

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA

**Uma Estratégia de Controle  
Multi-Modelo LQG/LTR Aplicada a  
um Sistema Não Linear de Levitação  
Magnética**

Luiz Felipe Pugliese

Itajubá, Fevereiro de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA

Luiz Felipe Pugliese

# Uma Estratégia de Controle Multi-Modelo LQG/LTR Aplicada a um Sistema Não Linear de Levitação Magnética

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciência em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Automação e Sistemas Elétricos Industriais

Orientador: Prof. Dr. Luís Henrique de Carvalho Ferreira

Co-Orientador: Prof. Dr. Jeremias Barbosa Machado

Fevereiro de 2015  
Itajubá - MG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA

Luiz Felipe Pugliese

**Uma Estratégia de Controle  
Multi-Modelo LQG/LTR Aplicada a  
um Sistema Não Linear de Levitação  
Magnética**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 11 de  
Fevereiro de 2015, conferindo ao autor o título de **Mestre em  
Ciência em Engenharia Elétrica**

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Luís Henrique de Carvalho Ferreira - UNIFEI

Prof. Dr. Jeremias Barbosa Machado - UNIFEI

Prof. Dr. Paulo César Rosa - UNIFEI

Prof. Dr. Carlos Alberto Murari Pinheiro - UNIFEI

**Fevereiro de 2015**

**Itajubá - MG**

# *Agradecimentos*

Agradeço primeiramente a Deus, que de alguma forma me abençoou para que eu chegasse a mais essa conquista.

Agradeço aos meus pais por toda dedicação que tiveram e, principalmente, por todo sacrifício que fizeram para que eu obtivesse sucesso em tudo de bom que ocorreu em minha vida. Sem eles não seria ninguém.

Aos meus amigos e irmãos da República LAHMA que sempre estiveram ao meu lado. Nos momentos bons e principalmente nos momentos difíceis. Por todo incentivo e apoio que me deram desde 2008 quando ingressei nessa família.

Agradeço também aos professores, Prof. Dr. Luís Henrique de Carvalho Ferreira e Prof. Dr. Jeremias Barbosa Machado por todo apoio, ajuda, orientação, auxílio e discussões sobre o trabalho que me deram durante esses dois anos.

Por fim, agradeço à CAPES e ao CNPq pelo auxílio financeiro que me foi concedido. Agradeço também à FAPEMIG pois este trabalho foi financiado em parte pela fundação, concessão APQ-01951-12. Assim, o trabalho pode ser realizado de maneira que todos os ensaios e estudos pudessem ser concluídos e comprovados.

# *Resumo*

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de uma nova estratégia de controle multi-modelo para aplicações em plantas não lineares. Realiza-se a união da metodologia clássica, com o desenvolvimento de controladores LQG/LTR em tempo discreto, junto à metodologia inteligente, através da lógica *Fuzzy*, de forma a obter como resultado um controlador híbrido que consiga driblar o problema da não linearidade existente em sistemas dinâmicos.

Neste contexto, este trabalho apresenta uma estratégia de expandir a planta de processo por integradores *backward* Euler e, a partir da dinâmica da planta em malha aberta expandida, desenvolver e ajustar controladores multi-modelos LQG/LTR em tempo discreto e realizar a união destes via lógica *Fuzzy* para obter um controlador não linear global que atue na planta não linear de um sistema de levitação magnética.

O objetivo do controlador não linear global proposto é ser capaz de rejeitar distúrbios, bem como manter o rastreamento do sistema para diferentes pontos de operação, usando a solução de controle multi-modelo LQG/LTR em tempo discreto unido a lógica *Fuzzy*.

Para validação e comprovação da nova parametrização desenvolvida, foram realizadas simulações e ensaios práticos em um aparelho de levitação magnética da empresa canadense Quanser.

**Palavras-Chave:** Controle multi-modelo LQG/LTR em tempo discreto, levitação magnética, expansão da dinâmica de uma planta, sistemas não lineares, lógica *Fuzzy*.

# *Abstract*

This work presents the development of a new multi-model control strategy for applications in nonlinear plants. It holds the union of classical methods, with the development of controllers LQG/LTR in discrete-time, along with an intelligent method, by Fuzzy logic, in order to obtain as a result a hybrid controller that can contour the problem of non-linearity existing in dynamic systems.

In this context, this work presents a strategy to expand the process plant for integrators backward Euler and from the dynamics of the plant in open loop expanded, develop and adjust controllers LQG/LTR in discrete time multi-model and make the union of these by Fuzzy logic for obtain a global nonlinear controller that operates in a nonlinear plant of magnetic levitation system.

The objective of the proposed global nonlinear controller is being able to reject disturbances, as well as keep track of the system for different operating points, using the solution multi-model control LQG/LTR discrete time united Fuzzy logic.

For validation and verification of newly developed parameter were performed simulations and practical tests on a magnetic levitation device of the Canadian company Quanser.

**Keywords:** Control multi-model LQG/LTR in discrete time, magnetic levitation, the dynamic expansion of a plant, nonlinear systems, Fuzzy logic

# *Sumário*

<b>Lista de Símbolos</b>	p. 7
<b>Lista de Figuras</b>	p. 9
<b>Lista de Tabelas</b>	p. 11
<b>1 Introdução</b>	p. 12
1.1 Considerações Gerais . . . . .	p. 12
1.2 Justificativas . . . . .	p. 14
1.3 Objetivos . . . . .	p. 15
1.4 Estrutura do Trabalho . . . . .	p. 15
<b>2 Revisão Bibliográfica</b>	p. 17
2.1 Consideração Inicial . . . . .	p. 17
2.2 A Técnica LQG/LTR em Tempo Discreto . . . . .	p. 17
2.2.1 Controle LQG/LTR . . . . .	p. 17
2.2.2 O método LQG/LTR em Tempo Discreto . . . . .	p. 18
2.2.3 Expansão da Dinâmica de uma Planta . . . . .	p. 21
2.2.4 Parametrização da Malha Objetivo . . . . .	p. 22
2.3 Sistemas Multi-modelos . . . . .	p. 24
2.4 Sistemas <i>Fuzzy</i> . . . . .	p. 25
2.4.1 Introdução aos Conjuntos <i>Fuzzy</i> . . . . .	p. 25
2.4.2 Modelo <i>Fuzzy</i> Takagi-Sugeno . . . . .	p. 28

2.5	Consideração Final . . . . .	p. 30
<b>3</b>	<b>LQG/LTR em Tempo Discreto com Multimodelo/Fuzzy</b>	<b>p. 31</b>
3.1	Considerações Gerais . . . . .	p. 31
3.2	Desenvolvimento dos Controladores LQG/LTR em Tempo Discreto Locais	p. 32
3.3	Desenvolvimento do Controlador Não Linear por Lógica <i>Fuzzy</i> . . . . .	p. 35
3.4	Consideração Final . . . . .	p. 38
<b>4</b>	<b>Aplicação no Levitador Magnético</b>	<b>p. 40</b>
4.1	Considerações Gerais . . . . .	p. 40
4.2	Modelagem e equacionamento do MAGLEV . . . . .	p. 40
4.2.1	Modelo de Levitação . . . . .	p. 42
4.2.2	Modelo Linearizado de Levitação . . . . .	p. 43
4.3	Linearização e Determinação da Função de Transferência em Tempo Discreto . . . . .	p. 45
4.4	Expansão da Dinâmica de uma Planta e Determinação dos Controladores Locais . . . . .	p. 50
4.5	Desenvolvimento do Controlador Global . . . . .	p. 54
4.6	Simulações e Ensaios . . . . .	p. 55
4.7	Consideração Final . . . . .	p. 62
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>p. 63</b>
5.1	Contribuições . . . . .	p. 64
5.2	Trabalhos Futuros . . . . .	p. 64
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>p. 66</b>
	<b>Apêndice A – Algoritmo para Implementação das Regras <i>Fuzzy</i></b>	<b>p. 71</b>
	<b>Apêndice B – Artigo Publicado no MAGLEV 2014</b>	<b>p. 72</b>

## *Lista de Símbolos*

$\triangleq$	Igual por definição
$:=$	Definição
$\frac{s}{=}$	Transformada de Laplace
'	Matriz transposta
*	Matriz complexo-conjugada transposta
$-1$	Matriz inversa
$L_c$	Indutância da bobina
$R_c$	Resistência da bobina
$R_s$	Resistência sensor de corrente
$V_s$	Tensão utilizada para medir a corrente da bobina
$V_c$	Tensão aplicada sobre a bobina
$I_c$	Corrente da bobina
$K_c$	Ganho DC
$\tau_c$	Constante de tempo
$F_c$	Força eletromagnética
$K_m$	Constante da força eletromagnética
$x_b$	Posição da esfera de aço
$g$	Constante gravitacional
$F_g$	Força da gravidade
$M_b$	Massa da esfera de aço
$F_{ext}$	Força externa total
$i_{c0}$	Corrente nominal da bobina
$x_{b0}$	Posição nominal da esfera de aço
$\delta x_b$	Perturbação na posição
$\delta i_c$	Perturbação na corrente
$K_b$	Ganho DC
$\omega_b$	Frequência natural de oscilação
$x$	Vetor de estados

$u$	Vetor de entradas de comando
$y$	Vetor de saídas medidas da planta
$w_x$	Ruídos Gaussianos na entrada
$w_y$	Ruídos Gaussianos na saída
$z_x$	Variável auxiliar do vetor de estados
$z_u$	Variável auxiliar do vetor de entradas
$A, B, C, D$	Variáveis de estado da planta G
$K$	Controlador admissível
$K_c$	Matriz de ganhos da retroação de estados
$K_f$	Matriz de ganhos do observador de estados
$X$	Matriz solução da retroação de estados
$Y$	Matriz solução do observador de estados
$\rho$	Parâmetro escalar da retroação de estados
$H$	Parâmetro matricial da retroação de estados
$\mu$	Parâmetro escalar do observador de estados
$L$	Parâmetro matricial do observador de estados
$S$	Função de sensibilidade
$T$	Função de rastreamento
$I$	Matriz identidade
$\sigma_{max}$	Limites de desempenho
$G_p$	Planta G de processo

## *Lista de Figuras*

1.1	Levitador Magnético. . . . .	p. 14
2.1	Sistemas Conectados em Série. . . . .	p. 21
2.2	Funções de Pertinência Trapezoidal. . . . .	p. 27
3.1	Controlador Global . . . . .	p. 36
3.2	União dos Controladores Locais . . . . .	p. 37
3.3	Funções de Pertinência <i>Fuzzy</i> . . . . .	p. 37
4.1	Esquema da Planta do Levitador Magnético [1]. . . . .	p. 41
4.2	Funções de Pertinência <i>Fuzzy</i> . . . . .	p. 54
4.3	Diagrama para Distúrbio na Posição da Esfera. . . . .	p. 56
4.4	Simulação do Distúrbio de 0,50 [mm] na Posição da Esfera. . . . .	p. 56
4.5	Ensaio Real do Distúrbio de 0,50 [mm] na Posição da Esfera. . . . .	p. 56
4.6	Diagrama para Variação na Referência da Posição da Esfera. . . . .	p. 57
4.7	Simulação da Variação de $\pm 0,25$ [mm] na Referência da Posição da Esfera. . . . .	p. 57
4.8	Ensaio Real da Variação de $\pm 0,25$ [mm] na Referência da Posição da Esfera. . . . .	p. 58
4.9	Diagrama para Atuação do Controlador <i>Fuzzy</i> . . . . .	p. 58
4.10	Simulação da Variação Repetida na Referência da Posição da Esfera. . . . .	p. 59
4.11	Ensaio Prático da Variação Repetida na Referência da Posição da Esfera. . . . .	p. 59
4.12	Simulação Referente a Degraus de 1,00 [mm] na Referência da Posição da Esfera . . . . .	p. 60
4.13	Ensaio Prático Referente a Degraus de 1,00 [mm] na Referência da Posição da Esfera . . . . .	p. 60

4.14 Simulação da Variação de 7,00 [mm] na Referência da Posição da Esfera p. 61

4.15 Ensaio Prático da Variação de 7,00 [mm] na Referência da Posição da Esfera . . . . . p. 61

## *Lista de Tabelas*

4.1	Pontos de operação. . . . .	p. 45
4.2	Funções de transferência $G(s)$ . . . . .	p. 46

# 1 *Introdução*

## 1.1 Considerações Gerais

O princípio de recuperação da malha objetivo (*Loop Transfer Recovery - LTR*) foi desenvolvido originalmente por Kwakernaak [2] e Doyle and Stein [3] para o tempo contínuo. É um procedimento sistemático para a aplicação do controle LQG (*Linear Quadratic Gaussian*) que permite recuperar as propriedades dinâmicas do filtro de Kalman como comportamento global da malha de controle. Posteriormente, a técnica teve sua aplicação estendida também para o tempo discreto [4, 5].

Além de fornecer boas características de robustez e sensibilidade devido a recuperação das propriedades do filtro de Kalman, o princípio de recuperação da malha objetivo simplifica o procedimento de projeto LQG. O controle LQG/LTR requer apenas a especificação do par de matrizes do observador de estados, o que reduz consideravelmente o esforço de projeto. Embora desenvolvido nos anos 80, algumas aplicações recentes em diferentes áreas confirmam as vantagens da utilização dessa técnica [6, 7, 8].

Em Athans [9], foi sugerida a expansão de uma planta por integradores e, a partir do particionamento conveniente de um dos parâmetros de projeto, foi mostrado como realizar a escolha dos parâmetros no controle LQG/LTR de modo que os valores singulares da sensibilidade e da sensibilidade complementar da malha de controle apresente os formatos desejados em frequências extremas (baixas e altas). Baseado nessa ideia, foram desenvolvidos também procedimentos que permitem atribuir o formato desejado em todas as frequências [10] e que permitem generalizar a expansão de uma planta por um sistema de primeira ordem qualquer [11].

No caso contínuo, o integrador é definido unicamente por um polo na origem. No caso discreto, a definição do integrador depende do método numérico utilizado na aproximação da integral. Nesse contexto, [12] apresenta uma discussão sobre algumas particularidades da expansão da dinâmica de uma planta por integradores no controle LQG/LTR

específicas do caso discreto. Além disso, é proposta uma nova parametrização da malha objetivo para a planta expandida que resulta em bom desempenho na análise de sensibilidade mista, com propriedades semelhantes às do caso contínuo. Essa nova proposta de parametrização da malha objetivo, permite uma recuperação exata da malha de controle de forma que para um sistema linear o controle LQG/LTR se apresenta muito eficaz e assim tem-se a curiosidade em saber, se para sistemas não lineares, a eficácia do controle LQG/LTR também apresenta sucesso em sua aplicação.

Uma técnica que permite trabalhar com não linearidades é a chamada multi-modelos, de forma que o sistema não linear global é representado pela combinação de diversos outros sistemas lineares mais simples, locais. Dessa maneira, estudos podem ser realizados sobre os sistemas locais e assim obter uma estratégia que realiza uma união das soluções locais obtendo resultados significativos que irão também, atuar sobre o sistema não linear global de forma a manter os resultados significativos. O trabalho de Foss [13] afirma que modelos locais, aos quais chamou de modelos baseados nos regimes de operações, podem ser usados como medidas para o processo de modelagem em torno da região abrangida pelas condições de operação dos modelos locais. Smith-Murray e Johansen [14] generalizaram a ideia de Foss [13] com o conceito básico de representar um sistema não linear como a combinação de sistemas lineares em que técnicas clássicas de controle podiam ser aplicadas. Multi-modelos seriam, então, a ideia de combinar vários modelos simples de forma que sua combinação forme um modelo mais complexo.

No âmbito da busca constante por técnicas com características que atendam cada vez mais as crescentes necessidades da indústria, a mistura de técnicas vem sendo utilizada como artifício para novos desenvolvimentos. De forma que utilizando-se da união entre os métodos de controle clássicos com a inteligência artificial, uma nova abordagem híbrida de controle pode ser desenvolvida. Esta técnica, ao se firmar diante da sociedade acadêmica, abre espaço para novas pesquisas e também influencia o surgimento de novas abordagens [15].

Nesse contexto, tem-se o objeto de estudo que é a ideia de utilizar um sistema de controle *Fuzzy* multi-modelos junto a técnica de controle LQG/LTR em tempo discreto para realizar o controle sobre sistemas não lineares. Vale ressaltar que não será realizado um estudo sobre a análise de estabilidade da estratégia. Para validação do controlador proposto, tem-se a planta MAGLEV, que é uma suspensão eletromagnética atuando em um objeto ou dispositivo metálico. O sistema de levitação magnética é composto por um eletroímã, localizado na parte superior do dispositivo (Figura 1.1), capaz de levantar uma

esfera de aço sólida e manter uma folga entre a esfera e a sua base através do campo magnético fornecido pelo eletroímã. O sistema apresenta duas variáveis diretamente medidas que são, a corrente de bobina e a distância da esfera de aço a partir da base do eletroímã [1].



Figura 1.1: Levitador Magnético.

A fim de controlar a posição da esfera de aço é necessário controlar a tensão através da corrente elétrica aplicada à bobina eletromagnética. Diversas técnicas de controle podem ser aplicadas para tal finalidade, por exemplo, técnicas de controle PID ou controle robustos [16].

## 1.2 Justificativas

Na metodologia LQG/LTR, acrescentar integradores “livres” em cada canal da planta de controle, ajuda o projetista a definir uma malha objetivo com boas características de desempenho na análise de sensibilidade mista. No entanto, devido às condições específicas do caso em tempo discreto, o método de integração utilizado em expandir uma planta pode inviabilizar a aplicação do princípio de recuperação da malha objetivo [12].

Neste contexto, os integradores *backward* Euler [17] são utilizados para expandir a dinâmica de um sistema linear em malha aberta e, a partir da dinâmica expandida, um

controlador LQG/LTR em tempo discreto é desenvolvido localmente. A fim de implementar um sistema de controle não linear, diferentes controladores locais são desenvolvidos e dessa forma tem-se um sistema multi-modelos, composto por diferentes modelos lineares locais. Para contornar o problema da não linearidade presente em sistemas não lineares, tem-se a união dos multi-modelos lineares locais representados pelos controladores LQG/LTR em tempo discreto, via lógica *Fuzzy*. Dessa forma, espera-se obter resultados significativos de controle sobre a planta não linear global.

### 1.3 Objetivos

Partindo-se de problemas como a não linearidade de sistemas dinâmicos, uma das formas de contornar este tipo de problema é realizar uma linearização do modelo não linear em um ponto de operação do sistema. A partir do modelo linear, apresenta-se uma estratégia de expandir a planta de processo por integradores *backward* Euler, desenvolver e ajustar um controlador LQG/LTR em tempo discreto utilizando uma nova parametrização da malha objetivo [12].

O sistema não linear multi-modelos pode ser representado por diferentes modelos lineares e conseqüentemente diferentes controladores locais podem ser desenvolvidos para atuar sobre os respectivos modelos. Após se desenvolver todos os diferentes controladores locais para o sistema multi-modelos de um sistema não linear, realiza-se a união desses controladores locais através de um processo de inferência *Fuzzy*. Essa união fará com que o sistema não linear global seja controlado de forma eficaz.

Dessa forma, o controlador global proposto, deve ser capaz de realizar uma rejeição de distúrbios que possam ocorrer na saída da planta, assim como, manter o rastreamento de forma eficaz, para um sistema não linear.

### 1.4 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, sendo um de introdução, um de conclusão e os demais referentes ao desenvolvimento do trabalho.

O Capítulo 2 traz uma revisão bibliográfica realizada sobre os temas abordados durante o trabalho. Esses temas são a técnica de controle LQG/LTR, sistemas multi-modelos e lógica *Fuzzy*.

O Capítulo 3 trata sobre a técnica de controle LQG/LTR em tempo discreto utilizada em sistemas multi-modelos com auxílio da lógica *Fuzzy*, de forma a explicar todo o trabalho desenvolvido e a técnica híbrida de controle multi-modelos desenvolvida.

No Capítulo 4 são realizados o desenvolvimento, simulações e os ensaios práticos referentes à aplicação da nova estratégia de controle desenvolvida por este trabalho. Realizam-se distúrbios no sistema bem como variações em sua referência de entrada e assim, tem-se os resultados da ação do controlador sobre um modelo linear do processo utilizado para o estudo. Também realizaram-se simulações e ensaios práticos no modelo não linear com uma varredura em uma ampla faixa de operação de diferentes posições devido a ação de um controlador global associado a nova estratégia de controle desenvolvida.

O Capítulo 5 é dedicado às conclusões do trabalho e possíveis projetos para trabalhos futuros.

## 2 *Revisão Bibliográfica*

### 2.1 **Consideração Inicial**

Com o objetivo do trabalho definido, será realizada uma revisão bibliográfica dos temas utilizados no estudo e desenvolvimento de todo o trabalho. Primeiramente, o assunto que será tratado é referente ao controle LQG/LTR de forma que a abordagem em tempo discreto será explorada junto a uma expansão da planta de processo por integradores *backward* Euler. A partir da planta expandida, obter uma recuperação exata da malha objetivo para que dessa maneira, uma parametrização possa ser realizada e controladores lineares locais possam ser desenvolvidos.

Outro assunto a ser abordado neste capítulo, serão os sistemas compostos por multi-modelos, de forma que os diferentes controladores lineares locais desenvolvidos, representam os diferentes pontos de operação escolhidos da planta de processo e dessa forma tem-se diferentes modelos lineares para a representação do sistema global não linear.

Por fim, o último tema abordado irá tratar sobre sistemas *Fuzzy* em particular o modelo Takagi-Sugeno o qual será utilizado para realizar a união de todos os controladores lineares locais. Consequentemente, um controlador global é desenvolvido e este é capaz de atuar sobre a planta de processo não linear global de forma a obter um único controlador atuando sobre a planta não linear.

### 2.2 **A Técnica LQG/LTR em Tempo Discreto**

#### 2.2.1 **Controle LQG/LTR**

O Regulador Linear Quadrático (LQR - *Linear Quadratic Regulator*) e o Filtro de Kalman podem ser combinados para projetar um regulador dinâmico, o LQG. Sabe-se que o controlador LQR possui ótimas propriedades de robustez [18], ou seja, margem de ganho infinita e margem de fase de 60 graus, desde que os métodos para obtenção

do controlador e do estimador sejam duais. O Projeto do Filtro de Kalman pode ser visto como o de um sistema com realimentação. Pode-se concluir que o Filtro de Kalman também possui ótimas propriedades de robustez.

Uma vez que tanto o Regulador Linear Quadrático como o Filtro de Kalman exibem boa robustez, era esperado que o controlador LQG resultante da interconexão entre eles também apresentasse as mesmas propriedades. Entretanto, a inclusão do Filtro de Kalman pode resultar em degradação das propriedades do LQR, de forma que no projeto LQG as propriedades de robustez não são garantidas [19]. A metodologia de projeto LTR, por meio da qual estas propriedades de robustez podem ser recuperadas é formada de dois passos: no primeiro, define-se a chamada malha objetivo (*Target Feedback Loop*) e, no segundo, através de um procedimento assintótico, recuperam-se as características de resposta em frequência dessa malha ajustando um determinado parâmetro [2, 3, 20, 21].

A recuperação do ganho de malha de realimentação na saída ajusta o ganho do Filtro de Kalman e, em seguida, considera constante o ganho LQR de tal forma que as propriedades do LQR sejam recuperadas. É importante destacar que tem-se a fixação do ganho do controlador, assim como das matrizes de covariâncias da perturbação no estado e do ruído de medidas iniciais, para recuperação das propriedades de robustez [22].

### 2.2.2 O método LQG/LTR em Tempo Discreto

Esta seção apresenta uma revisão teórica sobre o controle LQG/LTR em tempo discreto. Um sistema dinâmico discreto linear e invariante no tempo pode ser representado em variáveis de estado como segue

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Lw_x(k) \quad (2.1a)$$

$$y(k) = Cx(k) + \mu I w_y(k) \quad (2.1b)$$

$$z_x(k) = Hx(k) \quad (2.1c)$$

$$z_u(k) = \rho I u(k) , \quad (2.1d)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estados,  $u \in \mathbb{R}^m$  representa o vetor de entradas de comando e  $y \in \mathbb{R}^m$  representa o vetor de saídas medidas da planta. No problema típico do controle LQG os sinais  $w_x$  e  $w_z$  representam, respectivamente, os ruídos Gaussianos na entrada e na saída da planta. Os sinais  $z_x$  e  $z_u$  são variáveis auxiliares de resposta relacionadas com o critério de desempenho. As matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $C \in$

$\mathbb{R}^{m \times n}$  constituem a representação em variáveis de estado de uma planta de processo  $G = (A, B, C, 0)$  que pode ser escrita como

$$G(z) := \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right], \quad (2.2)$$

em que o par de matrizes  $(A, B)$  e  $(A, C)$  são, respectivamente, controlável e observável. A planta  $G(z)$  também pode ser representada pela seguinte função de transferência

$$G(z) = C\Phi(z)B \quad (2.3)$$

com

$$\Phi(z) = (zI - A)^{-1}. \quad (2.4)$$

O tempo para o processamento de controle é considerado desprezível ao compará-lo com o intervalo entre as medições das variáveis da planta. Dessa forma, um estimador de estados corrente pode ser usado, ou seja, o sinal de controle  $u(k)$  pode depender das medidas até  $y(k)$ . A representação em espaço de estados do controlador  $K(z)$  é dada por

$$\frac{K(z)}{z} := \left[ \begin{array}{c|c} \frac{(A - BK_c)(I - K_f C)}{K_c} & K_f \\ \hline & 0 \end{array} \right]. \quad (2.5)$$

Em que,  $K_c$  e  $K_f$  são, respectivamente os ganhos do regulador e do observador de estados, calculados por [12]

$$K_c = (\rho^2 I + B'XB)^{-1}B'XA, \quad (2.6)$$

$$K_f = YC'(\mu^2 I + CYC')^{-1}, \quad (2.7)$$

$X$  e  $Y$  são as matrizes simétricas soluções das seguintes equações algébricas de Riccati

$$A'XA - X - A'XB(\rho^2 I + B'XB)^{-1}B'XA + H'H = 0, \quad (2.8)$$

$$A'YA - Y - AY C'(\mu^2 I + CYC')^{-1}CYA' + LL' = 0. \quad (2.9)$$

Particularizando para o controle LQG/LTR, pode-se considerar que  $G(z)$  é de fase mínima e o posto da matriz  $CB$  é igual a  $m$ . É importante notar que o posto da matriz  $CB$  ser igual a  $m$  é uma restrição exclusiva do controle LQG/LTR no domínio discreto, não havendo condições iguais para o domínio contínuo.

Os ganhos do regulador de estados  $K_c$  são projetados de modo que a função de transferência em malha aberta  $G(z)K(z)$  seja igual a  $C\Phi(z)AK_f$ . Assumindo que  $w_x, w_y$  e  $z_x, z_u$  são, respectivamente, entradas e saídas fictícias. Os parâmetros  $\rho, H, \mu$  e  $L$  podem ser escolhidos de forma livre para fazer com que o sistema apresente as características desejadas.

Se a matriz  $H$  for escolhida de forma a ser igual a matriz  $C$ , e o escalar  $\rho$  for escolhido com valor igual a zero, a matriz de ganhos do regulador de estados é dada por [4]

$$K_c = (CB)^{-1}CA, \quad (2.10)$$

e, conseqüentemente, a função de transferência em malha aberta é dada por

$$G(z)K(z) = C\Phi(z)AK_f. \quad (2.11)$$

Dessa forma tem-se uma recuperação exata da malha objetivo do sistema. Quando o tempo de processamento do sinal de controle é considerável e não pode ser desprezado, utiliza-se um estimador preditivo, no qual o sinal  $u(k)$  pode depender apenas das medições das saídas até  $y(k-1)$ . No caso da utilização do estimador preditivo, a recuperação da malha objetivo do sistema ocorre apenas de maneira aproximada [23].

Como o parâmetro  $\rho$  deve ser igual a zero e a matriz  $H$  deve ser igual a matriz  $C$  para que a recuperação da malha objetivo do sistema ocorra, os parâmetros que estão livres para a especificação da malha objetivo são o escalar  $\mu$  e a matriz  $L$ . A equação (2.9) pode ser reescrita como a Identidade de Kalman para o observador de estados, que é dado por [24]

$$(I + C\Phi(z)AK_f)(I + \mu^{-2}CYC')(I + C\Phi(z)AK_f)^* = I + \mu^{-2}C\Phi(z)L[C\Phi(z)L]^* \quad (2.12)$$

em que  $*$  denota matriz complexo-conjugada transposta.

A função de sensibilidade  $S(z)$  e a função de sensibilidade complementar ou rastreamento  $T(z)$  são definidas como

$$S(z) = (I + G(z)K(z))^{-1}, \quad (2.13)$$

$$T(z) = G(z)K(z)(I + G(z)K(z))^{-1}. \quad (2.14)$$

a partir das equações (2.13) e (2.14), os limites do desempenho no controle LQG/LTR em tempo discreto em termos das funções de sensibilidade e rastreamento são dados por

$$\sigma_{max}(S(z)) \leq 1 + \varepsilon \quad (2.15)$$

$$\sigma_{max}(T(z)) \leq 2 + \varepsilon \quad (2.16)$$

$$\sigma_{max}(S(z)) \leq \mu(1 + \varepsilon)\sigma_{max}((C\Phi(z)L)^{-1}) \quad (2.17)$$

em que,

$$\varepsilon = \mu^{-1} \sqrt{\lambda_{max}(CYC')} \quad (2.18)$$

é um escalar não negativo, uma vez que a matriz  $Y$  é positiva semi-definida e, portanto, o máximo autovalor da matriz  $CYC'$  é não negativo.

O controle LQG/LTR em tempo discreto apresenta características de desempenho semelhantes às do controle LQG/LTR em tempo contínuo na análise de sensibilidade mista, as quais são degeneradas em função do escalar  $\varepsilon$ . É possível observar que quanto menor a taxa de amostragem, menor será o valor do escalar  $\varepsilon$ , aproximando-se a resposta em frequência do sistema discreto à do sistema contínuo [12].

### 2.2.3 Expansão da Dinâmica de uma Planta

Considere dois sistemas dinâmicos com representações em variáveis de estados  $G_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1)$  e  $G_2 = (A_2, B_2, C_2, D_2)$  conectados em série como mostra a Figura 2.1.



Figura 2.1: Sistemas Conectados em Série.

Essa conexão pode ser representada como  $G_2G_1 = (A, B, C, D)$ , representação em espaço de estados dado por

$$G_2G_1 = \left[ \begin{array}{cc|c} A_2 & B_2C_1 & B_2D_1 \\ 0 & A_1 & B_1 \\ \hline C_2 & D_2C_1 & D_2D_1 \end{array} \right]. \quad (2.19)$$

Considere que  $G_2$  é uma representação em tempo discreto de uma planta de processo estritamente própria descrita em espaço de estados por  $G_2 = (A_p, B_p, C_p, 0)$ , com tempo de amostragem  $T$ . Se  $G_1$  é um integrador dado por

$$G_1 = T \frac{z}{z-1} I, \quad (2.20)$$

correspondente ao método *backward* Euler, com representação em espaço de estados dada por  $G_1 = (I, TI, I, IT)$ , sendo  $I$  a matriz identidade. O produto entre  $G_2G_1$  é representado em espaço de estados por

$$G_2G_1 = \left[ \begin{array}{cc|c} A_p & B_p & TB_p \\ 0 & I & TI \\ \hline C_p & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (2.21)$$

Para essa abordagem, tem-se que o posto da matriz  $CB$  do produto entre  $G_2G_1$  é igual ao posto da matriz  $C_pB_p$  da planta de processo,

$$\text{posto}(CB) = \text{posto}(C_pB_p), \quad (2.22)$$

condição essa, necessária para a aplicação do controle LQG/LTR em tempo discreto.

Conclui-se que a expansão de uma planta por integradores obtidos com o método *forward* Euler inviabiliza a aplicação do controle LQG/LTR em tempo discreto pois a utilização deste método faz com que o posto da matriz  $CB$  seja igual a zero. O integrador *backward* Euler, por sua vez, não modifica o posto da matriz  $CB$  da planta de processo expandida e, portanto, pode ser utilizado para a aplicação do método [12].

A expansão do sistema por um integrador, leva a uma melhor formatação da malha objetivo, além de permitir que a dinâmica expandida pela entrada seja incorporada à dinâmica do controlador. Para o controlador, a expansão pela entrada faz com que, agora, a planta que é resultado do produto de  $G_2G_1$  seja a dinâmica do polo expandido acrescido da dinâmica da planta de processo  $G_p(s)$  [11].

## 2.2.4 Parametrização da Malha Objetivo

Se a função de transferência  $C\Phi(z)L$  é igual a uma matriz de integradores, por consequência de (2.17), o limitante da função de sensibilidade é relacionado ao comportamento do inverso de um integrador. Dessa forma, em baixas frequências o seu valor

singular máximo será pequeno e irá aumentar a uma taxa de 20 [dB/dec], resultando em ótimas performances de desempenho no que diz respeito ao acompanhamento de sinais de referência e de rejeição a distúrbios [16].

Baseado nessa ideia, a matriz  $L$  pode ser particionada em duas submatrizes [9] como segue

$$L = \begin{bmatrix} L_H \\ L_L \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

em que a matriz  $L_L$  influencia o comportamento do sistema em baixas frequências e a matriz  $L_H$  influencia o comportamento do sistema em altas frequências.

Assim, para uma planta de processos  $G_p = (A_p, B_p, C_p, 0)$  expandida por integradores pela entrada, a matriz de transferência  $C\Phi(z)L$  apresenta o seguinte formato

$$C\Phi(z)L = \left[ \begin{array}{cc|c} A_p & B_p & L_H \\ 0 & I & L_L \\ \hline C_p & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (2.24)$$

ou de forma alternativa,

$$C\Phi(z)L = \frac{C_p(zI - A_p)^{-1}B_p}{z-1}L_L + C_p(zI - A_p)^{-1}L_H. \quad (2.25)$$

Esse particionamento proposto em [9] também é válido para o sistema discreto, uma vez que, o termo da equação associado ao termo  $L_L$  captura o comportamento em baixas frequências e o segundo termo representa o comportamento em altas frequências pois está associado ao termo  $L_H$ .

A parametrização da matriz  $L$  proposta em [12] obtida por um procedimento análogo ao apresentado em [11] apresenta a seguinte forma

$$\begin{bmatrix} L_H \\ L_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(A_p - I)^{-1}B_p W \\ W \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

com  $W = -T(C_p(A_p I)^{-1}B_p)^{-1}$ . Ao substituir (2.26) na equação (2.25), pode-se mostrar que, depois de algumas manipulações algébricas a função de transferência  $C\Phi(z)L$  resulta em

$$C\Phi(z)L = T \frac{1}{z-1} I. \quad (2.27)$$

Na planta de processo expandida usando a técnica *backward* Euler, a função de transferência  $C\Phi(z)L$  é feita igual a uma matriz de transferência de integradores *forward* Euler. Dessa forma, o integrador *forward* Euler não pode ser utilizado para a expansão de uma planta por não satisfazer a condição relacionada com o posto da matriz  $CB$ , mas é favorável a recuperar como dinâmica da função  $C\Phi(z)L$  por se tratar de um sistema estritamente próprio. Com a matriz  $L$  dada na equação (2.26), o limite para a função de sensibilidade pode ser reescrito como

$$\sigma_{max}(S(e^{j\omega T})) \leq \mu(1+\varepsilon) \frac{2}{T} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right). \quad (2.28)$$

Assim, ajustando o tempo de amostragem para um valor adequado, de modo que o seno para ângulos pequenos seja válido, os limites do desempenho do controle LQG/LTR em tempo discreto, também podem ser reescritos de uma maneira simplificada como

$$\sigma_{max}(S(e^{j\omega T})) \leq \mu(1+\varepsilon) \min(\mu\omega, 1), \quad (2.29)$$

$$\sigma_{max}(T(e^{j\omega T})) \leq 2 + \varepsilon, \quad (2.30)$$

facilitando a análise das propriedades de sensibilidade mista da malha de controle de forma que o comportamento desejado seja obtido [12].

## 2.3 Sistemas Multi-modelos

Os sistemas multi-modelos têm sido usados largamente na engenharia com aplicações em modelagem [25, 26, 27], estimação de estados [28, 29, 30], e controle de sistemas não lineares [31, 32, 33, 34, 35]. A estratégia com multi-modelos pode ser descrita resumidamente como, definir alguns modelos correspondendo a pontos de operação distintos do sistema complexo. Pois consegue-se representar um sistema não linear através da união de diferentes modelos mais simples, lineares. Cada ponto de operação fornece um modelo do sistema não linear global e assim a ideia de multi-modelos surge devido a união desses diferentes modelos lineares.

A classificação dos sistemas multi-modelos pode corresponder à mesma aplicada aos controladores que utilizam a mesma técnica [32]: modelo clássico ou modelo inteligente.

No modelo do tipo clássico, os modelos são selecionados através de um chaveamento. Então, de acordo com este critério, o modelo com menor erro em relação ao processo é escolhido, ou seja, o chaveamento é usado para determinar o modelo mais próximo ao processo naquele instante. Para os modelos do tipo inteligente, o mecanismo de definição do modelo mais adequado pode ser baseado em lógica *Fuzzy*. Outros métodos podem ser classificados como inteligentes, já que a grande distinção entre os tipos clássicos e inteligentes está no fato do primeiro chavear em busca do modelo mais apropriado, enquanto que os inteligentes realizam a interpolação de modelos e encontram uma combinação ótima que pode ser, inclusive, a escolha de um único modelo [15].

A utilização de controladores multi-modelos é uma alternativa interessante para resolver os problemas onde o processo é invariante no tempo. Nesta abordagem resolve-se o problema de controle levando em conta todos os possíveis modelos lineares do processo [36]. Assim, a partir dessa ideia, é possível determinar diferentes controladores para as regiões locais do sistema multi-modelos de forma que os controladores locais atuem sobre a planta global não linear e consiga obter bons resultados.

## 2.4 Sistemas *Fuzzy*

Seres humanos são capazes de lidar com processos complexos baseados em informações vagas, em que estas podem ser expressas em termos linguísticos. A teoria dos conjuntos *Fuzzy* foi desenvolvida a partir de 1965 por Lotfali Zadeh, para tratar aspecto vago da informação [37]. Esta teoria pode ser utilizada para traduzir em termos matemáticos informações vagas ou imprecisas [38].

Neste trabalho, os conjuntos *Fuzzy* serão utilizados para determinar um sinal de controle global, a partir de sinais de controladores LQG/LTR em tempo discreto consequentes dos modelos lineares locais que representam o sistema não linear global. Os modelos *Fuzzy* apresentam a característica de descrever sistemas de forma aproximada, porém com precisão arbitrária, ou seja, como aproximadores universais de funções numa região compacta, apresentando a capacidade de mapear de forma eficiente relações de entrada e saída de sistemas em geral [39, 40].

### 2.4.1 Introdução aos Conjuntos *Fuzzy*

Um conjunto *Fuzzy* é definido como um conjunto de objetos em que o grau de pertinência pode pertencer ao intervalo contínuo entre 0 e 1,  $I = [0, 1]$ , ao contrário dos

conjuntos ordinários em que o elemento pertence ou não pertence ao conjunto  $\{0,1\}$ . Formalmente, um conjunto  $A$  do universo de discurso  $U$  é definido por uma função de pertinência  $\mu_A$  que mapeia os elementos do universo de discurso no intervalo contínuo  $[0,1]$ .

$$\mu_A : U \rightarrow [0,1] \quad (2.31)$$

Neste contexto, a função  $\mu_A(x)$  indica com que grau o elemento  $x$  pertence ao conjunto  $A$ , ou seja, o grau de compatibilidade entre  $x$  e o conceito expresso por  $A$ , como apresentado em [37]:

- $\mu_A(x) = 1$  indica que  $x$  é completamente compatível com  $A$ ;
- $\mu_A(x) = 0$  indica que  $x$  é completamente incompatível com  $A$ ;
- $0 < \mu_A(x) < 1$  indica que  $x$  é parcialmente compatível a  $A$ , com grau  $\mu_A(x)$ ;

O conceito de variável linguística é fundamental quando se trabalha com conjuntos *Fuzzy*. Uma variável linguística  $T(u)$  em um universo de discurso  $U$  é definida em um conjunto de termos, nomes ou terminologias, podendo assumir um valor linguístico dentre vários outros, em um conjunto de termos linguísticos. Por exemplo, sendo  $u$  velocidade, o conjunto de termos  $T(u)$  poderia ser formado por  $T(\text{velocidade}) = \text{muito baixa, baixa, media, rápida, muito rápida}$  [41].

Por definição, função de pertinência é uma função numérica gráfica ou tabulada, que atribui valores de pertinência *Fuzzy* para valores de uma variável em seu universo de discurso. As funções mais utilizadas na literatura são funções trapezoidais, triangulares, gaussianas ou ainda do tipo *singleton* [41, 42]. A Figura 2.2 mostra um exemplo de funções de pertinência trapezoidal.

Em sistemas *Fuzzy*, a conversão das grandezas do mundo real provenientes de sensores industriais, sistemas computadorizados ou até mesmo de outras etapas do sistema de controle para números *Fuzzy* é chamada de *fuzzyficação*.

A Inferência em sistemas *Fuzzy* consiste em avaliar um conjunto de regras, conhecido como base de conhecimento, que descrevem a dependência entre as variáveis linguísticas de entrada e saída do sistema. Os antecedentes das regras *Fuzzy* possuem uma estrutura geral da forma:

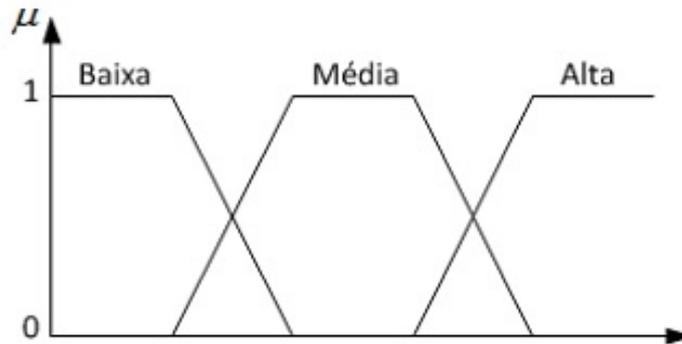


Figura 2.2: Funções de Pertinência Trapezoidal.

Se  $x_1$  é  $A_{1,1}$  e  $x_2$  é  $A_{1,2}$  ... e  $x_d$  é  $A_{1,d}$

Se  $x_1$  é  $A_{2,1}$  e  $x_2$  é  $A_{2,2}$  ... e  $x_d$  é  $A_{2,d}$

⋮

Se  $x_1$  é  $A_{k,1}$  e  $x_2$  é  $A_{k,2}$  ... e  $x_d$  é  $A_{k,d}$

sendo  $x_1, \dots, x_d$  as entradas do sistema e  $A_{1,1}, \dots, A_{k,d}$  os termos linguísticos dessas variáveis definidos como funções de pertinência, que cobrem todo o universo de discurso [42].

As regras de sistemas *Fuzzy* são ativadas em paralelo, ou seja, quando uma entrada é fornecida, ela aciona várias regras com diferentes graus de ativação para inferir um resultado ou uma saída. A tradução da combinação das diferentes regras ativadas é conhecida como *defuzzyficação*. Dentre os métodos mais utilizados para *defuzzyficação* pode-se citar o método do centro de área, o método da média dos máximos e o método do centro dos máximos [37, 41, 42].

Os diferentes tipos de estruturas *Fuzzy* encontradas na literatura são os modelos clássicos de Mandami e o de Larsen e os modelos de interpolação formados pelos modelos de Takagi-Sugeno e Tsukamoto [37]. É de especial interesse neste trabalho o modelo introduzido por Takagi-Sugeno (1985), que na literatura referente à modelagem *Fuzzy*, é conhecido como modelo Takagi-Sugeno (TS).

### 2.4.2 Modelo *Fuzzy* Takagi-Sugeno

O modelo *Fuzzy* Takagi-Sugeno (TS) consiste em um sistema de inferência capaz de descrever, de forma exata ou aproximada, sistemas dinâmicos não lineares por meio de um conjunto de sistemas dinâmicos lineares, localmente válidos, interpolados de forma suave, não linear e convexa. Em termos de modelagem, sabe-se que os modelos TS têm a capacidade de aproximar uniformemente funções quaisquer em um domínio compacto [43, 44, 45, 46]. Em outras palavras, modelos TS têm a capacidade de aproximação universal.

Além disso, uma vantagem sobre outros modelos *Fuzzy* é o fato dos consequentes serem modelos matemáticos, representados por sistemas dinâmicos, demandando uma menor quantidade de regras *IF-THEN*, o que facilita substancialmente a tarefa de identificação de modelos [47]. Sob o ponto de vista de controle, modelos TS permitem conciliar técnicas de controle não linear e, ao mesmo tempo, estender de forma rigorosa resultados da teoria de controle de sistemas lineares [48].

Considere um sistema dinâmico não linear a tempo discreto, descrito pelas equações a seguir:

$$x_{k+1} = f(x_k) + g(u_k) \quad (2.32)$$

$$y_k = h(x_k) \quad (2.33)$$

sendo  $x_k \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados;  $u_k \in \mathbb{R}^m$  o vetor de entradas;  $y_k \in \mathbb{R}^q$  a saída medida; o período de amostragem entre  $x_{k+1}$  e  $x_k$  é dado por  $\Delta t$ .

O modelo TS de um sistema não linear é dado por um conjunto de regras *IF-THEN*

$$R_i : \begin{cases} \text{Se} & q_k^1 \text{ é } \Phi_1^i \text{ E } q_k^2 \text{ é } \Phi_2^i \text{ E } \dots \text{ E } q_k^s \text{ é } \Phi_s^i \\ \text{Então} & x_{k+1} = A_i x_k + B_i u_k \text{ e } y_k = C_i x_k \end{cases} \quad (2.34)$$

tal que  $R_i$ ,  $i \in \mathbb{R}$ , denota a  $i$ -ésima regra *Fuzzy*. Na regra  $R_i$  as variáveis linguísticas são representadas por  $\Phi_j^i$ ,  $j \in S$ ;  $q_k^j \in Q$ ,  $j \in S$ , denotam as variáveis premissas avaliadas no instante  $k$ ;  $Q$  é o universo de discurso;  $A_i$ ,  $B_i$  e  $C_i$  são matrizes reais de dimensão apropriada, representando o modelo local da regra  $R_i$ .

As variáveis premissas podem ser funções de estados, distúrbios externos ou condições de operação. Em geral, as variáveis premissas não são funções do vetor de entradas para evitar um processo complicado para *defuzzificação* de controladores *Fuzzy* [45]. Para

simplicar a notação, as variáveis premissas são agrupadas no vetor

$$q_k = [q_k^1 \ q_k^2 \ \dots \ q_k^s]. \quad (2.35)$$

Na premissa das regras, avalia-se o grau de compatibilidade da  $q_k^j$  aos respectivos conjuntos *Fuzzy* das variáveis linguísticas  $\Phi_j^i$ , obtendo-se graus de pertinência  $\mu_j^i(q_k^j)$ . O grau de ativação do antecedente da regra  $R_i$  é dado por

$$w_i[q_k] = \prod_{j=1}^s \mu_j^i(q_k^j). \quad (2.36)$$

Portanto, a norma-t adotada para determinar o grau de ativação do antecedente é o produto algébrico das pertinências. Vale ressaltar que é necessário que ao menos uma regra do modelo esteja ativa, garantindo as seguintes propriedades

$$w_i[q_k] \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r w_i[q_k] > 0. \quad (2.37)$$

O conseqüente induzido por cada regra  $R_i$  é uma ponderação do modelo local

$$\text{conseqüente induzido } i \begin{cases} w_i[q_k](A_i x_k + B_i u_k) \\ w_i[q_k]C_i x_k \end{cases} \quad (2.38)$$

A etapa de agregação é simplesmente dada pela média ponderada das regras. Assim o modelo TS é dado por

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r h_i[q_k](A_i x_k + B_i u_k) \quad (2.39)$$

$$y_k = \sum_{i=1}^r h_i[q_k]C_i x_k, \quad (2.40)$$

sendo que a ponderação normalizada de cada regra é dada por

$$h_i[q_k] = \frac{w_i[q_k]}{\sum_{i=1}^r w_i[q_k]} \quad (2.41)$$

que satisfaz a propriedade de combinação convexa

$$\sum_{i=1}^r h_i[q_k] = 1, \quad h_i(q_k) \geq 0 \quad \forall i \in R. \quad (2.42)$$

Portanto, o modelo TS busca modelar a dinâmica não linear em (2.32) e (2.33) por meio da interpolação de modelos dinâmicos lineares. Como as funções de pertinência, geralmente, são não lineares e possuem derivadas contínuas [45], o modelo resultante é uma combinação convexa de modelos locais que é suave e não linear.

Basicamente, as etapas necessárias para identificar um modelo TS são: seleção de entradas relevantes; escolha da estrutura do modelo, que envolve determinar quantidade de regras, tipo de funções de pertinência e tipo de consequente; e estimação de parâmetros, das funções de pertinência e dos consequentes [49].

## 2.5 Consideração Final

A partir do problema proposto, com o objetivo do trabalho bem definido junto a ideia para solução do problema do controle para sistemas não lineares, foi realizada uma revisão bibliográfica que apresenta todo conceito utilizado para construção e desenvolvimento da nova estratégia de controle LQG/LTR em tempo discreto para sistemas multi-modelos utilizando lógica *Fuzzy*.

Os assuntos abordados neste capítulo, são de suma importância para o desenvolvimento do trabalho. A seguir será apresentada a metodologia da nova estratégia de controle proposta, a qual, será utilizada para contornar o problema de sistemas não lineares.

## 3 *LQG/LTR em Tempo Discreto com Multimodelo/Fuzzy*

### 3.1 Considerações Gerais

Este capítulo trata do desenvolvimento da nova estratégia de controle híbrida multi-modelo realizada pela união do controle LQG/LTR em tempo discreto com a lógica *Fuzzy* para tomada de decisão sobre sistemas não lineares.

A partir da modelagem de um processo de um sistema não linear, nsete exemplo, tem-se a equação diferencial que representa este sistema. Essa equação diferencial pode ser linearizada para um ponto de operação desejado de forma que neste ponto tem-se a representação dinâmica do sistema dada por uma função de transferência. Sendo assim, propõe-se o desenvolvimento de controladores LQG/LTR em tempo discreto para cada função de transferência obtida com a linearização da equação do sistema não linear.

Dessa maneira, é possível obter um controlador não linear a partir da combinação de controladores locais sintonizados com base nos modelos locais linearizados em alguns pontos de operação. Esta estratégia de controle será utilizada neste trabalho com o objetivo de se obter um controlador LQG/LTR em tempo discreto não linear. Para realizar a combinação dos controladores locais faz-se o uso de um modelo *Fuzzy* TS onde os consequentes das regras são compostos pelos controladores locais e suas respectivas ações de controle.

Para alcançar resultados relevantes, após o seu desenvolvimento, o controlador híbrido multi-modelo, desenvolvido pela união do controle LQG/LTR em tempo discreto junto a lógica *Fuzzy*, deve cumprir seu objetivo de manter a rejeição de distúrbios bem como sua rastreabilidade para diferentes pontos de operação desejados.

## 3.2 Desenvolvimento dos Controladores LQG/LTR em Tempo Discreto Locais

Seja de um sistema não linear de ordem  $n$  dado por

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (3.1)$$

$$y = g(x, u) \quad (3.2)$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados;  $u \in \mathbb{R}^m$  o vetor de entradas;  $y \in \mathbb{R}^p$  o vetor de saídas;  $f(x, u) \in \mathbb{R}^n$  o vetor de funções não lineares que descreve a dinâmica do sistema;  $g(x, u) \in \mathbb{R}^p$  o vetor de funções não lineares que descreve a saída do sistema.

O vetor de funções da dinâmica dos estados é dado de forma mais detalhada como

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x, u) \\ \dot{x}_2 = f_2(x, u) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x, u) \end{cases}, \quad (3.3)$$

e o vetor de funções da saída é dado de forma mais detalhado como

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x, u) \\ y_2 = g_2(x, u) \\ \vdots \\ y_n = g_n(x, u) \end{cases}. \quad (3.4)$$

A partir do sistema não linear, pode-se realizar uma linearização do sistema dinâmico não linear sobre um ponto nominal de operação. O ponto nominal de operação é definido por um vetor de estado nominal representado por  $x_0$ , por um vetor de entrada nominal representado por  $u_0$  e um vetor de saída nominal representado por  $y_0$ . De forma que pequenos desvios são definidos em torno da condição nominal de operação

$$\begin{cases} x = x_0 + \delta x \\ u = u_0 + \delta u \\ y = y_0 + \delta y \end{cases}. \quad (3.5)$$

O ponto nominal de operação nada mais é que o equilíbrio do sistema e pode ser

calculado por

$$\dot{x}_0 = f_0(x_0, u_0) \quad (3.6)$$

$$y_0 = g_0(x_0, u_0) \quad (3.7)$$

de maneira que o método para linearização da dinâmica é realizado por uma aproximação de Taylor de primeira ordem [50]. A partir do ponto nominal de operação  $(x_0, u_0)$  define-se

$$\Delta x = x - x_0 \quad (3.8)$$

$$\Delta u = u - u_0, \quad (3.9)$$

representando as variações em torno do ponto nominal de operação. Se essas variações são pequenas, pode-se obter uma aproximação de primeira ordem para  $f$  e  $g$  dada por

$$f(x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u) = f(x_0, u_0) + \left. \left( \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right) \right|_{x=x_0, u=u_0} (x - x_0) + \left. \left( \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right) \right|_{x=x_0, u=u_0} (u - u_0) \quad (3.10)$$

$$g(x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u) = g(x_0, u_0) + \left. \left( \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right) \right|_{x=x_0, u=u_0} (x - x_0) + \left. \left( \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \right) \right|_{x=x_0, u=u_0} (u - u_0). \quad (3.11)$$

Substituindo as equações (3.1), (3.2) nas equações (3.10) e (3.11) cancelando os termos de ordem zero tem-se que

$$\Delta \dot{x} = \left. \left( \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right) \right|_{x=x_0, u=u_0} \Delta x + \left. \left( \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right) \right|_{x=x_0, u=u_0} \Delta u \quad (3.12)$$

$$\Delta y = \left. \left( \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right) \right|_{x=x_0, u=u_0} \Delta x + \left. \left( \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \right) \right|_{x=x_0, u=u_0} \Delta u. \quad (3.13)$$

Por se tratar de um sistema não linear invariante no tempo, os jacobianos não variam no tempo, permitindo reescrever a equação linearizada em termos de matrizes constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$

$$\Delta \dot{x} = A\Delta x + B\Delta u \quad (3.14)$$

$$\Delta y = C\Delta x + D\Delta u. \quad (3.15)$$

Para um sistema estritamente próprio, a matriz D é nula.

Dessa forma, pode-se linearizar o sistema em torno de um ponto de operação desejado, obtendo diferentes modelos locais lineares que representam o sistema não linear global. Assim, pode-se aplicar ferramentas de análise linear para tratar o sistema linearizado. Em especial, obtém-se funções de transferência para tal sistema. Uma função de transferência  $G(s)$  é definida a partir das transformadas de Laplace da entrada e da saída como

$$G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)}, \quad (3.16)$$

de forma que as funções de transferências são calculadas para condições iniciais nulas.

A partir das funções de transferência de todos os modelos lineares locais encontrados, tem-se a representação de cada modelo, em variáveis de estados de forma que eles são dados por  $G_n = (A_n, B_n, C_n, 0)$  como mostra a equação (3.17), sendo  $A_n$ ,  $B_n$  e  $C_n$  matrizes de estados e  $n$  um número inteiro positivo que pode representar o ponto de operação escolhido.

$$G_n = \left[ \begin{array}{c|c} A_n & B_n \\ \hline C_n & 0 \end{array} \right]. \quad (3.17)$$

Após determinar as matrizes de estado para cada modelo linear desejado, tem-se a passagem de  $G_n(s)$  do domínio contínuo para o domínio discreto com um tempo de amostragem  $T$  de forma que a representação do modelo linear em variáveis de estados discreto terá a seguinte configuração,

$$G_{Dn} = \left[ \begin{array}{c|c} A_{Dn} & B_{Dn} \\ \hline C_{Dn} & 0 \end{array} \right]. \quad (3.18)$$

Com os modelos lineares locais discretizados, realiza-se uma expansão da dinâmica da planta de cada modelo por integradores *backward* Euler como visto na subseção (2.2.3). A expansão do sistema por um integrador pela entrada, apresenta uma melhor formatação da malha objetivo, além de permitir que a dinâmica da planta expandida seja incorporada à dinâmica do controlador.

Utiliza-se a canônica observável para a expansão da planta uma vez que as matrizes

$C$  e  $D$  dos modelos expandidos não se alteram e assim facilita o ajuste dos parâmetros no desenvolvimento dos controladores locais. Assim, após a expansão ser realizada, as matrizes de estados são representadas pela seguinte forma,

$$G_{en} = \left[ \begin{array}{c|c} A_{en} & B_{en} \\ \hline C_{en} & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} A_{Dn} & B_{Dn} & TB_{Dn} \\ 0 & I & TI \\ \hline C_{Dn} & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.19)$$

Uma vez que se tem todas as expansões realizadas para todas os pontos de operação escolhidos, é necessário especificar os parâmetros não fixos do controlador LQG/LTR em tempo discretos para assim obter as matrizes referentes aos controladores locais para cada ponto de operação. Como visto em (2.2.4), se o parâmetro  $H$  for igual a matriz  $C$  do sistema após a expansão, para que a recuperação da malha objetivo do sistema ocorra,  $\rho$  for igual a um número muito próximo de zero, os parâmetros livres são o escalar  $\mu$  e a matriz  $L$ . Assim, ajustando-se o escalar  $\mu$  e fazendo a matriz  $L$  ser igual a (2.26), pode-se obter para cada ponto de operação, o controlador local  $G_{cn}$  como segue,

$$G_{cn} = \left[ \begin{array}{c|c} A_{cn} & B_{cn} \\ \hline C_{cn} & D_{cn} \end{array} \right]. \quad (3.20)$$

Dessa maneira tem-se a determinação de todos os controladores para todos os modelos lineares locais obtidos.

### 3.3 Desenvolvimento do Controlador Não Linear por Lógica *Fuzzy*

Este trabalho tem como objetivo a elaboração de um sistema de controle não linear através do controlador multi-modelos utilizando a estratégia LQG/LTR em tempo discreto unidos por lógica *Fuzzy*. A utilização da lógica *Fuzzy*, deve-se ao fato de seus modelos serem aproximadores universais de funções em um espaço compacto [39, 40]. Os modelos *Fuzzy* TS permitem ainda, a composição do modelo global a partir de múltiplos modelos locais, favorecendo a interpretabilidade e projeto de controladores.

Com o desenvolvimento dos controladores locais para os pontos de operação desejados, pode-se realizar a união destes via lógica *Fuzzy* para que dessa forma, a aplicação deixe de ser local fazendo como que o sistema não linear seja controlado globalmente. Essa união

favorece a aplicação do controle híbrido multi-modelo em uma ampla faixa de operação, fazendo com que os controladores LQG/LTR em tempo discreto locais atuem sobre a planta de processo global através de um grau de pertinência dos controladores locais a cada região de operação.

Esse grau de pertinência é calculado por funções que representam as faixas de operação, e através de regras *IF-THEN* como visto em (2.4), o sinal de saída, que irá atuar sobre a planta de processo global não linear, é determinado. Uma malha de controle para atuação de um controlador global é determinada como mostra a Figura 3.1

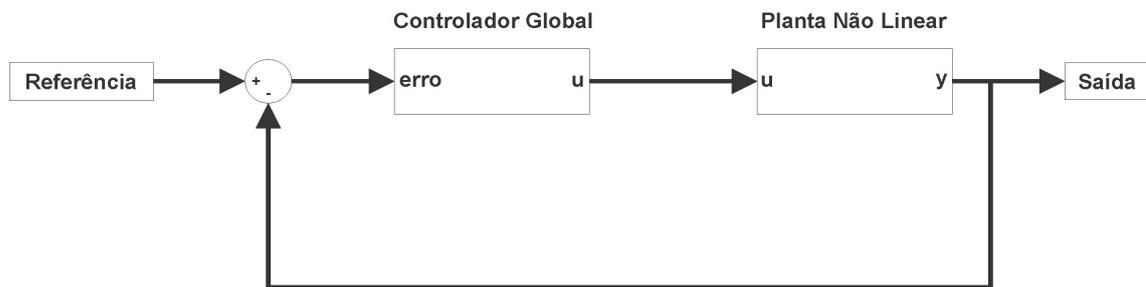


Figura 3.1: Controlador Global

Para a implementação da nova estratégia de controle proposta, o primeiro passo é obter os controladores LQG/LTR em tempo discreto para cada ponto de operação linearizado. Depois de obtido os controladores locais, é necessário escolher as regras *Fuzzy* do modelo TS que realizará a união de todos os controladores locais através das funções de pertinência *Fuzzy* desenvolvidas como mostram as Figuras 3.2 e 3.3.

A partir da Figura 3.2 percebe-se que cada controlador local gera um sinal de controle próprio que atuará melhor próximo ao seu ponto de operação. Já, a partir da Figura 3.3, percebe-se que cada sinal de controle local apresenta uma função de pertinência com um grau de pertinência  $\mu$  correspondente, de maneira que

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 \text{ terá um grau de pertinência } \mu_1 \\ u_2 \text{ terá um grau de pertinência } \mu_2 \\ u_3 \text{ terá um grau de pertinência } \mu_3 \\ \vdots \\ u_n \text{ terá um grau de pertinência } \mu_n \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Dessa maneira, dependendo da posição de referência que deseja-se rastrear, cada controlador local fornece um respectivo valor do sinal de controle representado por uma função  $u(k)$ , de maneira que a atuação do controlador local será representado pelo seu respectivo

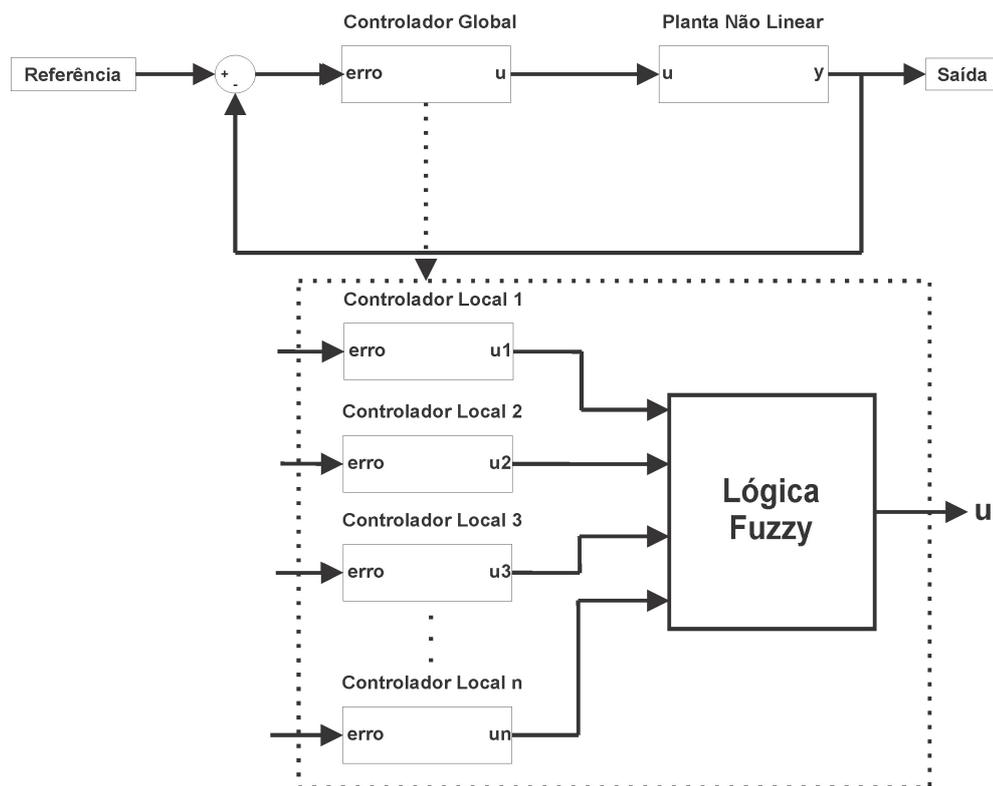
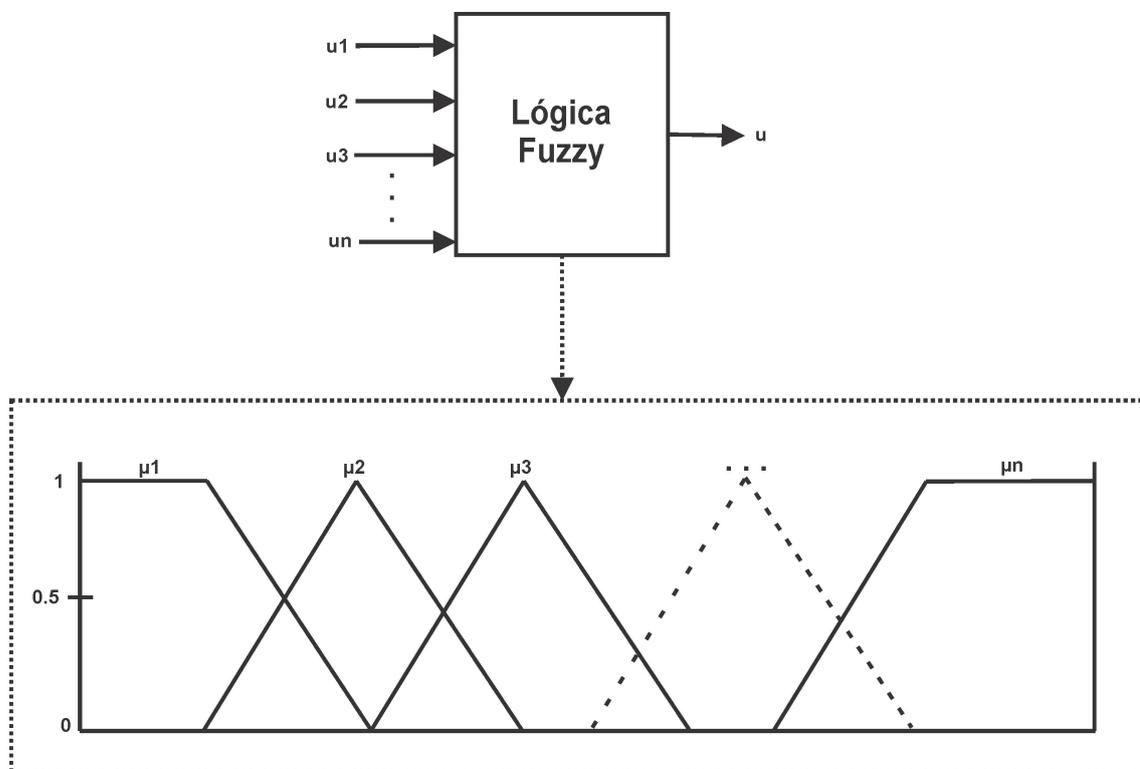


Figura 3.2: União dos Controladores Locais

Figura 3.3: Funções de Pertinência *Fuzzy*

grau de pertinência  $\mu$ , que serão utilizados para ativar as regras *Fuzzy*. Com a ativação das regras *Fuzzy* o cálculo do sinal de saída devido a ação das funções de pertinência é obtido.

Baseado na resposta do sistema a ser controlado e na saída dos modelos locais, os controladores lineares atuam sobre cada modelo local de maneira a corrigir a resposta de cada modelo isoladamente. A ação de controle global é obtida pela inferência *Fuzzy*, que no caso é uma combinação ponderada pelo modelo *Fuzzy* TS, das ações de cada controlador LQG/LTR em tempo discreto local. O sinal de controle global, excita a planta não linear de forma a atuar sobre a posição de referência. Desta forma, a ação de controle global é obtida através da equação

$$u = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i u_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i}, \quad (3.22)$$

em que  $\mu_i$  é o valor da ativação da  $i$ -ésima regra (modelo local),  $u_i$  a ação de controle determinada pelo  $i$ -ésimo controlador e  $i$  o número de modelos/controladores locais [42].

Assim, com a união de todos os controladores locais desenvolvidos, a partir dos modelos lineares junto a lógica *Fuzzy* implementada através de regras *IF-THEN*, um sinal de saída é obtido e este atuará na planta de processo não linear de forma a manter a saída do processo seguindo a entrada estabelecida com as características dinâmicas desejadas.

### 3.4 Consideração Final

Neste capítulo apresentou-se um algoritmo de como determinar um controlador global para sistemas não lineares com multi-modelos locais utilizando estruturas *Fuzzy* para inferência das ações de controle dos controladores locais LQG/LTR em tempo discreto desenvolvidos. Primeiramente, apresentou-se como que os controladores locais são obtidos, a partir da equação não linear de um sistema não linear. Foi apresentado a linearização da equação não linear em torno de um ponto de operação, a discretização das funções de transferência obtidas dos modelos linearizados e após a linearização, foi apresentado como que os controladores locais foram obtidos a partir da expansão da planta dos modelos linearizados por integradores.

Com os controladores locais obtidos, apresentou-se como a união desses controladores foi realizada através de funções de pertinência *Fuzzy* TS. Das regras *Fuzzy* desenvolvidas, foi apresentado como que o sinal de controle global foi determinado, de maneira que a pro-

---

posta deste trabalho em desenvolver um controlador híbrido multi-modelos foi realizada. O controlador proposto apresenta grande vantagem por trabalhar com a combinação dos modelos/controladores lineares locais. Esta operação simplifica a solução do problema da não linearidade, uma vez que o projeto de controle pode ser decomposto em inúmeros modelos/controladores locais tornando o sistema complexo mais simples.

O capítulo a seguir apresenta a aplicação do controlador proposto em um sistema de levitação magnética. Será apresentado desde a modelagem do levitador magnético utilizado até a realização de simulações e ensaios práticos para validação da nova estratégia de controle proposta.

## 4 *Aplicação no Levitador Magnético*

### 4.1 Considerações Gerais

Este capítulo tem como objetivo mostrar, através de simulações e resultados experimentais, a viabilidade da metodologia proposta no controle de sistemas não lineares. O sistema não linear que pretende-se controlar é um levitador magnético com dois graus de liberdade fabricado pela empresa Quanser [1].

Primeiramente, será apresentada uma análise teórica sobre a planta de levitação magnética utilizada. Esta análise visa detalhar a modelagem da planta, a qual será utilizada posteriormente para o levantamento dos modelos lineares locais a serem utilizados no projeto do sistema de controle.

Definidos os modelos locais lineares e suas respectivas representações discretas, realiza-se então a expansão de tais modelos por meio de integradores *backward* Euler. A partir da expansão dos modelos locais, serão projetados os controladores para cada modelo local equivalente. Para os testes do sistema de controle proposto serão realizadas variações na referência e aplicados distúrbios à saída a fim de se verificar a capacidade de rastreamento e rejeição a distúrbios.

### 4.2 Modelagem e equacionamento do MAGLEV

O circuito eletromagnético equivalente da planta de levitação magnética (MAGLEV) está representado na Figura 4.1. Para fins de modelagem, estabeleceu-se o sentido de deslocamento positivo vertical para baixo, com a origem das coordenadas globais posicionada na face plana do eletroímã. Apesar da esfera de aço possuir seis graus de liberdade, apenas o eixo x vertical é controlado. Também se pode notar que o MAGLEV é formado por dois sistemas principais, sendo um o elétrico e um outro o eletromecânico.

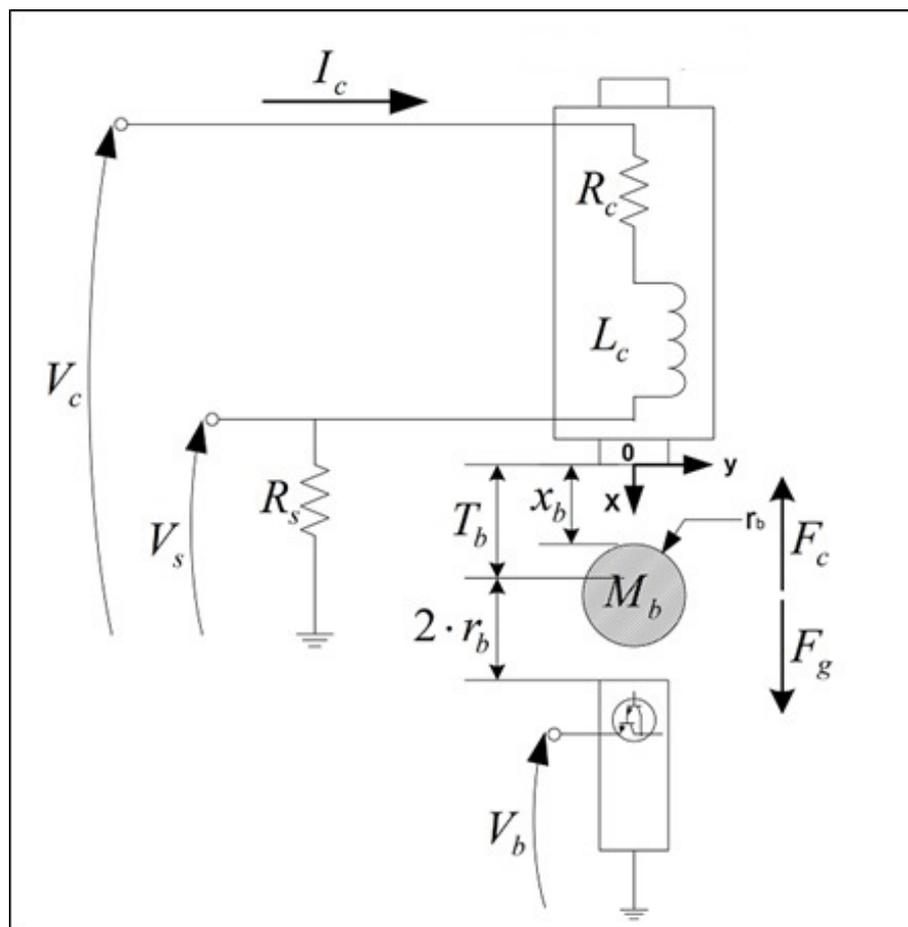


Figura 4.1: Esquema da Planta do Levitador Magnético [1].

A partir da Figura 4.1, pode-se notar que a bobina do MAGLEV apresenta uma indutância  $L_c$  e uma resistência  $R_c$ . Além disso, o sistema real é equipado com um resistor  $R_s$  que está em série com a bobina sendo responsável por fornecer a tensão  $V_s$  utilizada para medir a corrente na bobina, a qual pode ser calculada por

$$V_s(t) = R_s i_s(t) . \quad (4.1)$$

Através da lei de Kirchhoff das tensões, obtém-se a equação diferencial de primeira ordem que estabelece a relação entre a tensão sobre a bobina e a corrente aplicada sobre esta

$$V_c(t) = (R_c + R_s) i_c(t) + L_c \frac{di_c(t)}{dt} , \quad (4.2)$$

sendo  $R_c$  e  $L_c$ , respectivamente, a resistência e a indutância da bobina,  $I_c$  é a corrente da bobina,  $V_c$  é a tensão aplicada sobre a bobina e  $R_s$  é a resistência sensor de corrente.

Aplicando a transformada de Laplace com condições iniciais nulas na equação (4.2) o resultado é

$$V_c(s) = \mathcal{L}[V_c(t)] = (R_c + R_s)I_c(s) + L_c s I_c(s) \quad (4.3)$$

e que pode ser representada pela função de transferência de primeira ordem

$$G_c(s) = \frac{I_c(s)}{V_c(s)} = \frac{\frac{1}{R_c + R_s}}{\frac{L_c}{R_c + R_s} s + 1} . \quad (4.4)$$

A equação (4.4) pode ser representada por

$$G_c(s) = \frac{I_c(s)}{V_c(s)} = \frac{K_c}{\tau_c s + 1} , \quad (4.5)$$

em que  $K_c$  é o ganho DC e  $\tau_c$  é a constante de tempo. De acordo com o manual de usuário do MAGLEV, os valores são

$$K_c = \frac{1}{R_c + R_s} = 0,0909[A/V] , \quad (4.6)$$

$$\tau_c = \frac{L_c}{R_c + R_s} = 0,0375[seg] . \quad (4.7)$$

Note que o sistema em malha aberta é estável , pois seu polo  $s = \frac{-1}{\tau_c}$  está no semi-plano esquerdo [1].

### 4.2.1 Modelo de Levitação

Usando as notações e convenções dadas na Figura 4.1, a força de atração gerada pelo eletroímã agindo sobre a esfera de aço pode ser expressa por

$$F_c = \frac{K_m i_c(t)^2}{2x_b(t)^2} , \quad (4.8)$$

sendo  $x_b$  a distância entre a face do eletroímã e a esfera de aço e  $K_m$  a constante da força eletromagnética. Da equação (4.8), percebe-se que a atração do eletroímã é proporcional ao quadrado da corrente e inversamente proporcional ao quadrado da distância da esfera  $x_b$ . Sendo  $g$  a constante gravitacional e  $M_b$  a massa da esfera de aço, a força da gravidade que atua na esfera de aço é determinada por

$$F_g = M_b \cdot g . \quad (4.9)$$

Assim, a força externa total aplicada pela ação da gravidade e pelo eletroímã na esfera de aço é dada por

$$F_{ext} = -F_c + F_g = -\frac{K_m i_c(t)^2}{2x_b(t)^2} + M_b g . \quad (4.10)$$

Aplicando a segunda lei de Newton do movimento tem-se que a posição da esfera de aço segue a seguinte equação de movimento [1].

$$\ddot{x}_b(t) = -\frac{K_m i_c(t)^2}{2M_b x_b(t)^2} + g . \quad (4.11)$$

## 4.2.2 Modelo Linearizado de Levitação

A corrente nominal da bobina  $i_{c0}$ , para o par eletroímã-esfera pode ser determinada através do equilíbrio estático do sistema. O equilíbrio estático de um ponto de operação nominal  $(x_{b0}, i_{c0})$  é caracterizado pela suspensão da esfera de aço no ar, em uma posição  $x_{b0}$  devido a uma força magnética constante gerada pela corrente da bobina  $i_{c0}$ .

O primeiro passo para determinar um controlador de posição é obter a função de transferência da planta em malha aberta. Para este fim, a equação não linear do movimento dada em (4.11) foi linearizada em torno de um ponto de operação.

No caso da esfera levitando, a faixa de operação corresponde a pequenas perturbações sobre a posição  $\delta x_b$  e corrente  $\delta i_c$  do ponto de equilíbrio desejado  $(x_{b0}, i_{c0})$ . Portanto,  $x_b$  e  $i_{c0}$  podem ser expressados como a soma de dois termos, como mostrado nas equações (4.12) e (4.13)

$$x_b = x_{b0} + \delta x_b , \quad (4.12)$$

$$i_c = i_{c0} + \delta i_c . \quad (4.13)$$

No equilíbrio,  $x_b(t) = x_{b0}$  e  $i_c(t) = i_{c0}$ . Dessa forma, a força eletromagnética que o eletroímã realiza é igual ao peso da esfera de aço

$$-\frac{K_m i_{c0}^2}{2x_{b0}^2} + M_b g = 0 . \quad (4.14)$$

Assim tem-se que a corrente da bobina pode ser calculada para qualquer ponto de operação desejado, ou seja, para qualquer posição  $x_{b0}$ , isolando-se  $i_{c0}$  na equação (4.14) tem-se

$$i_{c0} = \sqrt{\frac{2M_b g}{K_m}} x_{b0} . \quad (4.15)$$

A constante de força eletromagnética,  $K_m$ , pode ser calculada por

$$K_m = \frac{2M_b g x_{b0}^2}{i_{c0}^2} . \quad (4.16)$$

Considerando  $x_b = x_{b0}$  e  $i_c = i_{c0}$ , pode-se linearizar a equação não linear de movimento para o levitador magnético através de uma aproximação de Taylor de primeira ordem, de maneira a obter a seguinte forma

$$\begin{aligned} \delta \ddot{x}_b &= -\frac{K_m i_{c0}^2}{2M_b x_{b0}^2} + g + \frac{K_m i_{c0}^2}{M_b x_{b0}^3} (x_b - x_{b0}) - \frac{K_m i_{c0}}{M_b x_{b0}^2} (i_c - i_{c0}) \\ &= -\frac{K_m i_{c0}^2}{2M_b x_{b0}^2} + g + \frac{K_m i_{c0}^2}{M_b x_{b0}^3} \delta x_b - \frac{K_m i_{c0}}{M_b x_{b0}^2} \delta i_c . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Substituindo a expressão (4.16) na expressão (4.17), tem-se

$$\delta \ddot{x}_b = \frac{2g}{x_{b0}} \delta x_b - \frac{2g}{i_{c0}} \delta i_c . \quad (4.18)$$

Aplicando a transformada de Laplace sobre a expressão simplificada (4.18) tem-se

$$\delta \ddot{x}_b \stackrel{s}{=} s^2 \Delta X_b(s) = \frac{2g}{x_{b0}} \Delta X_b(s) - \frac{2g}{i_{c0}} \Delta I_c(s) . \quad (4.19)$$

Assim, a função de transferência que relaciona a corrente da bobina e a posição da esfera de aço sobre um ponto de operação pode ser representada por

$$G_b(s) = \frac{\Delta X_b(s)}{\Delta I_c(s)} = -\frac{K_b \omega_n^2}{s^2 - \omega_b^2} = \frac{-\frac{2g}{i_{c0}}}{s^2 - \frac{2g}{x_{b0}}} , \quad (4.20)$$

em que  $K_b$  é o ganho DC e  $\omega_b$  é a frequência natural de oscilação do sistema. Devido ao deslocamento sobre o ponto de operação, as condições iniciais são zeros, ou seja,  $\delta x_b(0) = 0$  e  $\delta i_c(t) = 0$ . O ganho DC é obtido por

$$K_b = \frac{x_{b0}}{i_{c0}} \quad (4.21)$$

e a frequência natural de oscilação do sistema por

$$\omega_n = \omega_b = \sqrt{\frac{2g}{x_{b0}}}. \quad (4.22)$$

O sistema em malha aberta é instável, pois seus polos estão presentes em  $s = \pm\omega_b$ , ou seja, existe um polo no semi-plano esquerdo e um polo no semi-plano direito o qual instabiliza o sistema [1].

### 4.3 Linearização e Determinação da Função de Transferência em Tempo Discreto

A variação da posição da esfera de aço foi considerada de 0 [mm] até 14 [mm] e os valores calculados da corrente da bobina para as várias posições neste intervalo são realizados pela equação (4.15) conforme apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Pontos de operação.

$x_{b0}$	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007
$i_{c0}$	0,144	0,288	0,432	0,576	0,720	0,864	1,008
$x_{b0}$	0,008	0,009	0,010	0,011	0,012	0,013	0,014
$i_{c0}$	1,152	1,296	1,440	1,584	1,728	1,872	2,016

Após o cálculo da corrente da bobina para cada ponto possível de operação, foram escolhidos quatro pontos locais para estudo e análise. Foram escolhidos quatro pontos de operação de forma a manter uma simetria entre a faixa de operação em que os controladores locais atuam. Essa escolha, não é uma escolha ótima, mas a que obteve em um primeiro momento resultados satisfatórios. Para posições abaixo de  $x_b = 6,00$  [mm] a não linearidade é forte o suficiente para fazer com que o sistema se perca completamente

e isso acontece devido a esfera de aço se posicionar muito próxima ao eletroímã e dessa forma a força que o eletroímã realiza ser maior que a força gravitacional.

Assim, foram escolhidos os pontos  $x_b = 6,00$  [mm],  $x_b = 8,00$  [mm],  $x_b = 10,00$  [mm] e  $x_b = 12,00$  [mm]. Os pontos de operação escolhidos apresentam os seguintes valores de corrente da bobina,  $i_c = 0,864$  [A],  $i_c = 1,152$  [A],  $i_c = 1,440$  [A] e  $i_c = 1,728$  [A], respectivamente.

Assim, a partir da linearização do sistema, pode-se determinar a função de transferência do sistema,  $G(s)$ , para cada ponto de operação escolhido a partir da equação (4.20) como mostrado na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Funções de transferência  $G(s)$

$x_{b0}$ [mm]	$i_{c0}$ [A]	$G(s)$
<b>6,00</b>	<b>0,864</b>	$\frac{-22,71}{s^2 - 3270}$
<b>8,00</b>	<b>1,152</b>	$\frac{-17,03}{s^2 - 2453}$
<b>10,00</b>	<b>1,440</b>	$\frac{-13,63}{s^2 - 1962}$
<b>12,00</b>	<b>1,728</b>	$\frac{-11,35}{s^2 - 1635}$

A partir das funções de transferência da Tabela 4.2, pode-se determinar  $G_n(s)$  em variáveis de estados de forma que cada função de transferência encontrada pode ser definida por  $G_n = (A_n, B_n, C_n, D_n)$ , sendo  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  e  $D_n$  matrizes de estados.

Para  $x_{b0} = 6,00$  [mm] tem-se que as matrizes de estados que representam o sistema  $G_6(s)$  são dadas por

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3270 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.23a)$$

$$B_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -22,71 \end{bmatrix}, \quad (4.23b)$$

$$C_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.23c)$$

$$D_6 = 0. \quad (4.23d)$$

Para  $x_{b0} = 8,00$  [mm] as matrizes de estados que representam o sistema  $G_8(s)$  são dadas por,

$$A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2453 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.24a)$$

$$B_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ -17,03 \end{bmatrix}, \quad (4.24b)$$

$$C_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.24c)$$

$$D_8 = 0. \quad (4.24d)$$

Para  $x_{b0} = 10,00$  [mm] as matrizes de estados que representam o sistema  $G_{10}(s)$  são dadas por,

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1962 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.25a)$$

$$B_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ -13,63 \end{bmatrix}, \quad (4.25b)$$

$$C_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.25c)$$

$$D_{10} = 0. \quad (4.25d)$$

Para  $x_{b0} = 12,00$  [mm] as matrizes de estados que representam o sistema  $G_{12}(s)$  são

dadas por,

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1635 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.26a)$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -11,35 \end{bmatrix}, \quad (4.26b)$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.26c)$$

$$D_{12} = 0. \quad (4.26d)$$

Após determinar as matrizes de estados do sistema de levitação magnética para todas as posições escolhidas, tem-se a passagem de  $G_n(s)$  do domínio contínuo para o domínio discreto. O tempo de amostragem utilizado para discretizar o sistema é  $T = 0,002$  [seg].

Realizada a discretização, a representação  $G_n(z) = (A_{Dn}, B_{Dn}, C_{Dn}, D_{Dn})$  para o ponto de operação em torno de  $x_b = 6,00$  [mm] é dada por

$$A_{D6} = \begin{bmatrix} 1,0065 & 0,0020 \\ 6,5543 & 1,0065 \end{bmatrix}, \quad (4.27a)$$

$$B_{D6} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,0455 \end{bmatrix}, \quad (4.27b)$$

$$C_{D6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.27c)$$

$$D_{D6} = 0. \quad (4.27d)$$

O mesmo procedimento é realizado para as posições  $x_{b0} = 8,00$  [mm],  $x_{b0} = 10,00$  [mm] e  $x_{b0} = 12,00$  [mm]. Para  $x_{b0} = 8,00$  [mm] tem-se a seguinte representação em variáveis de estados discreta,

$$A_{D8} = \begin{bmatrix} 1,0049 & 0,0020 \\ 4,9130 & 1,0049 \end{bmatrix}, \quad (4.28a)$$

$$B_{D8} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,0341 \end{bmatrix}, \quad (4.28b)$$

$$C_{D8} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.28c)$$

$$D_{D8} = 0. \quad (4.28d)$$

Para  $x_{b0} = 10,00$  [mm] tem-se a seguinte representação em variáveis de estados discretas,

$$A_{D10} = \begin{bmatrix} 1,0039 & 0,0020 \\ 3,9291 & 1,0039 \end{bmatrix}, \quad (4.29a)$$

$$B_{D10} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,0273 \end{bmatrix}, \quad (4.29b)$$

$$C_{D10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.29c)$$

$$D_{D10} = 0. \quad (4.29d)$$

Para  $x_{b0} = 12,00$  [mm] tem-se a seguinte representação em variáveis de estados discretas,

$$A_{D12} = \begin{bmatrix} 1,0033 & 0,0020 \\ 3,2736 & 1,0033 \end{bmatrix}, \quad (4.30a)$$

$$B_{D12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,0227 \end{bmatrix}, \quad (4.30b)$$

$$C_{D12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.30c)$$

$$D_{D12} = 0. \quad (4.30d)$$

## 4.4 Expansão da Dinâmica de uma Planta e Determinação dos Controladores Locais

Com as funções de transferência discretas calculadas, tem-se a expansão da dinâmica da planta de levitação magnética para cada ponto de operação de trabalho escolhido. Para a expansão, a técnica com integradores *backward* Euler foi utilizada. Para  $G_{D6}$  tem-se a seguinte representação após a expansão,  $G_{e6} = (A_{e6}, B_{e6}, C_{e6}, D_{e6})$ ,

$$A_{e6} = \begin{bmatrix} 1,0065 & 0,0020 & 0 \\ 6,5543 & 1,0065 & -0,0455 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.31a)$$

$$B_{e6} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,0000910 \\ 0,0020 \end{bmatrix}, \quad (4.31b)$$

$$C_{e6} = [ 1 \ 0 \ 0 ], \quad (4.31c)$$

$$D_{e6} = [ 0 ]. \quad (4.31d)$$

Para  $G_{D8}$  tem-se a seguinte representação após a expansão,  $G_{e8} = (A_{e8}, B_{e8}, C_{e8}, D_{e8})$ ,

$$A_{e8} = \begin{bmatrix} 1,0049 & 0,0020 & 0 \\ 4,9130 & 1,0049 & -0,0341 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.32a)$$

$$B_{e8} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,0000682 \\ 0,0020 \end{bmatrix}, \quad (4.32b)$$

$$C_{e8} = [ 1 \ 0 \ 0 ], \quad (4.32c)$$

$$D_{e8} = [ 0 ]. \quad (4.32d)$$

Para  $G_{D10}$  tem-se a seguinte representação após a expansão,  $G_{e10} = (A_{e10}, B_{e10}, C_{e10}, D_{e10})$ ,

$$A_{e10} = \begin{bmatrix} 1,0039 & 0,0020 & 0 \\ 3,9291 & 1,0039 & -0,0273 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.33a)$$

$$B_{e10} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,0000546 \\ 0,0020 \end{bmatrix}, \quad (4.33b)$$

$$C_{e10} = [ 1 \ 0 \ 0 ], \quad (4.33c)$$

$$D_{e10} = [ 0 ]. \quad (4.33d)$$

Para  $G_{D12}$  tem-se a seguinte representação após a expansão,  $G_{e12} = (A_{e12}, B_{e12}, C_{e12}, D_{e12})$ ,

$$A_{e12} = \begin{bmatrix} 1,0033 & 0,0020 & 0 \\ 3,2736 & 1,0033 & -0,0227 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.34a)$$

$$B_{e12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,0000455 \\ 0,0020 \end{bmatrix}, \quad (4.34b)$$

$$C_{e12} = [ 1 \ 0 \ 0 ], \quad (4.34c)$$

$$D_{e12} = [ 0 ]. \quad (4.34d)$$

Pode-se notar que as únicas matrizes que são alteradas são as matrizes  $A$  e  $B$  de cada posição de linearização. Isto acontece pelo fato de tais matrizes estarem ligadas às características dinâmicas da planta e pelo fato de estar sendo usada uma expansão na forma canônica observável.

Uma vez que se tem as expansões feitas para todos os modelos locais, é necessário especificar os parâmetros não fixos do controlador LQG/LTR em tempo discreto para

obter as matrizes referentes aos controladores para cada posição local.

Como os parâmetros variáveis para o desenvolvimento do controlador é o escalar  $\mu$  e a matriz  $L$ , após diversas simulações e ensaios práticos terem sido realizados, chegou-se a conclusão, por tentativa e erro, que o melhor valor de  $\mu$  para ser utilizado no desenvolvimento dos controladores locais é  $\mu = 0,075$ . Fazendo a matriz  $L$  seguir a forma proposta em (2.26) e  $\mu = 0,075$  tem-se a determinação dos controladores locais.

Assim, pode-se obter para a posição  $x_b = 6.00$  [mm] o controlador local,  $G_{c6}$ , representado pelas seguintes matrizes de estado,

$$A_{c6} = \begin{bmatrix} 0,0316 & 0 & 0 \\ -729,6134 & -0,9579 & 0 \\ 15827 & 43,1602 & 0,0001 \end{bmatrix}, \quad (4.35a)$$

$$B_{c6} = \begin{bmatrix} 0,0100 \\ -229,9017 \\ 5398 \end{bmatrix}, \quad (4.35b)$$

$$C_{c6} = \begin{bmatrix} -7911684 & -21580 & 500 \end{bmatrix}, \quad (4.35c)$$

$$D_{c6} = \begin{bmatrix} -2700792 \end{bmatrix}. \quad (4.35d)$$

Para a posição  $x_b = 8.00$  [mm] o controlador local,  $G_{c8}$ , representado pelas seguintes matrizes de estado,

$$A_{c8} = \begin{bmatrix} 0,0427 & 0,0001 & 0 \\ -745,4328 & -0,9448 & 0 \\ 21635 & 57,1447 & 0,0002 \end{bmatrix}, \quad (4.36a)$$

$$B_{c8} = \begin{bmatrix} 0,0115 \\ -201,0499 \\ 6250 \end{bmatrix}, \quad (4.36b)$$

$$C_{c8} = \begin{bmatrix} -10815870 & -28572 & 500 \end{bmatrix}, \quad (4.36c)$$

$$D_{c8} = \begin{bmatrix} -3126765 \end{bmatrix}. \quad (4.36d)$$

Para a posição  $x_b = 10.00$  [mm] o controlador local,  $G_{c10}$ , representado pelas seguintes matrizes de estado,

$$A_{c10} = \begin{bmatrix} 0,0537 & 0,0001 & 0 \\ -753,1764 & -0,9320 & 0 \\ 27381 & 70,9500 & 0,0003 \end{bmatrix}, \quad (4.37a)$$

$$B_{c10} = \begin{bmatrix} 0,0129 \\ -180,8512 \\ 6994 \end{bmatrix}, \quad (4.37b)$$

$$C_{c10} = \begin{bmatrix} -13688785 & -35475 & 500 \end{bmatrix}, \quad (4.37c)$$

$$D_{c10} = \begin{bmatrix} -3498940 \end{bmatrix}. \quad (4.37d)$$

Para a posição  $x_b = 12.00$  [mm] o controlador local,  $G_{c12}$ , representado pelas seguintes matrizes de estado,

$$A_{c12} = \begin{bmatrix} 0,0643 & 0,0001 & 0 \\ -756,4394 & -0,9196 & 0 \\ 33044 & 84,5834 & 0,0004 \end{bmatrix}, \quad (4.38a)$$

$$B_{c12} = \begin{bmatrix} 0,0141 \\ -165,6265 \\ 7660 \end{bmatrix}, \quad (4.38b)$$

$$C_{c12} = \begin{bmatrix} -16520421 & -42292 & 500 \end{bmatrix}, \quad (4.38c)$$

$$D_{c12} = \begin{bmatrix} -3831835 \end{bmatrix}. \quad (4.38d)$$

Dessa forma, a partir do sistema linearizado em um ponto de operação desejado, é possível determinar um controlador local para atuar no modelo não linear do levitador

magnético (modelo real) e assim verificar através de ensaios práticos, se a metodologia de controle proposta obtém resultados significativos.

## 4.5 Desenvolvimento do Controlador Global

Com os controladores locais obtidos para as posições escolhidas, tem-se a união de todos eles via lógica *Fuzzy* para que, dessa forma, a aplicação se torne global. Essa união favorece a aplicação em um amplo universo de atuação.

Primeiramente, foram criadas as funções de pertinência para relacionar os controladores para quatro posições escolhidas  $x_{b0} = 6.00$  [mm],  $x_{b0} = 8.00$  [mm],  $x_{b0} = 10.00$  [mm] e  $x_{b0} = 12.00$  [mm] presentes no eixo das abscissas, de forma a se obter uma função de pertinência simétrica dentro da faixa de operação em que o controlador atuará, representadas pela Figura 4.2.

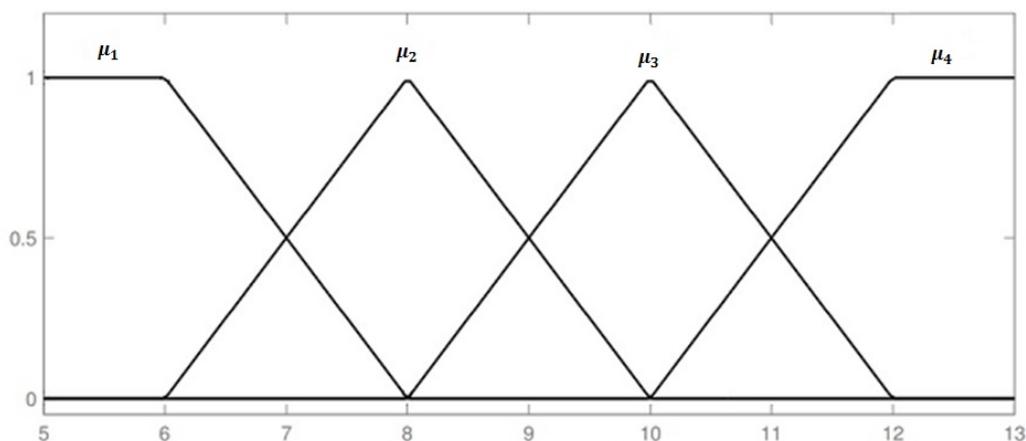


Figura 4.2: Funções de Pertinência *Fuzzy*.

Não se tem comprovações que esta disposição simétrica é a melhor disposição para as funções de pertinência criadas, assim como, também não foi comprovado que utilizando formas trapezoidais e triangulares seria a melhor forma de dispor estas funções de pertinência. O principal critério que foi analisado é se o controlador realizava um controle suave e isso foi verificado devido as transições suaves que a lógica *Fuzzy* proporciona em sua atuação.

Estas funções de pertinência são responsáveis por determinar quais controladores locais estão ativos de acordo com a região de operação para a aplicação particular sobre o levitador magnético. A faixa de posições utilizada para desenvolvimento das funções

de pertinência é de  $x_{b0} = 5.00$  [mm] até  $x_{b0} = 14.00$  [mm]. Este intervalo foi estabelecido tendo em vista que abaixo de  $x_{b0} = 5.00$  [mm], é uma faixa muito próxima ao eletroímã e conseqüentemente a força eletromagnética é maior fazendo com que o sistema se perca caso a esfera de aço se posicione muito próximo ao eletroímã. As regras para o controlador *Fuzzy* são estabelecidas baseadas nas funções de pertinência da Figura 4.2. Assim, para efeito de simulações e ensaios práticos, a faixa de operação utilizada é aquela na qual os controladores desenvolvidos possam atuar de forma significativa.

O sinal de controle  $u$  é calculado por um algoritmo baseado em cinco entradas e uma saída. Quatro entradas referentes a ação dos controladores LQG/LTR em tempo discreto locais e uma referente a posição real da esfera de aço. O número de regras é escolhido com base no número de controladores, portanto o número de entradas é escolhido de acordo com o especialista que faz as regras. O algoritmo do apêndice A, pode ser entendido como a interpretação das funções de pertinência *Fuzzy* da Figura 4.2.

A partir da combinação das ações de controle gerada pelo processo de inferência *Fuzzy*, a saída  $u$  representa o sinal do melhor controlador ou da melhor união de controladores que atua sobre a planta de processo de forma a buscar resultados significativos na ação de controle.

## 4.6 Simulações e Ensaios

Com auxílio do software MATLAB no ambiente Simulink, foram realizados todas as simulações e ensaios práticos para comprovação de que o novo controle híbrido multi-modelo é capaz de atuar de forma significativa sobre uma planta de levitação magnética não linear.

A fim de testar a viabilidade do controlador LQG/LTR em tempo discreto com expansão por meio de integrador *backward* Euler, primeiramente tem-se a aplicação sobre a planta com a atuação apenas do controlador local desenvolvido para a posição de  $x_{b0} = 6,00$  [mm]. Para efeito de simulação e ensaios práticos, foi realizada uma perturbação de  $0,50$  [mm] sobre a posição da esfera como mostra o diagrama na Figura 4.3.

O resultado da simulação realizada conforme diagrama presente na Figura 4.3 é apresentado na Figura 4.4. Da Figura 4.4, é possível perceber que o resultado mostra uma capacidade de rejeitar uma perturbação de  $0,50$  [mm] em uma referência de  $6,00$  [mm].

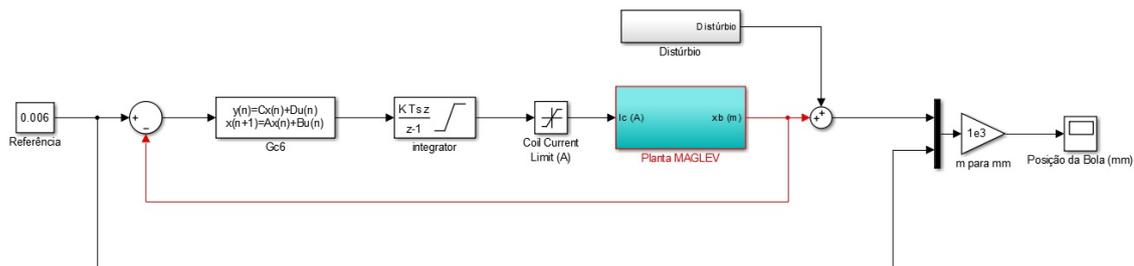


Figura 4.3: Diagrama para Distúrbio na Posição da Esfera.

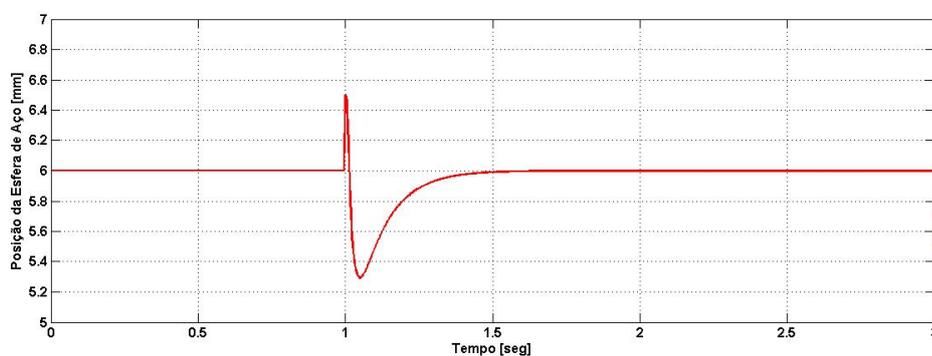


Figura 4.4: Simulação do Distúrbio de 0,50 [mm] na Posição da Esfera.

A partir do resultado na simulação da Figura 4.4, realizou-se um ensaio prático para verificar se o controlador local apresenta a mesma resposta sobre a planta não linear real. Assim, tem-se na Figura 4.5 o resultado, em azul, do ensaio em ambiente real.

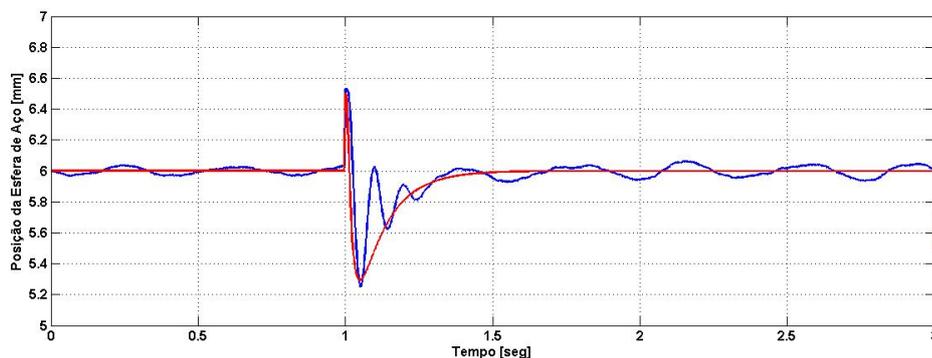


Figura 4.5: Ensaio Real do Distúrbio de 0,50 [mm] na Posição da Esfera.

Da Figura 4.5, é possível perceber que o controlador local apresenta uma capacidade de rejeitar uma perturbação de 0,50 [mm] em uma referência de 6,00 [mm] com um comportamento real tende ao modelo linear simulado.

Uma outra simulação realizada constituiu na inserção de uma variação de  $\pm 0,25$  [mm] sobre a referência de 6,00 [mm] da posição da esfera de aço como mostra o diagrama na Figura 4.6.

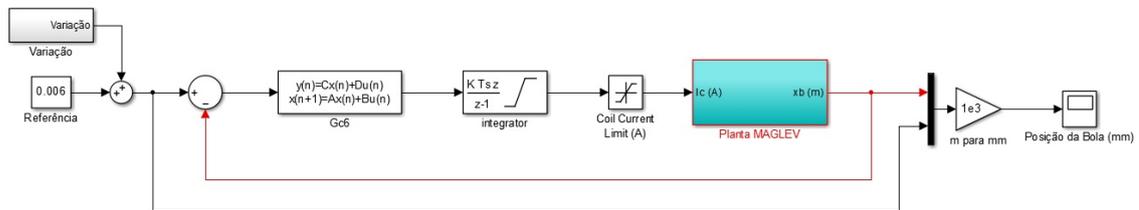


Figura 4.6: Diagrama para Variação na Referência da Posição da Esfera.

A partir do diagrama da Figura 4.6, tem-se o resultado da simulação como mostra a Figura 4.7.

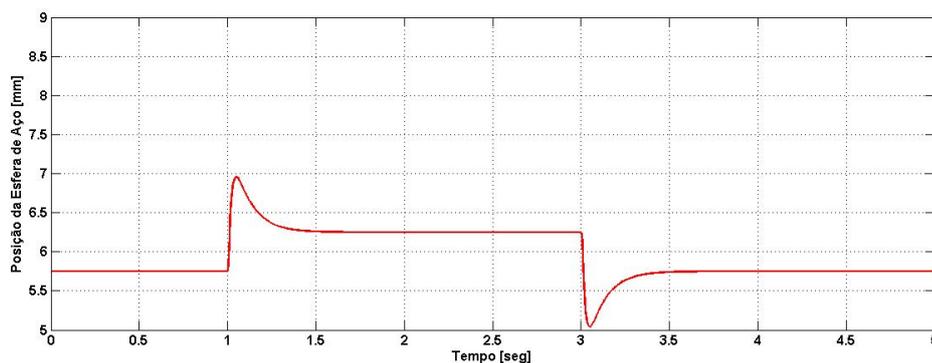


Figura 4.7: Simulação da Variação de  $\pm 0,25$  [mm] na Referência da Posição da Esfera.

A partir do resultado obtido na simulação da Figura 4.7, também é possível notar que aplicando-se uma variação de  $\pm 0,25$  [mm] na mesma referência de 6,00 [mm] da esfera de aço, o resultado se mostra eficaz. Dessa forma, também foi realizado um ensaio prático em ambiente real para verificar se o controlador local apresenta a capacidade de manter o rastreamento do sistema. O resultado do ensaio prático realizado é apresentado na Figura 4.8.

Da Figura 4.8 também é possível perceber que o controlador local é capaz de manter o rastreamento do sistema pois o ensaio real, em azul, apresenta um comportamento que tende ao modelo linear simulado. Estes resultados demonstram que uma estratégia de controle LQG/LTR em tempo discreto é funcional para a aplicação local em levitação magnética.

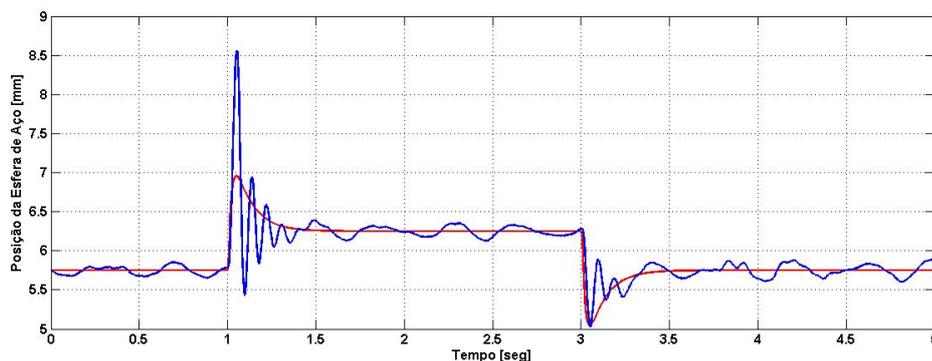


Figura 4.8: Ensaio Real da Variação de  $\pm 0,25$  [mm] na Referência da Posição da Esfera.

Após a realização de simulações e de ensaios reais para o controlador local obtido para  $x_{b0} = 6,00$  [mm], pode-se verificar que o controlador local é capaz de rejeitar distúrbios assim como manter o rastreamento do sistema. Porém, este controlador apresenta um limite de operação, pois resultados experimentais mostraram que se o controlador local for aplicado fora da região de linearização, o seu comportamento se deteriora pois a não linearidade do sistema global prevalece. Sendo assim, há uma motivação para a utilização da metodologia proposta neste trabalho.

Para resolver o problema da não linearidade um controlador global multi-modelo foi desenvolvido e, simulações em ensaios práticos também foram realizadas, para mostrar a metodologia proposta neste trabalho. O controlador global é a união dos quatro controladores locais desenvolvidos. Para os testes do controlador global multi-modelo foi desenvolvida uma rotina de avaliação com três referências distintas, como mostra a Figura 4.9.

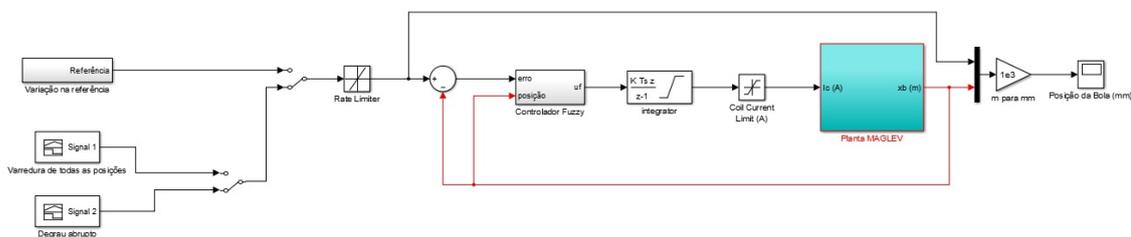


Figura 4.9: Diagrama para Atuação do Controlador *Fuzzy*.

Para o primeiro sinal de referência estabeleceu-se a variação entre a alternância da posição da esfera de aço entre  $x_{b0} = 8,00$  [mm] e  $x_{b0} = 10,00$  [mm]. O segundo sinal de referência refere-se a uma varredura de todas as posições presentes entre  $x_{b0} = 5,00$  [mm]

e  $x_{b0} = 14,00$  [mm]. Já o terceiro sinal de referência refere-se a um variação de  $7,00$  [mm] tanto na subida da esfera quanto na descida da esfera de aço mostrando que o controlador *Fuzzy* obtém resultados significativos para diversas formas de atuação da posição da esfera de aço.

A simulação referente as variações repetidas na referência da posição da esfera de aço entre  $x_{b0} = 8,00$  [mm] e  $x_{b0} = 10,00$  [mm] é mostrado na Figura 4.10.

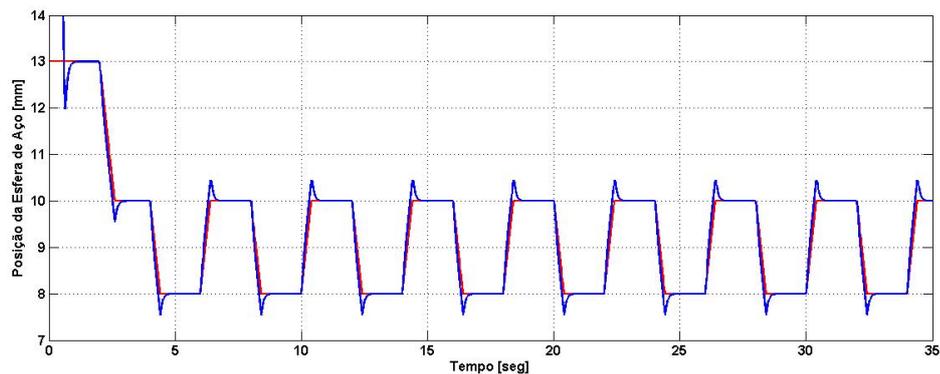


Figura 4.10: Simulação da Variação Repetida na Referência da Posição da Esfera.

Após a realização da simulação como visto na Figura 4.10, pode-se notar que o controlador global desenvolvido foi capaz de manter o rastreamento do sistema. Para melhor validação, realizou-se o ensaio prático para a mesma variação na posição da esfera de aço e o resultado é apresentado na Figura 4.11.

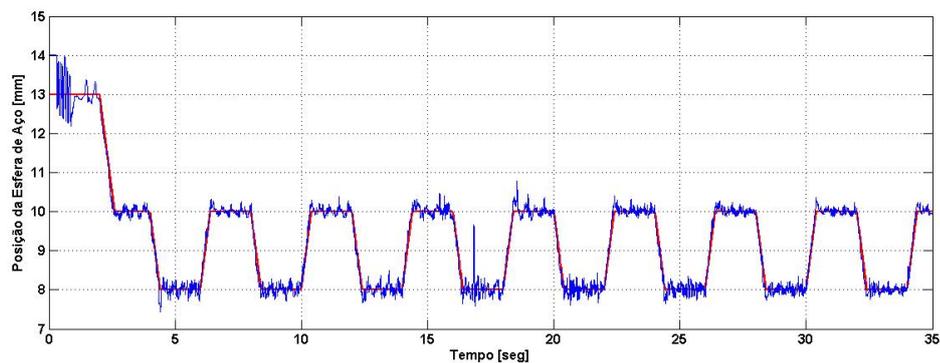


Figura 4.11: Ensaio Prático da Variação Repetida na Referência da Posição da Esfera.

A partir da Figura 4.11 pode-se notar que, variando-se a referência da posição da esfera de aço entre  $x_{b0} = 8,00$  [mm] e  $x_{b0} = 10,00$  [mm], o controlador global desenvolvido, é capaz de atuar na planta não linear de forma a manter o rastreamento da posição da esfera de aço, assim como no modelo simulado mostrado na Figura 4.10.

A simulação referente a degraus de 1,00 [mm] nas posições presentes entre  $x_{b0} = 5,00$  [mm] e  $x_{b0} = 14,00$  [mm] é mostrada na Figura 4.12.

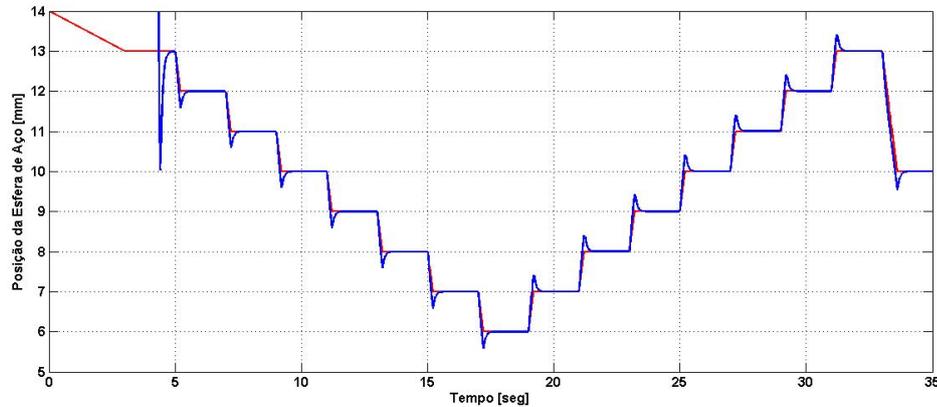


Figura 4.12: Simulação Referente a Degraus de 1,00 [mm] na Referência da Posição da Esfera

Após a realização da simulação como visto na Figura 4.12, pode-se notar que o controlador global desenvolvido, também foi capaz de manter o rastreamento do sistema para todas as posições. Para melhor validação, realizou-se o ensaio prático para os mesmos degraus de 1,00 [mm] na posição da esfera de aço e o resultado é apresentado na Figura 4.13.

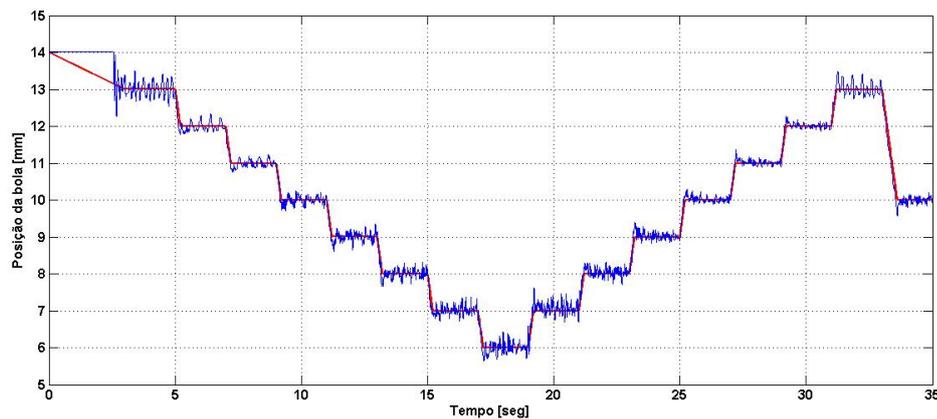


Figura 4.13: Ensaio Prático Referente a Degraus de 1,00 [mm] na Referência da Posição da Esfera

Da figura 4.13, pode-se notar que o controlador global também se mostra eficaz quando se realiza uma varredura de todas as posições entre  $x_{b0} = 5,00$  [mm] e  $x_{b0} = 14,00$  [mm]. Dessa forma pode-se perceber que o controlador multi-modelos *Fuzzy* não se restringe somente a um único ponto de operação ou alguma pequena região em torno deste pois

é comprovado que o controlador consegue realizar uma varredura de diferentes posições contornando assim o problema obtido pelo controlador local.

A simulação referente a uma variação de 7,00 [mm] na posição de referência da esfera de aço é mostrada na Figura 4.14.

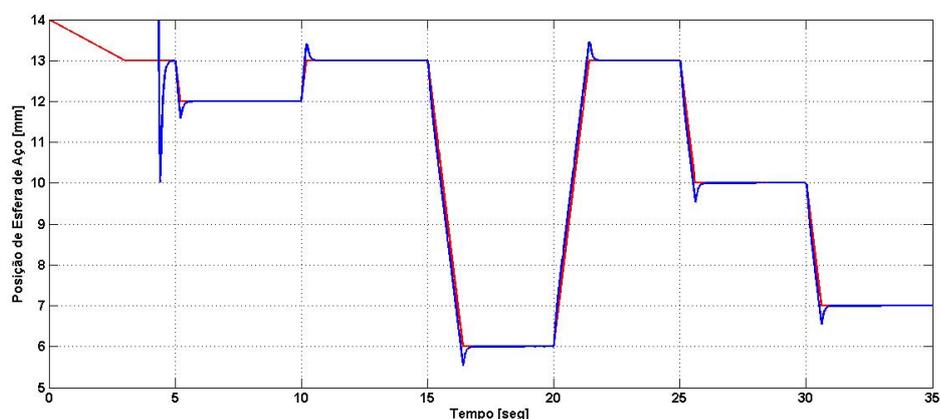


Figura 4.14: Simulação da Variação de 7,00 [mm] na Referência da Posição da Esfera

A partir do resultado da simulação apresentado na Figura 4.14, é possível notar que para uma variação abrupta de um degrau de intensidade significativa dentro do range de operação, o controlador global também apresenta resultados satisfatórios pois para uma variação de 7,00 [mm] na posição da esfera de aço o rastreamento foi também mantido de forma suave, eficaz e funcional.

Para validação, realizou-se o ensaio prático para o mesmo degrau de 7,00 [mm] na posição da esfera de aço e o resultado para o ensaio real é mostrado na Figura 4.15.

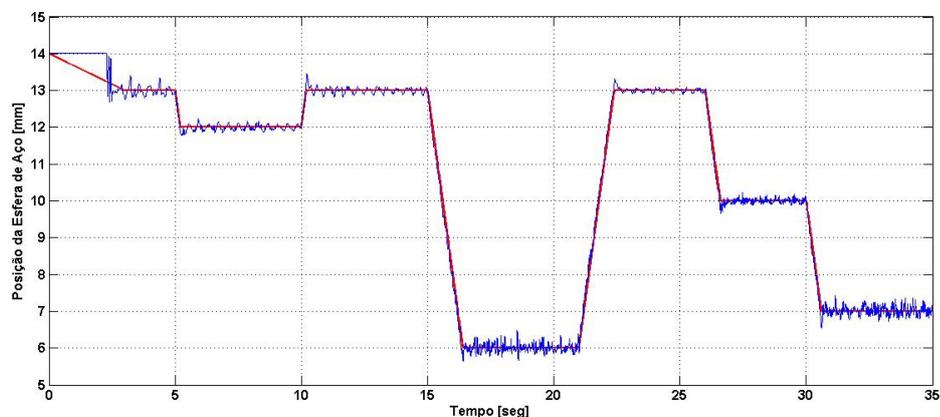


Figura 4.15: Ensaio Prático da Variação de 7,00 [mm] na Referência da Posição da Esfera

A partir do resultado apresentado na Figura 4.15, pode-se notar que mesmo no ambiente real, o controlador global atuou de forma satisfatória sobre o sistema não linear. Mesmo com um degrau abrupto de intensidade grande, o controlador foi capaz de manter o rastreamento do sistema.

## 4.7 Consideração Final

A partir de todas as simulações realizadas neste capítulo, pode-se perceber que tanto o controlador local como o controlador global obtiveram bons resultados. Com os resultados das simulações computacionais, ensaios práticos foram realizados no levitador magnético de forma a validar todas as simulações realizadas. Percebeu-se que no ambiente real os controladores locais tiveram sucesso ao atuar no ponto linearizado, porém, estes apresentavam limites de operação.

Com base nessa limitação, a metodologia proposta por este trabalho foi desenvolvida, simulada e validada através diversos ensaios reais feitos no levitador magnético. Nos ensaios práticos referentes ao controlador global pode-se perceber que há a presença de ruídos no sinal de rastreamento. Esse ruído é uma vibração da esfera de aço que pode ser proveniente de alguma não linearidade do sistema que não foi modelada, dos próprios parâmetros utilizados no desenvolvimento dos controladores LQG/LTR em tempo discreto locais ou até mesmo devido a forma como as funções de pertinência *Fuzzy* foram escolhidas.

Talvez, se com a modelagem completa do sistema não linear, através de ajustes mais precisos dos controladores locais ou até mesmo com o desenvolvimento de outra e até melhor forma de dispor as funções de pertinência *Fuzzy*, esses ruídos fossem contidos e não fizessem parte dos ensaios práticos realizados neste trabalho.

Mas esses pequenos ruídos, como visto pelos ensaios práticos, não impediram o controlador, tanto localmente como globalmente, de atuar de forma satisfatória sobre a esfera de aço. O objetivo de desenvolver um controlador híbrido multi-modelo unidos pelo controle LQG/LTR em tempo discreto junto a lógica *Fuzzy* cumpriu seu objetivo de manter a rejeição de distúrbios bem como sua rastreamento para diferentes pontos de operação desejados.

## 5 Conclusão

Neste trabalho apresentou-se uma abordagem para o desenvolvimento de um controle de sistemas não lineares. O controle é feito através do desenvolvimento de controladores lineares LQG/LTR em tempo discreto através da expansão da dinâmica de uma planta junto a um particionamento da matriz de transferência. Esta abordagem de controle já foi apresentada em outros trabalhos [9, 11, 12] e vem demonstrando sua eficácia no controle de sistemas não lineares, que de alguma maneira motivou sua utilização neste trabalho. Outra abordagem apresentada foi a utilização do modelo *Fuzzy* TS que apresenta uma série de vantagens se comparadas a outras abordagens utilizadas no controle de sistemas não lineares. A utilização do modelo TS se torna vantajoso uma vez que ele é capaz de realizar uma aproximação universal, pois consiste em um sistema de inferência capaz de descrever, de forma exata ou aproximada, sistemas dinâmicos não lineares por meio de um conjunto de modelos dinâmicos lineares.

Nesta dissertação, o principal objetivo foi apresentar uma abordagem na obtenção de um controlador multi-modelos não linear aplicada a uma planta de levitação magnética. A partir do equacionamento do sistema não linear foi possível determinar os modelos locais através da linearização do modelo não linear em torno de um ponto de operação. Uma vez determinados os modelos locais, implementou-se a etapa de desenvolvimento dos controladores locais, que consistiu no desenvolvimento dos controladores LQG/LTR em tempo discreto locais para cada modelo linearizado.

Após o desenvolvimento dos controladores multi-modelos locais, realizou-se a escolha das funções de pertinência *Fuzzy* TS para realizar a combinação da ação de controle dos controladores locais de forma a obter a ação de controle global que será aplicada ao sistema não linear de levitação magnética. Essa abordagem é factível desde que obedeça aos requisitos para a recuperação exata da malha objetivo a partir da expansão da dinâmica de uma planta de processo como visto em [12] e que a parametrização proposta garanta a rejeição de distúrbios na saída da planta, como realizar a manutenção do rastreamento do sistema devido a variações na referência de entrada.

O capítulo 4 apresentou alguns experimentos que exemplificam a aplicação da ação do controlador global proposto sobre a planta não linear do levitador magnético. O desenvolvimento dos controladores LQG/LTR em tempo discreto lineares locais mostrou a eficácia do método proposto quando aplicado localmente a um sistema não linear real. Como o controlador local desenvolvido têm sua ação de controle limitada, posteriormente, o desenvolvimento da estratégia de controle LQG/LTR em tempo discreto aplicada a um sistema não linear de levitação magnética mostrou a eficácia da estratégia proposta por este trabalho.

A partir dos resultados obtidos na aplicação do controlador global resultante, pode-se afirmar que com a estratégia de controle híbrido para sistema multi-modelos proposta, que desenvolve controladores LQG/LTR em tempo discreto locais unidos globalmente pela lógica Fuzzy, é funcional para a aplicação em levitação magnética. É importante ressaltar que em nenhum momento falou-se sobre análise de estabilidade da estratégia proposta pois esta não fazia parte do objetivo deste trabalho.

## 5.1 Contribuições

Neste trabalho, destacam-se algumas contribuições no sentido de tornar possível a implementação proposta, ou o aperfeiçoamento das técnicas já utilizadas. Algumas destas contribuições podem ser destacadas:

- Proposta de uma estratégia de controle multi-modelos LQG/LTR em tempo discreto aplicada a sistemas não lineares, utilizando as bases da estratégia do controle LQG/LTR em tempo discreto unidos a estratégia de inteligência artificial, possibilitando o controle de sistemas dinâmicos não lineares.
- Desenvolvimento e implementação de um controlador híbrido com a união de conceitos e estratégias de controle clássico e controle moderno. A aplicação do controlador desenvolvido neste trabalho sobre um sistema não linear de levitação magnética que apresenta uma grande abrangência no setor industrial e transporte.

## 5.2 Trabalhos Futuros

Como continuidade do trabalho em questão, a seguir serão apresentadas algumas propostas que irão complementar o que foi desenvolvido até aqui:

- 
- Aplicar a estratégia de controle desenvolvida por este trabalho em outras plantas de caráter não linear, para que mais resultados possam ser obtidos e melhores análises possam ser feitas.
  - Estudar e analisar os pequenos ruídos encontrados nos ensaios práticos causados na posição da esfera de aço e realizar uma análise sobre a estabilidade da estratégia proposta. Assim, melhorias podem ser realizadas na estratégia de controle desenvolvida por este trabalho.
  - Motivação em se estudar sistemas não lineares de forma a tentar desenvolver estratégias particulares que driblem os comportamentos não lineares ou lineares a parâmetros variantes encontrados em muito sistemas reais.

## *Referências Bibliográficas*

- [1] Quanser Inc. *Magnetic Levitation Workbook*. 2012.
- [2] Huibert Kwakernaak. Optimal low-sensitivity linear feedback systems. *Automatica*, 5(3):279–285, 1969.
- [3] John C Doyle and Gunter Stein. Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis. In *IEEE Trans. on Auto. Control*. Citeseer, 1981.
- [4] Jan Maciejowski. Asymptotic recovery for discrete-time systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 30(6):602–605, 1985.
- [5] T Ishihara and H Takeda. Loop transfer recovery techniques for discrete-time optimal regulators using prediction estimators. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 31(12):1149–1151, 1986.
- [6] Sang-Min Suh, Chung Choo Chung, and Seung-Hi Lee. Discrete-time lqg/ltr dual-stage controller design in magnetic disk drives. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 37(4):1891–1895, 2001.
- [7] Hussein Arab-Alibeik and Saeed Setayeshi. Improved temperature control of a pwr nuclear reactor using an lqg/ltr based controller. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 50(1):211–218, 2003.
- [8] Argyrios C Zolotas, Balarko Chaudhuri, Imad M Jaimoukha, and Petr Korba. A study on lqg/ltr control for damping inter-area oscillations in power systems. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 15(1):151–160, 2007.
- [9] Michael Athans. A tutorial on the lqg/ltr method. In *American Control Conference, 1986*, pages 1289–1296. IEEE, 1986.
- [10] Brian Dwayne O’Dell and Eduardo A Misawa. Obtaining uniform singular values of augmented systems using lqg/ltr. In *American Control Conference, Proceedings of the 1995*, volume 1, pages 461–465. IEEE, 1995.
- [11] Diogo Leonardo Ferreira da Silva. Sobre a parametrização da malha objetivo no controle  $h_\infty$ /ltr. 2013.
- [12] Fernando H. D. Guaracy, Diogo L. F. da Silva, and Luis H. C. Ferreira. Sobre a expansão da dinâmica de uma planta por integradores no controle lqg/ltr em tempo discreto.
- [13] Bjarne A Foss, Tor A Johansen, and Aage V Sørensen. Nonlinear predictive control using local models - applied to a batch fermentation process. *Control Engineering Practice*, 3(3):389–396, 1995.

- 
- [14] Roderick Murray-Smith and T Johansen. *Multiple Model Approaches to Nonlinear Modelling and Control*. CRC press, 1997.
- [15] Marconi Câmara Rodrigues. *Identificação fuzzy-multimodelos para sistemas não lineares*. PhD thesis, UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE, 2010.
- [16] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable feedback control: analysis and design*. Wiley New York, 2005.
- [17] Charles L Phillips and H Troy Nagle. *Digital control system analysis and design*. Prentice Hall Press, 2007.
- [18] Frank L Lewis and Vassilis L Syrmos. *Optimal control*. 1995.
- [19] John C Doyle and Guter Stein. Robustness with observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(4):607–611, 1979.
- [20] JJ da Cruz. Controle robusto multivariável. *Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil*, 1996.
- [21] Huibert Kwakernaak and Raphael Sivan. *Linear optimal control systems*, volume 1. Wiley-interscience New York, 1972.
- [22] Joaquim Gomes Brito Filho and Sao Luis. Controle robusto lqg/ltr com recuperacao do ganho da malha de transferencia.
- [23] George C Goodman. *The LQG/LTR method and discrete-time control systems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1984.
- [24] CC Arcasoy. Return-difference-matrix properties for optimal stationary discrete kalman filter. In *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, volume 118, pages 1831–1834. IET, 1971.
- [25] Jianbo Liu and Dragan Djurdjanovic. Topology preservation and cooperative learning in identification of multiple model systems. *Neural Networks, IEEE Transactions on*, 19(12):2065–2072, 2008.
- [26] B Vinsonneau, D Goodall, and K Burnham. Extended global total least square approach to multiple-model identification. In *16th IFAC World Congress*, pages 4–8, 2005.
- [27] Aswin N Venkat, Prasad Vijaysai, and Ravindra D Gudi. Identification of complex nonlinear processes based on fuzzy decomposition of the steady state space. *Journal of Process Control*, 13(6):473–488, 2003.
- [28] Rodolfo Orjuela, Benoît Marx, José Ragot, and Didier Maquin. Proportional-integral observer design for nonlinear uncertain systems modelled by a multiple model approach. In *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pages 3577–3582. IEEE, 2008.
- [29] Rodolfo Orjuela, Benoît Marx, José Ragot, and Didier Maquin. State estimation for non-linear systems using a decoupled multiple model. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 4(1):59–67, 2008.

- [30] Faisal J Uppal, Ron J Patton, and Marcin Witczak. A hybrid neuro-fuzzy and de-coupling approach applied to the damadics benchmark problem. *5th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, SAFEPROCESS*, 2003.
- [31] Anderson LO Cavalcanti, André L Maitelli, and Adhemar B Fontes. A phase margin metric for multi-model multivariable mpc. In *Control and Automation, 2008 16th Mediterranean Conference on*, pages 1874–1879. IEEE, 2008.
- [32] Amir Hooshang Mazinan and Nasser Sadati. Fuzzy multiple models predictive control of tubular heat exchanger. In *Fuzzy Systems, 2008. FUZZ-IEEE 2008. (IEEE World Congress on Computational Intelligence). IEEE International Conference on*, pages 1845–1852. IEEE, 2008.
- [33] Ji Wengang, Luo Yu, Dai Fengyan, and Cao Jianshu. Research on constant-tension control based on fuzzy multiple models. In *Computational Intelligence and Design, 2008. ISCID'08. International Symposium on*, volume 1, pages 112–115. IEEE, 2008.
- [34] L Giovanini, M Benosman, and Andrezj Ordys. Adaptive control using multiple models switching and tuning. In *Industrial Electronics and Control Applications, 2005. ICIECA 2005. International Conference on*, pages 8–pp. IEEE, 2005.
- [35] Anderson Luiz de Oliveira Cavalcanti. Análise e desenvolvimento de controladores preditivos multivariáveis baseados em multi-modelos bilineares. 2008.
- [36] Neander Alessandro da Silva Paula. *MPC adaptativo-multimodelos para controle de sistemas não-lineares*. PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- [37] Sandra Sandri and Cláudio Correa. Lógica nebulosa. *Escola de redes neurais: Conselho Nacional de Redes Neurais*, 5:73–90, 1999.
- [38] Ricardo Tanscheit. Sistemas fuzzy. *Inteligência computacional: aplicada a administração, economia e engenharia em Matlab*, pages 229–264, 2004.
- [39] L-X Wang and Jerry M Mendel. Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning. *Neural Networks, IEEE Transactions on*, 3(5):807–814, 1992.
- [40] Bart Kosko. Fuzzy systems as universal approximators. *Computers, IEEE Transactions on*, 43(11):1329–1333, 1994.
- [41] Marcelo Godoy Simões and Ivan S SHAW. Controle e modelagem fuzzy. *São Paulo. Blucher: Fapesp*, 2007.
- [42] Jeremias Barbosa Machado. Modelagem e controle preditivo utilizando multimodelos. 2007.
- [43] Ke Zeng, Nai-Yao Zhang, and Wen-Li Xu. A comparative study on sufficient conditions for takagi-sugeno fuzzy systems as universal approximators. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 8(6):773–780, 2000.
- [44] R Tanscheit, F Gomide, MCM Teixeira, and LA Aguirre. Modelagem e controle nebuloso. *Enciclopédia de Automática: Controle & Automação*, 3:283–324, 2007.

- 
- [45] Kazuo Tanaka and Hua O Wang. *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons, 2004.
- [46] Hao Ying. General siso takagi-sugeno fuzzy systems with linear rule consequent are universal approximators. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 6(4):582–587, 1998.
- [47] Tor Arne Johansen, Robert Shorten, and Roderick Murray-Smith. On the interpretation and identification of dynamic takagi-sugeno fuzzy models. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 8(3):297–313, 2000.
- [48] Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, Edvaldo Assunção, and Luis Antonio Aguirre. Extensões para sistemas não-lineares. *Enciclopédia de Automática: Controle & Automação*, 1:218–246, 2007.
- [49] Leonardo A. Mozelli. Controle fuzzy para sistemas takagi-sugeno: Condições aprimoradas e aplicações. *Diss. de mestrado. Universidade Federal de Minas Gerais*, 2008.
- [50] Flávio Villela de Oliveira and Gustavo Picoli Lopes. Modelagem e simulação de controle de um reator contínuo de poliestireno.

*APÊNDICE A – Algoritmo para  
Implementação das  
Regras Fuzzy*

---

**Algoritmo 1:** Implementação das Regras *Fuzzy*

---

**Entrada:** Posição da esfera de aço “x”**Saída:** Sinal de controle “u”

- 1 Se  $x < 0.006$
  - 2  $m_1 = 1$ ;
  - 3 Se  $0.006 \leq x < 0.008$
  - 4  $m_1 = -500 \cdot x + 4$ ;
  - 5 Senão
  - 6  $m_1 = 0$ ;
  - 7 fim
  - 8 Se  $x < 0.006$
  - 9  $m_2 = 0$ ;
  - 10 Se  $0.006 \leq x < 0.008$
  - 11  $m_2 = 500 \cdot x - 3$ ;
  - 12 Se  $0.008 \leq x < 0.010$
  - 13  $m_2 = -500 \cdot x + 5$ ;
  - 14 Senão
  - 15  $m_2 = 0$ ;
  - 16 fim
  - 17 Se  $x < 0.008$
  - 18  $m_3 = 0$ ;
  - 19 Se  $0.008 \leq x < 0.010$
  - 20  $m_3 = 500 \cdot x - 4$ ;
  - 21 Se  $0.010 \leq x < 0.012$
  - 22  $m_3 = -500 \cdot x + 6$ ;
  - 23 Senão
  - 24  $m_3 = 0$ ;
  - 25 Se  $x < 0.010$
  - 26  $m_4 = 0$ ;
  - 27 Se  $0.010 \leq x < 0.012$
  - 28  $m_4 = 500 \cdot x - 5$ ;
  - 29 Senão
  - 30  $m_4 = 1$ ;
  - 31  $u = (m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 + m_3 \cdot u_3 + m_4 \cdot u_4) / (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$ ;
-

## *APÊNDICE B – Artigo Publicado no MAGLEV 2014*

Este apêndice fornece o artigo que resultou deste trabalho e foi apresentado oralmente e publicado no The 22<sup>nd</sup> International Conference on Magnetically Levitated Systems and Linear Drives (MAGLEV) 2014 realizado entre os dias 28 de setembro e 1 de outubro de 2014 no Rio de Janeiro - RJ.

# A Discrete-Time LQG/LTR Control Strategy for Magnetic Levitation Application

Luiz F. Pugliese, Luís H. C. Ferreira, and Jeremias B. Machado

Systems Engineering and Information Technology Institute  
Federal University of Itajubá, Itajubá, Minas Gerais, Brazil, 37500-903  
luizfelipe.pugliese@unifei.edu.br, luis@unifei.edu.br, jeremias@unifei.edu.br

## Abstract

The discrete-time version of the so-called Loop Transfer Recovery (LTR) principle applied to Linear Quadratic Gaussian (LQG) regulator was initially proposed by Maciejowski, where it is possible to make the open-loop transfer function equal to the Kalman filter dynamics. However, due to specific conditions of the discrete-time case, the integration method used in the augmentation of the plant can make the application of the LTR principle unfeasible. In this context, this work shows a strategy of augmenting the process plant of a magnetic levitator by backward Euler integrators and, from the augmented open-loop dynamics, tuning a discrete-time LQG/LTR regulator. The goal is to be able to reject the disturbances that may occur in the magnetic field or even variations in the parameters themselves using the discrete-time LQG/LTR control solution.

## 1 Introduction

The MAGLEV plant is an electromagnetic suspension acting on a device or metallic object. A possible magnetic levitation system consists of an electromagnet, located in the upper part of the device, capable of lifting a solid steel ball and maintaining a gap between the ball and its base through the magnetic field provided by the electromagnet. The system has two directly measured variables: the coil current and the distance of the steel ball from the base of the electromagnet [1].

In order to control the position of the steel ball it is necessary to control the electrical current applied to the electromagnetic coil. Several control techniques can be applied for this task as well as PID or robust control systems [2]. In this work, we have a special interest in the development of a control technique of magnetic levitation systems based on control LQG/LTR [3].

In the LQG/LTR methodology, adding “free” integrators in each control channel of the plant helps the designer to define a target feedback loop with good performance characteristics in the mixed sensitivity analysis. However, due to specific conditions of the discrete-time case, the integration method used in an augmented plant may derail the implementation of the Loop Transfer Recovery procedure [4]. In this context, backward Euler integrators are used to augment the open loop dynamics of the magnetic levitator and, from the augmented dynamics, a discrete-time LQG/LTR controller is developed to reject both disturbances that eventually may occur in the magnetic field produced by the coil of the apparatus and parameters variations such as the levitated mass. In addition, it is desired that the position of the ball smoothly and acceptably follow step variations in the input reference.

## 2 Modeling of the Magnetic Levitator

The schematic of magnetic levitation (MAGLEV) plant is shown in Figure 1 where the positive direction of vertical displacement is down to the origin of the global coordinates on the flat face of the electromagnet. Although the steel ball has six degrees of freedom, only the vertical axis  $x$  is controlled. It is also worth noting that the MAGLEV consists of two main systems: one electrical and one electromechanical.

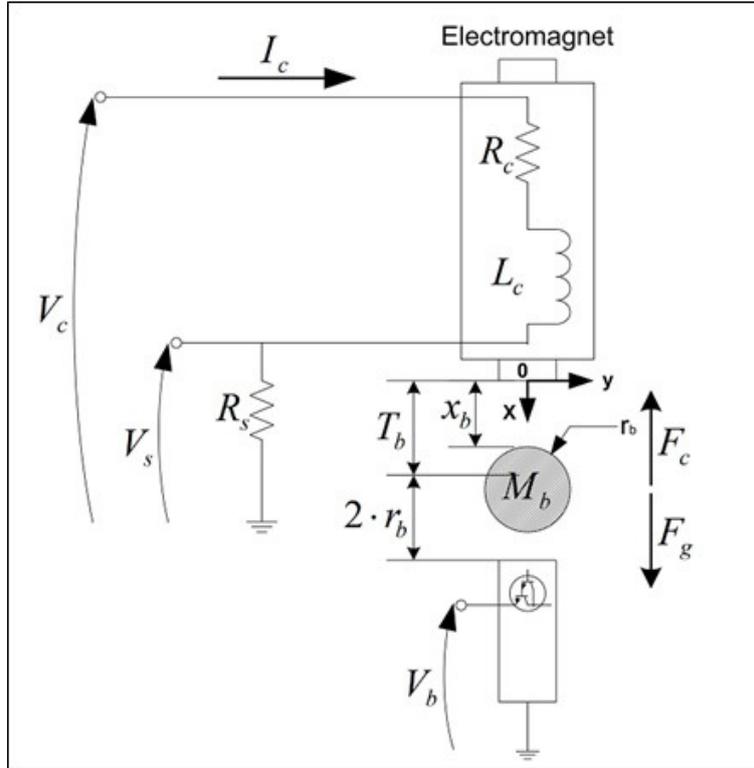


Figure 1: Schematic plant of the magnetic levitator [1].

It can be seen from Figure 1 that the MAGLEV has a coil inductance  $L_c$  and a resistance  $R_c$ . Furthermore, the actual system is equipped with a resistance  $R_s$  in series with the coil. The voltage  $V_s$  is used to measure the current in the coil, which can be calculated by

$$V_s(t) = R_s i_c(t) . \quad (1)$$

By Kirchhoff's voltage law, we obtain the first order differential equation

$$V_c(t) = (R_c + R_s) i_c(t) + L_c \frac{di_c}{dt} , \quad (2)$$

in which  $R_c$  and  $L_c$  are, respectively, the resistance and inductance of the coil,  $I_c$  is the coil current,  $V_c$  is the voltage applied to the coil and  $R_s$  is the resistance of the sense current. Applying the Laplace transform to the differential equation (2) results in

$$V_c(s) = (R_c + R_s) I_c(s) + L_c s I_c(s) \quad (3)$$

which can be represented by the first order transfer function

$$G_c(s) = \frac{I_c(s)}{V_c(s)} = \frac{\frac{1}{R_c + R_s}}{\frac{L_c}{R_c + R_s}s + 1} . \quad (4)$$

Equation (4) can also be represented by

$$G_c(s) = \frac{I_c(s)}{V_c(s)} = \frac{K_c}{\tau_c s + 1} , \quad (5)$$

in which  $K_c$  is the DC gain and  $\tau_c$  is the time constant. According to the MAGLEV user manual, these values are

$$K_c = \frac{1}{R_c + R_s} = 0.0909 \text{ [A/V]} \quad (6)$$

and

$$\tau_c = \frac{L_c}{R_c + R_s} = 0.0375 \text{ [seconds]} . \quad (7)$$

Note that the open loop system is stable, since its pole  $s = \frac{-1}{\tau_c}$  is in the left half-plane.

## 2.1 Nonlinear Model

Using the notations and conventions given in Figure 1, the attractive force generated by the electromagnet acting on the steel ball can be expressed by

$$F_c = \frac{K_m i_c(t)^2}{2x_b^2} , \quad (8)$$

in which  $x_b$  is the distance between face of the electromagnet and steel ball and  $K_m$  is the constant of the electromagnetic force. From equation (8), one realizes that the attraction of the electromagnet is proportional to the square of the current and inversely proportional to the square of distance  $x_b$ . Defining  $g$  as the gravitational constant, the force of gravity acting on the steel ball is determined by

$$F_g = M_b g . \quad (9)$$

Thus, the total external force applied by gravity and the electromagnet on the steel ball is given by

$$F_{ext} = -F_c + F_g = -\frac{K_m i_c(t)^2}{2x_b^2} + M_b g . \quad (10)$$

Applying Newton's second law of motion we have that the position of the steel ball follows the following equation of motion [1]

$$\ddot{x}_b(t) = -\frac{K_m i_c(t)^2}{2M_b x_b(t)^2} + g . \quad (11)$$

## 2.2 Linear Model

The nominal coil current  $i_{c0}$  for the electromagnet-sphere pair can be determined from the static equilibrium state of the system. The static equilibrium of a nominal operating point  $(x_{b0}, i_{c0})$  is characterized by the suspension of the steel ball in the air in a position  $x_{b0}$  due to a constant magnetic force generated by the coil current  $i_{c0}$ .

The first step in designing the position controller is obtaining the open loop transfer function of the plant. To this end, the nonlinear equation of motion given in (11) must be linearized around an operating point.

In the case of the sphere levitating, the operating range corresponds to small perturbations on the position  $\delta x_b$  and current  $\delta i_c$  from the desired point of equilibrium  $(x_{b0}, i_{c0})$ . Therefore,  $x_{b0}$  and  $i_{c0}$  can be expressed as the sum of two terms as shown

$$x_b = x_{b0} + \delta x_b , \quad (12)$$

$$i_c = i_{c0} + \delta i_c . \quad (13)$$

At equilibrium we have  $x_b(t) = x_{b0}$  and  $i_c(t) = i_{c0}$ . Also, the electromagnetic force is equal to the gravitational force on the steel ball, i. e.,

$$\frac{K_m i_{c0}^2}{2x_{b0}^2} + M_b g = 0 . \quad (14)$$

Thus, it follows that the coil current can be calculated for any desired operating point, that is, to any position  $x_{b0}$ , isolating  $i_{c0}$  in the equation (14) leads to

$$i_{c0} = \sqrt{\frac{2M_b g}{K_m}} x_{b0} . \quad (15)$$

The electromagnetic force constant,  $K_m$ , can then be calculated by

$$K_m = \frac{2M_b g x_{b0}^2}{i_{c0}^2} . \quad (16)$$

Considering  $x_b = x_{b0}$  and  $i_c = i_{c0}$ , we can linearize the nonlinear equation of motion for the magnetic levitator to obtain the following form

$$\begin{aligned} \delta \ddot{x}_b &= -\frac{K_m i_{c0}^2}{2M_b x_{b0}^2} + g + \frac{K_m i_{c0}^2}{M_b x_{b0}^3} (x_b - x_{b0}) - \frac{K_m i_{c0}^2}{M_b x_{b0}^2} (i_c - i_{c0}) = \\ &= -\frac{K_m i_{c0}^2}{2M_b x_{b0}^2} + g + \frac{K_m i_{c0}^2}{M_b x_{b0}^3} \delta x_b - \frac{K_m i_{c0}^2}{M_b x_{b0}^2} \delta i_c . \end{aligned} \quad (17)$$

Substituting the expression (16) in (17), we have

$$\delta \ddot{x}_b = \frac{2g}{x_{b0}} \delta x_b - \frac{2g}{i_{c0}} \delta i_c . \quad (18)$$

The Laplace transform on the simplified expression (18) is given by

$$s^2 \Delta X_b(s) = \frac{2g}{x_{b0}} \Delta X_b(s) - \frac{2g}{i_{c0}} \Delta I_c(s) . \quad (19)$$

Thus, the transfer function relating the coil current and the position of the steel ball on the operating point can be represented by

$$G_b(s) = \frac{\Delta X_b(s)}{\Delta I_c(s)} = -\frac{K_b \omega_n^2}{s^2 - \omega_b^2} = \frac{-\frac{2g}{i_{c0}}}{s^2 - \frac{2g}{x_{b0}}} , \quad (20)$$

in which  $K_b$  is the steady state DC gain and  $\omega_b$  is the natural frequency. Due to the displacement of the operating point, the initial conditions are considered to be zero, i.e.,  $\delta x_b(0) = 0$  and  $\delta i_c(t) = 0$ . The DC gain is obtained by

$$K_b = \frac{x_{b0}}{i_{c0}} \quad (21)$$

and the natural frequency by

$$\omega_b = \sqrt{\frac{2g}{x_{b0}}} . \quad (22)$$

The open loop system is unstable, since its poles are  $s = \pm\omega_b$  [1].

### 3 The Discrete-Time LQG/LTR Technique

This section presents a theoretical review of the discrete-time LQG/LTR control. A discrete-time linear time-invariant dynamic system can be represented in state variables as

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Lw_x(k) \quad (23a)$$

$$y(k) = Cx(k) + \mu Iw_y(k) \quad (23b)$$

$$z_x(k) = Hx(k) \quad (23c)$$

$$z_u(k) = \rho Iu(k) , \quad (23d)$$

in which  $x \in \mathbb{R}^n$  is the state vector,  $u \in \mathbb{R}^m$  is the vector of control inputs and  $y \in \mathbb{R}^m$  is the vector of measurements of the plant output. In the typical LQG control problem, the signals  $w_x$  and  $w_z$  represent, respectively, Gaussian noises at the input and output of the plant. The signals  $z_x$  and  $z_u$  are auxiliary response variables related to performance criteria. Matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  and  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  constitute a state-space representation of the process plant  $G = (A, B, C, 0)$ , which can also be written as

$$G(z) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] , \quad (24)$$

in which matrix pairs  $(A, B)$  and  $(A, C)$  are, respectively, stabilizable and detectable. The process plant is also considered square and strictly proper. The plant  $G(z)$  can also be represented by a transfer function as follows

$$G(z) = C\Phi(z)B \quad (25)$$

with

$$\Phi(z) = (zI - A)^{-1} . \quad (26)$$

The processing time of the control algorithm is considered negligible when compared to the interval between the measurements of the output of the plant. Thus, an current state estimator can be used and the signal  $u(k)$  can only depend on the control measurements up to  $y(k)$ . A state space representation of the controller  $K(z)$  is given by

$$\frac{K(z)}{z} = \left[ \begin{array}{c|c} (A - BK_c)(I - K_f C) & K_f \\ \hline K_c & 0 \end{array} \right] , \quad (27)$$

in which  $K_c$  and  $K_f$  are, respectively, the state-feedback and state-observer gain matrices, given by

$$K_c = (\rho^2 I + B^T X B)^{-1} B^T X A , \quad (28)$$

$$K_f = Y C^T (\mu^2 I + C Y C^T)^{-1} , \quad (29)$$

and  $X$  and  $Y$  are the symmetric matrices solutions of the following discrete-time algebraic Riccati equation

$$A^T X A - X - A^T X B (\rho^2 I + B^T X B)^{-1} B^T X A + H^T H = 0 , \quad (30)$$

$$A^T Y A - Y - A Y C^T (\mu^2 I + C Y C^T)^{-1} C Y A^T + L L^T = 0 . \quad (31)$$

Particularizing for the LQG/LTR control, it is assumed that  $G(z)$  is minimum phase and the rank of the matrix product  $CB$  is equal to  $m$ . It is worth noting that the requirement of the rank of the product  $CB$  to be equal to  $m$  is an unique constraint of the discrete-time LQG/LTR, with no equal restriction for the continuous-time domain.

The regulator matrix gain  $K_c$  is designed so that the open loop transfer function  $G(z)K(z)$  is equal to  $C\Phi(z)AK_f$ . Assuming  $w_x$ ,  $w_y$  and  $z_x$ ,  $z_u$  are auxiliary variables, the parameters  $\rho$ ,  $H$ ,  $\mu$  and  $L$  can then be freely chosen so that the system achieves the desired characteristics.

If the matrix  $H$  is chosen to be equal to the matrix  $C$ , and the scalar  $\rho$  is chosen equal to zero, the state-feedback gain matrix is given by [5]

$$K_c = (CB)^{-1} CA , \quad (32)$$

and, consequently, the open loop transfer function is given by

$$G(z)K(z) = C\Phi(z)AK_f . \quad (33)$$

Thus, exact recovery of the target feedback loop can be obtained. When the processing time of the control signal is considerable and cannot be neglected, a predictive state estimator must be used, in which  $u(k)$  can depend only in measurements up to  $y(k-1)$ . In the case, the target feedback loop can be recovered only approximately [6].

As the scalar  $\rho$  must be made equal to zero and the matrix  $H$  must be equal to the matrix  $C$ , the parameters that are free to specify the target feedback loop are the scalar  $\mu$  and the matrix  $L$ . Equation (31) can be rewritten as the Kalman's dual equality for the Kalman state observer, which is given by [7]

$$(I + C\Phi(z)AK_f)(I + \mu^{-2}CYC^T)(I + C\Phi(z)AK_f)^* = I + \mu^{-2}C\Phi(z)L[C\Phi(z)L]^* \quad (34)$$

in which  $*$  denotes the complex-conjugate transposed matrix.

The sensitivity function  $S(z)$  and the complementary sensitivity function  $T(z)$  are defined as

$$S(z) = (I + G(z)K(z))^{-1} \quad (35)$$

$$T(z) = G(z)K(z)(I + G(z)K(z))^{-1} . \quad (36)$$

From (33) and (34), the bounds on the performance of the discrete-time LQG/LTR control in terms of sensitivity and complementary sensitivity are given by

$$\sigma_{max}(S(z)) \leq 1 + \varepsilon \quad (37)$$

$$\sigma_{max}(T(z)) \leq 2 + \varepsilon \quad (38)$$

$$\sigma_{max}(S(z)) \leq \mu(1 + \varepsilon)\sigma_{max}(C\Phi(z)L^{-1}) \quad (39)$$

in which

$$\varepsilon = \mu^{-1} \sqrt{\lambda_{max}(CYC^T)} \quad (40)$$

is a non-negative scalar, since the matrix  $Y$  is positive semi-definite, and, therefore, the maximum eigenvalue of the matrix  $CYC^T$  is non negative. The discrete-time LQG/LTR control has characteristics similar to those of the continuous-time LQG/LTR control in the mixed sensitivity analysis, which are degenerate in function of the scalar  $\varepsilon$ . It can be observed that the smaller the sampling rate, the smaller is the value of  $\varepsilon$ , approaching the frequency response of the discrete-time to the continuous-time approach [4].

### 3.1 Augmentation of the Dynamics of a Plant

Consider two dynamical systems with representation in state variables  $G_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1)$  and  $G_2 = (A_2, B_2, C_2, D_2)$  connected in series as shown in Figure 2.

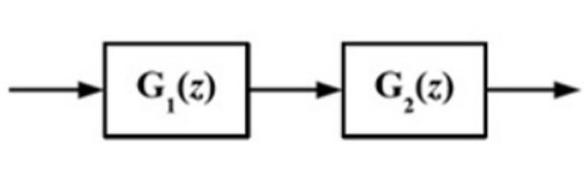


Figure 2: Connecting systems in series.

This connection can be represented as  $G_2G_1 = (A, B, C, D)$ , with a state space representation given by

$$G_2G_1 = \left[ \begin{array}{cc|c} A_2 & B_2C_1 & B_2D_1 \\ 0 & A_1 & B_1 \\ \hline C_2 & D_2C_1 & D_2D_1 \end{array} \right]. \quad (41)$$

Consider that  $G_2$  is a discrete-time representation of a strictly proper process plant described by  $G_2 = (A_p, B_p, C_p, 0)$  with sampling time  $T$ . If  $G_1$  is an integrator given by

$$G_1 = T \frac{z}{z-1} I, \quad (42)$$

corresponding to the backward Euler method, with state space representation given by  $G_1 = (I, IT, I, IT)$ , the product  $G_2G_1$  has a state space representation given by

$$G_2G_1 = \left[ \begin{array}{cc|c} A_p & B_p & TB_p \\ 0 & I & TI \\ \hline C_p & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (43)$$

For this approach, the rank of the matrix product  $CB$  of  $G_2G_1$  is equal to the rank of the matrix  $C_pB_p$  of the process plant, i. e.,

$$\text{rank}(CB) = \text{rank}(C_pB_p). \quad (44)$$

This means that this characteristic of the process plant remains unaltered after the augmentation of the plant by backward Euler integrators. Thus, this augmentation can be used in the application of the discrete-time LQG/LTR control method. The same does not occur if the integrator used is based on the forward Euler method, since the use of this method causes the rank of matrix  $CB$  to be equal to zero [4].

### 3.2 Target Feedback Loop Parameterization

If the transfer function  $C\Phi(z)G$  is made equal to a matrix of integrators, as a result of (39), the bound on the sensitivity function is related to the behavior of the inverse of an integrator. Thus, at low frequencies its maximum singular value is small and will increase at a rate of 20 [dB/dec], resulting in good characteristics related to the tracking of the reference signal and disturbance rejection [2].

Based on this idea, the matrix  $L$  can be partitioned into two sub-matrices [3] as follows

$$L = \begin{bmatrix} L_H \\ L_L \end{bmatrix} \quad (45)$$

with the matrix  $L_L$  affecting the behavior of the system at low frequencies and the matrix  $L_H$  affecting the behavior at high frequencies. Thus, for a plant  $G_p = (A_p, B_p, C_p, 0)$  augmented by integrators at the input, the transfer matrix  $C\Phi(z)L$  has the following format

$$C\Phi(z)L = \left[ \begin{array}{cc|c} A_p & B_p & L_H \\ 0 & I & L_L \\ \hline C_p & 0 & 0 \end{array} \right] . \quad (46)$$

The parameterization of the matrix  $L$  proposed in [4] obtained by a procedure analogous to that presented in [8] has the following form

$$\begin{bmatrix} L_H \\ L_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(A_p - I)^{-1}B_pW \\ W \end{bmatrix} , \quad (47)$$

with  $W = -T(C_p(A_p I)^{-1}B_p)^{-1}$ . It can be shown that after some algebraic manipulations transfer function  $C\Phi(z)L$  results in

$$C\Phi(z)L = T \frac{1}{z-1} I. \quad (48)$$

In the process plant augmented by backward Euler integrators, the transfer function  $C\Phi(z)L$  is made equal to a transfer matrix of forward Euler integrators. Thus, the forward Euler integrator cannot be used to augment a plant for not meeting the requirement related to the rank of the matrix  $CB$ , but is favorable to be recovered as dynamics of  $C\Phi(z)L$  since it is a strictly proper system. With the  $L$  matrix given by (47), the bound for the sensitivity function in (39) can be rewritten as

$$\sigma_{max}(S(e^{j\omega T})) \leq \mu(1 + \varepsilon) \frac{2}{T} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) . \quad (49)$$

Thus, adjusting the sampling time to a suitable value so that the sine approximation for small angles is valid, the performance bounds of the control discrete-time LQG/LTR control can also be rewritten in a simplified form as

$$\sigma_{max}(S(e^{j\omega T})) \leq \mu(1 + \varepsilon) \min(\mu\omega, 1) , \quad (50)$$

$$\sigma_{max}(T(e^{j\omega T})) \leq 2 + \varepsilon , \quad (51)$$

facilitating the mixed sensitivity analysis of the control loop so that the desired behavior is achieved [4].

## 4 Application

Our evaluation, simulations and measurements were performed in a magnetic levitator made by the company Quanser [1]. Regulating and monitoring tests were conducted to demonstrate that the proposed discrete-time control strategy have significant results. The variation of the steel ball position has been considered from 0 [mm] to 14 [mm], so calculated values of the coil current for several positions in this range are shown in Table 1.

Table 1: Operating points.

$x_{b0}$	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007
$i_{c0}$	0.144	0.288	0.432	0.576	0.720	0.864	1.008
$x_{b0}$	0.008	0.009	0.010	0.011	0.012	0.013	0.014
$i_{c0}$	1.152	1.296	1.440	1.584	1.728	1.872	2.016

After calculating the coil current for each operating point, we have chosen an operating point to work. The system was linearized with the position of the ball at 6.00 [mm], where the system model has two real poles with the same frequency, however, one is stable and the other is unstable. For the position  $x_b = 6.00$  [mm] and the current coil  $i_c = 0.864$  [A], the magnetic levitator plant is given by

$$G(s) = \frac{-22.81}{s^2 - 3270} . \quad (52)$$

A discrete-time state space representation has been obtained from the plant transfer function, discretized with a sampling time of 0.01 [seconds], and augmented using backward Euler integrators. After specifying the parameters of the LQG/LTR procedure, the controller capable of acting on the plant and reject disturbances is described by matrices  $A_c$ ,  $B_c$ ,  $C_c$  and  $D_c$  as follows

$$A_c = \begin{bmatrix} -0.7309 & -12.48 & 0.00004337 \\ 0.00131 & 0.01451 & 0.0000002111 \\ -179.9 & 2718 & 0.00411 \end{bmatrix} , \quad (53a)$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 6.213 \\ -0.01029 \\ 903 \end{bmatrix} , \quad (53b)$$

$$C_c = [ 17990 \quad -289400 \quad 99.59 ] , \quad (53c)$$

$$D_c = [ -91070 ] . \quad (53d)$$

Thus, from the linearized system at a desired operating point, it is possible to determine a controller to be applied in the nonlinear model of the magnetic levitator, which can be verified by practical tests.

For the purpose of simulation and practical tests, firstly a disturbance of 0.50 [mm] on the position of the ball has been considered. After that, a change of  $\pm 0.25$  [mm] around the reference position has been considered. Figures 3 and 4 show a comparison between the simulation (dashed lines) and the actual test (solid lines) performed in the magnetic levitator.

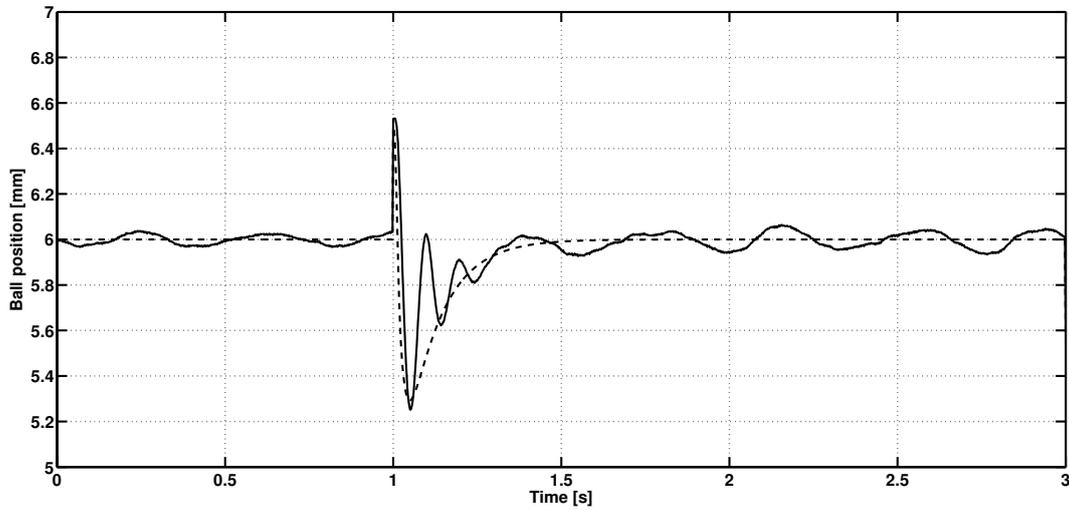
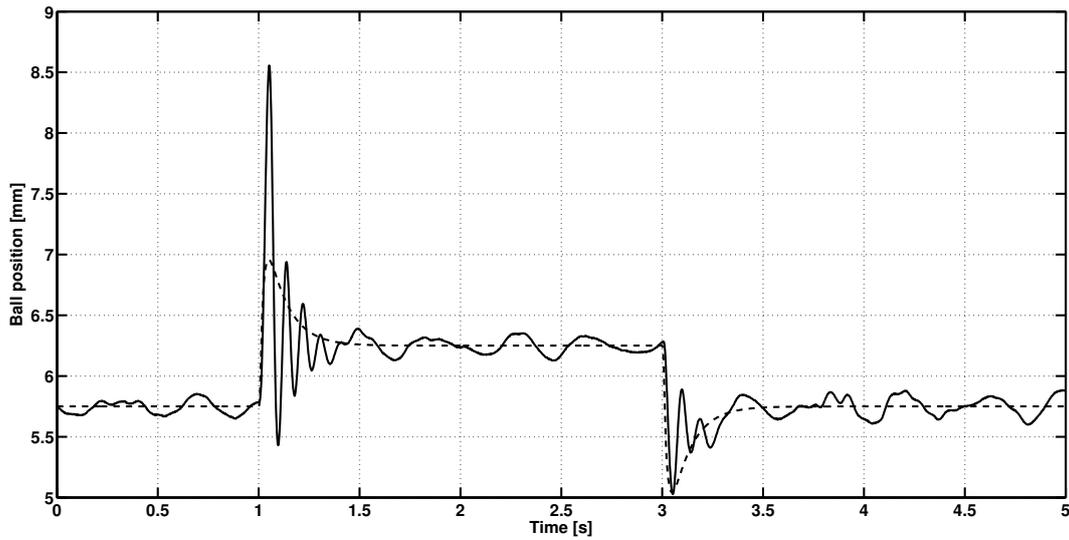


Figure 3: Disturbance of 0.50 [mm].

Figure 4: Variation of  $\pm 0.25$  [mm] in the reference of the ball position.

## 5 Conclusion

From Figure 3 and 4, the ability of the resulting system to reject the disturbance of 0.50 [mm] with the position reference fixed at 6.00 [mm] can be seen, following very closely the behavior of the simulated linear model. It is also possible to note that the application of changes of  $\pm 0.25$  [mm] at the reference of the steel ball (initially at 6.00 [mm]) also results in good responses in the real system. These results demonstrate that the proposed discrete-time LQG/LTR control strategy is suitable for application in magnetic levitation systems.

## Acknowledgment

The authors wish to thank CAPES and FAPEMIG for the financial support provided to those involved in this work. This work was supported in part by the FAPEMIG Foundation, a research agency of the Minas Gerais State, Grant APQ-01951-12.

## References

- [1] Quanser Inc. *Magnetic Levitation Workbook*. 2012.
- [2] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable feedback control: analysis and design*. Wiley New York, 2005.
- [3] M. Athans. A tutorial on the LQG/LTR method. In *American Control Conference*, pages 1289–1296, 1986.
- [4] F. H. D. Guaracy, D. L. F. da Silva, and L. H. C. Ferreira. Sobre a expansão da dinâmica de uma planta por integradores no controle LQG/LTR em tempo discreto (in portuguese). In *Congresso Brasileiro de Automática*, 2014.
- [5] J. M. Maciejowski. Asymptotic recovery for discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(6):602–605, 1985.
- [6] G. C. Goodman. *The LQG/LTR method and discrete-time control systems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1984.
- [7] C. C. Arcasoy. Return-difference-matrix properties for optimal stationary discrete Kalman filter. In *Institution of Electrical Engineers*, pages 1831–1834, 1971.
- [8] D. L. F. da Silva, C. F. de Paula, and L. H. C. Ferreira. Sobre a parametrização da malha objetivo no controle H infinito/LTR (in portuguese). In *Congresso Brasileiro de Automática*, 2012.