

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CICLOS LIMITES EM SISTEMAS RÍGIDOS

Thais Presses Mendes

Orientador: Prof. Dr. Fabio Scalco Dias

ITAJUBÁ, 16 DE DEZEMBRO DE 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CICLOS LIMITES EM SISTEMAS RÍGIDOS

Thais Presses Mendes

Orientador: Prof. Dr. Fabio Scalco Dias

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como
parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em
Matemática

ITAJUBÁ – MG

16 DE DEZEMBRO DE 2014

Dedico este trabalho aos meus pais, Carla e Amauri, ao meu irmão Gabriel e à minha avó Lourdes, pois nada teria sentido sem minha família.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por todas as bênçãos derramadas sobre minha vida e por me conceder paciência e fé para superar os momentos difíceis e conseguir cumprir esta etapa.

Aos meus pais, Carla e Amauri, pelo amor, carinho e apoio em todos os momentos da minha vida. Por renunciarem aos seus sonhos para que eu conquiste os meus e por serem meus exemplos e minha força em todos os desafios. Agradeço também ao meu irmão Gabriel pelo apoio e amizade.

Aos meus avós, José Américo e Carmélia, pelos cuidados e afeto. À minha avó Lourdes, pelo carinho, conselhos e por todas as vezes que me acalmou quando o cansaço e o desânimo tomaram conta de mim.

Agradeço imensamente ao meu orientador, Fabio Scalco Dias, pela paciência e comprometimento em sua orientação, pelo convívio, pelas palavras sempre motivadoras e pela enorme dedicação como professor e orientador. Seus valiosos ensinamentos e sua atenção desmedida foram fundamentais para essa conquista e para minha formação.

Ao meu namorado Kiko pelo amor, carinho e incentivo. Muito obrigada por estar ao meu lado em todos os momentos.

À Sra. Delminda e Dr. Clésio, deixo minha gratidão por terem me recebido em sua casa e por se tornarem uma verdadeira família pra mim. Além da alegria de concluir este curso, levo o imenso prazer de tê-los conhecido e de poder conviver e aprender com vocês durante esses anos. Também agradeço a toda sua família, em especial, à Isa e Clesinho pelo carinho e amizade.

Aos meus queridos amigos pelos conselhos e palavras de incentivo. De uma

maneira especial, à Helena, Nathali, Zizi e Andrezinho que apesar da distância e falta de tempo sempre estiveram presentes.

Aos professores da UNIFEI pelos ensinamentos. Principalmente, ao professor Antônio Carlos Fernandes pela generosidade e compreensão, ao professor Denis Braga pela disponibilidade e gentileza de contribuir com a pesquisa e ao professor Luis Fernando de Osório Mello pela atenção e contribuições à pesquisa. Agradeço também aos funcionários da universidade que proporcionaram um ambiente mais agradável para nossos estudos.

A todos os amigos do mestrado, em especial, Mariane, Jarne, Filipe, Sueni, Jerusa, Willian, Carol, Luana, Fernando, Alexandre, Antônio e Tiago, pelos momentos de aprendizagem e descontração que alegraram meus dias durante todo o curso.

A todos os meus familiares que torceram e rezaram por mim.

À CAPES pelo suporte financeiro.

Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para essa conquista, meu mais sincero: muito obrigada!

“...para mim, é impossível existir sem sonho. A vida na sua totalidade me ensinou como grande lição que é impossível assumi-la sem risco.”

Paulo Freire.

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar ciclos limites e centros para famílias particulares do sistema rígido

$$\begin{cases} x' = -y + xF(x, y), \\ y' = x + yF(x, y), \end{cases}$$

onde $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função analítica com $F(0,0) = 0$. Em particular, estudamos a existência de ciclos limites de pequenas amplitudes quando $F(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$, $F(x, y) = a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N$ e $F(x, y) = a_0 + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N + b_0 + b_2y^2 + \dots + b_Ny^N$, onde $N = 2n$. Além disso, estudamos o retrato de fase global deste sistema considerando $F(x, y) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ e concluimos que este sistema tem no máximo um ciclo limite.

Palavras-chave: Sistemas rígidos, problema foco-centro, ciclos limites, retrato de fase global.

Abstract

The aim of this dissertation is to study limit cycles and centers for particular families of the rigid system

$$\begin{cases} x' = -y + xF(x, y), \\ y' = x + yF(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

where $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is a analytic function with $F(0, 0) = 0$. In particular, we study the existence of small amplitude limit cycles when $F(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$, $F(x, y) = a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N$ and $F(x, y) = a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N + b_0 + b_2y^2 + \cdots + b_Ny^N$, where $N = 2n$. Furthermore, we study the global phase portrait of this system when $F(x, y) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, and we conclude that this system has at most one limit cycle.

Keywords: Rigid systems, center-focus problem, limit cycles, global phase portrait.

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
Índice	vii
Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Resultados Preliminares	5
2.1 O Problema Foco–centro em \mathbb{R}^2	5
2.2 Estabilidade Local Segundo Lyapunov	7
2.3 Valores Focais e Coeficientes de Lyapunov	8
3 Centros e Ciclos Limites de Pequenas Amplitudes	17
3.1 $F(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$	18
3.2 $F(x, y) = F(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N$	22
3.3 $F(x, y) = a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N + b_0 + b_2y^2 + \cdots + b_Ny^N$	30
4 Retrato de Fase Global para uma Classe de Sistemas Rígidos	38
4.1 Motivação	38
4.2 A Bifurcação de Hopf	39
4.3 A Compactificação de Poincaré	41

4.4	Número Máximo de Ciclos Limites	47
4.4.1	Estudo na parte compacta do plano	47
4.4.2	Retrato de fase global	49
	Conclusões e Trabalhos Futuros	57
	Bibliografia	58

Lista de Figuras

3.1	Dois ciclos limites do sistema (3.14)	29
3.2	Dois ciclos limites do sistema (3.18)	37
4.1	Retrato de fase do sistema $X = (-y + x(\mu - x^2 - y^2), x + y(\mu - x^2 - y^2))$ ilustrando uma bifurcação de Hopf.	41
4.2	Projeção central	43
4.3	Blow-up e blow-down da singularidade cúspide	50
4.4	Retratos de fase do sistema (4.19)	55
4.5	Curvas de Nível da função H	56

Capítulo 1

Introdução

A Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias inicia-se com Poincaré [20] em 1881. Nesta Teoria, as pesquisas sobre ciclos limites, que são órbitas periódicas isoladas, constituem uma das partes mais difíceis e interessantes. A noção de ciclo limite para campos vetoriais planares também foi introduzida por Poincaré.

No fim da década de 1920, van der Pol [25], Liénard [16] e Andronov [3], no estudo de oscilações não lineares de fenômenos elétricos, obtiveram certas equações especiais de segunda ordem para as quais ocorriam os ciclos limites, como havia idealizado Poincaré. Após tal verificação, matemáticos e físicos estudaram extensivamente a não-existência, a existência e a unicidade, entre outras propriedades de ciclos limites.

O problema mais famoso sobre ciclos limites foi proposto por Hilbert. No Congresso Internacional de Matemática de Paris em 1900, Hilbert [12] divulgou uma lista com 23 problemas. Dentre eles, o 16º Problema, ou pelo menos sua segunda parte, ainda encontra-se sem solução e refere-se à determinação do número máximo de ciclos limites, denotado por $\mathcal{H}(n)$, de um sistema polinomial de grau n do tipo

$$\begin{cases} x' = \sum_{i+j=0}^m a_{ij} x^i y^j, \\ y' = \sum_{i+j=0}^k b_{ij} x^i y^j, \end{cases}$$

onde n é o máximo entre os graus m e k . Mais especificamente:

“Qual é o número máximo de ciclos limites de um campo vetorial polinomial de grau n e quais são suas posições relativas.”

Sabemos que qualquer sistema linear em \mathbb{R}^2 não tem ciclo limite. Logo, $\mathcal{H}(1) = 0$. Pouco se sabe ainda sobre $\mathcal{H}(2)$. Em 1954, o matemático russo N.N. Bautin [4] provou que qualquer sistema quadrático tem no máximo três ciclos limites de pequenas amplitudes, ou seja, bifurcando da origem. Mais especificamente, Bautin conseguiu exibir explicitamente um número finito de condições algébricas necessárias e suficientes para que o ponto de equilíbrio seja um centro. Por algum tempo acreditou-se que $\mathcal{H}(2) = 3$, mas, em 1980, Songling [22] produziu um exemplo de sistema quadrático com quatro ciclos limites. Portanto, $\mathcal{H}(2) \leq 4$. Perante todas as evidências acredita-se que $\mathcal{H}(2) = 4$.

Para o estudo de cotas superiores de ciclos limites para sistemas planares é necessário o entendimento do retrato de fase e do comportamento do campo no infinito. Para campos de vetores polinomiais, isto é possível através da compactação de Poincaré. A ideia é analisar o comportamento global de sistemas dinâmicos planares usando a projeção central da esfera de Poincaré sobre um plano. Este tipo de projeção central, introduzida por Poincaré, tem a vantagem de que as singularidades no infinito estão espalhadas ao longo do equador da esfera de Poincaré. Pode acontecer que estas singularidades sejam não elementares, isto é, quando um ou ambos autovalores sejam nulos e o princípio de redução ao comportamento central não se aplica. Nestes casos, podemos usar o processo de desingularização, conhecido como “blow-up”, para melhor entender estas singularidades.

Outro problema interessante é o problema foco-centro. Grosseiramente falando, trata-se de decidir se um equilíbrio de um sistema planar, cuja linearização é um centro, é um foco ou um centro.

Cálculos relativamente simples mostram que, quando a linearização do sistema em um ponto de equilíbrio tem autovalores com partes reais e partes

imaginárias diferentes de zero, o ponto de equilíbrio é um foco (atrator ou repulsor). Se, no entanto, as partes reais dos autovalores são iguais a zero, então a estabilidade do ponto de equilíbrio depende dos termos não-lineares de uma forma não trivial. Um método geral, devido à Poincaré e Lyapunov, reduz o problema foco-centro ao de resolver um sistema infinito de equações polinomiais. Ou seja, o problema foco-centro é reduzido ao problema de encontrar a variedade do ideal gerado por uma coleção de polinômios, chamado de quantidades focais (η_{2k}) do sistema. Segue do Teorema da Base de Hilbert que todo ideal polinomial é gerado por um número finito de polinômios. Desta forma, deve existir um $k \in \mathbb{N}$ tal que o ideal $B = \langle \eta_2, \eta_4, \dots \rangle$ satisfaça $B = B_k = \langle \eta_2, \eta_4, \dots, \eta_{2k} \rangle$. Assim, o problema foco-centro estará resolvido se encontrarmos um número k tal que $B = B_k$. Na prática, encontrar k é muito difícil.

Como o 16º Problema original e o problema foco-centro são, de fato, muito amplos, podemos estudar as chamadas versões restritas destes problemas. Uma destas versões diz respeito aos sistemas rígidos.

Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = -y + xF(x, y), \\ y' = x + yF(x, y), \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função analítica com $F(0, 0) = 0$. Este sistema é chamado **rígido** ou **uniformemente isócrono**. Esses termos devem-se ao fato de que em coordenadas polares (r, θ) , o sistema (1.1) é dado por

$$\begin{cases} r' = rF(r\cos\theta, r\sin\theta), \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

Assim, temos as seguintes propriedades: a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema e se a origem é um centro, então ela é um centro isócrono, ou seja, todas as órbitas tem o mesmo período. Esta última propriedade é uma razão pela qual os sistemas rígidos têm sido estudados em vários artigos. Ver, por exemplo, [1], [2], [6], [7], [10] e [11].

Nesta dissertação estudaremos estes problemas para três famílias particulares do sistema (1.1).

Para uma visão completa desta dissertação, os capítulos subsequentes encontram-se assim organizados:

✓ CAPÍTULO 2: Apresentaremos as definições de valores focais, base focal e o método criado por Lyapunov para encontrar os coeficientes de Lyapunov afim de determinar a estabilidade de um ponto de equilíbrio.

✓ CAPÍTULO 3: Estudaremos o problema foco-centro para o sistema (1.1) considerando funções $F(x, y)$ particulares, a saber:

1. $F(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$,
2. $F(x, y) = F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N$, ou $F(x, y) = F(y) = a_0 + a_1y + \dots + a_Ny^N$, onde $N = 2n$ ou $N = 2n + 1$,
3. $F(x, y) = (a_0 + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N) + (b_0 + b_2y^2 + \dots + b_Ny^N)$, onde $N = 2n$, $n \geq 0$.

Além dos conceitos apresentados no Capítulo 2, a definição de sistema do tipo tempo-reversível será uma ferramenta fundamental. Apresentaremos também condições para a existência de ciclos limites de pequenas amplitudes.

✓ CAPÍTULO 4: Iniciaremos este capítulo com uma noção superficial de bifurcação de Hopf para compreender o surgimento de ciclos limites. Em seguida, estudaremos a compactificação de Poincaré para fazer uma análise do comportamento das órbitas no infinito. Com isso, será possível obter o retrato de fase global do sistema

$$\begin{cases} x' = -y + x(a_0 + a_1x + a_2x^2), \\ y' = x + y(a_0 + a_1x + a_2x^2), \end{cases}$$

considerando todas as variações dos parâmetros a_0 e a_2 . Por fim, mostraremos que este sistema tem no máximo 1(um) ciclo limite.

Capítulo 2

Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos preliminares que serão necessários no decorrer desta dissertação. Em particular, introduziremos o problema foco-centro em \mathbb{R}^2 e as definições de valores focais e base focal. Estudaremos um método computacional eficiente para encontrar as constantes de Lyapunov e decidir a estabilidade de um ponto de equilíbrio. Durante todo trabalho, esses conceitos serão analisados para sistemas rígidos.

2.1 O Problema Foco–centro em \mathbb{R}^2

Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = \tilde{P}(x, y) \\ y' = \tilde{Q}(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

onde \tilde{P} e \tilde{Q} são funções analíticas. Suponha que a origem $(0, 0)$ seja um ponto de equilíbrio isolado, isto é, existe uma vizinhança contendo a origem na qual ela é o único ponto de equilíbrio. Considere o campo de vetores $X(x, y) = (\tilde{P}(x, y), \tilde{Q}(x, y))$ associado ao sistema (2.1). Suponha ainda que a matriz Jacobiana $J = DX(0, 0)$ tenha autovalores complexos conjugados, o que garante que numa vizinhança suficientemente próxima da origem, as soluções de (2.1) circulam a origem.

O problema foco-centro é, sob as hipóteses anteriores, distinguir se a origem

é um foco (atrator ou repulsor) ou um centro.

Se a origem for um ponto singular hiperbólico, ou seja, os autovalores da matriz Jacobiana $J(0, 0) = DX(0, 0)$ forem da forma

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

com $\alpha \neq 0$, então o teorema de Hartman-Grobman garante que o sistema linearizado descreve o comportamento do sistema não linear próximo da origem, ou seja, o comportamento numa vizinhança da origem é sempre modelado pelo comportamento da parte linear e podemos “ignorar” os termos de ordem superior. Neste caso, veremos mais adiante que a origem é um foco atrator ($\alpha < 0$) ou um foco repulsor ($\alpha > 0$). Assim, é de nosso interesse o problema foco-centro quando os autovalores da matriz Jacobiana $J(0, 0) = DX(0, 0)$ são da forma

$$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$$

com $\beta \neq 0$. Notemos que, neste caso, a origem é um ponto de equilíbrio não hiperbólico e, portanto, o sistema linearizado não descreve necessariamente o comportamento do sistema não linear próximo da origem. Veremos como resolver efetivamente este problema para algumas classes de sistemas rígidos.

Exemplo 2.1.1. *Considere o sistema rígido dado por*

$$\begin{cases} x' = -y + xF(x, y), \\ y' = x + yF(x, y), \end{cases}$$

onde $F(x, y)$ é uma função real analítica com $F(0, 0) = 0$. É fácil ver que a origem é o único ponto de equilíbrio deste sistema e é um foco ou um centro. Para esses sistemas o problema foco-centro é equivalente ao problema da isocronicidade, ou seja, quando toda órbita periódica em uma vizinhança da origem tem o mesmo período. De fato, em coordenadas polares (r, θ) este sistema pode ser escrito como

$$\begin{cases} r' = rF(r\cos\theta, r\sin\theta), \\ \theta' = 1, \end{cases}$$

assim, se a origem é um centro, então ela é isócrona.

2.2 Estabilidade Local Segundo Lyapunov

Nesta seção apresentaremos algumas definições e o critério de Lyapunov, os quais referem-se a estabilidade de um ponto de equilíbrio.

Definição 2.2.1. *Dados $X : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial, onde \mathcal{U} é um aberto de \mathbb{R}^2 e $p \in \mathcal{U}$ uma singularidade do campo X , temos que:*

- a) p é **estável** se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $\|x - p\| < \delta$ implica $\|\varphi(t, x) - p\| < \varepsilon$, para todo $t > 0$, onde $\varphi(t, x)$ é a curva integral de X ;
- b) p é **instável** se não for estável;
- c) p é **assintoticamente estável** se p é estável e, além disso, existe $\varepsilon > 0$, tal que $\|x - p\| < \varepsilon$ implica $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = p$;
- d) p é **assintoticamente instável** se p é instável e, além disso, existe $\varepsilon > 0$, tal que $\|x - p\| < \varepsilon$ implica $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, x) = p$.

Considere um campo vetorial X e $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Definimos a derivada de V na direção do campo X no ponto $p \in \mathcal{U}$ por

$$\dot{V}(p) = \nabla V(p) \cdot X(p).$$

Definição 2.2.2. *Dados o campo X e a função V como acima. Considere $p \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ um ponto singular de X , temos que*

- a) V é uma **função de Lyapunov** para o campo X se $V(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathcal{V}$, $V(x) = 0$ se, e somente se, $x = p$ e $\dot{V} \leq 0$, para todo $x \in \mathcal{V}$;
- b) V é uma **função de Lyapunov estrita** para o campo X se V é função de Lyapunov e, além disso, $\dot{V} < 0$, para todo $x \in \mathcal{V}$.

Teorema 2.2.1. (Critério de Lyapunov). *Seja p uma singularidade isolada do campo X . Se existir uma função de Lyapunov V definida em algum domínio*

$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ contendo p , então p é uma **singularidade estável**. Se V for uma função de Lyapunov estrita então p será uma **singularidade assintoticamente estável**.

Demonstração: A demonstração deste teorema pode ser encontrada no livro [23]. ■

2.3 Valores Focais e Coeficientes de Lyapunov

Nesta seção apresentaremos um método computacional eficiente [14] para calcular os coeficientes de Lyapunov, tais coeficientes darão informações sobre a estabilidade de uma singularidade.

Considere o campo $X = (\tilde{P}, \tilde{Q})$ associado ao sistema (2.1). Suponha que sua linearização na origem apresente um foco ou um centro. Com mudanças adequadas de coordenadas, o sistema (2.1) pode ser escrito como

$$\begin{cases} x' = y + \lambda x + P(x, y), \\ y' = -x + \lambda y + Q(x, y), \end{cases} \quad (2.2)$$

onde P e Q são funções analíticas cujos desenvolvimentos de Taylor na origem começam com, pelo menos, termos quadráticos. Considere a função de Lyapunov

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dot{V} = \nabla V \cdot X &= (x, y)(y + \lambda x + P, -x + \lambda y + Q) \\ &= \lambda x^2 + xP + \lambda y^2 + yQ \\ &= \lambda(x^2 + y^2) + xP + yQ. \end{aligned}$$

Desta forma o sinal de \dot{V} em uma vizinhança da origem é determinado pelo sinal de λ . Se $\lambda \neq 0$ dizemos que a origem é um **foco forte**. Pelo Teorema 2.2.1, se $\lambda < 0$ a origem é assintoticamente estável e se $\lambda > 0$ a origem é instável. Quando $\lambda = 0$ dizemos que a origem é um **foco fraco** ou um centro.

Daqui para frente, queremos estudar a estabilidade do equilíbrio $(0, 0)$ quando $\lambda = 0$. Desta forma, o sistema (2.2) é dado por

$$\begin{cases} x' = y + P(x, y), \\ y' = -x + Q(x, y), \end{cases} \quad (2.3)$$

com

$$P(x, y) = \sum_{k=2}^m P_k(x, y) + O(\|(x, y)\|^{m+1}),$$

$$Q(x, y) = \sum_{k=2}^m Q_k(x, y) + O(\|(x, y)\|^{m+1}),$$

onde

$$P_k(x, y) = \sum_{j=0}^k p_{k-j,j} x^{k-j} y^j,$$

$$Q_k(x, y) = \sum_{j=0}^k q_{k-j,j} x^{k-j} y^j.$$

A notação O denota a expansão em série de Taylor, em torno da origem, iniciando-se nos termos de ordem $(m + 1)$ no mínimo.

Considere a função dada por

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{k=3}^{m+1} V_k(x, y) + O(\|(x, y)\|^{m+2}), \quad (2.4)$$

com

$$V_k(x, y) = \sum_{j=0}^k V_{k-j,j} x^{k-j} y^j \quad (2.5)$$

polinômios homogêneos de grau k nas variáveis x e y . Tomando a expansão em série de Taylor até os termos de ordem 3, o sistema (2.3) assume a forma

$$\begin{cases} x' = y + P_2(x, y) + P_3(x, y) + O(\|(x, y)\|^4), \\ y' = -x + Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + O(\|(x, y)\|^4), \end{cases} \quad (2.6)$$

com

$$P_2(x, y) = p_{20}x^2 + p_{11}xy + p_{02}y^2,$$

$$P_3(x, y) = p_{30}x^3 + p_{21}x^2y + p_{12}xy^2 + p_{03}y^3,$$

$$Q_2(x, y) = q_{20}x^2 + q_{11}xy + q_{02}y^2,$$

$$Q_3(x, y) = q_{30}x^3 + q_{21}x^2y + q_{12}xy^2 + q_{03}y^3.$$

A função (2.4) com $m = 3$ é dada por

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V_3(x, y) + V_4(x, y) + O(\|(x, y)\|^5), \quad (2.7)$$

com

$$\begin{aligned} V_3(x, y) &= V_{30}x^3 + V_{21}x^2y + V_{12}xy^2 + V_{03}y^3, \\ V_4(x, y) &= V_{40}x^4 + V_{31}x^3y + V_{22}x^2y^2 + V_{13}xy^3 + V_{04}y^4. \end{aligned}$$

Diferenciando (2.7) ao longo das órbitas de (2.6) segue que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \left(R_3(x, y) + \left(y \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y) \right) \right) + \left(R_4(x, y) + \right. \\ &\quad \left. \left(y \frac{\partial V_4}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial V_4}{\partial y}(x, y) \right) \right) + O(\|(x, y)\|^5), \end{aligned} \quad (2.8)$$

com

$$\begin{aligned} R_3(x, y) &= xP_2(x, y) + yQ_2(x, y), \\ R_4(x, y) &= xP_3(x, y) + yQ_3(x, y) + P_2(x, y) \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y) + Q_2(x, y) \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Considere os seguintes espaços vetoriais

$$\begin{aligned} P_n &= \left\{ p(x, y) = \sum_{j=0}^n a_{n-j,j} x^{n-j} y^j : \text{grau}(p(x, y)) = n, a_{n-j,j} \in \mathbb{R} \right\} \cup \\ &\quad \{ \text{polinômio nulo} \} \\ \mathbb{R}^{n+1} &= \left\{ u : u = \sum_{j=0}^n u_{n-j,j} e_{j+1}, u_{n-j,j} \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Os conjuntos $B_P^n = \{x^n, x^{n-1}y, \dots, xy^{n-1}, y^n\}$ e $B_{\mathbb{R}}^{n+1} = \{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ são bases para P_n e \mathbb{R}^{n+1} , respectivamente. A base $B_{\mathbb{R}}^{n+1}$ é a canônica em \mathbb{R}^{n+1} . A transformação linear de P_n em \mathbb{R}^{n+1} tem a seguinte construção

$$\begin{aligned} S_n : P_n &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ p(x, y) &= \sum_{j=0}^n a_{n-j,j} x^{n-j} y^j \mapsto u = \sum_{j=0}^n a_{n-j,j} e_{j+1}. \end{aligned}$$

Considere agora a seguinte transformação linear

$$\begin{aligned} T_n : P_n &\rightarrow P_n \\ p(x, y) &\mapsto T_n(p(x, y)) = y \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial p}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Tomando as bases B_P^3 e B_P^4 para P_3 e P_4 , respectivamente, as matrizes A_3 e A_4 , com relação a essas bases, são respectivamente

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposição 2.3.1. *A transformação linear T_3 é um isomorfismo. O núcleo da transformação T_4 tem dimensão 1 e a imagem dimensão 4. Uma base para o núcleo é $\{(x^2 + y^2)^2\}$.*

Demonstração: O núcleo da transformação linear T_3 é trivial, visto que $\text{Det}(A_3) = 9$. Logo, T_3 é injetora. Para provar que T_3 é sobrejetora, basta observar que a $\dim(\text{Im}(T_3)) = 4$ e que $\{T_3(x^3), T_3(x^2y), T_3(xy^2), T_3(y^3)\}$ é uma base para a imagem T_3 e para P_3 . Como T_3 é bijetora, admite uma transformação inversa a qual também é linear e bijetora. A matriz A_4 é equivalente por linhas a matriz escalonada reduzida por linhas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, o $\text{posto}(A_4) = 4$ e, conseqüentemente, o núcleo de T_4 tem dimensão 1 e a imagem dimensão 4. De um cálculo simples $A_4 S_4(p(x, y)) = 0$, $p(x, y) \in P_4$, segue que $S_4^{-1}(1, 0, 2, 0, 1) = (x^2 + y^2)^2$. ■

Resulta da Proposição 2.3.1 que $V_3(x, y)$ pode ser escolhido de maneira única de forma a cancelar os termos de grau 3 de (2.3). Tal escolha é feita resolvendo-se o sistema linear

$$A_3 S_3(V_3(x, y)) = -S_3(xP_2(x, y) + yQ_2(x, y)),$$

onde

$$\begin{aligned} S_3(V_3(x, y)) &= (V_{30}, V_{21}, V_{12}, V_{03}), \\ S_3(xP_2(x, y) + yQ_2(x, y)) &= (p_{20}, p_{11} + q_{20}, p_{02} + q_{11}, q_{02}). \end{aligned}$$

Segue que

$$(V_{30}, V_{21}, V_{12}, V_{03}) = \left(-\frac{1}{3}(p_{11} + q_{20} + 2q_{02}), p_{20}, -q_{02}, \frac{1}{3}(p_{02} + 2p_{20} + q_{11}) \right).$$

A mesma metodologia não pode ser aplicada para a escolha dos coeficientes de $V_4(x, y)$, pois T_4 não é isomorfismo. Contudo, $V_4(x, y)$ pode ser escolhido de forma que $\dot{V}(x, y)$ tenha um sinal bem definido. Isto pode ser feito impondo que os termos de ordem 4 de (2.3) pertençam ao núcleo de T_4 . Assim, os coeficientes de $V_4(x, y)$ podem ser obtidos através de

$$\begin{aligned} A_4 \left(S_4 \left(xP_3(x, y) + yQ_3(x, y) + P_2(x, y) \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y) + Q_2(x, y) \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y) \right) + \right. \\ \left. + A_4 S_4(V_4(x, y)) \right) = 0, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} S_4(V_4(x, y)) &= (V_{40}, V_{31}, V_{22}, V_{13}, V_{04}), \\ S_4 \left(xP_3(x, y) + yQ_3(x, y) + P_2(x, y) \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y) + Q_2 \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y) \right) &= \\ &= (s_{40}, s_{31}, s_{22}, s_{13}, s_{04}), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} s_{40} &= p_{11}p_{20} + p_{30} + 2p_{20}q_{02}, \\ s_{31} &= p_{11}^2 - 2p_{20}^2 + p_{21} - p_{20}q_{11} + 2q_{20}q_{02} + p_{11}(q_{20} + 2q_{02}) + q_{30}, \\ s_{22} &= p_{12} - 2p_{20}p_{11} + p_{02}(p_{11} + 2q_{02}) + 2q_{11}q_{02} - 2p_{20}q_{20} - q_{11}q_{20} + q_{21}, \\ s_{13} &= p_{03} + p_{11}q_{02} + 2q_{02}^2 - 2p_{20}q_{11} - q_{11}^2 - p_{02}(2p_{20} + q_{11}) + q_{12}, \\ s_{04} &= -2p_{20}q_{02} - q_{11}q_{02} + q_{03}. \end{aligned}$$

Logo,

$$V_{40} = \frac{1}{4} (2q_{02}q_{20} - q_{12} - 3p_{20}q_{11} - q_{30} - 2p_{20}^2 + p_{11}^2 + 3q_{02}p_{11} + p_{11}q_{20} - p_{21} + 2q_{02}^2 - q_{11}p_{02} - q_{11}^2 - p_{03} - 2p_{20}p_{02}) + 1,$$

$$V_{31} = \frac{1}{8} (5p_{30} - 7p_{20}p_{11} - 16q_{02}p_{20} - 3q_{03} - q_{21} - q_{02}q_{11} - 2p_{20}q_{20} - q_{20}q_{11} + p_{02}p_{11} + 2q_{02}p_{02} - p_{12}),$$

$$V_{22} = \frac{1}{2} (2q_{02}^2 - q_{11}p_{02} - 2p_{20}q_{11} - q_{11}^2 + q_{02}p_{11} - q_{12} - p_{03} - 2p_{20}p_{02}) + 2,$$

$$V_{13} = \frac{1}{8} (3p_{30} - p_{20}p_{11} - 16q_{02}p_{20} - 5q_{03} + q_{21} - 7q_{02}q_{11} + 2p_{20}q_{20} - p_{02}p_{11} + q_{20}q_{11} - 2q_{02}p_{02} + p_{12}),$$

$$V_{04} = 1.$$

Com estas escolhas feitas para $V_3(x, y)$ e $V_4(x, y)$, segue que

$$\dot{V}(x, y) = \eta_4(x^2 + y^2)^2 + O(\|(x, y)\|^5), \quad (2.9)$$

com

$$\eta_4 = \frac{1}{8} (3q_{03} - p_{20}p_{11} + 3p_{30} + q_{21} + q_{02}q_{11} + 2p_{20}q_{20} + q_{20}q_{11} - p_{02}p_{11} - 2q_{02}p_{02} + p_{12}). \quad (2.10)$$

A equação (2.9) determina a estabilidade da origem. De fato, a função

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V_3(x, y) + V_4(x, y) \quad (2.11)$$

é uma função de Lyapunov em alguma vizinhança da origem. Assim, do Teorema 2.2.1, obtemos que se $\eta_4 < 0$, então a singularidade é assintoticamente estável. Se $\eta_4 > 0$, então a singularidade é instável. Quando $\eta_4 = 0$ ainda não podemos determinar a estabilidade da origem.

Na verdade, o processo criado por Lyapunov para estudar a estabilidade da origem do sistema (2.3), é um processo puramente algébrico. A ideia desse processo é construir recursivamente funções de Lyapunov para o sistema (2.3).

A seguir, afirmamos que a Proposição 2.3.1 é verdadeira para o caso geral.

Proposição 2.3.2. *Quando n é ímpar, T_n é um isomorfismo. Quando n é par, T_n possui núcleo de dimensão um gerado por $(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}$.*

Demonstração: A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [5]. ■

Desta forma, se $\eta_4 = 0$ na equação (2.9), podemos proceder de forma análoga ao que já fizemos para obter η_4 e produzir uma nova série V , garantida pela Proposição 2.3.2 tal que

$$\dot{V} = \eta_6(x^2 + y^2)^3 + \dots$$

e assim por diante. Em resumo, V pode ser escolhida de tal forma que

$$\dot{V} = \eta_4(x^2 + y^2)^2 + \eta_6(x^2 + y^2)^3 + \dots + \eta_{2k}(x^2 + y^2)^k + \dots$$

Observação 2.3.1. *Este resultado sobre estabilidade não exige que o campo vetorial X seja analítico. Além disso, os cálculos formais com a série V são justificados porque a função de Lyapunov (2.11), que é um requisito para a aplicação do Teorema 2.2.1, acaba por ser um polinômio.*

Apresentamos agora um teorema bastante útil sobre a estabilidade.

Teorema 2.3.1. *Se $\eta_{2k} = 0$, $k = 2, \dots, N$, mas $\eta_{2N+2} \neq 0$, então a estabilidade da singularidade na origem é determinada:*

- *Se $\eta_{2N+2} < 0$, então a singularidade é assintoticamente estável.*
- *Se $\eta_{2N+2} > 0$, a singularidade é instável.*

Demonstração: A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [21], página 94. ■

As constantes η_{2k} são chamadas de **valores focais**. Do método exposto acima juntamente com o Teorema 2.3.1 temos que, se após um número finito de etapas determinarmos um valor focal não nulo, então poderemos produzir uma função de Lyapunov polinomial e assim a usarmos para determinar a estabilidade do ponto singular. Contudo, ainda não esgotamos todas as possibilidades: o que acontece se todos os valores focais forem nulos? Esta pergunta é esclarecida no teorema abaixo.

Teorema 2.3.2. (Centro de Lyapunov). *Se o campo vetorial X é analítico e $\eta_{2k} = 0$ para $n = 2, \dots, \infty$ então a origem é um centro. Além disso, a série que define V é convergente numa vizinhança da origem e representa uma função cujos conjuntos de nível contém as órbitas do sistema correspondente ao campo X .*

Demonstração: A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [21], página 94. ■

Como η_{2k} é relevante somente quando $\eta_{2l} = 0$ para todo $l < k$, tomamos

$$\eta_2 = \eta_4 = \dots = \eta_{2k-2} = 0$$

nas expressões de η_{2k} . As quantidades obtidas dessa maneira são chamadas de **coeficientes de Lyapunov**, e serão denotadas por $L_k = \eta_{2k+2}$, para $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$.

Se trabalharmos com P e Q polinômios, segue do Teorema da Base de Hilbert que existe uma constante m tal que $L_k = 0$ para todo k se, e somente se, $L_k = 0$ se $k \leq m$. A base

$$B = \{L_0, L_1, L_2, \dots, L_m\}$$

é chamada de **base focal**.

Desta forma é necessário calcular somente um número finito de coeficientes de Lyapunov. Contudo, dado um sistema qualquer, não sabemos a priori quantos coeficientes temos que calcular para termos a base focal B , com exceção de alguns casos específicos. Em geral, os cálculos dos coeficientes de Lyapunov são muito longos e complicados, exceto em alguns casos mais simples, assim vários métodos computacionais tem sido desenvolvidos. Como exemplo, aplicaremos este processo para o sistema cúbico rígido que será estudado no Capítulo 3.

Exemplo 2.3.1. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x' = -y + x(a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2), \\ y' = x + y(a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2), \end{cases} \quad (2.12)$$

onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ e $d^2 + e^2 + f^2 \neq 0$.

Suponha $a = 0$, caso contrário a origem é trivialmente um foco. Seguindo o processo descrito acima, a função de Lyapunov é dada por

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V_3(x, y) + V_4(x, y),$$

com

$$V_3(x, y) = cx^3 - bx^2y + cxy^2 - by^3 \text{ e}$$

$$V_4(x, y) = Ax^4 + Bx^3y + Ax^2y^2 + Bxy^3,$$

onde $A = \frac{1}{2}(3c^2 + e - 3b^2)$ e $B = \frac{1}{2}(f - d) - 3bc$. Com essas escolhas convenientes para $V_3(x, y)$ e $V_4(x, y)$ segue que

$$\dot{V} = \nabla V \cdot X = \eta_4(x^2 + y^2)^2 + \dots,$$

com

$$L_1 = \eta_4 = d + f.$$

Através de cálculos realizados no programa computacional MAPLE, obtemos também o segundo coeficiente de Lyapunov. Neste caso, omitiremos os valores de $V_k(x, y)$ devido à sua extensão. Mas, tomando esses valores específicos obtemos que

$$\dot{V} = \nabla V \cdot X = \eta_4(x^2 + y^2)^2 + \eta_6(x^2 + y^2)^3 + \dots,$$

onde

- $L_1 = \eta_4 = d + f$,
- $L_2 = \eta_6 = (c^2 - b^2)d - bce$.

No capítulo 3 mostraremos que o anulamento do primeiro e segundo coeficientes de Lyapunov, L_1 e L_2 , juntamente com $a = 0$ é uma condição necessária e suficiente para que a origem do sistema (2.12) seja um centro.

Capítulo 3

Centros e Ciclos Limites de Pequenas Amplitudes

Neste capítulo estudaremos o problema foco-centro para algumas famílias particulares do sistema rígido:

$$\begin{cases} x' = -y + xF(x, y), \\ y' = x + yF(x, y). \end{cases} \quad (3.1)$$

O sistema (3.1) tem sido estudado por vários autores e, na maioria desses estudos, a função F é um polinômio homogêneo de grau fixo ou uma soma de funções polinomiais homogêneas. Ver, por exemplo, [1], [6], [10] e [11].

Nas seções seguintes estudaremos com detalhes os três casos mencionados na introdução, a saber:

1. $F(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$;
2. $F(x, y) = F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N$ ou $F(x, y) = F(y) = a_0 + a_1y + \dots + a_Ny^N$, onde $N \geq 1$;
3. $F(x, y) = (a_0 + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N) + (b_0 + b_2y^2 + \dots + b_Ny^N)$, onde $N = 2n$, $n \geq 0$.

No primeiro caso, exibiremos condições necessárias e suficientes para que o sistema (3.1) tenha um centro na origem. Este resultado foi provado por Collins

em [6] e posteriormente por Alwash em [2] considerando soluções periódicas de uma equação escalar não-autônoma. Na seção 3.1, provaremos este resultado usando o conceito de sistemas do tipo tempo-reversível. Nas seções 3.2 e 3.3 estudaremos o segundo e terceiro casos, respectivamente. Também daremos condições necessárias e suficientes para que o sistema (3.1) tenha um centro na origem. Este estudo é baseado no artigo [7].

Recentemente, Llibre e Rabanal em [18], estenderam os resultados do artigo [7] estudando o problema foco-centro para sistemas rígidos da forma

$$\begin{cases} x' = -y + xf(x)g(y), \\ y' = x + yf(x)g(y), \end{cases}$$

onde $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N$ e $g(y) = b_0 + b_1y + \dots + b_My^M$, com $N \in \{2n, 2n + 1\} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $M \in \{2m, 2m + 1\} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3.1 $F(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$

Nesta seção consideraremos o sistema rígido

$$\begin{cases} x' = -y + x(a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2), \\ y' = x + y(a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2), \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ e $d^2 + e^2 + f^2 \neq 0$.

Nosso objetivo é exibir condições necessárias e suficientes para que a origem do sistema (3.2) seja um centro. Uma ferramenta fundamental será a definição de sistemas do tipo tempo-reversível.

Definição 3.1.1. *O sistema*

$$\begin{cases} x' = -y + P(x, y), \\ y' = x + Q(x, y), \end{cases} \quad (3.3)$$

onde P e Q são funções analíticas cujos desenvolvimentos de Taylor na origem começam com, pelo menos, termos quadráticos é do tipo **tempo-reversível** se existe uma aplicação $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\frac{d}{dt}(R(z)) = -f(R(z)),$$

onde $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(z) = dz/dt$.

Teorema 3.1.1. *Todo sistema da forma (3.3) do tipo tempo-reversível tem um centro na origem.*

Demonstração: A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [21]. ■

Exemplo 3.1.1. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xy, \\ \dot{y} = x - y^2. \end{cases}$$

Tomando $R(x, y) = (x, -y)$ é fácil ver que $\frac{d}{dt}(R(z)) = -f(R(z))$. Portanto, este sistema é do tipo tempo-reversível e pelo Teorema 3.1.1 tem um centro na origem.

Apresentaremos a seguir propriedades gerais do sistema (3.2). Notemos que para $a \neq 0$ a origem é um foco atrator ($a < 0$) ou um foco repulsor ($a > 0$).

Proposição 3.1.1. *Considere o campo vetorial X associado ao sistema (3.2) com $a = 0$. Então, os dois primeiros coeficientes de Lyapunov são dados por:*

$$L_1 = d + f \quad e \quad L_2 = (c^2 - b^2)d - bce.$$

Demonstração: Os cálculos desses coeficientes foram apresentados no Exemplo 2.3.1. ■

Teorema 3.1.2. *A origem é um centro para o sistema (3.2) se, e somente se, $a = 0$ e $L_1 = L_2 = 0$.*

Demonstração: (\Rightarrow) Trivial.

(\Leftarrow) Suponha que $a = 0$ e que os dois primeiros coeficientes de Lyapunov são nulos. É fácil ver que $L_1 = 0$ resulta em $f = -d$. Para $L_2 = (c^2 - b^2)d - bce = 0$ obtemos quatro possibilidades para os parâmetros presentes no sistema. São elas:

a) $e = \frac{-d(-c^2+b^2)}{cb}$ e $cb \neq 0$;

b) $d = b = 0$ e $c \neq 0$;

c) $d = c = 0$ e $b \neq 0$;

d) $b = c = 0$ e $d \neq 0$.

Considerando sempre $a = 0$ e $f = -d$, afirmamos que para todos os casos acima o sistema (3.2) é do tipo tempo-reversível e segue do Teorema 3.1.1 que a origem é um centro. ■

A prova desta afirmação será feita com detalhes no lema a seguir.

Lema 3.1.1. *O sistema (3.2) para qualquer uma das possibilidades acima é do tipo tempo-reversível.*

Demonstração:

b) O sistema (3.2), com os devidos parâmetros, é dado por

$$\begin{cases} x' = -y + x(cy + exy), \\ y' = x + y(cy + exy), \end{cases} \quad (3.4)$$

com $c \neq 0$. Tomando $R(x, y) = (x, -y)$ segue que

$$\frac{d}{dt}(R(x, y)) = \left(\frac{dx}{dt}, -\frac{dy}{dt} \right) = (-y + x(cy + exy), -x - y(cy + exy)).$$

Por outro lado,

$$-f(R(x, y)) = (-y + x(cy + exy), -x - y(cy + exy)).$$

Desta forma, $\frac{d}{dt}(R(x, y)) = -f(R(x, y))$. Pela Definição 3.1.1 temos que o sistema (3.4) é do tipo tempo-reversível.

c) Neste caso, o novo sistema é da forma

$$\begin{cases} x' = -y + x(bx + exy), \\ y' = x + y(bx + exy), \end{cases} \quad (3.5)$$

com $b \neq 0$. Tomando $R(x, y) = (-x, y)$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(R(x, y)) = (y - x(bx + exy), x + y(bx + exy)) = -f(R(x, y))$$

e concluímos que o sistema (3.5) é do tipo tempo-reversível.

d) Para o sistema

$$\begin{cases} x' = -y + x(dx^2 + exy - dy^2), \\ y' = x + y(dx^2 + exy - dy^2), \end{cases} \quad (3.6)$$

com $d \neq 0$, tomando $R(x, y) = (-x, -y)$ e repetindo o processo anterior também concluímos que o sistema (3.6) é do tipo tempo-reversível.

a) Finalmente, tomando $e = \frac{-d(-c^2+b^2)}{cb}$ com $cb \neq 0$ e substituindo no sistema original obtemos

$$\begin{cases} x' = y + x(bx + cy + dx^2 - \frac{d(-c^2+b^2)xy}{cb} - dy^2), \\ y' = x + y(bx + cy + dx^2 - \frac{d(-c^2+b^2)xy}{cb} - dy^2). \end{cases} \quad (3.7)$$

Escolhendo

$$R(x, y) = \left(-\frac{(-c^2 + b^2)x}{b^2 + c^2} - \frac{2bcy}{(b^2 + c^2)}, -\frac{2bcx}{b^2 + c^2} + \frac{(-c^2 + b^2)y}{(b^2 + c^2)} \right),$$

após alguns cálculos segue que

$$\frac{d}{dt}R(x, y) = -(a(x, y), b(x, y)) = -f(R(x, y)),$$

onde

$$a(x, y) = \frac{2bcx}{b^2 + c^2} - \frac{(-c^2 + b^2)y}{b^2 + c^2} + \frac{b(-c^2 + b^2)x^2}{b^2 + c^2} + \frac{c(3b^2 - c^2)xy}{b^2 + c^2} + \frac{2bc^2y^2}{b^2 + c^2} + \frac{d(-c^2 + b^2)x^3}{b^2 + c^2} - \frac{d(-4b^2c^2 + b^4 + c^4)x^2y}{bc(b^2 + c^2)} - \frac{3d(-c^2 + b^2)xy^2}{b^2 + c^2} - \frac{2bcy^3d}{b^2 + c^2}$$

e

$$b(x, y) = -\frac{(-c^2 + b^2)x}{b^2 + c^2} - \frac{2bcy}{b^2 + c^2} + \frac{2b^2cx^2}{b^2 + c^2} - \frac{b(-3c^2 + b^2)xy}{b^2 + c^2} - \frac{c(-c^2 + b^2)y^2}{b^2 + c^2} + \frac{2bcdx^3}{b^2 + c^2} - \frac{3d(-c^2 + b^2)x^2y}{b^2 + c^2} + \frac{d(-4b^2c^2 + b^4 + c^4)xy^2}{bc(b^2 + c^2)} + \frac{d(-c^2 + b^2)y^3}{b^2 + c^2}.$$

Portanto, o sistema (3.7) também é do tipo tempo-reversível. ■

3.2 $F(x, y) = F(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N$

Nesta seção consideraremos o sistema

$$\begin{cases} x' = -y + xF(x, y), \\ y' = x + yF(x, y), \end{cases} \quad (3.8)$$

onde F é uma função polinomial de uma variável de uma das seguintes formas

$$F(x, y) = F(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N$$

ou

$$F(x, y) = F(y) = a_0 + a_1y + \cdots + a_Ny^N,$$

onde $N \geq 1$. Afim de estudar o comportamento das trajetórias próximo da origem, iremos considerar a função de Lyapunov V representada formalmente pela série

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{k=3}^{\infty} V_k, \quad (3.9)$$

onde V_k é um polinômio homogêneo nas variáveis x e y de grau k .

A derivada de $V(x, y)$ ao longo das órbitas do sistema (3.8) é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (x + V_{3,x} + V_{4,x} + \cdots + V_{k,x} + \cdots)(-y + xF) + \\ & + (y + V_{3,y} + V_{4,y} + \cdots + V_{k,y} + \cdots)(x + yF), \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde os índices x e y representam as derivadas parciais com respeito a x e y , respectivamente. Vimos no Capítulo 2 que com escolhas convenientes de $V_k(x, y)$ a expressão de \dot{V} pode ser reescrita como

$$\dot{V} = \eta_2(x^2 + y^2) + \eta_4(x^2 + y^2)^2 + \eta_6(x^2 + y^2)^3 + \cdots + \eta_{2k}(x^2 + y^2)^k + \cdots,$$

onde os coeficientes η_{2k} são os *valores focais* e são funções polinomiais.

No que segue, iremos determinar a base focal para o sistema (3.8) e usaremos o procedimento apresentado no Capítulo 2 para encontrar V_3 , V_4 e o primeiro coeficiente de Lyapunov.

A seguir, enunciamos o principal teorema desta seção.

Teorema 3.2.1. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x' = -y + x(a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N), \\ y' = x + y(a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N), \end{cases} \quad (3.11)$$

onde $N = 2n$ ou $N = 2n + 1$. Então o conjunto

$$\mathcal{B} = \{a_0, a_2, \dots, a_{2n}\}$$

é uma base focal.

Usando a mudança de coordenadas $X = -y$ e $Y = x$ obtemos, do Teorema 3.2.1, o teorema seguinte.

Teorema 3.2.2. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x' = -y + x(a_0 + a_1y + \cdots + a_Ny^N), \\ y' = x + y(a_0 + a_1y + \cdots + a_Ny^N), \end{cases} \quad (3.12)$$

onde $N = 2n$ ou $N = 2n + 1$. Então o conjunto

$$\mathcal{B} = \{a_0, a_2, \dots, a_{2n}\}$$

é uma base focal.

A prova dos Teoremas 3.2.1 e 3.2.2 é análoga e consiste em calcular os coeficientes de Lyapunov em $(0, 0)$ para os sistemas (3.11) e (3.12). O coeficiente a_0 é tomado como nulo, caso contrário a origem é trivialmente um foco. Mas antes, necessitaremos de alguns resultados.

Definição 3.2.1. *Para cada k em (3.9), denotemos por $V_{i,j}$ o coeficiente de $x^i y^j$ em V_k , para $k = i + j$. Além disso, dizemos que $V_{i,j}$ é par ou ímpar quando i é par ou ímpar.*

Substituindo os valores das derivadas parciais com relação a x e y e efetuando cálculos em (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (a_1 + V_{2,1})x^3 + (2V_{1,2} - 3V_{3,0})x^2y + (a_1 - 2V_{2,1} + 3V_{0,3})xy^2 - \\ & V_{1,2}y^3 + (3V_{3,0}a_1 + V_{3,1} + a_2)x^4 + (2V_{2,2} + 3V_{2,1}a_1 - 4V_{4,0})x^3y + \\ & (3V_{1,3} + a_2 + 3V_{1,2}a_1 - 3V_{3,1})x^2y^2 + (3V_{0,3}a_1 - 2V_{2,2} + 4V_{0,4})xy^3 - \\ & V_{1,3}y^4 + O(\|(x, y)\|^5). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Lema 3.2.1. *Considere o sistema (3.11) com $a_0 = 0$. Então:*

- a) *O primeiro coeficiente de Lyapunov em $(0, 0)$ é dado por $L_1 = a_2$.*
- b) *Se $a_2 = 0$ então $V_{3,0} = V_{1,2} = V_{1,3} = V_{3,1} = 0$.*

Demonstração: Considere o sistema (3.11) e V como em (3.9). Da Proposição 2.3.1, sabemos que a transformação linear T_3 é um isomorfismo, então podemos escolher os coeficientes de V_3 (ou seja, $V_{3,0}, V_{2,1}, V_{1,2}, V_{0,3}$) de modo que \dot{V} determinado em (3.13) não tenha termos cúbicos. Para isso, basta resolver os dois sistemas de equações:

$$\begin{cases} V_{2,1} + a_1 = 0, \\ 2V_{2,1} - 3V_{0,3} = a_1, \end{cases} \quad \begin{cases} 2V_{1,2} - 3V_{3,0} = 0, \\ V_{1,2} = 0. \end{cases}$$

Neste caso, podemos escolher $V_{3,0} = V_{1,2} = 0$ e $V_{2,1} = -a_1, V_{0,3} = -a_1$, o que resulta em

$$V_3(x, y) = -a_1 x^2 y - a_1 y^3.$$

Ainda pela Proposição 2.3.1 não podemos eliminar os termos quárticos de \dot{V} , mas podemos escolher $V_{4,0}, \dots, V_{0,4}$ e L_1 de modo que

$$\dot{V} = \eta_4 (x^2 + y^2)^2 + O(\|(x, y)\|^5).$$

Para isso, devemos resolver as cinco equações seguintes, desacopladas em dois grupos

$$\begin{cases} -\eta_4 + V_{3,1} = -a_2, \\ -2\eta_4 + 3V_{1,3} - 3V_{3,1} = -a_2, \\ -\eta_4 - V_{1,3} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -4V_{4,0} + 2V_{2,2} = 3a_1^2, \\ -2V_{2,2} + 4V_{0,4} = 3a_1^2. \end{cases}$$

Para o primeiro grupo de equações escolhemos:

$$V_{1,3} = V_{3,1} = -\frac{1}{2} a_2 \quad \text{e} \quad \eta_4 = \frac{1}{2} a_2.$$

e para o segundo grupo de equações:

$$V_{2,2} = 0, \quad V_{0,4} = \frac{3}{4} a_1^2 \quad \text{e} \quad V_{4,0} = -\frac{3}{4} a_1^2,$$

Portanto, $L_1 = a_2$ e $V_{3,0} = V_{1,2} = V_{1,3} = V_{3,1} = 0$ quando $a_2 = 0$. ■

Faremos agora o cálculo dos coeficientes de Lyapunov para o sistema (3.11).

Teorema 3.2.3. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x' = -y + x(a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N), \\ y' = x + y(a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N), \end{cases}$$

onde $N = 2n$ or $N = 2n + 1$. Então, para $k = 1, 2, \dots, n$,

$$L_k = a_{2k}.$$

Demonstração: A prova será dada por indução na seguinte afirmação P_k :

- $L_j = a_{2j}$ para $j = 1, \dots, k$;
- Se $a_{2j} = 0$ para $j = 1, \dots, k$, então os coeficientes ímpares de V_j para $j \leq 2k + 2$ são nulos.

Pelo Lema 3.2.1, P_1 é verdadeiro. Agora suponhamos P_k verdadeiro. Os coeficientes ímpares de V_{2k+3} são determinados em termos dos coeficientes de V_j com $j \leq 2k + 2$ pelas seguintes equações

$$\begin{aligned} V_{1,2k+2} &= 0, \\ -3V_{3,2k} + (2k+2)V_{1,2k+2} &= \sum_{j=1}^2 -(j+2k)V_{j-1,2k+1} a_{3-j}, \\ -5V_{5,2k-2} + (2k)V_{3,2k} &= \sum_{j=1}^4 -(j+2(k-1))V_{j-1,2k-1} a_{5-j}, \\ &\vdots \\ -(2k+1)V_{2k+1,2} + (4)V_{2k-1,4} &= \sum_{j=1}^{2k} -(j+2)V_{j-1,3} a_{2k+1-j}, \\ -(2k+3)V_{2k+3,0} + (2)V_{2k+1,2} &= \sum_{j=1}^{2k+2} -(j)V_{j-1,1} a_{2k+3-j}. \end{aligned}$$

Se $a_2 = a_4 = \cdots = a_{2k} = 0$ e os coeficientes ímpares de todos V_j com $j \leq 2k + 2$

são nulos, então o lado direito destas equações é zero. Consequentemente, os coeficientes ímpares de V_{2k+3} são todos nulos.

Em seguida, L_{k+1} e os coeficientes ímpares de V_{2k+4} são determinados pelas equações

$$\begin{aligned}
& -\eta_{2k+4} - V_{1,2k+3} = 0, \\
& -\binom{k+2}{k+1}\eta_{2k+4} - 3V_{3,2k+1} + (2k+3)V_{1,2k+3} = \sum_{j=1}^2 -(j+2k+1)V_{j-1,2k+2} a_{3-j}, \\
& -\binom{k+2}{k}\eta_{2k+4} - 5V_{5,2k-1} + (2k+1)V_{3,2k+1} = \sum_{j=1}^4 -(j+2k-1)V_{j-1,2k} a_{5-j}, \\
& \quad \vdots \\
& -\binom{k+2}{1}\eta_{2k+4} - (2k+3)V_{2k+3,1} + 3V_{2k+1,3} = \sum_{j=1}^{2k+2} -(j+1)V_{j-1,2} a_{2k+3-j}, \\
& \quad -\eta_{2k+4} + V_{2k+3,1} = \sum_{j=1}^{2k+4} -(j-1)V_{j-1,0} a_{2k+5-j}.
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, o lado direito da última destas equações é $-a_{2k+2}$, enquanto que o de todas as outras é nulo. Assim, segue da última igualdade que

$$V_{2k+3,1} = \eta_{2k+4} - a_{2k+2}.$$

Substituindo este valor na penúltima equação obtemos

$$V_{2k+1,3} = \binom{k+2}{1}\eta_{2k+4} + (2k+3)(\eta_{2k+4} - a_{2k+2}).$$

Repetindo esse processo até a primeira equação chegaremos que η_{2k+4} é um múltiplo positivo de a_{2k+2} e cada coeficiente ímpar é um múltiplo negativo de a_{2k+2} . Deduzimos que se P_k é verdadeiro, então

$$L_{k+1} = \eta_{2k+4} = a_{2k+2}.$$

■

Observação 3.2.1. *Os coeficientes pares de V_{2k+4} não foram utilizados na demonstração acima, isso porque estamos interessados na expressão L_k que só é introduzida nas equações com coeficientes ímpares.*

Prova do Teorema 3.2.1: Basta verificar que o sistema (3.11) com $a_0 = a_2 = \dots = a_{2n} = 0$ é um sistema do tipo tempo-reversível. Para isto, tomamos $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ da forma $R(x, y) = (-x, y)$. Portanto a origem é um centro e o conjunto $\mathcal{B} = \{a_0, a_2, \dots, a_{2n}\}$ é uma base focal. ■

Dos Teoremas 3.2.1 e 3.2.2 resultam algumas consequências importantes relacionadas ao problema foco-centro e à existência de ciclos limites de pequenas amplitudes.

Corolário 3.2.1. *Considere o sistema (3.11) ou (3.12). Se existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que*

$$a_0 = a_2 = \dots = a_{2k-2} = 0, \quad a_{2k} \neq 0,$$

então a origem é um foco fraco atrator ou repulsor de acordo com o sinal de a_{2k} .

Demonstração: Segue diretamente dos Teoremas 2.3.1 e 3.2.3. ■

Corolário 3.2.2. *Considere o sistema (3.11) ou sistema (3.12). A origem é um centro se, e somente se,*

$$a_0 = a_2 = \dots = a_{2n} = 0.$$

Corolário 3.2.3. *Considere o sistema (3.11) ou sistema (3.12). Então:*

- a) *Existem no máximo n ciclos limites de pequena amplitude numa vizinhança adequada da origem.*
- b) *Se a_0, a_2, \dots, a_{2n} são escolhidos tal que*

$$a_{2k-2} a_{2k} < 0,$$

para $k = 1, \dots, n$, e

$$|a_0| \ll |a_2| \ll \dots \ll |a_{2n}|,$$

então existem exatamente n ciclos limites de pequena amplitude.

Demonstração:

a) Sabemos que as soluções dos sistemas (3.11) e (3.12) circulam a origem em uma vizinhança suficientemente próxima da origem. Considere a órbita passando por $(x, 0)$. O próximo encontro desta órbita com o eixo x -positivo é dado por $(h(x), 0)$, sendo que $h(x)$ está definida para todo x suficientemente pequeno e é suave. A função

$$d(x) := h(x) - x$$

está bem definida para x suficientemente pequeno e é conhecida na literatura como função separação. No livro [5], página 518, temos o seguinte resultado relacionando as derivadas da função separação com os valores focais η_{2k} :

$$d^{(2k+1)}(0) = (2k - 1)!2\pi\eta_{2k}.$$

Desta forma, se $\dot{V} = \eta_{2(n+1)}(x^2 + y^2)^{n+1} + O(\|x, y\|^{2n+3})$, então $d(0) = d^{(1)}(0) = \dots = d^{(2n)}(0) = 0$. Assim, pequenas perturbações nos coeficientes de f do sistema (3.11) produzem no máximo $(2n + 1)$ zeros da função d . Como a origem continua sendo uma singularidade e um ciclo limite corresponde a um par de zeros de d (um positivo, um negativo), então são gerados no máximo n ciclos limites.

b) Suponha inicialmente que

$$a_0 = a_2 = \dots = a_{2n} = 0.$$

Assim do Corolário 3.2.2, a origem é um centro. Agora escolha a_{2n} não nulo. Sabemos que a origem é estável se $a_{2n} < 0$ e instável se $a_{2n} > 0$. Tome $a_{2n} < 0$. O mesmo argumento funciona se $a_{2n} > 0$. Assim, podemos escrever \dot{V} da forma

$$\dot{V} = a_{2n}(x^2 + y^2)^n + O(\|x, y\|^{2n+2}).$$

Como a origem é estável, o fluxo aponta para o interior das curvas de nível de V , que estão contidos em uma vizinhança suficientemente pequena da origem. Seja Γ uma destas curvas e escolha agora $a_{2n-2} > 0$. A origem torna-se instável e, se

$|a_{2n-2}|$ é pequeno o suficiente, o fluxo ainda é transversal e aponta para o interior da curva de nível Γ . Portanto, criamos uma região positivamente invariante que não contém ponto singular. Segue do Teorema de Poincaré-Bendixson que existe um ciclo limite no interior de Γ . Escolhendo sucessivamente a_{2n-4}, \dots, a_0 tal que cada a_{2k-2} tenha o sinal oposto ao de a_{2k} e seja pequeno o suficiente, a estabilidade na origem é revertida n vezes. Portanto, n ciclos limites de pequenas amplitudes bifurcam da origem. ■

Exemplo 3.2.1. *O sistema*

$$\begin{cases} x' = -y + x(-1 + 15x^2 - 25x^4), \\ y' = x + y(-1 + 15x^2 - 25x^4), \end{cases} \quad (3.14)$$

apresenta dois ciclos limites que podem ser vistos na Figura 3.1.

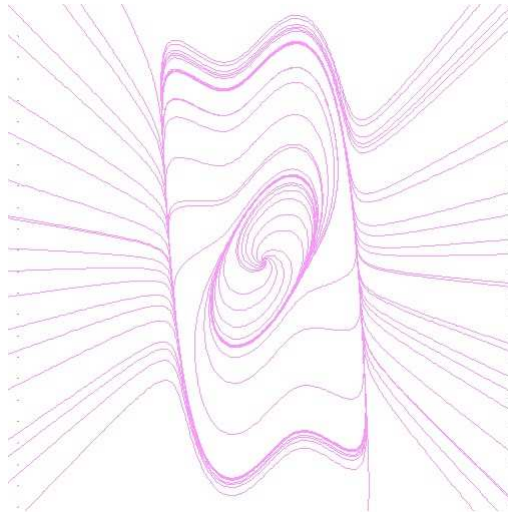


Figura 3.1: Dois ciclos limites do sistema (3.14)

A Figura 3.1 foi gerada no programa ODEinR2. Este programa pode ser obtido em [19].

$$\mathbf{3.3} \quad F(x, y) = a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N + b_0 + b_2y^2 + \cdots + b_Ny^N$$

Nesta seção consideraremos o problema foco-centro para o sistema

$$\begin{cases} x' = -y + x [(a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N) + (b_0 + b_2y^2 + \cdots + b_Ny^N)], \\ y' = x + y [(a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N) + (b_0 + b_2y^2 + \cdots + b_Ny^N)] \end{cases} \quad (3.15)$$

onde $N = 2n$, $n \geq 0$.

O teorema seguinte, principal resultado desta seção, nos dá a base focal para o sistema (3.15).

Teorema 3.3.1. *Considere o sistema (3.15). Então o conjunto*

$$\mathcal{B} = \{a_0 + b_0, a_2 + b_2, \dots, a_{2n} + b_{2n}\}$$

é uma base focal.

Antes de provar este teorema, apresentaremos alguns lemas e definições necessários para seu entendimento. Daqui para frente, os coeficientes a_0 e b_0 serão escolhidos tais que $a_0 + b_0 = 0$.

Lema 3.3.1. *Considere o sistema*

$$H : \begin{cases} x' = -y + x (a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_Nx^N + b_2y^2 + b_4y^4 \cdots + b_Ny^N), \\ y' = x + y (a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_Nx^N + b_2y^2 + b_4y^4 \cdots + b_Ny^N), \end{cases} \quad (3.16)$$

onde $N = 2n$. Se $b_{2k} = -a_{2k}$, para $k = 1, \dots, n$, então $V_k \equiv 0$ para k ímpar.

Demonstração: Sejam P_k , T_k e V como no Capítulo 2, seção 2.3. Já sabemos que T_k é um isomorfismo quando k é ímpar. Utilizando a hipótese $b_{2k} = -a_{2k}$, para $k = 1, \dots, n$, obtemos um novo sistema da forma

$$H : \begin{cases} x' = -y + x (a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_Nx^N - a_2y^2 - a_4y^4 \cdots - a_Ny^N), \\ y' = x + y (a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_Nx^N - a_2y^2 - a_4y^4 \cdots - a_Ny^N). \end{cases}$$

Calculando $\dot{V}(x, y) = \text{grad}V(x, y) \cdot H(x, y)$ obtemos a expressão

$$\dot{V}(x, y) = \left(\sum_{j=1}^n a_{2j}(x^{2j} - y^{2j}) \right) \left(\sum_{i=2}^{2n} iV_i(x, y) \right) - \sum_{k=3}^{2n} T_k(V_k(x, y)).$$

Da equação acima, não é difícil ver que se k é ímpar então $V_k \equiv 0$. ■

Definição 3.3.1. Denotemos por D_k os termos de grau k em \dot{V} .

Observação 3.3.1. Quando consideramos os termos D_{2k} existem dois grupos de equações desacopladas: um grupo é composto por $k + 1$ equações com k incógnitas e o outro é constituído por k equações com $k + 1$ incógnitas. Os coeficientes η_{2k} aparecem no primeiro grupo.

Lema 3.3.2. Considere o sistema (3.16). Se $b_{2j} = -a_{2j}$ para $j = 1, 2, \dots, k$, então $V_{l,m} = V_{m,l}$ para $m + l \leq 2k + 2$ e $m + l$ par.

Demonstração: A prova é obtida por indução em k . Para $k = 1$ é fácil ver que $V_{4,0} = V_{0,4}$ e $V_{3,1} = V_{1,3}$. Suponha que o resultado seja verdadeiro para $j = 1, 2, \dots, k - 1$. Pela hipótese de indução temos que

- $b_{2j} = -a_{2j}$ para $j = 1, 2, \dots, k - 1$,
- $V_{l,m} = V_{m,l}$ para $m + l \leq 2k$ e $m + l$ par.

Pelo Lema 3.3.1 temos que $V_{l,m} = 0$ para $l + m$ ímpar. Suponha $b_{2k} = -a_{2k}$. Vamos mostrar que $V_{l,m} = V_{m,l}$ para $m + l = 2k + 2$. O primeiro grupo de equações de D_{2k} é dado por:

$$\begin{aligned}
& -\eta_{2(k+1)} + V_{2k+1,1} = -\sum_{j=1}^k 2(k-j+1) V_{2(k-j+1),0} a_{2j}, \\
& -\binom{k+1}{k} \eta_{2(k+1)} + 3V_{2k-1,3} - (2k+1)V_{2k+1,1} = -\sum_{j=1}^k 2(k-j+1) V_{2(k-j),2} a_{2j} - \\
& \qquad \qquad \qquad \sum_{j=1}^1 2(k-j+1) V_{2k,2(1-j)} b_{2j}, \\
& -\binom{k+1}{k-1} \eta_{2(k+1)} + 5V_{2k-3,5} - (2k-1)V_{2k-1,3} = -\sum_{j=1}^{k-1} 2(k-j+1) V_{2(k-1-j),4} a_{2j} - \\
& \qquad \qquad \qquad \sum_{j=1}^2 2(k-j+1) V_{2(k-1),2(2-j)} b_{2j}, \\
& \qquad \qquad \qquad \vdots \\
& -\binom{k+1}{2} \eta_{2(k+1)} + (2k-1)V_{3,2k-1} - (5)V_{5,2k-3} = -\sum_{j=1}^2 2(k-j+1) V_{2(2-j),2k-2} a_{2j} - \\
& \qquad \qquad \qquad \sum_{j=1}^{k-1} 2(k-j+1) V_{4,2(k-1-j)} b_{2j}, \\
& -\binom{k+1}{1} \eta_{2(k+1)} + (2k+1)V_{1,2k+1} - (3)V_{3,2k-1} = -\sum_{j=1}^1 2(k-j+1) V_{2(1-j),2k} a_{2j} - \\
& \qquad \qquad \qquad \sum_{j=1}^k 2(k-j+1) V_{2,2(k-j)} b_{2j}, \\
& -\eta_{2(k+1)} - V_{1,2k+1} = -\sum_{j=1}^k 2(k-j+1) V_{0,2(k-j+1)} b_{2j}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

De acordo com a paridade de k , o sistema (3.17) dá origem a dois novos sistemas que podem ser escritos como:

Caso 1. k é par.

$$\begin{aligned}
& -2\eta_{2(k+1)} + \left(V_{2k+1,1} - V_{1,2k+1} \right) = -\overbrace{(a_{2k} + b_{2k})}^{=0}, \\
& -2\binom{k+1}{k} \eta_{2(k+1)} + 3\left(V_{2k-1,3} - V_{3,2k-1} \right) - (2k+1)\left(V_{2k+1,1} - V_{1,2k+1} \right) = -\overbrace{(a_{2k} + b_{2k})}^{=0},
\end{aligned}$$

O segundo grupo de equações de D_{2k} é dado por

$$\begin{aligned}
-2(k+1)V_{2(k+1),0} + 2V_{2k,2} &= -\sum_{j=1}^{k-1} 2(j+1)V_{2j+1,1} a_{2(k-j)}, \\
-2kV_{2k,2} + 4V_{2(k-1),4} &= -\sum_{j=1}^{k-1} 2(j+1)V_{2j-1,3} a_{2(k-j)} - \\
&\quad \sum_{j=1}^1 2(k+j-1)V_{2k-1,2j-1} b_{2(2-j)}, \\
-2(k-1)V_{2(k-1),4} + 6V_{2(k-2),6} &= -\sum_{j=1}^{k-2} 2(j+2)V_{2j-1,5} a_{2(k-j-1)} - \\
&\quad \sum_{j=1}^2 2(k+j-2)V_{2k-3,2j-1} b_{2(3-j)}, \\
&\quad \vdots \\
-4V_{4,2(k-1)} + 2kV_{2,2k} &= -\sum_{j=1}^1 2(j+k-1)V_{2j-1,2k-1} a_{2(2-j)} - \\
&\quad \sum_{j=1}^{k-1} 2(j+1)V_{3,2j-1} b_{2(k-j)}, \\
-2V_{2,2k} + 2(k+1)V_{0,2(k+1)} &= -\sum_{j=1}^{k-1} 2(j+1)V_{1,2j+1} b_{2(k-j)}.
\end{aligned}$$

Usando argumentos similares, segue que $V_{l,m} = V_{m,l}$ para $m+l = 2k+2$, m e l pares. Assim, $V_{l,m} = V_{m,l}$ para $m+l \leq 2k+2$ e $m+l$ par. ■

No teorema a seguir calculamos os k primeiros coeficientes de Lyapunov para o sistema (3.15).

Teorema 3.3.2. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x' = -y + x(a_2x^2 + a_4x^4 + \dots + a_Nx^N + b_2y^2 + b_4y^4 \dots + b_Ny^N), \\ y' = x + y(a_2x^2 + a_4x^4 + \dots + a_Nx^N + b_2y^2 + b_4y^4 \dots + b_Ny^N), \end{cases}$$

onde $N = 2n$. Então, para $k = 1, 2, \dots, n$,

$$L_k = a_{2k} + b_{2k}.$$

Demonstração: A prova será dada por indução sobre k . É simples ver que

$$L_1 = a_2 + b_2.$$

Por hipótese, temos

$$L_j = \eta_{2j+2} = a_{2j} + b_{2j} = 0,$$

para $j = 1, 2, \dots, k-1$. Do Lema 3.3.2 segue que $V_{l,m} = V_{m,l}$ para $l+m \leq 2k$ e $l+m$ par. Assim, temos o mesmo sistema de equações (3.17) dado na prova do Lema 3.3.2. Novamente, de acordo com a paridade de k , o sistema (3.17) dá origem a dois novos sistemas que podem ser escritos como:

Caso 1. k é par.

$$\begin{aligned} & -2\eta_{2(k+1)} + \left(V_{2k+1,1} - V_{1,2k+1} \right) = -(a_{2k} + b_{2k}), \\ -2 \binom{k+1}{k} \eta_{2(k+1)} + 3 \left(V_{2k-1,3} - V_{3,2k-1} \right) - (2k+1) \left(V_{2k+1,1} - V_{1,2k+1} \right) &= -(a_{2k} + b_{2k}), \\ -2 \binom{k+1}{k-1} \eta_{2(k+1)} + 5 \left(V_{2k-3,5} - V_{5,2k-3} \right) - (2k-1) \left(V_{2k-1,3} - V_{3,2k-1} \right) &= 0, \\ & \vdots \\ -2 \binom{k+1}{\frac{k}{2}+2} \eta_{2(k+1)} + (k-1) \left(V_{k+3,k-1} - V_{k-1,k+3} \right) - (k+5) \left(V_{k+5,k-3} - V_{k-3,k+5} \right) &= 0, \\ -2 \binom{k+1}{\frac{k}{2}+1} \eta_{2(k+1)} - (k+3) \left(V_{k+3,k-1} - V_{k-1,k+3} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Caso 2. k é ímpar.

$$\begin{aligned} & -2\eta_{2(k+1)} + \left(V_{2k+1,1} - V_{1,2k+1} \right) = -(a_{2k} + b_{2k}), \\ -2 \binom{k+1}{k} \eta_{2(k+1)} + 3 \left(V_{2k-1,3} - V_{3,2k-1} \right) - (2k+1) \left(V_{2k+1,1} - V_{1,2k+1} \right) &= -(a_{2k} + b_{2k}), \\ -2 \binom{k+1}{k-1} \eta_{2(k+1)} + 5 \left(V_{2k-3,5} - V_{5,2k-3} \right) - (2k-1) \left(V_{2k-1,3} - V_{3,2k-1} \right) &= 0, \\ & \vdots \\ -2 \binom{k+1}{\frac{k+1}{2}+1} \eta_{2(k+1)} + (k) \left(V_{k+2,k} - V_{k,k+2} \right) - (k+4) \left(V_{k+4,k-2} - V_{k-2,k+4} \right) &= 0, \\ - \binom{k+1}{\frac{k+1}{2}} \eta_{2(k+1)} - (k+2) \left(V_{k+2,k} - V_{k,k+2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

De forma similar ao que fizemos na demonstração do Teorema 3.2.3, temos que η_{2k+2} é um múltiplo positivo de $a_{2k} + b_{2k}$. Portanto $L_k = \eta_{2k+2}$. \blacksquare

Prova do Teorema 3.3.1: Basta verificar que o sistema (3.15) com $a_{2i} = -b_{2i}$, $i = 0, 1, \dots, n$ é do tipo tempo-reversível. Para isso, tomamos

$R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ da forma $R(x, y) = (-x, -y)$. Portanto, a origem é um centro e o conjunto $\mathcal{B} = \{a_0 + b_0, a_2 + b_2, \dots, a_{2n} + b_{2n}\}$ é uma base focal. ■

Neste caso, também obtemos algumas consequências do Teorema 3.3.1. Os enunciados bem como suas provas são análogos aos da seção anterior.

Corolário 3.3.1. *Considere o sistema (3.15). Se existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $a_{2i} = -b_{2i}$, para $i = 0, \dots, k-1$ e $a_{2k} \neq -b_{2k}$, então a origem é um foco fraco atrator ou repulsor de acordo com o sinal de $a_{2k} + b_{2k}$.*

Corolário 3.3.2. *Considere o sistema (3.15). A origem é um centro se, e somente se, $a_{2i} = -b_{2i}$, para $i = 0, \dots, n$.*

Corolário 3.3.3. *Considere o sistema (3.15). Então:*

- a) *Existem no máximo n ciclos limites de pequena amplitude numa vizinhança adequada da origem.*
- b) *Se a_0, a_2, \dots, a_{2n} e b_0, b_2, \dots, b_{2n} são escolhidos tal que*

$$(a_{2k-2} + b_{2k-2})(a_{2k} + b_{2k}) < 0,$$

para $k = 1, \dots, n$, e

$$|a_0 + b_0| \ll |a_2 + b_2| \ll \dots \ll |a_{2n} + b_{2n}|,$$

então existem exatamente n ciclos limites de pequena amplitude.

Exemplo 3.3.1. *O sistema*

$$\begin{cases} x' = -y + x(-1 + 10(x^2 + y^2) - 20(x^4 + y^4)), \\ y' = x + y(-1 + 10(x^2 + y^2) - 20(x^4 + y^4)), \end{cases} \quad (3.18)$$

apresenta dois ciclos limites que podem ser vistos na Figura 3.2 gerada no programa ODEinR2.

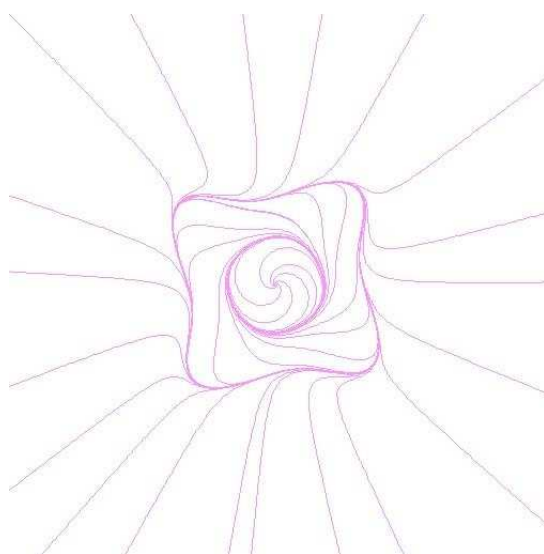


Figura 3.2: Dois ciclos limites do sistema (3.18)

Capítulo 4

Retrato de Fase Global para uma Classe de Sistemas Rígidos

No Capítulo 3 determinamos a quantidade de ciclos limites de pequenas amplitudes que bifurcam da origem para algumas famílias de sistemas rígidos. O objetivo neste capítulo é estudar a família

$$\begin{cases} x' = -y + x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n), \\ y' = x + y(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n), \end{cases} \quad (4.1)$$

quando $n \in \{0, 1, 2\}$. Para isto, apresentaremos uma breve introdução à bifurcação de Hopf, necessária para entender o surgimento de um ciclo limite bifurcando da origem, e também a compactificação de Poincaré, que é utilizada para o estudo do comportamento de fluxos de campos polinomiais no “infinito”.

Denotaremos por $\mathcal{H}(n)$ o número máximo de ciclos limites do sistema (4.1).

4.1 Motivação

Nesta seção determinaremos $\mathcal{H}(n)$ quando $n = \{0, 1\}$ para sistemas da forma (4.1). Primeiramente, vamos considerar o sistema (4.1) com $n = 0$. Neste caso, temos

$$\begin{cases} x' = -y + a_0x, \\ y' = x + a_0y, \end{cases} \quad (4.2)$$

com $a_0 \neq 0$. Como (4.2) é um sistema linear, segue que a origem é trivialmente um foco. Portanto, $\mathcal{H}(0) = 0$.

Para $n = 1$, o sistema (4.1) assume a forma

$$\begin{cases} x' = -y + x(a_0 + a_1x), \\ y' = x + y(a_0 + a_1x), \end{cases} \quad (4.3)$$

com $a_1 \neq 0$. Em coordenadas polares $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$ podemos reescrever o sistema acima como

$$\frac{dr}{d\theta} = a_1\cos(\theta)r^2 + a_0r.$$

Tomando a mudança de variável $\rho = 1/r$ obtemos

$$\frac{d\rho}{d\theta} + a_0\rho + a_1\cos\theta = 0. \quad (4.4)$$

As soluções positivas $\rho(\theta, \rho_0)$ da equação (4.4) satisfazendo $\rho(2\pi, \rho_0) = \rho_0$ são denominadas soluções fechadas de (4.3). Seja $\tilde{\rho}(\theta, \rho_0)$ tal solução. Integrando a equação (4.4) e usando $\tilde{\rho}$ obtemos

$$a_0 \int_0^{2\pi} \tilde{\rho}(\theta, \rho_0) d\theta = 0.$$

Uma vez que integral de uma função positiva ($\tilde{\rho}(\theta, \rho_0)$) é sempre positiva, a equação acima é satisfeita se e somente se $a_0 = 0$. Usando o Teorema 3.2.1 concluímos que a origem é um centro neste caso. Portanto, $\mathcal{H}(1) = 0$.

Nosso objetivo agora é mostrar que $\mathcal{H}(2) = 1$ no sistema (4.1) e faremos isso com detalhes na Seção 4.4. Antes, introduziremos uma noção de bifurcação de Hopf e de compactificação de Poincaré, as quais serão necessárias para a compreensão deste resultado.

4.2 A Bifurcação de Hopf

A bifurcação de Hopf em sistemas planares acontece exatamente quando surge um ciclo limite a partir da mudança da estabilidade de um foco. Mais especificamente, quando consideramos uma família de campos planares $X' = X(x, y, \mu)$

e $\mu_0 \in \mathbb{R}$, com singularidade $p(\mu) = (x_0(\mu), y_0(\mu))$ satisfazendo que $p(\mu)$ é um foco estável para $\mu < \mu_0$, $p(\mu)$ é um foco instável para $\mu > \mu_0$ e $DX(p(\mu_0))$ não é hiperbólica, então temos uma bifurcação de Hopf. O valor de μ_0 onde existe uma mudança na classe topológica do retrato de fase é chamado de **ponto de bifurcação**.

Exemplo 4.2.1. *Considere o campo vetorial*

$$X = (-y + x(\mu - x^2 - y^2), x + y(\mu - x^2 - y^2)).$$

A origem é uma singularidade de X e o sistema linearizado é dado por

$$Y' = AY = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} Y.$$

Assim, os autovalores da matriz A são da forma $\mu \pm i$ e esperamos uma bifurcação de Hopf quando $\mu = 0$, pois neste valor o sistema deixa de ser hiperbólico. O campo X em coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ é dado por

$$\begin{cases} r' = r(\mu - r^2), \\ \theta' = 1. \end{cases} \quad (4.5)$$

Assim, o retrato de fase de X no plano xy é obtido analisando o sinal de r' e θ' . Distinguimos os três seguintes casos do retrato de fase de X , cada um dependendo de certos valores de μ , e veremos o que acontece quando μ passa por 0. Nos três casos, a componente angular é sempre crescente, pois $\theta' = 1 > 0$:

- Para $\mu > 0$, a componente radial é crescente para $0 < r < \sqrt{\mu}$ e decrescente para $r > \sqrt{\mu}$. Além disso, $r' = 0$ se $r = \sqrt{\mu}$, assim o círculo de raio $\sqrt{\mu}$ em coordenadas cartesianas representa um ciclo limite para o campo X o qual é único e atrator. Desta forma, todas as órbitas externas ou internas a este ciclo, com exceção da origem, tendem ao ciclo limite quanto $t \rightarrow \infty$ (Ver Figura 4.1);
- Quando $\mu < 0$, temos que $r' = r(\mu - r^2) < 0$, para todo $r > 0$, de modo que a componente radial é decrescente. Assim toda solução tende para

a origem em forma espiral, ou seja, a origem é um foco atrator para o campo X ;

- Quando $\mu = 0$ temos que $r' = -r^3 < 0$, para todo $r > 0$, de modo que a componente radial é decrescente. Assim toda solução tende para a origem em forma espiral. Neste caso, dizemos que a origem é um foco fraco. Note que para este valor de μ o campo X deixa de ser hiperbólico.

Portanto, vemos um exemplo de uma bifurcação de Hopf, sendo $\mu = 0$ o ponto de bifurcação. Na figura 4.1 podemos visualizar como o retrato de fase do campo X muda com o respectivo valor do parâmetro μ .

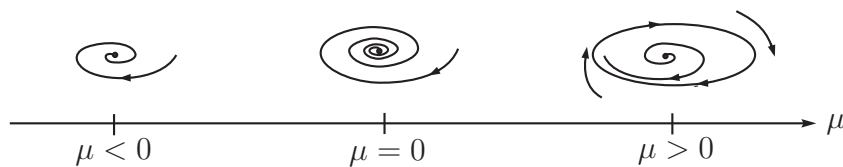


Figura 4.1: Retrato de fase do sistema $X = (-y + x(\mu - x^2 - y^2), x + y(\mu - x^2 - y^2))$ ilustrando uma bifurcação de Hopf.

4.3 A Compactificação de Poincaré

Nesta seção apresentaremos a compactificação de Poincaré, que é utilizada para o estudo do comportamento de fluxos de campos polinomiais no “infinito” e não somente em vizinhanças de pontos singulares. Para isso, faremos uso da projeção central, que tem a vantagem de que as singularidades no infinito estão espalhadas ao longo do equador da esfera de Poincaré. Assim, o comportamento de trajetórias “longe” da origem poderá ser entendido através do estudo de trajetórias próximas de “pontos no infinito”, isto é, no equador da esfera de Poincaré.

Definição 4.3.1. *Seja $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ um campo vetorial polino-*

mial. Definimos o grau de X como sendo o número

$$d(X) = \max\{\text{grau } P, \text{ grau } Q\}.$$

Considere a esfera

$$\mathbb{S}^2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\},$$

a qual chamaremos de **Esfera de Poincaré**, e o plano

$$T_{P_N}\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1\}$$

que é tangente a esfera \mathbb{S}^2 em $P_N = (0, 0, 1)$. Nesta seção convencionaremos que as coordenadas y_i se referirão à esfera \mathbb{S}^2 e as coordenadas x_i ao plano $T_{P_N}\mathbb{S}^2$.

Definição 4.3.2. *Definiremos*

$$H_+ = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 > 0\}$$

como sendo o hemisfério norte,

$$H_- = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 < 0\}$$

como sendo hemisfério sul e

$$\mathbb{S}^1 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 = 0\}$$

como sendo o equador.

A compactificação de Poincaré de X consiste em fazer duas cópias do fluxo de X , uma sobre H_+ e outra sobre H_- , usando a projeção central. Para isso, consideremos uma reta $L(t)$ que une a origem a um ponto do $T_{P_N}\mathbb{S}^2$,

$$L(t) = (0, 0, 0) + t(x_1, x_2, 1) = t(x_1, x_2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esta reta intercepta a esfera \mathbb{S}^2 em dois pontos, um no hemisfério norte e o outro no sul. Ver Figura 4.2.

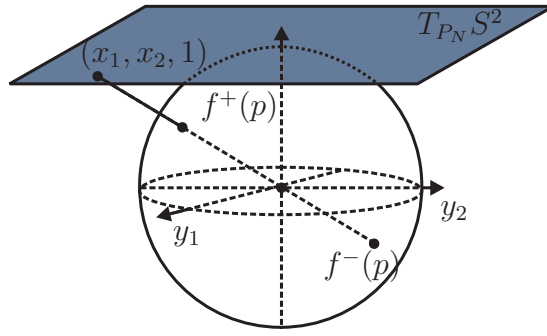


Figura 4.2: Projecção central

Agora considerando a projecção do campo vetorial X de $\mathbb{R}^2 \approx T_{P_N} \mathbb{S}^2$ para \mathbb{S}^2 dada pelas projecções centrais, temos dois difeomorfismos

$$f^+ : T_{P_N} \mathbb{S}^2 \rightarrow H_+, \quad f^- : T_{P_N} \mathbb{S}^2 \rightarrow H_-,$$

isto é, $f^+(p)$ (resp. $f^-(p)$) é a intersecção da reta que passa pelo ponto p ligado a origem com o hemisfério norte (resp. sul) de \mathbb{S}^2 , cujas expressões são dadas por

$$f^+(x_1, x_2, 1) = \frac{(x_1, x_2, 1)}{\Delta(x)}, \quad f^-(x_1, x_2, 1) = -\frac{(x_1, x_2, 1)}{\Delta(x)},$$

onde $\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$.

Sem perda de generalidade, podemos considerar o campo X definido no plano tangente à esfera, isto é, $X : T_{P_N} \mathbb{S}^2 \rightarrow T_{P_N} \mathbb{S}^2$, e assim é possível definir um novo campo em \mathbb{S}^2 . O campo \tilde{X} induzido em \mathbb{S}^2 , a partir de X , através dos difeomorfismos f^+ e f^- será dado por

$$\tilde{X}(y) = Df^+(x) \cdot X(x) \quad \text{se } y = f^+(x) \in H^+$$

e

$$\tilde{X}(y) = Df^-(x) \cdot X(x) \quad \text{se } y = f^-(x) \in H^-,$$

respectivamente.

Destacamos que \tilde{X} é um campo vetorial em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$, que é tangente à esfera. Para estudar o comportamento assintótico das órbitas não limitadas de

X analisando \tilde{X} , é necessário estender \tilde{X} para o equador \mathbb{S}^1 , obtendo assim um campo na esfera.

O estudo de \tilde{X} em uma vizinhança do equador nos dará informações sobre o comportamento do campo X no infinito. Entretanto, nem sempre é possível estender \tilde{X} ao equador. Veremos adiante que, quando X for um campo polinomial, podemos estender \tilde{X} analiticamente ao equador. Antes de estudar a extensão de \tilde{X} ao equador, vamos escolher um sistema de coordenadas conveniente para \mathbb{S}^2 e calcular a expressão de \tilde{X} nessas coordenadas.

Para \mathbb{S}^2 usamos seis cartas locais dadas por

$$U_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k > 0\}, \quad V_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k < 0\},$$

para $k = 1, 2, 3$. As aplicações locais correspondentes são dadas por $\phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\psi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ e definidas como:

$$\phi_k(y) = -\psi_k(y) = \left(\frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k} \right),$$

para $m < n$ e $m, n \neq k$.

Queremos agora encontrar a expressão do campo na carta local (U_1, ϕ_1) .

Seja $y \in U_1 \cap H_+$, então $y = f^+(x)$, $x \in T_{P_N}\mathbb{S}^2$:

$$\begin{aligned} (\phi_1 \circ f^+)(x) &= \phi_1(f^+(x)) = \phi_1 \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) \\ &= \left(\frac{x_2}{\Delta(x)} \cdot \frac{\Delta(x)}{x_1}, \frac{1}{\Delta(x)} \cdot \frac{\Delta(x)}{x_1} \right) \\ &= \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right). \end{aligned}$$

Portanto $\phi_1(x_1, x_2, 1) = (u, v)$, onde $u = \frac{x_2}{x_1}$ e $v = \frac{1}{x_1}$. Observe que como $y \in U_1 \cap H_+$, então $x_1 \neq 0$. Como $\tilde{X}(y) = Df^+(x) \cdot X(x)$ quando $y = f^+(x)$ segue que

$$\begin{aligned} D\phi_1(y)\tilde{X}(y) &= D\phi_1(y) \circ Df^+(x)X(x) \\ &= D(\phi_1 \circ f^+)(x)X(x). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Seja $\tilde{X}(y)|_{U_1 \cap H_+}$ denotando o sistema de coordenadas definido como $D\phi_1(y)\tilde{X}(y)$ e, portanto, segue da equação (4.6) que

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(y)\Big|_{U_1 \cap H^+} = D(\phi_1 \circ f^+)(x) \cdot X(x) &= \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ \frac{-1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{x_1^2} (-x_2 P(x_1, x_2) + x_1 Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Esta é a expressão de \tilde{X} em $U_1 \cap H_+$ nas coordenadas ϕ_1 . Vamos colocá-las em função de u e v para facilitar a análise. Usando que $x_1 = \frac{1}{v}$, $x_2 = \frac{u}{v}$ e substituindo em (4.7), temos

$$\tilde{X}(y)\Big|_{U_1 \cap H^+} = \left[-uvP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + vQ\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -v^2P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right].$$

Em geral, \tilde{X} não permanece limitado quando nos aproximamos de \mathbb{S}^1 . Mas, se multiplicarmos o campo por um fator $\rho(y) = y_3^{d-1}$, onde d é o grau do campo X , a extensão se torna possível, então

$$\rho(f^+(x)) = \frac{1}{\Delta(x)^{d-1}} = \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}},$$

onde $z = (u, v)$. Assim $\rho \cdot \tilde{X}$ nas coordenadas (u, v) é dado por:

$$\begin{aligned}
\rho \cdot \tilde{X}(u, v) &= \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}} \left(-uvP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + vQ\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -v^2P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right) \\
&= \frac{v^d}{\Delta(z)^{d-1}} \left(-uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -vP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Logo, (4.8) é a expressão do campo em $U_1 \setminus \mathbb{S}^1$. Verifica-se, facilmente que se $y \in U_1 \cap H_-$, obtém-se a mesma expressão.

Faremos algumas considerações a respeito do que foi visto. Inicialmente observamos que os pontos do equador $\mathbb{S}^1 \cap U_1$ são representados por $v = 0$ nas coordenadas ϕ_1 . Por outro lado, estes pontos correspondem ao infinito do plano $T_{P_N} \mathbb{S}^2$. Observe também, que é possível fazer $v = 0$ na expressão (4.8), resultando em

$$\rho \cdot \tilde{X}(u, 0) = \frac{1}{[\sqrt{u^2 + 1}]^{d-1}} (-ua_d + b_d, 0),$$

onde a_d e b_d são os termos de maior grau em P e Q , respectivamente. Na expressão de $\rho \cdot \tilde{X}(u, 0)$ temos a segunda componente do vetor igual a zero. Isto

significa que o vetor $\rho.\tilde{X}(u, 0)$ é tangente ao equador quando olhado na esfera \mathbb{S}^2 . Podemos concluir então que o equador $\mathbb{S}^1 \cap U_1$ é invariante pelo campo de $\rho.\tilde{X}$. Não é difícil remover o fator $\frac{1}{\Delta(z)^{d-1}}$ de (4.8) por uma parametrização do tempo. Assim, a expressão para o campo $\rho.\tilde{X}$ na carta local (U_1, ϕ_1) é dada por

$$\begin{cases} u' = v^d \left[-uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right], \\ v' = -v^{d+1}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right). \end{cases} \quad (4.9)$$

Podemos calcular analogamente, a expressão do campo $\rho.\tilde{X}$ na carta (U_2, ϕ_2) que será dada por

$$\begin{cases} u' = v^d \left[P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right], \\ v' = -v^{d+1}Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right). \end{cases} \quad (4.10)$$

Finalmente a expressão do campo $\rho.\tilde{X}$ na carta (U_3, ϕ_3) é dada por

$$\begin{cases} u' = P(u, v), \\ v' = Q(u, v). \end{cases} \quad (4.11)$$

Observação 4.3.1. *As expressões para $\rho.\tilde{X}$ nas cartas (V_1, ψ_1) , (V_2, ψ_2) e (V_3, ψ_3) terão, respectivamente, as mesmas expressões que (4.9), (4.10) e (4.11) multiplicadas por $(-1)^{d-1}$. Observe que o fator $(-1)^{d-1}$ desempenha um papel fundamental no estudo das estabilidades dos equilíbrios em \mathbb{S}^1 . Assim, para conhecermos o comportamento dos pontos do infinito, basta olharmos as cartas (U_1, ϕ_1) e (U_2, ϕ_2) .*

Proposição 4.3.1. *Seja X um campo polinomial em \mathbb{R}^2 de grau d . Seja $\rho : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho(y) = y_3^{d-1}$, e seja \tilde{X} o campo induzido em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ através de f^+ e f^- como definido acima. Então $\rho.\tilde{X}$ pode ser estendido a um campo analítico de \mathbb{S}^2 com equador invariante.*

Demonstração: Vimos acima que as expressões de $\rho.\tilde{X}$ nas cartas (U_1, ϕ_1) , (V_1, ψ_1) , (U_2, ϕ_2) e (V_2, ψ_2) são dadas por (4.9) ou (4.10) onde podemos ainda

multiplicar pelo fator $(-1)^{d-1}$ quando for o caso. Vê-se que as expressões (4.9) e (4.10) são perfeitamente definidas para $v = 0$, isto é, no equador \mathbb{S}^1 e, como tais expressões são analíticas, podemos estendê-las analiticamente ao equador. Fazendo $v = 0$ em (4.9) e (4.10) obtemos respectivamente:

$$\rho\tilde{X}(u, 0) = (-ua_d + b_d, 0) \text{ e } \rho\tilde{X}(u, 0) = (a_d, 0)$$

e concluímos que o equador será invariante por \tilde{X} . ■

Definição 4.3.3. *O campo vetorial estendido na esfera \mathbb{S}^2 pelas cartas locais (U_k, ϕ_k) e (V_k, ψ_k) , chama-se **compactificação de Poincaré de X** e será indicado por $P(X)$.*

4.4 Número Máximo de Ciclos Limites

Nos capítulos anteriores estudamos ciclos limites de pequenas amplitudes para algumas famílias de sistemas rígidos. Nosso objetivo agora é estudar o retrato de fase global do sistema

$$\begin{cases} x' = -y + x(a_0 + a_1x + a_2x^2), \\ y' = x + y(a_0 + a_1x + a_2x^2). \end{cases} \quad (4.12)$$

4.4.1 Estudo na parte compacta do plano

Nesta seção apresentaremos alguns resultados relacionados à estabilidade do único ponto de equilíbrio $E_0 = (0, 0)$ do sistema (4.12). Usando a mudança de coordenadas $(x, y) = (\frac{1}{a_1}X, \frac{1}{a_1}Y)$, $a_1 \neq 0$, obtemos o novo sistema

$$\begin{cases} x' = -y + x(a_0 + x + a_2x^2), \\ y' = x + y(a_0 + x + a_2x^2). \end{cases} \quad (4.13)$$

A matriz Jacobiana $J(x, y) = DX(x, y)$ em E_0 é dada por

$$JX(E_0) = \begin{pmatrix} a_0 & -1 \\ 1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovalores são da forma $\lambda_{1,2} = a_0 \pm i$. Portanto, se $a_0 \neq 0$, a origem é um ponto de equilíbrio hiperbólico e pelo Teorema de Hartman-Grobman o sistema (4.13) é topologicamente conjugado à sua parte linear. Neste caso:

- E_0 é um foco atrator se $a_0 < 0$;
- E_0 é um foco repulsor se $a_0 > 0$.

Quando $a_0 = 0$, a origem é um ponto de equilíbrio não hiperbólico e, portanto, o sistema linearizado não descreve o comportamento do sistema não linear próximo da origem. Assim, vamos considerar o valor crítico $a_0 = 0$. A reta $a_0 = 0$ é chamada **curva de Hopf** do equilíbrio E_0 .

O teorema a seguir nos dá a estabilidade do ponto de equilíbrio E_0 .

Teorema 4.4.1. *Considere o sistema (4.13) e $a_0 = 0$. Então o primeiro coeficiente de Lyapunov em E_0 é dado por*

$$L_1 = a_2.$$

Além disso:

- a) *Se $a_2 < 0$, E_0 é assintoticamente estável.*
- b) *Se $a_2 > 0$, E_0 é instável.*

Demonstração: Os coeficientes de Lyapunov deste sistema foram calculados no Teorema 3.2.3. Em particular, $L_1 = a_2$. Os itens a) e b) seguem diretamente do Teorema 2.3.1. ■

O teorema seguinte exhibe condições necessárias e suficientes para que E_0 seja um centro. A prova segue diretamente do Corolário 3.2.2.

Teorema 4.4.2. *A origem é um centro para o sistema (4.13) se e somente se $a_0 = a_2 = 0$.*

4.4.2 Retrato de fase global

Nesta seção estudaremos o retrato de fase global do sistema (4.13), analisando o comportamento das órbitas do campo vetorial no infinito. Como consequência deste estudo, mostraremos que este sistema tem um único ciclo limite.

A compactificação do sistema (4.13) nas cartas (U_1, ϕ_1) e (U_2, ϕ_2) assume as respectivas formas

$$\begin{cases} u' = v(1 + u^2), \\ v' = uv^2 - a_0v^2 - v - a_2, \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\begin{cases} u' = -v(1 + u^2), \\ v' = -uv^2 - a_0v^2 - uv - a_2u^2. \end{cases} \quad (4.15)$$

Em ambos os casos, $v = 0$ representa o infinito do campo vetorial. O sistema (4.14) não tem singularidades no infinito quando $a_2 \neq 0$. Por outro lado, o sistema (4.15) apresenta a origem como única singularidade no infinito. Estudaremos alguns resultados para este caso. Para os sistemas nas cartas (V_1, ψ_1) e (V_2, ψ_2) , os resultados são análogos, tendo em vista a Observação 4.3.1. Para mais detalhes, ver livro [9].

Proposição 4.4.1. *Considere o campo vetorial X associado ao sistema (4.13) com $a_2 > 0$. Então a singularidade $(0, 0)$ na carta local (U_2, ϕ_2) de $P(X)$ é uma cúspide com duas separatrizes tangentes a $v = 0$. Além disso, o equador de S^2 é atrator para todo fluxo de $P(X)$.*

Demonstração: O sistema (4.13) na carta local (U_2, ϕ_2) de $P(X)$ é dado por

$$\begin{cases} u' = -v - vu^2, \\ v' = -uv^2 - a_0v^2 - uv - a_2u^2. \end{cases} \quad (4.16)$$

É fácil ver que a origem $(u, v) = (0, 0)$ é a única singularidade no infinito. Além disso, é não hiperbólica. Assim, para estudar a estabilidade desta singularidade faremos um blow-up na direção- u da forma $(u, v) = (z^2, z^3w)$. Depois de alguns

cálculos obtemos um novo campo vetorial (o qual dividido por z) é dado por

$$\bar{X} = \left(-\frac{1}{2}zw(1+z^4), \frac{1}{2}z^4w^2 - a_0z^2w^2 - zw + \frac{3}{2}w^2 - a_2 \right).$$

As singularidades deste campo são

$$E_1 = \left(0, \sqrt{\frac{2a_2}{3}} \right) \quad \text{e} \quad E_2 = \left(0, -\sqrt{\frac{2a_2}{3}} \right).$$

As linearizações deste campo nas singularidades E_1 e E_2 são dadas por

$$J\bar{X}\left(0, \sqrt{\frac{2a_2}{3}}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a_2}{3}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{2a_2}{3}} & 3\sqrt{\frac{2a_2}{3}} \end{pmatrix}$$

e

$$J\bar{X}\left(0, -\sqrt{\frac{2a_2}{3}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a_2}{3}} & 0 \\ \sqrt{\frac{2a_2}{3}} & -3\sqrt{\frac{2a_2}{3}} \end{pmatrix}.$$

Como podemos observar, em ambos os casos $\det J\bar{X} = -a_2 < 0$. Portanto os pontos de equilíbrio são do tipo sela. Na Figura 4.3 (esquerda) podemos visualizar o retrato de fase no plano (z, w) . Também na Figura 4.3 (direita) vemos o retrato de fase no plano (u, v) após o “blow-down”. Esta é uma singularidade do tipo cúspide.

Para verificar que o equador de S^2 é atrator basta observar na carta local (U_2, ϕ_2) que $v'|_{v=0} < 0$.

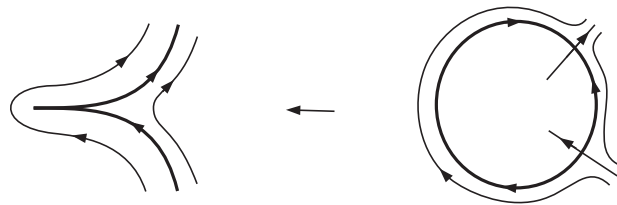


Figura 4.3: Blow-up e blow-down da singularidade cúspide

Observação 4.4.1. *Fazendo o blow-up na direção- v ($(u, v) = (zw^2, w^3)$) obtemos o seguinte campo*

$$\bar{X} = \left(-1 - \frac{1}{3}w^4z^2 + \frac{2}{3}(a_0w^2z + wz^2 + a_2z^3), -\frac{1}{3}(zw^5 + a_0w^3 + zw^2 + a_2z^2w) \right).$$

É fácil ver que a origem não é uma singularidade do campo.

Proposição 4.4.2. *Considere o campo vetorial associado ao sistema (4.13) com $a_2 < 0$. Então, o equador de S^2 é repulsor para todo fluxo de $P(X)$.*

Demonstração: Segue as mesmas linhas da proposição anterior observando que o blow-up na direção u é regular. E, neste caso, $v'|_{v=0} > 0$. ■

A seguir apresentaremos dois lemas importantes, os quais podem ser encontrados em [17], que irão auxiliar na demonstração do próximo resultado.

Lema 4.4.1. *As soluções periódicas do sistema (4.13) correspondem às soluções positivas da equação diferencial de Abel*

$$\frac{dr}{d\theta} = A(\theta)r^3 + B(\theta)r^2 + C(\theta)r, \quad (4.17)$$

que satisfazem $r(0) = r(2\pi)$, onde $A(\theta) = a_2\cos^2(\theta)$, $B(\theta) = \cos(\theta)$ e $C(\theta) = a_0$.

Demonstração: Basta observar que o sistema (4.13) nas coordenadas polares $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$ se escreve como a equação diferencial de Abel dada acima. ■

Observação 4.4.2. *Usualmente, as soluções da equação de Abel que satisfazem $r(0) = r(2\pi)$ são também chamadas soluções periódicas. Além disso, quando são isoladas, são chamadas de ciclos limites.*

Lema 4.4.2. *A equação*

$$\frac{dx}{dt} = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.18)$$

onde $b_0, b_1, b_2, b_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas em $[0, 1]$ e $b_3(t) > 0$ (ou $b_3(t) < 0$), tem no máximo três ciclos limites.

Demonstração: Consideremos a equação (4.18) com $b_3(t) > 0$ e $t \in [0, 1]$. Suponhamos que (4.18) tem pelo menos quatro ciclos limites: $x_1(t) < x_2(t) < x_3(t) < x_4(t)$. Efetuando a mudança de variáveis

$$y = \frac{x - x_1(t)}{x_2(t) - x_1(t)},$$

nesta equação obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} [b_3(x^2 + xx_1 + x_1^2) + b_2(x + x_1) - b_3(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) - b_2(x_2 + x_1)] \\ &= y[b_3(x^2 + xx_1 - x_2^2 - x_2x_1) + b_2(x - x_2)] \\ &= y(y - 1)\{b_3(x_2 - x_1)^2y + [(2x_1 + x_2)b_3 + b_2](x_2 - x_1)\}. \end{aligned}$$

Assim, (4.18) é transformada em uma nova equação na variável y da forma

$$\frac{dy}{dt} = y(y - 1)(ay + b) = ay^3 + (b - a)y^2 - by,$$

onde $a = (x_2 - x_1)^2b_3 > 0$ e $b = [(2x_1 + x_2)b_3 + b_2](x_2 - x_1)$ e as soluções são $y_1 = 0 < y_2 = 1 < y_3(t) < y_4(t)$. Observe que quando $b_3(t) < 0$, segue que $a < 0$. Para $y > 1$, considere $dz = \frac{dy}{y(y-1)}$, isto é, $z = \ln \frac{y}{y-1}$. Se $z_i(t) = \ln \frac{y_i(t)}{y_i(t)-1}$ para $i = \{3, 4\}$, então:

- $z_i(0) = z_i(1)$ (pois $y_i(t)$ é solução),
- $\frac{dz_i}{dt} = -ay_i - b$, para $i = \{3, 4\}$. De fato,

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{y_i - 1}{y_i} \left[\frac{\frac{dy_i}{dt}(y_i - 1) - y_i(\frac{dy_i}{dt})}{(y_i - 1)^2} \right] = -\frac{dy_i/dt}{y_i(y_i - 1)} = -ay_i - b,$$

- $0 = \int_0^1 (\frac{dz_4}{dt} - \frac{dz_3}{dt}) dt = \int_0^1 -a(y_4(t) - y_3(t)) dt < 0$.

Portanto, temos uma contradição, o que também acontece quando consideramos $a < 0$. ■

Proposição 4.4.3. *O sistema (4.13) com $a_0a_2 < 0$ não tem centros e tem apenas um ciclo limite hiperbólico.*

Demonstração: Primeiramente, sabemos do Teorema 4.4.2 que o sistema (4.13) tem um centro se, e somente se, $a_0 = a_2 = 0$. Faremos a prova supondo $a_0 < 0$ e $a_2 > 0$. O outro caso segue de forma análoga.

Quando $a_0 < 0$ e suficientemente pequeno, é possível gerar um ciclo limite hiperbólico de pequena amplitude por uma bifurcação de Hopf. Para provar que (4.13), sob nossas hipóteses, tem apenas um ciclo limite, vamos considerar a equação de Abel associada ao sistema (4.13) dada no Lema 4.4.1, ou seja,

$$\frac{dr}{d\theta} = A(\theta)r^3 + B(\theta)r^2 + C(\theta)r,$$

onde $A(\theta) = a_2 \cos^2(\theta)$, $B(\theta) = \cos(\theta)$ e $C(\theta) = a_0$. Observe que neste caso $A(\theta) > 0$, pois $a_2 > 0$. Logo, do Lema 4.4.2 concluímos que a equação de Abel tem no máximo três soluções fechadas sendo uma delas $r = 0$. Por outro lado, é fácil verificar que se $r(\theta)$ é solução periódica de (4.17), então $-r(\theta + \pi)$ também é solução periódica. Consequentemente, temos que a equação de Abel tem no máximo um ciclo limite na faixa $r > 0$. Desta forma, usando o Lema 4.4.1 provamos que (4.13) tem no máximo um ciclo limite hiperbólico (gerado pela bifurcação de Hopf). Veremos que o ciclo limite ocorre somente quando $a_0 < 0$. Suponha $a_0 \geq 0$. Então a origem é um foco repulsor e o equador de S^2 é atrator (pois $a_2 > 0$). Neste caso, o ciclo limite seria internamente estável e externamente instável, o que contradiz o fato dele ser hiperbólico. Portanto, não existem ciclos limites quando $a_0 \geq 0$. ■

Proposição 4.4.4. *O sistema (4.13) com $a_0 a_2 > 0$ não tem centros e não possui ciclos limites.*

Demonstração: Novamente, segue do Teorema 4.4.2 que o sistema (4.13) tem um centro se, e somente se, $a_0 = a_2 = 0$.

Faremos a prova supondo $a_0 < 0$ e $a_2 < 0$. O outro caso é análogo. Seguindo o mesmo raciocínio da prova da Proposição 4.4.3, obtemos que o sistema (4.13) com $a_0 a_2 > 0$ tem no máximo um ciclo limite. Suponha que exista tal ciclo limite. Como $a_0 < 0$, a origem é um foco atrator. Por outro lado, $a_2 < 0$ implica

que o equador de S^2 é repulsor. Assim, o ciclo limite é internamente instável e externamente estável, o que contradiz o fato dele ser hiperbólico. Portanto, não existem ciclos limites quando $a_0 a_2 > 0$. ■

O teorema a seguir resume todas as possibilidades para os retratos de fase do sistema (4.13) dependendo dos parâmetros a_0 e a_2 .

Teorema 4.4.3. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x' = -y + x(a_0 + x + a_2 x^2), \\ y' = x + y(a_0 + x + a_2 x^2). \end{cases} \quad (4.19)$$

Então:

- a) *Se $a_0 > 0$ e $a_2 > 0$ ($a_0 < 0$ e $a_2 < 0$, respectivamente), então o sistema (4.19) não possui ciclos limites.*
- b) *Se $a_0 > 0$ e $a_2 < 0$ ($a_0 < 0$ e $a_2 > 0$, respectivamente), então o sistema (4.19) tem um único ciclo limite.*
- c) *Se $a_0 = 0$ e $a_2 < 0$ ($a_0 = 0$ e $a_2 > 0$, respectivamente), então o sistema (4.19) não possui ciclos limites. Além disso, a origem é um repulsor fraco quando $a_2 > 0$ e um atrator fraco quando $a_2 < 0$.*
- d) *Se $a_2 = 0$ e $a_0 < 0$ ($a_2 = 0$ e $a_0 > 0$, respectivamente), então o sistema (4.19) não possui ciclos limites. Além disso, a origem é um repulsor hiperbólico quando $a_0 > 0$ e atrator hiperbólico quando $a_0 < 0$.*
- e) *Se $a_0 = a_2 = 0$, então a origem é um centro.*

Os retratos de fase na esfera de Poincaré do sistema (4.19) são dados na Figura 4.4:

Demonstração: Os itens a) e b) seguem diretamente das Proposições 4.4.4 e 4.4.3, respectivamente.

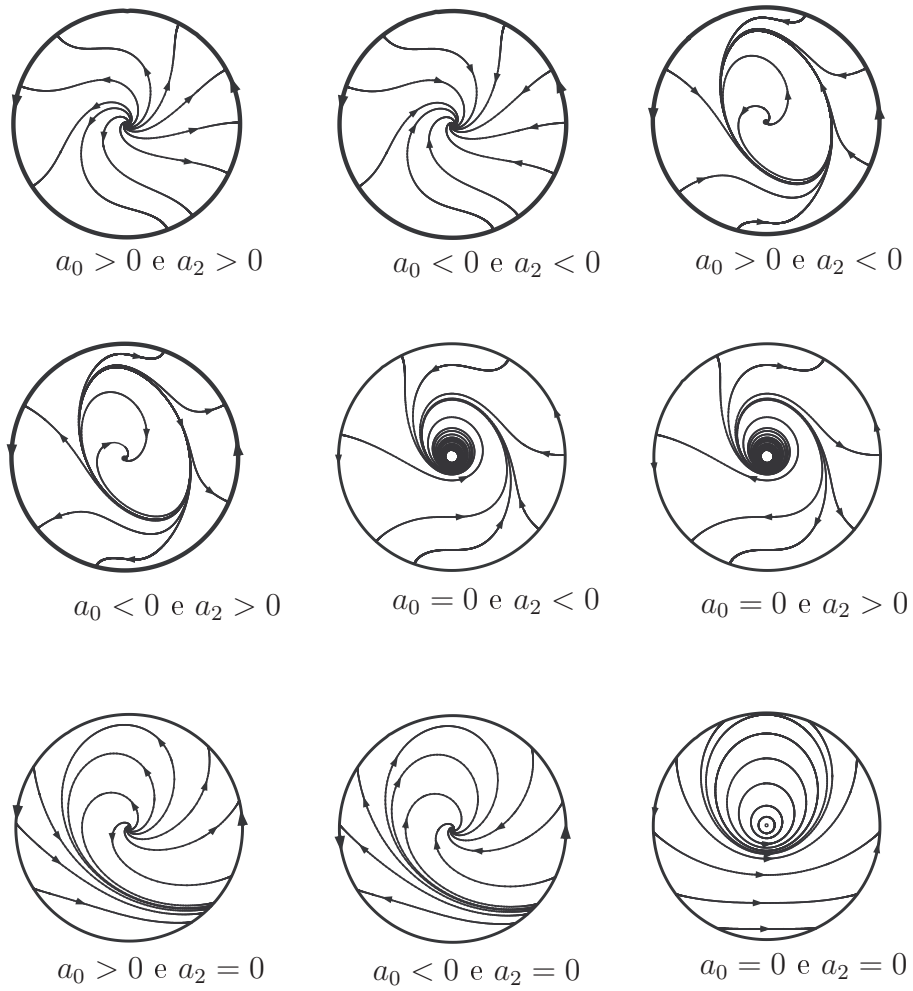


Figura 4.4: Retratos de fase do sistema (4.19)

c) Suponha $a_0 = 0$ e $a_2 < 0$. Segue do Teorema 4.4.1 que a origem é um atrator fraco e da Proposição 4.4.2 que o equador de S^2 é repulsor. Neste caso, não existe ciclo limite hiperbólico.

d) Como $a_0 \neq 0$ sabemos que a origem é um foco (atrator ou repulsor). Da Seção 4.1 temos que o sistema

$$\begin{cases} x' = -y + x(a_0 + x), \\ y' = x + y(a_0 + x). \end{cases}$$

não possui ciclo limite.

e) Segue diretamente do Teorema 4.4.2. Note que neste caso o campo possui uma integral primeira da forma

$$H(x, y) = \frac{1 - x^2 + 2y}{2(1 + y)^2}.$$

As curvas de níveis da função H são como na Figura 4.5.

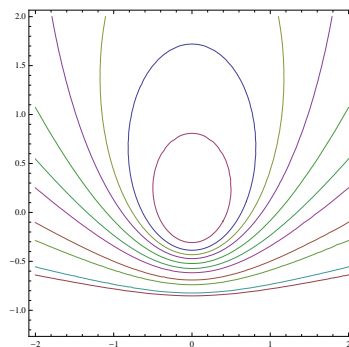


Figura 4.5: Curvas de Nível da função H .

Como as soluções do campo associado ao sistema (4.19) com $a_0 = a_2 = 0$ estão contidas nas curvas de nível da função H segue o retrato de fase desejado. ■

Conclusões e Trabalhos Futuros

Nesta dissertação estudamos centros e ciclos limites para algumas famílias particulares de sistemas rígidos. Para uma família, em especial, apresentamos o retrato de fase global e concluimos que o número máximo de ciclos limites é um.

Como sugestões para trabalhos futuros podemos citar:

1) Mostrar que o número máximo de ciclos limites do sistema

$$\begin{cases} x' = -y + x(a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2), \\ y' = x + y(a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2), \end{cases}$$

onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ é dois. Em [10] os autores estudaram este sistema classificando-o em 3 tipos de acordo com o número de pontos singulares no infinito e conjecturaram que ele tem no máximo 2 ciclos limites.

2) Estudar o retrato de fase global e, desta forma, obter o número máximo de ciclos limites para os sistemas

$$\begin{cases} x' = -y + x(a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N), \\ y' = x + y(a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N), \end{cases}$$

onde $N = \{2n, 2n + 1\}$ e

$$\begin{cases} x' = -y + x [(a_0 + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N) + (b_0 + b_2y^2 + \dots + b_Ny^N)], \\ y' = x + y [(a_0 + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N) + (b_0 + b_2y^2 + \dots + b_Ny^N)], \end{cases}$$

onde $N = 2n, n \geq 0$.

3) Obter condições necessárias e suficientes para que a origem do sistema rígido

$$\begin{cases} x' = -y + x(a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3), \\ y' = x + y(a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3), \end{cases}$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, 9$ seja um centro.

Bibliografia

- [1] ALGABA, A., REYES, M., *Computing center conditions for vector fields with constant angular speed*, J. Comput. Appl. Math., 154 (2003), 143–159.
- [2] ALWASH, M. A. M., *On the center conditions of certain cubic systems*, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 3335–3336.
- [3] ANDRONOV, A. A., *Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenués*, C.R. Acad. Sci. Paris, 189 (1929), 559–561.
- [4] BAUTIN, N.N., *On the number of limit cycles which the variations of coefficients from an equilibrium state of the type focus or center*, Amer. Math. Soc. Translations, 100 (1954), 1–19.
- [5] CHICONE, C., *Ordinary Differential Equations with Applications*, Applied Mathematical, Springer-Verlag, New York, (1999).
- [6] COLLINS, C. B., *Conditions for a center in a simple class of cubic system*, Differential and Integral Equations, 10(2) (1997), 333–356.
- [7] DIAS, F.S., MELLO, L.F., *The center-focus problem and small amplitude limit cycles in rigid systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 32 (2012), 1627–1637.
- [8] DULAC, H., *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles*, J. de l'École Polytechnique, 9 (1904), 1–25.
- [9] DUMORTIER, F., LLIBRE, J., ARTÉS, J. C., *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer Verlag, New York, (2006).

- [10] GASULL, A., PROHENS, R., TORREGROSA, J., *Limit cycles for rigid cubic systems*, J. Math. Anal. Appl. 303 (2005), 391–404.
- [11] GASULL, A., TORREGROSA, J., *Exact number of limit cycles for a family of rigid systems*, Proc. Amer. Math. Soc., 133 (2005), 751–758.
- [12] HILBERT, D., *Mathematical problems*, Reprinted from Bull. Amer. Math. Soc., 8 (1902), 473–479.
- [13] HIRSCH, M., SMALE, S., DEVANEY, R., *Differential Equations Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press, New York, (2003).
- [14] HUBBARD, J. H., WEST, B. H., *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach, Higher-Dimensional Systems (Texts in Applied Mathematics)*, Springer Verlag, New York, (1991).
- [15] KAPTEYN, W., On the centra of the integral curves which satisfy differential equations of the first order and the first degree. Proc. Kon. Akad. Wet., 13 (1911), 1241–1252.
- [16] LIÉNARD, A., *Etude des oscillations entretenues*. Rev. Générale de l'Electricité, 23 (1928), 335–357.
- [17] LINS NETO, A., On the number of solutions of the equation $dx/dt = \sum_{j=0}^n a_j(t)x^j, 0 \leq t \leq 1$, for which $x(0) = x(1)$, Invent. Math. 59 (1980), 67–76.
- [18] LLIBRE, J., RABANAL, R., *Center conditions for a class of planar rigid polynomial differential systems discrete and continuous*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 35 (2015), 1075–1090.
- [19] MONTESINOS-AMILIBIA, A., ODEinR2, software disponível em <http://www.uv.es/montesin>.

- [20] POINCARÉ, H., *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, J. Math. Pures Appl., 7 (1881), 375–422.
- [21] ROMANOVSKI, V.G., SHAFER, D.S., *The Center and Cyclicity Problems: A Computational Algebra Approach*, Boston-Basel-Berlin: Birkhauser, (2009).
- [22] SONGLING, S., *A Concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems*, Sci. Sinica Ser. A, 23 (1980), 153–158.
- [23] SOTOMAYOR, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (1979).
- [24] YAN-QIAN YE, CHI Y. LO, *Theory of Limit Cycles*, Trans. Math. Monographs, AMS, Providence, RI 66 (1986).
- [25] VAN DER POL, B., *Sur les oscillations de relaxation*. Rev. Générale de l'Électricité, 22 (1927), 489–490.