

TESE

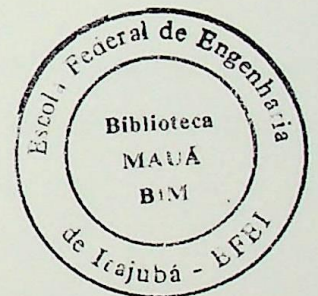
899

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS AO
ESTUDO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR
CONDUÇÃO EM CORPOS BI E TRIDIMENSIONAIS EM
REGIME PERMANENTE E NÃO PERMANENTE

JOÃO BATISTA DIAS



ORIENTADOR: PROF. DR. GENÉSIO JOSÉ MENON

Dissertação Apresentada ao Curso de Pós-graduação em Engenharia Mecânica como Parte dos Requisitos para a Obtenção do Título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica na Área de Concentração em Conversão de Energia.

ITAJUBÁ - MG

1996

CLASS. 536.24(043.2)

CU1 D541a

TOMBO. 899

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA

BIBLIOTECA MAUÁ - EFEI

536.24(043.2)

D541a

Dias, João Batista

Aplicação do Método de Elementos Finitos ao Estudo da Transferência de Calor por Condução em Corpos Bi e Tridimensionais em Regime Permanente e Não Permanente: aplicações em engenharia mecânica/por João Batista Dias; Orientado por Genésio José Menon.-- Itajubá, MG: [s.n.], 1996.

124 p.:il.

Dissertação (mestrado em Engenharia Mecânica) - Escola Federal de Engenharia de Itajubá.

1. Transferência de calor. 2. Condução. 3. Métodos numéricos.
4. Método de elementos finitos. I. Menon, Genésio José, orient. II. Escola Federal de Engenharia de Itajubá. III. Título.



JOÃO BATISTA DIAS

ORIENTADOR: PROF. DR. GENÉSIO JOSÉ MENON

Apresentação aprovada ao Curso de Pós-graduação em Engenharia Mecânica
como Parte das Requisitos para a Obtenção do Título de Mestre em Ciências em
Engenharia Mecânica na Área de Concentração em Construção de Estruturas.

ITAJUBÁ - MG

1996

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS AO
ESTUDO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR
CONDUÇÃO EM CORPOS BI E TRIDIMENSIONAIS EM
REGIME PERMANENTE E NÃO PERMANENTE

João Batista Dias

Membros da Banca Examinadora

- 1 - Prof. Dr. Carlos Daniel Ebinuma
- 2 - Prof. M.Sc. Manuel da Silva Valente de Almeida
- 3 - Prof. Dr. Vilmar Arthur Schwarz
- 4 - Prof. Dr. Genésio José Menon (orientador)

ITAJUBÁ - MG

1996

Agradecimentos

Agradeço a Deus, aos meus pais, aos meus amigos e ao meu orientador que me ajudou muito durante a realização deste trabalho. Agradeço também ao CNPQ que me concedeu a bolsa de mestrado.

RESUMO

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais que trabalharam muito para que seus filhos tivessem a oportunidade de estudar. Que Deus os tenha!

Palavras-chave: 1 - Transformação de Calor, 2 - Calor Específico, 3 - Método de Newton,

4 - Método de Elementos Finitos

RESUMO

ABSTRACT

Neste trabalho estudam-se problemas de transferência de calor por condução com a utilização do método de elementos finitos. Todo o equacionamento do método é desenvolvido para os domínios bidimensionais e tridimensionais, tanto para o regime permanente quanto para o não permanente. Os elementos triangular linear e quadrilateral quadrático de oito nós são equacionados para o domínio bidimensional, enquanto que o elemento tetraédrico linear é utilizado para o domínio tridimensional. As condições de contorno consideram fluxo de calor conhecido, distribuição de temperatura conhecida e convecção imposta. Internamente ao corpo pode haver geração de energia concentrada ou distribuída. O material pode ser isotrópico ou anisotrópico.

Com a finalidade de validação dos modelos numéricos desenvolvidos são feitos testes para uma placa plana infinita em regime permanente, um tubo infinito em regime permanente e para um corpo com a forma de um paralelepípedo em regime não permanente. Finalmente os modelos numéricos são então aplicados para uma aleta em regime permanente, para um mancal de deslizamento em regime permanente e não permanente e para três casos de pás de turbina a gás em regime não permanente.

Palavras-chave: 1 - Transferência de Calor, 2 - Condução, 3 - Métodos Numéricos,
4 - Método de Elementos Finitos

Resumo

Abstract

Comentário

Introdução

ABSTRACT

This work deals with heat transfer problems by conduction, by applying the finite element method. The theoretical analysis is developed for bidimensional and threedimensional dominium, for both the steady state and the unsteady state. The linear triangular elements and the quadrilateral quadratic eight nodes elements are utilized for the bidimensional dominium, as the linear tetrahedral element is applied for the threedimensional dominium. The boundary conditions are considered as known heat flux and specified temperature distribution or convection. Internal concentrated or distributed heat generation may also occur. The material may either be isotropical or anisotropical.

For the validation of the numerical models various tests are carried out for a steady state infinite plane plate, a steady state infinite tube and for an unsteady state parallelepiped. Finally, the numerical models are applied for a steady state fin, for a journal bearing in both the steady and unsteady states, and for three different gas turbine blades in unsteady state.

Key Words: 1 - Heat Transfer, 2 - Conduction, 3 - Numerical Methods,
4 - Finite Elements Method.

CONTEÚDO

	Página
Resumo	i
Abstract	ii
Conteúdo	iii
Simbologia	viii
Índice de Tabelas	xi
Índice de Figuras	xii
Capítulo 1 - Introdução	
1.1 - Generalidades	1
1.2 - Histórico do Método	1
1.3 - Revisão da Literatura	3
1.4 - Objetivos do Presente Trabalho	5
1.5 - Delineamento deste Trabalho	5
Capítulo 2 - Método de Solução	
2.1 - Introdução	7
2.2 - Equações de Elementos Finitos para Elemento Triangular em Regime Permanente	8
2.2.1 - Formulação do Problema	8
2.2.2 - Minimização do Funcional do Elemento	9
2.2.3 - Definição das Matrizes para o Elemento	10
2.2.4 - Determinação das Integrais para o Elemento	11
2.3 - Equações de Elementos Finitos para Elemento Triangular em Regime Não Permanente	15

2.3.1 - Formulação do Problema	15
2.3.2 - Minimização do Funcional do Elemento	15
2.3.3 - Definição das Matrizes para o Elemento	16
2.3.4 - Determinação das Integrais para o Elemento	16
2.4 - Equações de Elementos Finitos para Elemento Tetraédrico em Regime Permanente	17
2.4.1 - Formulação do Problema	17
2.4.2 - Minimização do Funcional do Elemento	18
2.4.3 - Definição das Matrizes para o Elemento	20
2.4.4 - Determinação das Integrais para o Elemento	22
2.5 - Equações de Elementos Finitos para Elemento Tetraédrico em Regime Não Permanente	26
2.5.1 - Formulação do Problema	26
2.5.2 - Minimização do Funcional do Elemento	26
2.5.3 - Definição das Matrizes para o Elemento	27
2.5.4 - Determinação das Integrais para o Elemento	27
2.6 - Equações de Elementos Finitos para Elemento Quadrilateral Quadrático de Oito Nós em Regime Permanente	27
2.6.1 - Formulação do Problema	28
2.6.2 - Minimização do Funcional do Elemento	28
2.6.3 - Definição das Matrizes para o Elemento	29
2.6.4 - Determinação das Integrais para o Elemento	38
2.7 - Equações de Elementos Finitos para Elemento Quadrilateral Quadrático de Oito Nós em Regime Não Permanente	41
2.7.1 - Formulação do Problema	41
2.7.2 - Minimização do Funcional do Elemento	42
2.7.3 - Definição das Matrizes para o Elemento	42
2.7.4 - Determinação das Integrais para o Elemento	43

2.8 - Descrição dos Programas	43
-------------------------------	----

Capítulo 3 - Resultados

3.1 - Introdução	48
------------------	----

3.2 - Validação do Método	48
---------------------------	----

3.2.1 - Uso do Elemento Triangular para uma Placa Plana Infinita em Regime Permanente	48
---	----

3.2.2 - Uso do Elemento Quadrilateral e do Elemento Tetraédrico para um Tubo Infinito em Regime Permanente	50
--	----

3.2.3 - Uso do Elemento Tetraédrico para um Corpo em Regime Não Permanente	53
--	----

3.3 - Aplicação do Método de Elementos Finitos para uma Aleta em Regime permanente	57
--	----

3.4 - Aplicação do Método de Elementos Finitos para um Mancal de Deslizamento	60
---	----

3.4.1 - Mancal em Regime Permanente	65
-------------------------------------	----

3.4.2 - Mancal em Regime Não Permanente	67
---	----

3.5 - Aplicação do Método de Elementos Finitos para Pás de Turbina a Gás	69
--	----

3.5.1 - Avaliação do Caso 1	70
-----------------------------	----

3.5.2 - Avaliação do Caso 2	75
-----------------------------	----

3.5.3 - Avaliação do Caso 3	76
-----------------------------	----

Capítulo 4 - Conclusões e Recomendações

4.1 - Conclusões	80
------------------	----

4.2 - Recomendações para Trabalhos Futuros	82
--	----

Apêndice A1 - Dedução da Equação Geral da Transferência de Calor por Condução	83
---	----

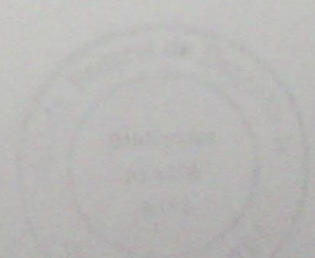
A1.1 - Introdução	83
A1.2 - Equação Geral	83
A1.3 - Casos Particulares	85
Apêndice A2 - Alguns Aspectos do Cálculo Variacional	
A2.1 - Introdução	86
A2.2 - Encontrando o Funcional	86
Apêndice A3 - Método Variacional para a Equação Diferencial em Regime Permanente	
A3.1 - Introdução	90
A3.2 - Método variacional	90
Apêndice A4 - Método Variacional para Equação Diferencial em Regime Não Permanente	
A4.1 - Introdução	94
A4.2 - Método Variacional	94
A4.3 - Matriz do Elemento $[C^e]$	96
A4.4 - Aproximação do Termo $d\{\phi\}/dt$	97
Apêndice A5 - Determinação das Funções de Forma	
A5.1 - Introdução	100
A5.2 - Funções de Forma para o Elemento Triangular Linear	100
A5.3 - Funções de Forma para o Elemento Tetraédrico Linear	103
A5.4 - Funções de Forma para o Elemento Quadrilateral Quadrático de Oito Nós	105
Apêndice A6 - Técnica da Quadratura de Gauss-Legendre	
A6.1 - Introdução	109
A6.2 - A Técnica da Quadratura de Gauss-Legendre	109
A6.2.1 - Caso Unidimensional	109

A6.2.2 - Caso Bidimensional

Apêndice A7 - Demonstração de $dx dy = |\det [J]| d\xi d\eta$

Bibliografia

(Faint, illegible text in the table of contents)



SIMBOLOGIA

CARACTERES LATINOS

Símbolo	Designação	Página
a	coeficiente	20
A	área	11
A^e	área do elemento	10
A_{ijk}	área da superfície ijk do elemento tetraédrico	21
b	coeficiente	10
$[B^e]$	matriz das derivadas parciais das funções de forma para o elemento	9
$[B^e]^T$	matriz transposta das derivadas parciais das funções de forma para o elemento	9
c	coeficiente	10
c_p	calor específico a pressão constante	7
$[C^e]$	matriz capacitância para o elemento	16
$[C]$	matriz capacitância global	96
$[C_0]$	matriz coordenada do elemento	20
d	coeficiente	20
\det	determinante	35
$[D^e]$	matriz condutividade térmica do elemento	9
\hat{e}_x	versor direcional da normal à superfície com relação ao eixo x	88
F	função genérica	87
$\{g^e\}$	matriz gradiente para o elemento	91
h	coeficiente de convecção	7
I^e	funcional do elemento	9
I	funcional global	9
$[J]$	matriz Jacobiana	31
$[J_0]$	matriz Jacobiana para o lado do elemento	37
K	condutividade térmica	83
K_{xx}	condutividade térmica na direção x	7
K_{yy}	condutividade térmica na direção y	7
K_{zz}	condutividade térmica na direção z	7
$[K]^e$	matriz rigidez para o elemento	9
$[K]$	matriz rigidez global	9
$[K_1]^e$	matriz condução para o elemento	11



$[K_2]^e$	matriz convecção, da matriz de rigidez, para o elemento	11
l	comprimento do lado do elemento	11
l_x, l_y, l_z	cosenos diretores do vetor normal à superfície	7
L	comprimento do lado do elemento	37
m	número de pontos de integração na direção ξ	38
n	número de pontos de integração na direção η	38
N	função de forma nodal do elemento	10
$[N^e]$	matriz função de forma do elemento	9
$[N^e]^T$	matriz função de forma do elemento transposta	9
q	fluxo de calor	7
q'''	fonte de geração interna de energia	84
Q	fonte de geração interna de energia	7
$\{R\}^e$	vetor força do elemento	9
$\{R\}$	vetor força global	9
$\{R_1\}^e$	matriz geração interna distribuída	13
$\{R_2\}^e$	matriz fluxo de calor imposto	13
$\{R_3\}^e$	matriz convecção, do vetor força, para o elemento	14
S	semi-perímetro	21
S_1	superfície onde há fluxo de calor imposto	8
S_2	superfície onde há convecção	8
S_3	superfície onde há temperatura especificada	8
t	tempo	7
t_c	espessura unitária	11
V	volume	9
V^e	volume do elemento	9
W	peso para a integração numérica	38
x	coordenada global	7
X	coordenada local	20
y	coordenada global	7
Y	coordenada local	20
z	coordenada global	7
Z	coordenada local	20

CARACTERES GREGOS

α	difusibilidade térmica	85
Δt	intervalo de tempo	16
ξ, η	coordenadas naturais	30
λ	parâmetro que é o produto da densidade (ρ) pelo calor específico a pressão constante (c_p)	7
ρ	densidade	7
ϕ	temperatura que se quer calcular	7
ϕ_0	temperatura inicial da peça	53
ϕ_B	temperatura conhecida	7
ϕ_∞	temperatura do meio ambiente	7
Φ	temperatura nodal	100
$\{ \phi \}$	matriz temperatura global	9
$\{ \phi \}^c$	matriz temperatura do elemento	9
$\{ \phi \}^c_{\text{novo}}$	matriz temperatura do elemento, que está sendo calculada	16
$\{ \phi \}^c_{\text{velho}}$	matriz temperatura do elemento, que já foi calculada	16
ϵ	limite superior da somatória	9
φ	função de geometria	31

ÍNDICES

1,2,3,4,5,6,7,8	indicam o número do nó do elemento quadrilateral	29
e	elemento	9
i, j, k, l	pontos nodais do elemento	10
novo	indica o valor que está sendo calculado	16
p	indica o ponto nodal de uma maneira geral	31
T	transposta	9
velho	indica o valor que já era conhecido	16
α	indica o ponto nodal	10

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela	Designação	Página
2.1	Topologia dos elementos da figura 2.4	18
3.1	Distribuição de temperatura [$^{\circ}\text{C}$] para uma placa plana infinita	50
3.2	Distribuição de temperatura [$^{\circ}\text{C}$] para um tubo infinito	52
3.3	Variação da temperatura [$^{\circ}\text{C}$] no centro do corpo	55
3.4	Distribuição de temperatura [$^{\circ}\text{C}$] da aleta para $K = 50$ [$\text{W}/\text{m}^{\circ}\text{C}$]	59
3.5	Distribuição de temperatura [$^{\circ}\text{C}$] da aleta para $K = 5$ [$\text{W}/\text{m}^{\circ}\text{C}$]	59
3.6	Distribuição de temperatura [$^{\circ}\text{C}$] do mancal em regime permanente	65
A6.1	Valor de m para a integração numérica de Gauss-Legendre para os elementos bidimensionais nas direções ξ e η	115
A6.2	Localização e valores dos pesos para a integração numérica de Gauss-Legendre	115

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura	Designação	Página
2.1	Corpo dividido em elementos	8
2.2	Elemento triangular	8
2.3	Lado do elemento	12
2.4	Corpo dividido em elementos	17
2.5	Elemento tetraédrico	17
2.6	Elemento quadrilateral quadrático com oito nós e nove pontos de integração	40
2.7	Elemento quadrilateral quadrático com oito nós e dezesseis pontos de integração	40
2.8	Fluxograma geral para o regime permanente	46
2.9	Fluxograma geral para o regime não permanente	47
3.1	Placa plana infinita	49
3.2	Placa plana dividida em elementos triangulares	49
3.3	Tubo infinito	50
3.4	Tubo dividido em elementos quadrilaterais	51
3.5	Tubo dividido em blocos de elementos tetraédricos	52
3.6	Corpo a ser resfriado	53
3.7	Bloco dividido em 48 elementos tetraédricos	54
3.8	Bloco dividido em 96 elementos tetraédricos	54
3.9	Variação da temperatura no centro do corpo	56
3.10	Influência do intervalo de tempo na solução	57
3.11	Aleta dividida em 36 elementos tetraédricos	58
3.12	Aleta dividida em 72 elementos tetraédricos	58
3.13	Mancal de deslizamento	61
3.14	Parte do mancal que será analisada	61
3.15	Mancal dividido em elementos quadrilaterais quadráticos	62
3.16	Mancal dividido em elementos triangulares	63
3.17	Mancal dividido em blocos de elementos tetraédricos	64
3.18	Temperatura média do mancal em função do tempo	68
3.19	Influência do parâmetro λ	68
3.20	Influência do coeficiente de convecção	69
3.21	Pá de turbina, caso 1	70
3.22	Pá de turbina dividida em elementos quadrilaterais	71

3.23	Pá de turbina dividida em elementos triangulares	72
3.24	Pá de turbina dividida em elementos tetraédricos	73
3.25	Evolução da temperatura média da pá, caso 1	74
3.26	Pá de turbina, caso 2	75
3.27	Evolução da temperatura média das pás dos casos 1 e 2	76
3.28	Pá de turbina, caso 3	76
3.29	Pá de turbina, caso 3 dividida em elementos triangulares	77
3.30	Influência do parâmetro λ (caso 3)	78
3.31	Evolução da temperatura média para as pás dos casos 1, 2 e 3	79
A1.1	Elemento diferencial de volume	83
A4.1	Esquema de diferença finita central para a derivada $d\phi/dt$	98
A5.1	Elemento triangular linear	100
A5.2	Elemento tetraédrico linear	103
A5.3	Elemento quadrilateral quadrático de oito nós e a função de interpolação ϕ^e	106
A6.1	Função $f(\xi)$	109
A6.2	Elemento com um ponto de integração	116
A6.3	Elemento com quatro pontos de integração	116
A6.4	Elemento com nove pontos de integração	117
A6.5	Elemento com dezesseis pontos de integração	117
A7.1	Coordenadas xy e $\xi\eta$	118

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - Generalidades

O conhecimento da distribuição de temperatura no interior de um corpo é necessário em muitas aplicações da engenharia. O fluxo de calor através de um corpo pode ser calculado desde que se conheça a distribuição de temperatura. A avaliação das tensões térmicas também dependem da distribuição de temperatura. As tensões térmicas ocorrem quando um corpo passa por um gradiente de temperatura e não pode se expandir em todas as direções. Estas tensões térmicas são importantes, por exemplo, nos projetos de turbinas a gás e caldeiras.

A determinação analítica da distribuição de temperatura num corpo só é possível quando a geometria e as condições de contorno são simples. Como exemplo pode-se citar uma placa plana infinita ou um tubo infinito, ambos em regime permanente. Para um corpo de geometria qualquer e com condições de contorno complexas a solução analítica não é possível e o método de elementos finitos se apresenta como solução viável.

1.2 - Histórico do Método

O moderno desenvolvimento do método de elementos finitos iniciou por volta de 1940 na área da engenharia estrutural com os trabalhos de Hrennikoff (1941) e McHenry (1943), que usaram elementos unidimensionais de barras e vigas para determinar as tensões em sólidos. Courant (1943), publicou um artigo que não foi reconhecido durante vários anos, no qual propôs a determinação de problemas de tensão na forma variacional. Foi então, que ele apresentou as funções de forma em subdomínios triangulares como um método para se obter soluções numéricas aproximadas.

Levy (1947) desenvolveu o método da flexibilidade ou forças, Levy (1953), sugeriu o método dos deslocamentos como uma promissora alternativa para a análise estática de estruturas de aeronaves. Entretanto, as equações eram inviáveis para serem resolvidas manualmente, desse modo, o método só começou a se tornar popular com o advento do computador.

O primeiro estudo de elementos bidimensionais foi realizado por Turner, Clough, Martin & top (1956). Eles obtiveram as matrizes para elementos de barras, elementos de vigas e elementos triangulares e retangulares submetidos a tensões planas. Apresentaram também pela primeira vez o conhecido método para obtenção direta da matriz global. Com o desenvolvimento dos computadores de alta velocidade, o trabalho de Turner et al. (1956) prontamente incrementou

o desenvolvimento do método de elementos finitos expresso em notação matricial.

O nome "elementos finitos" foi primeiramente introduzido por Clough (1960), quando utilizou elementos triangulares e retangulares na análise plana de tensões.

A extensão do método de elementos finitos para problemas tridimensionais usando elementos tetraédricos foi realizada por Martin (1961), por Gallagher, Padlog & Bijlaard (1962) e por Melosh (1963). Outros elementos tridimensionais foram estudados por Argyris (1964). O caso especial de sólidos axissimétricos foi estudado por Clough & Rashid (1965) e Wilson (1965).

A maioria dos trabalhos realizados antes de 1960 tratavam de pequenas tensões e deformações, materiais de comportamento elástico e carregamentos estáticos. Entretanto, Turner, Dill, Martin & Melosh (1960), estudaram problemas de grandes deflexões e análise térmica e Gallagher, Padlog & Bijlaard (1962) estudaram materiais não lineares, enquanto problemas de flambagem foram inicialmente tratados por Gallagher & Padlog (1963). Zienkiewicz, Watson & King (1968) estenderam o método para problemas de viscoelasticidade.

Archer (1965) considerou a análise dinâmica no desenvolvimento da matriz massa consistente, que é aplicável à análise de sistemas de massa distribuída, como barras e vigas em análise estrutural.

Melosh (1963) iniciou o uso do método variacional para resolver problemas não estruturais. Problemas de campo, tais como a determinação da torção em eixos, escoamento de fluidos e transferência de calor por condução, foram resolvidos por Zienkiewicz & Cheung (1965), Martin (1968), Wilson & Nickel (1966) e Zienkiewicz (1981).

Uma nova extensão do método foi proposta por Szabo & Lee (1969), usando o método dos resíduos ponderados aplicados às equações da elasticidade usado na análise estrutural. Zienkiewicz & Parekh (1970), também utilizaram o método para resolver problemas de campo em regime permanente. O método dos resíduos ponderados pode ser apropriado em muitas situações onde a formulação variacional não é conhecida. Lyness, Owen & Zienkiewicz (1977) aplicaram o método dos resíduos ponderados para a determinação de campos magnéticos.

Mais recentemente, Belytschko (1976), desenvolveu técnicas avançadas para solução de problemas associados com grandes deslocamentos e comportamento dinâmico não linear.

Uma campo relativamente novo de aplicação do método dos elementos finitos é a bioengenharia. Esta área ainda apresenta dificuldades associadas com não linearidades geométricas e de materiais.

Uma extensa bibliografia sobre o método de elementos finitos pode ser encontrada nos trabalhos de Whiteman (1975), Norrie & de Vries (1976), Segerlind (1984) e Cook et al. (1989).

1.3 - Revisão da Literatura

Muitos métodos numéricos têm sido aplicados na solução de problemas de transferência de calor devido à dificuldade ou impossibilidade de se encontrar uma solução analítica. Métodos como diferenças finitas, elementos finitos, volumes finitos e elementos de contorno estão entre os métodos mais utilizados. Estes métodos são muito flexíveis podendo resolver problemas, por exemplo, de condução em corpos com geometria arbitrária, com diversos tipos de condição de contorno, tais como: convecção, radiação, fluxo de calor imposto e distribuição conhecida de temperatura e podem incluir geração interna de energia.

Passaremos a apresentar a seguir alguns trabalhos desenvolvidos utilizando-se destes métodos:

Baptista & Machado (1986) apresentam o desenvolvimento de um modelo para a transferência de calor tridimensional em regime transiente. Utilizam o método de diferenças finitas com uma técnica implícita de direções alternadas para reduzir o tempo computacional. Os resultados teóricos da simulação do resfriamento de pilhas de placas são comparados com resultados experimentais.

Cunha & Almeida (1990) apresentam uma solução numérica baseada no método de diferenças finitas com formulação de volumes finitos com objetivo de simular a distribuição de temperatura transiente, como função do tempo e da posição, durante o processo de soldagem automático de placas. A variação da condutividade térmica do metal com a temperatura é considerada e uma avaliação mais rigorosa do coeficiente de convecção é feita. Os resultados numéricos são comparados com a solução analítica do problema e uma boa concordância é observada.

Rodrigues (1980) analisa problemas lineares de condução de calor em materiais anisotrópicos e ou heterogêneos, sob regime transiente, através de domínios bidimensionais com qualquer tipo de geometria ou domínios tridimensionais axissimétricos. O método utilizado é o método de elementos finitos com o elemento triangular linear e são resolvidos problemas de transferência de calor em placas, cilindros e pás de turbina a gás.

Moura (1990) apresenta a solução de problemas de condução de calor bidimensional em regime permanente. O método utilizado é o método de elementos finitos com o elemento quadrilateral cúbico de doze nós. São apresentados resultados numéricos para dois problemas cujas soluções analíticas são conhecidas. Os resultados obtidos mostram que mesmo usando poucos elementos, a precisão dos resultados é satisfatória.

Gouvêa et al. (1990) desenvolveram uma análise térmica linear transiente empregando o método de elementos finitos para discretização espacial e métodos de integração direta para discretização no domínio do tempo pelo método de diferenças finitas. A análise considera a

condução tridimensional não permanente com três tipos de condições de contorno. A comparação dos resultados obtidos para três problemas apresentam boa concordância com suas soluções analíticas.

Lyra (1990) apresenta um procedimento adaptativo do método de elementos finitos onde o erro estimado a "posteriori" é reduzido de forma eficiente por meio do refinamento automático de malhas com a versão H. Os procedimentos apresentados permitem a análise de problemas governados pela equação de condução de calor no regime permanente e transiente. A utilização dos procedimentos adaptativos representam uma diminuição do tempo dispendido na preparação dos dados e proporcionam maior eficiência e confiabilidade nos resultados.

França et al. (1991) apresenta uma metodologia para um refinamento de malha para elementos finitos utilizados em soluções de problemas de condução de calor. O método visa uma redução de oscilações numéricas e instabilidades no uso do elemento quadrilateral quadrático para regimes transientes.

Guzmán et al. (1991) utilizou o método de elementos finitos para a obtenção da distribuição de temperatura e de tensão em um conversor de cobre. O problema de condução de calor é resolvido levando-se em conta a transferência de calor por radiação e convecção do cobre líquido para o conversor.

Ribeiro (1992) usa o método de elementos finitos para o estudo da transferência de calor por convecção mista laminar entre tubos concêntricos e excêntricos. O estudo considera dois casos: no primeiro caso, o tubo externo é isolado, o tubo interno tem fluxo de calor uniforme axialmente e temperatura da parede uniforme circunferencialmente; no segundo caso as condições são inversas.

Guimarães (1992) e Menon & Guimarães (1993) apresentam um estudo de transferência de calor por condução e convecção numa cavidade quadrada. As equações de conservação são resolvidas através do método de elementos finitos utilizando elementos quadriláteros quadráticos de oito nós. O coeficiente de convecção que está relacionado com o número de Nusselt, é obtido em função do número de Grashof e dos diversos parâmetros geométricos da cavidade.

Pimenta et al. (1993) apresentam uma simulação numérica de um pistão de motor diesel usando o método de elementos finitos. É feita uma avaliação da influência de um jato de refrigeração no fundo do pistão e a influência da posição do impacto do jato sobre a superfície do pistão. São avaliados os perfis de temperatura e o fluxo de calor. Os resultados teóricos são comparados com medições experimentais.

Seixlack & Maliska (1989) estudam a condução de calor em meios anisotrópicos com geometrias duplamente conexas e arbitrárias, utilizando a técnica dos volumes finitos. São considerados três tipos de condições de contorno e dois exemplos para ilustrar a aplicação da técnica numérica.

Vielmo et al. (1992) estudam numericamente a solução de um problema de transferência

de calor na parede sólida de um bloco de secção quadrada considerando a convecção e radiação numa cavidade de secção circular interna ao bloco. As equações do problema são resolvidas pelo método de volumes finitos.

Ziviani & Paula (1993) apresentam um estudo da transferência de calor para o aquecimento de placas em fornos de reaquecimento. A placa entra no forno com temperatura uniforme e são considerados transferência de calor por convecção e radiação a medida que a placa se movimenta. As propriedades físicas da chapa de aço são consideradas dependentes da temperatura. A equação de energia é solucionada pelo método de volumes finitos. São obtidas distribuições de temperatura para dois tipos de aços.

1.4 - Objetivos do Presente Trabalho

O objetivo do presente trabalho é estudar a transferência de calor por condução em corpos bi e tridimensionais de geometria arbitrária utilizando o método de elementos finitos. O regime pode ser permanente ou não permanente. São considerados como condições de contorno: fluxo de calor imposto, temperatura imposta e convecção. Internamente ao corpo pode haver geração de energia concentrada ou distribuída. O material pode ser isotrópico ou anisotrópico.

Será apresentada a formulação do método de elementos finitos e serão determinadas as distribuições de temperatura em diversos corpos com geometrias complexas.

1.5 - Delineamento deste Trabalho

Este trabalho tem por principal objetivo o cálculo da distribuição de temperatura em regime permanente e da evolução da temperatura média do corpo no regime não permanente. Para isto o trabalho foi desenvolvido da seguinte forma:

Capítulo 2 - Método de Solução

Este capítulo se inicia por uma breve introdução com a apresentação da equação geral de transferência de calor. Em seguida é apresentada a formulação do problema, a minimização do funcional, a definição das matrizes e a determinação das integrais, tudo isto para o elemento triangular linear em regime permanente e não permanente. O mesmo é feito para o elemento tetraédrico linear e para o elemento quadrilateral quadrático de oito nós.

Capítulo 3 - Resultados

Neste capítulo inicialmente os modelos teóricos são testados com problemas de solução analítica conhecida. Como resultados do presente trabalho os modelos são aplicados para uma aleta em regime permanente, um mancal de deslizamento em regime permanente e não permanente, e para três pás de turbina a gás em regime não permanente.

Capítulo 4 - Conclusões e Recomendações

Neste ponto são feitas as observações finais do trabalho e algumas recomendações para trabalhos futuros.

Apêndices

No apêndice A1 é feita a dedução da equação geral da transferência de calor por condução.

O apêndice A2 apresenta a metodologia do cálculo variacional.

No apêndice A3 é mostrado o uso do método variacional para a equação diferencial em regime permanente.

No apêndice A4 é visto o método variacional para a equação diferencial em regime não permanente.

O apêndice A5 apresenta as funções de forma para o elemento triangular linear, para o elemento tetraédrico linear e para o elemento quadrilateral quadrático de oito nós.

No apêndice A6 é mostrada a técnica da quadratura de Gauss-Legendre.

No apêndice A7 é demonstrado que $dx dy = | \det[J] | d\xi d\eta$.

CAPÍTULO 2

MÉTODO DE SOLUÇÃO

2.1 - Introdução

Neste capítulo serão desenvolvidas todas as equações de elementos finitos para a solução de problemas de condução de calor em corpos bidimensionais e tridimensionais de geometria arbitrária.

Para os corpos bidimensionais serão utilizados o elemento triangular linear e o elemento quadrilateral quadrático de oito nós. No caso de corpos tridimensionais será utilizado o elemento tetraédrico linear.

A equação geral de transferência de calor (A1.8) deduzida no apêndice A1 pode ser escrita como:

$$\lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] + Q ,$$

onde ϕ é a temperatura; K_{xx} , K_{yy} , K_{zz} são as condutividades térmicas nas direções x , y e z ; Q é a fonte de geração interna de energia sendo positiva se o corpo recebe o calor gerado; λ é um parâmetro que é igual a: $\lambda = \rho c_p$, onde ρ é a densidade ou massa específica e c_p é o calor específico a pressão constante; e t é o tempo.

As condições de contorno podem ser expressas pelas três equações seguintes, que representam respectivamente: o fluxo de calor imposto, a convecção imposta e a temperatura imposta.

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + K_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z + q = 0 ,$$

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + K_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z + h (\phi - \phi_{\infty}) = 0 ,$$

$$\phi = \phi_B ,$$

onde q é o fluxo de calor imposto, h é o coeficiente de convecção, ϕ_{∞} é o valor conhecido da temperatura ambiente, ϕ_B é a distribuição conhecida de temperatura e l_x , l_y , l_z são os cossenos diretores do vetor normal à superfície.

2.2 - Equações de Elementos Finitos para Elemento Triangular em Regime Permanente

Aqui utiliza-se o elemento triangular linear para o estudo da condução de calor, no regime permanente, em corpos bidimensionais de geometria arbitrária.

2.2.1 - Formulação do Problema

Seja o corpo bidimensional mostrado na figura 2.1, para o qual se pretende determinar a distribuição de temperatura.

O corpo é dividido em elementos triangulares. Os vértices dos triângulos são chamados de pontos nodais. As superfícies S_1, S_2 e S_3 representam respectivamente as superfícies onde são especificados o fluxo de calor, a convecção e a temperatura. As equações (2.2), (2.3) e (2.4) representam matematicamente estas condições de contorno.

A figura 2.2, representa um elemento triangular genérico, cujos vértices são i, j, k .

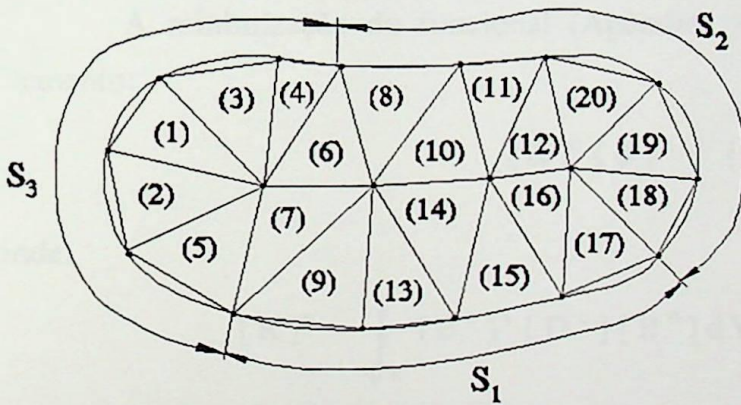


Figura 2.1 - Corpo Dividido em Elementos

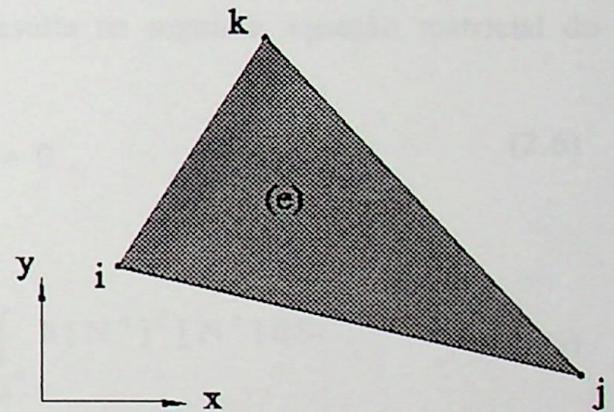


Figura 2.2 - Elemento Triangular

A equação da energia pode ser escrita como:

$$K_{xx} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + Q = 0 \quad (2.1)$$

As condições de contorno, baseadas na figura 2.1, são dadas por:

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + q = 0, \quad (\text{em } S_1) \quad (2.2)$$

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + h(\phi - \phi_\infty) = 0, \quad (\text{em } S_2) \quad (2.3)$$

$$\phi = \phi_B. \quad (\text{em } S_3) \quad (2.4)$$

2.2.2 - Minimização do Funcional do Elemento

O funcional do elemento correspondente às equações (2.1) a (2.4) é dado por:

$$I^e = \int_{V^e} \frac{1}{2} \left[K_{xx} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^2 + K_{yy} \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]^2 - 2Q\phi \right] dV + \int_{S_1^e} q\phi dS_1 + \int_{S_2^e} \frac{h}{2} (\phi - \phi_\infty)^2 dS_2. \quad (2.5)$$

A minimização do funcional (Apêndice A3) resulta na seguinte equação matricial do elemento:

$$[K]^e \{\phi\}^e + \{R\}^e = 0, \quad (2.6)$$

onde:

$$[K]^e = \int_{V^e} [B^e]^T [D^e] [B^e] dV + \int_{S_2^e} h [N^e]^T [N^e] dS_2, \quad (2.7a)$$

$$\{R\}^e = \int_{V^e} Q [N^e]^T dV + \int_{S_1^e} q [N^e]^T dS_1 - \int_{S_2^e} h \phi_\infty [N^e]^T dS_2. \quad (2.7b)$$

A minimização do funcional global I é obtido pela equação:

$$\frac{\partial I}{\partial \{\phi\}} = \sum_{e=1}^e \frac{\partial I^e}{\partial \{\phi\}} = 0. \quad (2.8)$$

Da equação (2.8) resulta:

$$[K] \{\phi\} + \{R\} = 0, \quad (2.9)$$

Onde:

$$[K] = \sum_{e=1}^{\epsilon} [K]^e, \quad (2.10)$$

$$\{R\} = \sum_{e=1}^{\epsilon} \{R\}^e. \quad (2.11)$$

A distribuição conhecida de temperatura ϕ_B deve ser incluída na matriz global $\{R\}$ antes da resolução do sistema de equações lineares (2.9).

2.2.3 - Definição das Matrizes para o Elemento

A matriz função de forma para o elemento triangular linear (Apêndice A5) é dada por:

$$[N^e] = [N_i \ N_j \ N_k]. \quad (2.12)$$

A matriz função de forma transposta será:

$$[N^e]^T = \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix}. \quad (2.13)$$

Onde:

$$N_\alpha = \frac{a_\alpha + b_\alpha x + c_\alpha y}{2A^e}, \text{ com } \alpha = i, j, k. \quad (2.14)$$

A área do elemento é dada por:

$$A^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix}. \quad (2.15)$$

A matriz $[B^e]$ é dada por:

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

A matriz condutividade é dada por:

$$[D^e] = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

2.2.4 - Determinação das Integrais para o Elemento

Para obter a matriz $[K]^e$ dada pela equação (2.7a), devem ser resolvidas as seguintes integrais:

a) Matriz condução do elemento $[K_1]^e$

$$[K_1]^e = \int_{V^e} [B^e]^T [D^e] [B^e] dV = [B^e]^T [D^e] [B^e] \int_{A^e} dA =$$

$$[B^e]^T [D^e] [B^e] A^e = \frac{1}{4A^e} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Após efetuar o produto das matrizes, vem:

$$[K_1]^e = \frac{K_{xx}}{4A^e} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} + \frac{K_{yy}}{4A^e} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Note que:

$$dV = t_e \cdot dA = 1 \cdot dA = dA ,$$

onde t_e é a espessura unitária do elemento.

b) Matriz convecção da matriz rigidez para o elemento $[K_2]^e$

$$[K_2]^e = \int_{S_i^e} h [N^e]^T [N^e] dS_2 = h \int_1 \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} dl \quad (2.20)$$



Note que:

$$dS = t_e \cdot dl = 1 \cdot dl = dl ,$$

onde t_e é a espessura unitária do elemento.

A integral (2.20) depende do lado do elemento, conforme mostra a figura 2.3:

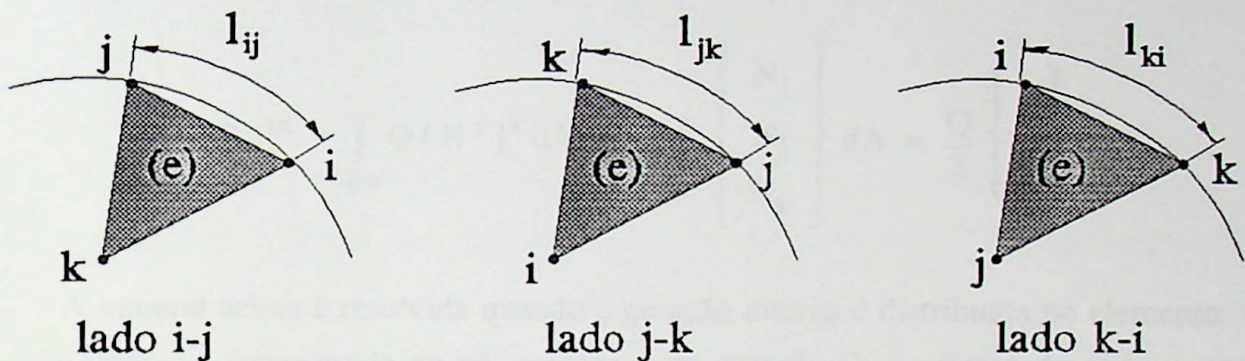


Figura 2.3 - Lado do Elemento

b-1) Convecção do elemento no lado i-j

Neste caso $N_k=0$, assim:

$$[K_2]_{ij}^e = h \int_0^1 \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & 0 \\ N_j N_i & N_j N_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dl = \frac{h l_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (2.21a)$$

b-2) Convecção do elemento no lado j-k

Para este caso, $N_i=0$, assim:

$$[K_2]_{jk}^e = h \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_j N_j & N_j N_k \\ 0 & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} dl = \frac{h l_{jk}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \quad (2.21.b)$$

b-3) Convecção do elemento no lado k-i

Analogamente, para $N_j=0$, vem:

$$[K_2]_{ki}^e = h \int_0^1 \begin{bmatrix} N_i N_i & 0 & N_i N_k \\ 0 & 0 & 0 \\ N_k N_i & 0 & N_k N_k \end{bmatrix} dl = \frac{h l_{ki}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.21.c)$$

Para se obter a matriz $\{R\}^e$, dada pela equação (2.7b), devem ser resolvidas as seguintes integrais:

c) Matriz geração interna distribuída para o elemento $\{R_1\}^e$

$$\{R_1\}^e = \int_{V^e} Q [N^e]^T dV = Q \int_{A^e} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dA = \frac{Q}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (2.22)$$

A integral acima é resolvida quando a geração interna é distribuída no elemento. Quando a geração interna é concentrada no nó, o valor desta geração Q , é adicionado após o vetor força global ter sido montado, na posição do número do nó.

d) Matriz fluxo de calor imposto, para o elemento $\{R_2\}^e$

$$\{R_2\}^e = \int_{S_1} q [N^e]^T dS_1 = q \int_1 \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dl. \quad (2.23)$$

A integral acima também depende do lado do elemento, conforme mostrado na figura 2.3.

d-1) Fluxo de calor no lado i-j

$$\{R_2\}_{ij}^e = q \int_0^1 \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ 0 \end{Bmatrix} dl = \frac{q l_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.24a)$$

d-2) Fluxo de calor no lado j-k

$$\{R_2\}_{jk}^e = q \int_0^1 \begin{Bmatrix} 0 \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dl = \frac{q l_{jk}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (2.24b)$$

d-3) Fluxo de calor no lado k-i

$$\{R_2\}_{ki}^e = q \int_0^1 \begin{Bmatrix} N_i \\ 0 \\ N_k \end{Bmatrix} dl = \frac{q l_{ki}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (2.24c)$$

Nas equações (2.23) e (2.24), o fluxo de calor q foi considerado constante no lado do elemento, mas pode variar de lado para lado num mesmo elemento e de elemento para elemento.

e) Matriz convecção do vetor força para o elemento $\{R_3\}^e$

$$\{R_3\}^e = \int_{S_2} h \phi_\infty [N^e]^T dS = h \phi_\infty \int_1 \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dl. \quad (2.25)$$

A integração da equação (2.25) é semelhante à das equações (2.23) e (2.24), e também depende do lado do elemento.

e-1) Convecção no lado i-j

$$\{R_3\}_{ij}^e = h \phi_\infty \int_0^1 \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ 0 \end{Bmatrix} dl = \frac{h \phi_\infty l_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.26a)$$

e-2) Convecção no lado j-k

$$\{R_3\}_{jk}^e = h \phi_\infty \int_0^1 \begin{Bmatrix} 0 \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dl = \frac{h \phi_\infty l_{jk}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (2.26b)$$

e-3) Convecção no lado k-i

$$\{R_3\}_{ki}^e = h \phi_\infty \int_0^l \begin{Bmatrix} N_i \\ 0 \\ N_k \end{Bmatrix} dl = \frac{h \phi_\infty l_{ki}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (2.26c)$$

Nas equações (2.26), o coeficiente de convecção h e a temperatura ambiente ϕ_∞ , foram considerados constantes no lado do elemento, mas podem variar de lado para lado de um mesmo elemento e de elemento para elemento.

2.3 - Equações de Elementos Finitos para Elemento Triangular em Regime Não Permanente

As equações para o regime não permanente são basicamente as mesmas vistas para o regime permanente só diferindo na introdução do termo dependente do tempo, veja apêndice A4.

2.3.1 - Formulação do Problema

Seja a equação diferencial no regime não permanente:

$$\left[K_{xx} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] + Q = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (2.27a)$$

com as condições de contorno que são as mesmas do regime permanente:

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + q = 0, \quad (\text{em } S_1) \quad (2.27b)$$

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + h(\phi - \phi_\infty) = 0, \quad (\text{em } S_2) \quad (2.27c)$$

$$\phi = \phi_B. \quad (\text{em } S_3) \quad (2.27d)$$

2.3.2 - Minimização do Funcional do Elemento

O funcional do elemento correspondente às equações (2.27) é dado por:

$$I^e = \int_{v^e} \frac{1}{2} \left[K_{xx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dV + \int_{S_1^e} q \phi dS_1 + \quad 16$$

$$\int_{S_2^e} \frac{h}{2} [\phi^2 - 2\phi\phi_\infty + \phi_\infty^2] dS_2 + \int_{v^e} \left[- \left[Q - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \phi \right] dv . \quad (2.28)$$

A minimização do funcional acima, veja apêndice A4, resulta na seguinte matriz do elemento:

$$\left[[K]^e + \frac{2}{\Delta t} [C]^e \right] \{ \phi \}_{\text{nov}}^e = \frac{2}{\Delta t} [C]^e \{ \phi \}_{\text{velho}}^e - \{ R \}^e , \quad (2.29a)$$

onde:

$$[C]^e = \int_{v^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV , \quad (2.29b)$$

$$[K]^e = \int_{v^e} [B^e]^T [D^e] [B^e] dV + \int_{S_2^e} h [N^e]^T [N^e] dS_2 , \quad (2.29c)$$

$$\{ R \}^e = \int_{v^e} -Q [N^e]^T dV + \int_{S_1^e} q [N^e]^T dS_1 + \quad (2.29d)$$

$$\int_{S_2^e} -h \phi_\infty [N^e]^T dS_2 .$$

2.3.3 - Definição das Matrizes para o Elemento

A matriz do elemento $[C]^e$ é dada por:

$$[C]^e = \int_{v^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV . \quad (2.30)$$

As demais matrizes já foram vistas e são as mesmas do regime permanente.

2.3.4 - Determinação das Integrais para o Elemento

As integrais são as mesmas já definidas para o regime permanente e a integral da matriz $[C]^e$ é definida como:

$$[C]^e = \frac{\lambda A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} , \quad (2.31)$$

onde A^e é a área do elemento triangular.

2.4 - Equações de Elementos Finitos para Elemento Tetraédrico em Regime Permanente

Neste ítem é estudada a condução de calor em geometrias arbitrárias tridimensionais, utilizando elementos tetraédricos lineares.

2.4.1 - Formulação do Problema

Seja o corpo tridimensional mostrado na figura 2.4. O corpo é formado por 6 elementos tetraédricos.

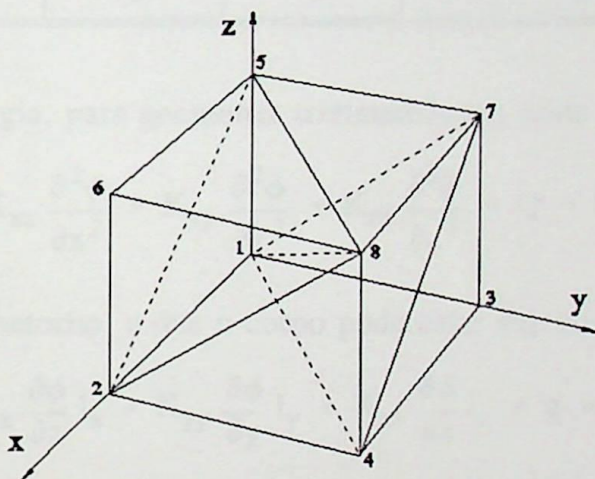


Figura 2.4 - Corpo Dividido em Elementos

A figura 2.5, mostra um elemento tetraédrico genérico, cujos vértices são i , j , k e l .

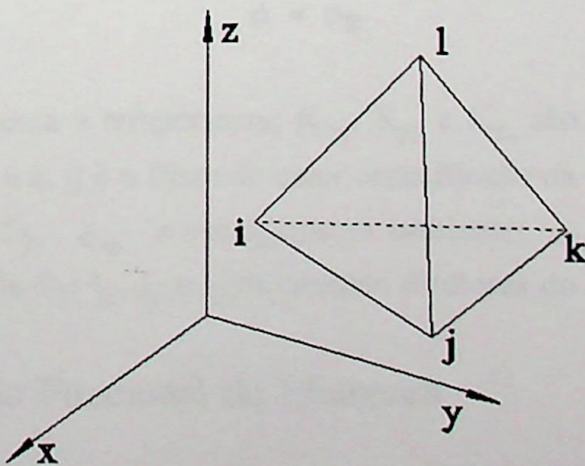


Figura 2.5 - Elemento Tetraédrico

A tabela 2.1, mostra a topologia dos elementos, isto é, a numeração global dos pontos nodais relacionados aos elementos da figura 2.4.

Tabela 2.1 - Topologia dos Elementos da Figura 2.4

Número do Elemento	Numeração local dos pontos nodais			
	i	j	k	l
1	1	2	4	8
2	1	2	8	5
3	2	8	5	6
4	1	3	4	7
5	1	7	8	5
6	1	8	4	7

A equação da energia, para geometria tridimensional, pode ser escrita como:

$$K_{xx} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + Q = 0 . \quad (2.32)$$

As condições de contorno, a que o corpo pode estar sujeito são:

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + K_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z + q = 0 , \quad (\text{em } S_1) \quad (2.33)$$

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + K_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z + h(\phi - \phi_\infty) = 0 , \quad (\text{em } S_2) \quad (2.34)$$

$$\phi = \phi_B . \quad (\text{em } S_3) \quad (2.35)$$

Onde, ϕ representa a temperatura; K_{xx} , K_{yy} e K_{zz} são as condutividades térmicas do elemento nas direções x , y e z ; q é o fluxo de calor especificado na superfície S_1 ; h é o coeficiente de convecção na superfície S_2 ; ϕ_∞ é a temperatura ambiente; ϕ_B é a distribuição especificada de temperatura na superfície S_3 ; l_x , l_y e l_z os cossenos diretores do vetor normal à superfície.

2.4.2 - Minimização do Funcional do Elemento

O funcional do elemento correspondente às equações (2.32) a (2.35) é dado por:

$$I^e = \int_{V^e} \frac{1}{2} \left[K_{xx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + K_{zz} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - 2Q\phi \right] dV + \int_{V^e} -Q\phi dV + \int_{S_1^e} q\phi dS_1 + \int_{S_2^e} \frac{h}{2} (\phi - \phi_\infty)^2 dS_2 . \quad (2.36)$$

A minimização do funcional acima (ver Apêndice A3) resulta na seguinte matriz do elemento:

$$[K]^e \{\phi\}^e + \{R\}^e = 0 , \quad (2.37)$$

onde:

$$[K]^e = \int_{V^e} [B^e]^T [D^e] [B^e] dV + \int_{S_2^e} h [N^e]^T [N^e] dS_2 , \quad (2.37a)$$

$$\{R\}^e = \int_{V^e} Q [N^e]^T dV + \int_{S_1^e} q [N^e]^T dS_1 - \int_{S_2^e} h \phi_\infty [N^e]^T dS_2 . \quad (2.37b)$$

A minimização do funcional global I é obtido pela equação:

$$\frac{\partial I}{\partial \{\phi\}} = \sum_{e=1}^e \frac{\partial I^e}{\partial \{\phi\}} = 0 . \quad (2.38)$$

Da equação acima, resulta:

$$[K] \{\phi\} + \{R\} = 0 , \quad (2.39)$$

Onde:

$$[K] = \sum_{e=1}^e [K]^e , \quad (2.40)$$

$$\{R\} = \sum_{e=1}^e \{R\}^e . \quad (2.41)$$

2.4.3 - Definição das Matrizes para o Elemento

A matriz função de forma para o elemento tetraédrico linear (Apêndice A5) é definida como:

$$[N^e] = [N_i \ N_j \ N_k \ N_l] \quad (2.42)$$

A matriz função de forma transposta será:

$$[N^e]^T = \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \\ N_l \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

Onde:

$$N_\alpha = \frac{a_\alpha + b_\alpha x + c_\alpha y + d_\alpha z}{6V^e}, \text{ com } \alpha = i, j, k, l \quad (2.44)$$

Os parâmetros a_α , b_α , c_α e d_α , com base no apêndice A5, são dados por:

$$[C_0]^{-1} = \frac{1}{6V^e} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k & a_l \\ b_i & b_j & b_k & b_l \\ c_i & c_j & c_k & c_l \\ d_i & d_j & d_k & d_l \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

onde a matriz $[C_0]$ é dada por:

$$[C_0] = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

onde X_α , Y_α , e Z_α com $\alpha = i, j, k, l$, são as coordenadas dos pontos nodais do elemento.

O volume do elemento é calculado por:

$$V^e = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{vmatrix} . \quad (2.47)$$

A área de uma superfície lateral do elemento, tal como aquela contida pelos pontos nodais j , k e l , pode ser calculada pela equação:

$$A_{jkl} = [S(S - l_{jk})(S - l_{kl})(S - l_{lj})]^{1/2} , \quad (2.48a)$$

onde:

$$l_{jk} = [(X_k - X_j)^2 + (Y_k - Y_j)^2 + (Z_k - Z_j)^2]^{1/2} , \quad (2.48b)$$

$$l_{kl} = [(X_l - X_k)^2 + (Y_l - Y_k)^2 + (Z_l - Z_k)^2]^{1/2} , \quad (2.48c)$$

$$l_{lj} = [(X_j - X_l)^2 + (Y_j - Y_l)^2 + (Z_j - Z_l)^2]^{1/2} , \quad (2.48d)$$

$$S = \frac{1}{2} (l_{jk} + l_{kl} + l_{lj}) . \quad (2.48e)$$

Nas equações (2.46b) a (2.46e), l_{jk} , l_{kl} e l_{lj} representam os comprimentos dos lados do triângulo que formam a face jkl do elemento. As áreas das outras faces do elemento tetraédrico são obtidas de forma semelhante.

A matriz $[B^e]$ é definida por:

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} & \frac{\partial N_l}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_l}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_k}{\partial z} & \frac{\partial N_l}{\partial z} \end{bmatrix} . \quad (2.49)$$

A matriz condutividade é dada por:

$$[D^e] = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

2.4.4 - Determinação das Integrais para o Elemento

Para obter a matriz $[K]^e$ dada pela equação (2.37a), devem ser resolvidas as seguintes integrais:

a) Matriz condução do elemento $[K_1]^e$

$$[K_1]^e = \frac{K_{xx}}{36V^e} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k & b_i b_l \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k & b_j b_l \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k & b_k b_l \\ b_l b_i & b_l b_j & b_l b_k & b_l b_l \end{bmatrix} + \frac{K_{yy}}{36V^e} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k & c_i c_l \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k & c_j c_l \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k & c_k c_l \\ c_l c_i & c_l c_j & c_l c_k & c_l c_l \end{bmatrix} + \frac{K_{zz}}{36V^e} \begin{bmatrix} d_i d_i & d_i d_j & d_i d_k & d_i d_l \\ d_j d_i & d_j d_j & d_j d_k & d_j d_l \\ d_k d_i & d_k d_j & d_k d_k & d_k d_l \\ d_l d_i & d_l d_j & d_l d_k & d_l d_l \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

b) Matriz convecção da matriz rigidez para o elemento $[K_2]^e$

$$[K_2]^e = \int_{S_2^e} h [N^e]^T [N^e] dS_2 = h \int_A \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k & N_i N_l \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k & N_j N_l \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k & N_k N_l \\ N_l N_i & N_l N_j & N_l N_k & N_l N_l \end{bmatrix} dA. \quad (2.52a)$$

Note que A é a área da face do elemento e a integral acima depende da face onde se localiza a convecção (veja figura 2.5), conforme mostrado a seguir:

b-1) Convecção do elemento na face ijk

Neste caso $N_l=0$, assim, da equação (2.52a) resulta:

$$[K_2]_{ijk}^e = \frac{h A_{ijk}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.52b)$$

b-2) Convecção do elemento na face ijl

Neste caso, $N_k=0$, assim:

$$[K_2]_{ijl}^e = \frac{h A_{ijl}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.52c)$$

b-3) Convecção do elemento na face ikl

Neste caso $N_j=0$, assim:

$$[K_2]_{ikl}^e = \frac{h A_{ikl}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.52d)$$

b-4) Convecção do elemento na face jkl

Neste caso, $N_i=0$, assim:

$$[K_2]_{jkl}^e = \frac{h A_{jkl}}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.52e)$$

Para se obter a matriz $\{R\}^e$, descrita pela equação (2.37b), devem ser resolvidas as seguintes integrais:

c) Matriz geração interna distribuída, para o elemento $\{R_1\}^e$

$$\{R_1\}^e = \int_{V^e} Q [N^e]^T dV = Q \int_{V^e} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \\ N_l \end{Bmatrix} dV = \frac{Q V^e}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

A equação acima é montada quando a geração interna é distribuída no elemento. Quando

a geração interna é concentrada no nó, o valor desta geração Q , é adicionado após o vetor força global ter sido montado, na posição do número do nó.

d) Matriz fluxo de calor imposto, para o elemento $\{R_2\}^e$

$$\{R_2\}^e = \int_{S_1^e} q [N^e]^T dS_1 = q \int_{S_1^e} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \\ N_l \end{Bmatrix} dS_1 . \quad (2.54a)$$

A integral acima também depende da face do elemento, conforme mostrado a seguir.

d-1) Fluxo de calor na face ijk

$$\{R_2\}_{ijk}^e = \frac{q A_{ijk}}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} . \quad (2.54b)$$

d-2) Fluxo de calor na face ijl

$$\{R_2\}_{ijl}^e = \frac{q A_{ijl}}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} . \quad (2.54c)$$

d-3) Fluxo de calor na face ikl

$$\{R_2\}_{ikl}^e = \frac{q A_{ikl}}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} . \quad (2.54d)$$

d-4) Fluxo de calor na face jkl

$$\{R_2\}_{jkl}^e = \frac{q A_{jkl}}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} . \quad (2.54e)$$

e) Matriz convecção do vetor força, para o elemento $\{R_3\}^e$

$$\{R_3\}^e = \int_{S_2^e} h \phi_\infty [N]^T dS_2 = h \phi_\infty \int_{S_2^e} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \\ N_l \end{Bmatrix} dS_2 \quad (2.55a)$$

A integração desta equação depende da face do elemento, conforme se vê a seguir

e-1) Convecção na face ijk

$$\{R_3\}_{ijk}^e = \frac{h \phi_\infty A_{ijk}}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.55b)$$

e-2) Convecção na face ijl

$$\{R_3\}_{ijl}^e = \frac{h \phi_\infty A_{ijl}}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.55c)$$

e-3) Convecção na face ikl

$$\{R_3\}_{ikl}^e = \frac{h \phi_\infty A_{ikl}}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.55d)$$

e-4) Convecção na face jkl

$$\{R_3\}_{jkl}^e = \frac{h \phi_\infty A_{jkl}}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.55e)$$

Nas equações (2.55), o coeficiente de convecção h e a temperatura ambiente ϕ_∞ , foram considerados constantes na face do elemento, mas podem variar de face para face e de elemento para elemento.

2.5 - Equações de Elementos Finitos para Elemento Tetraédrico em Regime Não Permanente

No que se refere ao regime não permanente as matrizes de condução, convecção, fluxo de calor e geração interna de energia serão as mesmas do regime permanente.

2.5.1 - Formulação do Problema

Seja a equação diferencial no regime não permanente:

$$\left[K_{xx} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] + Q = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (2.56a)$$

com as condições de contorno que são as mesmas do regime permanente:

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + K_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z + q = 0, \quad (\text{em } S_1) \quad (2.56b)$$

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + K_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z + h(\phi - \phi_\infty) = 0, \quad (\text{em } S_2) \quad (2.56c)$$

$$\phi = \phi_B. \quad (\text{em } S_3) \quad (2.56d)$$

2.5.2 - Minimização do Funcional do Elemento

O funcional do elemento correspondente às equações (2.54) é dado por:

$$I^e = \int_{V^e} \frac{1}{2} \left[K_{xx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + K_{zz} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dV + \int_{S_1^e} q \phi dS_1 + \int_{S_2^e} \frac{h}{2} [\phi^2 - 2\phi\phi_\infty + \phi_\infty^2] dS_2 + \int_{V^e} \left[- \left[Q - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \phi \right] dv. \quad (2.57)$$

A minimização do funcional acima, veja apêndice A4, resulta na seguinte matriz do elemento:

$$\left[[K]^e + \frac{2}{\Delta t} [C]^e \right] \{ \phi \}_{\text{nov}}^e = \frac{2}{\Delta t} [C]^e \{ \phi \}_{\text{velho}}^e - \{ R \}^e, \quad (2.58a)$$

onde:

$$[C^e] = \int_{v^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV, \quad (2.58b)$$

$$[K]^e = \int_{v^e} [B^e]^T [D^e] [B^e] dV + \int_{S_2^e} h [N^e]^T [N^e] dS_2, \quad (2.58c)$$

$$\begin{aligned} \{R\}^e = \int_{v^e} -Q [N^e]^T dV + \int_{S_1^e} q [N^e]^T dS_1 + \\ \int_{S_2^e} -h \phi_\infty [N^e]^T dS_2. \end{aligned} \quad (2.58d)$$

2.5.3 - Definição das Matrizes para o Elemento

A matriz do elemento $[C^e]$ é dada por:

$$[C^e] = \int_{v^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV. \quad (2.59)$$

As demais matrizes já foram vistas e são as mesmas do regime permanente.

2.5.4 - Determinação das Integrais para o Elemento

As integrais são as mesmas já definidas para o regime permanente e a integral da matriz $[C^e]$ resulta em:

$$[C^e] = \frac{\lambda V^e}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.60)$$

onde V^e é o volume do elemento tetraédrico.

2.6 - Equações de Elementos Finitos para Elemento Quadrilateral Quadrático de Oito Nós em Regime Permanente

O elemento quadrilateral quadrático de oito nós é utilizado para a avaliação da transferência de calor em corpos bidimensionais de geometria arbitrária, com vantagens sobre o elemento triangular linear no que se refere ao número de elementos necessários para a avaliação, ou seja, com menos elementos quadrilaterais quadráticos se alcança a mesma precisão dos

elementos triangulares lineares.

2.6.1 - Formulação do Problema

A equação da energia para o caso bidimensional, regime permanente, pode ser escrita como:

$$K_{xx} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + Q = 0 . \quad (2.61)$$

As condições de contorno são dadas por:

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + q = 0 , \quad (\text{em } S_1) \quad (2.62)$$

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + h(\phi - \phi_\infty) = 0 , \quad (\text{em } S_2) \quad (2.63)$$

$$\phi = \phi_B . \quad (\text{em } S_3) \quad (2.64)$$

Onde, Q é a geração interna de energia; ϕ representa a temperatura; K_{xx} e K_{yy} são as condutividades térmicas do elemento nas direções x e y ; q é o fluxo de calor especificado na superfície S_1 ; h é o coeficiente de convecção na superfície S_2 ; ϕ_∞ é a temperatura ambiente; ϕ_B é a distribuição especificada de temperatura na superfície S_3 ; l_x e l_y os cossenos diretores do vetor normal à superfície.

2.6.2 - Minimização do Funcional do Elemento

O funcional do elemento correspondente às equações (2.61) a (2.64) é dado por:

$$I^e = \int_V \frac{1}{2} \left[K_{xx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - 2 Q \phi \right] dV + \int_{S_1} q \phi dS_1 + \int_{S_2} \frac{h}{2} (\phi - \phi_\infty)^2 dS_2 . \quad (2.65)$$

A minimização do funcional (Apêndice A3) resulta na seguinte equação matricial do elemento:

$$[K]^e \{\phi\}^e + \{R\}^e = 0, \quad (2.66)$$

onde:

$$[K]^e = \int_{V^e} [B^e]^T [D^e] [B^e] dV + \int_{S_2^e} h [N^e]^T [N^e] dS_2, \quad (2.67a)$$

$$\{R\}^e = \int_{V^e} Q [N^e]^T dV + \int_{S_1^e} q [N^e]^T dS_1 - \int_{S_2^e} h \phi_\infty [N^e]^T dS_2. \quad (2.67b)$$

A minimização do funcional global I é obtido pela equação:

$$\frac{\partial I}{\partial \{\phi\}} = \sum_{e=1}^{\epsilon} \frac{\partial I^e}{\partial \{\phi\}} = 0. \quad (2.68)$$

Da equação acima resulta:

$$[K] \{\phi\} + \{R\} = 0, \quad (2.69)$$

Onde:

$$[K] = \sum_{e=1}^{\epsilon} [K]^e, \quad (2.70)$$

$$\{R\} = \sum_{e=1}^{\epsilon} \{R\}^e. \quad (2.71)$$

2.6.3 - Definição das Matrizes para o Elemento

A matriz função de forma para o elemento quadrilateral quadrático de oito nós (Apêndice A5) é dada por:

$$[N^e] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8]. \quad (2.72)$$

A matriz função de forma transposta será:

$$[N^e]^T = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \end{Bmatrix}. \quad (2.73)$$

Onde:

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta); & N_2 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta); \\ N_3 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta); & N_4 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2); \\ N_5 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta); & N_6 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta); \\ N_7 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta); & N_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2). \end{aligned} \quad (2.74)$$

A matriz $[B^e]$ é dada por:

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial x} & \frac{\partial N_7}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_7}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.75)$$

A matriz condutividade é dada por:

$$[D^e] = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

As equações (2.67a) e (2.67b) podem ser escritas como:

$$[K]^e = \int_{A^e} [B^e]^T [D^e] [B^e] dx dy + \int_1 h [N^e]^T [N^e] dl, \quad (2.77a)$$

$$\{R\}^e = \int_{A^e} Q [N^e]^T dx dy + \int_1 q [N^e]^T dl - \int_1 h \phi_\infty [N^e]^T dl. \quad (2.77b)$$

O cálculo da matriz $[K]^e$ envolve inicialmente o cálculo da matriz $[B]^e$, que por sua vez, precisa da determinação das derivadas das funções de forma relativamente ao sistema global (x, y) . Estas derivadas podem ser obtidas sem se explicitar as funções N_p em função de x e y .

As derivadas $\partial N_p / \partial x$ e $\partial N_p / \partial y$ na equação (2.75) podem ser obtidas, facilmente, a partir das derivadas $\partial N_p / \partial \xi$ e $\partial N_p / \partial \eta$.

Através da utilização do conceito de derivação parcial, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_p}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial N_p}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

As duas equações acima podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_p}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_p}{\partial x} \\ \frac{\partial N_p}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad (2.79)$$

onde $[J]$ é a matriz Jacobiana, definida como:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (2.80)$$

A equação (2.79) pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_p}{\partial x} \\ \frac{\partial N_p}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_p}{\partial \eta} \end{Bmatrix}. \quad (2.81)$$

Sejam as seguintes funções de transformação:

$$x = \sum_{i=1}^8 \varphi_i x_i, \quad (2.82)$$

$$y = \sum_{i=1}^8 \varphi_i y_i , \quad (2.83)$$

onde x e y são as coordenadas globais em qualquer ponto p do elemento, x_i e y_i são as coordenadas globais do i -ésimo nó do elemento e φ_i são as funções de geometria do i -ésimo nó do elemento, isto é, as funções que definem a forma geométrica do elemento.

Como o elemento é isoparamétrico, então:

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i , \quad (2.84)$$

$$y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i , \quad (2.85)$$

onde N_i são as funções de forma do i -ésimo nó do elemento que dependem das coordenadas locais (ξ, η) do ponto p .

Substituindo as equações (2.74) nas equações (2.84) e (2.85), vem:

$$\begin{aligned} x = & -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)x_1 + \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)x_2 - \\ & \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)x_3 + \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)x_4 - \\ & \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)x_5 + \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)x_6 - \\ & \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)x_7 + \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)x_8 , \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} y = & -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)y_1 + \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)y_2 - \\ & \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)y_3 + \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)y_4 - \\ & \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)y_5 + \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)y_6 - \\ & \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)y_7 + \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)y_8 . \end{aligned} \quad (2.87)$$

Logo os termos da matriz $[J]$ podem ser escritos como:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i, \quad (2.88a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i, \quad (2.88b)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i, \quad (2.88c)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i. \quad (2.88d)$$

Em termos matriciais, a matriz Jacobiana [J] fica:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & \frac{\partial N_5}{\partial \xi} & \frac{\partial N_6}{\partial \xi} & \frac{\partial N_7}{\partial \xi} & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & \frac{\partial N_5}{\partial \eta} & \frac{\partial N_6}{\partial \eta} & \frac{\partial N_7}{\partial \eta} & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \\ x_7 & y_7 \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

Uma vez conhecidas as expressões das funções de forma, pode-se determinar suas derivadas com relação a ξ e η . São elas:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (2\xi + \eta - 2\xi\eta - \eta^2), \quad (2.90a)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (\xi + 2\eta - \xi^2 - 2\xi\eta), \quad (2.90b)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \xi(\eta - 1), \quad (2.90c)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(\xi^2 - 1), \quad (2.90d)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi - 2\xi\eta - \eta + \eta^2), \quad (2.90e)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(-\xi^2 + 2\eta - \xi + 2\xi\eta), \quad (2.90f)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(1 - \eta^2), \quad (2.90g)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = -\eta(1 + \xi), \quad (2.90h)$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi + 2\xi\eta + \eta + \eta^2), \quad (2.90i)$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(\xi^2 + 2\eta + \xi + 2\xi\eta), \quad (2.90j)$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \xi} = -\xi(1 + \eta), \quad (2.90k)$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(1 - \xi^2), \quad (2.90l)$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi - \eta + 2\xi\eta - \eta^2), \quad (2.90m)$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(-\xi + \xi^2 + 2\eta - 2\xi\eta), \quad (2.90n)$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(\eta^2 - 1), \quad (2.90o)$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \eta} = \eta(\xi - 1). \quad (2.90p)$$

Deve-se em seguida, ser determinada $[J]^{-1}$, que vale:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det [J]} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & - \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ - \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \end{bmatrix}, \quad (2.91)$$

sendo que:

$$\det [J] = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}. \quad (2.92)$$

Substituindo-se a equação (2.91) em (2.81), resulta:

$$\frac{\partial N_p}{\partial x} = \frac{1}{\det [J]} \left[\left[\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \right] \frac{\partial N_p}{\partial \xi} - \left[\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \right] \frac{\partial N_p}{\partial \eta} \right], \quad (2.93)$$

$$\frac{\partial N_p}{\partial y} = \frac{1}{\det [J]} \left[\left[- \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \right] \frac{\partial N_p}{\partial \xi} + \left[\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \right] \frac{\partial N_p}{\partial \eta} \right]. \quad (2.94)$$

Os elementos da matriz $[B]$ são funções das coordenadas locais (ξ, η) , assim, o termo $dx dy$ da equação (2.77a) também deve ser escrito em termos de coordenadas locais (ver apêndice A7). Assim:

$$dx dy = |\det [J]| d\xi d\eta. \quad (2.95)$$

Portanto, a integral de área da equação (2.77a) pode ser transformada em uma integral dupla no sistema de coordenadas locais (ξ, η) , como segue:

$$[K_1]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B^e(\xi, \eta)]^T [D^e] [B^e(\xi, \eta)] |\det [J]| d\xi d\eta, \quad (2.96)$$

Na matriz $[B^e]$, o ponto p assume os valores nodais 1, 2, 3, ..., 6, 7 e 8. Então

substituindo as equações (2.93) e (2.94) em (2.75), resulta:

$$[B^e] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \left[\left[\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \right] \frac{\partial N_1}{\partial \xi} - \left[\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \right] \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \right] \cdots \cdots \\ \left[\left[-\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \right] \frac{\partial N_1}{\partial \xi} + \left[\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \right] \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \right] \cdots \cdots \\ \cdots \left[\left[\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \right] \frac{\partial N_8}{\partial \xi} - \left[\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \right] \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \right] \\ \cdots \left[\left[-\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \right] \frac{\partial N_8}{\partial \xi} + \left[\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \right] \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \right] \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

Reescrevendo a matriz da geração interna de energia $\{R_1\}^e$, vem:

$$\{R_1\}^e = \int_{\Lambda} Q [N^e]^T dx dy \quad (2.98)$$

A matriz $\{R_1\}^e$ está escrita em termos das coordenadas globais x e y . Portanto é necessária a troca dessas coordenadas pelas coordenadas locais ξ e η , o que resulta em:

$$\{R_1\}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N^e(\xi, \eta)]^T |\det[J]| d\xi d\eta \quad (2.99)$$

As matrizes $[K_1]^e$, dada pela equação (2.96), e $\{R_1\}^e$, dada por (2.99), estão prontas para serem integradas, o que será visto no ítem 2.6.4.

As matrizes de convecção $[K_2]^e$ e $\{R_3\}^e$ e a matriz de fluxo de calor imposto $\{R_2\}^e$ podem ser escritas como:

$$[K_2]^e = \int h [N^e]^T [N^e] dl, \quad (2.100)$$

$$\{R_2\}^e = \int q [N^e]^T dl, \quad (2.101)$$



$$\{R_3\}^e = \int_1 h \phi_\infty [N^e]^T dl . \quad (2.102)$$

Os elementos das matrizes $[N^e]$ e $[N^e]^T$ são funções das coordenadas locais (ξ, η) , assim o termo dl das equações (2.100), (2.101) e (2.102) deve ser escrito em termos de coordenadas locais. Assim:

$$[K_2]^e = h \int_{-1}^1 [N^e(\xi)]^T [N^e(\xi)] |\det [J_0]| d\xi , \quad (2.103)$$

$$\{R_2\}^e = q \int_{-1}^1 [N^e(\xi)]^T |\det [J_0]| d\xi , \quad (2.104)$$

$$\{R_3\}^e = h \phi_\infty \int_{-1}^1 [N^e(\xi)]^T |\det [J_0]| d\xi . \quad (2.105)$$

Para se fazer esta mudança de variáveis deve-se calcular $|\det [J_0]|$, sendo $[J_0]$ definido como:

$$[J_0] = \frac{dN_i}{d\xi} l_i + \frac{dN_j}{d\xi} l_j + \frac{dN_k}{d\xi} l_k , \quad (2.106)$$

onde: $l_i = 0$, $l_j = L/2$ e $l_k = L$, sendo L o comprimento do lado do elemento.

Fazendo $\eta = 1$, vem:

$$N_i = -\frac{1}{2} (\xi - \xi^2) , \quad (2.107a)$$

$$N_j = 1 - \xi^2 , \quad (2.107b)$$

$$N_k = \frac{1}{2} (\xi + \xi^2) . \quad (2.107c)$$

Substituindo l_i , l_j , l_k , N_i , N_j e N_k em (2.107), vem:

$$[J_0] = \frac{L}{2} , \quad (2.108)$$

$$|\det [J_0]| = \frac{L}{2} . \quad (2.109)$$

As equações (2.103), (2.104) e (2.105) podem ser integradas analiticamente, o que será

visto no ítem 2.6.4.

2.6.4 - Determinação das Integrais para o Elemento

a) Matriz condução para o elemento $[K_1]^e$ e matriz geração interna distribuída para o elemento $\{R_1\}^e$

O cálculo analítico das matrizes $[K_1]^e$ e $\{R_1\}^e$ é muito trabalhoso e não usual, pois estas matrizes são funções da matriz $[B^e]$ e da matriz jacobiana inversa $[J]^{-1}$, cujos elementos são funções das coordenadas locais (ξ, η) .

Existem várias técnicas de integração numérica e neste trabalho será abordada a técnica da Quadratura de Gauss-Legendre. Esta técnica tem como base a escolha de determinados pontos dentro do elemento com o objetivo de se alcançar uma melhor precisão na solução das integrais. No apêndice A6, é mostrado como se faz a escolha destes pontos de integração e os respectivos pesos W .

Do apêndice A6, pode-se escrever que as integrais $[K_1]^e$ e $\{R_1\}^e$ são dadas por:

$$[K_1]^e = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n [B^e(\xi_j, \eta_k)]^T [D^e] [B^e(\xi_j, \eta_k)] |\det [J]| W_j W_k, \quad (2.110)$$

$$\{R_1\}^e = Q \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n [N^e(\xi_j, \eta_k)]^T |\det [J]| W_j W_k. \quad (2.111)$$

A matriz geração interna de energia $\{R_1\}^e$ acima é assim montada quando a geração interna é distribuída no elemento. Quando a geração interna é concentrada no nó, o valor desta geração (Q), é adicionado após o vetor força global ter sido montado, na posição do número do nó.

Os valores de m e n são obtidos equacionando-se $(2m - 1)$ para o grau maior de ξ e $(2n - 1)$ para o grau maior de η na integral. Para a equação (2.110), o valor de m e n é igual a três, resultando em um elemento com nove pontos de integração. Para a equação (2.111), o valor de m e n é igual a quatro, resultando em um elemento com dezesseis pontos de integração. O valor igual de m e n para cada caso significa uma mesma ordem de potência de ξ e η . Os dois elementos considerados podem ser vistos pelas figuras 2.6 e 2.7.

b) Matriz convecção da matriz rigidez, para o elemento $[K_2]^e$

$$[K_2]^e = h \int_{-1}^1 [N^e(\xi)]^T [N^e(\xi)] |\det [J_0]| d\xi =$$

$$h \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & N_2 N_3 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_3 \end{bmatrix} d\xi, \quad (2.112)$$

onde os índices 1, 2, e 3 representam a numeração local do lado que está sendo analisado. Por exemplo se o lado a ser analisado é o que contém os nós 1, 2, 3 então será utilizado N_1 , N_2 e N_3 , mas se o lado é o que contém os nós, por exemplo, 5, 6 e 7 então será utilizado N_5 , N_6 e N_7 . O uso de $d\xi$ ou $d\eta$ dependerá também do lado que está sendo analisado. Se η é constante no lado então usa-se $d\xi$, se ξ é constante então usa-se $d\eta$. Como o elemento é isoparamétrico o resultado da integral será sempre o mesmo e a matriz dependerá apenas do comprimento do lado e do coeficiente de convecção.

O resultado da matriz então será:

$$[K_2]^e = \frac{h l_{123}}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad (2.113)$$

onde h é o coeficiente de convecção e l_{123} é o comprimento do lado com convecção. O cálculo do comprimento do lado do elemento foi feito com a utilização das funções de forma segundo Segerlind (1976).

c) Matriz fluxo de calor imposto, para o elemento $\{R_2\}^e$

$$\{R_2\}^e = q \int_{-1}^1 [N^e(\xi)]^T |\det [J_0]| d\xi = q \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} d\xi. \quad (2.114)$$

As mesmas observações feitas para a matriz $[K_2]^e$, são válidas para a matriz $\{R_2\}^e$ e a matriz resultante é dada por:

$$\{R_2\}^e = \frac{q l_{123}}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.115)$$

onde q é o fluxo de calor imposto e l_{123} é o lado com fluxo de calor.

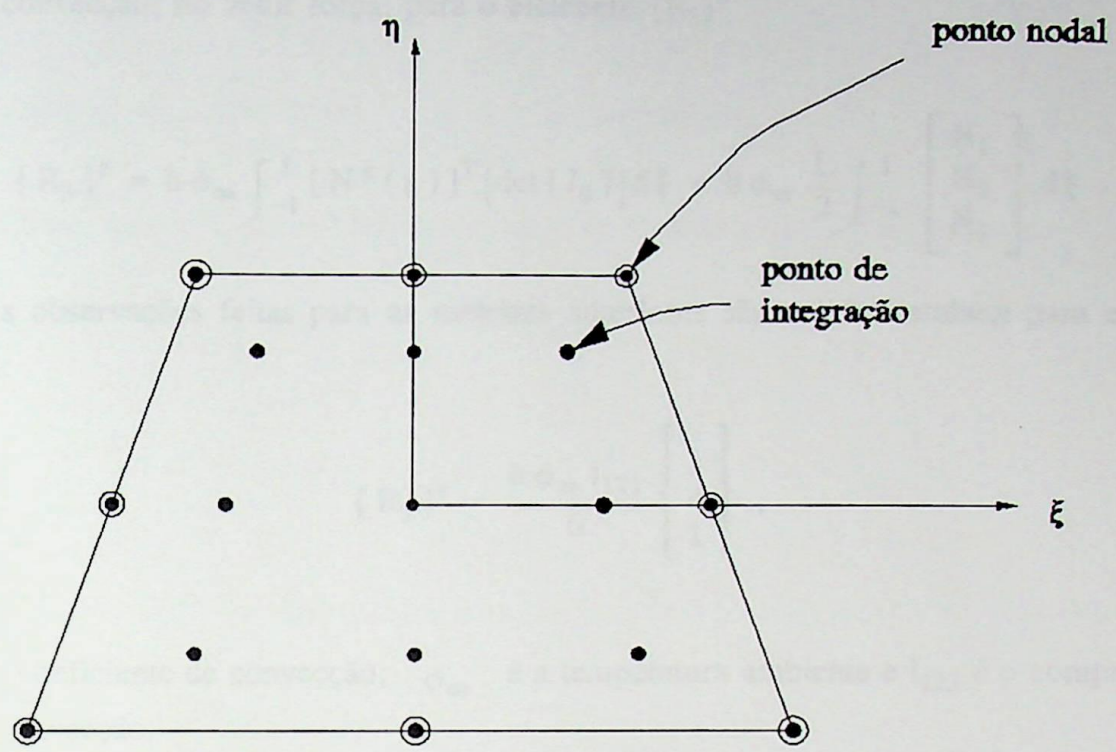


Figura 2.6 - Elemento quadrilateral quadrático com oito nós e nove pontos de integração.

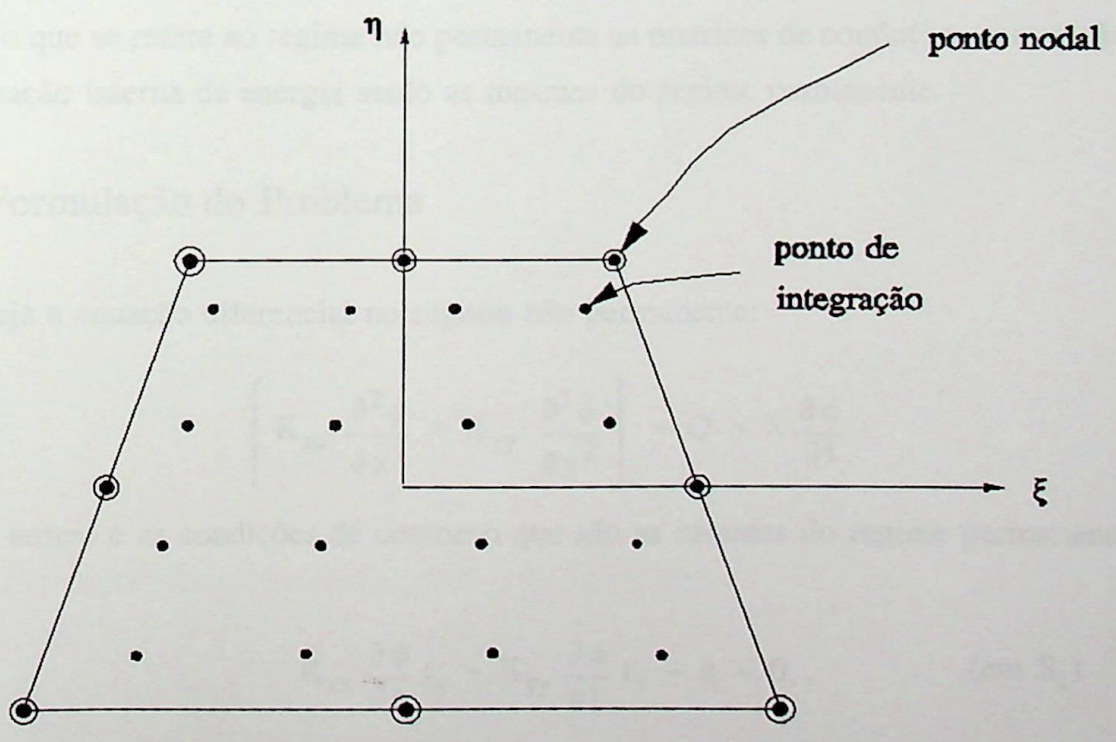


Figura 2.7 - Elemento quadrilateral quadrático com oito nós e dezesseis pontos de integração.

d) Matriz convecção, do vetor força, para o elemento $\{R_3\}^e$

$$\{R_3\}^e = h \phi_\infty \int_{-1}^1 [N^e(\xi)]^T |\det [J_0]| d\xi = h \phi_\infty \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} d\xi . \quad (2.116)$$

As observações feitas para as matrizes anteriores são válidas também para esta, o que resulta em:

$$\{R_3\}^e = \frac{h \phi_\infty l_{123}}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} , \quad (2.117)$$

onde h é o coeficiente de convecção, ϕ_∞ é a temperatura ambiente e l_{123} é o comprimento do lado com convecção.

2.7 - Equações de Elementos Finitos para Elemento Quadrilateral Quadrático de Oito Nós em Regime Não Permanente

No que se refere ao regime não permanente as matrizes de condução, convecção, fluxo de calor e geração interna de energia serão as mesmas do regime permanente.

2.7.1 - Formulação do Problema

Seja a equação diferencial no regime não permanente:

$$\left[K_{xx} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] + Q = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} , \quad (2.118a)$$

onde t é o tempo e as condições de contorno que são as mesmas do regime permanente:

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + q = 0 , \quad (\text{em } S_1) \quad (2.118b)$$

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + h(\phi - \phi_\infty) = 0 , \quad (\text{em } S_2) \quad (2.118c)$$

$$\phi = \phi_B . \quad (\text{em } S_3) \quad (2.118d)$$

2.7.2 - Minimização do Funcional do Elemento

O funcional do elemento correspondente às equações (2.118) é dado por:

$$I^e = \int_{v^e} \frac{1}{2} \left[K_{xx} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^2 + K_{yy} \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]^2 \right] dV + \int_{S_1^e} q \phi dS_1 + \int_{S_2^e} \frac{h}{2} [\phi^2 - 2\phi\phi_\infty + \phi_\infty^2] dS_2 + \int_{v^e} \left[- \left[Q - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \phi \right] dv . \quad (2.119)$$

A minimização do funcional acima, veja apêndice A4, resulta na seguinte matriz do elemento:

$$\left[[K]^e + \frac{2}{\Delta t} [C]^e \right] \{ \phi \}_{\text{nov}}^e = \frac{2}{\Delta t} [C]^e \{ \phi \}_{\text{velho}}^e - \{ R \}^e , \quad (2.120a)$$

onde:

$$[C]^e = \int_{v^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV , \quad (2.120b)$$

$$[K]^e = \int_{v^e} [B^e]^T [D^e] [B^e] dV + \int_{S_2^e} h [N^e]^T [N^e] dS_2 , \quad (2.120c)$$

$$\{ R \}^e = \int_{v^e} -Q [N^e]^T dV + \int_{S_1^e} q [N^e]^T dS_1 + \int_{S_2^e} -h \phi_\infty [N^e]^T dS_2 . \quad (2.120d)$$

2.7.3 - Definição das Matrizes para o Elemento

A matriz do elemento $[C]^e$ é dada por:

$$[C]^e = \int_{v^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV . \quad (2.121)$$

As demais matrizes já foram vistas e são as mesmas do regime permanente.

2.7.4 - Determinação das Integrais para o Elemento

As integrais são as mesmas já definidas para o regime permanente e a integral da matriz $[C^e]$ resulta em:

$$[C^e] = \frac{\lambda A^e}{70} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.122)$$

onde A^e é a área do elemento quadrilateral quadrático de oito nós.

2.8 - Descrição dos Programas

No presente trabalho foram desenvolvidos seis programas computacionais para a solução de problemas de transferência de calor utilizando os elementos citados anteriormente, para o regime permanente e não permanente.

Todos os seis programas podem considerar: convecção, fluxo de calor imposto, geração interna de energia e distribuição conhecida de temperatura.

A figura 2.8 apresenta o fluxograma geral para o regime permanente, e a descrição dos blocos que compõem este fluxograma está a seguir:

a) Início (bloco 1)

Este bloco traz uma descrição do programa, a descrição e declaração das variáveis e a abertura dos arquivos de entrada e resultados.

b) Leitura de Dados (bloco 2)

O programa faz a leitura de dados como : número de elementos, número de nós, coordenadas dos nós, conectividade, condutividade térmica, coeficiente de convecção, temperatura ambiente (temperatura do fluido ao redor do sólido), geração interna de energia, fluxo de calor imposto e valores conhecidos de temperatura. No caso tridimensional os programas não lêem os dados para o elemento mas sim para os blocos e o próprio programa se encarrega de passar estes dados para os elementos. lembrando que cada bloco se constitui de seis elementos tetraédricos

lineares.

c) Impressão do Dados (bloco 3)

Neste ponto se faz toda a impressão dos dados de entrada. No caso do elemento quadrilateral quadrático, a impressão se faz juntamente com a leitura e ainda há uma verificação dos dados.

d) Cálculo da Largura de Banda (bloco 4)

A largura de banda depende da numeração global dos nós, quanto menor esta largura, menor será a matriz global. Uma numeração global mais adequada diminui a largura de banda, e com isto, diminui também o espaço de memória alocado para os cálculos.

e) Inicialização de Parâmetros (bloco 5)

A matriz rigidez global e o vetor força global devem ser zerados antes dos cálculos.

f) Montagem da Matriz Condução (bloco 6)

Neste ponto calcula-se a área de cada elemento (caso bidimensional) ou o volume (caso tridimensional). Com estes valores e a condutividade térmica calcula-se a matriz condução de cada elemento e depois estes resultados são colocados na posição global.

g) Imposição da Convecção (bloco 7)

O comprimento do lado com convecção (caso bidimensional) ou a área da superfície com convecção (caso tridimensional) deve ser calculado para a montagem da matriz convecção do elemento e o resultado deve ser colocado na posição global.

h) Imposição do Fluxo de Calor (bloco 8)

Este bloco segue os mesmos passos do anterior só que ao invés de convecção, aqui se trata de fluxo de calor imposto.

i) Imposição da Geração Interna de Energia (bloco 9)

A geração interna de energia pode ser distribuída no elemento ou concentrada no nó. Se for distribuída, há a necessidade do cálculo da área ou volume do elemento, caso bi ou tridimensional respectivamente, para a montagem da matriz geração e este resultado deve ser colocado na posição global. Se a geração for concentrada no nó, basta colocar o valor desta geração na posição global indicada pelo número do nó.

j) Imposição do Valores Conhecidos de Temperatura (bloco 10)

Os valores conhecidos de temperatura devem ser incluídos no sistema de equações antes de sua solução.

k) Resolução do Sistema de Equações (bloco 11)

Neste bloco é feito o cálculo da distribuição de temperatura, ou seja, o cálculo da temperatura de cada nó. O fluxo de calor de cada elemento também é calculado neste bloco para os programas que utilizam o elemento triangular e o elemento tetraédrico. No caso dos programas que utilizam o elemento quadrilateral, o fluxo é calculado para cada nó e não para cada elemento.

l) Impressão do Resultados (bloco 12)

Neste ponto são impressos os valores da distribuição de temperatura e do fluxo de calor.

A figura 2.9 apresenta o fluxograma para o regime não permanente. Os blocos de 1 a 12 são os mesmos do regime permanente mas há o acréscimo dos blocos de 13 a 16 que são descritos a seguir:

a) Montagem da Matriz [C] (bloco 13)

A matriz [C] se faz necessária para o cálculo da distribuição de temperatura no regime não permanente. Esta matriz leva em conta a área do elemento (caso bidimensional) ou o volume do elemento (caso tridimensional) e o parâmetro λ que é igual ao produto do calor específico a pressão constante pela densidade do material, $\lambda = c_p \rho$.

b) Solução para o Tempo Zero (bloco 14)

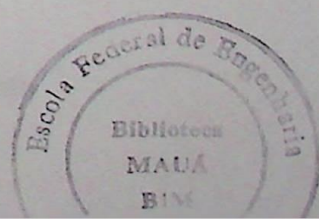
Para o tempo zero, os valores da distribuição de temperatura são a temperatura inicial da peça e os valores conhecidos de temperatura. O fluxo de calor pode ser calculado a partir destes valores.

c) Acréscimo do Tempo (bloco 15)

O tempo é acrescido de um intervalo de tempo (Δt), este intervalo é lido no arquivo de dados.

d) Atingiu o Limite de Intervalos de Tempo ? (bloco 16)

Um teste se faz necessário para parar a iteração, neste caso, existe um limite no número de intervalos de tempo o qual é lido no arquivo de dados.



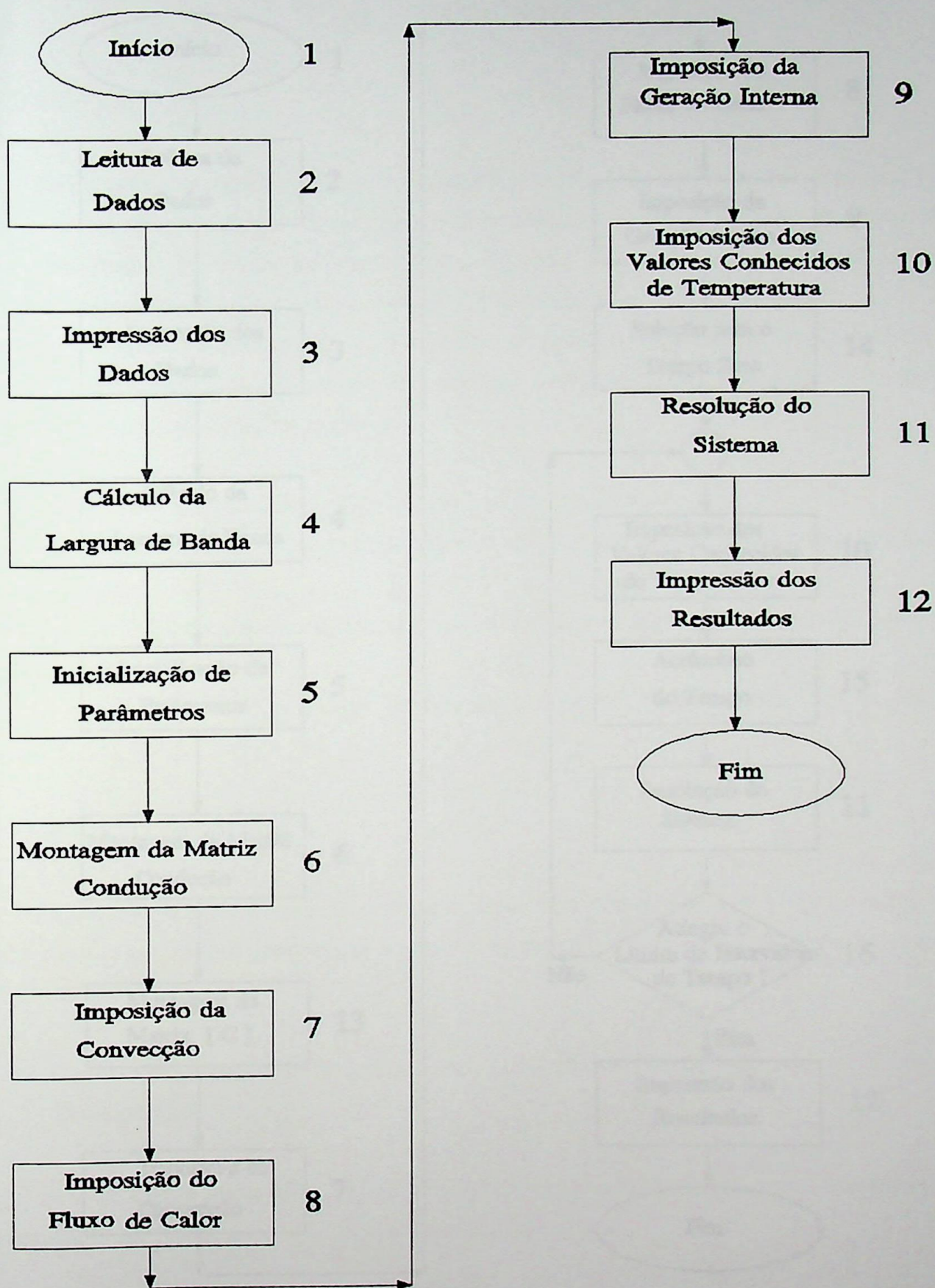


Figura 2.8 - Fluxograma Geral para o Regime Permanente

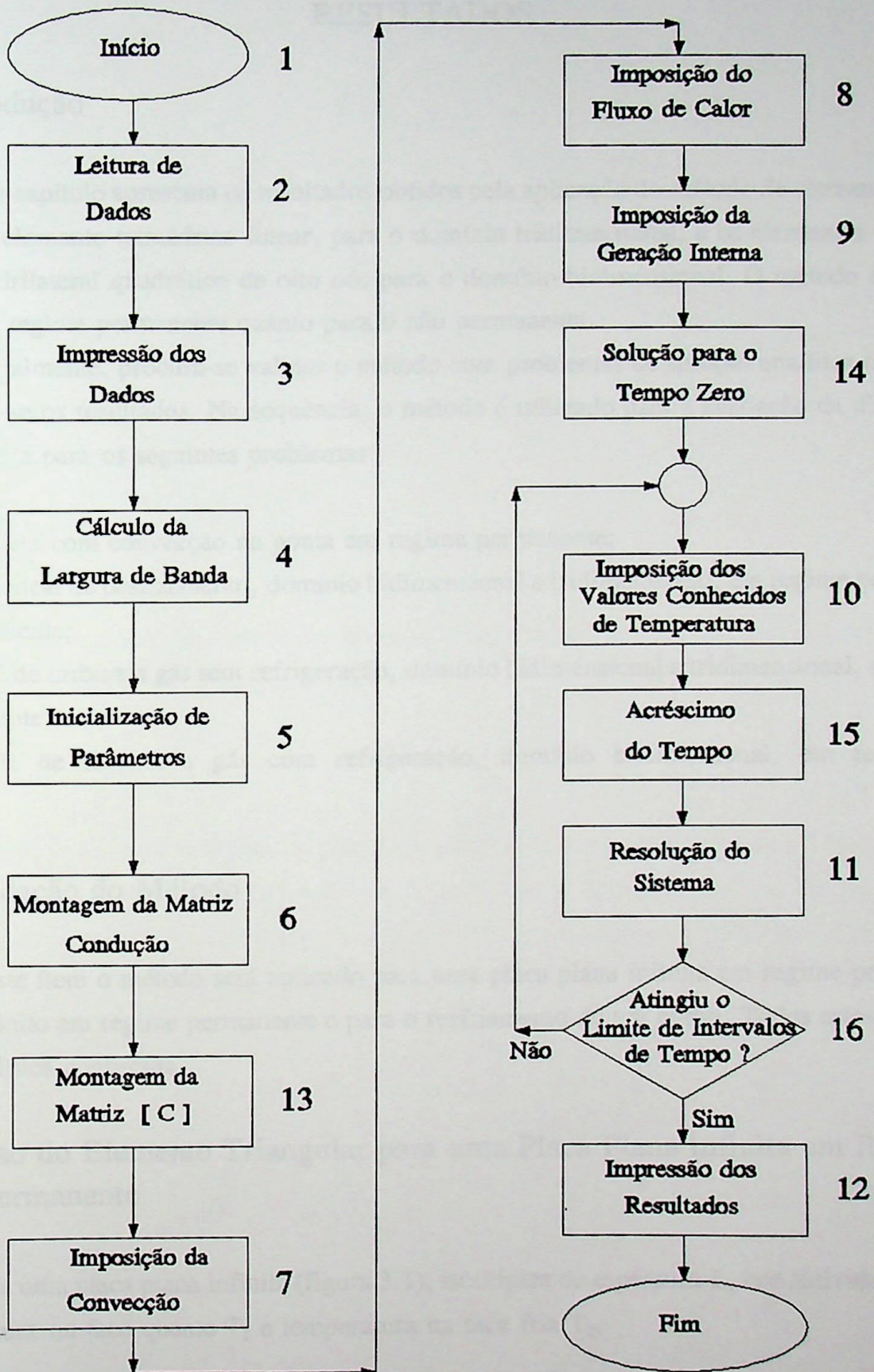


Figura 2.9 - Fluxograma Geral para o Regime Não Permanente

CAPÍTULO 3

RESULTADOS

3.1 - Introdução

Este capítulo apresenta os resultados obtidos pela aplicação do método de elementos finitos utilizando o elemento tetraédrico linear, para o domínio tridimensional, e os elementos triangular linear e quadrilateral quadrático de oito nós para o domínio bidimensional. O método é aplicado tanto para o regime permanente quanto para o não permanente.

Inicialmente, procura-se validar o método com problemas de solução analítica conhecida, comparando-se os resultados. Na sequência, o método é utilizado para a avaliação da distribuição de temperatura para os seguintes problemas:

- Aleta com convecção na ponta em regime permanente;
- Mancal de deslizamento, domínio bidimensional e tridimensional, em regime permanente e não permanente;
- Pá de turbina a gás sem refrigeração, domínio bidimensional e tridimensional, em regime não permanente;
- Pá de turbina a gás com refrigeração, domínio bidimensional, em regime não permanente.

3.2 - Validação do Método

Neste ítem o método será aplicado para uma placa plana infinita em regime permanente, um tubo infinito em regime permanente e para o resfriamento de um corpo. Todos estes casos têm solução analítica conhecida.

3.2.1 - Uso do Elemento Triangular para uma Placa Plana Infinita em Regime Permanente

Seja uma placa plana infinita (figura 3.1), isotrópica de espessura L , condutividade térmica K , temperatura na face quente T_1 e temperatura na face fria T_2 .

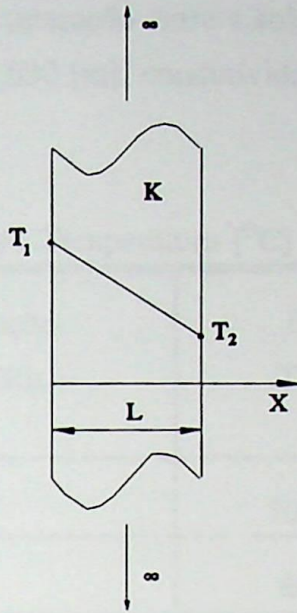


Figura 3.1 - Placa Plana Infinita

A temperatura T , no regime permanente, a uma distância x qualquer da face quente pode ser calculada analiticamente da seguinte forma:

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L} . \quad (3.1)$$

A figura 3.2 mostra a placa dividida em elementos triangulares lineares. Como a placa é infinita, deve-se tomar apenas um trecho da mesma para a aplicação do método de elementos finitos. Este trecho pode ter um comprimento qualquer, por exemplo, pode ser igual a própria espessura.

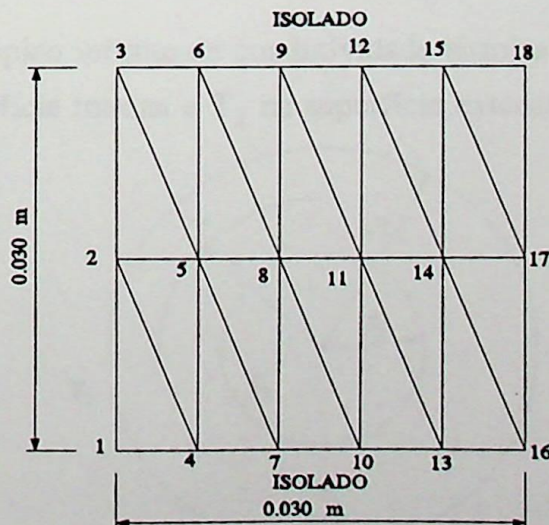


Figura 3.2 - Placa Plana Dividida em Elementos Triangulares

A tabela 3.1 mostra uma comparação entre a solução analítica e a solução numérica para uma placa plana de espessura $L = 0,030$ [m], condutividade térmica $K = 160,0$ [W/m °C], $T_1 = 100,0$ [°C] e $T_2 = 30,0$ [°C].

Tabela 3.1 - Distribuição de Temperatura [°C] para uma Placa Plana Infinita

x [m]	Solução Analítica	Elemento Triangular	Desvio [%]
0,000	100,0	100,0	0,0
0,006	86,0	86,0	0,0
0,012	72,0	72,0	0,0
0,018	58,0	58,0	0,0
0,024	44,0	44,0	0,0
0,030	30,0	30,0	0,0

Como a solução analítica é linear e o elemento utilizado é também linear, então a solução encontrada pelo método de elementos finitos é exata.

3.2.2 - Uso do Elemento Quadrilateral e do Elemento Tetraédrico para um Tubo Infinito em Regime Permanente

Seja um tubo isotrópico infinito de condutividade térmica K , raio interno r_1 , raio externo r_2 , temperatura T_1 na superfície interna e T_2 na superfície externa.

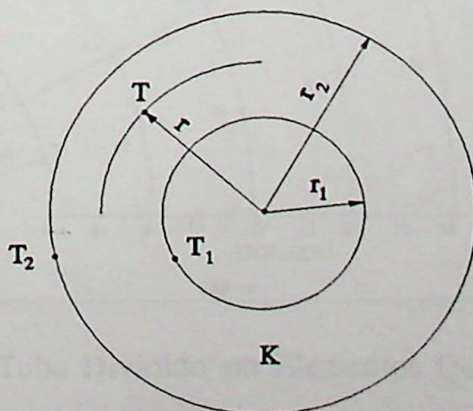


Figura 3.3 - Tubo Infinito

A temperatura T , para o regime permanente, num ponto qualquer a um raio r entre r_1 e r_2 , pode ser calculada analiticamente por:

$$T = T_2 + (T_1 - T_2) \frac{\ln(r/r_2)}{\ln(r_1/r_2)} \quad (3.2)$$

A figura 3.4 mostra um segmento do tubo, num ângulo de 60° , dividido em 10 elementos quadrilaterais quadráticos de oito nós e a figura 3.5 mostra este mesmo segmento dividido em 40 blocos de seis elementos tetraédricos cada. A distribuição dos elementos tetraédricos dentro de cada bloco pode ser vista na figura 2.4.

A tabela 3.2 apresenta a comparação entre os resultados obtidos pela utilização do elemento quadrilateral e do elemento tetraédrico e a solução analítica. Como no método de elementos finitos os valores de temperatura para um mesmo raio r não se mantêm constantes, houve a necessidade de se fazer uma média para possibilitar a comparação com a solução analítica.

Os desvios encontrados pelos dois tipos de elemento são praticamente idênticos indicando que o método está funcionando perfeitamente para o dois tipos. O elemento quadrilateral, neste caso, leva uma vantagem pois com bem menos elementos ele consegue obter até mais pontos de temperatura que o elemento tetraédrico. Evidentemente o elemento tetraédrico foi utilizado aqui somente a título de comparação e teste, haja visto que se trata de um problema bidimensional.

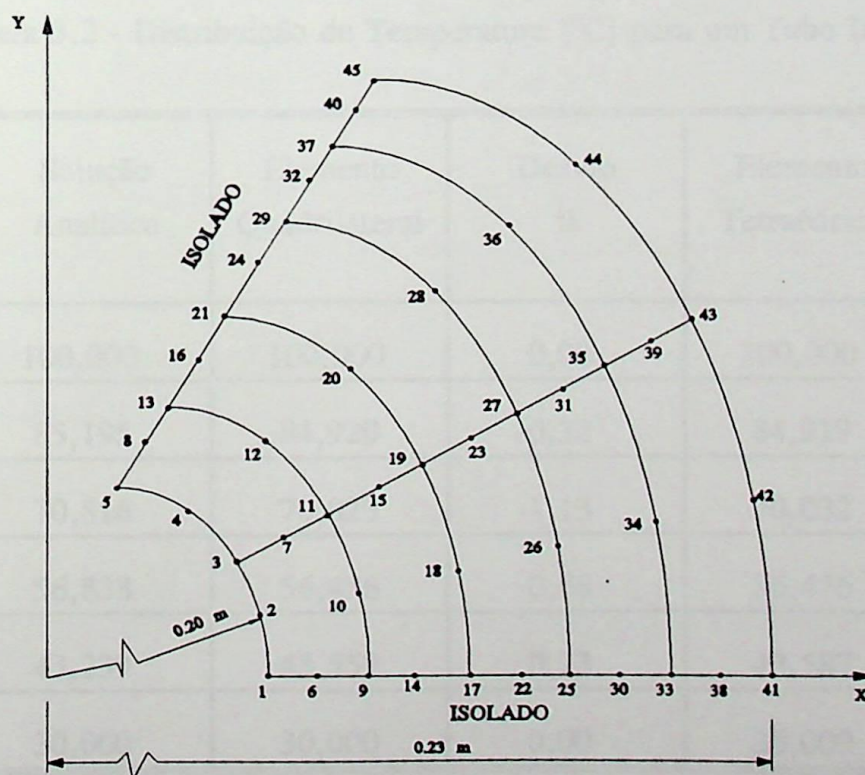


Figura 3.4 - Tubo Dividido em Elementos Quadrilaterais

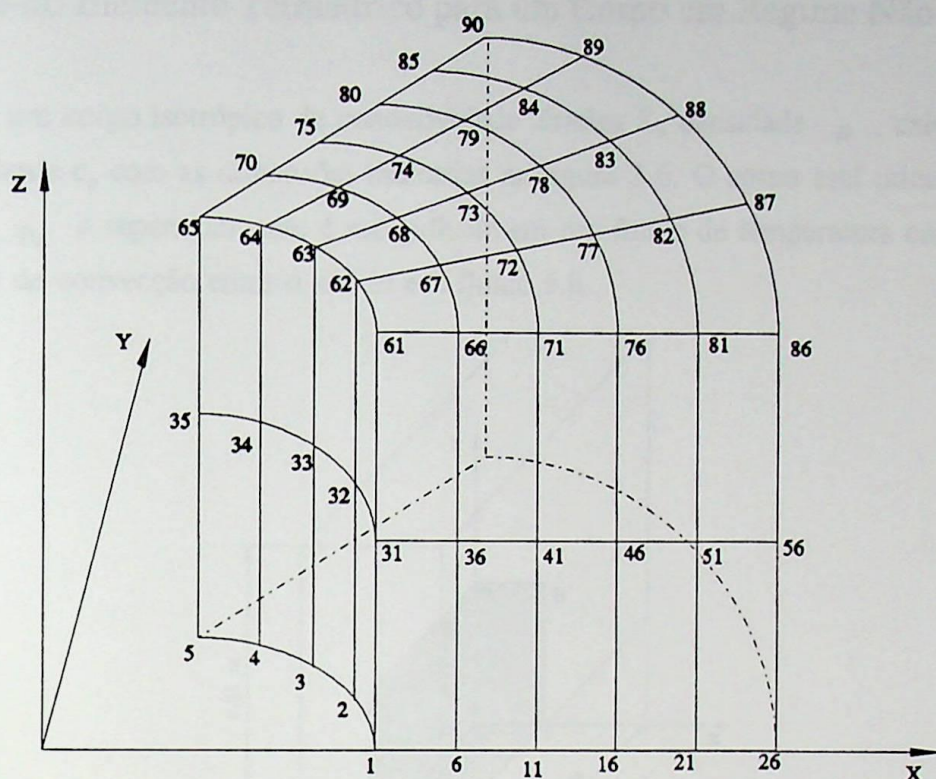


Figura 3.5 - Tubo Dividido em Blocos de Elementos Tetraédricos

Tabela 3.2 - Distribuição de Temperatura [°C] para um Tubo Infinito

r [m]	Solução Analítica	Elemento Quadrilateral	Desvio %	Elemento Tetraédrico	Desvio %
0,200	100,000	100,000	0,00	100,000	0,00
0,206	85,195	84,920	-0,32	84,919	-0,33
0,212	70,816	70,023	-1,13	70,032	-1,12
0,218	56,838	56,456	-0,68	56,476	-0,64
0,224	43,239	43,559	0,73	43,587	0,80
0,230	30,000	30,000	0,00	30,000	0,00

3.2.3 - Uso do Elemento Tetraédrico para um Corpo em Regime Não Permanente

Seja um corpo isotrópico de condutividade térmica K , densidade ρ , calor específico a pressão constante c_p com as dimensões indicadas na figura 3.6. O corpo está inicialmente a uma temperatura ϕ_0 e repentinamente é mergulhado em um fluido de temperatura constante ϕ_∞ . O coeficiente de convecção entre o sólido e o fluido é h .

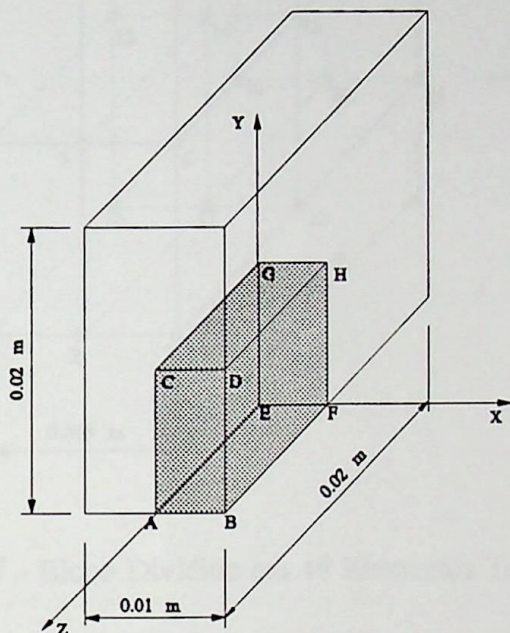


Figura 3.6 - Corpo a ser Resfriado

A variação da temperatura no centro do corpo pode ser calculada analiticamente através da análise global do sistema. Esta análise não considera a variação da temperatura com a posição e só é válida para número de Biot menor que 0,1 o que indica uma variação da temperatura com a posição de apenas 5 [%], conforme Özişik (1990).

O número de Biot é dado por:

$$Bi = \frac{h L_s}{K_s}, \quad (3.3)$$

onde K_s é a condutividade térmica do sólido, h é o coeficiente de convecção e L_s é o comprimento característico dado por:

$$L_s = \frac{V}{A}, \quad (3.4)$$

onde A é a área da superfície e V é o volume do sólido.

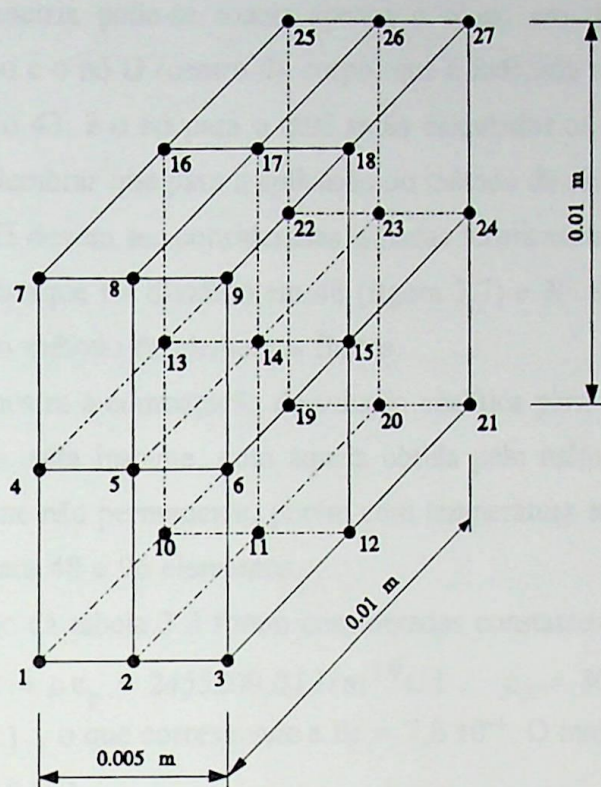


Figura 3.7 - Bloco Dividido em 48 Elementos Tetraédricos

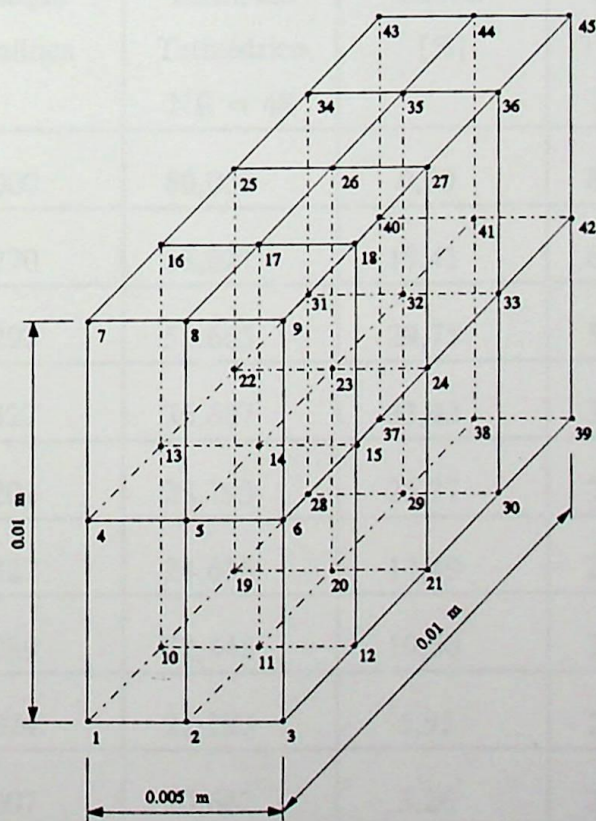


Figura 3.8 - Bloco Dividido em 96 Elementos Tetraédricos

Através da simetria pode-se tomar apenas o bloco em destaque da figura 3.6 para representar todo o corpo e o nó G (centro do corpo) que é indicado na figura 3.7 pelo ponto 25 e na figura 3.8 pelo ponto 43, é o nó para o qual serão calculados os valores de temperatura para cada instante t . É bom lembrar que para a aplicação do método de elementos finitos as superfícies ACEG, CDGH e EFGH devem ser consideradas isoladas termicamente.

O bloco em destaque foi dividido em 48 (figura 3.7) e 96 elementos tetraédricos (figura 3.8) para a aplicação do método de elementos finitos.

A tabela 3.3 mostra a comparação da solução analítica para regime não permanente com temperatura uniforme a cada instante, com aquela obtida pelo método de elementos finitos que também considera regime não permanente, porém com temperatura não uniforme a cada instante. O método foi testado para 48 e 96 elementos.

Para a obtenção da tabela 3.3 foram considerados constantes os seguintes parâmetros: $K = 160,0$ [W/m⁰C], $\lambda = \rho c_p = 2455200,0$ [J/m³°C], $\phi_0 = 80,0$ [°C], $h = 50,0$ [W/m²°C] e $\phi_\infty = 20,0$ [°C], o que corresponde a $Bi = 7,8 \cdot 10^{-4}$. O intervalo de tempo utilizado nos cálculos é de $\Delta t = 8,0$ [s].

Tabela 3.3 - Variação da Temperatura [°C] no Centro do Corpo

Tempo [s]	Solução Analítica	Elemento Tetraédrico NE = 48	Desvio [%]	Elemento Tetraédrico NE = 96	Desvio [%]
0,0	80,000	80,000	0,00	80,000	0,00
80,0	51,270	63,621	19,41	63,452	19,20
160,0	36,297	51,665	29,75	51,536	29,57
320,0	24,427	36,687	33,42	36,611	33,28
480,0	21,202	28,795	26,37	28,749	26,25
640,0	20,327	24,636	17,49	24,607	17,39
800,0	20,089	22,445	10,50	22,425	10,42
960,0	20,024	21,290	5,95	21,276	5,88
1120,0	20,007	20,682	3,26	20,671	3,21
1280,0	20,002	20,361	1,76	20,352	1,72
1440,0	20,000	20,192	0,95	20,184	0,91

1600,0	20,000	20,103	0,51	20,095	0,47
1760,0	20,000	20,056	0,28	20,049	0,24
1920,0	20,000	20,032	0,16	20,024	0,12

Os resultados encontrados para número de elementos (NE) igual a 48 e $NE = 96$ são praticamente os mesmos, isto é, mesmo dobrando-se o número de elementos não houve alteração significativa nos resultados. Uma comparação entre a solução analítica e o método de elementos finitos pode ser melhor visualizada através da figura 3.9.

O propósito da figura 3.10 é mostrar a influência do intervalo de tempo (Δt) nos resultados. Para isto foram fixados os mesmos parâmetros da tabela 3.3 com exceção do intervalo de tempo que foi variado de 2,0 [s] a 80,0 [s]. A figura apresenta os resultados para $t = 80,0$ [s].

A figura 3.10 mostra que quanto menor o intervalo de tempo melhor é o resultado, mas mostra também que esta melhora não é tão significativa assim e, por isto mesmo, indica que o uso de $\Delta t = 8,0$ [s], para a tabela 3.3, apesar de não ser a melhor opção possível, foi uma boa escolha.

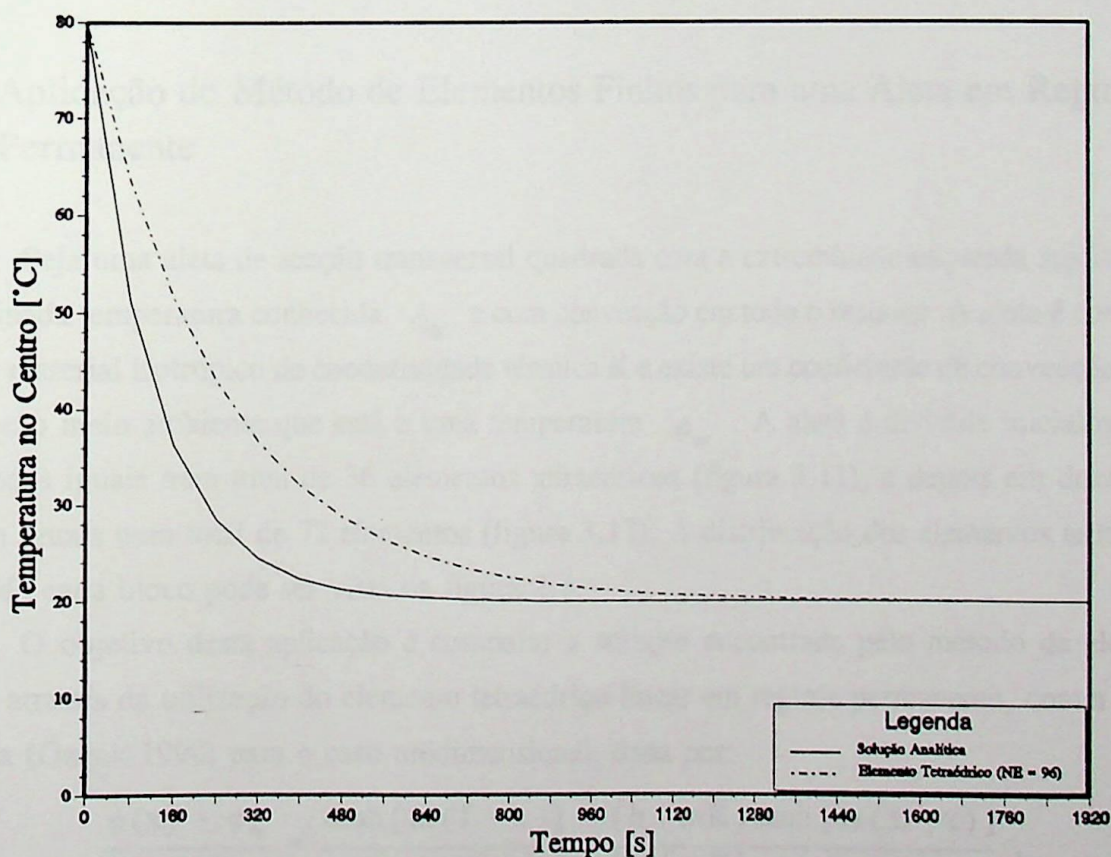


Figura 3.9 - Variação da Temperatura no Centro do corpo

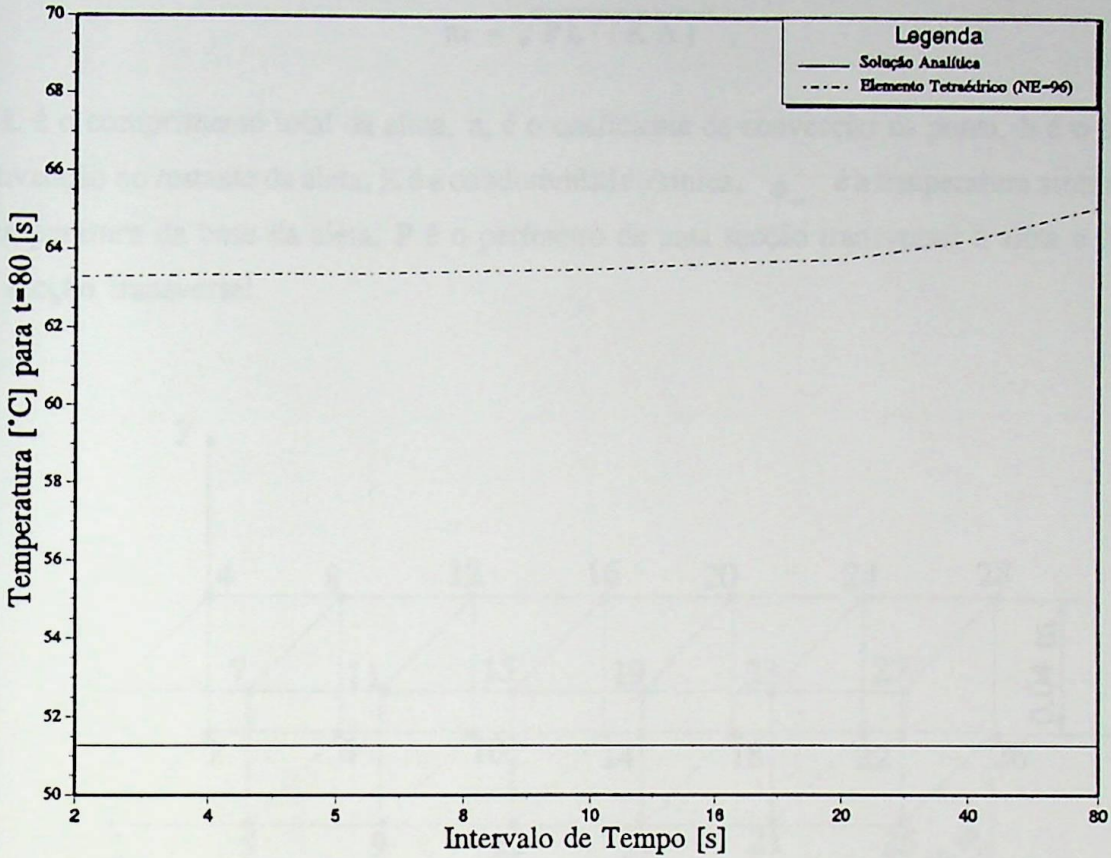


Figura 3.10 - Influência do Intervalo de Tempo na Solução

3.3 - Aplicação do Método de Elementos Finitos para uma Aleta em Regime Permanente

Seja uma aleta de secção transversal quadrada com a extremidade esquerda sujeita a uma determinada temperatura conhecida ϕ_B e com convecção em todo o restante. A aleta é constituída de uma material isotrópico de condutividade térmica K e existe um coeficiente de convecção h entre a aleta e o meio ambiente que está a uma temperatura ϕ_∞ . A aleta é dividida inicialmente em seis blocos iguais num total de 36 elementos tetraédricos (figura 3.11), e depois em doze blocos também iguais num total de 72 elementos (figura 3.12). A distribuição dos elementos tetraédricos dentro de cada bloco pode ser vista na figura 2.4.

O objetivo desta aplicação é comparar a solução encontrada pelo método de elementos finitos, através da utilização do elemento tetraédrico linear em regime permanente, com a solução analítica (Özişik 1990) para o caso unidimensional, dada por:

$$\frac{\phi(x) - \phi_\infty}{\phi_B - \phi_\infty} = \frac{\cosh [m(L-x)] + (h_c / mK) \sinh [m(L-x)]}{\cosh (mL) + (h_c / mK) \sinh (mL)}, \quad (3.5)$$

sendo o valor de m calculado por:

$$m = \sqrt{Ph / (KA)} , \quad (3.6)$$

onde L é o comprimento total da aleta, h_c é o coeficiente de convecção na ponta, h é o coeficiente de convecção no restante da aleta, K é a condutividade térmica, ϕ_∞ é a temperatura ambiente, ϕ_B é a temperatura da base da aleta, P é o perímetro de uma secção transversal à aleta e A é a área desta secção transversal.

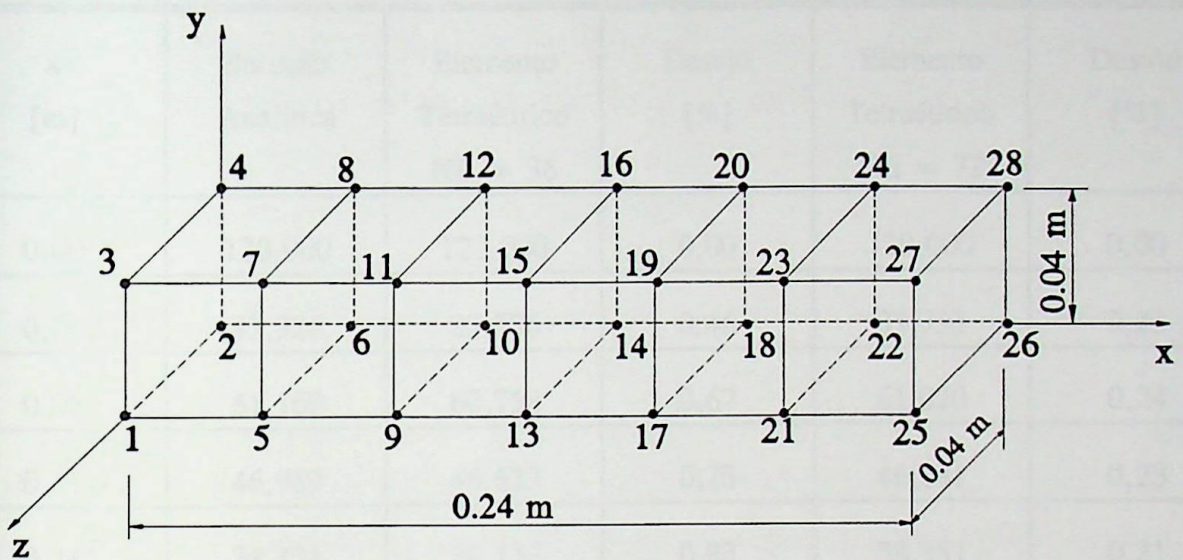


Figura 3.11 - Aleta Dividida em 36 Elementos Tetraédricos.

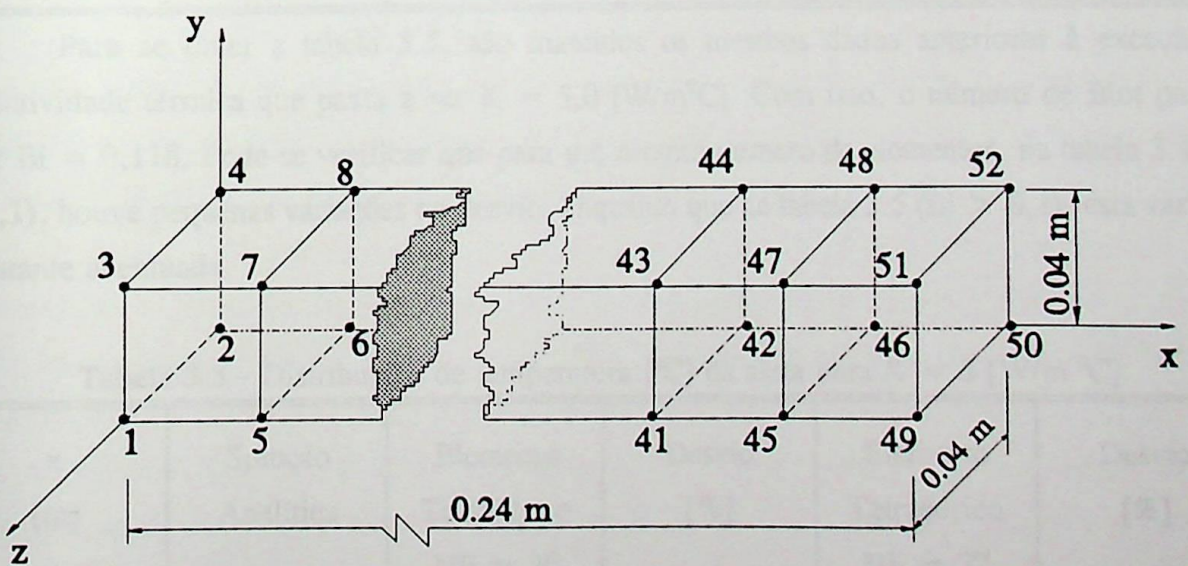


Figura 3.12 - Aleta Dividida em 72 Elementos Tetraédricos

A tabela 3.4 mostra os resultados para uma aleta de condutividade térmica $K = 50,0$ [W/m °C], $h = h_c = 64,0$ [W/m² °C], $\phi_\infty = 20$ [°C] e $\phi_B = 120$ [°C]. O número de Biot foi calculado usando-se as equações (3.3) e (3.4), resultando em $Bi = 0,012$. O maior desvio em relação à solução analítica é de 0,83 % para $NE = 36$ e o menor desvio é de 0,17 % para $NE = 72$. Pode-se observar que há uma queda significativa do desvio com o aumento do número de elementos.

Tabela 3.4 - Distribuição de temperatura [°C] da aleta para $K = 50$ [W/m °C]

x [m]	Solução Analítica	Elemento Tetraédrico NE = 36	Desvio [%]	Elemento Tetraédrico NE = 72	Desvio [%]
0,00	120,000	120,000	0,00	120,000	0,00
0,04	83,926	83,536	0,46	83,732	0,23
0,08	61,169	60,758	0,67	61,020	0,24
0,12	46,989	46,622	0,78	46,881	0,23
0,16	38,431	38,113	0,83	38,351	0,21
0,20	33,712	33,434	0,82	33,649	0,19
0,24	31,850	31,598	0,79	31,795	0,17

Para se obter a tabela 3.5, são mantidos os mesmos dados anteriores à exceção da condutividade térmica que passa a ser $K = 5,0$ [W/m °C]. Com isso, o número de Biot passa a valer $Bi = 0,118$. Pode-se verificar que para um mesmo número de elementos, na tabela 3.4, ($Bi < 0,1$), houve pequenas variações no desvio, enquanto que na tabela 3.5 ($Bi > 0,1$), esta variação é bastante acentuada.

Tabela 3.5 - Distribuição de temperatura [°C] da aleta para $K = 5$ [W/m °C]

x [m]	Solução Analítica	Elemento Tetraédrico NE = 36	Desvio [%]	Elemento Tetraédrico NE = 72	Desvio [%]
0,00	120,000	120,000	0,00	120,000	0,00
0,04	43,905	40,047	8,79	42,868	2,36

0,08	25,715	24,134	6,15	25,380	1,30
0,12	21,366	20,860	2,37	21,273	0,43
0,16	20,327	20,179	0,73	20,302	0,12
0,20	20,080	20,038	0,21	20,073	0,03
0,24	20,027	20,012	0,08	20,025	0,01

Para cada coordenada x indicada nas tabelas 3.4 e 3.5, existem quatro pontos com a temperatura calculada pelo método de elementos finitos. Como estes valores de temperatura não são necessariamente iguais, para se comparar com a solução analítica foi preciso se fazer uma média da temperatura dos pontos de mesma coordenada.

3.4 - Aplicação do Método de Elementos Finitos para um Mancal de Deslizamento

Seja um mancal (figura 3.13) composto de dois materiais diferentes M e N . A bucha do mancal é composta do material isotrópico M de condutividade térmica K_1 e parâmetro λ_1 . O restante do mancal é composto do material N também isotrópico de condutividade térmica K_2 e parâmetro λ_2 . A temperatura sob o mancal é mantida constante em T_1 enquanto que a temperatura no furo de raio 0.020 [m] é mantida a T_2 . Todo o restante do mancal troca calor com o meio, que está a uma temperatura ϕ_∞ , com um coeficiente de convecção h .

Serão estudados os casos bidimensional e tridimensional tanto para o regime permanente quanto para o regime não permanente. No caso bidimensional o mancal tem dimensão infinita na direção z (vide figura 3.13), o que resulta em simetria com relação ao plano $x = 0$. No caso de um mancal tridimensional, existe simetria com relação ao plano $x = 0$ e $z = 0$.

A figura 3.14 mostra a parte do mancal que será analisada numericamente. No caso bidimensional as condições de contorno utilizadas são: temperatura conhecida T_1 na superfície ABCD, temperatura conhecida T_2 na superfície EFGH, convecção nas superfícies BDMN, MNKL, KLIJ e isolamento térmico em todas as demais superfícies. Para o caso tridimensional as condições de contorno são: temperatura T_1 na superfície ABCD, temperatura T_2 na superfície EFGH, convecção nas superfícies ABMKIGE, BDMN, MNKL, KLIJ e isolamento térmico em todas as demais superfícies.

As figuras 3.15, 3.16 e 3.17 apresentam a parte do mancal que será analisada, dividida em elementos quadrilaterais quadráticos, triangulares lineares e tetraédricos lineares, respectivamente.

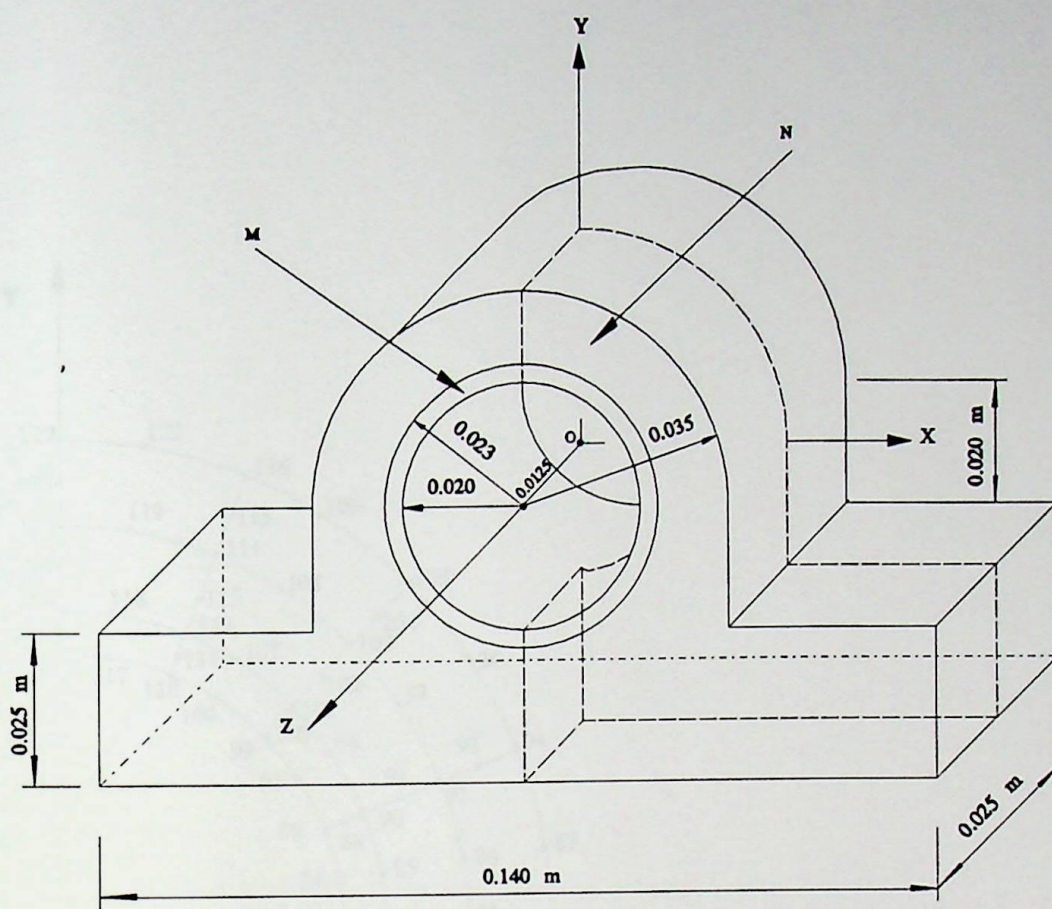


Figura 3.13 - Mancal de Deslizamento

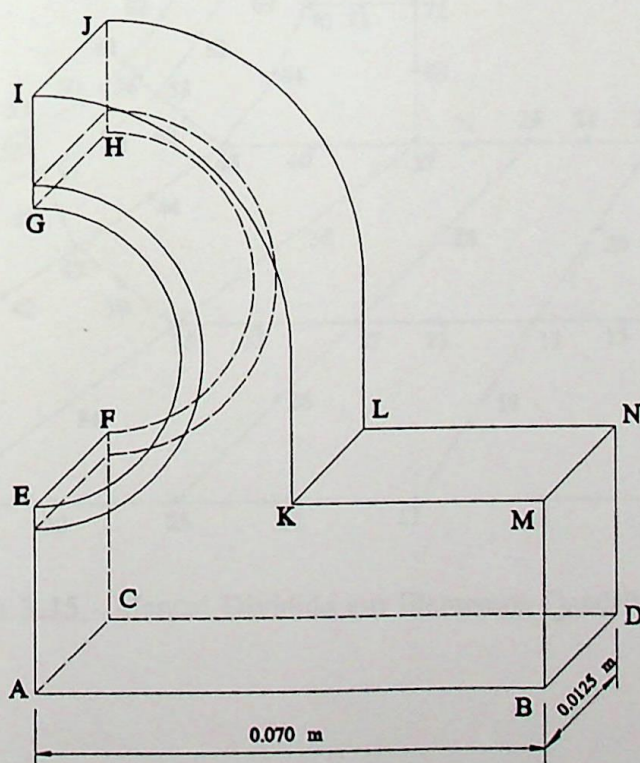


Figura 3.14 - Parte do Mancal que será Analisada

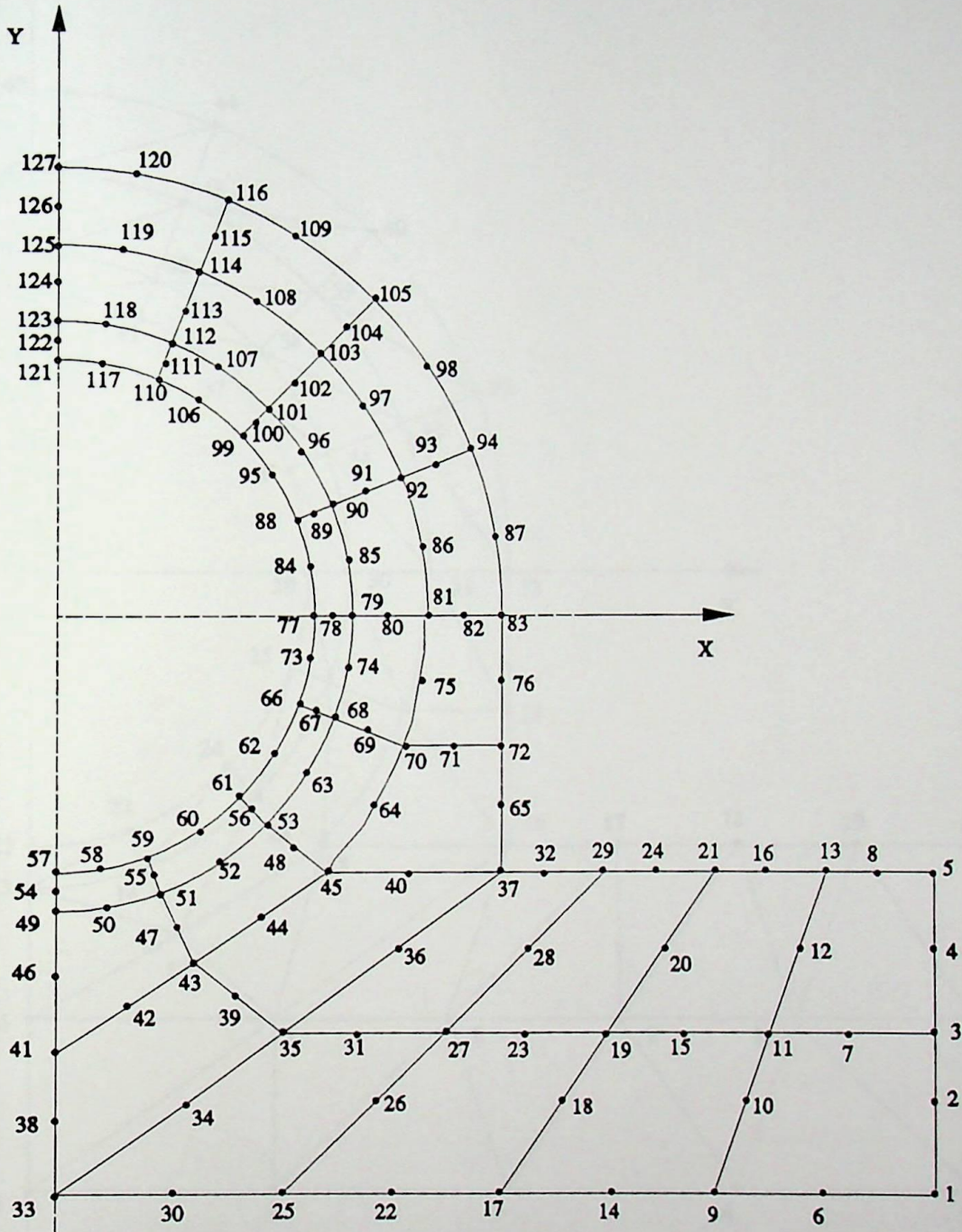


Figura 3.15 - Mancal Dividido em Elementos Quadrilaterais Quadráticos

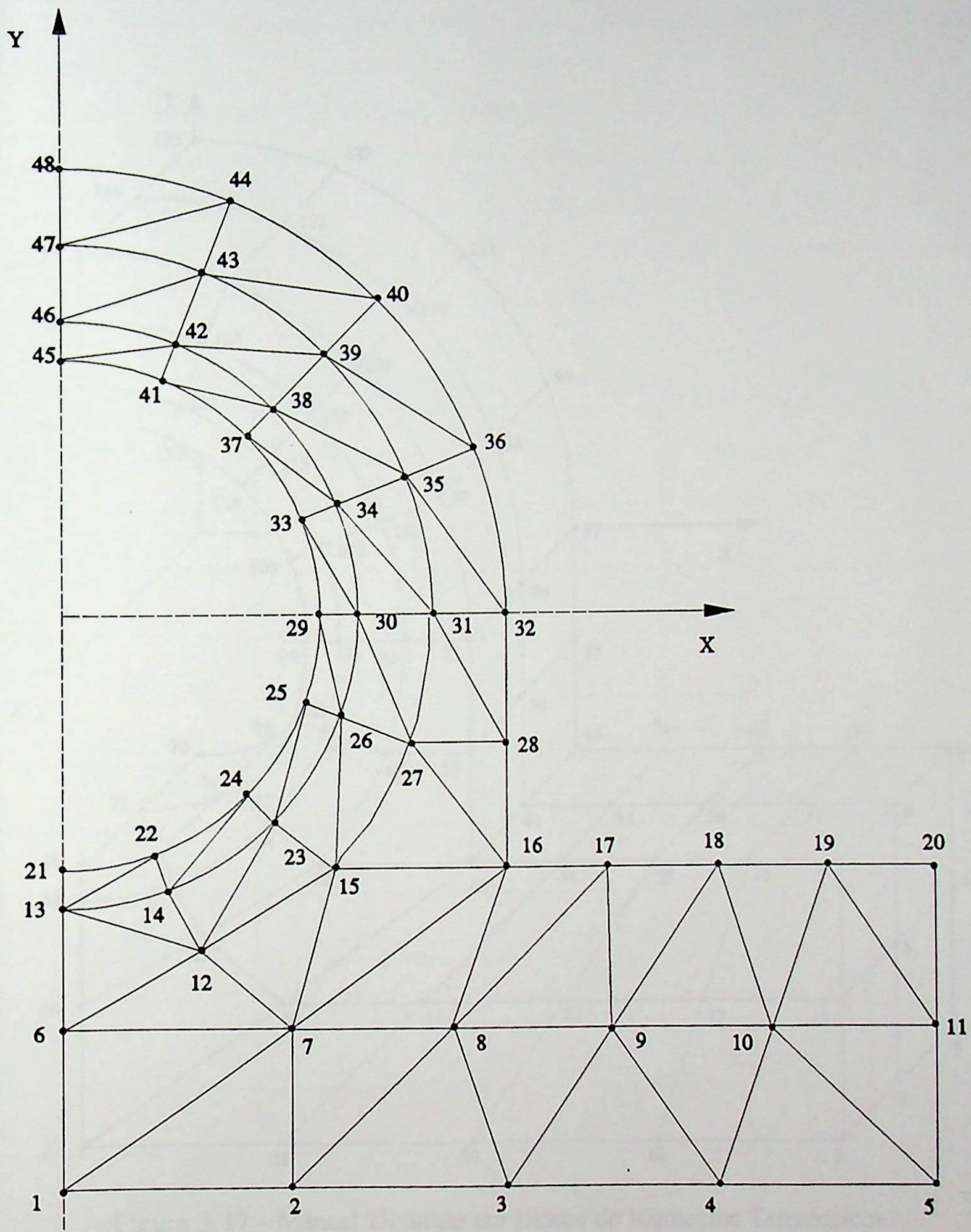


Figura 3.16 - Mancal Dividido em Elementos Triangulares

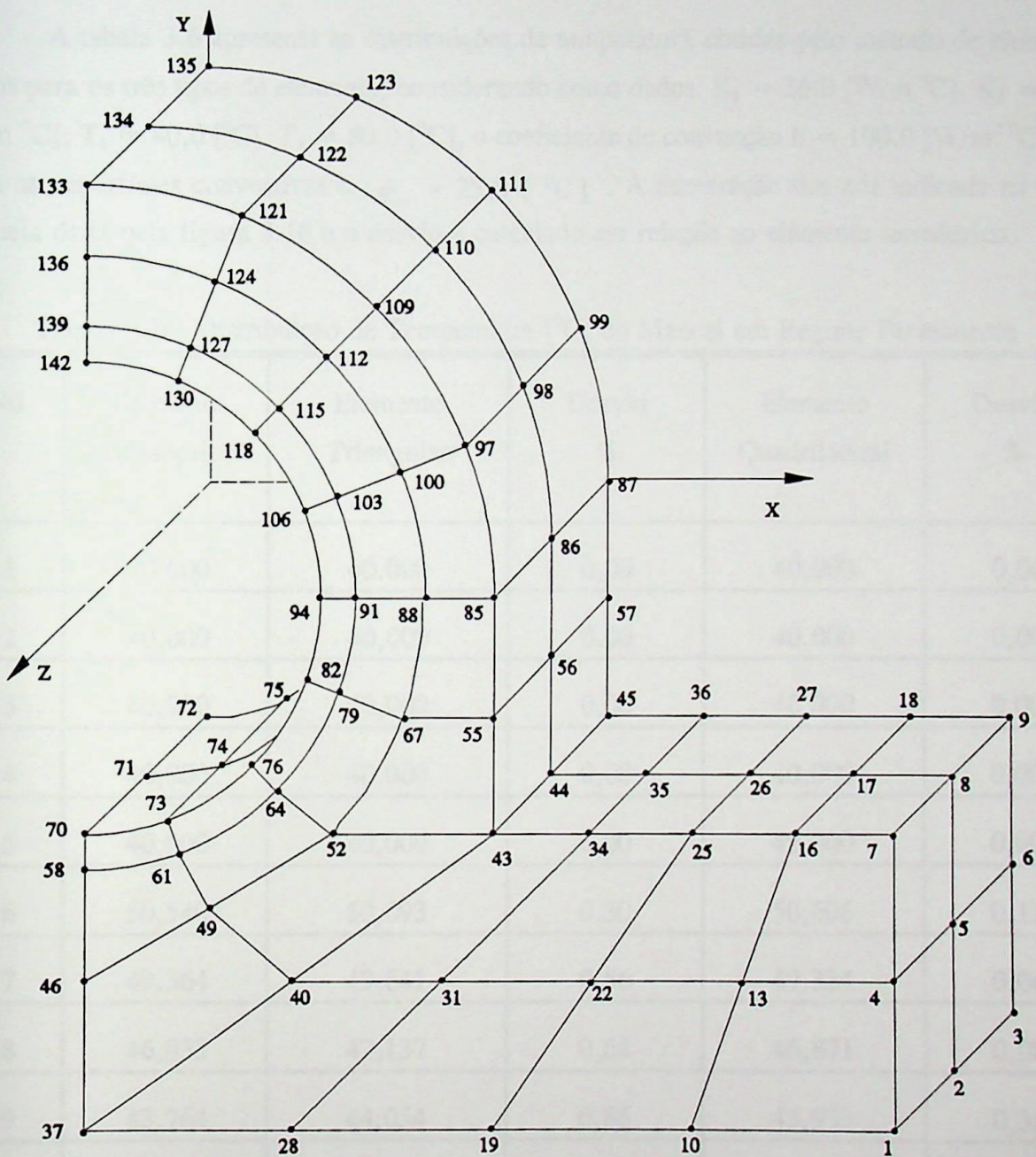


Figura 3.17 - Mancal Dividido em Blocos de Elementos Tetraédricos



3.4.1 - Mancal em Regime Permanente

Vamos considerar o mancal, já descrito anteriormente, em regime permanente e vamos utilizar os elementos triangular, tetraédrico e quadrilateral para avaliar a distribuição de temperatura.

A tabela 3.6 apresenta as distribuições de temperatura obtidas pelo método de elementos finitos para os três tipos de elemento, considerando como dados: $K_1 = 26,0$ [W/m °C], $K_2 = 160,0$ [W/m °C], $T_1 = 40,0$ [°C], $T_2 = 80,0$ [°C], o coeficiente de convecção $h = 100,0$ [W/m² °C] para todas as superfícies convectivas e $\phi_\infty = 25,0$ [°C]. A numeração dos nós indicada na tabela é aquela dada pela figura 3.16 e o desvio é calculado em relação ao elemento tetraédrico.

Tabela 3.6 - Distribuição de Temperatura [°C] do Mancal em Regime Permanente

Nó	Elemento Tetraédrico	Elemento Triangular	Desvio %	Elemento Quadrilateral	Desvio %
1	40,000	40,000	0,00	40,000	0,00
2	40,000	40,000	0,00	40,000	0,00
3	40,000	40,000	0,00	40,000	0,00
4	40,000	40,000	0,00	40,000	0,00
5	40,000	40,000	0,00	40,000	0,00
6	50,540	50,693	0,30	50,606	0,13
7	49,364	49,641	0,56	49,334	-0,06
8	46,833	47,137	0,64	46,871	0,08
9	43,764	44,054	0,66	43,933	0,38
10	41,917	42,181	0,63	41,943	0,06
11	41,338	41,580	0,58	41,306	-0,08
12	55,329	55,676	0,62	55,548	0,39
13	59,624	59,791	0,28	59,589	-0,06
14	60,478	60,809	0,54	60,628	0,25

15	57,704	58,174	0,81	58,679	1,66
16	52,359	52,960	1,13	52,676	0,60
17	46,849	47,486	1,34	46,126	-1,57
18	43,846	44,338	1,11	43,478	-0,85
19	42,367	42,772	0,95	42,216	-0,36
20	41,928	42,276	0,82	41,795	-0,32
21	80,000	80,000	0,00	80,000	0,00
22	80,000	80,000	0,00	80,000	0,00
23	62,486	62,860	0,59	62,993	0,80
24	80,000	80,000	0,00	80,000	0,00
25	80,000	80,000	0,00	80,000	0,00
26	66,728	67,246	0,77	67,365	0,95
27	62,988	63,623	1,00	63,960	1,52
28	62,397	62,981	0,93	63,501	1,74
29	80,000	80,000	0,00	80,000	0,00
30	71,133	71,808	0,94	71,900	1,07
31	69,222	69,987	1,09	70,080	1,22
32	68,374	69,132	1,10	69,324	1,37
33	80,000	80,000	0,00	80,000	0,00
34	74,194	74,963	1,03	75,029	1,11
35	73,048	73,938	1,20	73,938	1,20
36	72,665	73,610	1,28	73,532	1,18
37	80,000	80,000	0,00	80,000	0,00
38	75,798	76,631	1,09	76,654	1,12
39	75,024	75,983	1,26	75,953	1,22

40	74,711	75,719	1,33	75,630	1,22
41	80,000	80,000	0,00	80,000	0,00
42	76,671	77,507	1,08	77,496	1,06
43	75,979	76,976	1,30	76,923	1,23
44	75,693	76,728	1,35	76,633	1,23
45	80,000	80,000	0,00	80,000	0,00
46	76,802	77,743	1,21	77,722	1,18
47	76,214	77,264	1,36	77,207	1,29
48	75,957	77,021	1,38	76,929	1,26

Com os dados deste problema a diferença entre o uso do elemento bidimensional ou tridimensional não foi significativa, indicando que o uso de elementos bidimensionais seria o mais apropriado devido a sua maior simplicidade. Evidentemente que com outros dados, como por exemplo, valores altos do coeficiente de convecção, esta diferença passaria a ser significativa e então o uso do elemento bidimensional passaria a não mais representar bem o problema.

3.4.2 - Mancal em Regime Não Permanente

Vamos considerar o mancal em regime não permanente e utilizar os elementos triangular, tetraédrico e quadrilateral para avaliar a evolução de sua temperatura média.

A figura 3.18 apresenta a temperatura média para cada instante t dada pelos elementos triangular linear, quadrilateral quadrático e tetraédrico linear. Aqui são considerados os mesmos dados da tabela 3.6. A temperatura inicial do mancal foi tomada como sendo $\phi_0 = 25 [^{\circ}\text{C}]$, o intervalo de tempo $\Delta t = 1,0 [s]$ e para maior simplicidade dos cálculos, o valor do parâmetro λ foi tomado como sendo o mesmo para todo o mancal e igual a $\lambda = \rho c_p = 2455200 [J / m^3 \text{ } ^{\circ}\text{C}]$.

A figura 3.18 mostra que a consideração do mancal como um caso bidimensional trouxe bons resultados, visto que a curva para o elemento triangular, por exemplo, muito se aproximou da curva para o elemento tetraédrico. Isto aconteceu porque o valor do coeficiente de convecção considerado no exemplo foi muito pequeno. A influência do coeficiente de convecção será melhor esclarecida pela figura 3.20.

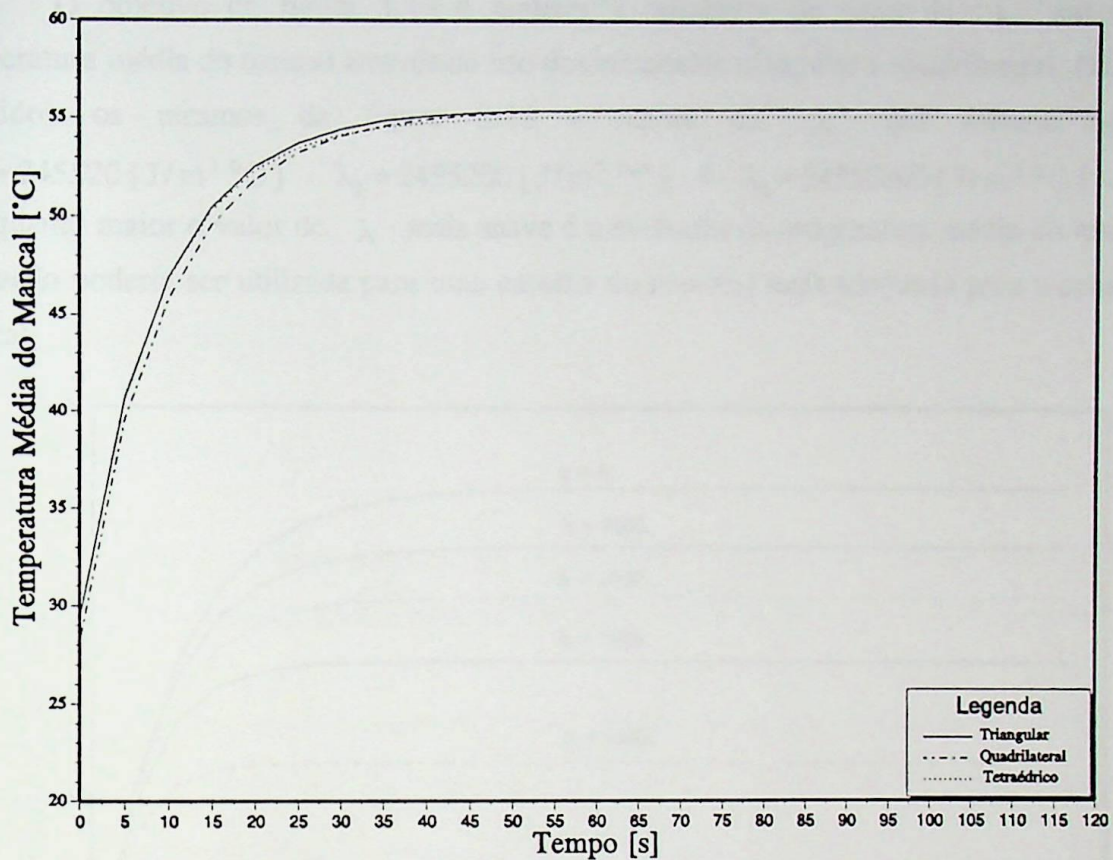


Figura 3.18 - Temperatura Média do Mancal em Função do Tempo.

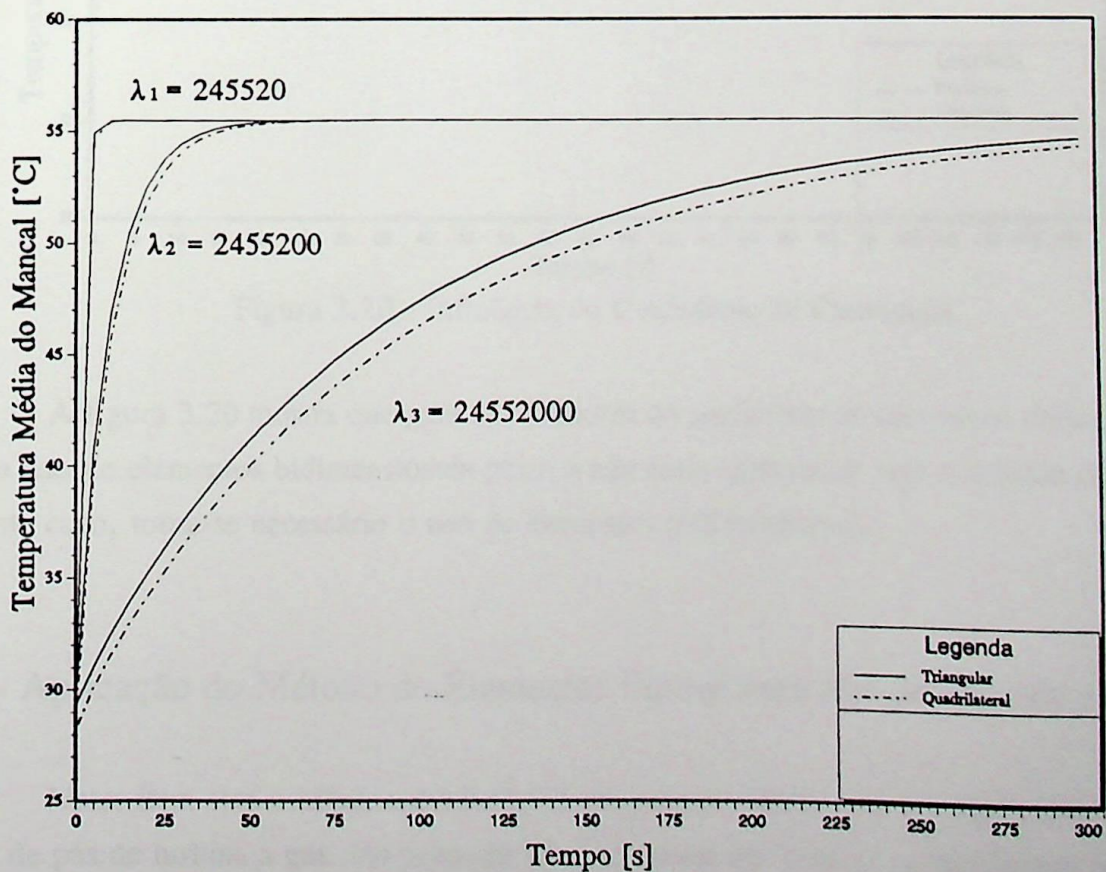


Figura 3.19 - Influência do Parâmetro λ

O objetivo da figura 3.19 é mostrar a influência do valor de λ nas curvas de temperatura média do mancal através do uso dos elementos triangular e quadrilateral. Os dados são mantidos os mesmos da figura 3.18 a menos de λ que assume os valores $\lambda_1 = 245520 \text{ [J/m}^3 \text{ }^\circ\text{C]}$, $\lambda_2 = 2455200 \text{ [J/m}^3 \text{ }^\circ\text{C]}$ e $\lambda_3 = 24552000 \text{ [J/m}^3 \text{ }^\circ\text{C]}$. Nota-se que quanto maior o valor de λ mais suave é a evolução da temperatura média do mancal. Esta avaliação poderia ser utilizada para uma escolha do material mais adequado para a construção do mancal.

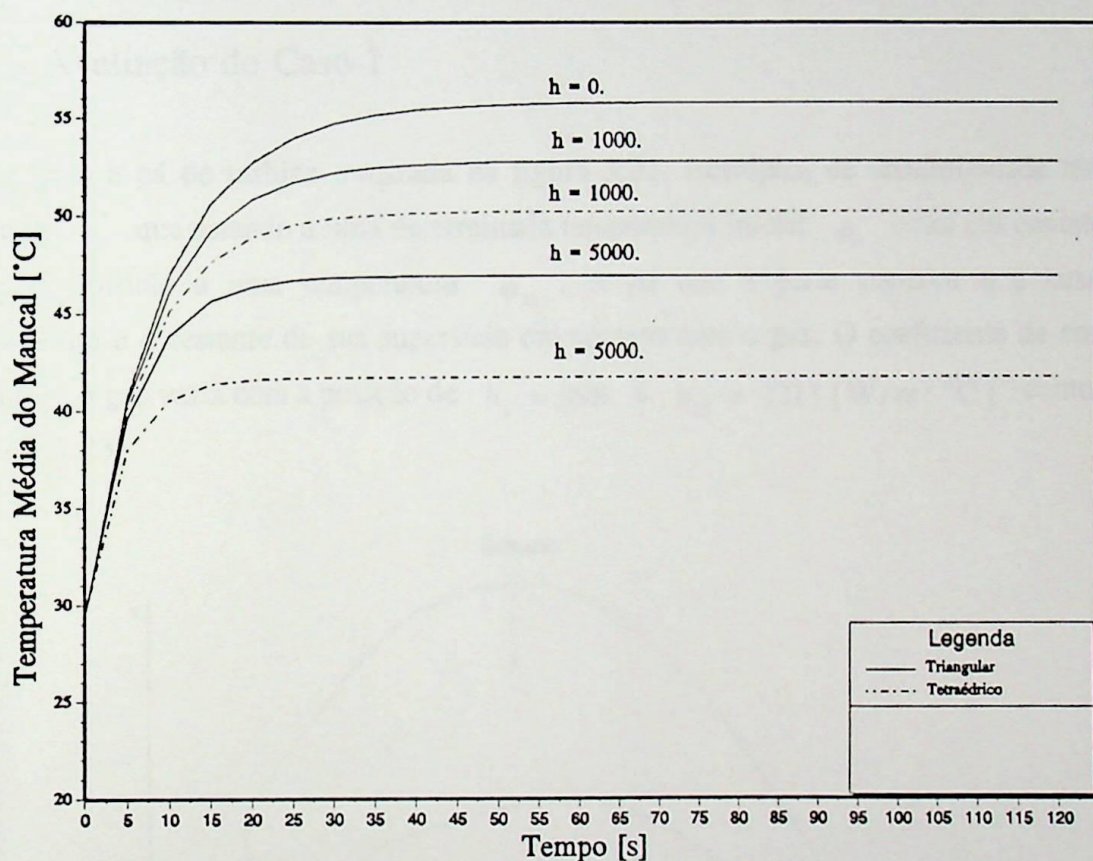


Figura 3.20 - Influência do Coeficiente de Convecção

A figura 3.20 mostra que para altos valores do coeficiente de convecção dados em $[\text{W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}]$, o uso de elementos bidimensionais passa a não mais representar bem a solução do problema e, neste caso, torna-se necessário o uso de elementos tridimensionais.

3.5 - Aplicação do Método de Elementos Finitos para Pás de Turbina a Gás

Neste ítem será avaliada a evolução da temperatura média com o tempo considerando três casos de pás de turbina a gás. No primeiro caso, chamado de "caso 1", a pá não tem refrigeração interna, tem a base e a parte superior isoladas termicamente e tem o restante de sua superfície

trocando calor por convecção com o meio. No segundo caso, chamado de "caso 2", a pá também não tem refrigeração interna, tem uma distribuição conhecida de temperatura na base e troca calor por convecção com o meio pelo restante de sua superfície. No terceiro caso, chamado de "caso 3", a pá tem refrigeração interna feita por um fluido que passa por dois furos.

Para a avaliação do caso 1 serão utilizados os elementos triangular, tetraédrico e quadrilateral, a avaliação do caso 2 requer o uso do elemento tetraédrico e para a avaliação do caso 3 será utilizado apenas o elemento triangular.

3.5.1 - Avaliação do Caso 1

Seja a pá de turbina mostrada na figura 3.21, isotrópica de condutividade térmica K e parâmetro λ que estando a uma determinada temperatura inicial ϕ_0 entra em contato com um gás de combustão a uma temperatura ϕ_∞ . A pá tem a parte superior e a base isoladas termicamente e o restante de sua superfície em contato com o gás. O coeficiente de convecção h entre a pá e o gás varia com a posição de $h_1 = 998$ à $h_{15} = 2211$ [$W/m^2 \text{ } ^\circ C$] como mostrado na figura 3.23.

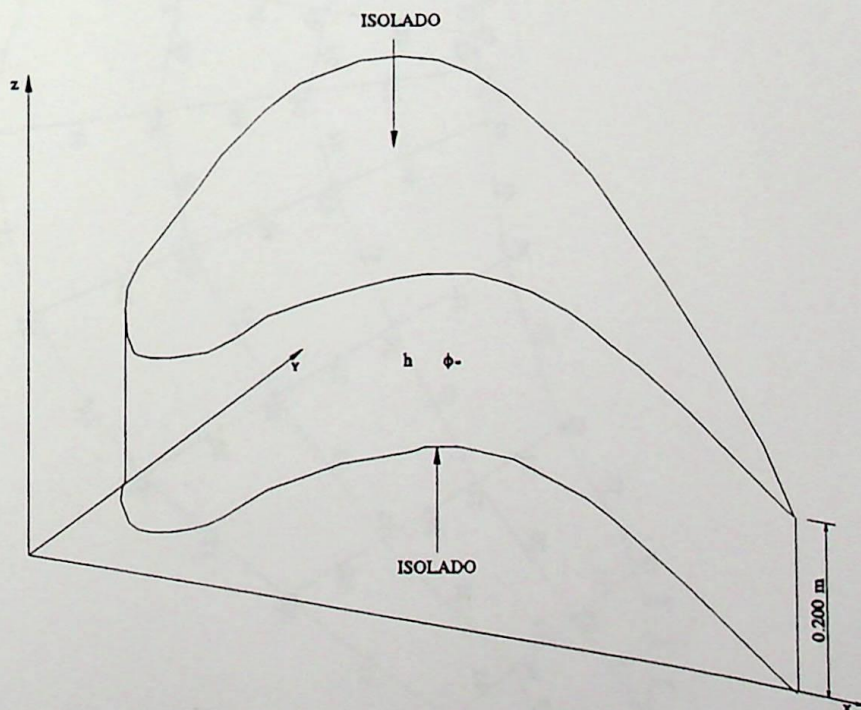


Figura 3.21 - Pá de Turbina, Caso 1

As figuras 3.22, 3.23 e 3.24 mostram a pá de turbina dividida em elementos quadrilaterais, triangulares e tetraédricos, respectivamente. As dimensões geométricas no plano xy da figura 3.24 são as mesmas da figura 3.22.

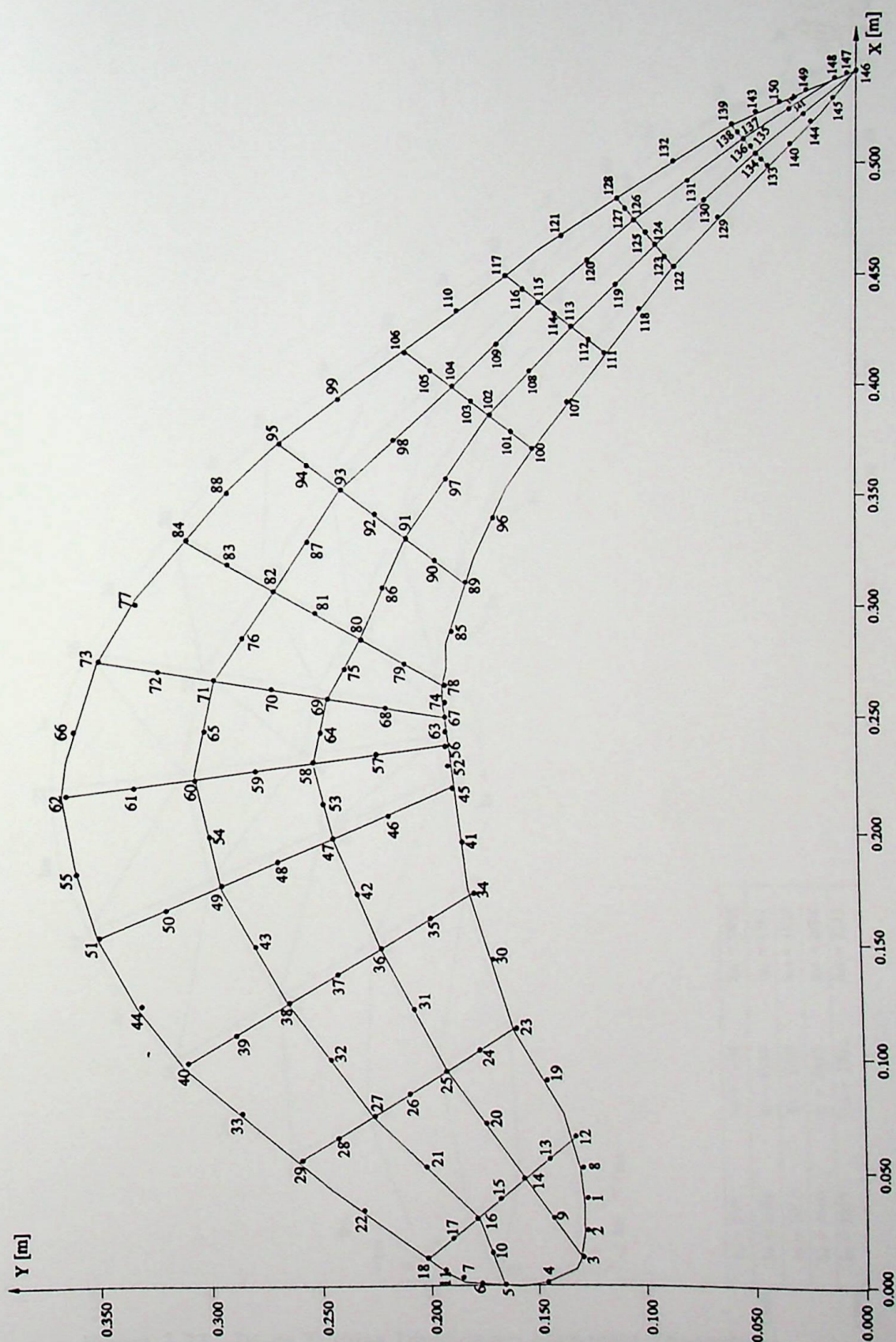


Figura 3.22. - Pá de Turbina Dividida em Elementos Quadrilaterais

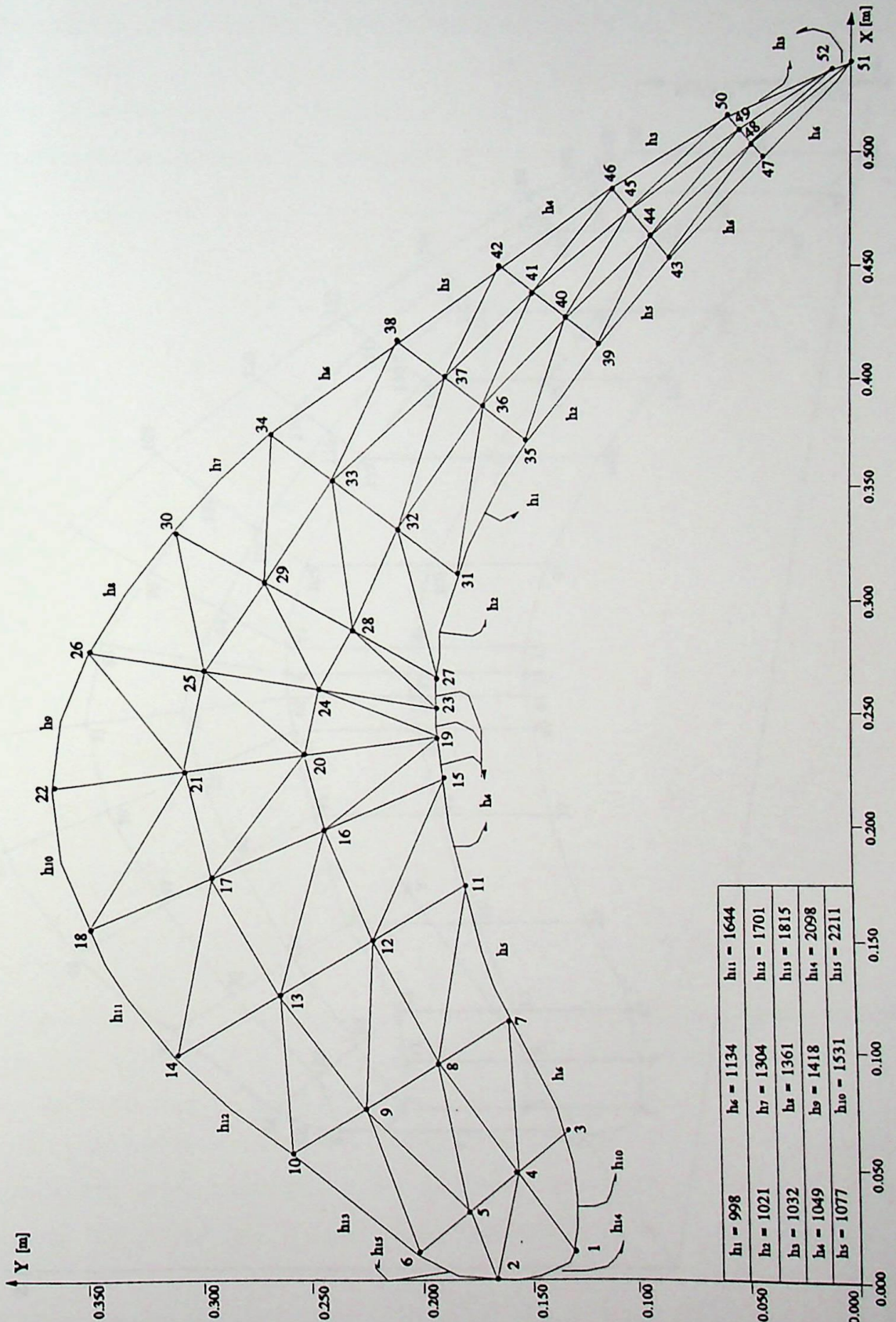


Figura 3.23 - Pá de Turbina Dividida em Elementos Triangulares.

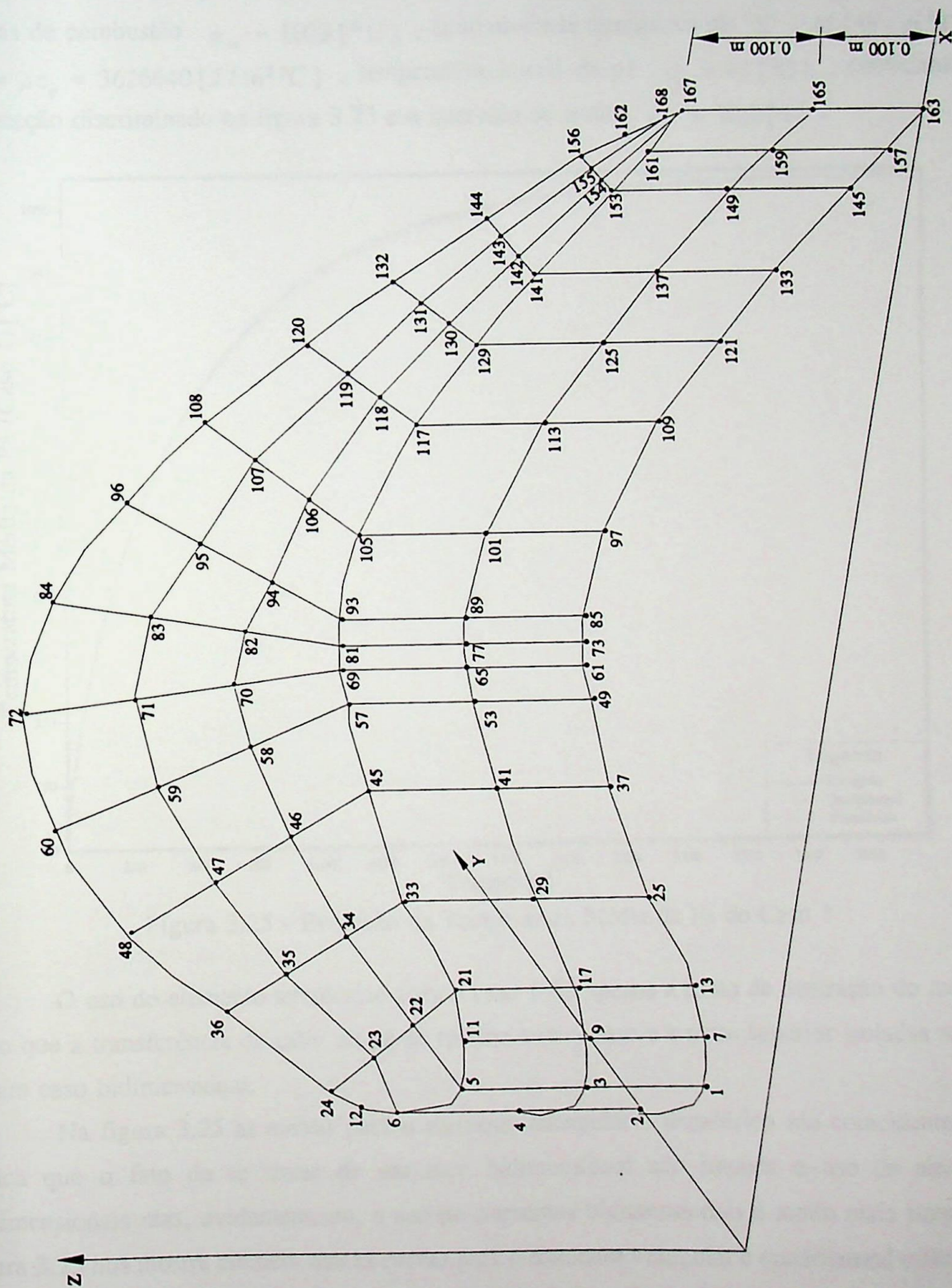


Figura 3.24 - Pá de Turbina Dividida em Elementos Tetraédricos

A figura 3.25 apresenta a variação com o tempo da temperatura média da pá do caso 1 para os elementos triangular, quadrilateral e tetraédrico. Os dados para esta figura são: temperatura do gás de combustão $\phi_{\infty} = 1093 [^{\circ}\text{C}]$, condutividade térmica da pá $K = 45 [\text{W}/\text{m}^{\circ}\text{C}]$, $\lambda = \rho c_p = 3626640 [\text{J}/\text{m}^3^{\circ}\text{C}]$, temperatura inicial da pá $\phi_0 = 93 [^{\circ}\text{C}]$, coeficiente de convecção discriminado na figura 3.23 e o intervalo de tempo $\Delta t = 10,0 [\text{s}]$.

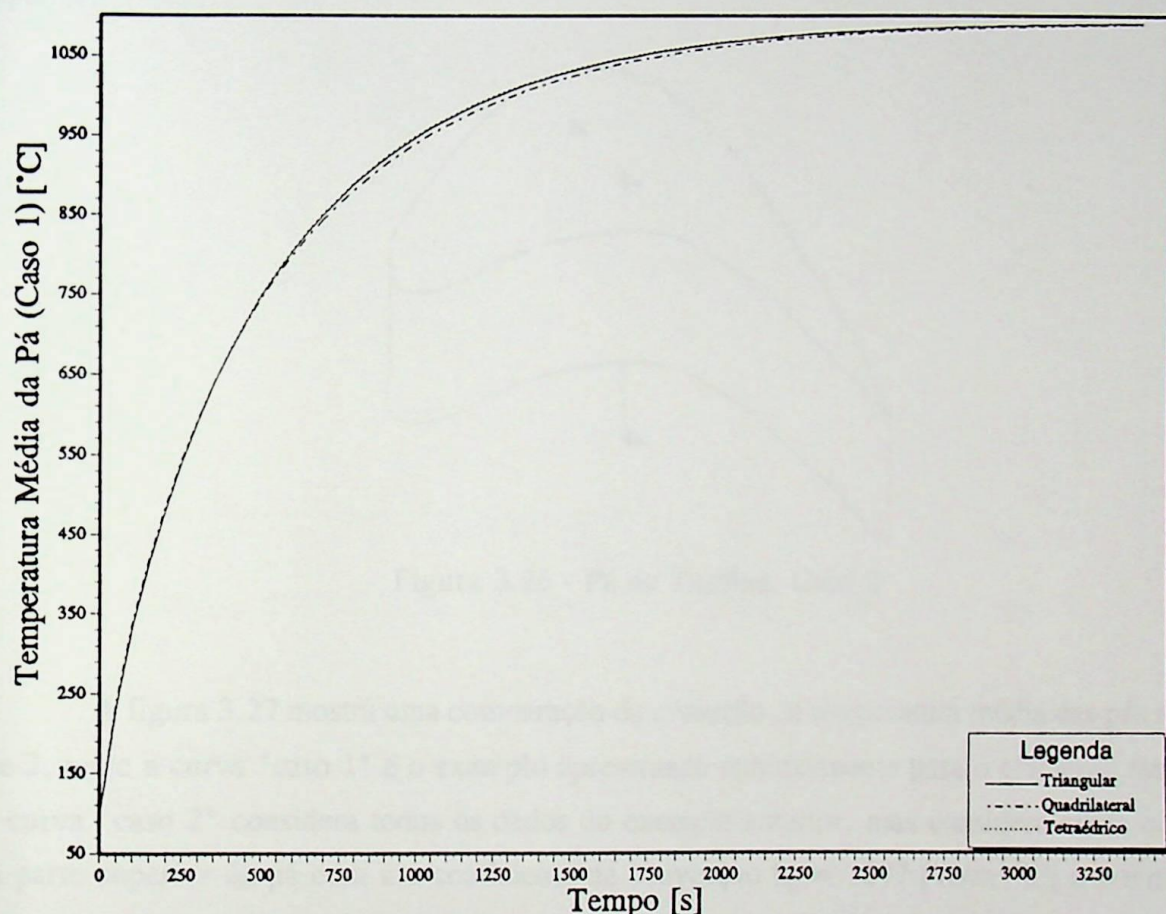


Figura 3.25 - Evolução da Temperatura Média da Pá do Caso 1

O uso do elemento tetraédrico para o caso 1 foi apenas a título de ilustração do método, visto que a transferência de calor na pá da turbina com a base e a parte superior isoladas se trata de um caso bidimensional.

Na figura 3.25 as curvas para o elemento triangular e tetraédrico são coincidentes, isto indica que o fato de se tratar de um caso bidimensional não impede o uso de elementos tridimensionais mas, evidentemente, o uso de elementos bidimensionais é muito mais simples. A figura 3.25 nos mostra também que as curvas para o elemento triangular e quadrilateral estão muito próximas uma da outra, mas analisando as figuras 3.22 e 3.23 podemos observar que para a obtenção destes resultados foram utilizados bem menos elementos quadrilaterais do que elementos triangulares. Na decisão entre um ou outro tipo de elemento poderiam ser levados em conta fatores como o tempo computacional, a maior simplicidade na montagem do arquivo de dados, etc.

3.5.2 - Avaliação do Caso 2

Seja uma pá de turbina (figura 3.26) com as mesmas dimensões e os mesmos dados da pá do caso 1, mas considerando, para este caso, uma temperatura ϕ_B conhecida na base da pá e um coeficiente de convecção h_s entre a pá e o gás de combustão de temperatura ϕ_∞ , na sua parte superior.

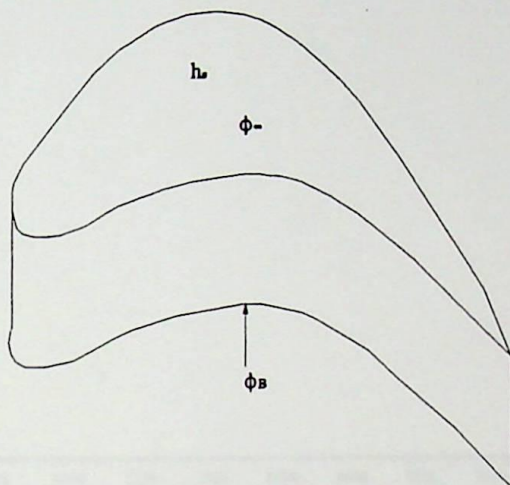


Figura 3.26 - Pá de Turbina, Caso 2

A figura 3.27 mostra uma comparação da evolução da temperatura média das pás nos casos 1 e 2, onde a curva "caso 1" é o exemplo apresentado anteriormente para o elemento tetraédrico. A curva "caso 2" considera todos os dados do exemplo anterior, mas considera ainda convecção na parte superior da pá com um coeficiente de convecção $h_s = 1277 \text{ [W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C]}$ e a temperatura do gás de combustão $\phi_\infty = 1093 \text{ [}^\circ\text{C]}$ e uma temperatura conhecida $\phi_B = 400 \text{ [}^\circ\text{C]}$ na base da pá. O elemento tetraédrico é utilizado também para a avaliação da evolução da temperatura média da pá no caso 2.

Como se pode observar pela figura 3.27, as curvas de temperatura média para os casos 1 e 2 têm comportamentos bastante diferentes. Enquanto a curva "caso 1" se trata de um caso bidimensional, a curva "caso 2" é um caso tridimensional. Para o intervalo de tempo entre 0 e 600 [s], a temperatura média do caso 2 é maior do que a temperatura média do caso 1 devido a uma maior temperatura média inicial causada pela temperatura fixa da base da pá. Para o tempo maior que 600 [s], ocorre o inverso, ou seja, a temperatura média do caso 2 é menor do que a temperatura média do caso 1. Isto se deve ao fato de que para o tempo maior que 600 [s], a temperatura fixa da base da pá provoca uma diminuição na temperatura média da pá.

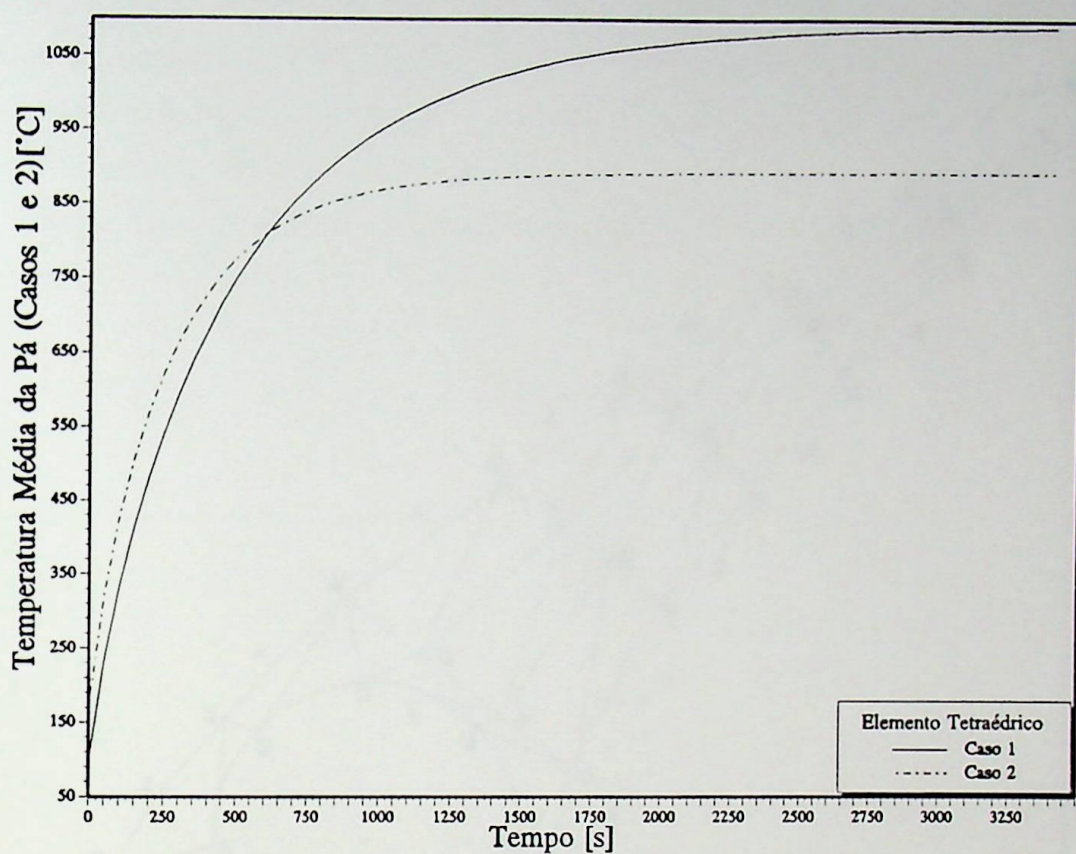


Figura 3.27 - Evolução da Temperatura Média das Pás dos Casos 1 e 2

3.5.3 - Avaliação do Caso 3

Seja a pá de turbina, caso 3 (figura 3.28) com as mesmas dimensões e dados da pá do caso 1, inclusive com isolamento térmico na base e na parte superior, mas com dois furos, atravessando

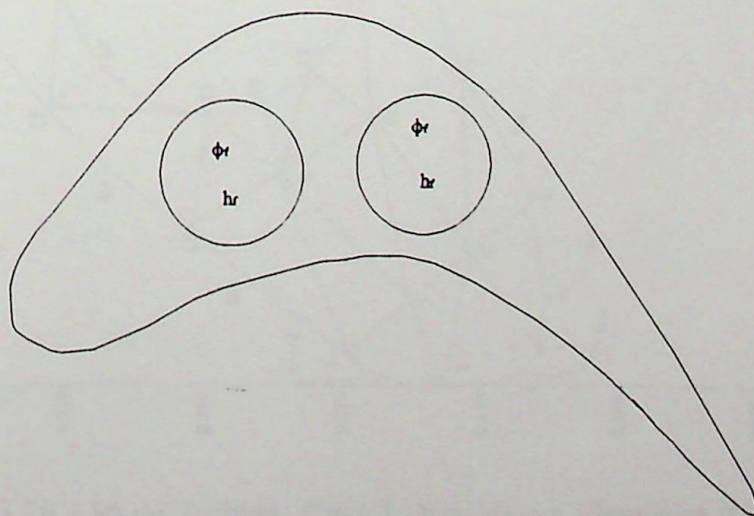


Figura 3.28 - Pá de Turbina, Caso 3

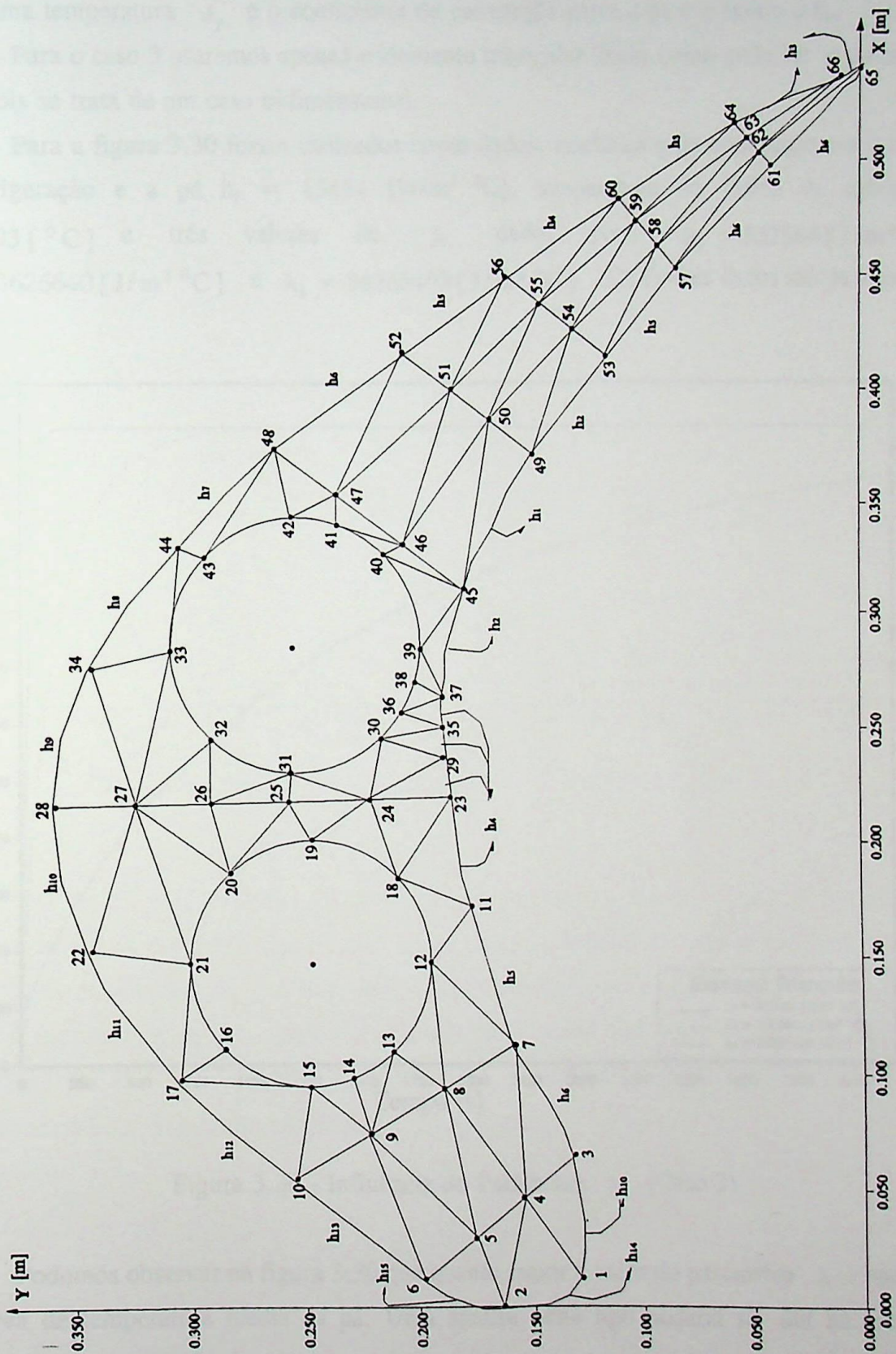


Figura 3.29 - Pá de Turbina, Caso 3 Dividida em Elementos Triangulares

a pá da base à parte superior, por onde passa um fluido para sua refrigeração interna. Este fluido está a uma temperatura ϕ_f e o coeficiente de convecção entre a pá e o fluido é h_f .

Para o caso 3 usaremos apenas o elemento triangular linear como pode ser visto na figura 3.29, pois se trata de um caso bidimensional.

Para a figura 3.30 foram utilizados como dados: coeficiente de convecção entre o fluido de refrigeração e a pá $h_f = 13454 \text{ [W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C]}$, temperatura do fluido de refrigeração $\phi_f = 93 \text{ [}^\circ\text{C]}$ e três valores de λ dados por: $\lambda_1 = 362664 \text{ [J/m}^3 \text{ }^\circ\text{C]}$, $\lambda_2 = 3626640 \text{ [J/m}^3 \text{ }^\circ\text{C]}$ e $\lambda_3 = 36266400 \text{ [J/m}^3 \text{ }^\circ\text{C]}$. Os demais dados são os mesmos do caso 1.

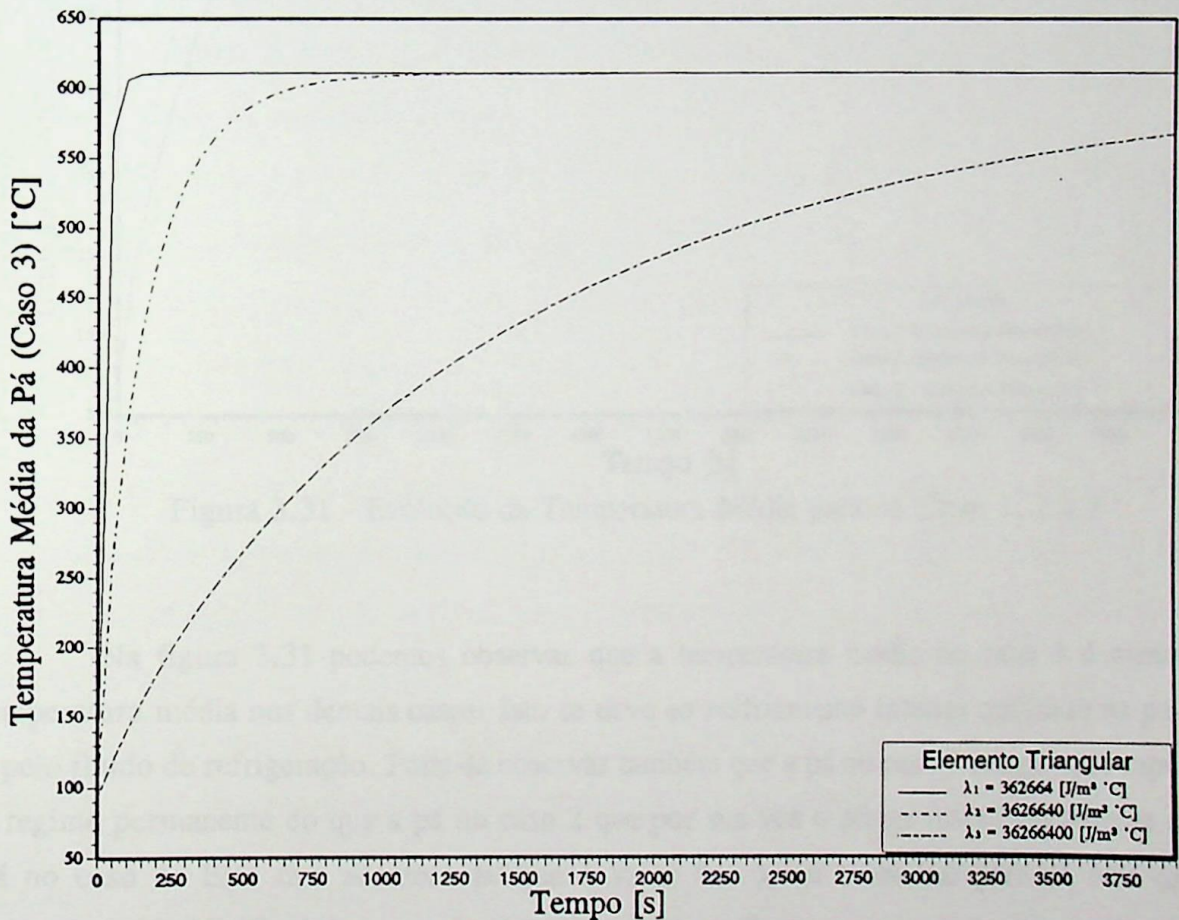


Figura 3.30 - Influência do Parâmetro λ (Caso 3)

Podemos observar na figura 3.30 que quanto maior o valor do parâmetro λ , mais suave é a curva de temperatura média da pá. Uma análise deste tipo poderia ser útil na escolha do material para a construção da pá.

A figura 3.31 mostra uma comparação dos resultados obtidos anteriormente para os três casos. Nas curvas "Caso 1" e "Caso 2" o elemento utilizado para a avaliação da temperatura média é o elemento tetraédrico, na curva "Caso 3" o elemento utilizado é o elemento triangular. O valor

do parâmetro λ é o mesmo para os três casos e igual a $\lambda = 3626640 \text{ [J/m}^3 \text{ } ^\circ\text{C]}$

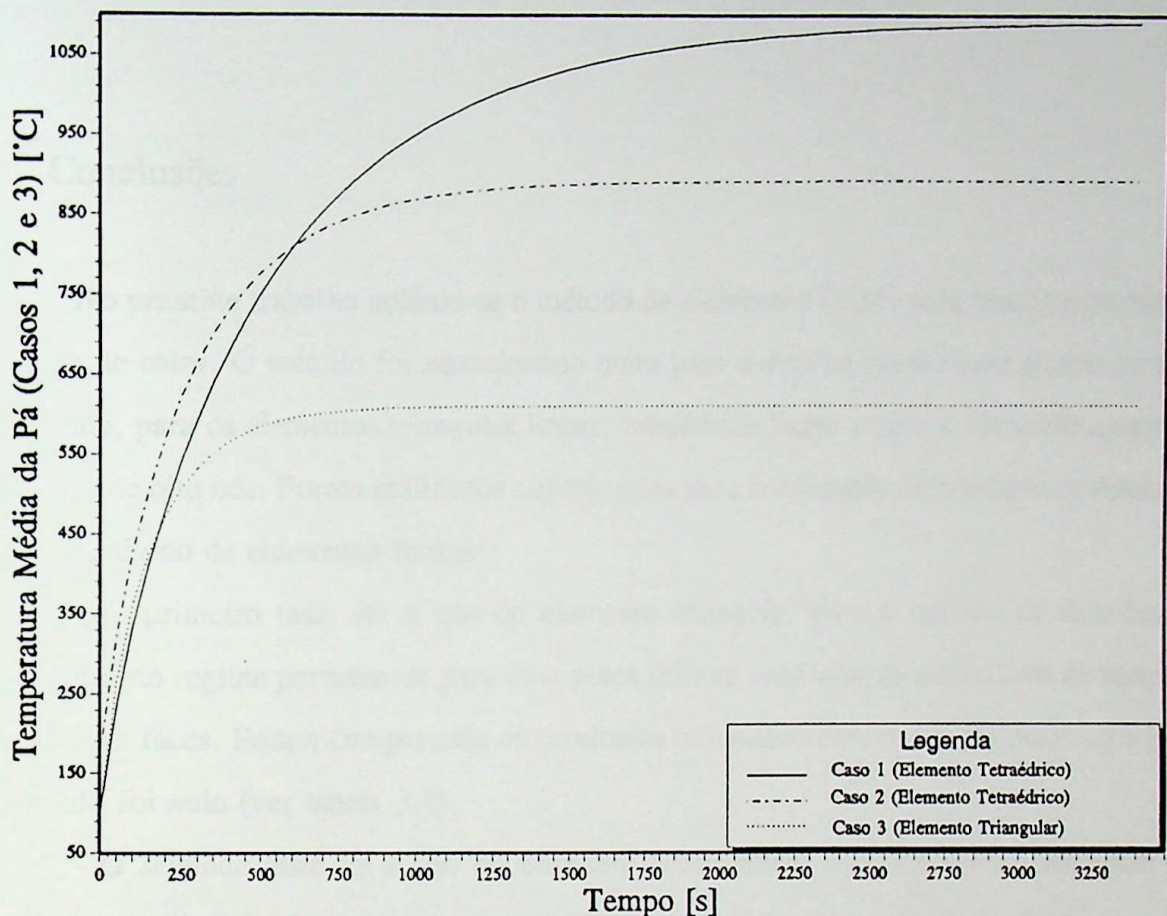


Figura 3.31 - Evolução da Temperatura Média para os Casos 1, 2 e 3

Na figura 3.31 podemos observar que a temperatura média no caso 3 é menor que a temperatura média nos demais casos. Isto se deve ao resfriamento interno realizado na pá no caso 3 pelo fluido de refrigeração. Pode-se observar também que a pá no caso 3 atinge mais rapidamente o regime permanente do que a pá no caso 2 que por sua vez o atinge mais rapidamente do que a pá no caso 1. Este fato acontece porque o valor de λ é o mesmo para os três casos e a temperatura média final decresce do caso 1 para o caso 3.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

4.1 - Conclusões

No presente trabalho aplicou-se o método de elementos finitos para resolver problemas de condução de calor. O método foi equacionado tanto para o regime permanente quanto para o não permanente, para os elementos triangular linear, tetraédrico linear e para o elemento quadrilateral quadrático de oito nós. Foram realizados alguns testes para a validação dos códigos computacionais usando o método de elementos finitos:

- O primeiro teste foi o uso do elemento triangular para o cálculo da distribuição de temperatura no regime permanente para uma placa infinita com valores conhecidos de temperatura em ambas as faces. Foram comparados os resultados numéricos com a solução analítica e o desvio encontrado foi nulo (ver tabela 3.1).

- O segundo teste foi o uso do elemento quadrilateral e do elemento tetraédrico para o cálculo da distribuição de temperatura no regime permanente para um tubo infinito com valores conhecidos de temperatura nas faces interna e externa. Conforme mostra a tabela 3.2, o desvio máximo em relação à solução analítica para o elemento quadrilateral ficou em -1,13 [%] e para o elemento tetraédrico em -1,12 [%].

- O terceiro teste foi o uso do elemento tetraédrico para o cálculo da evolução da temperatura do centro de um paralelepípedo metálico em regime não permanente. O paralelepípedo estava inicialmente a uma certa temperatura e foi repentinamente mergulhado em um fluido a uma temperatura menor. O corpo foi discretizado em 48 e 96 elementos. Deve ser observado que a solução analítica deste problema considerou o corpo em regime não permanente, porém com temperatura uniforme enquanto que a solução numérica considerou o corpo em regime não permanente mas com temperatura não uniforme. Para a discretização de 48 elementos o desvio máximo foi de 33,42 [%] enquanto que para 96 elementos o desvio máximo ficou em 33,28 [%] (ver tabela 3.3). A comparação entre a solução analítica e a solução numérica também pode ser vista na figura 3.9. Nota-se que o fato do número de elementos ter sido dobrado não trouxe alterações significativas para o desvio em relação à solução analítica, sendo que estas alterações não passaram de décimos de porcentagem.

Após a validação, o método foi aplicado para uma aleta em regime permanente, para um mancal de deslizamento em regime permanente e não permanente e para três casos de pás de turbina a gás em regime não permanente. Estas aplicações são vistas a seguir:

- A primeira aplicação foi o uso do elemento tetraédrico para o cálculo da distribuição de temperatura, em regime permanente, de duas aletas, sendo uma de condutividade $50 \text{ [W/m } ^\circ\text{C]}$ e outra de condutividade $5 \text{ [W/m } ^\circ\text{C]}$, porém de dimensões e condições de contorno idênticas. As condições de contorno foram: temperatura conhecida numa extremidade e convecção em todo o restante. Foram feitos cálculos para 36 e 72 elementos. Os resultados numéricos foram comparados com a solução analítica e os desvios máximos encontrados para a aleta de condutividade $50 \text{ [W/m } ^\circ\text{C]}$ foram de $0,83 \text{ [%]}$ para o número de elementos 36 e de $0,24 \text{ [%]}$ para o número de elementos igual a 72 (ver tabela 3.4). Os desvios máximos para a aleta de condutividade $5 \text{ [W/m } ^\circ\text{C]}$ ficaram em $8,79 \text{ [%]}$ para o número de elementos igual a 36 e $2,36 \text{ [%]}$ para o número de elementos igual a 72 (ver tabela 3.5). Pode-se verificar que para números de Biot (Bi) menores que $0,1$ os desvios entre a solução analítica e a solução numérica foram pequenos (ver tabela 3.4). Enquanto que valores de número de Biot maiores que $0,1$ produzem diferenças significativas entre a solução analítica e a solução numérica (ver tabela 3.5). Isto significa que para $Bi > 0,1$ a solução analítica unidimensional não representa bem a solução do problema, a qual pode ser obtida através do método numérico.

- A segunda aplicação foi o uso dos elementos triangular, quadrilateral e tetraédrico para a avaliação da distribuição de temperatura, em regime permanente, e para o cálculo da evolução da temperatura média, no regime não permanente, de um mancal de deslizamento. As condições de contorno foram: temperatura conhecida na base e no diâmetro interno da bucha do mancal e convecção no restante do mesmo. Para o regime permanente foram calculados desvios dos resultados obtidos pelos elementos triangular e quadrilateral em relação ao elemento tetraédrico, sendo o maior desvio de $1,74 \text{ [%]}$ para o elemento quadrilateral (ver tabela 3.6). Para o regime não permanente foi calculada a evolução da temperatura média com o uso dos três tipos de elementos (figura 3.18) e foram analisadas as influências do parâmetro λ (figura 3.19) e do coeficiente de convecção (figura 3.20). O valor do coeficiente de convecção é decisivo para indicar quando usar elementos bidimensionais ou tridimensionais para representar um problema de domínio tridimensional no caso do mancal.

- A terceira aplicação foi o uso dos elementos triangular, quadrilateral e tetraédrico para o cálculo da evolução da temperatura média de três casos de pás de turbina a gás no regime não permanente. Nos três casos as pás tem dimensões idênticas porém condições de contorno diferentes. Para o caso 1 a pá não tem refrigeração interna e tem a base e a parte superior isoladas. No caso 2 a pá também não tem refrigeração interna mas tem temperatura conhecida na base e convecção na parte superior. No caso 3 a pá tem refrigeração interna e a base e a parte superior isoladas. Para o caso 1 foram utilizados os três tipos de elementos e feita uma comparação entre os resultados obtidos, conforme mostrado na figura 3.25. Pode-se observar nesta figura que as curvas são quase coincidentes. Para o caso 2 foi utilizado somente o elemento tetraédrico e o resultado foi comparado com aquele obtido para o caso 1 com o uso do elemento tetraédrico (ver figura 3.27). Somente o elemento triangular foi utilizado para a avaliação da temperatura média no caso 3, e o resultado foi comparado com aqueles obtidos para os dois primeiros casos com o uso do elemento tetraédrico (ver figura 3.31). A influência do parâmetro λ também é analisada para o caso 3, como mostrado na figura 3.30.

4.2 - Recomendações para Trabalhos Futuros

O presente trabalho teve como meta a apresentação do método de elementos finitos, mostrando todo o seu equacionamento para três tipos de elementos, tanto para o regime permanente, quanto para o não permanente. O método foi aplicado para várias geometrias e condições de contorno, mostrando toda a sua versatilidade. Deixaremos, a seguir, algumas sugestões para trabalhos a serem desenvolvidos futuramente:

- O presente trabalho considerou condições de contorno como: convecção, fluxo de calor imposto e distribuição conhecida de temperatura, sugere-se incluir também a troca de calor por radiação no contorno.

- Uso de elementos de mais alta ordem, principalmente para o domínio tridimensional, com uma análise das vantagens e desvantagens como, por exemplo, o tempo de computação ou de preparação de dados, com relação ao uso de elementos mais simples.

- Uso do refinamento automático de malhas para minimizar o tempo de preparação dos dados e reduzir os desvios e oscilações numéricas, principalmente para o regime não permanente.

APÊNDICE A1

DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO GERAL DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO

A1.1 - Introdução

A lei de Fourier para o caso unidimensional é dada por:

$$q = \frac{dQ}{dt} = -K A \frac{d\phi}{dx}, \quad (\text{A1.1})$$

onde : Q [J] é o calor transferido, t [s] é o tempo, q [J/s] é o fluxo de calor, ϕ [°C] é a temperatura, A [m²] é a área, x [m] é a dimensão geométrica e K [W/m°C] é a condutividade térmica.

A1.2 - Equação Geral

Considere um elemento diferencial de volume em um meio isotrópico.

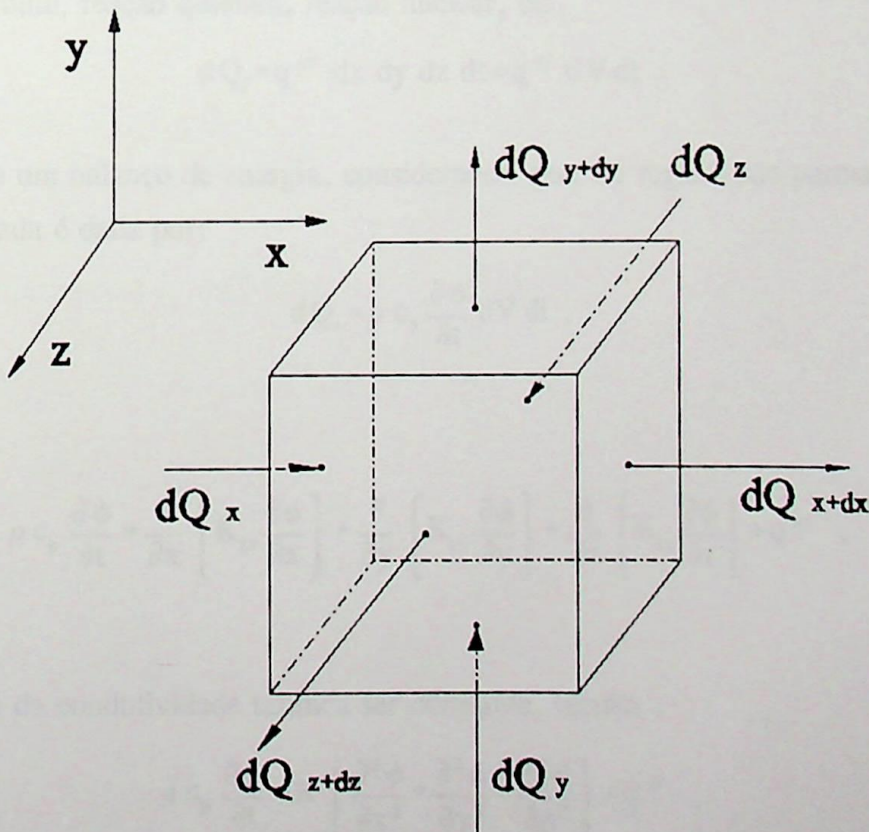


Figura A1.1 - Elemento Diferencial de Volume

O calor líquido na direção x é dado por:

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = -K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} dy dz dt - \left\{ \left[-K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx \right] \right\} dy dz dt, \quad (A1.2)$$

de onde resulta :

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dV dt, \quad (A1.3)$$

analogamente, vem :

$$dQ_y - dQ_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dV dt, \quad (A1.4)$$

$$dQ_z - dQ_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dV dt, \quad (A1.5)$$

onde K_{xx} , K_{yy} e K_{zz} são as condutividades térmicas nas direções x , y e z , respectivamente.

Se dentro do elemento de volume houver geração interna de energia q''' [W/m³], devido a efeito Joule, reação química, reação nuclear, etc.

$$dQ_i = q''' dx dy dz dt = q''' dV dt. \quad (A1.6)$$

Fazendo um balanço de energia, considerando que, no regime não permanente, a energia armazenada é dada por:

$$dQ_s = \rho c_p \frac{\partial \phi}{\partial t} dV dt, \quad (A1.7)$$

assim, vem :

$$\rho c_p \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + q'''. \quad (A1.8)$$

No caso da condutividade térmica ser constante, resulta :

$$\rho c_p \frac{\partial \phi}{\partial t} = K \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] + q''', \quad (A1.9)$$

ou :

$$\rho c_p \frac{\partial \phi}{\partial t} = K \nabla^2 \phi + q''' , \quad (\text{A1.10})$$

ou ainda, dividindo ambos os membros da equação por K:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla^2 \phi + \frac{q'''}{K} , \quad (\text{A1.11})$$

onde: K [W/m °C] é a condutividade térmica e α [m²/s] é a difusibilidade térmica.

A1.3 - Casos Particulares

i) Sistema sem geração de energia (regime não permanente):

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla^2 \phi . \quad \text{Equação de Fourier} \quad (\text{A1.12})$$

ii) Regime permanente com geração de energia:

$$\nabla^2 \phi + \frac{q'''}{K} = 0 . \quad \text{Equação de Poisson} \quad (\text{A1.13})$$

iii) Regime permanente sem geração :

$$\nabla^2 \phi = 0 . \quad \text{Equação de Laplace} \quad (\text{A1.14})$$

iv) Regime não permanente, unidimensional, sem geração :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} . \quad (\text{A1.15})$$

APÊNDICE A2

ALGUNS ASPECTOS DO CÁLCULO VARIACIONAL

A2.1 - Introdução

O cálculo variacional se destina a encontrar os valores estacionários dos funcionais. O funcional é uma integral que tem um valor numérico para cada função $F(x)$. Por exemplo:

$$I = \int_a^b F(x) dx, \quad (\text{A2.1})$$

onde I tem um único valor para cada $F(x)$.

A2.2 - Encontrando o Funcional

O problema no cálculo variacional é encontrar a função $F(x)$ tal que uma alteração arbitrária, $\delta F(x)$, não acarretará uma variação de I . Considere o funcional:

$$I = \int_a^b F(x, \phi, \phi_x) dx, \quad (\text{A2.2})$$

onde x é a variável independente, ϕ é uma variável dependente de x , e ϕ_x é a primeira derivada de ϕ com relação a x . A variação de I devido a uma variação de $F(x)$ é:

$$\delta I = \int_a^b \delta F(x) dx = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial F}{\partial \phi_x} \delta \phi_x \right] dx, \quad (\text{A2.3})$$

notando que:

$$\delta \phi_x = \frac{d}{dx} (\delta \phi), \quad (\text{A2.4})$$

integrando o segundo termo, vem:

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \phi_x} \right) \right] \delta \phi dx + \frac{\partial F}{\partial \phi_x} \delta \phi \Big|_a^b. \quad (\text{A2.5})$$

O funcional I tem um valor estacionário quando $\delta I = 0$. δI é zero em (A2.5) somente se:

(i) $\phi(a) = \text{constante}$ e $\phi(b) = \text{constante}$,

e então;

$$\delta\phi(a) = \delta\phi(b) = 0, \quad (\text{A2.6})$$

ou;

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial F}{\partial \phi_x} (a) = \frac{\partial F}{\partial \phi_x} (b) = 0. \quad (\text{A2.7})$$

Como $\delta\phi$ é arbitrário entre a e b, a equação diferencial

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial \phi_x} \right] = 0, \quad (\text{A2.8})$$

deve ser satisfeita para que a integral seja nula.

Um funcional pode ter inúmeras variáveis independentes. Por exemplo:

$$I = \int_V F(x, y, z, \phi, \phi_x, \phi_y, \phi_z) dV, \quad (\text{A2.9})$$

é um funcional com três variáveis independentes. A variação desta função devido a uma pequena mudança arbitrária em $F(x, y, z)$ é:

$$\delta I = \int_V \left[\frac{\partial F}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial F}{\partial \phi_x} \delta\phi_x + \frac{\partial F}{\partial \phi_y} \delta\phi_y + \frac{\partial F}{\partial \phi_z} \delta\phi_z \right] dV. \quad (\text{A2.10})$$

Aplicando a equação (A2.4), temos:

$$\delta I = \int_V \left[\frac{\partial F}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial F}{\partial \phi_x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta\phi) + \frac{\partial F}{\partial \phi_y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta\phi) + \frac{\partial F}{\partial \phi_z} \frac{\partial}{\partial z} (\delta\phi) \right] dV. \quad (\text{A2.11})$$

Integrando o segundo termo de (A2.11) e aplicando o Teorema de Divergência de Gauss, vem:

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial \phi_x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta\phi) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F}{\partial \phi_x} \delta\phi \right] dV - \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F}{\partial \phi_x} \right] \delta\phi dV,$$

ou

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial \phi_x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi) dV = \int_S \hat{e}_x \frac{\partial F}{\partial \phi_x} \delta \phi dS - \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F}{\partial \phi_x} \right] \delta \phi dV, \quad (\text{A2.12})$$

onde \hat{e}_x é o versor direcional da normal à superfície com relação ao eixo x. Fazendo-se os mesmos cálculos para os outros termos da equação (A2.11) e combinando-se os resultados, vem:

$$\begin{aligned} \delta I = \int_V \left[\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F}{\partial \phi_x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial F}{\partial \phi_y} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial F}{\partial \phi_z} \right] \right] \delta \phi dV + \\ \int_S \left[\hat{e}_x \frac{\partial F}{\partial \phi_x} + \hat{e}_y \frac{\partial F}{\partial \phi_y} + \hat{e}_z \frac{\partial F}{\partial \phi_z} \right] \delta \phi dS. \end{aligned} \quad (\text{A2.13})$$

Um valor estacionário de I ocorre somente se os termos entre colchetes das integrais em (A2.13) forem nulos. Isto é necessário tanto para a equação governante do problema quanto para as condições de contorno.

A equação (A2.13) pode ser aplicada aos problemas de transferência de calor. Considere o funcional:

$$\int_V \frac{1}{2} \left[K_{xx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + K_{zz} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - 2Q\phi \right] dV. \quad (\text{A2.14})$$

A equação (A2.13) indica que esta função tem um valor estacionário (mínimo) quando:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F}{\partial \phi_x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial F}{\partial \phi_y} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial F}{\partial \phi_z} \right] = 0.$$

Considerando-se cada termo individualmente vem:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = -2Q,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F}{\partial \phi_x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[2K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] = 2K_{xx} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial F}{\partial \phi_y} \right] = 2K_{yy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}.$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial F}{\partial \phi_z} \right] = 2K_{zz} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.$$

Combinando-se os termos vem:

$$Q + K_{xx} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 .$$

O funcional dado em (A2.14) tem um valor estacionário quando a equação diferencial governante do problema de transferência de calor é satisfeita.

A3.2 - Método Variacional

APÊNDICE A3

MÉTODO VARIACIONAL PARA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

EM REGIME PERMANENTE

A3.1 - Introdução

Seja a equação diferencial para o regime permanente:

$$\left[K_{xx} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] + Q = 0, \quad (\text{A3.1a})$$

com as condições de contorno:

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + K_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z + q = 0, \quad (\text{A3.1b})$$

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + K_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z + h(\phi - \phi_\infty) = 0, \quad (\text{A3.1c})$$

$$\phi = \phi_B. \quad (\text{A3.1d})$$

Onde, Q é a geração interna de energia; ϕ representa a temperatura; K_{xx} , K_{yy} e K_{zz} são as condutividades térmicas do elemento nas direções x , y e z ; q é o fluxo de calor especificado na superfície S_1 ; h é o coeficiente de convecção na superfície S_2 ; ϕ_∞ é a temperatura ambiente; ϕ_B é a distribuição especificada de temperatura na superfície S_3 ; l_x , l_y e l_z os cossenos diretores do vetor normal à superfície.

A3.2 - Método Variacional

Do cálculo variacional sabe-se que o funcional equivalente das equações (A3.1) é dado por:

$$I = \int \frac{1}{2} \left[K_{xx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + K_{zz} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - 2 Q \phi \right] dV + \int_{S_1} q \phi dS_1 + \int_{S_2} \frac{h}{2} (\phi^2 - 2 \phi \phi_\infty + \phi_\infty^2) dS_2. \quad (\text{A3.2})$$

A função ϕ que minimiza o funcional dado pela equação (A3.2) é a solução das equações (A3.1).

O funcional para o elemento (e) é dado por:

$$I^e = \int_{V^e} \frac{1}{2} \left[K_{xx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + K_{zz} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dV - \int_{V^e} Q \cdot \phi dV + \int_{S_1^e} q \phi dS_1 + \int_{S_2^e} \frac{h}{2} [\phi^2 - 2\phi\phi_\infty + \phi_\infty^2] dS_2. \quad (A3.3)$$

A equação (A3.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$I^e = \int_{V^e} \left[\frac{1}{2} \{ \phi \}^e T [B^e]^T [D^e] [B^e] \{ \phi \}^e \right] dV - \int_{V^e} [Q [N^e] \{ \phi \}^e] dV + \int_{S_1^e} [q [N^e] \{ \phi \}^e] dS_1 + \int_{S_2^e} \frac{h}{2} \{ \phi \}^e T [N^e]^T [N^e] \{ \phi \}^e dS_2 - \int_{S_2^e} h \phi_\infty [N^e] \{ \phi \}^e dS_2 + \int_{S_2^e} \frac{h}{2} \phi_\infty^2 dS_2, \quad (A3.4)$$

onde:

$$\phi = [N^e] \{ \phi \}^e, \quad (A3.5)$$

$$\{ g^e \} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_m^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_m^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial z} & \frac{\partial N_2^e}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_m^e}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_m \end{Bmatrix}^e, \quad (A3.6)$$

ou na forma condensada:

$$\{ g^e \} = [B^e] \{ \phi \}^e, \quad (A3.7)$$

onde m é o número de pontos nodais do elemento, $[B^e]$ contém as derivadas das funções de forma do elemento e $\{ g^e \}$ é a matriz gradiente para o elemento.

A minimização do funcional I^e é dada por:

$$\frac{\partial I^e}{\partial \{\phi\}^e} = 0 . \quad (A3.8)$$

Substituindo a equação (A3.4) na equação (A3.8), obtém-se para cada termo:

$$\frac{\partial}{\partial \{\phi^e\}} \int_{V^e} \frac{1}{2} \{\phi\}^e T [B^e]^T [D^e] [B^e] \{\phi\}^e dV = \int_{V^e} [B^e]^T [D^e] [B^e] \{\phi\}^e dV , \quad (A3.9a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \{\phi^e\}} \int_{V^e} Q [N^e] \{\phi\}^e dV = \int_{V^e} [N^e]^T Q dV , \quad (A3.9b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \{\phi^e\}} \int_{S_1^e} q [N^e] \{\phi\}^e dS_1 = \int_{S_1^e} [N^e]^T q dS_1 , \quad (A3.9c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \{\phi^e\}} \int_{S_2^e} \frac{h}{2} \{\phi^e\}^T [N^e]^T [N^e] \{\phi^e\} dS_2 = \int_{S_2^e} h [N^e]^T [N^e] \{\phi^e\} dS_2 , \quad (A3.9d)$$

$$\frac{\partial}{\partial \{\phi^e\}} \int_{S_2^e} h \phi_\infty [N^e] \{\phi^e\} dS_2 = \int_{S_2^e} h \phi_\infty [N^e]^T dS_2 , \quad (A3.9e)$$

$$\frac{\partial}{\partial \{\phi^e\}} \int_{S_2^e} \frac{h}{2} \phi_\infty^2 dS_2 = 0 . \quad (A3.9f)$$

Somando-se os segundos membros das equações (A3.9), vem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^e}{\partial \{\phi^e\}} = & \int_{V^e} [B^e]^T [D^e] [B^e] \{\phi\}^e dV - \int_{V^e} [N^e]^T Q dV + \\ & \int_{S_1^e} [N^e]^T q dS_1 + \int_{S_2^e} h [N^e]^T [N^e] \{\phi^e\} dS_2 - \int_{S_2^e} h \phi_\infty [N^e]^T dS_2 = 0 . \end{aligned} \quad (A3.10)$$

A equação (A3.10) pode ser escrita na seguinte forma condensada:

$$\frac{\partial I^e}{\partial \{\phi^e\}} = [K]^e \{\phi\}^e + \{R\}^e = 0 , \quad (A3.11)$$

onde:

$$[K]^e = \int_{V^e} [B^e]^T [D^e] [B^e] dV + \int_{S_2^e} h [N^e]^T [N^e] dS_2 , \quad (A3.12)$$

$$\{R\}^e = \int_{V^e} -[N^e]^T Q dV + \int_{S_1^e} [N^e]^T q dS_1 - \int_{S_2^e} h \phi_\infty [N^e]^T dS_2 . \quad (A3.13)$$

A minimização do funcional I é dada por:

$$\frac{\partial I}{\partial \{\phi\}} = \frac{\partial}{\partial \{\phi\}} \sum_{e=1}^e I^e = \sum_{e=1}^e \frac{\partial I^e}{\partial \{\phi\}^e} = 0 . \quad (A3.14)$$

Substituindo a equação (A3.11) em (A3.14) resulta:

$$\frac{\partial I}{\partial \{\phi\}} = \sum_{e=1}^e \left([K]^e \{\phi\}^e + \{R\}^e \right) = 0 . \quad (A3.15)$$

A equação (A3.15) pode ser escrita na seguinte forma matricial global:

$$[K] \{\phi\} + \{R\} = 0 , \quad (A3.16)$$

onde:

$$[K] = \sum_{e=1}^e \int_{V^e} [B^e]^T [D^e] [B^e] dV + \sum_{e=1}^e \int_{S_2^e} h [N^e]^T [N^e] dS_2 , \quad (A3.17)$$

$$\begin{aligned} \{R\} = & \sum_{e=1}^e \int_{V^e} -[N^e]^T Q dV + \sum_{e=1}^e \int_{S_1^e} [N^e]^T q dS_1 + \\ & \sum_{e=1}^e \int_{S_2^e} -h \phi_\infty [N^e]^T dS_2 . \end{aligned} \quad (A3.18)$$

APÊNDICE A4

MÉTODO VARIACIONAL PARA EQUAÇÃO DIFERENCIAL EM REGIME NÃO PERMANENTE

A4.1 - Introdução

Seja a equação diferencial no regime não permanente:

$$\left[K_{xx} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] + Q = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (\text{A4.1a})$$

com as condições de contorno:

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + K_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z + q = 0, \quad (\text{A4.1b})$$

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + K_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z + h(\phi - \phi_\infty) = 0, \quad (\text{A4.1c})$$

$$\phi = \phi_B. \quad (\text{A4.1d})$$

Onde, ϕ representa a temperatura; K_{xx} , K_{yy} e K_{zz} são as condutividades térmicas do elemento nas direções x , y e z ; q é o fluxo de calor especificado na superfície S_1 ; h é o coeficiente de convecção na superfície S_2 ; ϕ_∞ é a temperatura ambiente; ϕ_B é a distribuição especificada de temperatura na superfície S_3 ; l_x , l_y e l_z os cossenos diretores do vetor normal à superfície; t é o tempo; e o parâmetro λ é igual ao produto da densidade (ρ) pelo calor específico a pressão constante (c_p).

A4.2 - Método Variacional

A equação (A4.1a) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\left[K_{xx} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] + \left[Q - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] = 0. \quad (\text{A4.2})$$

O funcional equivalente das equações (A4.1) é dado por:

$$I = \int_V \frac{1}{2} \left[K_{xx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + K_{zz} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - 2 \left[Q - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \phi \right] dv + \int_{S_1} q \phi dS_1 + \int_{S_2} \frac{h}{2} (\phi^2 - 2\phi\phi_\infty + \phi_\infty^2) dS_2. \quad (A4.3)$$

A função ϕ que minimiza o funcional é a solução da equação (A4.1) e $(Q - \lambda \partial\phi/\partial t)$ é uma função especificada.

O funcional para o elemento (e) é dado por:

$$I^e = \int_{V^e} \frac{1}{2} \left[K_{xx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + K_{zz} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dV + \int_{S_1^e} q \phi dS_1 + \int_{S_2^e} \frac{h}{2} [\phi^2 - 2\phi\phi_\infty + \phi_\infty^2] dS_2 + \int_{V^e} \left[- \left[Q - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \phi \right] dV. \quad (A4.4)$$

A equação (A4.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$I = \sum_{e=1}^{\epsilon} \int_{V^e} \frac{1}{2} \{ \phi \}^e T [B^e]^T [D^e] [B^e] \{ \phi \}^e dV + \sum_{e=1}^{\epsilon} \int_{S_2^e} h [N^e]^T [N^e] dS_2 \quad (A4.5a)$$

$$\sum_{e=1}^{\epsilon} \int_{S_1^e} q [N^e] \{ \phi \}^e dS_1 + \sum_{e=1}^{\epsilon} \int_{S_2^e} -h \phi_\infty [N^e]^T dS_2 + I_Q,$$

onde I_Q , ϕ e $[B^e]$ são dados por:

$$I_Q = \sum_{e=1}^{\epsilon} \left\{ \int_{V^e} - [N^e] \{ \phi \}^e Q dv + \right. \quad (A4.5b)$$

$$\left. \int_{V^e} \lambda [N^e] \{ \phi \}^e [N^e] \frac{\partial \{ \phi \}^e}{\partial t} dV \right\},$$

$$\phi = [N^e] \{ \phi \}^e, \quad (A4.5c)$$

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_m^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_m^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial z} & \frac{\partial N_2^e}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_m^e}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (A4.5d)$$

A minimização da equação (A4.5a) é dada por:

$$\frac{\partial I}{\partial \{\phi\}} = \sum_{e=1}^{\epsilon} \frac{\partial I^e}{\partial \{\phi\}^e} = 0 . \quad (\text{A4.6})$$

A minimização do termo I_Q é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_Q}{\partial \{\phi\}} &= \sum_{e=1}^{\epsilon} \int_{v^e} -Q [N^e]^T dV + \\ &\sum_{e=1}^{\epsilon} \left[\int_{S^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV \right] \frac{\partial \{\phi\}}{\partial t} . \end{aligned} \quad (\text{A4.7})$$

O primeiro e o segundo termo da equação (A4.5a), já minimizados, conforme mostra o apêndice A3, somados à equação (A4.7), produzem o resultado:

$$[C] \frac{\partial \{\phi\}}{\partial t} + [K] \{\phi\} + \{R\} = 0 , \quad (\text{A4.8a})$$

onde:

$$[C] = \sum_{e=1}^{\epsilon} \int_{v^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV , \quad (\text{A4.8b})$$

$$[K] = \sum_{e=1}^{\epsilon} \int_{v^e} [B^e]^T [D^e] [B^e] dV + \sum_{e=1}^{\epsilon} \int_{S_2^e} h [N^e]^T [N^e] dS_2 , \quad (\text{A4.8c})$$

$$\{R\} = \sum_{e=1}^{\epsilon} \int_{v^e} -Q [N^e]^T dV + \sum_{e=1}^{\epsilon} \int_{S_1^e} q [N^e]^T dS_1 + \quad (\text{A4.8d})$$

$$\sum_{e=1}^{\epsilon} \int_{S_2^e} -h \phi_{\infty} [N^e]^T dS_2 .$$

A4.3 - Matriz do Elemento $[C^e]$

A matriz do elemento $[C^e]$ é dada por:

$$[C^e] = \int_{v^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV . \quad (\text{A4.9})$$



A matriz de forma para um elemento triangular é dada pela seguinte equação (Apêndice A5):

$$[N^e] = [N_i \ N_j \ N_k] , \quad (A4.10)$$

onde N_i , N_j e N_k são dados também no Apêndice A5.

Considerando o elemento de espessura unitária, tem-se que

$dV = 1 \times dS$. Assim, das equações (A4.9) e (A4.10) vem:

$$[C^e] = \int_S \lambda \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} [N_i \ N_j \ N_k] dS . \quad (A4.11)$$

De onde resulta:

$$[C^e] = \frac{\lambda A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} , \quad (A4.12)$$

onde A^e é a área do elemento triangular.

A matriz de forma para o elemento tetraédrico linear é dado pela seguinte equação (Apêndice A5):

$$[N^e] = [N_i \ N_j \ N_k \ N_l] , \quad (A4.13)$$

Assim das equações (A4.9) e (A4.13) vem:

$$[C^e] = \int_S \lambda \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \\ N_l \end{Bmatrix} [N_i \ N_j \ N_k \ N_l] dV . \quad (A4.14)$$

ou seja:

$$[C^e] = \frac{\lambda V^e}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} , \quad (A4.15)$$

onde V^e é o volume do elemento tetraédrico linear.

A4.4 - Aproximação do Termo $d\{\phi\}/dt$

A figura A4.1 mostra os valores ϕ_0 e ϕ_1 assumidos pela função ϕ , respectivamente, no tempo t e $t+\Delta t$.

Usando-se um esquema de diferença finita central o termo $d\phi/dt$ pode ser escrito na seguinte forma:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\phi_1 - \phi_0}{\Delta t} . \quad (A4.16)$$

A derivada da grandeza ϕ para os pontos nodais no domínio do tempo pode ser calculada pela equação:

$$\frac{\partial \{\phi\}}{\partial t} = \frac{d\{\phi\}}{dt} = \frac{1}{\Delta t} (\{\phi\}_1 - \{\phi\}_0). \quad (\text{A4.17})$$

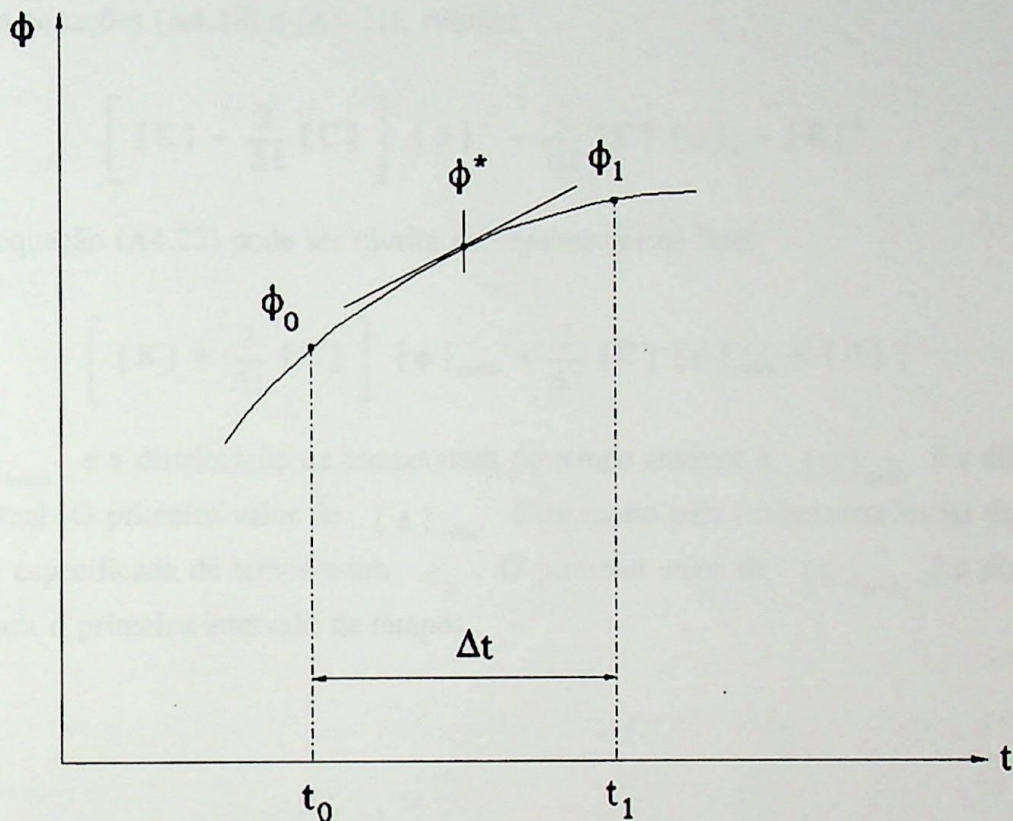


Figura A4.1 - Esquema de diferença finita central para a derivada $d\phi/dt$.

As matrizes $\{\phi\}$ e $\{R\}$ devem ser avaliadas como:

$$\{\phi\}^* = \frac{1}{2} (\{\phi\}_1 + \{\phi\}_0), \quad (\text{A4.18})$$

$$\{R\}^* = \frac{1}{2} (\{R\}_1 + \{R\}_0). \quad (\text{A4.19})$$

Substituindo (A4.18) e (A4.19) em (A4.8a), vem:

$$\frac{1}{\Delta t} [C] \{\phi\}_1 - \frac{1}{\Delta t} [C] \{\phi\}_0 + \frac{1}{2} [K] \{\phi\}_1 + \frac{1}{2} [K] \{\phi\}_0 + \{R\}^* = 0. \quad (\text{A4.20})$$

A equação (A4.20) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left[[K] + \frac{2}{\Delta t} [C] \right] \{ \phi \}_1 = \left[\frac{2}{\Delta t} [C] - [K] \right] \{ \phi \}_0 - 2 \{ R \}^* . \quad (A4.21)$$

Das equações (A4.18) e (A4.21), resulta:

$$\left[[K] + \frac{2}{\Delta t} [C] \right] \{ \phi \}^* = \frac{2}{\Delta t} [C] \{ \phi \}_0 - \{ R \}^* . \quad (A4.22)$$

A equação (A4.22) pode ser escrita na seguinte forma final:

$$\left[[K] + \frac{2}{\Delta t} [C] \right] \{ \phi \}_{\text{nov}} = \frac{2}{\Delta t} [C] \{ \phi \}_{\text{vel}} - \{ R \} , \quad (A4.23)$$

onde $\{ \phi \}_{\text{vel}}$ é a distribuição de temperatura do tempo anterior e $\{ \phi \}_{\text{nov}}$ é a distribuição do tempo atual. O primeiro valor de $\{ \phi \}_{\text{vel}}$ é composto pela temperatura inicial da peça e a distribuição especificada de temperatura ϕ_B . O primeiro valor de $\{ \phi \}_{\text{nov}}$ é a distribuição calculada para o primeiro intervalo de tempo.

APÊNDICE A5

DETERMINAÇÃO DAS FUNÇÕES DE FORMA

A5.1 - Introdução

Este apêndice se dedica à determinação das funções de forma para os elementos triangular linear, tetraédrico linear e quadrilateral quadrático de oito nós. As funções de forma seguem as seguintes regras:

1. São funções que têm o valor unitário em seu próprio nó e o valor nulo para os demais nós;
2. Cada função de forma é um polinômio de mesmo grau da equação de interpolação.

A5.2 - Funções de Forma para o Elemento Triangular Linear

A figura A5.1 mostra um elemento triangular cujos vértices i, j e k , formam os três pontos nodais do elemento. O elemento bidimensional está contido no plano x, y . A temperatura ϕ no interior do elemento é função das coordenadas x, y . Nos pontos nodais i, j, k as temperaturas são respectivamente Φ_i, Φ_j e Φ_k .

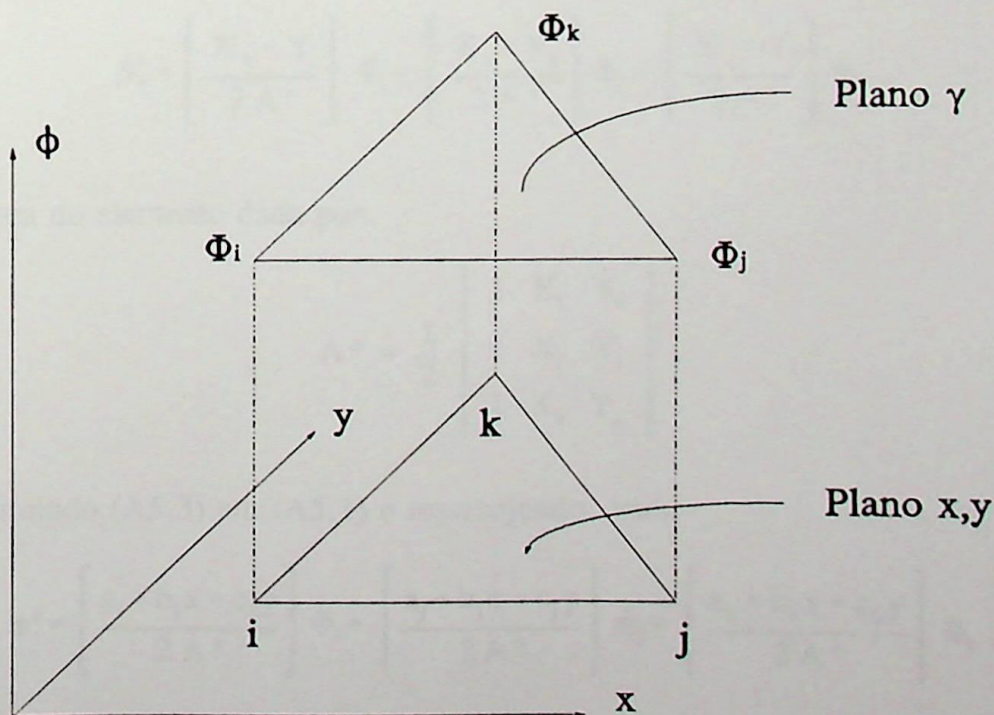


Figura A5.1 - Elemento Triangular Linear

Considere um plano γ no espaço x, y, ϕ conforme mostra a figura A5.1, descrito por:

$$\phi^c = \phi^c(x, y) = \beta_1^c + \beta_2^c x + \beta_3^c y . \quad (\text{A5.1})$$

Da equação (A5.1), para os pontos nodais i, j, k , tem-se que:

$$\Phi_i = \beta_1^c + \beta_2^c X_i + \beta_3^c Y_i , \quad (\text{A5.2a})$$

$$\Phi_j = \beta_1^c + \beta_2^c X_j + \beta_3^c Y_j , \quad (\text{A5.2b})$$

$$\Phi_k = \beta_1^c + \beta_2^c X_k + \beta_3^c Y_k . \quad (\text{A5.2c})$$

Resolvendo o sistema (A5.2) em termos de β_1, β_2 e β_3 , resulta:

$$\beta_1^c = \left[\frac{X_j Y_k - X_k Y_j}{2 A^c} \right] \Phi_i + \left[\frac{X_k Y_i - X_i Y_k}{2 A^c} \right] \Phi_j + \left[\frac{X_i Y_j - X_j Y_i}{2 A^c} \right] \Phi_k , \quad (\text{A5.3a})$$

$$\beta_2^c = \left[\frac{Y_j - Y_k}{2 A^c} \right] \Phi_i + \left[\frac{Y_k - Y_i}{2 A^c} \right] \Phi_j + \left[\frac{Y_i - Y_j}{2 A^c} \right] \Phi_k , \quad (\text{A5.3b})$$

$$\beta_3^c = \left[\frac{X_k - X_j}{2 A^c} \right] \Phi_i + \left[\frac{X_i - X_k}{2 A^c} \right] \Phi_j + \left[\frac{X_j - X_i}{2 A^c} \right] \Phi_k , \quad (\text{A5.3c})$$

onde A^c é a área do elemento dada por:

$$A^c = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} . \quad (\text{A5.3d})$$

Substituindo (A5.3) em (A5.1) e rearranjando, vem:

$$\phi^c = \left[\frac{a_i + b_i x + c_i y}{2 A^c} \right] \Phi_i + \left[\frac{a_j + b_j x + c_j y}{2 A^c} \right] \Phi_j + \left[\frac{a_k + b_k x + c_k y}{2 A^c} \right] \Phi_k , \quad (\text{A5.4a})$$

onde:

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j ; \quad b_i = Y_j - Y_k ; \quad c_i = X_k - X_j ; \quad (\text{A5.4b})$$

$$a_j = X_k Y_i - X_i Y_k ; \quad b_j = Y_k - Y_i ; \quad c_j = X_i - X_k ; \quad (\text{A5.4c})$$

$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i ; \quad b_k = Y_i - Y_j ; \quad c_k = X_j - X_i . \quad (\text{A5.4d})$$

A distribuição de temperatura ϕ^e no interior do elemento, em termos das funções de forma, pode ser escrita como:

$$\phi^e = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k , \quad (\text{A5.5a})$$

ou na forma matricial,

$$\phi^e = [N] \{\Phi\} = [N_i \ N_j \ N_k] \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix} . \quad (\text{A5.5b})$$

Comparando (A5.4a) e (A5.5a), vê-se imediatamente que as funções de forma N_i, N_j, N_k são dadas por:

$$N_\alpha = \frac{a_\alpha + b_\alpha x + c_\alpha y}{2A^e}, \quad \text{com } \alpha = i, j, k . \quad (\text{A5.6})$$

O cálculo de N_i para o nó i produz:

$$N_i = \frac{1}{2A^e} (a_i + b_i x + c_i y) = \frac{1}{2A^e} (X_j Y_k - X_k Y_j + Y_j X_i - Y_k X_i + X_k Y_i - X_j Y_i) .$$

Os termos dentro do parênteses correspondem ao valor do determinante em (A5.3d), ou seja:

$$N_i = \frac{1}{2A^e} (2A^e) = 1 .$$

O cálculo de N_i para os nós j e k resulta em:

$$N_i = \frac{1}{2A^e} (a_i + b_i x + c_i y) =$$

$$\frac{1}{2A^e} (X_j Y_k - X_k Y_j + Y_j X_i - Y_k X_i + X_k Y_i - X_j Y_i) = 0 .$$

$$N_i = \frac{1}{2A^e} (a_i + b_i x + c_i y) =$$

$$\frac{1}{2A^e} (X_j Y_k - X_k Y_j + Y_j X_k - Y_k X_k + X_k Y_k - X_j Y_k) = 0 ,$$

o que verifica a função de forma. Analogamente pode-se obter os valores para N_j e N_k que são também nulos.

A5.3 - Funções de Forma para o Elemento Tetraédrico Linear

A figura A5.2 mostra um elemento tetraédrico linear cujos vértices i, j, k e l , formam os quatro pontos nodais do elemento. A temperatura ϕ no interior do elemento é função das coordenadas x, y, z . Nos pontos nodais i, j, k e l , as temperaturas são respectivamente Φ_i, Φ_j, Φ_k e Φ_l .

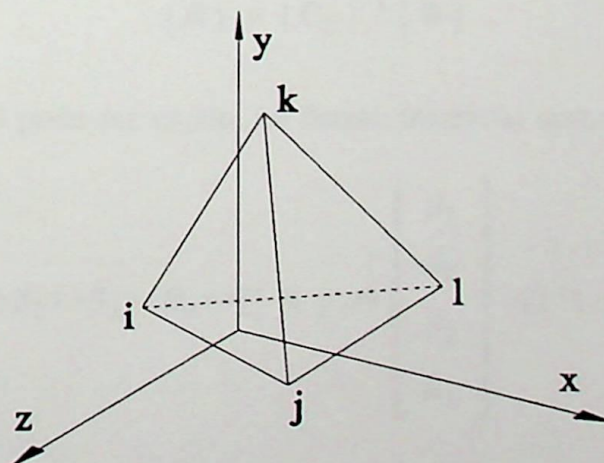


Figura A5.2 - Elemento Tetraédrico Linear

Considere que a temperatura ϕ , no interior do elemento é descrita por:

$$\phi^e = \phi^e(x, y, z) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 z . \quad (A5.7)$$

Da equação (A5.7), para os pontos nodais i, j, k e l , tem-se que:

$$\Phi_i = \beta_1^e + \beta_2^e X_i + \beta_3^e Y_i + \beta_4^e Z_i, \quad (\text{A5.8a})$$

$$\Phi_j = \beta_1^e + \beta_2^e X_j + \beta_3^e Y_j + \beta_4^e Z_j, \quad (\text{A5.8b})$$

$$\Phi_k = \beta_1^e + \beta_2^e X_k + \beta_3^e Y_k + \beta_4^e Z_k, \quad (\text{A5.8c})$$

$$\Phi_l = \beta_1^e + \beta_2^e X_l + \beta_3^e Y_l + \beta_4^e Z_l. \quad (\text{A5.8d})$$

As equações (A5.8) podem ser escritas como:

$$\{\Phi\} = [C_0] \{\beta\}, \quad (\text{A5.9a})$$

Onde:

$$\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \\ \Phi_l \end{Bmatrix}, \quad [C_0] = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{bmatrix}, \quad \{\beta\} = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A5.9b})$$

Premultiplicando (A5.9) pela matriz inversa de $[C_0]$, isto é, $[C_0]^{-1}$, resulta:

$$\{\beta\} = [C_0]^{-1} \{\Phi\}. \quad (\text{A5.10})$$

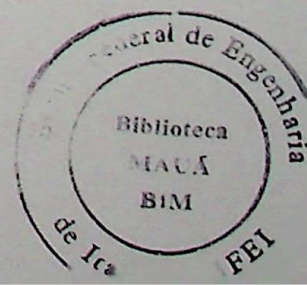
A equação (A5.7) pode ser escrita na forma matricial como:

$$\phi = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 z = [1 \ x \ y \ z] \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{Bmatrix} = [1 \ x \ y \ z] \{\beta\}. \quad (\text{A5.11})$$

Das equações (A5.10) e (A5.11) vem que:

$$\phi = [1 \ x \ y \ z] [C_0]^{-1} \{\Phi\}. \quad (\text{A5.12})$$

Neste caso, podemos escrever:



$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k + N_l \Phi_l = [N_i \ N_j \ N_k \ N_l] \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \\ \Phi_l \end{Bmatrix} = [N] \{\Phi\} . \quad (\text{A5.13})$$

Comparando as equações (A5.12) e (A5.13), vem:

$$[N] = [1 \ x \ y \ z] [C_0]^{-1} . \quad (\text{A5.14})$$

A equação (A5.14) permite determinar a função de forma para o elemento tetraédrico linear.

Uma informação importante que será útil nos cálculos futuros é que o determinante da matriz $[C_0]$ é igual a seis vezes o volume do tetraedro, isto é:

$$V^e = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{vmatrix} . \quad (\text{A5.15})$$

A função de forma para o elemento tetraédrico linear pode ser escrita como:

$$N_\alpha = \frac{1}{6 V^e} (a_\alpha + b_\alpha x + c_\alpha y + d_\alpha z), \quad \text{com } \alpha = i, j, k, l \quad (\text{A5.16})$$

A5.4 - Funções de Forma para o Elemento Quadrilateral Quadrático de Oito Nós

Um procedimento para se obter as funções de forma é assumir que cada função de forma é um produto de duas funções.

$$N_i = F_i G_i , \quad (\text{A5.17})$$

onde F_i é uma função que vale zero em nós especificados, e G_i é obtida de tal forma que N_i tenha a mesma potência das variáveis de coordenada na equação de interpolação.

O método é baseado nas seguintes propriedades:

1. Cada função de forma tem um valor igual a 1 em seu próprio nó e igual a zero nos outros nós;
2. As funções de forma para os elementos bidimensionais são nulas ao longo de cada lado, ao qual o nó não pertence;
3. Cada função de forma é um polinômio com o mesmo grau da equação de interpolação.

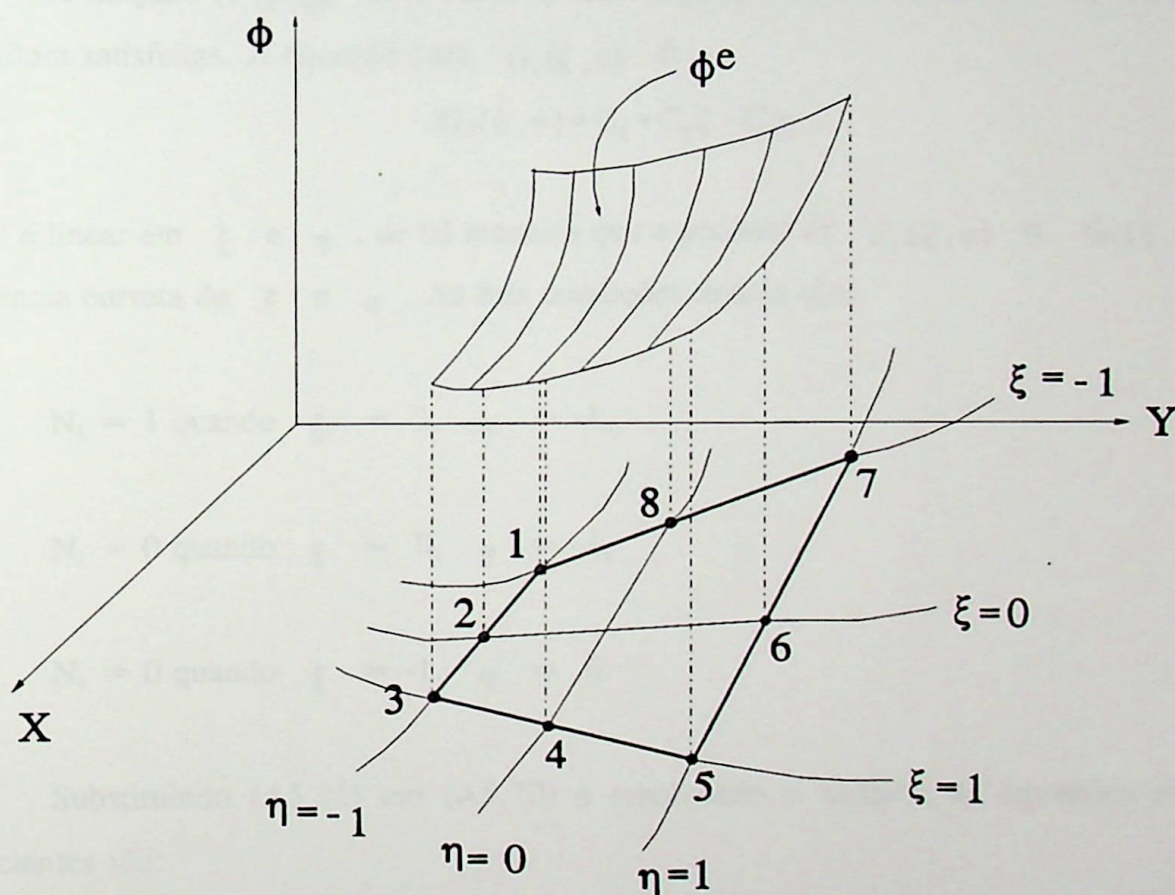


Figura A5.3 - Elemento quadrilateral quadrático de oito nós e a função de interpolação ϕ^e .

As funções de forma são desenvolvidas neste trabalho usando-se um sistema de coordenadas locais (ξ, η) .

A equação de interpolação para o elemento quadrático quadrilateral de oito nós mostrado na figura (A5.3) é:

$$\phi^e = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\xi^2 + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2, \quad (\text{A5.18})$$

onde ϕ^e é uma grandeza dentro do elemento (e), a_i são coeficientes e (ξ, η) são as coordenadas locais.

O procedimento é ilustrado avaliando-se a função de forma N_1 . Desde que o nó 1 não toca os lados 3-4-5 ou 5-6-7, então:

$$F_1(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta) = 1 - \xi - \eta + \xi\eta. \quad (\text{A5.19})$$

A função $G_1(\xi, \eta)$ deve conter 3 termos porque as condições para N_1 nos nós 1, 2 e 8 não foram satisfeitas. A equação para $G_1(\xi, \eta)$ é:

$$G_1(\xi, \eta) = C_1 + C_2\xi + C_3\eta, \quad (\text{A5.20})$$

a qual é linear em ξ e η , de tal maneira que o produto de $F_1(\xi, \eta)$ e $G_1(\xi, \eta)$ contém a potência correta de ξ e η . As três condições nodais são:

$$N_1 = 1 \text{ quando } \xi = -1, \eta = -1,$$

$$N_1 = 0 \text{ quando } \xi = 0, \eta = -1, \quad (\text{A5.21})$$

$$N_1 = 0 \text{ quando } \xi = -1, \eta = 0.$$

Substituindo (A5.21) em (A5.20) e resolvendo o sistema de equações resultante, os coeficientes são:

$$C_1 = C_2 = C_3 = 1/4, \quad (\text{A5.22})$$

$$G_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi + \eta). \quad (\text{A5.23})$$

Substituindo (A5.19) e (A5.23) em (A5.17), resulta:

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) . \quad (\text{A5.24})$$

Fazendo o mesmo procedimento para os nós restantes, pode-se obter as funções de forma para os demais pontos nodais. Logo as funções de forma para o elemento quadrilateral quadrático de oito nós são:

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) , & N_2 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) , \\ N_3 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta) , & N_4 &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi) , \\ N_5 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta) , & N_6 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) , \\ N_7 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta) , & N_8 &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi) . \end{aligned} \quad (\text{A5.25})$$

APÊNDICE A6

TÉCNICA DA QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE

A6.1 - Introdução

A quadratura de Gauss-Legendre é uma técnica de integração numérica associada com as coordenadas locais ξ ou (ξ, η) para se avaliar as matrizes do elemento. Ela se baseia na localização de pontos de integração dentro do elemento, bem como em coeficientes de peso. Isto é feito para se atingir uma maior precisão no cálculo de integrais.

A6.2 - A Técnica da Quadratura de Gauss-Legendre

A6.2.1 - Caso Unidimensional

Considere a função $f(\xi)$ da figura (A6.1) e a sua integral:

$$\text{INT} = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi . \quad (\text{A6.1})$$

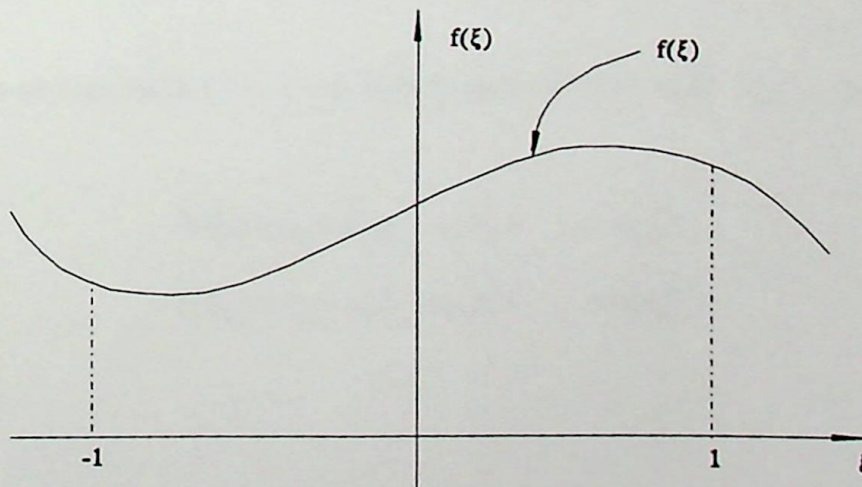


Figura A6.1 - Função $f(\xi)$.

Escrevendo a integral da equação (A6.1) como sendo um somatório de um produto, vem:

$$\text{INT} = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^m W_j f(\xi_j) , \quad (\text{A6.2})$$

onde m é o número de pontos de integração, $2m$ é o número de incógnitas (W_j e ξ_j), W_j é o fator de peso para o ponto j relativo ao centro.

A equação (A6.2) pode ser escrita como:

$$\text{INT} = W_1 f(\xi_1) + W_2 f(\xi_2) + W_3 f(\xi_3) + \dots + W_m f(\xi_m) . \quad (\text{A6.3})$$

O integrando de equação (A6.1) pode ser expandido em uma série de potência no intervalo $-1 \leq \xi \leq 1$. Assim:

$$f(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots + \alpha_r \xi^r . \quad (\text{A6.4})$$

Substituindo (A6.4) em (A6.1), vem:

$$\text{INT} = \int_{-1}^1 \alpha_0 d\xi + \int_{-1}^1 \alpha_1 \xi d\xi + \dots + \int_{-1}^1 \alpha_r \xi^r d\xi . \quad (\text{A6.5})$$

Integrando, obtém-se:

$$\text{INT} = 2\alpha_0 + \frac{2}{3}\alpha_2 + \frac{2}{5}\alpha_4 + \dots + \frac{\alpha_r}{r+1} [1 - (-1)^{r+1}] . \quad (\text{A6.6})$$

Aplicando-se a equação (A6.4) em cada ponto de integração $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m$, vem:

$$\begin{aligned} f(\xi_1) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_1^2 + \dots + \alpha_r \xi_1^r , \\ f(\xi_2) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi_2 + \alpha_2 \xi_2^2 + \dots + \alpha_r \xi_2^r , \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f(\xi_m) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi_m + \alpha_2 \xi_m^2 + \dots + \alpha_r \xi_m^r . \end{aligned} \quad (\text{A6.7})$$

Substituindo (A6.7) em (A6.3), vem:

$$\begin{aligned} \text{INT} = & \alpha_0(W_1 + W_2 + \dots + W_m) + \alpha_1(W_1\xi_1 + W_2\xi_2 + \dots + \\ & W_m\xi_m) + \alpha_2(W_1\xi_1^2 + W_2\xi_2^2 + \dots + W_m\xi_m^2 + \dots + \\ & \alpha_r(W_1\xi_1^r + W_2\xi_2^r + \dots + W_m\xi_m^r) . \end{aligned} \quad (\text{A6.8})$$

Para que a função $f(\xi)$ seja integrada exatamente, os termos das equações (A6.6) e (A6.8) devem ser iguais. Logo:

$$W_1 + W_2 + \dots + W_m = 2 ,$$

$$W_1\xi_1 + W_2\xi_2 + \dots + W_m\xi_m = 0 ,$$

$$W_1\xi_1^2 + W_2\xi_2^2 + \dots + W_m\xi_m^2 = \frac{2}{3} ,$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$W_1\xi_1^r + W_2\xi_2^r + \dots + W_m\xi_m^r = \frac{1}{r+1} [1 - (-1)^{r+1}] . \quad (\text{A6.9})$$

Nota-se que, no sistema de equações (A6.9) aparecem $(r+1)$ equações com $2m$ incógnitas (W_j e ξ_j). Então, a solução só será possível quando o número de equações for igual ao número de incógnitas, isto é:

$$\begin{aligned} r + 1 &= 2m \quad \text{ou} \\ r &= 2m - 1, \end{aligned} \quad (\text{A6.10})$$

onde:

r é igual ao grau do polinômio,
 m é igual ao número de pontos de integração.

Serão mostrados a seguir dois exemplos para melhor entendimento da integração numérica:

Exemplo 1

Determinar os pesos W_i e as coordenadas da integração da função $f(\xi)$, tal que:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \quad \text{com} \quad f(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 .$$

Solução:

Neste caso $r = 3$ e $m = (r + 1)/2 = 2$, assim da equação (A6.9), teremos $(r + 1) = 4$ equações com $(2m = 4)$ incógnitas (W_i e ξ_i).

Da equação (6.9), vem:

$$W_1 + W_2 = 2$$

$$W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 = 0$$

$$W_1 \xi_1^2 + W_2 \xi_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$W_1 \xi_1^3 + W_2 \xi_2^3 = \frac{1}{4} [1 - (-1)^4] = 0$$

Resolvendo o sistema, resulta:

$$W_1 = W_2 = 1$$

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0,577350 \quad \text{e} \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577350$$

Exemplo 2

Considere o polinômio:

$$f(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 ,$$

onde α_i são constantes.

Calcular a integral:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi .$$

Solução:

a) A solução exata é:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = 2\alpha_0 + \frac{2}{3}\alpha_2$$

b) Obter a solução para $m = 1$.

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \cong W_1 f(\xi_1) = 2f(0) = 2\alpha_0 \quad \text{com } (W_1 = 1 \text{ e } \xi_1 = 0) ,$$

neste caso obtemos uma solução aproximada.

c) Calcular para $m = 2$.

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = W_1 f(\xi_1) + W_2 f(\xi_2) \quad \text{sendo } W_1 = W_2 = 1 ,$$

$$\xi_1 = -P \text{ e } \xi_2 = +P \quad \text{com } P = \frac{1}{\sqrt{3}} , \text{ logo:}$$

$$I = 1,0(\alpha_0 - \alpha_1 P + \alpha_2 P^2 - \alpha_3 P^3) + 1,0(\alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 P^2 + \alpha_3 P^3) = 2\alpha_0 + \frac{2}{3}\alpha_2 ,$$

que é a solução exata.

d) Resolver para $m = 3$.

neste caso:

$$W_1 = \frac{5}{9} , \quad W_2 = \frac{8}{9} , \quad W_3 = \frac{5}{9} , \quad \xi_1 = -P , \quad \xi_2 = 0 \text{ e } \xi_3 = P \quad \text{com } P = \sqrt{0,6}$$

$$I = \frac{5}{9}(\alpha_0 - \alpha_1 P + \alpha_2 P^2 - \alpha_3 P^3) + \frac{8}{9}(\alpha_0) + \frac{5}{9}(\alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 P^2 + \alpha_3 P^3) = 2\alpha_0 + \frac{2}{3}\alpha_2,$$

que é a solução exata.

Do exemplo 2 pode-se ver que para um polinômio de grau $r = 2m - 1$ a integração exata ocorre quando se usa m ou mais pontos de integração.

Para o exemplo resolvido o grau do polinômio é $r = 3$, assim com $m \geq 2$ se obtém a integração exata.

A6.2.2 - Caso Bidimensional

Até agora, foi analisada a integração numérica unidimensional. Para o caso bidimensional, a integral INT fica:

$$INT = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\eta d\xi. \quad (A6.11)$$

Analisa-se as integrais interna e externa, consecutivamente, de uma maneira similar àquela para o caso unidimensional.

Então, pode-se escrever que:

$$INT = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(\xi_j, \eta_k) W_j W_k, \quad (A6.12)$$

onde:

m é igual ao número de pontos de integração na direção ξ ;

n é igual ao número de pontos de integração na direção η .

Abaixo são mostrados alguns valores para m , n , ξ , η , e W com as respectivas figuras mostrando a disposição dos pontos de integração dentro de alguns elementos:

Tabela (A6.1) - Valor de m para a integração numérica de Gauss-Legendre para elementos bidimensionais nas direções ξ e η .

Produto	$[N]^T [N]$		$[B]^T [B]$		$[N]^T$	
	ξ	η	ξ	η	ξ	η
Linear	2	2	2	2	1	1
Quadrático	3	3	2	2	2	2
Cúbico	4	4	3	3	2	2

Tabela (A6.2) - Localização e valores dos pesos para a integração numérica de Gauss-Legendre

$m = 2$	$\xi_i = \pm 0,577350$	$W_i = 1,00$
$m = 3$	$\xi_i = 0,0$	$W_i = 8/9$
	$\xi_i = \pm 0,774597$	$W_i = 5/9$
$m = 4$	$\xi_i = \pm 0,861136$	$W_i = 0,347855$
	$\xi_i = \pm 0,339981$	$W_i = 0,652145$
$m = 5$	$\xi_i = 0,0$	$W_i = 0,568889$
	$\xi_i = \pm 0,538469$	$W_i = 0,478629$
	$\xi_i = \pm 0,906180$	$W_i = 0,236927$

Para $m = n = 1$

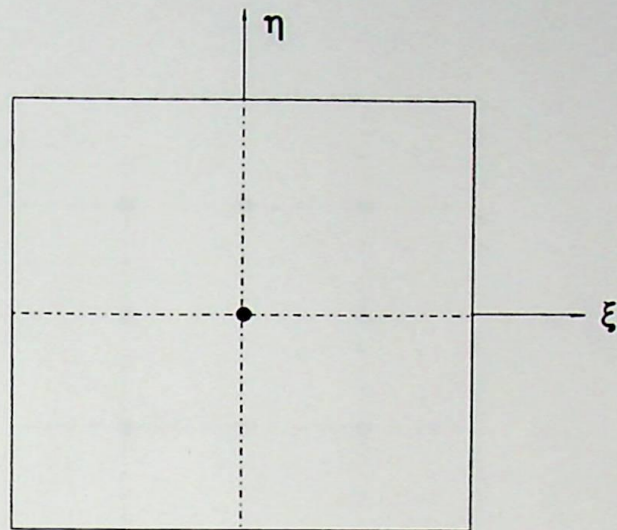


Figura A6.2 - Elemento com um ponto de integração

Para $m = n = 2$

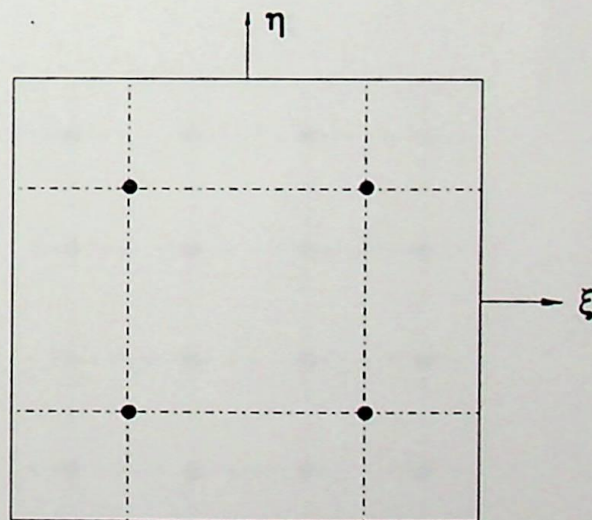


Figura A6.3 - Elemento com quatro pontos de integração.

Para $m = n = 3$

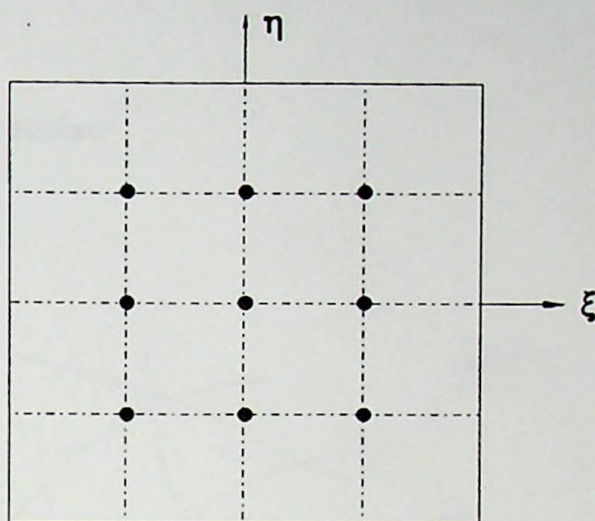


Figura A6.4 - Elemento com nove pontos de integração

Para $m = n = 4$

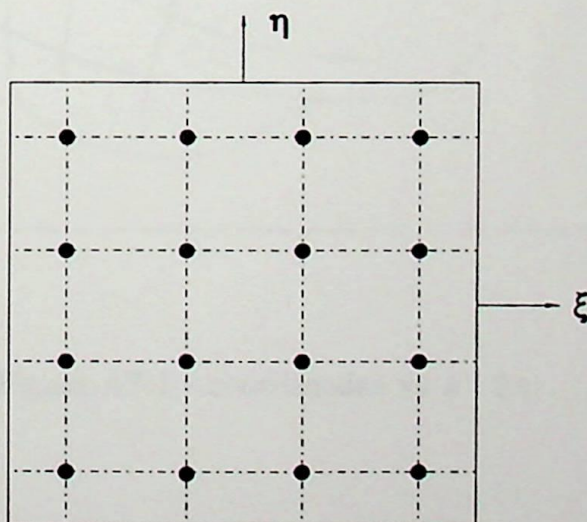


Figura A6.5 - Elemento com dezesseis pontos de integração

APÊNDICE A7

DEMONSTRAÇÃO DE $dx dy = |\det [J]| d\xi d\eta$

Seja a figura (A7.1) abaixo:

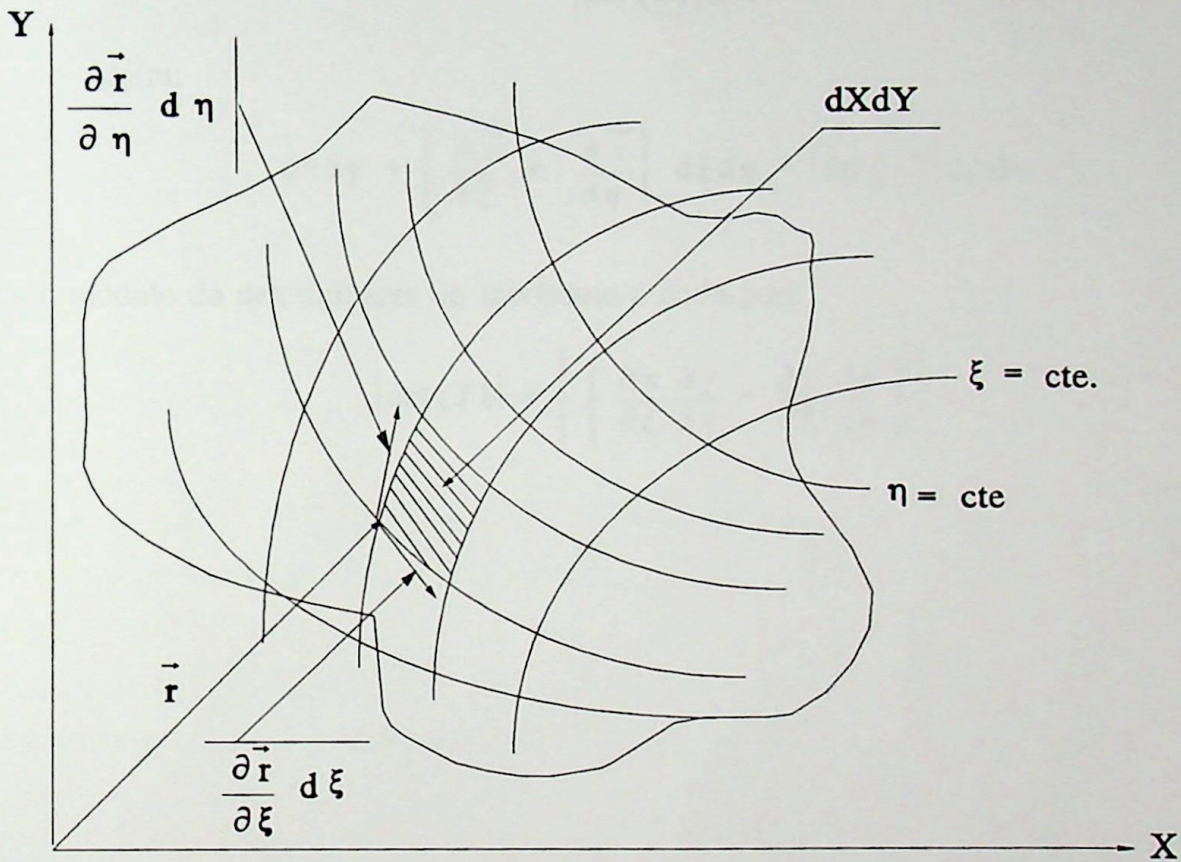


Figura A7.1 - coordenadas xy e $\xi\eta$.

onde:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j}. \quad (\text{A7.1})$$

Pode-se escrever que:

$$dx dy = \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} d\xi \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} d\eta \right] = \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta. \quad (\text{A7.2})$$

O produto vetorial da equação (A7.2) pode ser calculado como sendo:

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \vec{k} = \quad (\text{A7.3})$$

$$|\det [J]| \vec{k} .$$

Assim:

$$dx dy = \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta = |\det [J]| d\xi d\eta , \quad (\text{A7.4})$$

onde o módulo do determinante do Jacobiano é dado por:

$$|\det [J]| = \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right| . \quad (\text{A7.5})$$

BIBLIOGRAFIA

Archer, J. S., "Consistent Matrix Formulations for Structural Analysis Using Finite-Element Techniques", *Journal of the American Institute Of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 3, pp. 1910-1918, 1965.

Argyris, J. H., "Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis", *Progress in Aeronautical Science*, Vol. 4, Pergamon Press, New York, 1964.

Baptista, L. A. S., & Machado, A. C., "Desenvolvimento de um Modelo Matemático de Transferência de Calor em Três Dimensões", *I Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, Rio de Janeiro - RJ, pp. 167-170, 1986.

Belytschko, T., "A Survey of Numerical Methods and Computer Programs for Dynamic Structural Analysis", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 37, n° 1, pp. 23-34, 1976.

Belytschko, T., "Efficient Large-Scale Nonlinear Transient Analysis by Finite Elements", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, n° 3, pp. 579-596, 1976.

Clough, R. W., & Rashid, Y., "Finite Element Analysis of Axissimetric Solids", *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 91, pp. 71-85, Feb. 1965.

Clough, R. W., "The Finite Element in Plane Stress Analysis", *Proceedings, American Society of Civil Engineers, 2nd Conference on Eletronic Computation, Pittsburg, Pa.*, pp. 345-378, Sept. 1960.

Cook, R. D., Malkus, D. S. & Plesha, M. E., "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", *Jonh Wiley & Sons Inc*, New York, 1989.

Courant, R., "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations", *Bullettin of the American Mathematical Society*, Vol. 49, pp. 01-23, 1943.

Cunha, F. R. & Almeida, V. F., "Análise da Distribuição de Temperatura Durante a Soldagem Automática de Placas", *III Encontro Nacional de Ciências Térmicas, Itapema - SC*, pp. 27-31, 1990.

França, G. A. C., Fortes, M. & Mundim, M. J., "A Finite Element Mesh Refinement Procedure for Transient Heat Conduction Problems", XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, São Paulo - SP, pp. 409-412, 1991.

Gallagher, R. H. & Padlog, J., "Discrete Element Approach to Structural Stability Analysis", Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics, Vol. 1, n° 6, pp. 1437-1439, 1963.

Gallagher, R. H., Padlog, J. & Bijlaard, P. P., "Stress Analysis of Heated Complex Shapes", Journal of the American Rocket Society, Vol. 32, pp. 700-707, May 1962.

Gouvêa, J. P., Scofano Neto, F., Carvalho, M. S. & Bianchi, M. V. A., "O Sistema SDP: Análise Térmica Transiente", III Encontro Nacional de Ciências Térmicas, Itapema - SC, pp. 405-409, 1990.

Guimarães, P. M., "Estudo de Problemas Conjugados de Transferência de Calor por Convecção Natural em Cavidades Retangulares com Condução na Partição e nas Paredes Laterais", Dissertação de Mestrado, EFEI, Itajubá - MG, 1992.

Guzmán, A. C., Moraga, N. B., Gutiérrez, A. S., "Thermal Analysis of a Cooper Converter Using Finite Elements", XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, São Paulo - SP, pp. 307-310, 1991.

Hrennikoff, A., "Solution of Problems in Elasticity by the Frame Work Method", Journal of Applied Mechanics, Vol. 8, n°4, pp. 169-175, Dec. 1941.

Levy, S., "Computation of Influence Coefficients for Aircraft Structures with Discontinuities and Sweepback", Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 14, n° 10, pp. 547-560, Oct. 1947.

Levy, S., "Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings", Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 20, n° 7, pp. 449-454, July 1953.

Lyness, J. F., Owen, D. R. J. & Zienkiewicz, O. C., "Three-Dimensional Magnetic Field Determination Using a Scalar Potential. A Finite Element Solution", Transactions on Magnetism, Institute of Electrical and Electronics Engineers, pp. 1649-1656, 1977.

Lyra, P. R. M., "Aplicação de Procedimento Auto-Adaptativo na Análise de Problemas Térmicos no Regime Permanente e Transiente", III Encontro Nacional de Ciências Térmicas, Itapema - SC, pp. 415-419, 1990.

Martin, H. C., "Finite Element Analysis of Fluid Flows", Proceedings of the Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, pp. 517-535, Oct. 1968.

Martin, H. C., "Plane Elasticity Problems and the Direct Stiffness Method", The Trend in Engineering, Vol. 13, pp. 05-19, Jan. 1961.

McHenry, D., "A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems", Journal of Institution of Civil Engineers, Vol. 21, pp. 59-82, Dec. 1943.

Melosh, R. J., "Structural Analysis of Solids", Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, pp. 205-223, Aug. 1963.

Menon, G. J. & Guimarães, P. M., "Estudo de Problemas Conjugados de Condução e Convecção em Cavidades Quadradas com Partição", XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Brasília - DF, pp. 617-620, 1993.

Moura, L. F. M., "Solução Numérica de Problemas de Condução de Calor pelo Método de Elementos Finitos Usando Elementos Quadrilaterais de Terceira Ordem", III Encontro Nacional de Ciências Térmicas, Itapema - SC, pp. 399-404, 1990.

Norrie, D. & de Vries, G., "Finite Element Bibliography", IFI/Plenum, New York, 1976.

Özişik, M. N., "Transferência de Calor - Um Texto Básico", Guanabara Koogan S.A., Rio de Janeiro - RJ, 1990.

Pimenta, M. M., Camargo Filho, R. & Lee, J., "Resfriamento de Pistões Automotivos: Estudo do Efeito de Jatos Líquidos", XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Brasília - DF, pp. 581-584, 1993.

Ribeiro, M. M., "Estudo da Transferência de Calor por Condução Mista no Interior de Tubos Horizontais Concêntricos e Excêntricos", Dissertação de Mestrado, EFEI, Itajubá - MG, 1992.

Rodrigues, J. L. A. F., "Cálculo de Transientes Térmicos Bidimensionais pelo Método de Elementos Finitos", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, 1980.

Segerlind, L. J., "Applied Finite Element Analysis", John Wiley & Sons Inc, New York, First Edition, 1976.

Segerlind, L. J., "Applied Finite Element Analysis", John Wiley & Sons Inc, New York, Second Edition, 1984.

Seixlack, A. L. & Maliska, C. R., "Condução Anisotrópica em Geometrias Arbitrárias: Tratamento Alternativo para as Condições de Contorno", X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro - RJ, 1989.

Szabo, B. A. & Lee, G. C., "Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method", International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 1, pp. 301-310, 1969.

Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C. & Topp, L. J., "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 23, nº 9, pp. 805-824, Sept. 1956.

Turner, M. J., Dill, E. H., Martin, H. C. & Melosh, R. J., "Large Deflections of Structures Subjected to Heating and External Loads", Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 27, nº 2, pp. 97-107, Feb. 1960.

Vielmo, H. A., Silva, A. F. C. & Maliska, C. R., "Conjugate Conduction, Convection and Radiation Problem in Walls Containing Circular Cells", IV Encontro Nacional de Ciências Térmicas, Rio de Janeiro - RJ, pp. 363-366, 1992.

Whiteman, J. R., "A Bibliography for Finite Elements", Academic press, London, 1975.

Wilson, E. L. & Nickel, R. E., "Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis", Nuclear Engineering and Design, Vol. 4, pp. 276-286, 1966.

Wilson, E. L., "Structural Analysis of Axisymmetric Solids", Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics, Vol. 3, nº 12, pp. 2269-2274, Dec. 1965.

Zienkiewicz, O. C., "Finite Element Methods in Thermal Problems", Numerical Methods in Heat Transfer, John Wiley & Sons, 1981.

Zienkiewicz, O. C. & Cheung, Y. K., "Finite Elements in the Solution of Field Problems", The Engineer, pp. 507-510, Sept 24, 1965.

Zienkiewicz, O. C. & Parekh, C. J., "Transient Field Problems: Two-Dimensional and Three-Dimensional Analysis by Isoparametric Finite Elements", International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, nº 1, pp. 61-71, 1970.

Zienkiewicz, O. C., Watson, M. & King, I. P., "A Numerical Method of Visco-Elastic Stress Analysis", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 10, pp. 807-827, 1968.

Ziviani, M. & Paula, M. R., "Comportamento Térmico de Aços Cromo em Fornos de Reaquecimento", XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Brasília - DF, pp. 585-587, 1993.



Ministério da Educação e do Desporto
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

ANEXO I

PRONUNCIAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

A Banca Examinadora, abaixo assinada, nomeada pela Portaria nº 431 de 25/11/96, considerando o resultado do Julgamento da Prova de Defesa Pública da Dissertação de Mestrado intitulada: "Transferência de Calor por Condução em Corpos Bi e Tridimensionais em Regime Permanente e não Permanente Utilizando o Método de Elementos Finitos" apresenta pronunciamento no sentido de que o Coordenador dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Escola Federal de Engenharia de Itajubá solicite ao DRA (Departamento de Registro Acadêmico) a expedição do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica, na Área de Conversão de Energia, satisfeitas as demais exigências regimentais, a João Batista Dias.

Itajubá, 26 de novembro de 1996.

Prof. Carlos Daniel Ebinuma
1º Examinador - FEG

Prof. Manuel da Silva Valente de Almeida
2º Examinador - EFEI

Prof. Vilmar Arthur Schwarz
3º Examinador - EFEI

Prof. Genésio José Menon
4º Examinador - EFEI - (Orientador)



Ministério da Educação e do Desporto
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

ANEXO II

FOLHA DE JULGAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

Título da Dissertação: "Transferência de Calor por Condução em Corpos Bi e Tridimensionais em Regime Permanente e não Permanente Utilizando o Método de Elementos Finitos"

Autor: João Batista Dias

JULGAMENTO

Examinadores	Conceito	Rubrica
1º	A+	
2º	A+	
3º	A+	
4º	A+	

Resultado Médio: Conceito A+, ou seja, Aprovado
com distinção

Observações: O título fica alterado para: Aplicações do Método de Elementos Finitos ao Estudo da Transferência de Calor por Condução em Corpos Bi e Tridimensionais em Regime Permanente e Não Permanente.

Itajubá, 26 de novembro de 1996.

Prof. Carlos Daniel Ebinuma
1º Examinador - FEG

Prof. Manuel da Silva Valente de Almeida
2º Examinador - EFEI

Prof. Vilmar Arthur Schwarz
3º Examinador - EFEI

Prof. Genésio José Menon
4º Examinador - EFEI (Orientador)

DATA 04/06/1997

PROC.

PED. PPG

LIV.

RS Osasco

EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ
8200899



NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA