

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA**

Estimação Robusta de Estados Baseada no  
Monitoramento Remoto via PMU e SCADA  
– Solução Unificada no Plano Complexo –

**Eduardo Marcel Resende**

Itajubá, 29 de janeiro de 2022

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA**

**Eduardo Marcel Resende**

**Estimação Robusta de Estados Baseada no  
Monitoramento Remoto via PMU e SCADA  
– Solução Unificada no Plano Complexo –**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

**Área de Concentração: Métodos de Análise, Planejamento e Operação de Sistemas Elétricos**

**Orientador: Prof. Dr. Robson Celso Pires**

**Coorientador: Prof. Dr. Zulmar Soares Machado Junior**

**29 de janeiro de 2022**

**Itajubá**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA

Estimação Robusta de Estados Baseada no  
Monitoramento Remoto via PMU e SCADA  
– Solução Unificada no Plano Complexo –

Eduardo Marcel Resende

Dissertação aprovada por banca examinadora em  
30 de Novembro de 2021, conferindo ao autor o  
título de **Mestre em Ciências em Engenharia  
Elétrica.**

***Banca Examinadora:***

Prof. Dr. Robson Celso Pires  
Prof. Dr. Zulmar Soares Machado Junior  
Prof. Dr. Antonio José Alves Simões Costa  
Dr. Luiz Cláudio de Araújo Ferreira (ONS)

Itajubá  
2021

---

Eduardo Marcel Resende  
Estimação Robusta de Estados Baseada no Monitoramento Remoto via PMU e  
SCADA - Solução Unificada no Plano Complexo - / Eduardo Marcel Resende. –  
Itajubá, 29 de janeiro de 2022-  
100 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Robson Celso Pires

Dissertação (Mestrado)  
Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI  
Programa de pós-graduação em engenharia elétrica, 29 de janeiro de 2022.

1. Estimação de estados no plano complexo. 2. Medições híbridas. 3. Projeções estatísticas no plano complexo. I. Orientador Dr. Robson Celso Pires. II. Universidade Federal de Itajubá.

CDU 07:181:009.3

---

Eduardo Marcel Resende

**Estimação Robusta de Estados Baseada no  
Monitoramento Remoto via PMU e SCADA  
– Solução Unificada no Plano Complexo –**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Trabalho aprovado. Itajubá, 30 de Novembro de 2021:

---

**Prof. Dr. Robson Celso Pires**  
Orientador

---

**Prof. Dr. Zulmar Soares Machado  
Junior**  
Coorientador

---

**Prof. Dr. Antonio José Alves Simões  
Costa**

---

**Dr. Luiz Cláudio de Araújo Ferreira  
(ONS)**

Itajubá  
29 de janeiro de 2022

# Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Robson Pires pela oportunidade de trabalhar ao seu lado, pelo conhecimento agregado e pela paciência e empenho durante a orientação deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Zulmar Soares Machado Junior pelo grande auxílio durante a minha trajetória acadêmica.

Ao Prof. Dr. Antonio José Alves Simões Costa (UFSC) e ao Dr. Luiz Cláudio de Araújo Ferreira (ONS) por aceitarem compor a minha banca de defesa.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela bolsa de estudos e auxílio financeiro que possibilitaram minha dedicação em tempo integral e a elaboração deste trabalho.

À UNIFEI por fornecer toda a infraestrutura e o conhecimento técnico da minha formação, os quais foram essenciais pra realização deste trabalho.

Aos meus pais e meus irmãos, por sempre acreditarem e me incentivarem a seguir o caminho acadêmico.

*"A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo."  
(Albert Einstein)*

# Resumo

Este trabalho apresenta a implementação dos estimadores clássico (WLS) e robusto (SHGM) no domínio dos números complexos considerando o monitoramento remoto de medições híbridas, ou seja, via PMU e SCADA. Para isso, o cálculo de Wirtinger é a base matemática para tornar funções não analíticas (equações de fluxo de potência) em relação às variáveis complexas em funções multi-diferenciáveis para variáveis complexas e complexas conjugadas, o que torna possível a expansão em séries de Taylor. Assim, os algoritmos de estimação clássica (WLS) e robusta (SHGM) são derivados no plano complexo atentando-se também para o processamento de erros grosseiros. No estimador WLS no plano complexo, atesta-se a eficiência do método do maior resíduo normalizado na identificação e recuperação de medidas errôneas. Para o estimador robusto no plano complexo propõe-se uma pequena alteração no algoritmo tradicional de cálculo de projeções estatísticas objetivando o seu robustecimento contra pontos de alavancamentos ruins. O algoritmo de projeções estatísticas aplicado às matrizes Jacobianas derivadas nos plano real e complexo origina distinções na identificação e ponderação dos pontos de alavancamento. Além disso, esse trabalho apresenta um algoritmo eficiente que faz a análise de observabilidade algébrica dos sistemas teste, sendo evidenciadas as aplicações em MATLAB e as possíveis contribuições futuras de tais aplicações. O desempenho dos estimadores no domínio dos números complexos é avaliado comparando-o com os mesmos estimadores formulados no plano real. Os sistemas teste avaliados são IEEE-14, -30, -57, -118 e os equivalentes do SIN-340, -730 e -1916 barras. A análise de resultados obtidos demonstra a vantagem computacional do estimador no plano complexo em cenários de medições puramente reais, híbridas ou puramente fasoriais. Tal vantagem amplia-se à medida que o tamanho do sistema aumenta.

**Palavras-chaves:** Estimação de estados no plano complexo. Medições híbridas. Projeções estatísticas no plano complexo.



# Abstract

This work presents the implementation of classic (WLS) and robust (SHGM) estimators in the complex domain, considering remote monitoring of hybrid measurements via PMU and SCADA. For this, Wirtinger Calculus was the mathematical basis for turning non-analytical functions (power flow equations) concerning complex variables into multi-differentiated functions for complex and conjugate variables. Therefore, it enables expansion in the Taylor series. Thus, the classical (WLS) and robust (SHGM) estimation algorithms are derived in the complex domain, paying attention also to the processing of gross errors. In the classic complex estimator, the efficiency of the largest normalized residual test in identifying and recovering erroneous measurements is attested. For the robust complex estimator, a slight change in the former algorithm for calculating statistical projections is proposed for strengthening against bad leverage points. Projection statistics algorithm applied to a real- or a complex-valued Jacobian matrix provides different numbers and weightings assigned to leverage points. In addition, this work shows an efficient algorithm for analyzing the algebraic observability of the employed test systems, highlighting the applications in MATLAB and the potential contributions of such applications. The performance of complex-valued estimators was evaluated comparing with the same estimators built in the real plane. The test systems evaluated are IEEE-14, -30, -57, -118 and the SIN equivalents of 340, 730 and 1916 buses. Results show the computational advantages of the complex-valued estimator in scenarios of purely real, hybrid, or purely phasor measurements. Furthermore, the disparity between these numerical domains becomes more clear as the size of the system increases.

**Key-words:** Power system state estimator in complex plane. Hybrid Measurements. Projection Statistics in complex plane.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico de contornos da função real escalar de variável complexa [1] . . .	21
Figura 2 – Estrutura de esparsidade da matriz jacobiana formulada no plano complexo do sistema SIN-1916 . . . . .	33
Figura 3 – Sistema teste de 3 barras . . . . .	46
Figura 4 – Digrafo de medição $P - \delta$ do sistema teste de 3 barras. . . . .	52
Figura 5 – Digrafo de medição $Q - V$ do sistema teste de 3 barras. . . . .	53
Figura 6 – AGO $P - \delta$ do sistema teste de 3 barras . . . . .	57
Figura 7 – AGO $Q - V$ do sistema teste de 3 barras . . . . .	58
Figura 8 – Fluxograma do algoritmo de análise de observabilidade algébrico-topológico	59
Figura 9 – Digrafo de medição $P - \delta$ para o sistema IEEE-118 . . . . .	60
Figura 10 – Possível AGO $P - \delta$ para o sistema IEEE-118 . . . . .	60
Figura 11 – Digrafo de medição $Q - V$ para o sistema IEEE-118 . . . . .	61
Figura 12 – Possível AGO $Q - V$ para o sistema IEEE-118 . . . . .	61
Figura 13 – Diagrama unifilar do sistema teste de 5 barras [2] . . . . .	64
Figura 14 – Digrafo $P - \delta$ do sistema teste de 5 barras . . . . .	68
Figura 15 – Digrafo $Q - V$ do sistema teste de 5 barras . . . . .	68
Figura 16 – Possível AGO $P - \delta$ do sistema teste de 5 barras . . . . .	69
Figura 17 – Possível AGO $Q - V$ do sistema teste de 5 barras . . . . .	69
Figura 18 – Relação entre os tempos computacionais dos estimadores clássicos (WLS) formulados nos planos real e complexo - Tape fixo . . . . .	82
Figura 19 – Relação entre os tempos computacionais dos estimadores clássicos (WLS) formulados nos planos real e complexo - Tape variável . . . . .	83
Figura 20 – Relação entre os tempos computacionais dos estimadores robustos (SHGM) formulados nos planos real e complexo - Tape fixo . . . . .	86
Figura 21 – Relação entre os tempos computacionais dos estimadores robustos (SHGM) formulados nos planos real e complexo - Tape variável . . . . .	87

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Classificação e precisão das medições reais . . . . .	38
Tabela 2 – Classificação e precisão das medições complexas . . . . .	38
Tabela 3 – Escolha das medições para a criação da AGO $P - \delta$ do sistema de 3 barras . . . . .	57
Tabela 4 – Escolha das medições para a criação da AGO $Q - V$ do sistema de 3 barras . . . . .	57
Tabela 5 – Dados de linha do sistema teste de 5 barras . . . . .	64
Tabela 6 – Dados de barra do sistema teste de 5 barras . . . . .	64
Tabela 7 – Relatório de barras para o sistema teste de 5 barras . . . . .	65
Tabela 8 – Relatório de ramos para o sistema teste de 5 barras . . . . .	65
Tabela 9 – Valor real e medido para cada medição . . . . .	70
Tabela 10 – Processo iterativo do estimador clássico para o sistema de 5 barras . . . . .	71
Tabela 11 – Método do maior resíduo normalizado com recuperação de medidas para o sistema de 5 barras . . . . .	72
Tabela 12 – Processo iterativo do estimador clássico após a recuperação das medidas errôneas . . . . .	73
Tabela 13 – Resultado do algoritmo IRLS no plano complexo - Sistema teste de 5 barras . . . . .	74
Tabela 14 – Processo iterativo do estimador robusto para o sistema de 5 barras . . . . .	75
Tabela 15 – Identificação de pontos de alavancamento nos planos real e complexo para o sistema de 5 barras . . . . .	76
Tabela 16 – Processamento de erros grosseiros pelo algoritmo IRLS - Sistema teste de 5 barras . . . . .	78
Tabela 17 – Processo iterativo do estimador robusto com medidas errôneas para o sistema de 5 barras . . . . .	78
Tabela 18 – Desempenho dos estimadores clássicos em ambos os domínios - Tape Fixo . . . . .	79
Tabela 19 – Desempenho dos estimadores clássicos em ambos os domínios - Tape variável . . . . .	80
Tabela 20 – Desempenho dos estimadores robustos em ambos os domínios - Tape Fixo . . . . .	84
Tabela 21 – Desempenho dos estimadores robustos em ambos os domínios - Tape variável . . . . .	85

# Lista de abreviaturas e siglas

AGO	Árvore Geradora Observável
FACTS	<i>Flexible AC Transmission</i>
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
IRLS	<i>Iteratively Reweighted Least Squares</i>
LAV	<i>Least Absolute Value</i>
MUAG	Medidas Únicas para Árvore Geradora
OLTC	<i>On-Load Tap Changer</i>
PA	Ponto de Alavancamento
PMU	<i>Phasor Measurement Unit</i>
SCADA	<i>Supervisory Control and Data Acquisition</i>
SHGM	<i>Schweppe-type Huber Generalized Maximum-likelihood</i>
SIMD	<i>Single-Instruction Multiple-Data</i>
SIN	Sistema Interligado Nacional
WLS	<i>Weighted Least Squares</i>

# Lista de símbolos

$B_k^{sh}$	Susceptância <i>shunt</i> alocada na barra $k$
$P_k$	Injeção de potência ativa na barra $k$
$Q_k$	Injeção de potência reativa na barra $k$
$S_{km}$	Fluxo de potência aparente no ramo $k - m$
$S_k$	Injeção de potência aparente na barra $k$
$V_k$	Tensão fasorial na barra $k$
<b>G</b>	Matriz ganho no sistema de coordenadas conjugadas
<b>H</b>	Matriz Jacobiana no sistema de coordenadas conjugadas
<b>Q<sub>v</sub></b>	Matriz de pesos variáveis para o estimador robusto
<b>Ω<sub>c</sub></b>	Matriz hermitiana positiva definida de covariância dos erros de medição
$( \cdot )^*$	Denota o complexo conjugado
$( \cdot )^H$	Denota o conjugado transposto, i.e., o operador Hermitiano
$( \cdot )^T$	Denota o transposto
$( \cdot )^\dagger$	Denota a pseudo-inversa de Moore-Penrose
$\  \cdot \ _\infty$	Norma infinita
$ V_k $	Magnitude de tensão na barra $k$
$\mathcal{J}$	Função custo real em função de variáveis complexas
$( \cdot )$	Denota um vetor
$\underline{\omega}_c$	Vetor de erros randômicos das medições complexas
$\underline{h}_c(\underline{x}_c)$	Vetor de funções não-lineares que relacionam $\underline{z}_c$ à $\underline{x}_c$
$\underline{x}_c$	Vetor de variáveis de estado no sistema de coordenadas conjugadas
$\underline{z}_c$	Vetor de medições no sistema de coordenadas conjugadas
$a_{km}$	Posição do tape no ramo $k - m$
$b_{km}^{sh}$	Metade da susceptância <i>shunt</i> do ramo $k - m$
$i_{km}$	Corrente fasorial no ramo $k - m$
$t_{km}$	Fluxo de potência ativa no ramo $k - m$
$u_{km}$	Fluxo de potência reativa no ramo $k - m$
$x$	Variável de estado complexa
$y_{km}$	Admitância do ramo $k - m$
$z$	Medida complexa

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
1.1	Considerações Iniciais	16
1.2	Organização do Trabalho	18
<b>2</b>	<b>REVISÃO TEÓRICA</b>	<b>19</b>
2.1	Diferenciabilidade de Funções Complexas	19
2.2	Cálculo de Wirtinger ou <i>CR-Calculus</i>	20
<b>3</b>	<b>ESTIMAÇÃO DE ESTADOS COM MEDIÇÕES HÍBRIDAS NO PLANO COMPLEXO</b>	<b>23</b>
<b>3.1</b>	<b>Cálculo de Wirtinger Aplicado às Equações de Medições Híbridas</b>	<b>23</b>
3.1.1	Fluxo de Potência Mensurável	23
3.1.2	Injeção de Potência Mensurável	26
3.1.3	Medições de Tensão	27
3.1.4	Medições de Corrente	28
3.1.5	Pseudo-medição do Ângulo de Referência	29
3.1.6	Pseudo-medições de Tape	29
<b>3.2</b>	<b>Estimador de Estados WLS Formulado no Plano Complexo</b>	<b>30</b>
3.2.1	Plano de Medição Híbrido no Estimador de Estados Formulado no Plano Complexo	35
<b>3.3</b>	<b>Estimador de Estados SHGM Formulado no Plano Complexo</b>	<b>38</b>
<b>3.4</b>	<b>Processamento de Erros Grosseiros</b>	<b>41</b>
3.4.1	Deteção, Identificação e Recuperação de Medidas no Estimador WLS	41
3.4.2	Projeções Estatísticas no Domínio dos Números Complexos	42
<b>4</b>	<b>ANÁLISE DE OBSERVABILIDADE ALGÉBRICA</b>	<b>45</b>
<b>4.1</b>	<b>Considerações Iniciais</b>	<b>45</b>
4.1.1	Algoritmo - Crainic	45
4.1.2	Criação de Planos de Medição Redundantes e dos Digrafos de Medição	51
4.1.3	Algoritmo - Construção das AGOs	56
4.1.4	Resumo do Algoritmo de Observabilidade Algébrico-Topológico	58
<b>4.2</b>	<b>Conclusões Parciais</b>	<b>62</b>
<b>5</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>63</b>
<b>5.1</b>	<b>Estudo de caso: Sistema de 5 barras</b>	<b>63</b>
5.1.1	Pré-processamento dos Dados	63

5.1.2	Estimação Clássica de Estados - WLS . . . . .	70
5.1.2.1	Processamento de Erros Grosseiros - Método do Maior Resíduo Normalizado . . . . .	71
5.1.3	Estimação Robusta de Estados - SHGM . . . . .	73
5.1.4	Pontos de Alavancamento - Sistema de 5 barras . . . . .	75
5.1.5	Processamento de Erros Grosseiros - SHGM . . . . .	77
<b>5.2</b>	<b>Desempenho dos Estimadores Clássico e Robusto no Plano Real e Complexo . . . . .</b>	<b>79</b>
5.2.1	Desempenho do Estimador Clássico . . . . .	79
5.2.2	Desempenho do Estimador Robusto . . . . .	83
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES GERAIS . . . . .</b>	<b>88</b>
<b>6.1</b>	<b>Trabalhos Futuros . . . . .</b>	<b>89</b>
<b>6.2</b>	<b>Artigo Submetido . . . . .</b>	<b>89</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>91</b>
	 <b>APÊNDICES . . . . .</b>	 <b>96</b>
	<b>APÊNDICE A – PARTIÇÕES DA MATRIZ JACOBIANA A CADA ITERAÇÃO - ESTIMADOR WLS . . . . .</b>	<b>97</b>

# 1 Introdução

## 1.1 Considerações Iniciais

A engenharia e a ciência aplicada são áreas que têm grande dependência de análises de sinais e variáveis complexas para modelar variáveis reais ou até mesmo simular fenômenos físicos reais [3]. Há muito tempo o setor de energia trabalha com aplicativos de análise de redes, e.g., aplicativos de fluxo de potência e estimação de estados, construído no domínio dos números reais. Entretanto, tal procedimento não é natural uma vez que a solução de redes em corrente alternada ocorre no domínio da frequência, ou seja, via sistemas de fasores de tensão e corrente introduzidos por Steinmetz [4].

A crescente inclusão de medições fasoriais na rede elétrica implica na necessidade de aprimoramento dos estimadores de estados para lidar com medições híbridas, i.e., medições provenientes do sistema SCADA (*Supervisory Control and Data Acquisition*) e de PMU (*Phasor Measurement Unit*). Na estimação de estados híbrida convencional, um aspecto que requer atenção é a inclusão de medições fasoriais de corrente, sendo necessária abordagens não-invasivas ou diretas [5, 6]. As técnicas não-invasivas ou multi-estágios se baseiam em um pós-processamento de medições fasoriais para melhoria da estimação de estados tradicional que utiliza medições do sistema SCADA. Entretanto, essas técnicas não-invasivas exigem que a observabilidade seja garantida pelas medições do sistema SCADA [7, 8, 9, 10, 11]. Já as técnicas diretas ou sincronizadas consideram as medições do sistema SCADA e de PMUs em uma única estrutura de medição, sendo a observabilidade garantida por ambos os sistemas de medição [12, 13, 14, 15].

Uma outra preocupação relevante neste tipo de estimação é que há diferentes taxas de atualização entre medições de PMUs e do sistema SCADA, o que leva a medições não coincidentes. Na prática, medições do sistema SCADA são obtidas a cada 5 segundos enquanto que as PMUs geram, e.g., 60 medições por segundo. Assim, para cada estimação computada, há um grande número de medições fasoriais para um mesmo conjunto de medições do sistema SCADA [5, 6]. Uma forma de contornar essa disparidade entre as taxas de amostragem de PMUs e do sistema SCADA seria pelo uso de *bufferings* para identificar o conjunto de medidas fasoriais que será utilizado no estimador híbrido [16, 17, 18]. Também existem estudos com abordagens alternativas considerando a reconstrução da estimação de estados para diferentes amostragens de PMUs [19, 20, 21].

Nesse cenário, o estimador de estados clássico WLS (*Weighted Least Squares*) formulado no domínio dos complexos baseado no Cálculo de Wirtinger [22, 23] surge como uma alternativa eficaz para estimação híbrida devido a sua facilidade de implementação



e modelagem das medições híbridas, inclusive de medições fasoriais de corrente. Esse estimador também se destaca devido a um desempenho computacional superior, quando comparado a sua contraparte formulada no plano real [5]. Tal estimador tem sido estudado para aplicações em sistemas de distribuição [24] e para lidar com medições de injeção nula [6]. Neste último, o processamento clássico de erros grosseiros, baseado no método do maior resíduo normalizado, apresenta boa eficácia quando estendido ao domínio dos números complexos.

Por outro lado, a estimação robusta, i.e., o estimador *SHGM (Schweppe-type Huber Generalized Maximum-likelihood)* ainda não foi desenvolvido nesse novo domínio de variáveis, sendo estudado única e exclusivamente em diversas aplicações no plano real [2, 25, 26]. Para esse novo desenvolvimento, é necessário avaliar as projeções estatísticas [27] para a correta identificação dos pontos de alavancamento ruins nos estimadores formulados no plano complexo.

Do ponto de vista computacional, a utilização do Cálculo de Wirtinger força a Jacobiana do problema de estimação de estados formulado no plano complexo a duplicar de tamanho. Logo, seria contra-intuitivo pensar em um desempenho computacional superior do estimador formulado no corpo dos complexos em relação a sua contraparte no domínio dos números reais. Entretanto, por meio do Cálculo de Wirtinger, pode-se inferir diversas relações entre as partições da matriz Jacobiana e, além disso, o modelo de medições híbridas no domínio dos complexos também é bastante simplificado e flexível, uma vez que uma medição puramente real é um caso particular de uma medição complexa [5, 6, 24]. Todos esses fatores implicam em reduzir drasticamente o custo computacional de tal metodologia. Somado a isso, a abordagem no domínio dos complexos tem como vantagem a implementação em processadores mais modernos que suportam operações do tipo *SIMD (Single-Instruction Multiple-Data)* [28].

Assim, a principal contribuição deste trabalho é apresentar a formulação do estimador robusto (SHGM) no plano complexo, demonstrando-se ainda um comparativo entre as projeções estatísticas calculadas em ambos os domínios para o robustecimento do estimador. Para isso, utilizou-se de sistemas teste do IEEE-14, -30, -57 e -118, além de sistemas equivalentes do SIN (Sistema Interligado Nacional) de 340, 730 e 1916 barras. Além da eficácia do estimador para o processamento de erros grosseiros, o desempenho computacional mostra-se superior em relação ao estimador formulado no domínio de números reais. Como contribuição secundária do trabalho, apresenta-se um algoritmo eficiente para análise da observabilidade algébrica e topológica dos sistemas teste com implementação em MATLAB.

## 1.2 Organização do Trabalho

No Capítulo 2 apresenta-se a fundamentação teórica baseada no Cálculo de Wirtinger. Em sequência, no Capítulo 3 são mostradas as equações referentes às medições híbridas de fluxo e injeção de potência, tensão e pseudo-medições além das respectivas derivadas no domínio dos números complexos. Além disso, tal capítulo também abrange os modelos matemáticos para a estimação clássica (WLS) e robusta (SHGM) no plano complexo. O Capítulo 4 demonstra a operacionalização do algoritmo utilizado para análise de observabilidade algébrica e topológica dos sistemas avaliados. Já o Capítulo 5 apresenta os resultados numéricos do estimador clássico e o robusto no plano complexo, inicialmente para um sistema de 5 barras e posteriormente para os sistemas teste IEEE-14, -30, -57, -118 e os equivalentes do SIN de 340, 730 e 1916 barras. Por fim, o Capítulo 6 expressa as conclusões mais relevantes do trabalho.

## 2 Revisão teórica

Neste capítulo apresenta-se inicialmente a fundamentação para a diferenciabilidade de funções complexas. Em sequência, demonstra-se a formulação do Cálculo de Wirtinger, uma ferramenta bastante útil para tornar funções não-analíticas em relação a variáveis complexas em funções analíticas no sistema de coordenadas complexo-conjugado.

### 2.1 Diferenciabilidade de Funções Complexas

Conforme descrito em [29], considere uma variável complexa  $x = a + jb$  e sua respectiva função  $f(x)$  em (2.1). Os termos  $u(a, b)$  e  $v(a, b)$  representam funções reais,  $u$  e  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$f(x) = u(a, b) + j \cdot v(a, b) \quad (2.1)$$

Funções desse tipo (2.1) geralmente são complexas porém podem ser reais em alguns casos, como por exemplo a função custo de problemas de otimização  $\mathcal{J}(|e^2|)$ . Da definição de diferenciabilidade de funções de variáveis complexas tem-se o limite com  $\Delta x$  tendendo a 0 no plano complexo, independentemente da direção, conforme (2.2).

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.2)$$

As condições necessárias e suficientes para garantir a diferenciabilidade de  $f(x)$  são as equações de Cauchy-Riemann, isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial v}{\partial b}, \quad \frac{\partial v}{\partial a} = -\frac{\partial u}{\partial b}. \quad (2.3)$$

Se as funções  $u(a, b)$  e  $v(a, b)$  são contínuas por todo seu domínio, então as derivadas parciais dessas funções também serão. Se isso ocorrer, infere-se que  $f(x)$  é uma função analítica ou holomorfa [29, 22]. Para ilustrar tais conceitos, considere a função complexa a seguir assumindo  $x = a + jb$ .

$$f(x) = x^2 - 4 = \underbrace{a^2 - b^2 - 4}_u + j \cdot \underbrace{2ab}_v \quad (2.4)$$

Considerando as premissas de Cauchy-Riemann para a diferenciabilidade de funções, tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial v}{\partial b} = 2a, \quad \frac{\partial v}{\partial a} = -\frac{\partial u}{\partial b} = 2b. \quad (2.5)$$

Assim, verificando-se que as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas, conclui-se que  $f(x) = x^2 - 4$  é uma função analítica ou holomorfa.

## 2.2 Cálculo de Wirtinger ou *CR-Calculus*

O artifício conhecido como Cálculo de Wirtinger ou *CR-Calculus* é utilizado para prover a diferenciabilidade de funções complexas não analíticas conforme proposto por Wilhelm Wirtinger em 1927 [23]. Assim sendo, considere a função descrita em (2.1) e as relações descritas a seguir

$$a = \frac{(x + x^*)}{2}, \quad (2.6)$$

$$b = j \frac{(x^* - x)}{2}, \quad (2.7)$$

onde  $x$  e  $x^*$  representam uma variável complexa e complexa-conjugada, respectivamente.

Considerando  $x_c$  uma variável complexa, a idéia chave do Cálculo de Wirtinger é que se  $f(x_c) = f(a, b) = f(x, x^*)$  é analítica no espaço que abrange  $a$  e  $b$  então também é analítica em relação a  $x$  para  $x^*$  constante, e de forma análoga, será analítica para  $x^*$  considerando  $x$  constante [5]. Além disso, vale ressaltar que tal artifício é aplicável se funções como (2.1) forem diferenciáveis em relação a  $a$  e  $b$ . Dessa forma, tem-se as equações

$$\frac{\partial f(x_c)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, x^*)}{\partial x} \Big|_{x^*=Const} = \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial a} - j \frac{\partial f}{\partial b} \right), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial f(x_c)}{\partial x^*} = \frac{\partial f(x, x^*)}{\partial x^*} \Big|_{x=Const} = \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x^*} + \frac{\partial f}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial a} + j \frac{\partial f}{\partial b} \right). \quad (2.9)$$

Tal artifício habilitaria a expansão em séries de Taylor de funções inicialmente

não-holomorfas. Assim, o termo de primeira ordem da expansão em séries de Taylor será

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, x^* + \Delta x^*) &\approx f(x, x^*) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial x^*} \Delta x^* \\ &\approx f(x, x^*) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta x^* \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Conforme [1] uma boa exemplificação é a função real referente ao quadrado da distância Euclidiana da origem expressa na equação (2.11), considerando a variável complexa  $x = a + jb$ .

$$f(x_c) = f(x, x^*) = x^*x = \|x\|^2 = \underbrace{a^2 + b^2}_v + j \cdot \underbrace{(ab - ab)}_{v=0} \quad (2.11)$$

Como  $v = 0$ , os critérios de diferenciabilidade de Cauchy-Riemann (2.3) não são satisfeitos e, portanto, trata-se de uma função não-analítica ou não-holomorfa.

Para romper este obstáculo, aplica-se o Cálculo de Wirtinger por meio das equações (2.8) e (2.9) gerando:

$$\frac{\partial f(x_c)}{\partial x} = x^*, \quad \frac{\partial f(x_c)}{\partial x^*} = x. \quad (2.12)$$

Assim, a interpretação geométrica deste fato é expressa na Fig. 1.

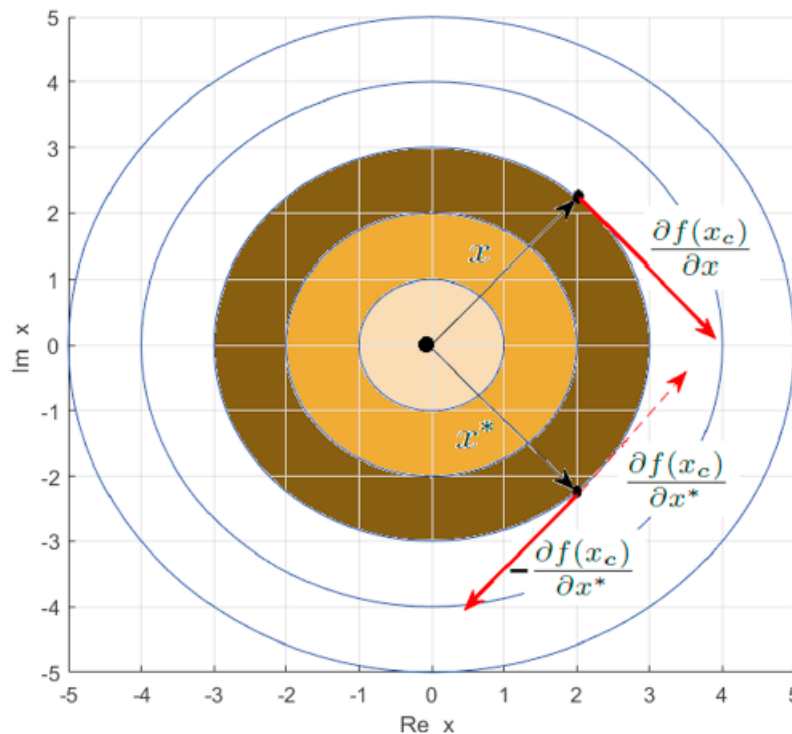


Figura 1 – Gráfico de contornos da função real escalar de variável complexa [1]

A função referente ao quadrado da distância Euclidiana da origem expressa por  $f(x_c) = a^2 + b^2$  é equivalente a equação de uma circunferência centrada na origem do plano complexo, ou seja, o raio de cada circunferência (contorno) equivale à  $\sqrt{f(x_c)}$ . Se existisse um terceiro eixo perpendicular aos eixos do plano complexo e fixado à origem, a figura formada seria a de um parabolóide [30].

É importante notar também que a direção de máxima taxa de variação é dado pelo gradiente conjugado expresso na equação (2.9). A seta tracejada (direção positiva) aponta para o máximo da função enquanto que a direção contrária aponta para o mínimo da função custo, geralmente a minimização de erros [1, 30].

Estendendo tais conceitos ao cenário multi-variável são válidas as expressões (2.13-2.15). Nas equações mostradas, as variáveis sublinhadas indicam vetores.

$$\nabla_{\underline{x}} f(\underline{x}, \underline{x}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial a_1} - j \frac{\partial f}{\partial b_1} \right) \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial a_n} - j \frac{\partial f}{\partial b_n} \right) \end{bmatrix}^T \quad (2.13)$$

$$\nabla_{\underline{x}^*} f(\underline{x}, \underline{x}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1^*} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n^*} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial a_1} + j \frac{\partial f}{\partial b_1} \right) \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial a_n} + j \frac{\partial f}{\partial b_n} \right) \end{bmatrix}^T \quad (2.14)$$

$$f(\underline{x} + \Delta \underline{x}, \underline{x}^* + \Delta \underline{x}^*) \approx f(\underline{x}, \underline{x}^*) + \begin{bmatrix} \nabla_{\underline{x}} f & \nabla_{\underline{x}^*} f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{x} \\ \Delta \underline{x}^* \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

## 3 Estimação de Estados com Medições Híbridadas no Plano Complexo

Neste capítulo apresentam-se inicialmente as equações referentes as medições híbridadas considerando o cálculo de Wirtinger introduzido no capítulo anterior. Tais equações foram baseadas em [5]. Em sequência, as formulações dos estimadores de estados WLS e SHGM no plano complexo são evidenciadas sendo baseadas em [29], [2, 27], respectivamente. Por fim, é apresentada a formulação utilizada para processamento de erros grosseiros, tanto para a abordagem clássica quanto para o estimador robusto.

### 3.1 Cálculo de Wirtinger Aplicado às Equações de Medições Híbridadas

#### 3.1.1 Fluxo de Potência Mensurável

Os fluxos de potência nos ramos podem ser expressos pelas equações (3.1-3.4). O modelo genérico descrito é válido para linhas de transmissão e transformadores com tape em fase e com defasamento [30, 1].

$$S_{km} = V_k \left( \frac{y_{km}^*}{a_{km} a_{km}^*} - j b_{km}^{sh} \right) V_k^* - V_k \frac{y_{km}^*}{a_{km}} V_m^*, \quad (3.1)$$

$$S_{mk} = V_m \left( y_{km}^* - j b_{km}^{sh} \right) V_m^* - V_m \frac{y_{km}^*}{a_{km}^*} V_k^*, \quad (3.2)$$

$$S_{km}^* = V_k^* \left( \frac{y_{km}}{a_{km}^* a_{km}} + j b_{km}^{sh} \right) V_k - V_k^* \frac{y_{km}}{a_{km}^*} V_m, \quad (3.3)$$

$$S_{mk}^* = V_m^* \left( y_{km} + j b_{km}^{sh} \right) V_m - V_m^* \frac{y_{km}}{a_{km}} V_k. \quad (3.4)$$

onde  $a_{km}$  representa a posição do tape de transformador no ramo  $k - m$ .

A relação de espiras  $a e^{jw} : 1$  é considerada para transformadores de tape fora da posição nominal, ou seja, leva-se em consideração também a defasagem angular. Adota-se transformadores ideais em série com sua admitância ou impedância [31].

Assim, com base na equação (3.1) tem-se as seguintes derivadas

$$\left. \frac{\partial S_{km}}{\partial V_k} \right|_{V_k^*=Const} = \left( \frac{y_{km}^*}{a_{km} a_{km}^*} - j b_{km}^{sh} \right) V_k^* - \frac{y_{km}^*}{a_{km}} V_m^*, \quad (3.5)$$

$$\left. \frac{\partial S_{km}}{\partial V_k^*} \right|_{V_k=Const} = \left( \frac{y_{km}^*}{a_{km} a_{km}^*} - j b_{km}^{sh} \right) V_k, \quad (3.6)$$

$$\left. \frac{\partial S_{km}}{\partial V_m} \right|_{V_m^*=Const} = 0 \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{\partial S_{km}}{\partial V_m^*} \right|_{V_m=Const} = -V_k \frac{y_{km}^*}{a_{km}}, \quad (3.8)$$

$$\left. \frac{\partial S_{km}}{\partial a_{km}} \right|_{a_{km}^*=Const} = \frac{y_{km}^*}{a_{km}^2} \left( \frac{-V_k V_k^*}{a_{km}^*} + V_k V_m^* \right), \quad (3.9)$$

$$\left. \frac{\partial S_{km}}{\partial a_{km}^*} \right|_{a_{km}=Const} = -V_k V_k^* \left( \frac{y_{km}^*}{a_{km} (a_{km}^*)^2} \right), \quad (3.10)$$

em diante, para a equação (3.2) tem-se

$$\left. \frac{\partial S_{mk}}{\partial V_k} \right|_{V_k^*=Const} = 0, \quad (3.11)$$

$$\left. \frac{\partial S_{mk}}{\partial V_k^*} \right|_{V_k=Const} = -V_m \frac{y_{km}^*}{a_{km}^*}, \quad (3.12)$$

$$\left. \frac{\partial S_{mk}}{\partial V_m} \right|_{V_m^*=Const} = \left( y_{km}^* - j b_{km}^{sh} \right) V_m^* - \frac{y_{km}^*}{a_{km}^*} V_k^*, \quad (3.13)$$

$$\left. \frac{\partial S_{mk}}{\partial V_m^*} \right|_{V_m=Const} = V_m \left( y_{km}^* - j b_{km}^{sh} \right), \quad (3.14)$$

$$\left. \frac{\partial S_{mk}}{\partial a_{km}} \right|_{a_{km}^*=Const} = 0, \quad (3.15)$$



$$\left. \frac{\partial S_{mk}}{\partial a_{km}^*} \right|_{a_{km}=Const} = V_m V_k^* \left( \frac{y_{km}^*}{(a_{km}^*)^2} \right), \quad (3.16)$$

já por (3.3) tem-se

$$\left. \frac{\partial S_{km}^*}{\partial V_k} \right|_{V_k^*=Const} = \left( \frac{y_{km}}{a_{km}^* a_{km}} + j b_{km}^{sh} \right) V_k^* = \left( \frac{\partial S_{km}}{\partial V_k^*} \right)^*, \quad (3.17)$$

$$\left. \frac{\partial S_{km}^*}{\partial V_k^*} \right|_{V_k=Const} = \left( \frac{y_{km}}{a_{km}^* a_{km}} + j b_{km}^{sh} \right) V_k - \frac{y_{km}}{a_{km}^*} V_m = \left( \frac{\partial S_{km}}{\partial V_k} \right)^*, \quad (3.18)$$

$$\left. \frac{\partial S_{km}^*}{\partial V_m} \right|_{V_m^*=Const} = -V_k^* \frac{y_{km}}{a_{km}^*} = \left( \frac{\partial S_{km}}{\partial V_m^*} \right)^*, \quad (3.19)$$

$$\left. \frac{\partial S_{km}^*}{\partial V_m^*} \right|_{V_m=Const} = 0 = \left( \frac{\partial S_{km}}{\partial V_m} \right)^*, \quad (3.20)$$

$$\left. \frac{\partial S_{km}^*}{\partial a_{km}^*} \right|_{a_{km}^*=Const} = -V_k^* V_k \left( \frac{y_{km}}{a_{km}^* (a_{km})^2} \right) = \left( \frac{\partial S_{km}}{\partial a_{km}^*} \right)^*, \quad (3.21)$$

$$\left. \frac{\partial S_{km}^*}{\partial a_{km}^*} \right|_{a_{km}=Const} = \frac{y_{km}}{(a_{km}^*)^2} \left( \frac{-V_k^* V_k}{a_{km}} + V_k^* V_m \right) = \left( \frac{\partial S_{km}}{\partial a_{km}} \right)^*, \quad (3.22)$$

e finalmente por (3.4) tem-se

$$\left. \frac{\partial S_{mk}^*}{\partial V_k} \right|_{V_k^*=Const} = -V_m^* \frac{y_{km}}{a_{km}} = \left( \frac{\partial S_{mk}}{\partial V_k^*} \right)^*, \quad (3.23)$$

$$\left. \frac{\partial S_{mk}^*}{\partial V_k^*} \right|_{V_k=Const} = 0 = \left( \frac{\partial S_{mk}}{\partial V_k} \right)^*, \quad (3.24)$$

$$\left. \frac{\partial S_{mk}^*}{\partial V_m} \right|_{V_m^*=Const} = V_m^* (y_{km} + j b_{km}^{sh}) = \left( \frac{\partial S_{mk}}{\partial V_m^*} \right)^*, \quad (3.25)$$

$$\left. \frac{\partial S_{mk}^*}{\partial V_m^*} \right|_{V_m=Const} = (y_{km} + j b_{km}^{sh}) V_m - \frac{y_{km}}{a_{km}} V_k = \left( \frac{\partial S_{mk}}{\partial V_m} \right)^*, \quad (3.26)$$

$$\left. \frac{\partial S_{mk}^*}{\partial a_{km}} \right|_{a_{km}^* = Const} = V_m^* V_k \left( \frac{y_{km}}{(a_{km})^2} \right) = \left( \frac{\partial S_{mk}}{\partial a_{km}} \right)^*, \quad (3.27)$$

$$\left. \frac{\partial S_{mk}^*}{\partial a_{km}^*} \right|_{a_{km} = Const} = 0 = \left( \frac{\partial S_{mk}}{\partial a_{km}^*} \right)^*. \quad (3.28)$$

As equações dos fluxos mensuráveis que são provenientes do sistema SCADA podem ser expressas por:

$$t_{km} = \frac{1}{2} (S_{km} + S_{km}^*), \quad (3.29)$$

$$u_{km} = \frac{i}{2} (S_{km}^* - S_{km}). \quad (3.30)$$

Dessa forma as derivadas dos fluxos ativos e reativos mensuráveis são generalizadas nas equações (3.31) e (3.32). O símbolo  $\bullet$  indica qualquer variável de estado, ou seja, as tensões fasoriais em cada nó da rede e a posição dos tapes de transformadores. Tais variáveis são utilizadas na forma complexa e conjugada.

$$\frac{\partial t_{km}}{\partial \bullet} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_{km}}{\partial \bullet} + \frac{\partial S_{km}^*}{\partial \bullet} \right), \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial u_{km}}{\partial \bullet} = \frac{i}{2} \left( \frac{\partial S_{km}^*}{\partial \bullet} - \frac{\partial S_{km}}{\partial \bullet} \right). \quad (3.32)$$

### 3.1.2 Injeção de Potência Mensurável

Sabe-se que a injeção de potência em determinada barra  $k$  é a soma dos fluxos incidentes nessa barra. Dessa forma tem-se a equação (3.33).

$$S_k = S_k^{sh} + \sum_{m=1, m \neq k}^n S_{km} \quad (3.33)$$

Sendo  $S_k^{sh}$  expresso como:

$$S_k^{sh} = i V_k V_k^* B_k^{sh}. \quad (3.34)$$

Assim, os elementos da jacobiana referentes às quantidades mensuráveis de injeção de potência complexa são da forma

$$\frac{\partial S_k}{\partial \bullet} = \frac{\partial S_k^{sh}}{\partial \bullet} + \sum_{m=1, m \neq k}^n \frac{\partial S_{km}}{\partial \bullet}, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial S_k^*}{\partial \bullet} = \frac{\partial (S_k^{sh})^*}{\partial \bullet} + \sum_{m=1, m \neq k}^n \frac{\partial S_{km}^*}{\partial \bullet}. \quad (3.36)$$

Analogamente às equações (3.31) e (3.32), tem-se as derivadas das injeção de potência ativa e reativa que são mensuráveis na k-ésima barra

$$\frac{\partial P_k}{\partial \bullet} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_k}{\partial \bullet} + \frac{\partial S_k^*}{\partial \bullet} \right), \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial \bullet} = \frac{i}{2} \left( \frac{\partial S_k^*}{\partial \bullet} - \frac{\partial S_k}{\partial \bullet} \right). \quad (3.38)$$

### 3.1.3 Medições de Tensão

As medições fasoriais de tensão que são oriundas de PMUs são representadas na jacobiana através das equações

$$\frac{\partial V_k}{\partial V_k} = 1, \quad \frac{\partial V_k^*}{\partial V_k^*} = 1. \quad (3.39)$$

Já as medições de magnitude de tensão provenientes do sistema SCADA podem ser expressas como sendo

$$|V_k| = \sqrt{V_k V_k^*}. \quad (3.40)$$

Assim, os elementos da jacobiana resultam:

$$\left. \frac{\partial |V_k|}{\partial V_k} \right|_{V_k^* = Const} = 0.5 \frac{V_k^*}{\sqrt{V_k V_k^*}}, \quad (3.41)$$

$$\left. \frac{\partial |V_k|}{\partial V_k^*} \right|_{V_k = Const} = 0.5 \frac{V_k}{\sqrt{V_k V_k^*}}. \quad (3.42)$$

### 3.1.4 Medições de Corrente

As medições fasoriais de corrente nos ramos oriundas de PMUs são expressas por:

$$i_{km} = \left( \frac{S_{km}}{V_k} \right)^* = \frac{S_{km}^*}{V_k^*} = \left( \frac{y_{km}}{a_{km}^* a_{km}} + j b_{km}^{sh} \right) V_k - \frac{y_{km}}{a_{km}^*} V_m, \quad (3.43)$$

$$i_{mk} = \left( \frac{S_{mk}}{V_m} \right)^* = \frac{S_{mk}^*}{V_m^*} = \left( y_{km} + j b_{km}^{sh} \right) V_m - \frac{y_{km}}{a_{km}} V_k, \quad (3.44)$$

$$i_{km}^* = \frac{S_{km}}{V_k} = \left( \frac{y_{km}^*}{a_{km} a_{km}^*} - j b_{km}^{sh} \right) V_k^* - \frac{y_{km}^*}{a_{km}} V_m^*, \quad (3.45)$$

$$i_{mk}^* = \frac{S_{mk}}{V_m} = \left( y_{km}^* - j b_{km}^{sh} \right) V_m^* - \frac{y_{km}^*}{a_{km}^*} V_k^*. \quad (3.46)$$

As equações (3.43)-(3.46) são idênticas às equações (3.18), (3.26), (3.5) e (3.13), respectivamente. Por se tratar de um subproduto das equações já mostradas, as derivadas serão análogas as expressões da subseção 3.1.1. As equações (3.43) a (3.46) são da forma  $f = g/h$ , sendo  $f$ ,  $g$  e  $h$  funções dependentes de variáveis de estado e, portanto, pode-se ainda utilizar a regra do quociente para derivação, chegando-se aos elementos da matriz jacobiana da forma:

$$\frac{\partial i_{km}}{\partial \bullet} = \frac{\frac{\partial S_{km}^*}{\partial \bullet} \cdot V_k^* - S_{km}^* \cdot \frac{\partial V_k^*}{\partial \bullet}}{(V_k^*)^2} \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial i_{mk}}{\partial \bullet} = \frac{\frac{\partial S_{mk}^*}{\partial \bullet} \cdot V_m^* - S_{mk}^* \cdot \frac{\partial V_m^*}{\partial \bullet}}{(V_m^*)^2} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial i_{km}^*}{\partial \bullet} = \frac{\frac{\partial S_{km}}{\partial \bullet} \cdot V_k - S_{km} \cdot \frac{\partial V_k}{\partial \bullet}}{(V_k)^2} \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial i_{mk}^*}{\partial \bullet} = \frac{\frac{\partial S_{mk}}{\partial \bullet} \cdot V_m - S_{mk} \cdot \frac{\partial V_m}{\partial \bullet}}{(V_m)^2} \quad (3.50)$$

Já as magnitudes de correntes mensuráveis podem ser expressas por

$$|i_{km}| = \sqrt{i_{km}i_{km}^*}, \quad (3.51)$$

$$|i_{mk}| = \sqrt{i_{mk}i_{mk}^*}. \quad (3.52)$$

Assim, aplicando a regra da cadeia, os elementos da jacobiana terão a forma geral:

$$\left. \frac{\partial |i_{km}|}{\partial \bullet} \right|_{i_{km}^* = Const} = 0.5 \cdot \sqrt{\frac{i_{km}^*}{i_{km}}} \cdot \frac{\partial i_{km}}{\partial \bullet} = 0.5 \cdot (1 \angle \theta_{km}) \cdot \frac{\partial i_{km}}{\partial \bullet}, \quad (3.53)$$

$$\left. \frac{\partial |i_{mk}|}{\partial \bullet} \right|_{i_{mk}^* = Const} = 0.5 \cdot \sqrt{\frac{i_{mk}^*}{i_{mk}}} \cdot \frac{\partial i_{mk}}{\partial \bullet} = 0.5 \cdot (1 \angle \theta_{mk}) \cdot \frac{\partial i_{mk}}{\partial \bullet}, \quad (3.54)$$

onde  $\theta_{km}$  e  $\theta_{mk}$  representam os ângulos dos fasores  $i_{km}$  e  $i_{mk}$ , respectivamente.

### 3.1.5 Pseudo-medição do Ângulo de Referência

No problema de estimação de estados não-linear é necessária uma referência angular. Essa referência pode ser obtida zerando-se a parte imaginária do fasor de tensão correspondente ( $V_s$ ), de acordo com (3.55).

$$V_s^{im} = \frac{i}{2} (V_s^* - V_s) = 0 \quad (3.55)$$

Os termos da matriz jacobiana serão da forma

$$\left. \frac{\partial V_s^{im}}{\partial V_s} \right|_{V_s^* = Const} = -i \ 0.5, \quad (3.56)$$

$$\left. \frac{\partial V_s^{im}}{\partial V_s^*} \right|_{V_s = Const} = i \ 0.5. \quad (3.57)$$

### 3.1.6 Pseudo-medições de Tape

Para a estimação de tapes de transformadores é necessária a criação de pseudo-medições com os valores nominais dos tapes [2]. Dessa forma, considerando o modelo genérico de tape como uma variável complexa, os termos da matriz de observação referentes a essas pseudo-medições de tape são:

$$\frac{\partial a_{km}}{\partial a_{km}} = 1, \quad \frac{\partial a_{km}^*}{\partial a_{km}^*} = 1. \quad (3.58)$$

É interessante notar que tapes de transformadores OLTC também podem ser modelados analogamente à equação (3.55), ou seja, zera-se a parte imaginária de cada variável de tape. Tal fato representa bem a flexibilidade da modelagem de medições no domínio de números complexos, já que uma mesma função relativa a uma quantidade mensurável pode ser modelada de forma alternativa.

## 3.2 Estimador de Estados WLS Formulado no Plano Complexo

Considere  $\underline{z}_c$  o vetor de medições complexas definido como

$$\underline{z}_c = (z_1 \dots z_m, z_1^* \dots z_m^*), \quad \underline{z}_c \in \mathbb{C}^{2m \times 1} \quad (3.59)$$

sendo

$$z_i = a_i + jb_i \quad \text{e} \quad z_i^* = a_i - jb_i, \quad (3.60)$$

onde  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ . Assume-se que as variáveis  $a_i$  e  $b_i$  são normalmente distribuídas. Medidas reais (oriundas do sistema SCADA) têm o termo  $b_i$  desprezado. Dessa forma, o modelo não linear de estimação de estados em coordenadas complexas e conjugadas é definido como sendo:

$$\underline{z}_c = \underline{h}_c(\underline{x}_c) + \underline{\omega}_c, \quad (3.61)$$

$$E(\underline{\omega}_c) = 0, \quad E(\underline{\omega}_c \underline{\omega}_c^H) = \mathbf{\Omega}_c, \quad (3.62)$$

onde  $\underline{h}_c(\underline{x}_c)$  representa o vetor de funções não-lineares que relacionam  $\underline{z}_c$  à  $\underline{x}_c$ ,  $\underline{\omega}_c$  representa o vetor de erros randômicos das medições complexas e o operador  $(\cdot)^H$  representa o Hermitiano, ou seja, o conjugado transposto do argumento.

A função objetivo a ser minimizada no estimador WLS formulado no plano complexo [29] é

$$\underset{\underline{x}_c}{\operatorname{argmin}} \mathcal{J}(\underline{x}_c) = \frac{1}{2} (\underline{z}_c - \underline{h}_c(\underline{x}_c))^H \mathbf{\Omega}_c^{-1} (\underline{z}_c - \underline{h}_c(\underline{x}_c)). \quad (3.63)$$

Então a condição necessária para o problema de otimização é a seguinte:

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}_c} = -\mathbf{H}(\underline{x}_c)^H \mathbf{\Omega}_c^{-1} (\underline{z}_c - \underline{h}_c(\underline{x}_c)) = 0. \quad (3.64)$$

O termo de primeira ordem da expansão em séries de Taylor de  $\underline{h}_c(\underline{x}_c)$  em relação a  $\underline{x}_c^{(v)}$  apresenta-se como

$$\underline{h}_c(\underline{x}_c) = \underline{h}_c(\underline{x}_c^{(v)}) + \mathbf{H}(\underline{x}_c^{(v)}) (\underline{x}_c - \underline{x}_c^{(v)}). \quad (3.65)$$

Substituindo (3.65) em (3.64), obtém-se:

$$\mathbf{H}(\underline{x}_c^{(v)})^H \mathbf{\Omega}_c^{-1} [\underline{z}_c - \underline{h}_c(\underline{x}_c^{(v)}) - \mathbf{H}(\underline{x}_c^{(v)}) (\underline{x}_c - \underline{x}_c^{(v)})] = 0, \quad (3.66)$$

chegando no vetor de estados estimados atualizado conforme:

$$\underline{x}_c^{(v+1)} = \underline{x}_c^{(v)} + \mathbf{G}(\underline{x}_c^{(v)})^{-1} \mathbf{H}(\underline{x}_c^{(v)}) \mathbf{\Omega}_c^{-1} \Delta \underline{z}_c^{(v)}, \quad (3.67)$$

sendo

$$\mathbf{G}(\underline{x}_c^{(v)}) = \mathbf{H}(\underline{x}_c^{(v)})^H \mathbf{\Omega}_c^{-1} \mathbf{H}(\underline{x}_c^{(v)}), \quad (3.68)$$

$$\Delta \underline{z}_c^{(v)} = \underline{z}_c - \underline{h}_c(\underline{x}_c^{(v)}), \quad (3.69)$$

onde  $\mathbf{G}(\underline{x}_c^{(v)})$  é a matriz ganho e  $\Delta \underline{z}_c^{(v)}$  é o vetor de resíduos a cada iteração.

O processo iterativo é interrompido quando a seguinte condição é satisfeita:

$$\|\Delta \underline{x}_c^{(v)}\|_{\infty} \leq tol, e.g., 10^{-3}, \quad (3.70)$$

sendo  $\|\cdot\|_{\infty}$  a norma infinita e  $v$  o contador iterativo.

Observe que na equação (3.64),  $\mathbf{H}(\underline{x}_c^{(v)})$  é a matriz jacobiana de dimensão  $(2m \times 2n)$ , sendo definida no plano complexo como sendo:

$$\mathbf{H}(\underline{x}_c) \triangleq \frac{\partial \underline{h}_c(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}_c} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{h}_c(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}} & \frac{\partial \underline{h}_c(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}^*} \\ \frac{\partial \underline{h}_c^*(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}} & \frac{\partial \underline{h}_c^*(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}^*} \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Considere  $\mathbf{J}_h = \frac{\partial \underline{h}_c(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}}$  e  $\mathbf{J}_h^d = \frac{\partial \underline{h}_c(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}^*}$  como sendo as submatrizes da jacobiana com dimensão  $(m \times n)$ . Tais submatrizes são obtidas através das derivadas parciais de Wirtinger em relação ao vetor de variáveis complexas e ao vetor de variáveis complexas conjugadas, respectivamente. Assim sendo, a seguinte partição da matriz jacobiana pode ser definida:

$$\mathbf{J}_c(\underline{x}_c) = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_h & \mathbf{J}_h^d \end{pmatrix}. \quad (3.72)$$

Destaca-se que a partir da formulação de Wirtinger, as relações (3.73) e (3.74) estabelecidas a seguir são válidas uma vez que  $\mathcal{J}(\underline{x}_c) \in \mathbb{R}$ .

$$\frac{\partial \underline{h}_c^*(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}^*} = \left( \frac{\partial \underline{h}_c(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}} \right)^* = (\mathbf{J}_h)^* \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial \underline{h}_c^*(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}} = \left( \frac{\partial \underline{h}_c(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}^*} \right)^* = (\mathbf{J}_h^d)^* \quad (3.74)$$

Tais relações estão explicitamente definidas na Seção 3.1. Dessa forma, a matriz jacobiana assume a seguinte expressão:

$$\mathbf{H}(\underline{x}_c) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_h & \mathbf{J}_h^d \\ (\mathbf{J}_h^d)^* & (\mathbf{J}_h)^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_c \\ \mathbf{J}_c^* \mathbf{S}_w \end{bmatrix}, \quad (3.75)$$

onde  $\mathbf{S}_w$  representa o operador *swap* que é uma matriz ortogonal assim definida:

$$\mathbf{S}_w \triangleq \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Tal operador é responsável por permutar blocos de  $m$  linhas ou blocos de  $n$  colunas dependendo se  $\mathbf{S}_w$  é pré- ou pós-multiplicado a uma matriz, respectivamente.

Tal generalização (3.75) é válida para qualquer plano de medição, independentemente do número de medições complexas (provenientes de PMU) ou medições reais (provenientes do sistema SCADA).

Como exemplo, a Fig. 2 mostra a estrutura de esparsidade da matriz jacobiana formulada no plano complexo para o sistema teste equivalente do SIN-1916 barras. Para tal propósito, considera-se apenas medições fasoriais para ilustrar tal estrutura, assumindo



como variáveis de estado somente as tensões nodais no sistema de coordenadas complexo-conjugado. Para ajudar no entendimento da figura, são mostradas também as submatrizes que compõem a jacobiana expressas em (3.75) e cada tipo de medição utilizada. A redundância global dessa simulação é  $p = m/n = 8825/3832 = 2.3$ .

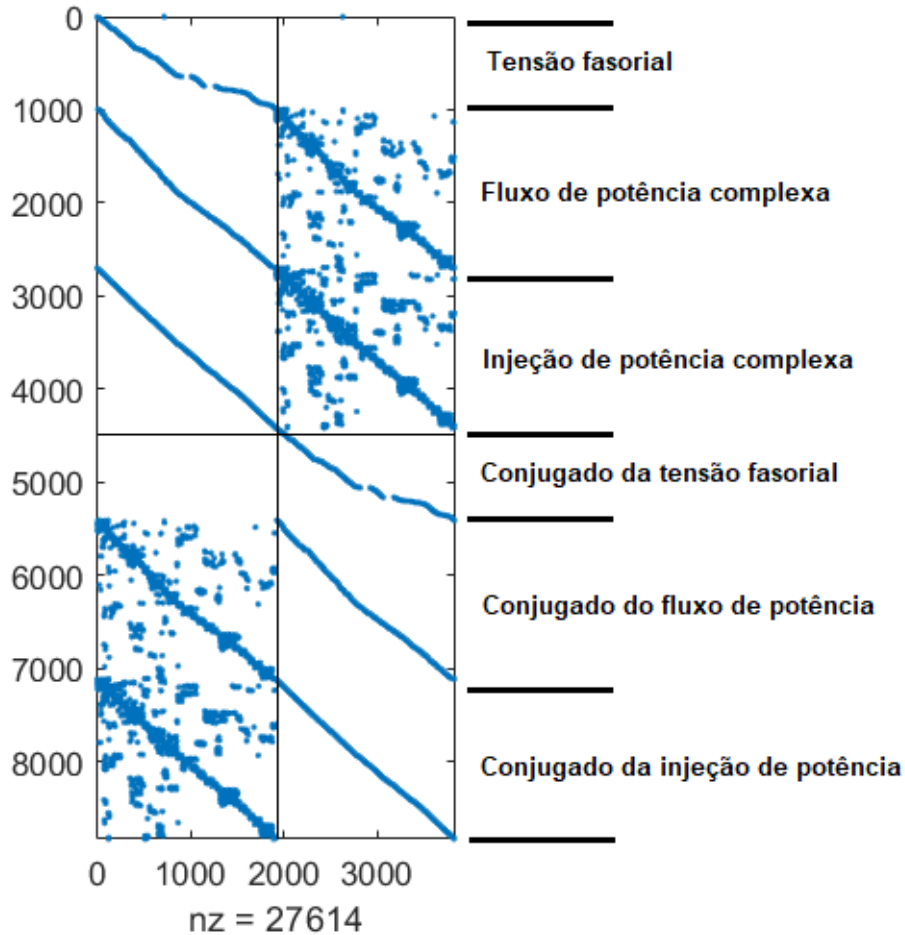


Figura 2 – Estrutura de esparsidade da matriz jacobiana formulada no plano complexo do sistema SIN-1916

Refletindo sobre a estrutura de esparsidade da matriz Jacobiana, é natural pensar em uma forma de desacoplamento entre as submatrizes que compõem a matriz jacobiana do problema de estimação de estados no plano complexo. Entretanto, tal procedimento ocasionaria a perda da analiticidade das funções não-lineares, ou seja, as premissas do Cálculo de Wirtinger não seriam atendidas.

A estimação de estados formulada no plano complexo é obtida resolvendo o sistema

$$\tilde{\mathbf{H}}(\hat{\underline{x}}_c) \Delta \underline{x}_c^{(v)} = \Delta \tilde{\underline{z}}_c, \quad (3.77)$$

sendo  $\tilde{\mathbf{H}}(\hat{x}_c) = \mathbf{\Omega}_c^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H}(\hat{x}_c)$  com dimenso  $(2m \times 2n)$  e  $\Delta \tilde{z}_c = \mathbf{\Omega}_c^{-\frac{1}{2}} \Delta z_c$  com dimenso  $(2m \times 1)$ .

No entanto, do ponto de vista computacional  mais vantajoso permutar os blocos de  $n$  colunas da matriz jacobiano, uma vez que as submatrizes  $\mathbf{J}_h^d$  e  $(\mathbf{J}_h^d)^*$  so mais densas que suas respectivas contrapartes  $\mathbf{J}_h$  e  $(\mathbf{J}_h)^*$ , como se observa na Fig.2. Assim, ps-multiplicando a matriz Jacobiana pelo operador  $\mathbf{S}_w$  definido em (3.76), as submatrizes mais densas da matriz Jacobiano tornar-se-o partioes matriciais alocadas na diagonal principal do Jacobiano. Consequentemente, o vetor de correo das variveis de estado ser automaticamente invertido para a resoluo da equao (3.77).

A soluo do sistema de equaoes em (3.77)  obtida via

$$\Delta \underline{x}_c^{(v)} = \tilde{\mathbf{H}}(\hat{x}_c)^\dagger \Delta \tilde{z}_c, \quad (3.78)$$

onde  $\dagger$  representa a pseudo-inversa de Moore-Penrose.

Uma forma eficaz de resolver o sistema redundante de equaoes apresentado em (3.77) ocorre via rotaoes rpidas de Givens operadas no plano complexo [32, 33]. Para evitar o armazenamento da matriz ortogonal  $Q$ , aplica-se a fatorao QR na matriz aumentada,  $\mathbf{H}_a(\hat{x}_c)$ , que  resultante da concatenao do vetor do lado direito do sistema redundante de equaoes  $(\Delta \tilde{z}_c)$  com a matriz de coeficientes  $(\tilde{\mathbf{H}}(\hat{x}_c))$ , como expresso em:

$$\mathbf{H}_a(\hat{x}_c) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}(\hat{x}_c) & \Delta \tilde{z}_c \end{bmatrix}. \quad (3.79)$$

O vetor de incremento de variveis de estados  calculado executando uma substituo inversa por meio das transformaoes da matriz aumentada, levando a

$$R_a = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_c & \Delta \tilde{z}_c \end{bmatrix} = qr(\mathbf{H}_a(\hat{x}_c)), \quad (3.80)$$

sendo  $\mathbf{T}_c$  a matriz triangular superior de dimenso  $(2n \times 2n)$  e  $\Delta \tilde{z}_c$  o vetor do lado direito atualizado com dimenso  $(2n \times 1)$ . Dessa forma, o vetor de correo das variveis de estados expresso em (3.78)  obtido operando a substituo inversa mostrada em seguida:

$$\Delta \underline{x}_c^{(v)} = \mathbf{T}_c \Delta \tilde{z}_c. \quad (3.81)$$

### 3.2.1 Plano de Medição Híbrido no Estimador de Estados Formulado no Plano Complexo

As equações mostradas na seção anterior são válidas independentemente do plano de medição escolhido, ou seja, aceita medições complexas providas por PMUs ou medições reais providas pelo sistema SCADA. Este subtópico vêm abordar algumas modificações nas equações anteriores para ocasionar uma diminuição da ordem da matriz jacobiana, promovendo uma melhora no desempenho computacional. Para isto, considere o vetor de funções não lineares relativas às medições reais ( $\underline{h}_{re}$ ) e medições complexas ( $\underline{h}_{cp}$ ) organizados segundo a expressão em (3.82).

$$\underline{h}_c(\underline{x}_c) = \begin{pmatrix} \underline{h}_{re} \\ \underline{h}_{cp} \\ \underline{h}_{re}^* \\ \underline{h}_{cp}^* \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

A partir dessa nova organização das grandezas mensuráveis a matriz jacobiano (3.75) assume a seguinte forma:

$$\mathbf{H}(\underline{x}_c) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{h}_{re}(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}} & \frac{\partial \underline{h}_{re}(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}^*} \\ \frac{\partial \underline{h}_{cp}(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}} & \frac{\partial \underline{h}_{cp}(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}^*} \\ \frac{\partial \underline{h}_{re}^*(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}} & \frac{\partial \underline{h}_{re}^*(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}^*} \\ \frac{\partial \underline{h}_{cp}^*(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}} & \frac{\partial \underline{h}_{cp}^*(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}^*} \end{bmatrix}. \quad (3.83)$$

As duas submatrizes  $\partial \underline{h}_{re}^*(\underline{x}_c) / \partial \underline{x}$  e  $\partial \underline{h}_{re}^*(\underline{x}_c) / \partial \underline{x}^*$  podem ser suprimidas uma vez que as medições reais conjugadas serão idênticas às medições reais originais. Isso reduzirá a ordem da matriz jacobiana para  $((m_{med_r} + 2m_{med_c}) \times n)$ , sendo  $m_{med_r}$  e  $m_{med_c}$  o número de medições reais e complexas, respectivamente.

Para as submatrizes referentes às medições complexas são válidas as relações (3.73) e (3.74). Do Cálculo de Wirtinger é possível inferir ainda a seguinte relação para as submatrizes de medições reais:

$$\frac{\partial \underline{h}_{re}(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}^*} = \left( \frac{\partial \underline{h}_{re}(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}} \right)^*. \quad (3.84)$$

Logo, a matriz jacobiano do problema de estimação de estados formulado no domínio dos números complexos com medições híbridas terá a forma geral:

$$\mathbf{H}(\underline{x}_c) = \begin{bmatrix} F & F^* \\ C & D \\ D^* & C^* \end{bmatrix}, \quad (3.85)$$

sendo as submatrizes  $C = \frac{\partial \underline{h}_{cp}(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}}$ ,  $D = \frac{\partial \underline{h}_{cp}(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}^*}$  e  $F = \frac{\partial \underline{h}_{re}(\underline{x}_c)}{\partial \underline{x}}$ . De maneira ilustrativa, o modelo genérico da matriz jacobiana do problema de estimação de estados formulado no plano complexo pode ser expresso como sendo:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix}
 \frac{\partial V_k^{im}}{\partial V_k} & 0 & 0 & \frac{\partial V_k^{im}}{\partial V_k^*} & 0 & 0 \\
 \frac{\partial |V_k|}{\partial V_k} & 0 & 0 & \frac{\partial |V_k|}{\partial V_k^*} & 0 & 0 \\
 \frac{\partial t_{km}}{\partial V_k} & \frac{\partial t_{km}}{\partial V_m} & \frac{\partial t_{km}}{\partial a_{km}} & \frac{\partial t_{km}}{\partial V_k^*} & \frac{\partial t_{km}}{\partial V_m^*} & \frac{\partial t_{km}}{\partial a_{km}^*} \\
 \frac{\partial u_{km}}{\partial V_k} & \frac{\partial u_{km}}{\partial V_m} & \frac{\partial u_{km}}{\partial a_{km}} & \frac{\partial u_{km}}{\partial V_k^*} & \frac{\partial u_{km}}{\partial V_m^*} & \frac{\partial u_{km}}{\partial a_{km}^*} \\
 \frac{\partial P_k}{\partial V_k} & \frac{\partial P_k}{\partial V_m} & \frac{\partial P_k}{\partial a_{km}} & \frac{\partial P_k}{\partial V_k^*} & \frac{\partial P_k}{\partial V_m^*} & \frac{\partial P_k}{\partial a_{km}^*} \\
 \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} & \frac{\partial Q_k}{\partial V_m} & \frac{\partial Q_k}{\partial a_{km}} & \frac{\partial Q_k}{\partial V_k^*} & \frac{\partial Q_k}{\partial V_m^*} & \frac{\partial Q_k}{\partial a_{km}^*} \\
 \frac{\partial V_k}{\partial V_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\partial S_{km}}{\partial V_k} & \frac{\partial S_{km}}{\partial V_m} & \frac{\partial S_{km}}{\partial a_{km}} & \frac{\partial S_{km}}{\partial V_k^*} & \frac{\partial S_{km}}{\partial V_m^*} & \frac{\partial S_{km}}{\partial a_{km}^*} \\
 \frac{\partial S_{mk}}{\partial V_k} & \frac{\partial S_{mk}}{\partial V_m} & \frac{\partial S_{mk}}{\partial a_{km}} & \frac{\partial S_{mk}}{\partial V_k^*} & \frac{\partial S_{mk}}{\partial V_m^*} & \frac{\partial S_{mk}}{\partial a_{km}^*} \\
 \frac{\partial S_k}{\partial V_k} & \frac{\partial S_k}{\partial V_m} & \frac{\partial S_k}{\partial a_{km}} & \frac{\partial S_k}{\partial V_k^*} & \frac{\partial S_k}{\partial V_m^*} & \frac{\partial S_k}{\partial a_{km}^*} \\
 0 & 0 & \frac{\partial a_{km}}{\partial a_{km}} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{\partial V_k^*}{\partial V_k^*} & 0 & 0 \\
 \frac{\partial S_{km}^*}{\partial V_k} & \frac{\partial S_{km}^*}{\partial V_m} & \frac{\partial S_{km}^*}{\partial a_{km}} & \frac{\partial S_{km}^*}{\partial V_k^*} & \frac{\partial S_{km}^*}{\partial V_m^*} & \frac{\partial S_{km}^*}{\partial a_{km}^*} \\
 \frac{\partial S_{mk}^*}{\partial V_k} & \frac{\partial S_{mk}^*}{\partial V_m} & \frac{\partial S_{mk}^*}{\partial a_{km}} & \frac{\partial S_{mk}^*}{\partial V_k^*} & \frac{\partial S_{mk}^*}{\partial V_m^*} & \frac{\partial S_{mk}^*}{\partial a_{km}^*} \\
 \frac{\partial S_k^*}{\partial V_k} & \frac{\partial S_k^*}{\partial V_m} & \frac{\partial S_k^*}{\partial a_{km}} & \frac{\partial S_k^*}{\partial V_k^*} & \frac{\partial S_k^*}{\partial V_m^*} & \frac{\partial S_k^*}{\partial a_{km}^*} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial a_{km}^*}{\partial a_{km}^*}
 \end{bmatrix}. \tag{3.86}$$

O vetor de medições por sua vez é construído como segue:

$$\underline{z}_c = \begin{pmatrix} \underline{z}_{re} \\ \underline{z}_{cp} \\ \underline{z}_{cp}^* \end{pmatrix}, \quad (3.87)$$

e para a resolução do sistema de equações utilizam-se as mesmas equações do modelo genérico (3.78-3.81).

Neste trabalho, a classificação de medições reais e complexas e seus respectivos desvios-padrão são mostrados nas Tabelas 1 e 2. A ordem de grandeza dos desvios-padrão de cada medição está baseada nas simulações apresentadas em [5]. Apesar das PMUs fornecerem sinais de corrente fasorial nos ramos, neste trabalho optou-se por utilizar como medições complexas a formulação composta pelos fluxos e pelas injeções de potência mensuráveis.

Tabela 1 – Classificação e precisão das medições reais

Tipo	$\sigma$
Pseudo-medição de referência angular ( $\theta_s$ )	$1E^{-4}$
Magnitude de tensão ( $ V $ )	$1E^{-3}$
Fluxo de potência ativa ( $t$ )	$1E^{-2}$
Fluxo de potência reativa ( $u$ )	$1E^{-2}$
Injeção de potência ativa ( $P$ )	$1E^{-2}$
Injeção de potência reativa ( $Q$ )	$1E^{-2}$

Tabela 2 – Classificação e precisão das medições complexas

Tipo	$\sigma$
Tensão fasorial ( $V$ )	$1E^{-4}$
Fluxo de potência aparente ( $S_{km}$ )	$5E^{-3}$
Injeção de potência aparente ( $S_k$ )	$5E^{-3}$
Pseudo-medições de tape de transformadores ( $a$ )	$3.16E^{-2}$

### 3.3 Estimador de Estados SHGM Formulado no Plano Complexo

O algoritmo *IRLS* (*Iteratively Reweighted Least Squares*) utiliza a função objetivo de Huber ( $\rho(r_s)$ ), que, por sua vez, é uma função convexa em todo o seu domínio, garantindo a obtenção de um mínimo global. A função objetivo a ser minimizada, nesse algoritmo, é expressa na equação (3.88).

$$\mathcal{J}(\underline{x}_c) = \sum_{i=1}^m \omega_i^2 \rho(r_{s_i}) \quad (3.88)$$

A principal característica da função objetivo proposta por Huber decorre da combinação dos atributos de robustez estatística presente no estimador LAV (*Least Absolute Value*) e da eficiência estatística provida pelo estimador WLS. Assim, a função objetivo de Huber assegura a eficiência estatística na parcela quadrática da função enquanto que no intervalo tangente ao ponto em diante preserva-se sua robustez, conforme a equação (3.89).

$$\rho(r_{s_i}) = \begin{cases} r_{s_i}^2/2 & \text{se } |r_{s_i}| \leq \beta \\ \beta |r_{s_i}| - \frac{\beta^2}{2} & \text{se } |r_{s_i}| > \beta \end{cases} \quad (3.89)$$

A primeira derivada da função de Huber  $\rho(r_{s_i})$  em relação à  $r_{s_i}$  é conhecida como  $\psi(r_{s_i})$  sendo evidenciada em (3.90). Neste trabalho adota-se o limiar  $\beta = 1.345$  para garantir uma eficiência estatística de 95% [2].

$$\psi(r_{s_i}) = \begin{cases} r_{s_i} & \text{se } |r_{s_i}| \leq \beta \\ \beta \operatorname{sign}(r_{s_i}) & \text{se } |r_{s_i}| > \beta \end{cases} \quad (3.90)$$

O  $i$ -ésimo resíduo padronizado ( $r_{s_i}$ ) pode ser expresso pela relação:

$$r_{s_i} = \frac{r_i}{\sigma_i \omega_i}, \quad (3.91)$$

onde  $r_i$  representa o  $i$ -ésimo resíduo que é calculado pela diferença da entre as quantidades medida e estimada ( $\underline{r} = \Delta \underline{z}_c = \underline{z}_c - \underline{h}_c(\underline{x}_c)$ );  $\sigma_i$  representa o desvio padrão relacionado a cada medição e a variável  $\omega_i$  representa o peso atribuído às medidas identificadas como pontos de alavancamento ( $\omega_i = \min\left(1, \left(\frac{c_i}{PS_i}\right)^2\right)$ ) [27]. Tais pesos são calculados com base em projeções estatísticas obtidas *offline* considerando o perfil plano de tensões. É importante lembrar que tais índices só precisam ser recalculados caso haja uma nova configuração de medições ou uma mudança na topologia da rede. Posteriormente, neste trabalho, será discutida a caracterização de tal índice para a estimação robusta no plano complexo.

A condição de otimalidade correspondente à função-objetivo é atendida quando  $\nabla \mathcal{J} = \underline{0}$ , ou seja,

$$\sum_{i=1}^m \omega_i^2 \left( \frac{\partial r_{s_i}}{\partial x_{c_i}} \right)^H \psi(r_{s_i}) = \underline{0}. \quad (3.92)$$

A equação (3.92) é resolvida pelo algoritmo IRLS derivado no plano complexo. Assim, multiplicando e dividindo  $\psi(r_{s_i})$  por  $r_{s_i}$ , em (3.92), obtém-se:

$$\sum_{i=1}^m \omega_i^2 \left( \frac{1}{\sigma_i \omega_i} \frac{\partial r_i}{\partial x_i} \right)^H \frac{\psi(r_{s_i})}{\left( \frac{r_i}{\sigma_i \omega_i} \right)} \left( \frac{r_i}{\sigma_i \omega_i} \right) = \underline{0}, \quad (3.93)$$

que reorganizada (3.93), resulta a seguinte igualdade:

$$\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial r_i}{\partial x_i} \right)^H q(r_{s_i}) \left( \frac{r_i}{\sigma_i^2} \right) = \underline{0}, \quad (3.94)$$

onde  $q(r_{s_i}) = \frac{\psi(r_{s_i})}{r_{s_i}}$  é a função peso variável do estimador SHGM.

Matricialmente a equação (3.94) no plano complexo se torna:

$$\mathbf{H}^H \mathbf{Q}_v \mathbf{\Omega}_c^{-1} (\underline{z}_c - \underline{h}_c(\underline{x}_c)) = \underline{0}, \quad (3.95)$$

sendo

$$\mathbf{Q}_v = \text{diag}(q(r_{s_i})). \quad (3.96)$$

Dado que o termo de primeira ordem da expansão em séries de Taylor de  $\underline{h}_c(\underline{x}_c)$  é:

$$\underline{h}_c(\underline{x}_c) \cong \underline{h}_c(\underline{x}_c^{(v)}) + \mathbf{H} \Delta \underline{x}_c^{(v)}, \quad (3.97)$$

então, considerada em (3.95), resulta:

$$\mathbf{H}^H \mathbf{Q}_v \mathbf{\Omega}_c^{-1} (\Delta \underline{z}_c^{(v)} - \mathbf{H} \Delta \underline{x}_c^{(v)}) = \underline{0}, \quad (3.98)$$

ou ainda,

$$\mathbf{H}^H \mathbf{Q}_v \mathbf{\Omega}_c^{-1} \mathbf{H} \Delta \underline{x}_c^{(v)} = \mathbf{H}^H \mathbf{Q}_v \mathbf{\Omega}_c^{-1} \Delta \underline{z}_c^{(v)}, \quad (3.99)$$

sendo  $\Delta \underline{z}_c^{(v)} = \underline{z}_c - \underline{h}_c(\underline{x}_c^{(v)})$ . Por outro lado, destaca-se que a equação anterior é equivalente a resolver o sistema redundante de equações conforme:



$$\Delta \underline{x}_c^{(v)} = \tilde{\mathbf{H}}^\dagger \Delta \tilde{\underline{z}}_c \quad (3.100)$$

sendo

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{Q}_v^{1/2} \mathbf{\Omega}_c^{-1/2} \mathbf{H}, \quad (3.101)$$

$$\Delta \tilde{\underline{z}}_c = \mathbf{Q}_v^{1/2} \mathbf{\Omega}_c^{-1/2} \Delta \underline{z}_c^{(v)}. \quad (3.102)$$

É importante notar que nas equações (3.101) e (3.102), a matriz de pesos  $\mathbf{Q}_v$  muda a cada iteração. Conseqüentemente,  $\tilde{\mathbf{H}}$  deve ser fatorada a cada iteração. Esse é o requisito necessário para a supressão de erros grosseiros durante a atualização de  $\underline{x}_c$ . Uma alternativa para aprimorar o desempenho computacional é a aplicação de rotações rápidas de Givens operadas no plano complexo, cuja versão não realiza as operações aritméticas de raiz quadrada e divisão [33].

Finalmente, a solução do sistema redundante de equações é obtida conforme as equações (3.78-3.81) e o critério de parada do processo iterativo é expresso na equação (3.70). No entanto, é importante ressaltar que neste trabalho optou-se pelo emprego do algoritmo de *mínimos quadrados ponderados de mínima norma - lsqminnorm* [34], isto é, minimiza não somente a norma Euclidiana do problema:  $A\underline{x} = \underline{y}$ , mas igualmente a norma Euclidiana do vetor solução  $\underline{x}$ . Tal algoritmo faz uso da fatoração QR e simultaneamente busca a solução de mínima norma ao resolver sistemas de equações algébricas lineares redundantes.

## 3.4 Processamento de Erros Grosseiros

### 3.4.1 Detecção, Identificação e Recuperação de Medidas no Estimador WLS

Para a detecção de medidas errôneas, utilizou-se do teste de hipóteses (3.103).

$$\mathcal{J}(\hat{\underline{x}}_c) > \chi_{k,0.975}^2, \quad (3.103)$$

onde  $\mathcal{J}(\hat{\underline{x}}_c)$  representa a soma ponderada do quadrado dos resíduos e  $k$  é o grau de liberdade da distribuição Qui-Quadrado, resultante da diferença entre o número de medidas e o número de estados do problema considerado [35].

Neste trabalho utilizou-se do método do maior resíduo normalizado para a identificação de erros grosseiros no estimador clássico. Tal método se baseia na obtenção da matriz de covariância dos resíduos ( $\Sigma$ ), calculada no plano complexo conforme a equação (3.104).

$$\Sigma = \left[ I - H \left( H^H \Omega_c^{-1} H \right)^{-1} H^H \Omega_c^{-1} \right] \Omega_c \quad (3.104)$$

O resíduo normalizado complexo pode ser expresso por:

$$r_{n_i} = \frac{r_i}{\sqrt{\Sigma_{ii}}}. \quad (3.105)$$

Assim sendo a verificação individual da parte real e imaginária do vetor normalizado proverá a identificação das medidas com erro grosseiro. O critério comumente sugerido é [36]:

$$\max |r_n| > \lambda (\approx 4), \quad (3.106)$$

que segundo [36] assume-se que a magnitude do erro presente em cada medida pode ser conhecido pela seguinte equação:

$$\hat{\beta} = \frac{\sigma_i^2}{\sqrt{\Sigma_{ii}}} \times r_{n_i}. \quad (3.107)$$

Desta forma a medida identificada como errônea pode ser recuperada tal como:

$$z_i^{rec} = z_i^{erro} - \frac{\sigma_i^2}{\sqrt{\Sigma_{ii}}} \times r_{n_i}. \quad (3.108)$$

No entanto, ressalta-se que a busca do maior resíduo normalizado sofre de penalidades computacionais, uma vez que, se faz necessário o cálculo da matriz de covariância dos resíduos e identificação do erro grosseiro é tratado um de cada vez. Além disso, medidas numericamente discrepantes em relação à maioria, conhecidas como pontos de alavancamento ruins [27, 37, 38], também podem não ser devidamente identificadas [25].

### 3.4.2 Projeções Estatísticas no Domínio dos Números Complexos

Pontos de alavancamento são medidas cujos vetores de linha associados da matriz Jacobiana são *outliers* em relação ao demais elementos do espaço-fator [38]. Na estimação

de estados em sistemas de potência, usualmente os pontos de alavancamento estão relacionados a ramos com reatância bastante inferior aos demais ramos, podendo ser ocasionada por medições de fluxo neste ramo ou através de medidas de injeção em barras em que este incide. Além disso, medidas de injeção em barras com alto grau de incidência de ramos também podem configurar medidas como pontos de alavancamento [39].

No plano complexo, a principal preocupação, neste assunto, é aplicar uma metodologia para ordenar números complexos em um vetor linha de uma matriz Jacobiana. O produto escalar, ou produto interno, fornece a resposta mais útil para esse propósito. Portanto, cada linha na matriz Jacobiana pode ser tratada como um vetor de números complexos. Conseqüentemente, o produto escalar de tais números é um escalar que depende das magnitudes dos números e do ângulo entre eles.

Similarmente ao caso real [27], considera-se uma aproximação de que a matriz Jacobiana no plano complexo segue uma distribuição normal  $\mathcal{N}(\bar{h}, \bar{\mathbf{C}}_c)$ , onde a média  $\bar{h}$  e a matriz de covariância  $\bar{\mathbf{C}}_c$  são calculadas por (3.109) e (3.110), respectivamente.

$$\bar{h} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (H_i), \quad (3.109)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_c = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (H_i - \bar{h})(H_i - \bar{h})^H, \quad (3.110)$$

onde  $H_i$  representa a  $i$ -ésima linha da matriz Jacobiana.

Sob as premissas acima, a projeção estatística é definida de forma semelhante ao caso de domínio real [27], exceto pela aritmética de números complexos, resultando:

$$PS_i = \max_{H_k} \frac{|H_i^H \cdot H_k|}{\xi}, \quad (3.111)$$

para qualquer linha específica  $i$ , o subscrito  $k$  varia, por exemplo,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Na equação anterior, o estimador de escala altamente robusto  $\xi$  é:

$$\xi = \gamma \cdot \text{lomed}_i \left\{ \text{lomed}_{j \neq i} \left\{ |H_i^H H_k + H_j^H H_k| \right\} \right\}, \quad (3.112)$$

onde  $\text{lomed}$  é uma mediana baixa dos  $m$  números escalares e  $\gamma = 1,1926$  [27]. Portanto, uma medição é sinalizada como ponto de alavancamento se, e somente se, a restrição correspondente é satisfeita, sendo expressa por:

$$PS_i > c_i = \chi_{\nu; 97.5\%}^2. \quad (3.113)$$

Em (3.113),  $\nu$  é o número de elementos diferentes de zero na linha correspondente da matriz Jacobiana. Agora, os pesos referentes aos pontos de alavancamento que

objetivam padronizar o vetor residual em (3.88), podem ser quantificados pela equação abaixo.

$$\omega_i = \min \left( 1, \left( \frac{c_i}{PS_i} \right)^2 \right), \quad (3.114)$$

onde  $c_i$  é o valor de corte definido por (3.113).

## 4 Análise de Observabilidade Algébrica

### 4.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo é apresentada a formulação utilizada no trabalho para analisar a observabilidade de planos de medição isentos de conjuntos críticos e medidas críticas dos sistemas teste considerados, baseando-se no conceito de redundância local [40]. Existem diversos estudos para análise e restauração da observabilidade algébrica para estimação de estados, baseando-se tanto na matriz ganho [41] quanto na matriz de Gram [42, 43, 44]. Neste trabalho, utilizou-se como base o algoritmo de análise de observabilidade algébrica proposto por Crainic *et. al* [45] cuja motivação é a facilidade de sua implementação e baixo custo computacional. Ressalta-se que a condição necessária e suficiente para que um sistema de monitoramento seja algebricamente observável é a existência de uma árvore geradora observável *AGO* [46]. Este conceito é amplamente utilizado no desenvolvimento do algoritmo que é apresentado ao longo do capítulo.

As principais contribuições deste trabalho no âmbito da observabilidade algébrica e topológica são apresentadas nas subseções 4.1.2 e 4.1.3. Na subseção 4.1.2 mostra-se a metodologia utilizada para conversão e análise das matrizes de incidência propostas por Crainic *et. al* [45] para elaboração dos grafos de medição e de planos de medição redundantes considerando a formulação do estimador de estados no domínio dos números complexos. Já na seção 4.1.3 descreve-se as etapas utilizadas para criação das AGOs para cada sistema teste. A primeira etapa é feita pela criação de uma árvore geradora mínima e na segunda etapa atribui-se medições únicas a cada aresta da árvore gerada.

#### 4.1.1 Algoritmo - Crainic

O método proposto em [45] permite analisar a observabilidade algébrica da rede elétrica via conjunto de medidas e/ou ocorrência de contingências nos sistemas de comunicação que provocam mudanças na topologia da rede monitorada. Para isto, o método faz uso da propriedade presente na matriz de Gram, i.e.,  $G(W) = \det |W^T W|$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \text{Se } \det |W^T W| \neq 0, & \quad \text{a rede é observável,} \\ \text{caso contrário,} & \quad \text{a rede é não observável,} \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $W$  é a matriz de incidência de medidas aos nós da rede, dada por:

$$W = M A^T \tag{4.2}$$

que, por sua vez,  $M$  e  $A$  também são matrizes de incidência, porém definidas como sendo:

M - matriz incidente de medidas aos ramos da rede

A - matriz incidente de nós aos ramos de rede

O principal atrativo em usar as matrizes de incidência,  $M$ - que mapeia as medições aos ramos da rede;  $A$ - que mapeia os nós aos ramos da rede monitorada, é o fato de que ambas são matrizes *unimodulares*. Isto é, são matrizes constituídas de número inteiros ou múltiplos iguais a +1; -1; 0. Além disso, são matrizes esparsas fáceis de serem construídas e sem nenhuma chance de ocorrência de instabilidade numérica. As definições formais de tais matrizes são encontradas em [45].

A operacionalização do método de análise de observabilidade algébrica utilizado fica evidenciada ao se considerar o sistema teste de 3 barras apresentado em seguida. A partir da topologia da rede é possível formar matrizes de incidência ( $W_0$ ) que relacionam as medições (linhas) aos nós da rede (colunas). Tais matrizes são construídas tanto para o plano de medição  $P - \delta$  quanto para o plano  $Q - V$ .

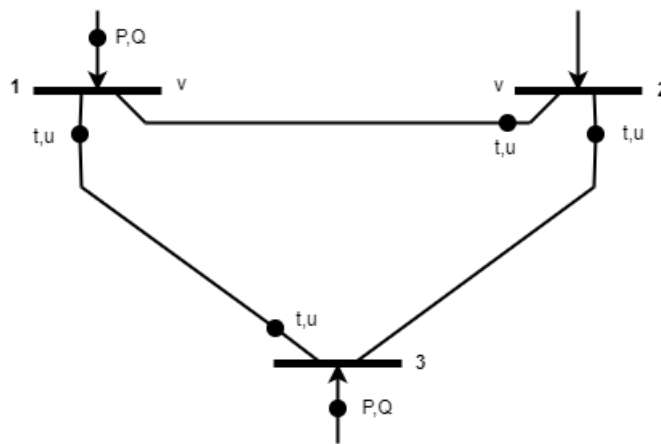


Figura 3 – Sistema teste de 3 barras

Considerando a relação (4.2), a construção da matriz de incidência  $M$  que relaciona as medidas aos ramos da rede segue as seguintes regras de formação:

- Para medições de fluxo entre as barras  $k$  (origem) e  $m$  (destino), adota-se o valor 1 ou -1 se a medida estiver na direção  $k - m$  ou  $m - k$ , respectivamente.
- Para medições de injeção na barra  $k$ , adota-se 1 ou -1 para os ramos incidentes na barra  $k$ .
- Para medições de tensão na barra  $k$ , adota-se 1 para os ramos referentes a interligação à terra.

Já para obtenção da matriz de incidência  $A_0$  que associa todos os nós aos ramos da rede, tem-se a lei de formação a seguir:

- Adota-se 1 ou -1 para cada ramo incidente na barra  $k$ . No subproblema  $Q - V$ , adiciona-se o nó fictício referente ao potencial nulo.

Assim, as matrizes de incidência  $M$  e  $A_0$  do sub-problema  $P - \delta$  são:

$$M_{P-\delta} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Ramos} \\ \hline 1-2 & 1-3 & 2-3 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & t_{2-1} \\ 0 & 1 & 0 & t_{1-3} \\ 0 & -1 & 0 & t_{3-1} \\ 0 & 0 & 1 & t_{2-3} \\ 1 & 1 & 0 & P_1 \\ 0 & -1 & -1 & P_3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \text{Medidas} \end{array} \end{array} \quad (4.3)$$

$$A_{0P-\delta} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Ramos} \\ \hline 1-2 & 1-3 & 2-3 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{Nós} \end{array} \end{array} \quad (4.4)$$

Enquanto que para o sub-problema  $Q - V$  resultam:

$$M_{Q-V} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Ramos} \\ \hline 1-2 & 1-3 & 2-3 & 1-0 & 2-0 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{2-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & u_{1-3} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & u_{3-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & u_{2-3} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & Q_1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & Q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & |V_1| \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & |V_2| \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \text{Medidas} \end{array} \end{array} \quad (4.5)$$

$$A_{0_{Q-V}} = \left[ \begin{array}{ccccc|c} \overbrace{\hspace{10em}}^{\text{Ramos}} & & & & & \\ 1-2 & 1-3 & 2-3 & 1-0 & 2-0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} \text{Nós} \quad (4.6)$$

As matrizes completas de incidência ( $W_0$ ) que mapeiam medidas a todos os nós da rede monitorada podem ser obtidas fazendo-se  $W_0 = M A_0^T$ . Ou ainda, através das regras de formação simplificadas, conforme descrito a seguir:

- Para medições de fluxo entre as barras  $k$  (origem) e  $m$  (destino), adota-se o valor 1 para o nó  $k$  e -1 para o nó  $m$ .
- Para medições de injeção na  $k$ -ésima barra, adota-se -1 para o  $m$ -ésimo nó que se interliga à  $k$ , enquanto que para o nó  $k$  adota-se o somatório das interligações.
- Para medições de magnitude de tensão na  $k$ -ésima barra, adiciona-se uma coluna extra à matriz. Esta coluna é referente ao nó fictício de terra, então adota-se 1 para o nó  $k$  e -1 para o nó fictício 0.

Para o exemplo considerado, as matrizes completas de incidência das medições a todos os nós do sistema dos sub-problemas  $P - \delta$  e  $Q - V$ , resultam:

$$W_{0_{P-\delta}} = \left[ \begin{array}{ccc|c} \overbrace{\hspace{10em}}^{\text{Nós}} & & & \\ 1 & 2 & 3 & \\ \hline -1 & 1 & 0 & t_{2-1} \\ 1 & 0 & -1 & t_{1-3} \\ -1 & 0 & 1 & t_{3-1} \\ 0 & 1 & -1 & t_{2-3} \\ 2 & -1 & -1 & P_1 \\ -1 & -1 & 2 & P_3 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} \text{Medidas} \quad (4.7)$$



$$W_{0_{Q-V}} = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}}^{\text{Nós}} \\ \left[ \begin{array}{cccc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} u_{2-1} \\ u_{1-3} \\ u_{3-1} \\ u_{2-3} \\ Q_1 \\ Q_3 \\ |V_1| \\ |V_2| \end{array} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}}^{\text{Nós}} \\ \left[ \begin{array}{cccc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} u_{2-1} \\ u_{1-3} \\ u_{3-1} \\ u_{2-3} \\ Q_1 \\ Q_3 \\ |V_1| \\ |V_2| \end{array}} \right\} \text{Medidas} \quad (4.8)$$

Claramente, a soma dos elementos de cada linha da matriz completa de incidência de medidas a todos os nós de rede ( $W_0$ ) é nula. Isto ocorre tanto no sub-problema  $P - \delta$  (4.7) quanto no sub-problema  $Q - V$  (4.8). Ressalta-se que tais matrizes  $W_0$  podem ser obtidas ou fazendo uso da lei de formação descrita anteriormente ou através da equação (4.2).

É importante notar que o critério para observabilidade algébrica em (4.1) se baseia na matriz de incidência de medidas aos nós da rede  $W$  que é obtida retirando qualquer coluna não-nula da matriz completa  $W_0$  nos planos  $P - \delta$  ou  $Q - V$ . De forma análoga, a matriz de incidência de nós aos ramos da rede  $A$  é resultante da retirada de determinado nó (linha) da matriz completa  $A_0$  para os sub-problemas  $P - \delta$  ou  $Q - V$ . Dessa forma, retirando-se a coluna referente ao nó 1 das matrizes  $W_0$  para os sub-problemas  $P - \delta$  e  $Q - V$ , tem-se as matrizes de incidência  $W$  em (4.9) e (4.10). Em ambos sub-problemas, o sistema é algébricamente observável.

$$W_{P-\delta} = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix}}^{\text{Nós}} \\ \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} t_{2-1} \\ t_{1-3} \\ t_{3-1} \\ t_{2-3} \\ P_1 \\ P_3 \end{array} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix}}^{\text{Nós}} \\ \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} t_{2-1} \\ t_{1-3} \\ t_{3-1} \\ t_{2-3} \\ P_1 \\ P_3 \end{array}} \right\} \text{Medidas} \quad \rightarrow \quad \det \left( W_{P-\delta}^T \cdot W_{P-\delta} \right) = 28 \quad (4.9)$$

$$W_{Q-V} = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 2 & 3 \end{matrix}}^{\text{Nós}} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & u_{2-1} \\ 0 & 0 & -1 & u_{1-3} \\ 0 & 0 & 1 & u_{3-1} \\ 0 & 1 & -1 & u_{2-3} \\ 0 & -1 & -1 & Q_1 \\ 0 & -1 & 2 & Q_3 \\ -1 & 0 & 0 & |V_1| \\ -1 & 1 & 0 & |V_2| \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|c} \end{array}} \right\} \text{Medidas} \end{array} \rightarrow \det(W_{Q-V}^T \cdot W_{Q-V}) = 64 \quad (4.10)$$

O foco do trabalho proposto por Crainic *et. al* [45] é a análise da observabilidade algébrica na presença de contingências. Para exemplificar isso, considere que as medidas de injeção nas barras 1 e 3 e as medidas de fluxo nos ramos 1-2 e 2-3 sejam perdidas devido a uma série de contingências. As matrizes de incidência  $W_0$  para os subproblemas  $P - \delta$  e  $Q - V$  resultariam:

$$W_{0_{P-\delta_{conting}}} = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix}}^{\text{Nós}} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & t_{1-3} \\ -1 & 0 & 1 & t_{3-1} \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|c} \end{array}} \right\} \text{Medidas} \end{array} \quad (4.11)$$

$$W_{0_{Q-V_{conting}}} = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}}^{\text{Nós}} \\ \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & u_{1-3} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & u_{3-1} \\ -1 & 1 & 0 & 0 & |V_1| \\ -1 & 0 & 1 & 0 & |V_2| \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{cccc|c} \end{array}} \right\} \text{Medidas} \end{array} \quad (4.12)$$

Retirando-se uma coluna não-nula das matrizes anteriores, por exemplo a coluna referente ao nó 1, ocasionaria as matrizes de incidência  $W$ :

$$W_{P-\delta_{conting}} = \left[ \begin{array}{cc|c} \overbrace{2 \quad 3}^{\text{Nós}} & & \\ \hline 0 & -1 & t_{1-3} \\ 0 & 1 & t_{3-1} \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}} \right\} \text{Medidas} \quad \rightarrow \quad \det \left( W_{P-\delta_{conting}}^T \cdot W_{P-\delta_{conting}} \right) = 0 \quad (4.13)$$

$$W_{Q-V_{conting}} = \left[ \begin{array}{ccc|c} \overbrace{0 \quad 2 \quad 3}^{\text{Nós}} & & & \\ \hline 0 & 0 & -1 & u_{1-3} \\ 0 & 0 & 1 & u_{3-1} \\ -1 & 0 & 0 & |V_1| \\ -1 & 1 & 0 & |V_2| \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}} \right\} \text{Medidas} \quad \rightarrow \quad \det \left( W_{Q-V_{conting}}^T \cdot W_{Q-V_{conting}} \right) = 2 \quad (4.14)$$

Assim, com as contingências descritas, o sistema perde a observabilidade algébrica para o subproblema  $P - \delta$ . Isso era esperado uma vez que no cenário avaliado, não há nenhuma medida associada ao nó 2, o que resulta na perda da observabilidade da rede.

#### 4.1.2 Criação de Planos de Medição Redundantes e dos Digrafos de Medição

O digrafo gerado para cada plano de medição pode ser obtido facilmente a partir da análise das matrizes definidas em (4.7) e (4.8). Para isto, considere um grafo  $\mathbf{Gr} = [\underline{a} \ \underline{b}]$ , onde  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$  são os vetores com os vértices emissor e receptor que formam as arcos do digrafo, respectivamente. A lógica elaborada para a criação dos grafos a partir das matrizes de incidência  $W_0$  obedece às regras de montagem dos vetores da seguinte forma:

- Para medições de fluxo entre as barras  $k$  e  $m$ , o vértice emissor é  $k$  e o vértice receptor é  $m$ .
- Para medições de injeção na  $k$ -ésima barra, o valor positivo da linha relativa a essa medição indica o número de repetições do vértice emissor  $k$  e as colunas dos demais elementos não nulos dessa linha indicam os respectivos vértices receptores.
- Para medições de magnitude de tensão na  $k$ -ésima barra, o vértice emissor é  $k$  e o vértice receptor é 0.

Assim, obtém-se os digrafos para os planos  $P - \delta$  e  $Q - V$ , respectivamente.

$$\mathbf{Gr}_{P-\delta} = \begin{matrix} \left[ \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{array} \right] & \rightarrow & \begin{matrix} t_{2-1} \\ t_{1-3} \\ t_{3-1} \\ t_{2-3} \\ P_1 \\ P_1 \\ P_3 \\ P_3 \end{matrix} \end{matrix} \quad \mathbf{Gr}_{Q-V} = \begin{matrix} \left[ \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{array} \right] & \rightarrow & \begin{matrix} u_{2-1} \\ u_{1-3} \\ u_{3-1} \\ u_{2-3} \\ Q_1 \\ Q_1 \\ Q_3 \\ Q_3 \\ |V_1| \\ |V_2| \end{matrix} \end{matrix} \quad (4.15)$$

Os digrafos de medição  $P - \delta$  e  $Q - V$  correspondentes são apresentados nas Figs. 4 e 5, respectivamente.

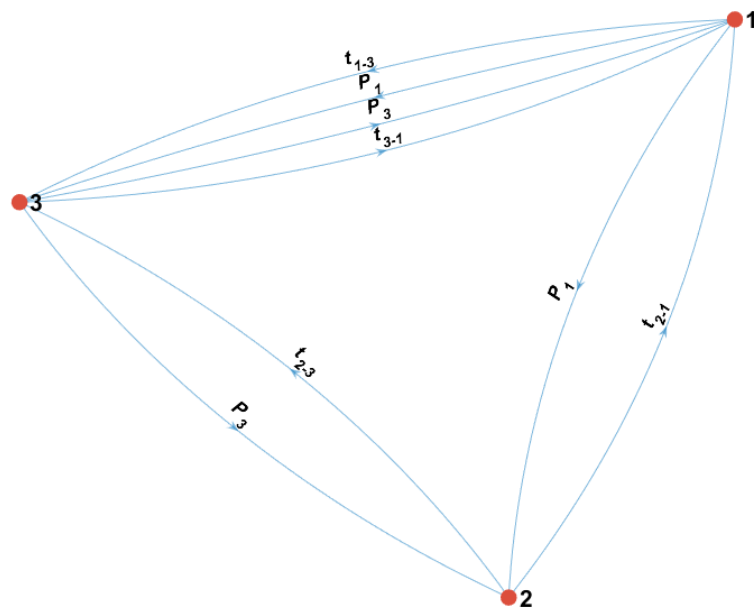


Figura 4 – Digrafo de medição  $P - \delta$  do sistema teste de 3 barras.

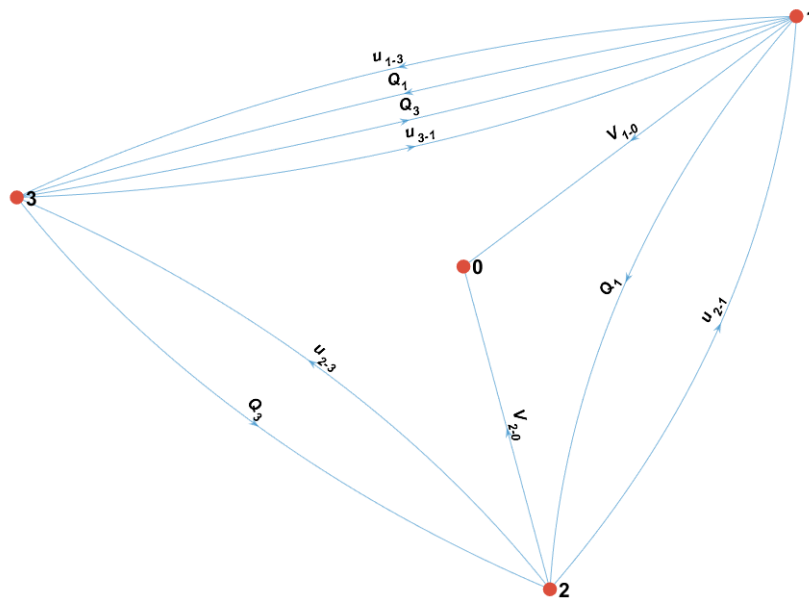


Figura 5 – Digrafo de medição  $Q - V$  do sistema teste de 3 barras.

Uma falha típica de sistemas de supervisão se deve à formação de conjuntos e medidas críticas. Ressalta-se que é medida crítica aquela que é não redundante com nenhuma outra, sendo essencial para a observabilidade da rede, i.e., a perda de uma medida crítica torna o sistema não observável [47]. Erros grosseiros em medidas críticas não são detectáveis e conseqüentemente, também não são identificáveis uma vez que os resíduos associados a tais medidas são nulos [48, 49, 50]. Por sua vez, configura-se um conjunto crítico de medidas quando a supressão de qualquer uma medida transformam as medidas remanescentes desse conjunto em medidas críticas. A presença de erros grosseiros em medidas que formam conjuntos críticos, são detectáveis porém não são identificáveis já que os resíduos normalizados para medidas de conjuntos críticos são iguais [48, 51]. Logo, é de grande importância o planejamento correto dos planos de medição, pois a eficácia de quaisquer métodos de detecção e identificação de medidas errôneas depende de sistemas de monitoramento isentos desses tipos de falhas.

Neste trabalho, a identificação de tais medidas foi feita analisando as colunas das matrizes de incidência  $W_0$  representativas das medições e dos nós do sistema. Assim sendo, considere que cada estado da rede deva ser monitorado por um número fixo e arbitrário de medições, por exemplo:  $n_{target} = 3$ . Na elaboração do plano de medição, a existência de uma coluna com um único elemento não nulo seja no plano  $P - \delta$  ou  $Q - V$  indicará que a medida referente a linha desse elemento é uma medida crítica. Em outras palavras, somente aquela medida será considerada para estimar o estado correspondente àquela coluna. Se o número de medidas (elementos não nulos) em determinada coluna for  $1 < x < 3$ , então tais medidas formarão um par crítico. Como exemplo, no plano  $Q - V$  mostrado na Figura 5, tem-se dois elementos não-nulos referentes às medidas  $|V_1|$  e  $|V_2|$  na coluna do nó fictício na matriz (4.8). Assim, tais medidas formam um par crítico em

relação ao nó fictício.

Essa análise por colunas também é importante para garantir a redundância local de medidas. Esse conceito aplicado na estimação de estados foi inicialmente proposto por Mili *et al* [40] e baseia-se nas definições de conjunto fundamental e máxima fração de contaminação ( $f_{j,max}$ ) de medidas associadas a cada estado. O conjunto fundamental,  $Z_j = \{z_i\}$ , pode ser definido como sendo um conjunto de medidas associadas a cada variável de estado  $x_j$ , ou seja, o conjunto de medidas em cada coluna da matriz jacobiana é um conjunto fundamental. Dessa forma, a quantidade máxima permitida de medidas com erros grosseiros associadas a cada estado para que o estimador não colapse é dado pela expressão:

$$f_{j,max} \leq \left\lceil \frac{m_j - 1}{2} \right\rceil, \quad (4.16)$$

onde  $m_j$  é o número de medidas do  $j$ -ésimo conjunto fundamental  $Z_j$ , e a operação  $\lceil \cdot \rceil$  é a parte inteira do argumento.

Logo, se a inequação expressa em (4.16) não for violada, conclui-se que os estimadores produzam estimativas válidas dado que as medidas com erros grosseiros tenham sido corretamente identificadas.

É interessante observar que tal conceito também pode ser associado com as matrizes de incidência representativas das medições e dos nós da rede, uma vez que a composição dessas matrizes são muito parecidas com a composição da matriz jacobiana. Assim sendo, o agrupamento das matrizes de incidência (4.9) e (4.10), suprimindo a coluna referente ao nó fictício, transforma-se na matriz resultante  $W_R$ . Se a matriz resultante for espelhada (duplicando-se as colunas), gera-se uma estrutura idêntica à estrutura da matriz jacobiana formulada no plano complexo com medições reais, conforme a equação (4.17).

$$W_R = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & |V_1| \\ 0 & 1 & 0 & |V_2| \\ 1 & 0 & -1 & t_{1-3} \\ -1 & 1 & 0 & t_{2-1} \\ 0 & 1 & -1 & t_{2-3} \\ -1 & 0 & 1 & t_{3-1} \\ 1 & 0 & -1 & u_{1-3} \\ -1 & 1 & 0 & u_{2-1} \\ 0 & 1 & -1 & u_{2-3} \\ -1 & 0 & 1 & u_{3-1} \\ 2 & -1 & -1 & P_1 \\ -1 & -1 & 2 & P_3 \\ 2 & -1 & -1 & Q_1 \\ -1 & -1 & 2 & Q_3 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{ccccc|c} V_1 & V_2 & V_3 & V_1^* & V_2^* & V_3^* & \\ \hline \bullet & & & \bullet & & & |V_1| \\ & \bullet & & & \bullet & & |V_2| \\ \bullet & & \bullet & \bullet & & \bullet & t_{1-3} \\ \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & & t_{2-1} \\ & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & t_{2-3} \\ \bullet & & \bullet & \bullet & & \bullet & t_{3-1} \\ \bullet & & \bullet & \bullet & & \bullet & u_{1-3} \\ \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & & u_{2-1} \\ & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & u_{2-3} \\ \bullet & & \bullet & \bullet & & \bullet & u_{3-1} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & P_1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & P_3 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & Q_1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & Q_3 \end{array} \end{array} \quad (4.17)$$

Assim, ao assumir um valor arbitrário de medidas  $n_{target}$  para cada nó das matrizes de incidência no plano  $P - \delta$  e  $Q - V$  implicará também na melhora da redundância local de medições para estimação de cada estado. É importante notar também que em sistemas teste com transformadores *OLTC (On-Load Tap Changer)*, a estimação de posição dos tapes poderá ser alcançada com uma redundância local satisfatória e para tal, deve-se considerar adequadamente medições nas barras e nos ramos envolvidos na estimação de tais estados.

Vale ressaltar que tais análises são válidas para medições reais, ou seja, provenientes do sistema SCADA. Para planos de medição híbridos, compostos por medições reais e complexas, converte-se uma parcela das medições reais para o correspondente complexo e conjugado, e.g.  $P_1$  e  $Q_1$  se tornariam  $S_1$  e  $S_1^*$ , uma vez que a estrutura de esparsidade das submatrizes de medições reais e complexas são muito parecidas, ou seja, não há uma perda significativa da redundância local nessa conversão.

A observabilidade topológica da rede também pode ser estudada atentando-se para estrutura das matrizes de incidência de medidas aos nós da rede. Se houver colunas nulas, ou seja, se houver algum nó não interligado no grafo de medição, diz-se que o sistema não é topologicamente observável [45, 48]. Generalizando, se  $\det(W^T W) = 0$  para o plano  $P - \delta$  ou  $Q - V$  então trata-se de um sistema não observável topologicamente.

### 4.1.3 Algoritmo - Construção das AGOs

Muitos estudos de análise de observabilidade topológica são feitos considerando a existência de uma **AGO (Árvore Geradora Observável)**. Diz-se que o sistema é topologicamente observável, se e somente se, existe uma AGO  $P - \delta$  e  $Q - V$ , cada qual composta de  $N$  vértices do grafo de medição original e um sub-conjunto de  $N - 1$  arestas representativas de medidas diferentes capazes de conectar os vértices sem formar laços. Além disso, nenhum dos vértices do digrafo de medição deve ficar isolado.

Neste trabalho a criação das AGOs para os sistemas teste é construída em duas etapas. A primeira etapa é a obtenção de uma árvore geradora considerando os grafos de medição obtidos. Analisando a documentação de grafos do MATLAB, a função `minspantree()` [52] realiza a formação das árvores geradoras. Essa função utiliza os algoritmos de Prim [53] e de Kruskal [54], dependendo do método explicitado para cada grafo. O método padrão (*dense*) utiliza o algoritmo de Prim que parte de um nó inicial percorrendo os nós adjacentes e escolhendo o vértice interligado pela aresta de menor peso, gerando assim uma árvore geradora mínima em relação aos pesos de cada aresta. Já o método *sparse* se baseia no algoritmo de Kruskal que realiza uma ordenação crescente dos pesos de cada aresta, adicionando-se sequencialmente tais arestas à árvore geradora mínima desde que não formem um ciclo com a árvore anterior. Com isso, garante-se a existência de uma árvore geradora mínima com  $N$  vértices e  $N-1$  arestas.

A segunda etapa é realizada por um algoritmo que realiza a escolha das medidas para cada aresta da árvore geradora, evitando a repetição de medidas existentes na árvore. Esse algoritmo é denominado como "Medidas Únicas para Árvore Geradora", sendo referido como **MUAG** daqui em diante. É importante ressaltar que neste estágio, o plano de medição gerado já possui uma redundância adequada para cada nó da rede, ou seja, não há medidas ou pares críticos. Para cada aresta gerada pelos algoritmos de Kruskal ou de Prim, há um conjunto finito de medidas que pode ser associado com base nos grafos de medição  $P - \delta$  e  $Q - V$ . Assim, para a primeira aresta escolhe-se uma medição de forma randômica dentre as possíveis. Para as demais arestas, exclui-se essa medição de seus respectivos conjuntos de medições possíveis. Generalizando, escolhe-se uma medição por vez para cada aresta da árvore geradora, retirando-se a medida escolhida dos demais conjuntos de medidas associados às demais arestas. Isso evita a repetição de uma mesma medição associada a diferentes arestas. Dessa forma, as Tabela 3 e 4 mostram a operacionalização do algoritmo MUAG para a criação das AGOs nos planos  $P - \delta$  e  $Q - V$ , respectivamente.



Tabela 3 – Escolha das medições para a criação da AGO  $P - \delta$  do sistema de 3 barras

Aresta da árvore geradora	Conjunto de medidas possíveis	Medida escolhida
1-2	$t_{1-2}$ $t_{2-1}$ $P_1$ $P_2$	$t_{2-1}$
1-3	$t_{1-3}$ $t_{3-1}$ $P_1$ $P_3$	$t_{3-1}$

Tabela 4 – Escolha das medições para a criação da AGO  $Q - V$  do sistema de 3 barras

Aresta da árvore geradora	Conjunto de medidas possíveis	Medida escolhida
1-2	$u_{1-2}$ $u_{2-1}$ $Q_1$ $Q_2$	$Q_1$
1-3	$u_{1-3}$ $u_{3-1}$ <del><math>Q_1</math></del> $Q_3$	$u_{1-3}$
2-0	$V_{2-0}$	$V_{2-0}$

Portanto, permite-se gerar possíveis AGOs  $P - \delta$  e  $Q - V$ , tal como:

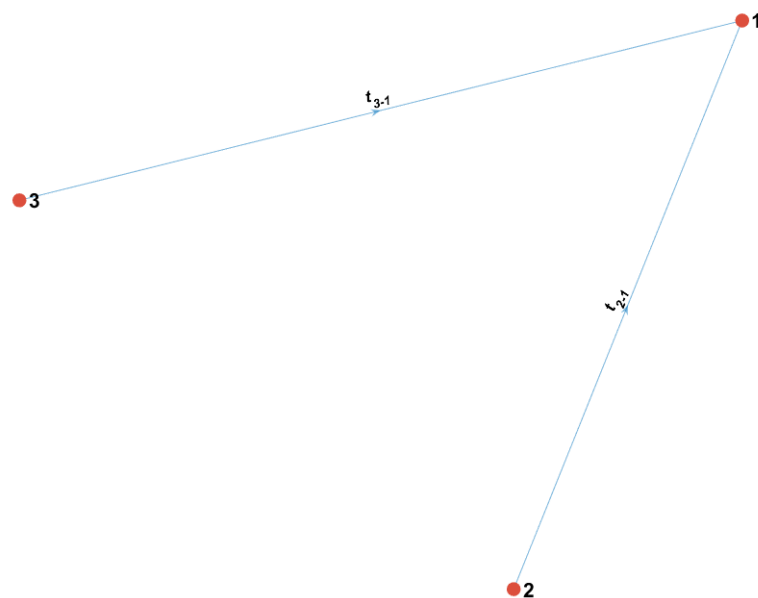
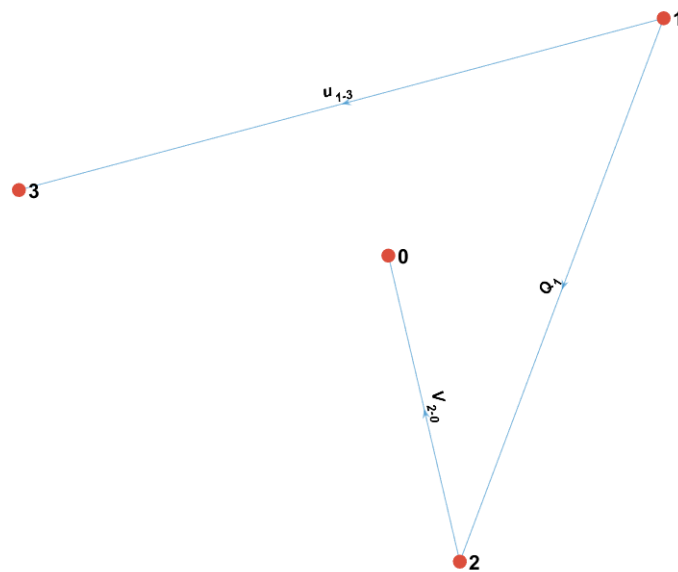


Figura 6 – AGO  $P - \delta$  do sistema teste de 3 barras

Figura 7 – AGO  $Q - V$  do sistema teste de 3 barras

No presente trabalho, não foram atribuídos pesos aos arcos referentes a cada medição para geração das AGOs. Entretanto, é interessante observar que as variâncias dos erros de medição das medidas podem ser consideradas como sendo os pesos dos arcos correspondentes. Tal recomendação permitiria concluir que a AGO obtida de sistemas híbridos quase sempre é aquela formada por medidas com menor erro de medição, ou seja, é formada majoritariamente de medidas providas pelo sistema fasorial sincronizado - PMU.

#### 4.1.4 Resumo do Algoritmo de Observabilidade Algébrico-Topológico

Para ilustrar a operacionalização dos conceitos abordados neste capítulo, a Fig. 8 mostra o fluxograma para análise da observabilidade algébrica e topológica utilizada neste trabalho.

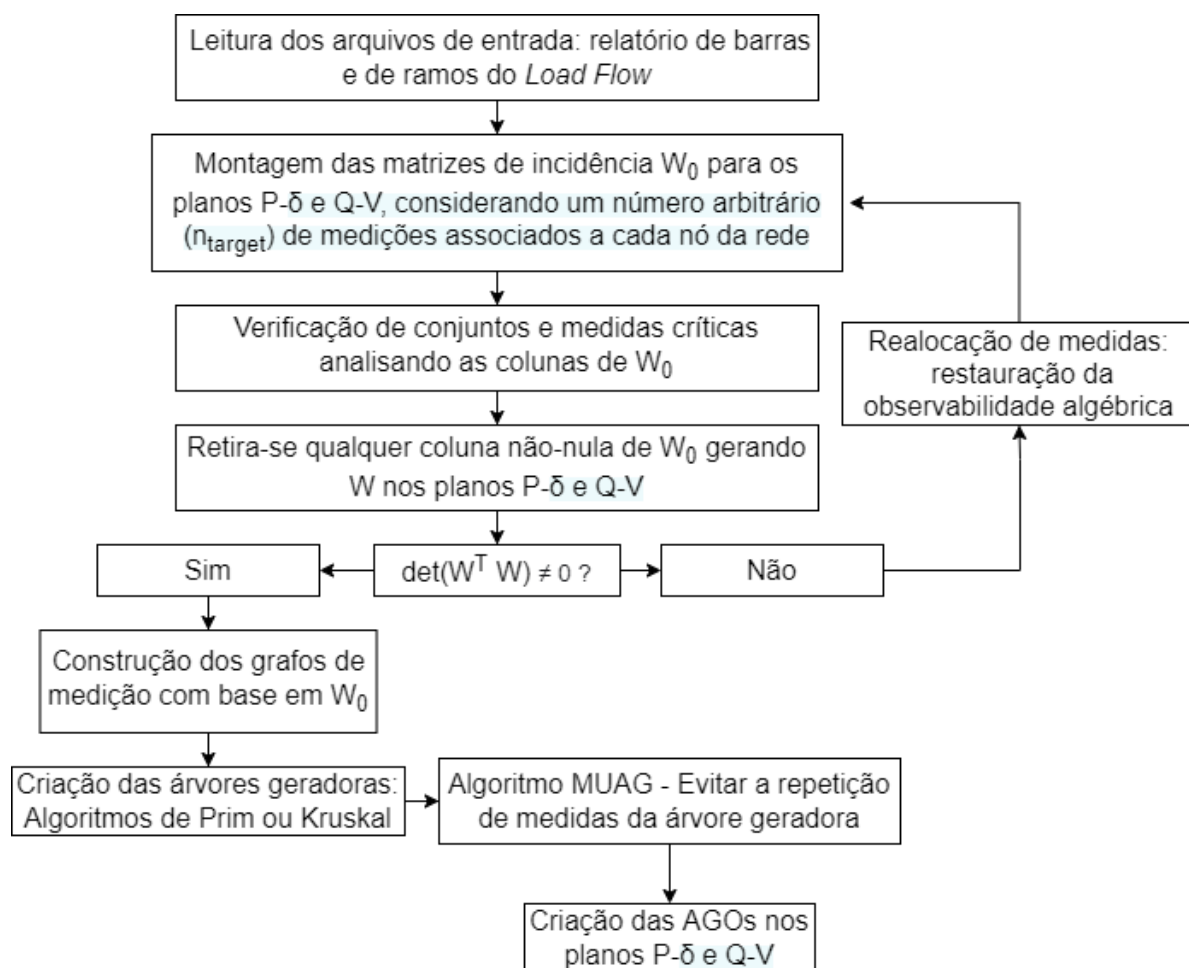


Figura 8 – Fluxograma do algoritmo de análise de observabilidade algébrico-topológico

Uma funcionalidade interessante do algoritmo proposto na Fig. 8 é que se o critério de observabilidade algébrica não é satisfeito, realiza-se uma alocação adicional de medidas adjacentes aos nós deficitários de informações (medições). Tal fato pode ocorrer por conta de que a observabilidade topológica não assegura a observabilidade algébrica, enquanto que o contrário sempre se verifica [46]. Apesar desta funcionalidade do algoritmo, os planos de medições, independentemente do sistema teste usado, foram gerados com a adequada redundância local de medições em observância ao ajuste imposto à variável  $n_{target}$ . Desta forma, garantiu-se a observabilidade algébrica dos sistemas testes avaliados sem a necessidade de acrescentar novas medidas.

Vale ressaltar que este algoritmo foi utilizado para todos os sistemas teste, inclusive para os equivalentes do SIN. Como exemplo da operacionalização proposta para sistemas de maior porte, tem-se os digrafos de medição e as AGOs no plano P- $\delta$  expressos nas Figs. 9 e 10 e no plano Q-V expressos nas Figs. 11 e 12, respectivamente. Escolheu-se o sistema teste IEEE-118 para ilustração, uma vez que sistemas de maior porte ocasionariam uma poluição visual nas figuras em decorrência da densidade de conexões dos grafos.

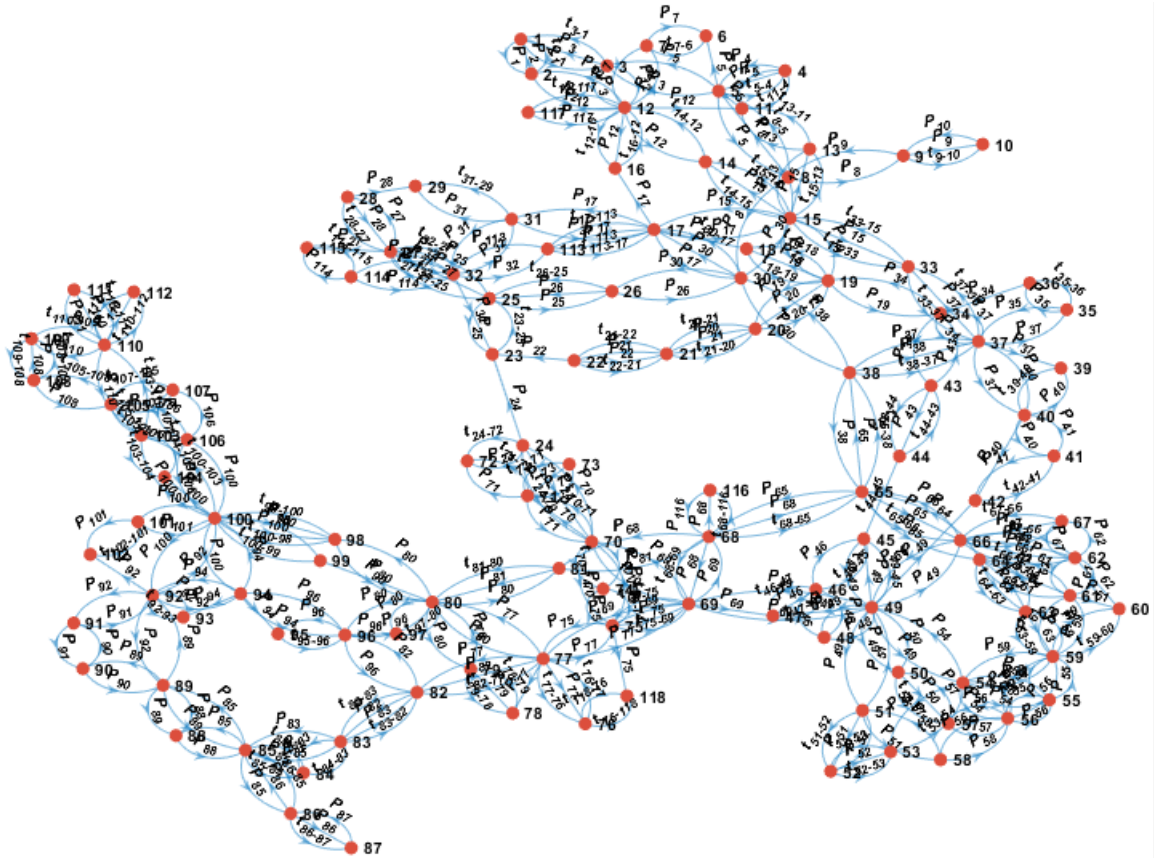


Figura 9 – Digráfico de medição  $P\text{-}\delta$  para o sistema IEEE-118

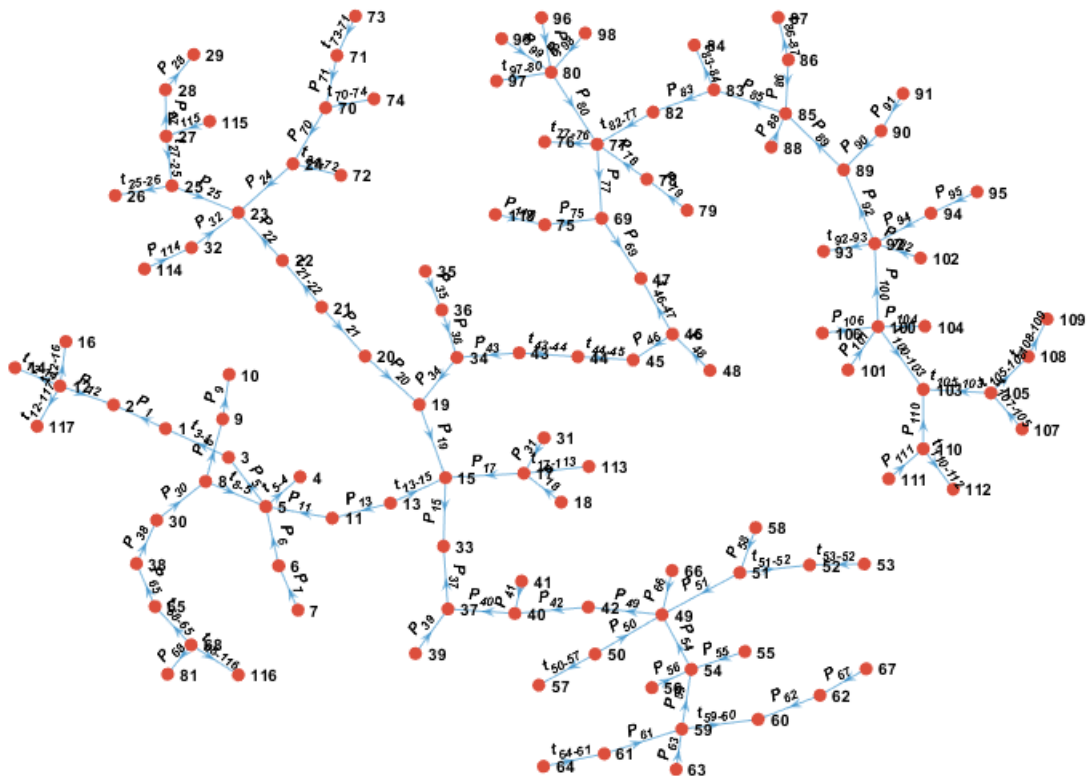


Figura 10 – Possível AGO  $P\text{-}\delta$  para o sistema IEEE-118

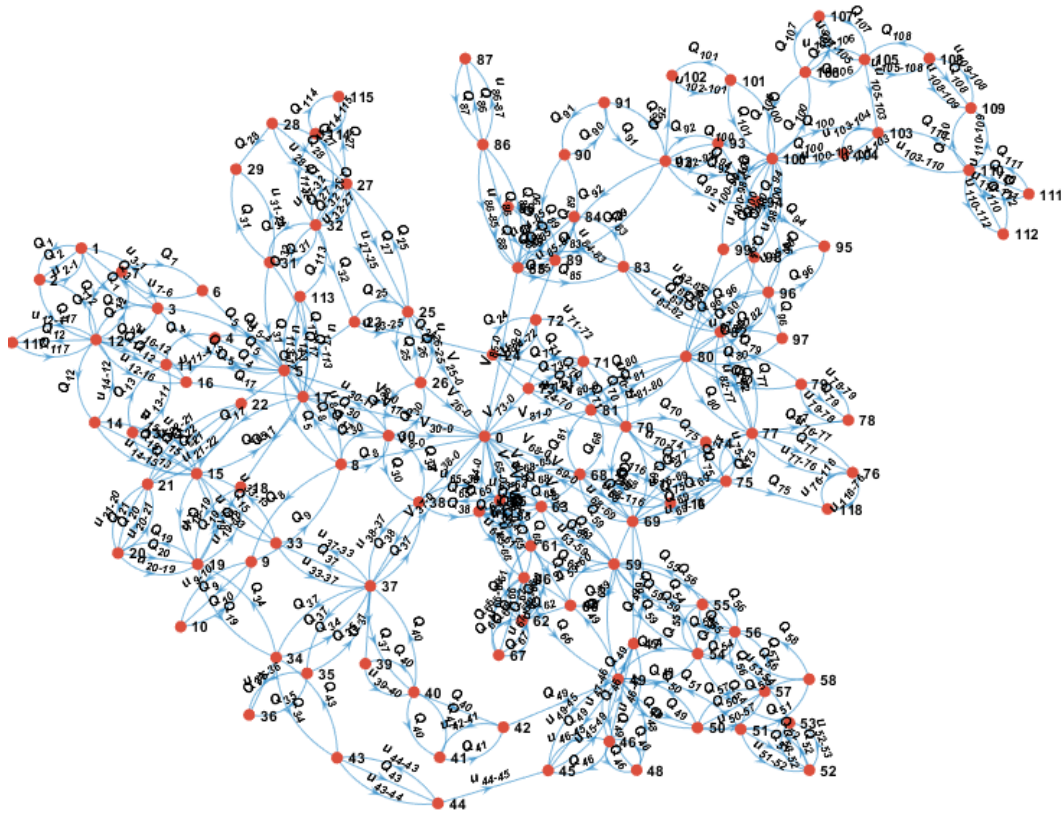


Figura 11 – Digrafo de medição Q-V para o sistema IEEE-118

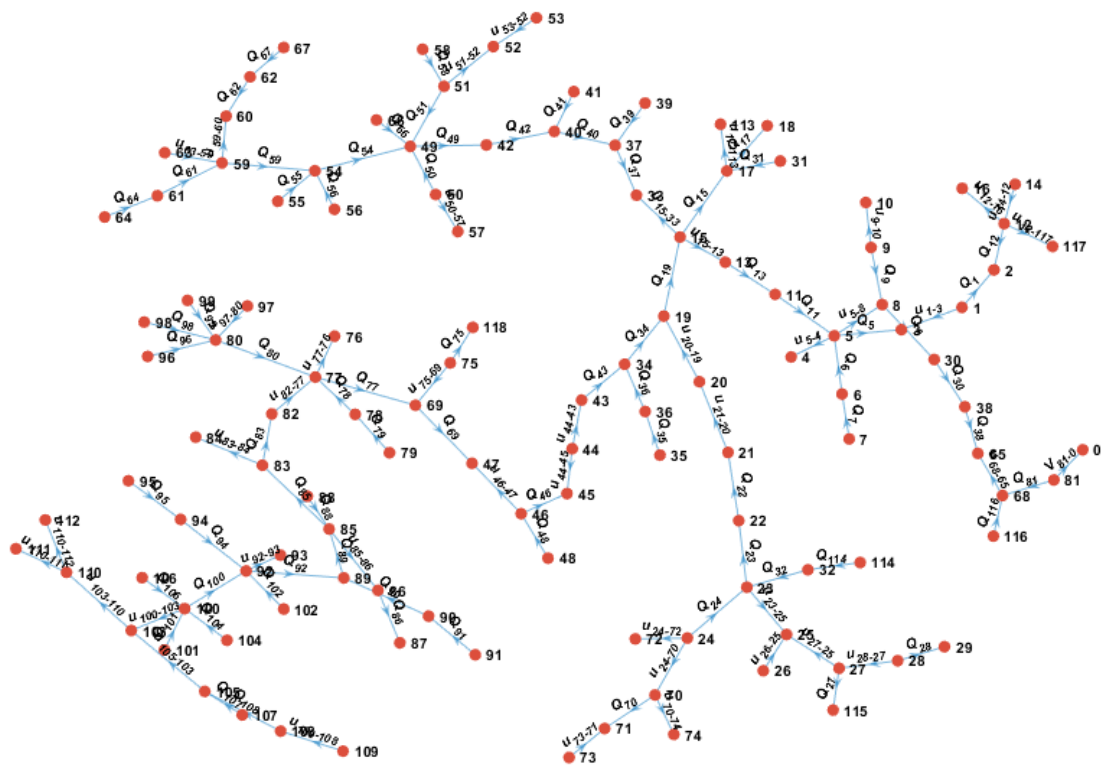


Figura 12 – Possível AGO Q-V para o sistema IEEE-118

## 4.2 Conclusões Parciais

O algoritmo para análise da observabilidade algébrica dos sistemas testes abordados neste capítulo é de fácil implementação e tem um custo computacional reduzido. Tais fatores decorrem da existência de matrizes unimodulares obtidas pela análise topológica da rede e do plano de medição estabelecido. Essas matrizes, denominadas como matrizes de incidência, são de fácil construção, esparsas e não tem risco de instabilidade numérica e além disso podem ser traduzidas facilmente para aplicações computacionais baseadas na teoria de grafos, fomentando a elaboração dos grafos de medição dos subproblemas  $P - \delta$  e  $Q - V$ . Não somente isso, tais aplicações são a base para a geração de AGOs, condição necessária e suficiente para garantir a observabilidade topológica para determinado plano de medição. Os algoritmos de Prim e de Kruskal, já presentes na documentação do MATLAB, realizam a criação das árvores geradoras com base em determinado grafo de medição. Um segundo algoritmo de simples implementação é utilizado para evitar a repetição na associação de medidas na árvore geradora criada. Dessa forma, a junção dessas duas etapas fomenta a criação das AGOs para os subproblemas  $P - \delta$  e  $Q - V$ , evitando-se elevado esforço computacional já que se trata de um processo de natureza combinatorial.

A análise numérica de tais matrizes de incidência evidenciam outros resultados interessantes. O agrupamento das matrizes completas de incidência  $W_0$  para os planos  $P - \delta$  e  $Q - V$  originam uma matriz resultante com estrutura de esparsidade idêntica à matriz Jacobiana formulada no plano complexo e medições puramente reais. Logo, sabendo-se da lei de formação de tais matrizes de incidência é oportuno definir um número mínimo de medidas ( $n_{target}$ ) associadas a cada nó. Como consequência, os planos de medição  $P - \delta$  e  $Q - V$  resultam isentos de conjuntos e medidas críticas além de assegurar a observabilidade algébrica. Notadamente, tal estratégia provê as condições necessárias e suficientes para o estimador de estados não colapsar, isto é, lograr êxito na etapa de processamento de erros grosseiros, e.g., detecção, identificação e recuperação de medidas errôneas.

Uma possibilidade futura da operacionalização de tal algoritmo seria o de criar planos de medição considerando um número variável de medições associadas a cada nó da rede dependendo da necessidade operativa. Na escolha dessas medições poder-se-ia atribuir um peso maior às medidas de injeção de potência uma vez que tal estratégia fornece um número maior de arestas no grafo de medição, o que pode assegurar mais facilmente a observabilidade algébrica. No entanto, apesar dessa tarefa ser executada *offline*, ressalva-se que isso ocasiona um maior enchimento das matrizes de incidência e consequentemente uma degradação na eficiência computacional face a geração dos grafos de medição. A contrapartida é a maior seletividade de medidas da AGO construída face a atribuição de pesos associados às arestas do grafo de medição. Esses pesos podem ser, por exemplo, a variância dos erros de medição, o que implicaria em assumir AGOs formadas majoritariamente por medições providas por PMUs nos sistemas com medições híbridas.

## 5 Resultados Numéricos

Neste capítulo apresenta-se o comparativo entre a estimação clássica e robusta com medições híbridas entre estimadores formulados no plano real e complexo para diferentes sistemas teste. Os estimadores formulados no plano real foram embasados em [55] e [56]. Inicialmente apresenta-se um estudo de caso de um sistema de 5 barras evidenciando de maneira detalhada os procedimentos utilizados para a estimação de estados de cada sistema analisado. Em sequência, será demonstrado a eficiência dos estimadores formulados no plano complexo para o processamento de erros grosseiros, tanto pelo método do maior resíduo normalizado (WLS) quanto pela abordagem robusta (SHGM). Por fim, apresenta-se um comparativo do desempenho dos dois estimadores formulados nos domínios numéricos dos reais e dos complexos.

As simulações foram realizadas em MATLAB utilizando-se de técnicas de esparsidade. A fatoração da matriz jacobiana foi realizada com auxílio da função *lsqminnorm()* [34] que se baseia na fatoração QR associada a métodos de ordenação. Os sistemas teste analisados foram IEEE-14, 30, 57, 118 e os equivalentes do SIN de 340, 730 e 1916 barras. Os resultados numéricos foram realizados em um Intel(R) Core(TM) i7-7700HQ CPU @ 2.80GHz 2.81 GHz, 16 GB de RAM e sistema operacional de 64 bits. Utiliza-se o perfil plano de tensões (*flat-start*) para inicialização de todas as variáveis de estado.

### 5.1 Estudo de caso: Sistema de 5 barras

#### 5.1.1 Pré-processamento dos Dados

Considere um sistema teste de 5 barras conforme a Fig. 13 com os parâmetros da rede expressos nas Tabelas 5 e 6. A base utilizada é de 100 MVA.

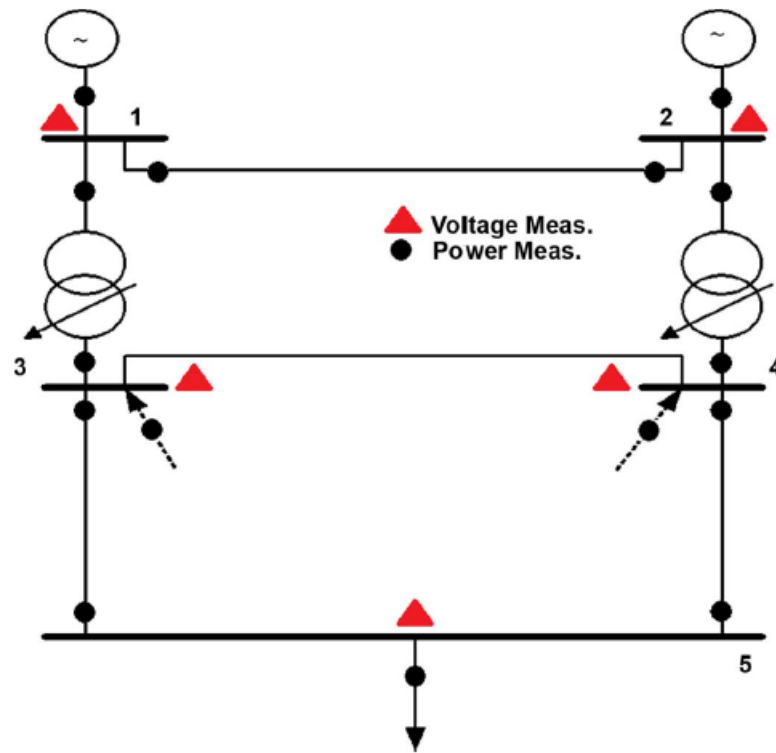


Figura 13 – Diagrama unifilar do sistema teste de 5 barras [2]

Tabela 5 – Dados de linha do sistema teste de 5 barras

Ramo	Série		Transformadores			Shunt	
	R	X	Tape min	Tape max	Tape	Carregamento	Y/2
	pu	pu	pu	pu	pu	MVA	pu
1-2	0.0100	0.0500				125.	0.6250
1-3	0.0000	0.2500	0.85	1.15	1.10		
2-4	0.0000	0.2500	0.85	1.15	1.05		
3-4	0.0241	0.1080				2.84	0.0142
3-5	0.0011	0.0016				12.5	0.0625
4-5	0.0415	0.1420				3.66	0.0183

Tabela 6 – Dados de barra do sistema teste de 5 barras

Barra	Tipo	Tensão		Carga		Geração		Limites Reativo		Shunt
		V	$\theta$	$P_L$	$Q_L$	$P_G$	$Q_G$	$Q_{max}$	$Q_{min}$	B
		pu	graus	pu	pu	pu	pu	pu	pu	pu
1	PV	1.050				1.00		9.99	-9.99	
2	Slack	1.000	0.000							
3	PQ			0	0					0.5
4	PQ			0	0					
5	PQ			2.00	0.95					1



Inicialmente, utilizou-se do algoritmo de Newton-Raphson [57] para obtenção da solução de fluxo de potência. A tolerância adotada foi de  $10^{-3}$ . Assim, tem-se nas Tabelas 7 e 8 os relatórios de saída referentes às barras e aos ramos, respectivamente.

Tabela 7 – Relatório de barras para o sistema teste de 5 barras

Barra	Tensão		Potência Injetada	
	V	$\theta$	P	Q
	pu	graus	pu	pu
1	1.0500	-0.844	1.0000	0.3238
2	1.0000	0.000	1.0277	-1.7325
3	1.0114	-17.320	0.0000	0.0000
4	1.0052	-13.932	0.0000	0.0000
5	1.0096	-17.464	-2.0000	-0.9500

Tabela 8 – Relatório de ramos para o sistema teste de 5 barras

Número	Ramo	Fluxo de Potência		Transformadores	
		P	Q	Tape	Lado
		pu	pu	pu	
1	1-2	-0.0952	0.3823		
	2-1	0.1057	-1.6439		
2	1-3	1.0952	-0.0585	1.1000	1
	3-1	-1.0952	0.3885	1.1000	1
3	2-4	0.9220	-0.0886	1.0500	2
	4-2	-0.9220	0.3251	1.0500	2
4	3-4	-0.5141	0.1745		
	4-3	0.5212	-0.1717		
5	3-5	1.6093	-0.0516		
	5-3	-1.6065	-0.0720		
6	4-5	0.4008	-0.1533		
	5-4	-0.3935	0.1413		

Os relatórios de fluxo de potência foram utilizados como dados de entrada para a elaboração de um plano de medição sem medidas e conjuntos críticos, conforme descrito no capítulo anterior. Além disso, considerou-se um mínimo de 3 medições associadas a cada nó da rede. Considerando o algoritmo de observabilidade algébrica expresso no capítulo anterior, as matrizes de incidência  $W_0$  para o plano de medição gerado são expressas a seguir:

$$W_{0_{P-\delta}} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{10em}}^{\text{Nós}} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} t_{1-2} \\ t_{1-3} \\ t_{2-1} \\ t_{2-4} \\ t_{3-1} \\ t_{3-5} \\ t_{4-2} \\ t_{4-5} \\ t_{5-3} \\ t_{5-4} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{array} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} \overbrace{\hspace{10em}}^{\text{Nós}} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right]} \right\} \begin{array}{l} \text{Medidas} \end{array} \end{array} \quad (5.1)$$

$$W_{0_{Q-V}} = \begin{array}{c} \text{Nós} \\ \hline \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} u_{1-2} \\ u_{1-3} \\ u_{2-1} \\ u_{2-4} \\ u_{3-1} \\ u_{3-5} \\ u_{4-2} \\ u_{4-5} \\ u_{5-3} \\ u_{5-4} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ |V_1| \\ |V_2| \\ |V_3| \\ |V_4| \\ |V_5| \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} \text{Nós} \\ \hline \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]} \right\} \text{Medidas} \end{array} \quad (5.2)$$

Excluindo uma coluna qualquer não-nula das matrizes (5.1) e (5.2) gerará matrizes de incidência  $W$  e  $\det(W^T \cdot W) \neq 0$  para os sub-problemas  $P-\delta$  e  $Q-V$ . Logo, o sistema é algebricamente observável.

Dessa forma, os digrafos de medição para os planos  $P-\delta$  e  $Q-V$  são construídos conforme as Figs. 14 e 15. Adotou-se um valor mínimo de  $n_{target} = 3$  medições associadas a cada nó. Considerando o cenário de medições puramente reais, o índice de redundância global é  $p = m/n = 35/14 = 2.5$ . Adicionou-se medidas de fluxo e de injeção ao plano de medição gerado para melhorar a redundância local na estimação de tapes.

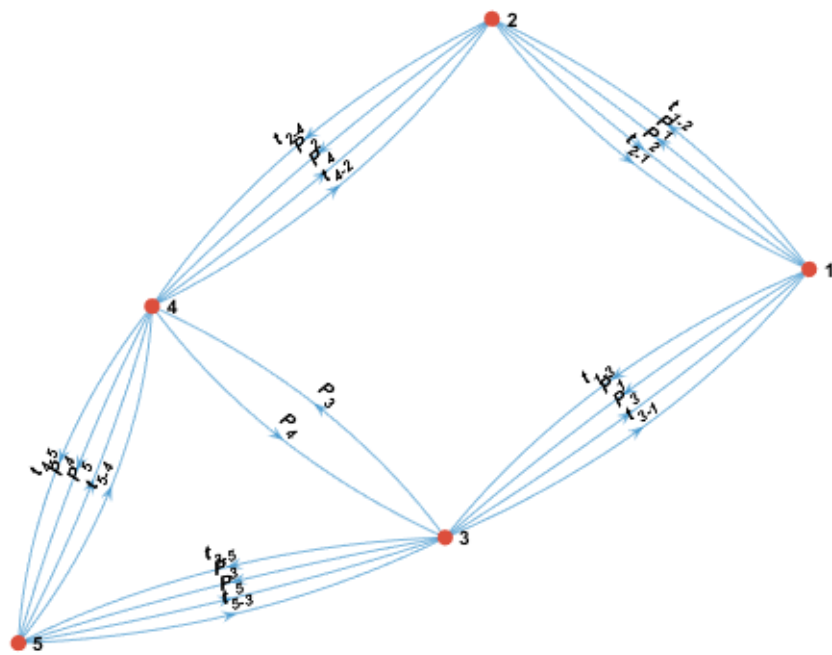


Figura 14 – Digrafo  $P - \delta$  do sistema teste de 5 barras

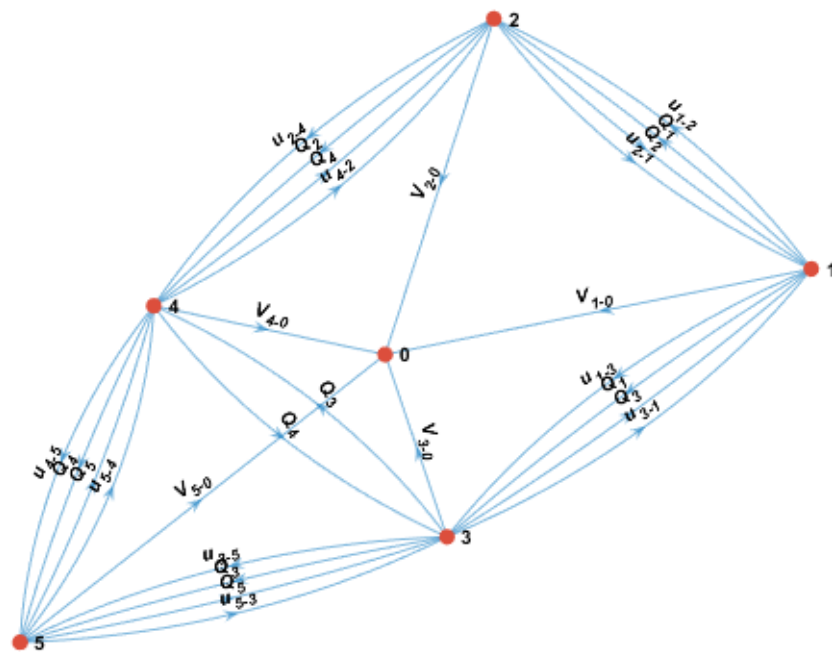


Figura 15 – Digrafo  $Q - V$  do sistema teste de 5 barras

Em sequência são evidenciadas as AGOs para os respectivos planos, evidenciando a observabilidade topológica da rede.

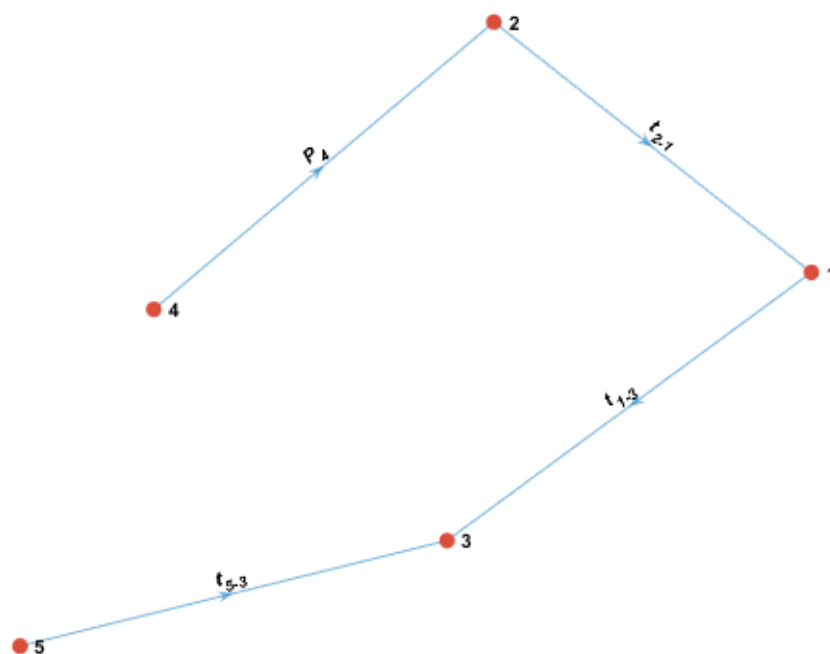


Figura 16 – Possível AGO  $P - \delta$  do sistema teste de 5 barras

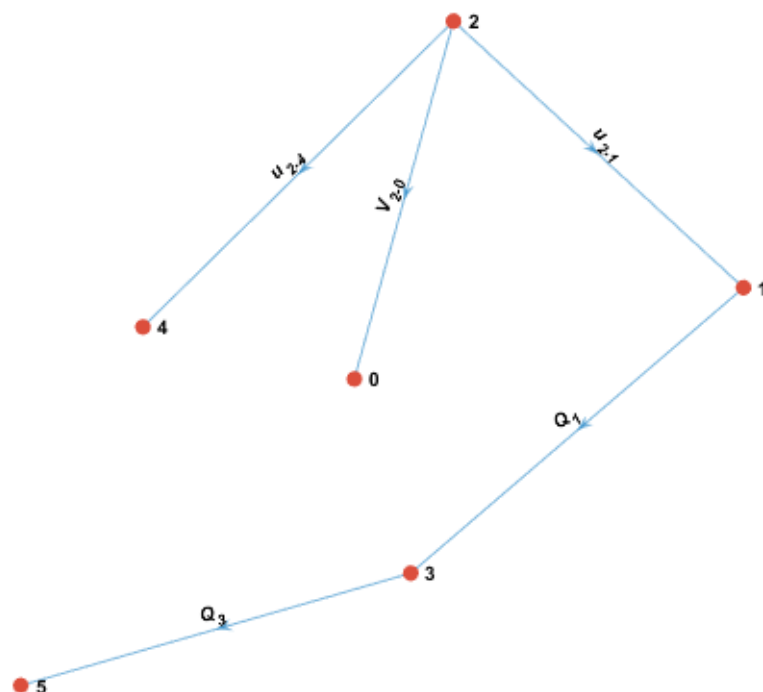


Figura 17 – Possível AGO  $Q - V$  do sistema teste de 5 barras

Sendo garantida a observabilidade topológica, parte-se então para a estimação de estados.

### 5.1.2 Estimação Clássica de Estados - WLS

Para emular um cenário de medições híbridas, considere que as medições complexas sejam os fluxos e as injeções mensuráveis, oriundas das medições fasoriais de tensão nas barras e corrente nos ramos por meio de PMUs. As medições reais são as magnitudes de tensão do sistema SCADA. A Tabela 9 apresenta o valor verdadeiro e o medido para cada tipo de medição monitorada. Adotou-se medições com distribuição gaussiana com média zero e desvio-padrão evidenciados nas Tabelas 1 e 2.

Tabela 9 – Valor real e medido para cada medição

Medida	Valor real	Valor medido
$\theta_2$	0.0000	0.0000
$ V_1 $	1.0500	1.0499
$ V_2 $	1.0000	1.0002
$ V_3 $	1.0114	1.0109
$ V_4 $	1.0052	1.0061
$ V_5 $	1.0096	1.0082
$S_{12}$	-0.0952+0.3823i	-0.0966+0.3809i
$S_{13}$	1.0952-0.0585i	1.0960-0.0577i
$S_{21}$	0.1057-1.6439i	0.1073-1.6423i
$S_{24}$	0.9220-0.0886i	0.9218-0.0888i
$S_{31}$	-1.0952+0.3885i	-1.0953+0.3884i
$S_{35}$	1.6093-0.0516i	1.6089-0.0520i
$S_{42}$	-0.9220+0.3251i	-0.9223+0.3248i
$S_{45}$	0.4008-0.1533i	0.4009-0.1532i
$S_{53}$	-1.6065-0.0720i	-1.6065-0.0720i
$S_{54}$	-0.3935+0.1413i	-0.3925+0.1423i
$S_1$	1.0000+0.3238i	1.0006+0.3244i
$S_2$	1.0277-1.7325i	1.0266-1.7336i
$S_3$	0.0000+0.0000i	-0.0004-0.0004i
$S_4$	0.0000+0.0000i	0.0007+0.0007i
$S_5$	-2.0000-0.9500i	-1.9987-0.9487i
$a_{13}$	1.1000	1.1000
$a_{24}$	1.0500	1.0500

Dessa forma, o vetor de medições será composto conforme (3.87), sendo  $\underline{z}_{re}$  e  $\underline{z}_{cp}$  expressos por

$$\underline{z}_{re} = (\theta_2, |V_1|, |V_2|, |V_3|, |V_4|, |V_5|)^T, \quad (5.3)$$

$$\underline{z}_{cp} = (S_{12}, S_{13}, S_{21}, S_{24}, S_{31}, S_{35}, S_{42}, S_{45}, S_{53}, S_{54}, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, a_{13}, a_{24})^T. \quad (5.4)$$

Já o vetor  $\underline{x}_c$  de variáveis de estado é expresso por

$$\underline{x}_c = \left( V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, a_{13}, a_{24}, V_1^*, V_2^*, V_3^*, V_4^*, V_5^*, a_{13}^*, a_{24}^* \right)^T. \quad (5.5)$$

Conforme visto na equação (3.85), a matriz jacobiana formulada no plano complexo com medições híbridas pode ser subdividida em submatrizes  $C$ ,  $D$  e  $F$ . Tais matrizes representam respectivamente as derivadas das funções de medições complexas em relação às variáveis de estado complexas e complexas conjugadas e as derivadas das funções de medições reais em relação às variáveis de estado complexas. No apêndice A mostram-se as submatrizes  $C$ ,  $D$  e  $F$  para cada iteração no processo de estimação de estados clássica para o sistema de 5 barras.

Assim, a atualização das variáveis de estado a cada iteração é mostrada na Tabela 10. A tolerância adotada foi de  $10^{-4}$ .

Tabela 10 – Processo iterativo do estimador clássico para o sistema de 5 barras

$x_i$	1ª Iteração	2ª Iteração	3ª Iteração	4ª Iteração
$V_1$	1.0361 $\angle$ -0.86°	1.0499 $\angle$ -0.85°	1.0500 $\angle$ -0.85°	1.0500 $\angle$ -0.85°
$V_2$	0.9841 $\angle$ 0.00°	0.9999 $\angle$ -0.00°	1.0001 $\angle$ -0.00°	1.0001 $\angle$ -0.00°
$V_3$	1.0433 $\angle$ -16.12°	1.0111 $\angle$ -17.36°	1.0110 $\angle$ -17.33°	1.0110 $\angle$ -17.33°
$V_4$	1.0243 $\angle$ -12.99°	1.0046 $\angle$ -13.96°	1.0049 $\angle$ -13.94°	1.0049 $\angle$ -13.94°
$V_5$	1.0422 $\angle$ -16.28°	1.0094 $\angle$ -17.50°	1.0093 $\angle$ -17.48°	1.0093 $\angle$ -17.48°
$a_{13}$	1.0886	1.1011	1.1003	1.1003
$a_{24}$	1.0362	1.0512	1.0506	1.0506
$\mathcal{J}(\hat{x}_c)$	1.64E+06	6.14E+04	8.64E+01	3.63E+00
$\ \Delta \underline{x}_c\ _\infty$	2.92E-01	3.94E-02	7.82E-04	8.91E-07

Dessa forma, verifica-se a eficácia do estimador clássico (WLS) formulado no domínio dos complexos uma vez que os valores estimados ficaram muito próximos aos verdadeiros expressos na Tabela 7. Além disso, verificou-se a precisão na estimação de tapes de OLTC.

#### 5.1.2.1 Processamento de Erros Grosseiros - Método do Maior Resíduo Normalizado

Para validar a eficiência do estimador clássico contra medidas errôneas, considere o mesmo plano de medição tratado no item anterior. Dois erros grosseiros de grande magnitude são alocados nas medidas  $|V_3|$  e  $S_{24}$ . Em  $|V_3|$  assume-se um erro de 30 vezes o desvio-padrão da medida e em  $S_{24}$  coloca-se um erro na parte real da medida equivalente a 40 vezes o desvio-padrão correspondente. Dessa forma, a Tabela 11 evidencia o método do maior resíduo normalizado para identificação e recuperação de medidas contaminadas para o estimador clássico formulado no plano complexo. O critério utilizado para detecção de medidas errôneas foi  $\mathcal{J}(\hat{x}_c) > \chi_{k,0.975}^2 = \chi_{26,0.975}^2 = 41.9232$ .

Tabela 11 – Método do maior resíduo normalizado com recuperação de medidas para o sistema de 5 barras

#	Medida	Real	Medido	$\hat{z}_i$	$r_{n_i}$	$\hat{\beta}_i$	$z_{rec_i}$
		$z_{true}$	$z_{meas}$	$1^\circ \text{ciclo} - \mathcal{J}(\hat{x}_c) = 2.85E + 03$			
1	$\theta_2$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0001	0.0000
2	$ V_1 $	1.0500	1.0499	1.0504	-0.6412	-0.0008	1.0499
3	$ V_2 $	1.0000	1.0002	1.0001	0.1606	0.0002	1.0002
4	$ V_3 $	<b>1.0114</b>	<b>1.0409</b>	<b>1.0206</b>	<b>24.1916</b>	<b>0.0289</b>	<b>1.0409</b>
5	$ V_4 $	1.0052	1.0061	1.0137	-8.9734	-0.0106	1.0061
6	$ V_5 $	1.0096	1.0082	1.0189	-12.7594	-0.0152	1.0082
7	$S_{12}$	-0.0952+0.3823i	-0.0966+0.3809i	-0.0785+0.3854i	-4.4105-1.1011i	-0.0269-0.0067i	-0.0966+0.3809i
8	$S_{13}$	1.0952-0.0585i	1.0960-0.0577i	1.0877-0.0646i	1.9525+1.6365i	0.0115+0.0097i	1.0960-0.0577i
9	$S_{21}$	0.1057-1.6439i	0.1073-1.6423i	0.0891-1.6474i	4.3791+1.2370i	0.0263+0.0074i	0.1073-1.6423i
10	$S_{24}$	<b>0.9220-0.0886i</b>	<b>1.1218-0.0888i</b>	<b>0.9824-0.0792i</b>	<b>33.1971-2.2767i</b>	<b>0.1976-0.0136i</b>	<b>0.9242-0.0752i</b>
11	$S_{31}$	-1.0952+0.3885i	-1.0953+0.3884i	-1.0877+0.3840i	-1.8641+1.0940i	-0.0115+0.0067i	-1.0953+0.3884i
12	$S_{35}$	1.6093-0.0516i	1.6089-0.052i	1.6083-0.0550i	0.1359+0.7107i	0.0008+0.0042i	1.6089-0.0520i
13	$S_{42}$	-0.9220+0.3251i	-0.9223+0.3248i	-0.9824+0.3426i	14.9519-4.4285i	0.0930-0.0275i	-0.9223+0.3248i
14	$S_{45}$	0.4008-0.1533i	0.4009-0.1532i	0.4153-0.1629i	-3.0843+2.0733i	-0.0165+0.0111i	0.4009-0.1532i
15	$S_{53}$	-1.6065-0.0720i	-1.6065-0.0720i	-1.6056-0.0710i	-0.2132-0.2384i	-0.0012-0.0014i	-1.6065-0.0720i
16	$S_{54}$	-0.3935+0.1413i	-0.3925+0.1423i	-0.4075+0.1518i	3.2156-2.0334i	0.0172-0.0109i	-0.3925+0.1423i
17	$S_1$	1.0000+0.3238i	1.0006+0.3244i	1.0092+0.3208i	-2.2824+0.9605i	-0.0152+0.0064i	1.0006+0.3244i
18	$S_2$	1.0277-1.7325i	1.0266-1.7336i	1.0715-1.7267i	-11.8536-1.8265i	-0.0783-0.0121i	1.0266-1.7336i
19	$S_3$	0.0000+0.0000i	-0.0004-0.0004i	-0.0132-0.0045i	3.7822+1.2038i	0.0280+0.0089i	-0.0004-0.0004i
20	$S_4$	0.0000+0.0000i	0.0007+0.0007i	-0.0258-0.0033i	8.7385+1.3314i	0.0721+0.0110i	0.0007+0.0007i
21	$S_5$	-2.0000-0.9500i	-1.9987-0.9487i	-2.0131-0.9573i	3.7468+2.2425i	0.0244+0.0146i	-1.9987-0.9487i
22	$a_{13}$	1.1000	1.1000	1.0894	0.3892	0.0143	1.1000
23	$a_{24}$	1.0500	1.0500	1.0414	0.3120	0.0113	1.0500
$2^\circ \text{ciclo} - \mathcal{J}(\hat{x}_c) = 6.50E + 02$							
				0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
				1.0498	0.0821	0.0001	1.0499
				0.9998	0.5087	0.0007	1.0002
				<b>1.0198</b>	<b>25.2026</b>	<b>0.0301</b>	<b>1.0108</b>
				1.0131	-8.2407	-0.0098	1.0061
				1.0180	-11.7669	-0.0141	1.0082
				-0.0954+0.3828i	-0.2839-0.4743i	-0.0017-0.0029i	-0.0966+0.3809i
				1.0968-0.0627i	-0.1972+1.1796i	-0.0012+0.0070i	1.0960-0.0577i
				0.1059-1.6439i	0.3266+0.3935i	0.0020+0.0024i	0.1073-1.6423i
				<b>0.9240-0.0904i</b>	<b>0.0374+3.6191i</b>	<b>0.0002+0.0216i</b>	<b>0.9242-0.0752i</b>
				-1.0968+0.3881i	0.3784+0.0746i	0.0023+0.0005i	-1.0953+0.3884i
				1.6093-0.0555i	-0.0967+0.8290i	-0.0006+0.0049i	1.6089-0.0520i
				-0.9240+0.3240i	0.4260+0.2039i	0.0026+0.0013i	-0.9223+0.3248i
				0.4009-0.1580i	0.0042+1.0362i	0.0000+0.0055i	0.4009-0.1532i
				-1.6066-0.0703i	0.0171-0.4090i	0.0001-0.0024i	-1.6065-0.0720i
				-0.3936+0.1452i	0.2352-0.6240i	0.0013-0.0033i	-0.3925+0.1423i
				1.0014+0.3202i	-0.2115+1.1286i	-0.0014+0.0075i	1.0006+0.3244i
				1.0300-1.7344i	-0.8870+0.2029i	-0.0059+0.0013i	1.0266-1.7336i
				-0.0021-0.0075i	0.5000+2.1145i	0.0037+0.0156i	-0.0004-0.0004i
				-0.0016-0.0119i	0.7427+4.1407i	0.0061+0.0341i	0.0007+0.0007i
				-2.0002-0.9615i	0.3829+3.3200i	0.0025+0.0216i	-1.9987-0.9487i
				1.0902	0.3601	0.0133	1.1000
				1.0409	0.3318	0.0120	1.0500

Como se observa na Tabela 11, após o primeiro ciclo de estimação de estados,  $\mathcal{J}(\hat{x}_c) > \chi_{26,0.975}^2$  e, portanto, detectou-se pelo menos uma medida errônea. O maior valor da coluna referente ao resíduo normalizado  $r_{n_i}$  indica a primeira identificação,  $S_{24}$ , que tem um resíduo muito elevado associado a sua parte real, como era de se esperar. Com isso, a magnitude do erro é estimada por  $\hat{\beta}_i$  e a medida é recuperada em  $z_{rec_i}$ . Após esse primeiro ciclo, o processo se repete para a segunda medida errônea  $|V_3|$ . Após a recuperação de ambas as medidas, um terceiro e último processo de estimação se inicia, gerando os resultados expressos na Tabela 12.



Tabela 12 – Processo iterativo do estimador clássico após a recuperação das medidas errôneas

$x_i$	1ª Iteração	2ª Iteração	3ª Iteração	4ª Iteração
$V_1$	1.0363 $\angle$ -0.86°	1.0500 $\angle$ -0.85°	1.0502 $\angle$ -0.84°	1.0502 $\angle$ -0.84°
$V_2$	0.9843 $\angle$ 0.00°	1.0000 $\angle$ 0.00°	1.0002 $\angle$ 0.00°	1.0002 $\angle$ 0.00°
$V_3$	1.0431 $\angle$ -16.13°	1.0109 $\angle$ -17.37°	1.0108 $\angle$ -17.34°	1.0108 $\angle$ -17.34°
$V_4$	1.0244 $\angle$ -12.99°	1.0045 $\angle$ -13.97°	1.0048 $\angle$ -13.95°	1.0048 $\angle$ -13.95°
$V_5$	1.0421 $\angle$ -16.29°	1.0092 $\angle$ -17.51°	1.0090 $\angle$ -17.48°	1.0090 $\angle$ -17.48°
$a_{13}$	1.0891	1.1017	1.1009	1.1009
$a_{24}$	1.0352	1.0503	1.0497	1.0497
$\mathcal{J}(\hat{\underline{x}}_c)$	1.64E+06	6.14E+04	9.81E+01	1.49E+01
$\ \Delta \underline{x}_c\ _\infty$	2.92E-01	3.95E-02	7.70E-04	1.05E-06

Assim, verifica-se a eficiência do estimador clássico formulado no domínio dos complexos para tratamento de erros grosseiros por meio do método do maior resíduo normalizado. Vale ressaltar que tal método têm desvantagens quanto ao desempenho computacional e quanto à possibilidade de falso alarme na presença de determinadas medidas, como descrito no Capítulo 3.

### 5.1.3 Estimação Robusta de Estados - SHGM

Considerando o plano de medição composto de medições puramente reais expresso pelos grafos das Figuras 14 e 15, a Tabela 13 apresenta as estimativas de cada medição ( $\hat{z}_i$ ) e o peso respectivo ( $q_{ii}$ ) durante o processo iterativo do estimador robusto. Mostra-se ainda a precisão de cada medida ( $\sigma_i$ ) e o peso estipulado para medidas classificadas como pontos de alavancamento ( $\omega_i$ ). A primeira iteração foi realizada pelo estimador WLS para evitar que as medidas sejam inicialmente subponderadas de forma acentuada devido a distância da solução do sistema.

Tabela 13 – Resultado do algoritmo IRLS no plano complexo - Sistema teste de 5 barras

#	Medida	Real		$\sigma_i$	$\omega_i$	WLS		SHGM					
		$z_{true}$	$z_{meas}$			1ª Iteração		2ª Iteração		3ª Iteração		4ª Iteração	
						Estimado	Peso	Estimado	Peso	Estimado	Peso	Estimado	Peso
1	$\theta_2$	0.0000	0.0000	1.00E-04	0.0404	0.0000	-	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000
2	$ V_1 $	1.0500	1.0500	1.00E-03	1.0000	1.0000	-	1.0488	1.0000	1.0500	1.0000	1.0501	1.0000
3	$ V_2 $	1.0000	0.9999	1.00E-03	1.0000	1.0000	-	0.9968	0.4286	0.9999	1.0000	0.9999	1.0000
4	$ V_3 $	1.0114	1.0108	1.00E-03	1.0000	1.0000	-	1.0502	0.0341	1.0115	1.0000	1.0110	1.0000
5	$ V_4 $	1.0052	1.0051	1.00E-03	1.0000	1.0000	-	1.0308	0.0523	1.0049	1.0000	1.0049	1.0000
6	$ V_5 $	1.0096	1.0093	1.00E-03	1.0000	1.0000	-	1.0491	0.0338	1.0097	1.0000	1.0093	1.0000
7	$t_{12}$	-0.0952	-0.0956	1.00E-02	0.6955	0.0000	-	-0.0890	1.0000	-0.0946	1.0000	-0.0947	1.0000
8	$t_{13}$	1.0952	1.0997	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	1.0536	0.2920	1.0949	1.0000	1.0952	1.0000
9	$t_{21}$	0.1057	0.1033	1.00E-02	0.6955	0.0000	-	0.1003	1.0000	0.1051	1.0000	0.1052	1.0000
10	$t_{24}$	0.9220	0.9200	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	0.8819	0.3530	0.9213	1.0000	0.9214	1.0000
11	$t_{31}$	-1.0952	-1.0959	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	-1.0536	0.3183	-1.0949	1.0000	-1.0952	1.0000
12	$t_{35}$	1.6093	1.6065	1.00E-02	0.0035	0.0000	-	1.6374	0.0015	1.6163	0.0047	1.6093	0.0168
13	$t_{42}$	-0.9220	-0.9230	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	-0.8819	0.3273	-0.9213	1.0000	-0.9214	1.0000
14	$t_{45}$	0.4008	0.4092	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	0.3670	0.3189	0.3990	1.0000	0.3991	1.0000
15	$t_{53}$	-1.6065	-1.6102	1.00E-02	0.0035	0.0000	-	-1.6346	0.0019	-1.6135	0.0142	-1.6065	0.0125
16	$t_{54}$	-0.3935	-0.3880	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	-0.3597	0.4759	-0.3917	1.0000	-0.3918	1.0000
17	$u_{12}$	0.3823	0.3833	1.00E-02	0.7818	-0.6250	-	0.4249	0.2527	0.3852	1.0000	0.3851	1.0000
18	$u_{13}$	-0.0585	-0.0614	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	-0.2101	0.0904	-0.0622	1.0000	-0.0593	1.0000
19	$u_{21}$	-1.6439	-1.6481	1.00E-02	0.7886	-0.6250	-	-1.6768	0.3697	-1.6464	1.0000	-1.6463	1.0000
20	$u_{24}$	-0.0886	-0.0860	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	-0.1809	0.1417	-0.0873	1.0000	-0.0855	1.0000
21	$u_{31}$	0.3885	0.3879	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	0.5240	0.0988	0.3928	1.0000	0.3898	1.0000
22	$u_{35}$	-0.0516	-0.0594	1.00E-02	0.0032	-0.0625	-	-0.4804	0.0001	-0.0754	0.0026	-0.0566	0.0152
23	$u_{42}$	0.3251	0.3207	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	0.4019	0.1656	0.3234	1.0000	0.3212	1.0000
24	$u_{45}$	-0.1533	-0.1522	1.00E-02	1.0000	-0.0183	-	-0.2471	0.1418	-0.1559	1.0000	-0.1526	1.0000
25	$u_{53}$	-0.0720	-0.0768	1.00E-02	0.0032	-0.0625	-	0.3468	0.0001	-0.0481	0.0015	-0.0669	0.0043
26	$u_{54}$	0.1413	0.1426	1.00E-02	1.0000	-0.0183	-	0.2324	0.1498	0.1438	1.0000	0.1404	1.0000
27	$P_1$	1.0000	0.9967	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	0.9646	0.4194	1.0004	1.0000	1.0006	1.0000
28	$P_2$	1.0277	1.0238	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	0.9822	0.3236	1.0264	1.0000	1.0266	1.0000
29	$P_3$	0.0000	-0.0018	1.00E-02	0.0114	0.0000	-	0.1099	0.0014	0.0097	0.0133	0.0023	0.0375
30	$P_4$	0.0000	-0.0067	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	-0.0341	0.4912	-0.0036	1.0000	-0.0036	1.0000
31	$P_5$	-2.0000	-1.9968	1.00E-02	0.0057	0.0000	-	-1.9943	0.0308	-2.0052	0.0092	-1.9983	0.0517
32	$Q_1$	0.3238	0.3255	1.00E-02	1.0000	-0.6250	-	0.2148	0.1215	0.3231	1.0000	0.3258	1.0000
33	$Q_2$	-1.7325	-1.7326	1.00E-02	1.0000	-0.6250	-	-1.8577	0.1075	-1.7337	1.0000	-1.7319	1.0000
34	$Q_3$	0.0000	-0.0001	1.00E-02	0.0104	-0.5767	-	-0.2147	0.0007	-0.0165	0.0086	-0.0045	0.0320
35	$Q_4$	0.0000	-0.0027	1.00E-02	1.0000	-0.0325	-	-0.1377	0.0997	-0.0075	1.0000	-0.0022	1.0000
36	$Q_5$	-0.9500	-0.9466	1.00E-02	0.0053	-1.0808	-	-0.5214	0.0002	-0.9239	0.0031	-0.9451	0.0480
37	$a_{13}$	1.1000	1.1000	3.16E-02	1.0000	1.0000	-	1.0939	1.0000	1.1011	1.0000	1.1008	1.0000
38	$a_{24}$	1.0500	1.0500	3.16E-02	1.0000	1.0000	-	1.0410	1.0000	1.0498	1.0000	1.0493	1.0000

Como se observa na Tabela 13, na última iteração o peso foi unitário para quase todas as medições estudadas, o que era o esperado uma vez que não há erros grosseiros. Entretanto, algumas medições foram subponderadas, e.g.  $u_{35}$  e  $P_3$ , principalmente porque a magnitude dos pesos atribuídos às medidas classificadas como pontos de alavancamento ( $\omega_i$ ) é muito pequena, logo é natural que uma subponderação ocorra uma vez que a magnitude do resíduo no numerador da equação (3.91) não é suficientemente pequena para compensar o denominador, tornando  $r_{s_i}$  elevado.

Com isso, as variáveis de estado a cada iteração são mostradas na Tabela 14. A tolerância adotada foi de  $10^{-4}$ .

Tabela 14 – Processo iterativo do estimador robusto para o sistema de 5 barras

$x_i$	1ª Iteração	2ª Iteração	3ª Iteração	4ª Iteração
$V_1$	1.0488 $\angle$ -0.85°	1.0500 $\angle$ -0.84°	1.0501 $\angle$ -0.84°	1.0501 $\angle$ -0.84°
$V_2$	0.9968 $\angle$ 0.00°	0.9999 $\angle$ -0.00°	0.9999 $\angle$ -0.00°	0.9999 $\angle$ -0.00°
$V_3$	1.0502 $\angle$ -16.01°	1.0115 $\angle$ -17.32°	1.0110 $\angle$ -17.32°	1.0110 $\angle$ -17.32°
$V_4$	1.0308 $\angle$ -12.91°	1.0049 $\angle$ -13.94°	1.0049 $\angle$ -13.94°	1.0049 $\angle$ -13.94°
$V_5$	1.0491 $\angle$ -16.17°	1.0097 $\angle$ -17.46°	1.0093 $\angle$ -17.46°	1.0093 $\angle$ -17.46°
$a_{13}$	1.0939	1.1011	1.1008	1.1008
$a_{24}$	1.041	1.0498	1.0493	1.0493
$\mathcal{J}(\hat{x}_c)$	2.08E+05	3.38E+02	3.41E+00	2.12E+00
$\ \Delta \underline{x}_c\ _\infty$	2.92E-01	4.57E-02	5.78E-04	7.61E-06

#### 5.1.4 Pontos de Alavancamento - Sistema de 5 barras

Com base no apresentado na subseção 3.4.2, neste subtópico será apresentada a identificação dos pontos de alavancamento do sistema teste de 5 barras além das respectivas magnitudes de pesos atribuídas a essas medições. Foram considerados três cenários: medições puramente reais (SCADA), medições híbridas e medições puramente fasoriais (PMU). Para efeito comparativo, o algoritmo proposto por Mili *et al.* [27] também foi aplicado ao estimador formulado no plano real. Assim, a Tabela 15 resume tal comparativo para os três cenários.

Tabela 15 – Identificação de pontos de alavancamento nos planos real e complexo para o sistema de 5 barras

Plano Real			Plano Complexo		
#	$PS_i$	$\omega_i$	#	$PS_i$	$\omega_i$
CENÁRIO 1 - SCADA					
$t_{12}$	10.0	0.8764	$\theta_2$	73.4	0.0404
$t_{21}$	10.0	0.8764	$t_{12}$	26.7	0.6955
$t_{35}$	383.5	0.0008	$t_{21}$	26.7	0.6955
$t_{53}$	383.5	0.0008	$t_{35}$	379.2	0.0035
$u_{35}$	382.8	0.0008	$t_{53}$	379.2	0.0035
$u_{53}$	382.8	0.0008	$u_{12}$	25.2	0.7818
$P_1$	11.9	0.8755	$u_{21}$	25.1	0.7886
$P_3$	387.8	0.0017	$u_{35}$	396.6	0.0032
$P_5$	386.0	0.0014	$u_{53}$	396.6	0.0032
$Q_3$	386.8	0.0021	$P_3$	383.7	0.0114
$Q_5$	384.6	0.0014	$P_5$	381.5	0.0057
			$Q_3$	400.9	0.0104
			$Q_5$	398.4	0.0053
CENÁRIO 2 - Híbrido					
$t_{35}$	169.7	0.0043	$\theta_2$	20.5	0.5174
$t_{53}$	169.7	0.0043	$t_{35}$	237.0	0.0088
$u_{35}$	175.0	0.0041	$t_{53}$	237.0	0.0088
$u_{53}$	175.0	0.0041	$u_{35}$	330.6	0.0045
$P_3$	171.7	0.0087	$u_{53}$	330.6	0.0045
$Q_3$	176.9	0.0098	$P_3$	239.7	0.0292
$V_2$	17.5	0.0820	$Q_3$	334.2	0.0150
$V_3$	17.2	0.1848	$V_2$	29.9	0.1133
$S_5$	219.7	0.0043	$V_3$	32.4	0.0960
			$S_5$	415.1	0.0029
CENÁRIO 3 - PMU					
$V_1$	16.4	0.2021	$\theta_2$	15.8	0.8727
$V_2$	9.3	0.2896	$V_1$	26.3	0.1458
$V_3$	107.9	0.0047	$V_2$	30.8	0.1067
$V_4$	28.9	0.0654	$V_3$	107.2	0.0088
$V_5$	105.6	0.0049	$V_4$	16.8	0.3572
$S_{35}$	1375.0	0.0001	$V_5$	104.9	0.0092
$S_{53}$	1375.1	0.0001	$S_{35}$	1365.9	0.0002
$S_3$	1390.6	0.0002	$S_{53}$	1365.9	0.0002
$S_5$	1382.3	0.0001	$S_3$	1381.3	0.0004
			$S_5$	1373.0	0.0003

Conforme mostrado na Tabela 5, o ramo entre as barras 3 e 5 tem uma admitância muito superior aos demais ramos. Logo, medidas de fluxo associadas a esse ramo e as medidas de injeção em que este ramo incide são identificadas corretamente como pontos de alavancamento, com um peso bem pequeno.

Em quase todos os cenários, a classificação dos pontos de alavancamento foi idêntica para este pequeno exemplo. No entanto, este fator não é uma regra, uma vez que a identificação das medições como PA (Ponto de Alavancamento) é ligeiramente diferente para os outros sistemas de teste. Este é um resultado esperado, uma vez que o espaço-fator da matriz Jacobiana real e complexa é diferente. Além disso, a magnitude dos pesos para a mesma medida identificada como PA pode resultar em grandes diferenças de valores.

É interessante notar que, apesar da diferença entre a identificação e a magnitude de pesos atribuídas a cada medida, todos os pontos de alavancamento que tem pesos muito pequenos foram corretamente identificados em todos os cenários e em ambos os domínios numéricos. A diferença na identificação ocorre justamente para aquelas medidas que tem um peso mais elevado, próximo da unidade, como por exemplo  $P_1$  e  $u_{12}$  para o cenário 1. Assim, os resultados dos estimadores robustos em ambos os domínios foram bem parecidos inclusive na presença de erros grosseiros. Tal fator também ocorreu para os demais sistemas teste avaliados.

### 5.1.5 Processamento de Erros Grosseiros - SHGM

Na Tabela 16 mostra-se o desempenho do estimador robusto no plano complexo para o primeiro cenário, ou seja, somente medições SCADA. Alocou-se erros grosseiros de magnitude de  $40\sigma_i$  nas medições  $t_{35}$  e  $u_{35}$ , que são pontos de alavancamento. Para facilitar o entendimento no processamento de erros grosseiros, essas medidas errôneas estão em negrito na Tabela 16. Como era de se esperar tais medidas foram fortemente subponderadas, atestando a eficiência do estimador complexo robusto. Demais medições tais como as injeções nas barras 3 e 5 foram também subponderadas principalmente porque a magnitude dos pesos ( $\omega_i$ ) para tais medidas é bem pequena, como explicado no subtópico anterior. Tal fenômeno ocorreu também para o estimador robusto formulado no plano real.

Tabela 16 – Processamento de erros grosseiros pelo algoritmo IRLS - Sistema teste de 5 barras

#	Medida	Real	Medido	$\sigma_i$	$\omega_i$	WLS		SHGM							
						1ª Iteração		2ª Iteração		3ª Iteração		4ª Iteração			
						Estimado	Peso	Estimado	Peso	Estimado	Peso	Estimado	Peso		
1	$\theta_2$	0.0000	0.0000	1.00E-04	0.0404	0.0000	-	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000		
2	$ V_1 $	1.0500	1.0500	1.00E-03	1.0000	1.0000	-	1.0488	1.0000	1.0500	1.0000	1.0501	1.0000		
3	$ V_2 $	1.0000	0.9999	1.00E-03	1.0000	1.0000	-	0.9972	0.4913	0.9999	1.0000	0.9999	1.0000		
4	$ V_3 $	1.0114	1.0108	1.00E-03	1.0000	1.0000	-	1.0507	0.0337	1.0115	1.0000	1.0110	1.0000		
5	$ V_4 $	1.0052	1.0051	1.00E-03	1.0000	1.0000	-	1.0310	0.0520	1.0048	1.0000	1.0049	1.0000		
6	$ V_5 $	1.0096	1.0093	1.00E-03	1.0000	1.0000	-	1.0494	0.0336	1.0096	1.0000	1.0093	1.0000		
7	$t_{12}$	-0.0952	-0.0956	1.00E-02	0.6955	0.0000	-	-0.0966	1.0000	-0.0954	1.0000	-0.0947	1.0000		
8	$t_{13}$	1.0952	1.0997	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	1.0867	1.0000	1.0964	1.0000	1.0952	1.0000		
9	$t_{21}$	0.1057	0.1033	1.00E-02	0.6955	0.0000	-	1.0178	1.0000	1.0160	1.0000	1.0152	1.0000		
10	$t_{24}$	0.9220	0.9200	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	0.8799	0.3352	0.9204	1.0000	0.9214	1.0000		
11	$t_{31}$	-1.0952	-1.0959	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	-1.0867	1.0000	-1.0964	1.0000	-1.0952	1.0000		
12	<b><math>t_{35}</math></b>	<b>1.6093</b>	<b>2.0065</b>	<b>1.00E-02</b>	<b>0.0035</b>	<b>0.0000</b>	-	<b>1.7756</b>	<b>0.0002</b>	<b>1.6674</b>	<b>0.0001</b>	<b>1.6244</b>	<b>0.0001</b>		
13	$t_{42}$	-0.9220	-0.9230	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	-1.0799	0.3119	-0.9204	1.0000	-0.9214	1.0000		
14	$t_{45}$	0.4008	0.4092	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	0.3671	0.3198	0.3988	1.0000	0.3992	1.0000		
15	$t_{53}$	-1.6065	-1.6102	1.00E-02	0.0035	0.0000	-	-1.7724	0.0003	-1.6644	0.0009	-1.6215	0.0041		
16	$t_{54}$	-0.3935	-0.3880	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	-0.3598	0.4776	-0.3915	1.0000	-0.3919	1.0000		
17	$u_{12}$	0.3823	0.3833	1.00E-02	0.7818	-0.6250	-	0.4169	0.3128	0.3851	1.0000	0.3851	1.0000		
18	$u_{13}$	-0.0585	-0.0614	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	-0.1831	0.1105	-0.0613	1.0000	-0.0593	1.0000		
19	$u_{21}$	-1.6439	-1.6481	1.00E-02	0.7886	-0.6250	-	-1.6700	0.4850	-1.6463	1.0000	-1.6463	1.0000		
20	$u_{24}$	-0.0886	-0.0860	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	-0.1856	0.1350	-0.0875	1.0000	-0.0855	1.0000		
21	$u_{31}$	0.3885	0.3879	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	0.5093	0.1108	0.3927	1.0000	0.3898	1.0000		
22	<b><math>u_{35}</math></b>	<b>-0.0516</b>	<b>0.3406</b>	<b>1.00E-02</b>	<b>0.0032</b>	<b>-0.0625</b>	-	<b>-0.4095</b>	<b>0.0001</b>	<b>-0.0534</b>	<b>0.0001</b>	<b>-0.0542</b>	<b>0.0001</b>		
23	$u_{42}$	0.3251	0.3207	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	0.4066	0.1566	0.3231	1.0000	0.3213	1.0000		
24	$u_{45}$	-0.1533	-0.1522	1.00E-02	1.0000	-0.0183	-	-0.2480	0.1404	-0.1555	1.0000	-0.1526	1.0000		
25	$u_{53}$	-0.0720	-0.0768	1.00E-02	0.0032	-0.0625	-	0.2765	0.0001	-0.0699	0.0062	-0.0692	0.0056		
26	$u_{54}$	0.1413	0.1426	1.00E-02	1.0000	-0.0183	-	0.2334	0.1482	0.1434	1.0000	0.1404	1.0000		
27	$P_1$	1.0000	0.9967	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	0.9901	1.0000	1.0010	1.0000	1.0006	1.0000		
28	$P_2$	1.0277	1.0238	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	0.9877	0.3725	1.0264	1.0000	1.0266	1.0000		
29	$P_3$	0.0000	-0.0018	1.00E-02	0.0114	0.0000	-	0.2165	0.0007	0.0603	0.0025	0.0175	0.0079		
30	$P_4$	0.0000	-0.0067	1.00E-02	1.0000	0.0000	-	-0.0333	0.5051	-0.0039	1.0000	-0.0036	1.0000		
31	$P_5$	-2.0000	-1.9968	1.00E-02	0.0057	0.0000	-	-2.1322	0.0006	-2.0559	0.0013	-2.0134	0.0046		
32	$Q_1$	0.3238	0.3255	1.00E-02	1.0000	-0.6250	-	0.2338	0.1467	0.3239	1.0000	0.3258	1.0000		
33	$Q_2$	-1.7325	-1.7326	1.00E-02	1.0000	-0.6250	-	-1.8556	0.1093	-1.7338	1.0000	-1.7319	1.0000		
34	$Q_3$	0.0000	-0.0001	1.00E-02	0.0104	-0.5767	-	-0.1559	0.0009	0.0056	0.0246	-0.0020	0.0733		
35	$Q_4$	0.0000	-0.0027	1.00E-02	1.0000	-0.0325	-	-0.1372	0.1000	-0.0076	1.0000	-0.0023	1.0000		
36	$Q_5$	-0.9500	-0.9466	1.00E-02	0.0053	-1.0808	-	-0.5914	0.0002	-0.9459	0.1000	-0.9474	0.0838		
37	$a_{13}$	1.1000	1.1000	3.16E-02	1.0000	1.0000	-	1.0870	1.0000	1.1010	1.0000	1.1008	1.0000		
38	$a_{24}$	1.0500	1.0500	3.16E-02	1.0000	1.0000	-	1.0425	1.0000	1.0499	1.0000	1.0493	1.0000		

Assim, com a supressão das duas medidas errôneas, as variáveis de estado a cada iteração são evidenciadas na Tabela 17. A tolerância adotada foi de  $10^{-4}$ .

Tabela 17 – Processo iterativo do estimador robusto com medidas errôneas para o sistema de 5 barras

$x_i$	1ª Iteração	2ª Iteração	3ª Iteração	4ª Iteração
$V_1$	1.0488 $\angle$ -0.87°	1.0500 $\angle$ -0.85°	1.0501 $\angle$ -0.84°	1.0501 $\angle$ -0.84°
$V_2$	0.9972 $\angle$ 0.00°	0.9999 $\angle$ 0.00°	0.9999 $\angle$ 0.00°	0.9999 $\angle$ 0.00°
$V_3$	1.0507 $\angle$ -16.21°	1.0115 $\angle$ -17.32°	1.0110 $\angle$ -17.32°	1.0110 $\angle$ -17.32°
$V_4$	1.0310 $\angle$ -13.11°	1.0048 $\angle$ -13.95°	1.0049 $\angle$ -13.94°	1.0049 $\angle$ -13.94°
$V_5$	1.0494 $\angle$ -16.37°	1.0096 $\angle$ -17.47°	1.0093 $\angle$ -17.46°	1.0093 $\angle$ -17.46°
$a_{13}$	1.0870	1.1010	1.1008	1.1008
$a_{24}$	1.0425	1.0499	1.0493	1.0493
$\mathcal{J}(\hat{x}_c)$	2.24E+05	3.17E+02	3.67E+00	2.49E+00
$\ \Delta x_c\ _\infty$	2.96E-01	4.44E-02	6.50E-04	1.55E-05

## 5.2 Desempenho dos Estimadores Clássico e Robusto no Plano Real e Complexo

### 5.2.1 Desempenho do Estimador Clássico

As Tabelas 18 e 19 apresentam o comparativo computacional entre os estimadores clássicos (WLS) formulados no plano real e complexo. A primeira tabela expressa os resultados dos estimadores na ausência da estimação da posição de tapes de OLTC. Já, a segunda considera tais variáveis. Adotou-se três cenários: medições puramente reais (SCADA), medições híbridas e medições puramente fasoriais (PMU). Os resultados expressos são referentes à média entre 100 simulações adicionando-se ruído branco com distribuição gaussiana com média zero e desvio-padrão expresso nas Tabelas 1 e 2. Os sistemas teste analisados foram IEEE-14, 30, 57, 118 com dados obtidos de [58] e os equivalentes do sistema brasileiro de 340, 730 e 1916 barras. Vale ressaltar que estimador formulado no plano real foi baseado em [55] e [56]. Os algoritmos desenvolvidos para o plano real e complexo foram idênticos, sendo utilizadas as mesmas técnicas de esparsidade e aprimoramento computacional, sendo modificados apenas os equacionamentos relativos a cada tipo de estimador.

Tabela 18 – Desempenho dos estimadores clássicos em ambos os domínios - Tape Fixo

Sistema	Medidas		Iterações		Tempo (s)		Razão C/R	$\sigma_u^2$	
	SCADA	PMU	ℝ	ℂ	ℝ	ℂ		ℝ	ℂ
14	68	0	3	3	0.0081	0.0081	1.00	4.54E-05	4.54E-05
	34	19	3	3	0.0136	0.0128	0.94	2.13E-05	2.13E-05
	0	38	3	3	0.0095	0.0088	0.93	1.56E-05	1.56E-05
30	136	0	3	3	0.0094	0.0088	0.94	2.18E-04	2.18E-04
	69	36	3	3	0.0104	0.0091	0.88	9.43E-05	9.44E-05
	0	73	3	3	0.0093	0.0077	0.82	4.86E-05	4.86E-05
57	273	0	3	3	0.0132	0.0119	0.90	4.41E-04	4.41E-04
	141	73	4	3	0.0231	0.0144	0.62	9.55E-05	9.55E-05
	0	151	4	3	0.0242	0.0143	0.59	6.12E-05	6.12E-05
118	419	0	3	4	0.0183	0.0203	1.11	4.48E-04	4.48E-04
	215	107	4	4	0.0281	0.0219	0.78	4.99E-04	4.99E-04
	0	220	4	3	0.0245	0.0142	0.58	1.70E-04	1.70E-04
340	1423	0	6	5	0.0795	0.0525	0.66	3.92E-04	3.92E-04
	714	390	6	5	0.1013	0.0598	0.59	3.24E-04	3.26E-04
	0	783	6	5	0.1005	0.0540	0.54	1.78E-04	1.81E-04
730	3457	0	4	6	0.1286	0.1438	1.12	2.42E-03	2.42E-03
	1907	775	5	6	0.1761	0.1417	0.80	9.58E-04	9.58E-04
	389	1534	5	6	0.1281	0.0984	0.77	1.83E-04	1.83E-04
1916	9171	0	4	5	0.2873	0.2586	0.90	1.27E-02	1.27E-02
	4533	2567	5	4	0.4870	0.2488	0.51	3.32E-03	3.32E-03
	0	5082	5	4	0.4397	0.2082	0.47	1.91E-03	1.91E-03

Tabela 19 – Desempenho dos estimadores clássicos em ambos os domínios - Tape variável

Sistema	Medidas		Tapes	Iterações		Tempo (s)		Razão	$\sigma_u^2$		$\sigma_{tape}^2$	
	SCADA	PMU		C	R	R	C		C/R	R	C	R
14	68	0	3	3	3	0.0089	0.0092	1.04	4.66E-05	6.18E-05	1.54E-05	3.21E-05
	34	19		3	3	0.0106	0.0107	1.01	1.56E-05	1.61E-05	1.15E-05	1.40E-05
	0	38		3	3	0.0091	0.0087	0.96	1.47E-05	1.48E-05	2.15E-05	2.24E-05
30	136	0	4	3	3	0.0112	0.0111	1.00	2.21E-04	2.75E-04	2.76E-05	6.50E-05
	69	36		3	3	0.0134	0.0132	0.99	8.57E-05	1.44E-04	5.10E-05	7.28E-05
	0	73		3	3	0.0112	0.0101	0.91	4.21E-05	4.22E-05	2.68E-05	2.80E-05
57	273	0	15	3	3	0.0158	0.0172	1.08	4.43E-04	7.64E-04	2.45E-04	5.77E-04
	141	73		4	4	0.0248	0.0248	1.00	7.70E-05	1.37E-04	1.80E-04	3.25E-04
	0	151		4	3	0.0212	0.0138	0.65	5.21E-05	5.25E-05	1.61E-04	1.75E-04
118	419	0	9	3	4	0.0216	0.0256	1.19	5.00E-04	1.57E-03	7.50E-06	7.53E-05
	215	107		4	4	0.0334	0.0330	0.99	3.49E-04	3.97E-04	1.60E-05	2.22E-05
	0	220		4	3	0.0291	0.0196	0.67	1.87E-04	1.87E-04	1.33E-05	1.35E-05
340	1281	142	82	6	5	0.1191	0.0834	0.70	6.64E-04	6.70E-04	1.53E-04	1.61E-04
	642	462		6	5	0.1430	0.0923	0.65	4.34E-04	4.36E-04	1.42E-04	1.50E-04
	0	783		6	6	0.1298	0.1032	0.79	2.85E-04	2.89E-04	1.14E-04	1.20E-04
730	3070	387	234	18	5	-	0.2265	-	-	3.03E-03	-	9.14E-04
	1535	1155		20	5	-	0.2618	-	-	2.06E-03	-	6.54E-04
	0	1923		20	5	-	0.1780	-	-	9.15E-04	-	4.57E-04
1916	8180	991	649	6	5	0.9230	0.5142	0.56	5.30E-03	5.37E-03	4.96E-03	6.91E-03
	4096	3033		6	5	0.8644	0.6854	0.79	3.30E-03	3.32E-03	3.03E-03	3.71E-03
	0	5082		6	5	0.7526	0.4771	0.63	2.03E-03	2.04E-03	1.63E-03	1.84E-03

A últimas colunas das tabelas anteriores são indicadores da eficiência na estimativa das variáveis de estado e são expressas por:

$$\sigma_u^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{u}_i - u_i)^2, \quad (5.6)$$

$$\sigma_{tape}^2 = \sum_{j=1}^k (\hat{tape}_j - tape_j)^2, \quad (5.7)$$

onde  $\hat{u}$  e  $\hat{tape}$  representam os valores estimados de tensão e da posição de tapes de OLTC e  $u$  e  $tape$  representam os valores reais.

É importante ressaltar que para auxiliar a estimação de tapes de OLTC nos sistemas de maior porte como por exemplo de 340, 730 e 1916 barras foram adicionadas medições fasoriais de tensão para aumentar a redundância local e facilitar o processo de convergência dos estimadores. Como visto nas Tabelas 1 e 2, o peso atribuído às pseudo-medições de tape são pequenos, logo faz-se necessário de uma redundância local adequada para estimação da posição dos tapes. Nos sistemas de maior porte, com um número mais elevado de transformadores, verificou-se que a convergência dos estimadores foi sensivelmente melhorada com o acréscimo de medições fasoriais de tensão em barras envolvidas no processo de estimação dos tapes. Por isso, na Tabela 19 considerou-se para estes sistemas o primeiro cenário composto majoritariamente por medições reais. Uma alternativa para contornar a necessidade de inserção de medições fasoriais de tensão, seria aumen-



tar o peso atribuído às pseudo-medidas de tape, dispensando assim, este incremento na redundância local.

Analisando as Tabelas 18 e 19, fica claro que o desempenho do estimador clássico desenvolvido no domínio dos complexos foi superior à sua contraparte. Além disso, essa disparidade fica ainda maior a medida que o porte do sistema aumenta. Esses resultados revelam que apesar da formulação do estimador desenvolvido no corpo dos complexos exigir um aumento da dimensão do problema, as correlações existentes entre os termos da Jacobiana devido ao Cálculo de Wirtinger juntamente a facilidade de implementação das medidas híbridas tornam essa solução atrativa computacionalmente. Já a eficiência de ambos os estimadores foi muito semelhante tanto para estimação de tensões quanto para a estimação de tapes. Vale ressaltar também, que o sistema teste de 730 apresentou problemas de convergência no estimador formulado no plano real com estimação de tapes de OLTC. Tal fato pode ter ocorrido devido à inserção de medidas fasoriais de tensão nos cenários avaliados para aumentar a redundância local na estimação de tapes. Algumas barras desse sistema teste têm tensões com ângulos acima de  $90^\circ$  o que pode ter prejudicado a estimação dos tapes e, conseqüentemente, causado o colapso na estimação uma vez que o estimador real depende de funções senoidais e cossenoidais. Tal colapso não ocorreu para o estimador clássico formulado no plano complexo.

Graficamente, o comparativo entre os tempos computacionais dos estimadores clássicos (WLS) em todos os cenários avaliados pode ser visto nas Figs. 18 e 19.

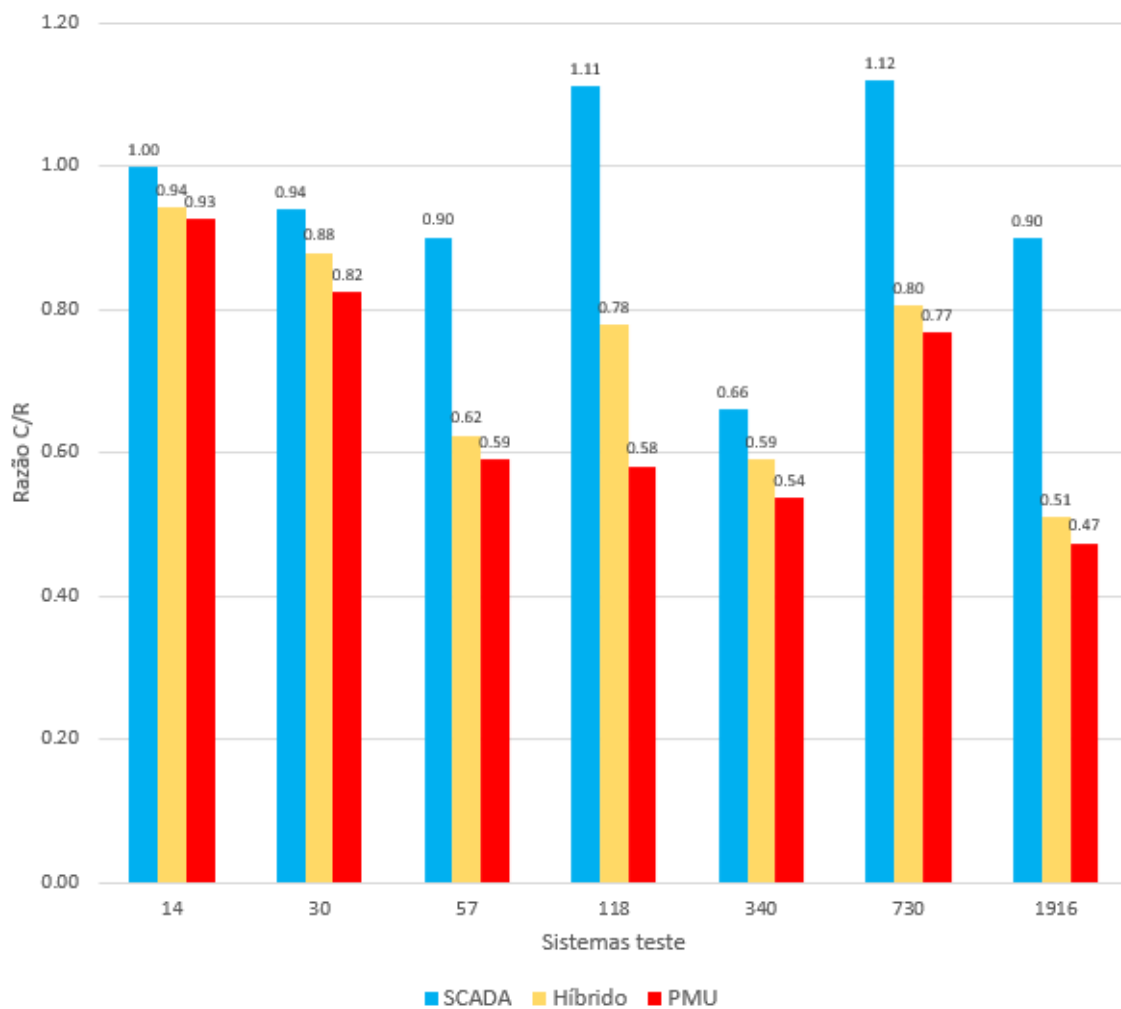


Figura 18 – Relação entre os tempos computacionais dos estimadores clássicos (WLS) formulados nos planos real e complexo - Tape fixo

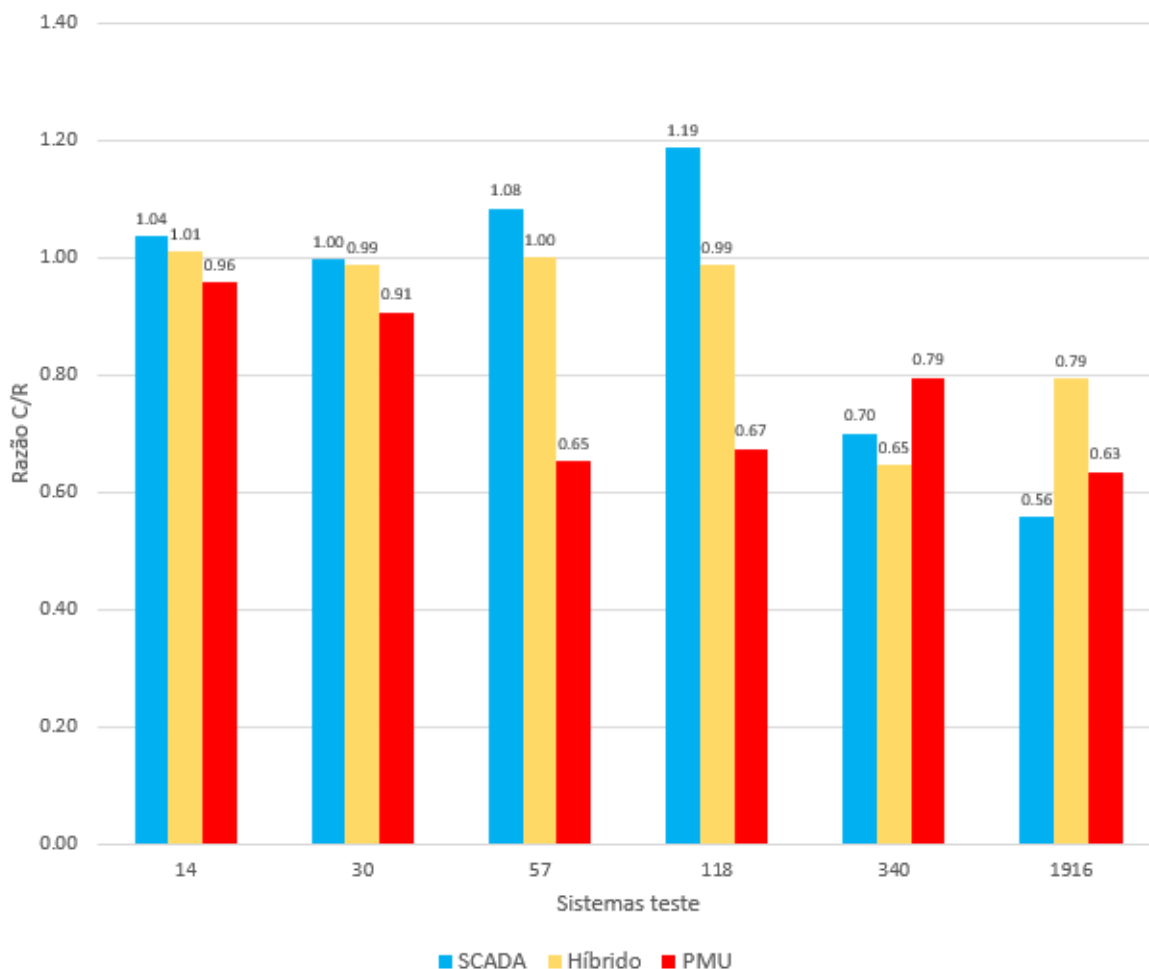


Figura 19 – Relação entre os tempos computacionais dos estimadores clássicos (WLS) formulados nos planos real e complexo - Tape variável

O estimador clássico formulado no plano real apresentou um desempenho bem semelhante à sua contraparte complexa no tratamento de medições puramente reais e isso ficou evidente principalmente no processo de estimação com tapes fixos. Entretanto, à medida que medições fasoriais começaram a ser incluídas, fica evidente a vantagem do estimador construído no plano complexo. É interessante observar também que a estimação de um grande número de tapes de OLTC, como, por exemplo, nos sistemas teste de 340, 730 e 1916, faz com que independentemente da quantidade de medições do sistema SCADA ou de PMU, haja um grande ganho computacional na utilização do estimador derivado no domínio dos complexos.

### 5.2.2 Desempenho do Estimador Robusto

De forma análoga ao estimador clássico, as Tabelas 20 e 21 apresentam o comparativo computacional entre os estimadores robustos (SHGM) formulados em ambos os domínios. A primeira e a segunda tabela apresentam os resultados dos estimadores sem e com estimação de tapes de OLTC, respectivamente. Tais resultados também representam

a média entre 100 simulações adicionando-se ruído branco com distribuição gaussiana com média zero e desvio-padrão expresso nas Tabelas 1 e 2.

Tabela 20 – Desempenho dos estimadores robustos em ambos os domínios - Tape Fixo

Sistema	Medidas		Iterações		Time (s)		Razão	$\sigma_u^2$	
	SCADA	PMU	C	R	R	C	C/R	R	C
14	68	0	4	4	0.0116	0.0121	1.05	4.40E-05	4.45E-05
	34	19	4	4	0.0131	0.0114	0.87	2.33E-05	2.57E-05
	0	38	3	3	0.0087	0.0082	0.94	1.05E-05	1.47E-05
30	136	0	4	4	0.0130	0.0141	1.09	2.10E-04	2.10E-04
	63	39	4	4	0.0173	0.0140	0.80	9.63E-05	1.02E-04
	0	73	4	3	0.0144	0.0104	0.72	5.40E-05	6.21E-05
57	273	0	3	4	0.0153	0.0175	1.14	4.48E-04	4.52E-04
	141	73	4	4	0.0263	0.0214	0.81	1.43E-04	1.50E-04
	0	151	4	3	0.0209	0.0129	0.62	9.23E-05	6.28E-05
118	419	0	4	4	0.0266	0.0237	0.89	4.53E-04	4.54E-04
	213	108	4	4	0.0374	0.0285	0.76	3.09E-04	3.33E-04
	0	220	4	4	0.0304	0.0227	0.75	1.49E-04	1.54E-04
340	1423	0	6	6	0.1434	0.1061	0.74	4.22E-04	4.02E-04
	722	386	6	7	0.1524	0.1100	0.72	2.75E-04	2.79E-04
	0	783	6	6	0.1332	0.0919	0.69	1.21E-04	1.23E-04
730	3457	0	5	6	0.1434	0.1525	1.06	2.70E-03	2.59E-03
	1925	766	6	6	0.1992	0.1704	0.86	1.29E-03	1.22E-03
	389	1534	5	6	0.1572	0.1329	0.85	2.36E-04	2.24E-04
1916	9171	0	6	6	0.4669	0.3441	0.74	1.49E-02	1.38E-02
	4577	2545	6	6	0.6872	0.4758	0.69	4.47E-03	4.54E-03
	0	5082	7	6	0.5841	0.2934	0.50	1.83E-03	1.91E-03

Tabela 21 – Desempenho dos estimadores robustos em ambos os domínios - Tape variável

Sistema	Medidas		Tapes	Iterações		Tempo (s)		Razão C/R	$\sigma_u^2$		$\sigma_{tape}^2$	
	SCADA	PMU		R	C	R	C		R	C	R	C
14	68	0	3	4	4	0.0144	0.0157	1.09	4.60E-05	6.07E-05	1.84E-05	3.75E-05
	34	19		4	4	0.0142	0.0120	0.85	2.04E-05	2.27E-05	1.15E-05	1.68E-05
	0	38		4	3	0.0130	0.0105	0.81	1.27E-05	1.51E-05	1.63E-05	2.35E-05
30	136	0	4	4	4	0.0147	0.0149	1.02	2.13E-04	2.66E-04	2.63E-05	6.33E-05
	63	39		4	4	0.0182	0.0157	0.86	9.66E-05	9.86E-05	1.51E-05	2.04E-05
	0	73		4	4	0.0170	0.0136	0.80	5.30E-05	5.97E-05	2.03E-05	2.83E-05
57	273	0	15	3	5	0.0160	0.0196	1.23	4.50E-04	7.67E-04	2.52E-04	5.90E-04
	141	73		4	5	0.0285	0.0274	0.96	1.22E-04	1.68E-04	2.26E-04	4.07E-04
	0	151		5	5	0.0263	0.0221	0.84	6.24E-05	6.73E-05	1.51E-04	2.21E-04
118	419	0	9	4	4	0.0261	0.0240	0.92	5.46E-04	1.57E-03	1.46E-05	7.86E-05
	213	108		4	4	0.0369	0.0276	0.75	4.36E-04	4.75E-04	2.20E-05	4.75E-05
	0	220		4	4	0.0290	0.0239	0.82	5.42E-04	5.52E-04	2.25E-05	3.03E-05
340	1281	142	82	9	7	0.2228	0.1223	0.55	5.74E-04	5.75E-04	8.35E-04	2.26E-04
	649	458		9	6	0.1920	0.0990	0.52	5.14E-04	5.27E-04	5.30E-04	5.04E-04
	0	783		9	7	0.1979	0.1235	0.62	5.11E-04	4.43E-04	4.74E-04	4.51E-04
730	3070	387	234	50	8	-	0.2767	-	-	2.65E-03	-	8.35E-04
	1537	1154		94	8	-	0.2850	-	-	1.75E-03	-	1.06E-03
	0	1923		100	8	-	0.2230	-	-	1.24E-03	-	1.37E-03
1916	8180	991	649	14	7	1.6514	0.6755	0.41	5.84E-03	5.26E-03	8.36E-03	6.01E-03
	4095	3034		14	9	2.0119	1.0502	0.52	4.83E-03	4.29E-03	8.89E-03	6.18E-03
	0	5082		15	11	1.8360	0.8946	0.49	3.45E-03	3.36E-03	8.09E-03	6.05E-03

Os estimadores robustos apresentaram um número maior de iterações e consequentemente um tempo maior no processo quando comparados aos estimadores clássicos. Já, entre os estimadores robustos, os índices  $\sigma_u^2$  e  $\sigma_{tape}^2$  apontam uma estimativa bem similar para ambos os estimadores. Como ocorrido no estimador clássico, o sistema equivalente brasileiro de 730 barras apresentou problemas para convergência no processo de estimação com tapes variáveis, sendo as possíveis razões explicitadas no subtópico anterior. Além disso, fica evidente o ganho computacional do estimador do plano complexo em relação a sua contraparte no plano real. Essa discrepância cresce à medida que o porte dos sistemas aumenta juntamente com a inclusão de medições fasoriais.

Para efeito ilustrativo, as Figs. 20 e 21 mostram a relação entre os tempos computacionais entre os estimadores robustos formulados em ambos os domínios para todos os cenários de medições avaliados.

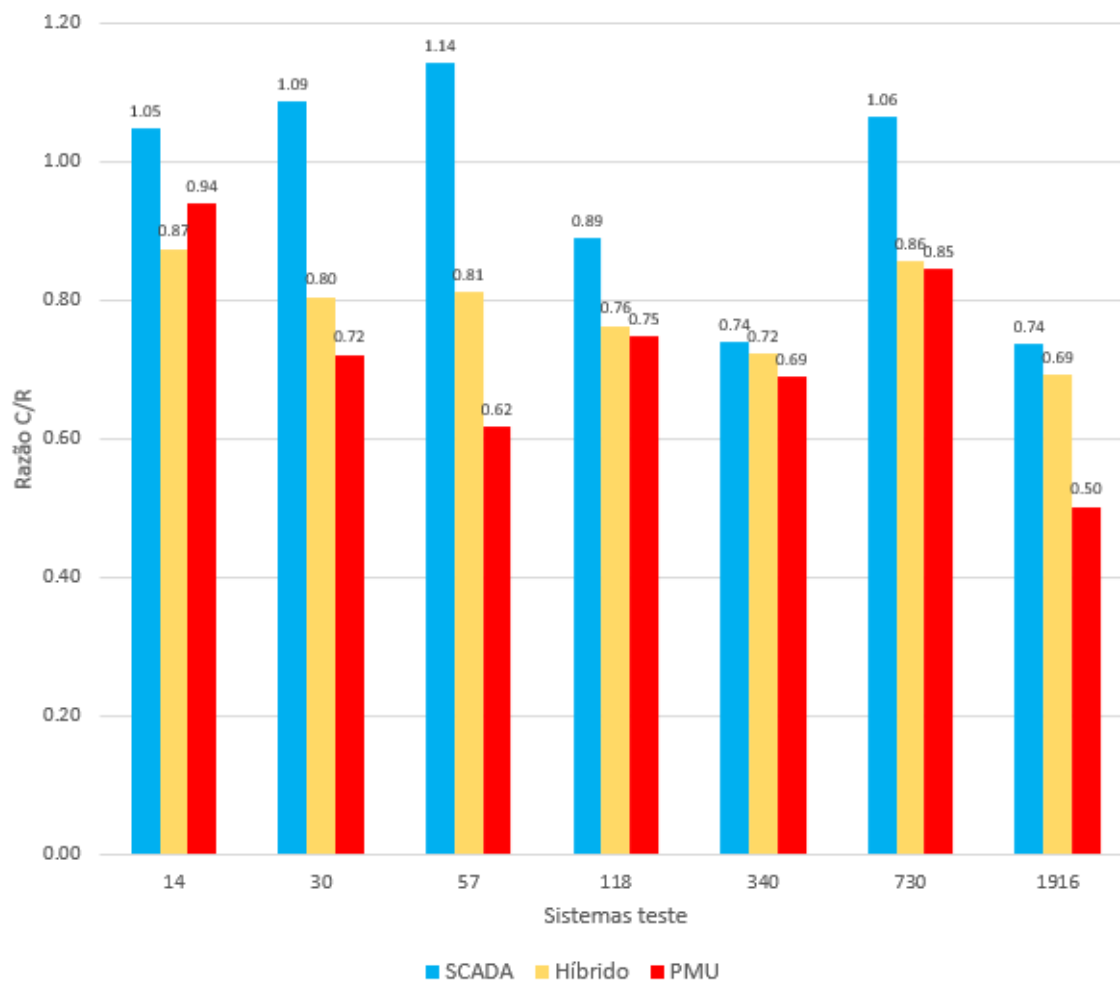


Figura 20 – Relação entre os tempos computacionais dos estimadores robustos (SHGM) formulados nos planos real e complexo - Tape fixo

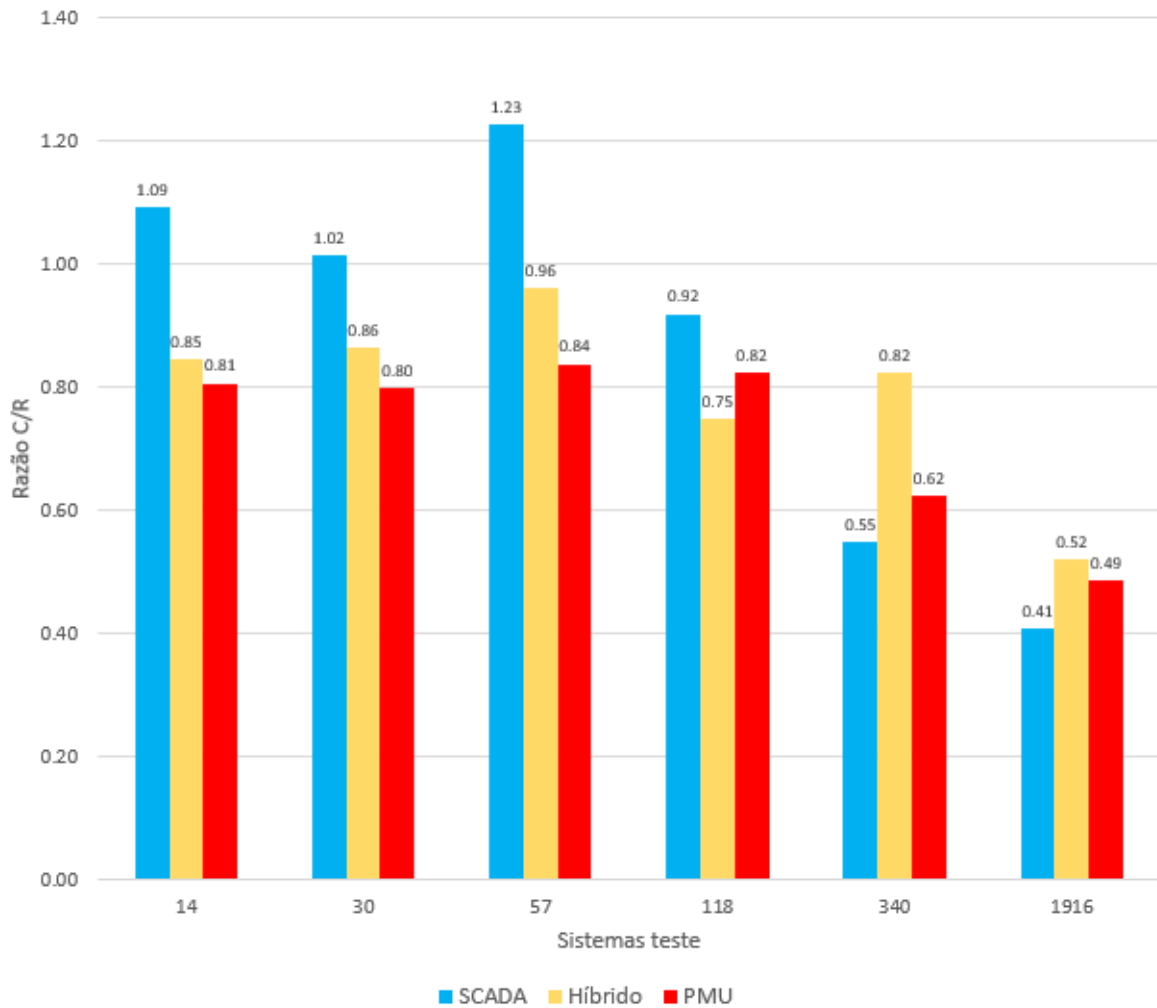


Figura 21 – Relação entre os tempos computacionais dos estimadores robustos (SHGM) formulados nos planos real e complexo - Tape variável

Similarmente aos estimadores clássicos, os estimadores robustos tiveram desempenho bastante parecido na estimação de medições puramente reais, i.e., provenientes do sistema SCADA, principalmente para sistemas de menor porte. Com a crescente inclusão de medições fasoriais evidencia-se a vantagem computacional do estimador formulado no plano complexo. Não somente isso, o aumento do tamanho dos sistemas também é um fator que viabiliza a utilização de tal estimador.

## 6 Conclusões Gerais

O presente trabalho apresenta as metodologias para a estimação clássica e robusta formuladas no plano complexo considerando o monitoramento remoto com medições híbridas, i.e., medições do sistema SCADA e de PMUs. Tais formulações se baseiam no Cálculo de Wirtinger, uma ferramenta necessária para transformar funções inicialmente não-analíticas em relação à uma variável complexa em funções analíticas no sistemas de coordenadas complexo e conjugado.

Com auxílio do Cálculo de Wirtinger, realizou-se a modelagem das funções não lineares referentes às medições e pseudo-medições híbridas. A modelagem no corpo dos complexos apresenta vantagens na sua simplicidade, por se tratar do domínio numérico adequado para o tratamento de variáveis elétricas, e também pela flexibilidade, uma vez que medições reais são um caso particular do modelo genérico para medições complexas.

Neste trabalho, detalhou-se a formulação do estimador clássico (WLS) e robusto (SHGM) no domínio dos complexos. Além disso, apresentam-se, ainda, as metodologias para processamento de erros grosseiros estendidas para o corpo dos complexos, ou seja, a metodologia clássica (método do maior resíduo normalizado) e a metodologia robusta (cálculo das projeções estatísticas). Ambas as metodologias são baseadas nos procedimentos já existentes para o domínio dos números reais.

Mostrou-se, também, a operacionalização de um algoritmo para análise de observabilidade algébrica dos sistemas teste associado a teoria de grafos. Tal algoritmo se baseia na construção de matrizes de incidência. Essas matrizes de incidência são esparsas, fáceis de serem construídas e sem risco de instabilidade numérica. A verificação da observabilidade algébrica é feita através da checagem do determinante da matriz de Gram. A simplicidade e o baixo custo computacional são os principais atrativos dessa metodologia.

Para verificação da observabilidade topológica, utilizou-se da teoria de grafos para construção das árvores geradoras observáveis para os subproblemas  $P - \delta$  e  $Q - V$ . Os algoritmos de Kruskal ou Prim foram utilizados para elaboração das árvores geradoras e um segundo algoritmo próprio foi utilizado para evitar a repetição das medições associadas a cada aresta das árvores geradoras. Dessa forma, construiu-se as AGOs em ambos subproblemas garantindo-se, assim, a observabilidade topológica dos sistemas teste.

O desempenho computacional dos estimadores clássico e robusto construídos no domínio dos números complexos foi superior à sua contraparte no plano real. Essa disparidade computacional é impactada diretamente com a inserção de medições fasoriais e também com o aumento do porte dos sistemas, evidenciando a vantagem operativa de tal solução unificada no plano complexo.



Além disso, tais estimadores foram eficientes no tratamento de erros grosseiros na metodologia clássica (método do maior resíduo normalizado) e na metodologia robusta (cálculo das projeções estatísticas). Na estimação robusta, a identificação e a magnitude de pesos de medidas classificadas como pontos de alavancamento é ligeiramente diferente para as formulações no plano real e complexo, entretanto tal diferença não ocasionou significativa assimetria entre os resultados dos estimadores robustos nos dois domínios numéricos.

## 6.1 Trabalhos Futuros

Sabe-se que a tendência global ocorre na utilização de redes híbridas, ou seja, aquelas compostas por fontes de energias distribuídas, dispositivos FACTS, cargas responsivas e microrredes. Isso implica em assumir redes elétricas com diferentes tipos de dinâmica. Nesse contexto, a estimação dinâmica de estados é uma evolução necessária para o futuro dos aplicativos de análise de redes presente nos centros de controle. A estimação dinâmica no sistema de coordenadas complexo-conjugado ainda não foi desenvolvida. Tendo em vista as vantagens dessa abordagem evidenciadas nesse trabalho para o estimador estático, a estimação dinâmica nesse novo domínio numérico é uma opção relevante para investigação.

Nesse cenário, estudos de estabilidade em sistemas diferenciais não-lineares no domínio dos números complexos também são de extrema importância. No âmbito matemático e da ciência da computação, esse conceito vem sendo estudado para diversas aplicações, faltando a extensão de tal conceito para aplicações formuladas no domínio dos complexos para sistemas elétricos de potência.

Estudos mais aprofundados baseados no algoritmo de análise algébrica e topológica associados a teoria de grafos também poderão contribuir para a estimação de estados e análise de redes elétricas. Uma possibilidade futura da operacionalização de tal algoritmo seria criar planos de medição considerando um número variável de medições associadas a cada nó da rede dependendo da necessidade operativa. Além disso, as AGOs geradas podem ser modificadas com base no peso atribuído a cada aresta do grafo de medição. Por exemplo, considerando os pesos de cada aresta como a variância dos erros de medição, implicaria em assumir AGOs formadas majoritariamente por medições fasoriais em sistemas com medições híbridas.

## 6.2 Artigo Submetido

Pires, R.; Mili, L.; Resende, E.; Ribeiro, R. Complex-Valued Projection Statistics Applied to Robust Power System State Estimation. *Power System Computation Confe-*

rence 2022.

# Referências

- 1 PIRES, R.; MILI, L.; CHAGAS, G. Robust complex-valued Levenberg-Marquardt algorithm as applied to power flow analysis. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, Elsevier, v. 113, n. May, p. 383–392, 2019. ISSN 01420615. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2019.05.032>>. 10, 21, 22, 23
- 2 PIRES, R. C.; MILI, L.; LEMOS, F. A. B. Constrained Robust Estimation of Power System State Variables and Transformer Tap Positions Under Erroneous Zero-Injections. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 29, p. 1144–1152, 2014. ISSN 0885-8950,1558-0679. Disponível em: <<http://doi.org/10.1109/TPWRS.2013.2284734>>. 10, 17, 23, 29, 39, 64
- 3 SCHREIER, P. J.; SCHARF, L. L. *Statistical Signal Processing of Complex-Valued Data: The Theory of Improper and Noncircular Signals*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. 16
- 4 STEINMETZ, C. P. Complex quantities and their use in electrical engineering. *Proceedings of the International Electrical Congress*, p. 33–74, 1893. 16
- 5 DZAFIC, I.; JABR, R. A.; HRNJIC, T. Hybrid State Estimation in Complex Variables. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 33, n. 5, p. 5288–5296, 2018. ISSN 08858950. 16, 17, 20, 23, 38
- 6 DŽAFIĆ, I.; JABR, R. A. Real-time equality-constrained hybrid state estimation in complex variables. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, v. 117, p. 105634, 2020. ISSN 0142-0615. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142061519310385>>. 16, 17
- 7 ZHOU, M. et al. An alternative for including phasor measurements in state estimators. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 21, n. 4, p. 1930–1937, 2006. 16
- 8 NUQUI, R. F.; PHADKE, A. G. Hybrid linear state estimation utilizing synchronized phasor measurements. In: *2007 IEEE Lausanne Power Tech*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 1665–1669. 16
- 9 CHENG, Y.; HU, X.; GOU, B. A new state estimation using synchronized phasor measurements. In: *2008 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 2817–2820. 16
- 10 COSTA, A. S.; ALBUQUERQUE, A.; BEZ, D. An estimation fusion method for including phasor measurements into power system real-time modeling. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 28, n. 2, p. 1910–1920, 2013. 16
- 11 WU, T.; CHUNG, C. Y.; KAMWA, I. A fast state estimator for systems including limited number of pmus. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 32, n. 6, p. 4329–4339, 2017. 16
- 12 CHAKHCHOUKH, Y. et al. Lts-based robust hybrid se integrating correlation. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 32, n. 4, p. 3127–3135, 2017. 16

- 13 BI, T.; QIN, X.; YANG, Q. A novel hybrid state estimator for including synchronized phasor measurements. *Electric Power Systems Research*, v. 78, n. 8, p. 1343–1352, 2008. ISSN 0378-7796. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378779607002374>>. 16
- 14 VALVERDE, G. et al. A constrained formulation for hybrid state estimation. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 26, n. 3, p. 1102–1109, 2011. 16
- 15 CHAKRABARTI, S. et al. Inclusion of pmu current phasor measurements in a power system state estimator. *Generation, Transmission & Distribution, IET*, v. 4, p. 1104 – 1115, 11 2010. 16
- 16 CHAKHCHOUKH, Y.; VITTAL, V.; HEYDT, G. T. Pmu based state estimation by integrating correlation. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 29, n. 2, p. 617–626, 2014. 16
- 17 MURUGESAN, V. et al. Pmu data buffering for power system state estimators. *IEEE Power and Energy Technology Systems Journal*, v. 2, n. 3, p. 94–102, 2015. 16
- 18 ZHANG, Q. et al. Impact of pmu measurement buffer length on state estimation and its optimization. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 28, n. 2, p. 1657–1665, 2013. 16
- 19 GLAVIC, M.; CUTSEM, T. V. Reconstructing and tracking network state from a limited number of synchrophasor measurements. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 28, n. 2, p. 1921–1929, 2013. 16
- 20 GÖL, M.; ABUR, A. A hybrid state estimator for systems with limited number of pmus. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 30, n. 3, p. 1511–1517, 2015. 16
- 21 GÖL, M. A decentralization method for hybrid state estimators. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 33, n. 2, p. 2070–2077, 2018. 16
- 22 KREUTZ-DELGADO, K. The Complex Gradient Operator and the CR-Calculus. 2009. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/0906.4835>>. 16, 19
- 23 WIRTINGER, W. Zur formalen Theorie der Funktionen von mehr komplexen Veränderlichen. *Mathematische Annalen*, v. 97, n. 1, p. 357–375, dec 1927. ISSN 0025-5831. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/BF01447872>>. 16, 20
- 24 DŽAFIĆ, I.; JABR, R. A.; HRNJIĆ, T. Complex variable multi-phase distribution system state estimation using vectorized code. *Journal of Modern Power Systems and Clean Energy*, v. 8, n. 4, p. 679–688, 2020. 17
- 25 ZHAO, J.; MILI, L. Vulnerability of the largest normalized residual statistical test to leverage points. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 33, n. 4, p. 4643–4646, 2018. 17, 42
- 26 ZHAO, J.; MILI, L.; SCALA, M. L. A robust hybrid power system state estimator with unknown measurement noise. In: \_\_\_\_\_. *Advances in Electric Power and Energy: Static State Estimation*. [S.l.: s.n.], 2020. p. 231–253. 17

- 27 MILI, L. et al. Robust state estimation based on projection statistics [of power systems]. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 11, p. 1118–1127, 1996. ISSN 0885-8950,1558-0679. Disponível em: <<http://doi.org/10.1109/59.496203>>. 17, 23, 39, 42, 43, 75
- 28 HUGHES, C. J. *Single-Instruction Multiple-Data Execution*. [S.l.: s.n.], 2015. 17
- 29 PIRES, R. *Complex-Valued Steady-State Models as Applied to Power Flow Analysis and Power System State Estimation*. Tese (Doutorado) — UNIFEI, 2018. Disponível em: <<https://repositorio.unifei.edu.br/jspui/handle/123456789/1359>>. 19, 23, 30
- 30 CHAGAS, G. *Fluxo de Potência Numericamente Robusto via Método de Levenberg-Marquardt de Ordem Superior*. Dissertação (Mestrado) — UNIFEI, 2018. Disponível em: <<https://repositorio.unifei.edu.br/jspui/handle/123456789/1561>>. 22, 23
- 31 BARBOZA, L.; ZÜRIN, H.; SALGADO, R. Load tap change transformers: A modeling reminder. *IEEE Power Engineering Review*, v. 21, n. 2, p. 51–52, 2001. 23
- 32 PIRES, R. *Solution Methods of Large Complex-Valued Nonlinear System of Equations, Chapter 4 - Book title: Advances in Complex Analysis and Applications*. IntechOpen, 2020. ISBN 978-1-83968-362-6. Disponível em: <<https://www.intechopen.com/books/advances-in-complex-analysis-and-applications/solution-methods-of-large-complex-valued-nonlinear-system-of-equations>>. 34
- 33 AWASTHI, A. et al. Complex qr decomposition using fast plane rotations for mimo applications. *IEEE Communications Letters*, v. 18, n. 10, p. 1743–1746, 2014. 34, 41
- 34 MATHWORKS. *Minimum norm least-squares solution to linear equation*. 2021. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/lsqlminnorm.html>>. 41, 63
- 35 QUINTANA, V.; SIMOES-COSTA, A.; MIER, M. Bad data detection and identification techniques using estimation orthogonal methods. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-101, n. 9, p. 3356–3364, 1982. 41
- 36 MONTICELLI A.; GARCIA, A. Reliable bad data processing for real-time state estimation. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-102, p. 1126–1139, 1983. ISSN 0018-9510. Disponível em: <<http://doi.org/10.1109/tpas.1983.318053>>. 42
- 37 SEHEULT, A. et al. Robust regression and outlier detection. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society)*, v. 152, p. 133, 01 1989. 42
- 38 MILI, L.; PHANIRAJ, V.; ROUSSEEUW, P. Least median of squares estimation in power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 6, n. 2, p. 511–523, 1991. 42
- 39 COSTA, A. S.; CARVALHO, A. Robustez de estimadores de estados baseados no critério de máxima correntropia face à ocorrência de pontos de alavancamentos. *Anais do Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos*, v. 1, n. 1, 2020. 43
- 40 MILI, L.; PHANIRAJ, V.; ROUSSEEUW, P. High breakdown point estimation in electric power systems. In: *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. [S.l.: s.n.], 1990. p. 1843–1846 vol.3. 45, 54

- 41 MONTICELLI, A.; WU, F. F. Network observability: Identification of observable islands and measurement placement. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-104, n. 5, p. 1035–1041, 1985. 45
- 42 ALMEIDA, M. C.; ASADA, E. N.; GARCIA, A. V. A numerical method for finding spanning trees in power system state estimation. In: *2006 International Conference on Power System Technology*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 1–6. 45
- 43 ALMEIDA, M. C. de; ASADA, E. N.; GARCIA, A. V. On the use of gram matrix in observability analysis. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 23, n. 1, p. 249–251, 2008. 45
- 44 KORRES, G. N. A gram matrix-based method for observability restoration. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 26, n. 4, p. 2569–2571, 2011. 45
- 45 CRAINIC, E. et al. Power system observability: On-line measurement set contingency analysis. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 21, n. 11, p. 491–499, 1988. ISSN 1474-6670. IFAC Symposium on Power Systems Modelling and Control Applications, Brussels, Belgium, 5-8 September. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667017537854>>. 45, 46, 50, 55
- 46 KRUMPHOLZ, G. R.; CLEMENTS, K. A.; DAVIS, P. W. Power system observability: A practical algorithm using network topology. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-99, n. 4, p. 1534–1542, 1980. 45, 59
- 47 WU, F. F.; MONTICELLI, A. Network observability: Theory. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-104, n. 5, p. 1042–1048, 1985. 53
- 48 COSTA, A. S.; PIAZZA, T.; MANDEL, A. Qualitative methods to solve qualitative problems in power system state estimation. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 5, n. 3, p. 941–949, 1990. 53, 55
- 49 CLEMENTS, K. A.; KRUMPHOLZ, G. R.; DAVIS, P. W. Power system state estimation residual analysis: An algorithm using network topology. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-100, n. 4, p. 1779–1787, 1981. 53
- 50 AYRES, M.; HALEY, P. H. Bad data groups in power system state estimation. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 1, n. 3, p. 1–7, 1986. 53
- 51 CUTSEM, T. V.; PAVELLA, M.; MILI, L. Hypothesis testing identification: A new method for bad data analysis in power system state estimation. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, v. 103, p. 3239 – 3252, 12 1984. 53
- 52 MATHWORKS. *Minimum spanning tree of graph*. 2021. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/graph.minspantree.html>>. 56
- 53 GEEKFORGEEKS. *Prim's Minimum Spanning Tree (MST) | Greedy Algo-5*. 2021. Disponível em: <<https://www.geeksforgeeks.org/prims-minimum-spanning-tree-mst-greedy-algo-5/>>. 56
- 54 GEEKFORGEEKS. *Kruskal's Minimum Spanning Tree Algorithm | Greedy Algo-2*. 2021. Disponível em: <<https://www.geeksforgeeks.org/kruskals-minimum-spanning-tree-algorithm-greedy-algo-2/>>. 56

- 
- 55 ABUR, A.; GOMEZ-EXPOSITO, A. *Power System State Estimation: Theory and Implementation*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 24. ISBN 0-8247-5570-7. 63, 79
- 56 MONTICELLI, A. *State Estimation in Electric Power Systems: A generalized approach*. [S.l.]: Springer, Boston, MA, 1999. ISBN 978-1-4615-4999-4. 63, 79
- 57 MONTICELLI, A.; (BRASIL), C. de Pesquisas de E. E. *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*. E. Blucher, 1983. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books?id=b\\\_qAkgEACAAJ](https://books.google.com.br/books?id=b\_qAkgEACAAJ)>. 65
- 58 WASHINGTON, U. of. *Power Systems Test Case Archive*. 2021. <<https://labs.ece.uw.edu/pstca/>>. 79

## Apêndices



# APÊNDICE A – Partições da matriz Jacobiana a cada iteração - Estimador WLS

---



---

Iteração 1

---



---

$$C_1 = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & a_{13} & a_{24} \\ -0.6250i & & & & & & \\ & -0.6250i & & & & & \\ & & -0.0625i & & & & \\ & & & -0.0183i & & & \\ & & & & -0.0625i & & \\ & & & & & -0.0183i & \\ -0.6250i & & & & & & \\ & -0.6250i & & & & & \\ & & -0.5767i & & & & \\ & & & -0.0325i & & & \\ & & & & -1.0808i & & \\ & & & & & 1.0000 & \\ & & & & & & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} V_1^* & V_2^* & V_3^* & V_4^* & V_5^* & a_{13}^* & a_{24}^* \\ 3.8462+18.6058i & -3.8462-19.2308i & & & & & \\ +4.0000i & & -4.0000i & & & & -4.0000i \\ -3.8462-19.2308i & 3.8462+18.6058i & & & & & \\ +4.0000i & & & -4.0000i & & & -4.0000i \\ -4.0000i & & +4.0000i & & & & +4.0000i \\ & & 291.7772+424.3407i & & & -291.7772-424.4032i & \\ & -4.0000i & & +4.0000i & & & +4.0000i \\ & & & 1.8962+6.4698i & -1.8962-6.4881i & & \\ & & -291.7772-424.4032i & & 291.7772+424.3407i & & \\ & & & -1.8962-6.4881i & 1.8962+6.4698i & & \\ 3.8462+22.6058i & -3.8462-19.2308i & -4.0000i & & & & -4.0000i \\ -3.8462-19.2308i & 3.8462+22.6058i & & -4.0000i & & & -4.0000i \\ -4.0000i & & 293.7454+436.6465i & -1.9682-8.8201i & -291.7772-424.4032i & +4.0000i & \\ & -4.0000i & -1.9682-8.8201i & 3.8643+19.2757i & -1.8962-6.4881i & & +4.0000i \\ & & -291.7772-424.4032i & -1.8962-6.4881i & 293.6734+429.8105i & & \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & a_{13} & a_{24} \\ & -0.5000i & & & & & \\ 0.5000 & & & & & & \\ & 0.5000 & & & & & \\ & & 0.5000 & & & & \\ & & & 0.5000 & & & \\ & & & & 0.5000 & & \end{bmatrix}$$

Iteração 2

$$C_2 = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & a_{13} & a_{24} \\ -0.0915+0.4097i & & & & & & \\ 1.0114-0.1859i & & & & & -0.9599+0.1915i & \\ & 0.1013-1.6723i & & & & & \\ & 0.8887-0.1868i & & & & & -0.8441+0.1774i \\ & & -1.1011+0.2024i & & & & \\ & & 1.6252-0.0062i & & & & \\ & & & -0.9209+0.1936i & & & \\ & & & 0.4024-0.1505i & & & \\ & & & & -1.5889-0.1190i & & \\ & & & & -0.3928+0.1139i & & \\ 0.9199+0.2237i & & & & & -0.9599+0.1915i & \\ & 0.9900-1.8591i & & & & & -0.8441+0.1774i \\ & & 0.1563-0.1658i & & & & \\ & & & 0.0016-0.1244i & & & \\ & & & & -1.6895-1.0055i & & \\ & & & & & 1.0000 & \\ & & & & & & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} V_1^* & V_2^* & V_3^* & V_4^* & V_5^* & a_{13}^* & a_{24}^* \\ 4.2755+19.2153i & -4.2853-19.8628i & & & & & \\ 0.0528+3.4967i & & -0.0577-3.8066i & & & 0.0002-3.3284i & \\ -3.7852-18.9259i & 3.7852+18.3108i & & & & & -0.0002-3.4818i \\ & +3.6661i & & 0.0002-3.7989i & & & \\ -1.0642-3.6827i & & 1.1587+4.0090i & & & 0.9597+3.5200i & \\ & & 415.3577+340.7683i & & -415.3758-340.8310i & & \\ & -0.8887-3.8529i & & 0.9207+3.9925i & & & 0.8443+3.6591i \\ & & & 3.3818+6.0213i & -3.3860-6.0395i & & \\ & & -415.8985-339.3102i & & 415.8803+339.2477i & & \\ & & & -3.7927-5.9365i & 3.7873+5.9182i & & \\ 4.3283+22.7120i & -4.2853-19.8628i & -0.0577-3.8066i & & & 0.0002-3.3284i & \\ -3.7852-18.9259i & 3.7852+21.9768i & & 0.0002-3.7989i & & & -0.0002-3.4818i \\ -1.0642-3.6827i & & 420.8951+352.5316i & -4.5277-8.2697i & -415.3758-340.8310i & 0.9597+3.5200i & \\ & -0.8887-3.8529i & -3.9946-8.3506i & 8.2938+18.3502i & -3.3860-6.0395i & & 0.8443+3.6591i \\ & & -415.8985-339.3102i & -3.7927-5.9365i & 419.3754+344.1655i & & \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & a_{13} & a_{24} \\ & -0.5000i & & & & & \\ 0.4999+0.0075i & & & & & & \\ & 0.5000 & & & & & \\ & & 0.4803+0.1388i & & & & \\ & & & 0.4872+0.1124i & & & \\ & & & & 0.4799+0.1402i & & \end{bmatrix}$$

Iteração 3

$$C_3 = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & a_{13} & a_{24} \\ -0.0969+0.3621i & & & & & & \\ 1.0452-0.0423i & & & & & -0.9959+0.0549i & \\ & 0.1066-1.6432i & & & & & \\ & 0.9216-0.0905i & & & & & -0.8766+0.0862i \\ & & -1.1509+0.0468i & & & & \\ & & 1.5458+0.4150i & & & & \\ & & & -0.9688+0.0950i & & & \\ & & & 0.4250-0.0542i & & & \\ & & & & -1.5080-0.5355i & & \\ & & & & -0.4150+0.0188i & & \\ 0.9483+0.3198i & & & & & -0.9959+0.0549i & \\ & 1.0282-1.7337i & & & & & -0.8766+0.0862i \\ & & 0.0076-0.0046i & & & & \\ & & & 0.0021-0.0030i & & & \\ & & & & -1.6193-1.4793i & & \\ & & & & & 1.0000 & \\ & & & & & & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} V_1^* & V_2^* & V_3^* & V_4^* & V_5^* & a_{13}^* & a_{24}^* \\ 4.3261+19.4718i & -4.3358-20.1279i & & & & & \\ 0.0512+3.4634i & & -0.0558-3.8135i & & & -0.0005-3.3026i & \\ -3.8458-19.2289i & 3.8458+18.6040i & & & & & 0.0006-3.4426i \\ & +3.6193i & & -0.0006-3.8047i & & & \\ -1.0964-3.5057i & & 1.2066+3.8603i & & & 0.9964+3.3576i & \\ & & 409.5940+321.5030i & & -409.6129-321.5634i & & \\ & -0.9216-3.7098i & & 0.9694+3.8997i & & & 0.8760+3.5288i \\ & & & 3.4166+5.8480i & -3.4210-5.8658i & & \\ & & -409.7159-319.9675i & & 409.6969+319.9073i & & \\ & & & -3.7950-5.6700i & 3.7894+5.6524i & & \\ 4.3773+22.9351i & -4.3358-20.1279i & -0.0558-3.8135i & & & -0.0005-3.3026i & \\ -3.8458-19.2289i & 3.8458+22.2233i & & -0.0006-3.8047i & & & 0.0006-3.4426i \\ -1.0964-3.5057i & & 415.2057+332.7854i & -4.5601-7.9183i & -409.6129-321.5634i & 0.9964+3.3576i & \\ & -0.9216-3.7098i & -4.0564-8.1218i & 8.4390+17.8557i & -3.4210-5.8658i & & 0.8760+3.5288i \\ & & -409.7159-319.9675i & -3.7950-5.6700i & 413.1828+324.5971i & & \end{bmatrix}$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & a_{13} & a_{24} \\ & -0.5000i & & & & & \\ 0.4999+0.0074i & & & & & & \\ & 0.5000 & & & & & \\ & & 0.4772+0.1492i & & & & \\ & & & 0.4852+0.1206i & & & \\ & & & & 0.4768+0.1504i & & \end{bmatrix}$$

