  $(0, 0)$ . Um sistema de coordenadas locais  $(u, v)$  centrado em  $(0, 0)$  é dito **admissível** se satisfaz  $f_v(0, 0) = 0$ .*

**Observação 3.1.** 1) *O sistema canônico de coordenadas do cross cap é um sistema de coordenadas admissível.*

2) *O conceito de sistema de coordenadas admissível é intrínseco.*

Em contraste com o Teorema 3.2, temos o resultado a seguir.

**Teorema 3.3.** *Os coeficientes  $a_{02}$ ,  $a_{20}$  e  $a_{11}$  são invariantes intrínsecos do cross cap.*

**Demonstração:** Seja  $(0, 0)$  uma singularidade cross cap de uma aplicação suave

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto f(u, v),$$

onde  $(u, v)$  é um sistema de coordenadas admissível. Sem perda de generalidade, aplicando a mudança de coordenadas  $(u, v) \mapsto (-u, -v)$  caso necessário, podemos assumir que

$$[f_u, f_{uv}, f_{vv}] > 0,$$

onde

$$[a, b, c] := \det(a, b, c) = (a \times b) \cdot c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}^3).$$

Assim, para  $(u, v) = (0, 0)$ , afirmamos que

$$a_{02} = \frac{\|f_u\| \|f_u \times f_{vv}\|^3}{[f_u, f_{uv}, f_{vv}]^2}, \quad (3.8)$$

$$a_{20} = \frac{\|f_u \times f_{vv}\|}{4\|f_u\|^3 [f_u, f_{uv}, f_{vv}]^2} ([f_u, f_{uu}, f_{vv}]^2 + 4[f_u, f_{uv}, f_{vv}][f_u, f_{uv}, f_{uu}]), \quad (3.9)$$

$$a_{11} = \frac{1}{2\|f_u\| [f_u, f_{uv}, f_{vv}]^2} \left( 2[f_u, f_{uv}, f_{vv}] \det \begin{pmatrix} f_u \cdot f_u & f_u \cdot f_{uv} \\ f_{vv} \cdot f_u & f_{vv} \cdot f_{uv} \end{pmatrix} - \right. \quad (3.10)$$

$$\left. - \|f_u \times f_{vv}\|^2 [f_u, f_{uu}, f_{vv}] \right).$$

De fato, podemos provar estas igualdades da seguinte maneira. Note que os lados direitos destas igualdades não dependem da escolha do sistema de coordenadas admissível. Desta forma, essas identidades podem ser diretamente verificadas com  $f$  como em (3.1), o qual é dado por um sistema de coordenadas canônico.

Considere  $E = f_u \cdot f_u$ ,  $F = f_u \cdot f_v$  e  $G = f_v \cdot f_v$  os coeficientes da métrica induzida do cross cap. A fim de concluir a prova do teorema, é suficiente mostrarmos que os lados direitos das igualdades (3.8), (3.9) e (3.10) podem ser escritos em termos de  $E$ ,  $F$  e  $G$  e suas derivadas em  $(0, 0)$ , ou seja, que os coeficientes  $a_{02}$ ,  $a_{11}$  e  $a_{20}$  são intrínsecos. Primeiramente, mostremos que  $a_{02}$  é intrínseco. Como  $f_v(0, 0) = 0$ , então, em  $(u, v) = (0, 0)$ , é fácil ver que

$$f_u \cdot f_{uv} = F_u, \quad f_u \cdot f_{vv} = F_v,$$

$$f_{uv} \cdot f_{uv} = \frac{G_{uu}}{2}, \quad f_{uv} \cdot f_{vv} = \frac{G_{uv}}{2}, \quad f_{vv} \cdot f_{vv} = \frac{G_{vv}}{2}.$$

Logo, usando essas relações,

$$\begin{aligned} [f_u, f_{uv}, f_{vv}]^2 &= \det \left( \begin{pmatrix} f_u \\ f_{uv} \\ f_{vv} \end{pmatrix} (f_u, f_{uv}, f_{vv}) \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} f_u \cdot f_u & f_u \cdot f_{uv} & f_u \cdot f_{vv} \\ f_u \cdot f_{uv} & f_{uv} \cdot f_{uv} & f_{uv} \cdot f_{vv} \\ f_u \cdot f_{vv} & f_{uv} \cdot f_{vv} & f_{vv} \cdot f_{vv} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} E & F_u & F_v \\ F_u & \frac{G_{uu}}{2} & \frac{G_{uv}}{2} \\ F_v & \frac{G_{uv}}{2} & \frac{G_{vv}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como

$$\begin{aligned} \|f_u\|^2 &= E \quad e \\ \|f_u \times f_{vv}\|^2 &= (f_u \cdot f_u)(f_{vv} \cdot f_{vv}) - (f_u \cdot f_{vv})^2 \\ &= \frac{EG_{vv}}{2} - (F_v)^2 \end{aligned}$$

em  $(u, v) = (0, 0)$ , temos que  $a_{02}$  pode ser reescrito da seguinte forma:

$$a_{02} = \frac{\sqrt{E} \left( \frac{EG_{vv}}{2} - F_v^2 \right)^{3/2}}{\det \begin{pmatrix} E & F_u & F_v \\ F_u & \frac{G_{uu}}{2} & \frac{G_{uv}}{2} \\ F_v & \frac{G_{uv}}{2} & \frac{G_{vv}}{2} \end{pmatrix}}.$$

De maneira análoga, para mostrar que  $a_{20}$  e  $a_{11}$  são intrínsecos, é suficiente mostrar que  $[f_u, f_{uu}, f_{vv}]$  e  $[f_u, f_{uv}, f_{uu}]$  são escritos em termos de  $E$ ,  $F$  e  $G$  e suas derivadas em  $(0, 0)$ . Antes disso, note que são válidas as relações abaixo em  $(u, v) = (0, 0)$ ,

$$f_u \cdot f_{uu} = \frac{E_u}{2}, \quad f_{uv} \cdot f_{uu} = F_{uu} - \frac{E_{uv}}{2}, \quad f_{vv} \cdot f_{uu} = F_{uv} - \frac{E_{vv}}{2}.$$

Assim, observamos que (3.11) implica que  $[f_u, f_{uu}, f_{vv}]$  é intrínseco, pois

$$\begin{aligned} [f_u, f_{uu}, f_{vv}] &= \frac{1}{[f_u, f_{uv}, f_{vv}]} \det \left( \begin{pmatrix} f_u \\ f_{uv} \\ f_{vv} \end{pmatrix} (f_u, f_{uu}, f_{vv}) \right) \\ &= \frac{1}{[f_u, f_{uv}, f_{vv}]} \det \begin{pmatrix} E & f_u \cdot f_{uu} & F_v \\ F_u & f_{uv} \cdot f_{uu} & \frac{G_{uv}}{2} \\ F_v & f_{vv} \cdot f_{uu} & \frac{G_{vv}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De forma análoga,  $[f_u, f_{uv}, f_{uu}]$  é intrínseco por causa da identidade

$$[f_u, f_{uv}, f_{uu}] = \frac{1}{[f_u, f_{uv}, f_{vv}]} \det \left( \begin{pmatrix} f_u \\ f_{uv} \\ f_{vv} \end{pmatrix} (f_u, f_{uv}, f_{uu}) \right).$$

Portanto, como  $a_{02}$ ,  $a_{11}$  e  $a_{20}$  são escritos em termos de  $E$ ,  $F$  e  $G$  e suas derivadas, temos que estes invariantes são intrínsecos. ■

**Corolário 3.1.** *A elipticidade, hiperbolicidade e parabolicidade de cross caps em  $\mathbb{R}^3$  são propriedades intrínsecas.*

**Demonstração:** Vimos no Capítulo 1 que um cross cap é elíptico se  $a_{20} > 0$ , hiperbólico se  $a_{20} < 0$  e parabólico se  $a_{20} = 0$ . Pelo Teorema 3.3,  $a_{20}$  é intrínseco, assim a elipticidade, hiperbolicidade e parabolicidade de cross caps também são propriedades intrínsecas. ■

Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto contendo a origem. Fixamos o cross cap

$$\begin{aligned} f : U &\rightarrow (\mathbb{R}^3, 0) \\ (u, v) &\mapsto f(u, v), \end{aligned}$$

onde  $(u, v)$  é um sistema de coordenadas admissíveis, isto é,  $(u, v) = (0, 0)$  é uma singularidade cross cap e  $f_v(0, 0) = 0$ . Chamamos a reta

$$\{f(0, 0) + tf_u(0, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

de **reta tangente** ao cross cap e ainda, um vetor não nulo em  $\mathbb{R}^3$  proporcional a  $f_u(0, 0)$  é chamado de **direção tangente**.

**Definição 3.6.** *O plano passando por  $f(0, 0)$  gerado por  $f_u(0, 0)$  e  $f_{vv}(0, 0)$  é chamado de **plano principal**. Por outro lado, o plano passando por  $f(0, 0)$  perpendicular a direção tangente é chamado de **plano normal**.*

**Proposição 3.1.** *O vetor tangente à curva de pontos duplos (em  $\mathbb{R}^3$ ) em um ponto cross cap está contida no plano principal.*

**Demonstração:** Já que o plano principal é invariante sobre difeomorfismos em  $\mathbb{R}^3$ , esta afirmação pode ser facilmente verificada para o cross cap padrão.

**Definição 3.7.** *Um germe do cross cap  $f : U \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  é chamado **normal** se a curva de pontos duplos está contida na intersecção do plano normal com o plano principal.*

É fácil ver que os cross caps quadráticos são todos normais. A seguir apresentamos um critério para cross caps normais.

**Proposição 3.2.** *O germe de um cross cap analítico real é normal se, e somente se, todos os invariantes  $b_j$  ( $j = 3, 4, 5, \dots$ ) associados à forma normal (3.1) se anulam simultaneamente.*

**Demonstração:** Sem perda de generalidade, podemos assumir que um dado cross cap  $f$  tem uma expressão como em (3.1). Defina

$$\beta(v) := \sum_{i=3}^{\infty} \frac{b_i v^i}{i!}.$$

Como  $f$  é analítica real,  $\beta$  é uma função analítica. Se  $\beta$  é identicamente nula, então

$$f(0, v) = \left( 0, 0, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n v^n}{n!} \right).$$

Como  $a_{02} > 0$ ,

$$w := \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{0n}v^n}{n!}}$$

está bem definida e dá uma função analítica real. Trocando o sistema de coordenadas  $(u, v)$  por  $(u, w)$ , temos que

$$f(0, w) = (0, 0, w^2) = f(0, -w),$$

que implica que a curva de pontos duplos de  $f$  pertence ao eixo  $z$ , ou seja, a curva de pontos duplos está contida na intersecção do plano normal com o plano principal. Inversamente, assuma que o conjunto  $S$  da curva de pontos duplos pertença ao eixo  $z$ . Então, da primeira e segunda componentes de (3.1) segue que

$$u = 0, \quad uv + \beta(v) = 0,$$

ao longo de  $S$ . Assim, a curva de pontos duplos é parametrizada pelo eixo  $v$  e  $\beta(v)$  é identicamente nula, provando a afirmação. ■

Sabemos que  $a_{20}$  é um importante invariante intrínseco do cross cap, relacionado ao sinal da curvatura de Gauss. A seguinte proposição nos dá um significado geométrico para  $a_{20}$ .

**Proposição 3.3.** *A seção de um cross cap com seu plano principal contém uma curva regular  $\gamma$  cujo vetor velocidade é  $f_u(0, 0)$  e, então, a curvatura de  $\gamma$  (visto como uma curva plana) no ponto cross cap é igual a  $a_{20}$ , onde a orientação para o plano principal é tal que  $\{f_u(0, 0), f_{vv}(0, 0)\}$  tem orientação positiva.*

**Demonstração:** Basta ver que a curva plana obtida no plano principal é dada por

$$\gamma(u) = \left( u, \sum_n \frac{a_{n0}u^n}{n!} \right).$$

Desta forma, a curvatura de  $\gamma$  no ponto cross cap é dada por  $a_{20}$ . ■

Exibimos agora outros invariantes sob deformações isométricas dos cross caps. Em particular, o resultado seguinte mostra que certas quantidades permanecem inalteradas mesmo sob deformações isométricas de um cross cap.

**Proposição 3.4.** *As seguintes quantidades escritas em termos dos coeficientes da forma normal (3.1),*

$$a_{03} + \frac{3a_{11}b_3}{2}, \quad a_{12} + \frac{(1 + a_{11}^2)b_3}{2a_{02}}, \quad a_{21} - \frac{a_{11}a_{20}b_3}{6a_{02}}, \quad a_{30} - \frac{(1 + a_{11}^2)a_{20}b_3}{2a_{02}^2},$$

*são as mesmas para dois cross caps que possuem primeiras formas fundamentais iguais. Em particular, estas quantidades não se modificam sob deformações isométricas de um cross cap.*

**Demonstração:**

Sejam  $f_1$  e  $f_2$  dois cross caps com as seguintes formas normais, respectivamente:

$$f_0(u, v) = \left( u, uv + \frac{b_3}{3!}v^3, \sum_{r=2}^3 \sum_{j=0}^r \frac{a_{jr-j}}{j!(r-j)!} u^j v^{r-j} \right) + O(u, v)^4,$$

$$f_1(x, y) = \left( x, xy + \frac{B_3}{3!}y^3, \sum_{r=2}^3 \sum_{j=0}^r \frac{A_{jr-j}}{j!(r-j)!} x^j y^{r-j} \right) + O(x, y)^4,$$

Como  $(u, v)$  e  $(x, y)$  são ambos sistemas de coordenadas locais de  $\mathbb{R}^2$ , a aplicação  $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$  é um difeomorfismo. Como duas coordenadas dão a forma normal de  $f_0$  e  $f_1$ , podemos fixar

$$x_u(0, 0) = y_v(0, 0) = 1, \quad x_v(0, 0) = y_u(0, 0) = 0.$$

Queremos mostrar que as quantidades dadas no enunciado permanecem inalteradas para dois cross caps isométricos. Suponha então que  $f_0$  e  $f_1$  possuam a mesma primeira forma fundamental. Logo, como  $a_{02}$ ,  $a_{20}$  e  $a_{11}$  são intrínsecos (pelo Teorema 3.3), temos que

$$a_{20} = A_{20}, \quad a_{02} = A_{02}, \quad a_{11} = A_{11}.$$

Além disso, sendo

$$I_0 = E_0 du^2 + 2F_0 dudv + G_0 dv^2 \quad e$$

$$I_1 = E_1 dx^2 + 2F_1 dx dy + G_1 dy^2$$

as primeiras formas fundamentais de  $f_0$  e  $f_1$ , respectivamente, temos:

$$E_0 = E_1 x_u^2 + 2F_1 x_u y_u + G_1 y_u^2, \quad (3.12)$$

$$F_0 = E_1 x_u x_v + F_1 (x_u y_v - x_v y_u) + G_1 y_u y_v, \quad (3.13)$$

$$G_0 = E_1 x_v^2 + 2F_1 x_v y_v + G_1 y_v^2. \quad (3.14)$$

De fato, como  $(x, y) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ , segue que

$$dx^2 = x_u^2 du^2 + 2x_u x_v dudv + x_v^2 dv^2,$$

$$dx dy = x_u y_u du^2 + (x_u y_v + x_v y_u) dudv + x_v y_v dv^2,$$

$$dy^2 = y_u^2 du^2 + 2y_u y_v dudv + y_v^2 dv^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_1 &= E_1 (x_u^2 du^2 + 2x_u x_v dudv + x_v^2 dv^2) + 2F_1 (x_u y_u du^2 + (x_u y_v + x_v y_u) dudv + x_v y_v dv^2) + \\ &+ G_1 (y_u^2 du^2 + 2y_u y_v dudv + y_v^2 dv^2) \\ &= (E_1 x_u^2 + 2F_1 x_u y_u + G_1 y_u^2) du^2 + 2(E_1 x_u x_v + F_1 (x_u y_v - x_v y_u) + G_1 y_u y_v) dudv + \\ &+ (E_1 x_v^2 + 2F_1 x_v y_v + G_1 y_v^2) dv^2. \end{aligned}$$

Como  $I_0 = I_1$ , as igualdades (3.12), (3.13) e (3.14) seguem. Calculando agora os termos de primeira e segunda ordem da expansão em Taylor dos lados esquerdo e direito destas igualdades, chegamos às relações a seguir.

$$x_{uu}(0, 0) = x_{uv}(0, 0) = x_{vv}(0, 0) = 0,$$

$$x_{uuu}(0, 0) = x_{uuv}(0, 0) = x_{uvv}(0, 0) = x_{vvv}(0, 0) = 0.$$



Similarmente, calculando a expansão de Taylor das derivadas de terceira ordem

$$\frac{\partial^3}{\partial u^3}, \quad \frac{\partial^3}{\partial u^2 \partial v}, \quad \frac{\partial^3}{\partial v^3},$$

obtemos expressões explícitas para  $y_{uu}(0,0)$ ,  $y_{uv}(0,0)$ ,  $y_{vv}(0,0)$  e

$$a_{03} - A_{03}, \quad a_{12} - A_{12}, \quad a_{12} - A_{12}, \quad a_{30} - A_{30}$$

em termos de  $a_{02}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{20}$  e  $b_3 - B_3$ , o que finaliza a demonstração.

■

# Referências Bibliográficas

- [1] Banchoff, T., Gaffney, T., McCrory, C., *Cusps of Gauss mappings*, Research Notes in Maths, 55, Pitman, London (1982).
- [2] Bruce, J. W., *Geometry of singular sets*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 106, 495-509 (1989).
- [3] Bruce, J. W., Giblin, P. J., *Generic curves and surfaces*, J. London Math. Soc. (2) (1981).
- [4] Bruce, J. W., Giblin, P. J., *Curves and Singularities*, Cambridge University Press, Second edition (1992).
- [5] Bruce, J. W., West, J. M., *Functions on cross-caps*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 123, 19-39 (1998).
- [6] Fujimori, S., Saji, K., Umehara, M., Yamada, K., *Singularities of Maximal Surfaces*, Math. Z 259, 827-848 (2008).
- [7] Fukui, T., Hasegawa, M., *Height functions on Whitney umbrella - a differential geometric approach via blowing up*, J. Sing. 4, 35-67 (2012).
- [8] Fukui, T., Hasegawa, M., *Fronts of Whitney Umbrellas*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu 38 (2013).
- [9] Fukui, T., Nuño-Ballesteros, J. J., *Isolated roundings and flattenings of submanifolds in Euclidean spaces*, Tôhoku Math. J., 57, 469-503 (2005).
- [10] Garcia, R., Gutierrez, C., Sotomayor, J., *Lines of principal curvature around umbilics and Whitney umbrellas*, Tôhoku Math. J 52, 163-172 (2000).

- [11] Gibson, C. G., *Singular points of smooth mappings*, Research notes in math. 25, Pitman, London (1979).
- [12] Golubitsky M., Guillemin V., *Stability of smooth mapping and their singularities*, Springer-Verlag (1973).
- [13] Hasegawa, M., Honda, A., Naokawa, K., Umehara, M., Yamada, K., *Intrinsic invariants of cross caps*, Springer Basel (2013).
- [14] Nuño-Ballesteros, J. J., Tari, F., *Surfaces in  $\mathbb{R}^4$  and their projections to 3-spaces*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 137, 1313-1328 (2007).
- [15] Porteous, I. R., *The normal singularities of a submanifold*, Jour. Diff. Geom., 5, 543-564 (1971).
- [16] Tari, F., *Singularidades de Aplicações Diferenciáveis*, Notas didáticas, ICMC-USP (1999).
- [17] Tari, F., *Pairs of geometric foliations on a cross-cap*, Tôhoku Math. J 59, 233-258 (2007).
- [18] West, J. M., *The differential geometry of the Crosscap*, Ph. D. thesis, The University of Liverpool (1995).
- [19] Whitney, H., *The singularities of smooth  $n$ -manifolds into  $(2n - 1)$ -space*, Annals of Math, 45, 247-293 (1944).