

TESE
978

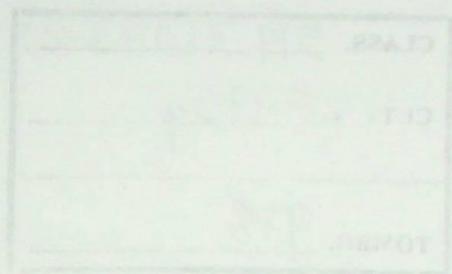
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

Ana Paula Silva Figueiredo

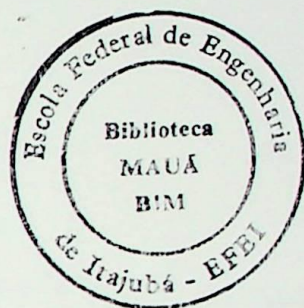
Os Gráficos de Controle CuSum e EWMA:
uma abordagem prática

ITAJUBÁ - 1998

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PRODUÇÃO



Ana Paula Silva Figueiredo



Os Gráficos de Controle CuSum e EWMA:
uma abordagem prática

Dissertação apresentada à
Escola Federal de Engenharia de Itajubá
para obtenção do título de
Mestre em Engenharia

Itajubá
1998

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PRODUÇÃO

Ana Paula Silva Figueiredo

Os Gráficos de Controle CuSum e EWMA:
uma abordagem prática

Dissertação apresentada à
Escola Federal de Engenharia de Itajubá
para obtenção do título de
Mestre em Engenharia

Área de concentração:
Engenharia de Produção

Orientador:
Luiz Gonzaga Mariano de Souza

Co-orientador:
Ariosto Bretanha Jorge

Itajubá
1998



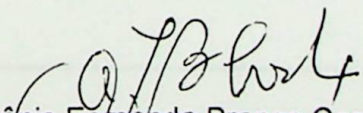
Ministério da Educação e do Desporto
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

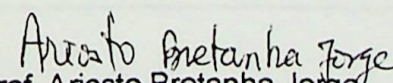
ANEXO I

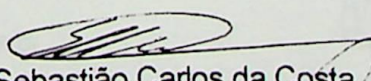
PRONUNCIAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

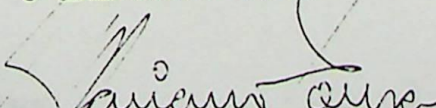
A Banca Examinadora, abaixo assinada, nomeada pela Portaria nº 172 de 16 de julho de 1998, considerando o resultado do Julgamento da Prova de Defesa Pública da Dissertação de Mestrado intitulada: **"Os Gráficos de Controle CuSum e EWMA: Uma Abordagem Prática"** apresenta pronunciamento no sentido de que o Coordenador dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Escola Federal de Engenharia de Itajubá solicite ao DRA (Departamento de Registro Acadêmico) a expedição do título de **Mestre em Ciências em Engenharia de Produção, na Área de Concentração em Qualidade e Produtividade**, satisfeitas as demais exigências regimentais, a **Ana Paula Silva Figueiredo**.

Itajubá, 17 de julho de 1998.


Prof. Antônio Fernando Branco Costa
1º Examinador - UNESP-FEG


Prof. Ariosto Bretanha Jorge
2º Examinador - EFEI


Prof. Sebastião Carlos da Costa
3º Examinador - EFEI


Prof. Luiz Gonzaga Mariano de Souza
4º Examinador - Orientador - EFEI



Ministério da Educação e do Desporto
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

ANEXO II

FOLHA DE JULGAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

Título da Dissertação: **"Os Gráficos de Controle CuSum e EWMA: Uma Abordagem Prática"**

Autora: **Ana Paula Silva Figueiredo**

JULGAMENTO

Examinadores	Conceito	Rubrica
1º	A+	<i>[assinatura]</i>
2º	A+	<i>[assinatura]</i>
3º	A+	<i>[assinatura]</i>
4º	A+	<i>[assinatura]</i>

Resultado Médio: Conceito A+, ou seja, a prova do
com distinção

Observações: _____

Itajubá, 17 de julho de 1998.

[assinatura]
Prof. Antônio Fernando Branco Costa
1º Examinador - UNESP-FEG

[assinatura]
Prof. Ariosto Bretanha Jorge
2º Examinador - EFEI

[assinatura]
Prof. Sebastião Carlos da Costa
3º Examinador - EFEI

[assinatura]
Prof. Luiz Gonzaga Mariano de Souza
4º Examinador - Orientador - EFEI

A meus pais
Zito e Dalva

que a cada dia
escrevem uma nova página
na história de nossa família

A meus filhos
Ana Luísa e Mateus

A meus filhos
Ana Luísa e Mateus

que me fazem
muito feliz
por ser mãe

A meu esposo
Newton

a quem amo,
e que se faz sempre
amigo e companheiro

Agradecimentos

A todos os meus professores de Estatística
por terem despertado em mim o gosto por esta área

Aos professores
Newton Alves Ferreira, John Hu e Sanjib Basu

Ao Departamento de Estatística
da Universidade da Califórnia em Santa Bárbara

Ao Sr. Oscar Lino Neto

À CAPES

Ao professor Luiz Gonzaga Mariano de Sousa
que aceitou orientar este trabalho.

Meu especial agradecimento ao professor
Ariosto Bretanha Jorge,
meu co-orientador, com quem tive inúmeras conversas produtivas
e que conduziu o trabalho sempre com segurança e
com contribuições significativas.

E finalmente, a meu esposo,

Newton de Figueiredo Filho,

que tantas vezes ouviu meus questionamentos
e com sua clareza me ajudou em muitas análises e conclusões,
além de inúmeras contribuições neste texto.

SUMÁRIO

	Lista de Figuras	viii
	Lista de Tabelas	xi
	Lista de Símbolos	xii
	Resumo	xv
	Abstract.....	xvi
Capítulo 1	Introdução	1
1.1	Objetivos	2
1.2	Os dados do processo de produção, os gráficos EWMA e CuSum e a decisão de utilizá-los	3
Capítulo 2	Fundamentos	5
2.1	Introdução	5
2.2	Estatísticas e Parâmetros.....	5
2.3	Estimadores	6
2.3.1	Estimativa da Média	7
2.3.2	Estimativa da Variância e do Desvio Padrão	8
2.3.2.1	Estimativa do desvio padrão baseado em k amostras	8
2.3.2.1	Estimativa do desvio padrão baseado em observações individuais .	13
2.4	O Desvio do valor nominal e suas expressões.....	15
2.5	Considerações finais	17
Capítulo 3	Gráficos de Controle.....	19
3.1	Introdução	19
3.2	O Processo de Produção: Situações Sob Controle e Fora de Controle	20
3.3	Variabilidade	22
3.3.1	Decomposição da variabilidade	24

3.4	Os Gráficos de Controle	25
3.4.1	O projeto de um gráfico de controle.....	26
3.4.2	Os subgrupos racionais	29
3.5	Os gráficos de Shewhart	30
3.5.1	Princípios Básicos.....	30
3.5.2	Modelo geral dos gráficos de Shewhart.....	31
3.5.3	Interpretação e regras de decisão para o Gráfico de Shewhart.....	32
3.6	A Função Poder para os gráficos de controle	33
3.6.1	O cálculo da Função Poder para as regras de decisão dos gráficos de Shewhart	34
3.7	O ARL - Comprimento Médio da Rodada.....	38
3.7.1	O cálculo do valor de ARL	39
3.8	A escolha dos limites de controle	41
3.8.1	A escolha dos limites de controle e as probabilidades α e β	41
3.9	Gráficos de Controle para pequenos desvios do valor nominal	43
3.9.1	Intervalo de amostragem variável.....	44
3.9.2	Variação do tamanho da amostra e do intervalo de amostragem....	45
3.9.3	Informações amostrais acumuladas sucessivamente.....	45
Capítulo 4	Soma Acumulada.....	48
4.1	Introdução.....	48
4.2	O gráfico de Soma Acumulada.....	49
4.2.1	A estatística Soma Acumulada	49
4.2.2	A Máscara V	50
4.2.3	Estimativa do valor médio do processo após o desvio	55
4.3	O Algoritmo de Soma Acumulada.....	56
4.3.1	Somas acumuladas unilaterais	56
4.3.2	A tabela do algoritmo	57
4.3.3	Estimativa do valor médio do processo após o desvio	58
4.4	Um exemplo genérico	58
4.4.1	Estimativas	59
4.4.2	Gráfico de Shewhart para o exemplo genérico	60

4.4.3	Cálculos para o procedimento de Soma Acumulada	62
4.5	Os valores de ARL para a Soma Acumulada	67
4.5.1	Comparação de valores de ARL entre alguns gráficos de soma acumulada e gráficos de Shewhart	68
4.5.2	Projetando a Máscara V para atender a valores de ARL	71
4.6	O exemplo genérico: impondo valores de ARL	74
4.7	Aprimoramentos para os procedimentos de Soma Acumulada	77
4.7.1	Inicialização rápida do procedimento de Soma Acumulada - FIR ..	78
4.7.2	O projeto modificado da máscara V - Vértice de seção parabólica.	80
4.8	O uso da inicialização rápida FIR e Máscara V Modificada para o exemplo genérico	84
4.8.1	A inicialização rápida FIR	84
4.8.2	A Máscara V modificada	87
4.9	Outros aspectos do procedimento de Soma Acumulada	89
4.9.1	O projeto econômico de CuSum - Síntese	89
4.9.2	O uso conjunto CuSum-Shewhart - Síntese	90
4.10	Considerações adicionais	91
4.10.1	Declividades diferentes	91
4.10.2	Desvios diferentes	93
4.11	Conclusões	95
Capítulo 5	Gráfico EWMA	97
5.1	Introdução	97
5.2	O modelo EWMA	98
5.2.1	A Estatística EWMA	99
5.2.1.1	A constante de suavização λ	100
5.2.2	A variância EWMA	101
5.2.3	Os limites de controle do gráfico EWMA	101
5.3	Procedimentos de projeto do gráfico EWMA	103
5.3.1	Procedimentos de Crowder	103
5.3.1.1	O procedimento gráfico	104
5.3.1.2	O procedimento computacional	105

5.3.1.3	Valores tabelados de ARL	106
5.3.2	O procedimento de Robinson e Ho	110
5.4	Um exemplo genérico	112
5.4.1	Estimativas	112
5.4.2	Determinação dos parâmetros λ e L	112
5.4.2.1	Procedimento gráfico de Crowder para o exemplo genérico	113
5.4.2.2	O uso das Tabelas de Crowder para o exemplo genérico	117
5.5	Inicialização rápida do gráfico EWMA - FIR	122
5.6	O uso conjunto dos gráficos EWMA e de Shewhart	123
5.7	Comparação dos valores de ARL para o gráfico EWMA	124
5.8	Conclusões	126
Capítulo 6	Estudo de Caso	128
6.1	Introdução	128
6.2	O processo P200	128
6.2.1	O gráfico de Soma Acumulada para o processo P200	131
6.2.2	O gráfico EWMA para o processo P200	141
6.3	O processo SAL	150
6.3.1	O gráfico de Soma Acumulada para o processo SAL	152
6.3.2	O gráfico EWMA para o processo SAL	155
Capítulo 7	Conclusões	159
	Anexos	162
	Referências Bibliográficas	176
	Apêndice	i

Lista de Figuras

- Figura 2.1 Métodos para se estimar a dispersão.
- Figura 2.2 Três maneiras de expressar o desvio do valor nominal
- Figura 3.1 Representação gráfica de processos de produção
- Figura 3.2 Variação total do resultado final de um processo a partir da variação num ponto específico
- Figura 3.3 Exemplo de gráfico de controle de Shewhart
- Figura 3.4 Representação das probabilidades entre os limites impostos pelas regras de decisão utilizadas na interpretação de gráficos de controle
- Figura 3.5 Valores de ARL para os gráficos de Shewhart com o uso das regras de decisão
- Figura 3.6 Comparação entre os valores especificados para os limites de controle LIC e LSC e a probabilidade dos erros tipo I (α) e tipo II (β).
- Figura 3.7 Exemplo de um gráfico CuSum com a utilização da Máscara V.
- Figura 3.8 Exemplo de um gráfico EWMA
- Figura 4.1 O gráfico de Soma Acumulada, a Máscara V e a escala A .
- Figura 4.2 Gráfico de Shewhart para o exemplo genérico
- Figura 4.3 Máscara V - Processo genérico
- Figura 4.4 Gráfico de soma acumulada e Máscara V para o exemplo genérico
- Figura 4.5 Comparação dos valores de ARL para projetos de soma acumulada e de Gráficos de Shewhart.
- Figura 4.6 Comparação dos valores de ARL para projetos de Soma Acumulada com valores de referência k (0.5, 0.75 e 1.0) e alguns intervalos de decisão h .
- Figura 4.7 Máscaras V utilizadas no exemplo genérico
- Figura 4.8 Gráfico CuSum e Máscara V projetada para cumprir com valores de ARL $L(0)$ e ARL $L(1.5)$ para o exemplo genérico
- Figura 4.9 Comparação dos valores de ARL para CuSum em procedimentos com e sem inicialização FIR
- Figura 4.10 Máscara V Modificada

- Figura 4.11 Comparação dos valores de ARL para a Máscara V, para a Máscara V Modificada e para a inicialização rápida FIR
- Figura 4.12 Gráfico de Soma Acumulada e Máscara V Modificada para o exemplo genérico
- Figura 4.13 Máscaras V com declividades K diferentes, projetadas para detectar o mesmo desvio Δ .
- Figura 4.14 Máscara V com declividades diferentes, para o exemplo genérico.
- Figura 4.15 Máscara V para diferentes desvios, mantendo-se a mesma declividade $K = \Delta/2$
- Figura 4.16 Gráfico CuSum utilizando 3 Máscaras V para 3 desvios Δ diferentes, com declividade $K = \Delta/2$
- Figura 5.1 Desvio $\delta \times$ constante de suavização λ para valores fixos de ARL $L(0)$
- Figura 5.2 Variância da estatística Z_i
- Figura 5.3 Valores de L para o cálculo dos limites de controle do gráfico EWMA
- Figura 5.4 Determinação da constante de suavização λ para o exemplo genérico
- Figura 5.5 Determinação do valor L para o exemplo genérico
- Figura 5.6 Gráfico EWMA para o exemplo genérico, parâmetros $\lambda=0,38$ e $L=2,25$
- Figura 5.7 Comparação dos valores de ARL $L(\delta)$ e ARL $L(0)$ para os pares (λ, L) que podem ser utilizados no exemplo genérico.
- Figura 5.8 Constantes de suavização para o exemplo genérico
- Figura 5.9 Gráfico EWMA para o exemplo genérico, parâmetros $\lambda=0,25$ e $L=2,25$
- Figura 5.10 Gráfico EWMA e Shewhart para o exemplo genérico
- Figura 5.11 Comparação dos valores de ARL para L fixo e constantes de suavização λ variando entre 0,05 e 1,00
- Figura 5.12 Comparação dos valores de ARL para gráficos EWMA com valores de L entre 2,00 e 3,50 e a constante de suavização λ fixa.
- Figura 6.1 Normal Plot dos dias de análise do processo P200: unidade de medida \times probabilidade acumulada, para diferentes dias.
- Figura 6.2 Máscara V padrão para o processo P200
- Figura 6.3 Gráfico de Soma Acumulada para o processo P200
- Figura 6.4 Gráfico CuSum e Máscara V para o dia 25 dia processo P200
- Figura 6.5 Gráfico CuSum e Máscara V para o dia 30 dia processo P200

- Figura 6.6 Escolha da constante de suavização λ para o processo P200
- Figura 6.7 Escolha do valor de L para o processo P200
- Figura 6.8 Gráfico EWMA para o processo P200
- Figura 6.9 Uso conjunto dos gráficos de Shewhart e EWMA para o processo P200
- Figura 6.10 Máscara V para o processo SAL
- Figura 6.11 Gráfico CuSum com uso da Máscara V para o processo SAL
- Figura 6.12 Gráficos de Shewhart e EWMA para o processo SAL

Lista de Tabelas

Tabela 2.1	Estimadores do Desvio Padrão $SD(x)$
Tabela 2.2	Exemplo dos métodos de estimação
Tabela 2.3	Valores de $SD(x)$ para o exemplo da Tabela 2.2
Tabela 2.4	Estimadores do Desvio Padrão $SD(x)$ para observações individuais
Tabela 3.1	Possibilidades de detectar um desvio na terceira amostra após a sua ocorrência utilizando as regras de decisão 1 e 2 para os gráficos de Shewhart
Tabela 4.1	Tabela para a implementação do algoritmo de Soma Acumulada.
Tabela 4.2	Simulação de amostras de um processo genérico e valores da soma acumulada
Tabela 4.3	Valores das estatísticas unilaterais para o algoritmo de soma acumulada
Tabela 4.4	Comparação entre alguns gráficos de soma acumulada e os gráficos de Shewhart com uso de regras de decisão
Tabela 4.5	Valores de ARL para a Máscara V
Tabela 4.6	Valores de ARL $L(0)$ e ARL $L(\delta)$ para o exemplo genérico
Tabela 4.7	Valores de ARL para o procedimento de somas acumuladas com inicialização rápida FIR
Tabela 4.8	Comparação dos valores de ARL $L(0)$ e ARL $L(\delta)$ com o uso da inicialização rápida FIR.
Tabela 4.9	Valores de soma acumulada com utilização da inicialização rápida FIR para o exemplo genérico.
Tabela 5.1	Resultado do programa de Crowder (1987a) de valores de ARL
Tabela 5.2	Valores de ARL para gráficos EWMA bilaterais
Tabela 5.3	Valores do desvio padrão de ARL para o gráfico EWMA bilateral
Tabela 5.4	Valores de λ e L para gráficos EWMA bilaterais com o valor de ARL $L(0)=500$ e valores de ARL para o processo fora de controle.
Tabela 5.5	Exemplo de interpolação para o procedimento de Robinson e Ho
Tabela 5.6	Valores amostrais do exemplo genérico
Tabela 5.7	Valores de ARL para o exemplo genérico na faixa de interpolação

Tabela 5.8	Pares (λ, L) , valores de ARL $L(0)$ e ARL $L(\delta)$ e respectivos desvios padrão que podem ser utilizados no exemplo genérico
Tabela 5.9	Pares (λ, L) , valores de ARL $L(0)$ e ARL $L(\delta)$ e respectivos desvios padrão após eliminação prévia de pares
Tabela 6.1	Valores utilizados para a estimativa da média e do desvio padrão para o processo P200
Tabela 6.2	Resultado do programa computacional para calcular valores de ARL
Tabela 6.3	Valores dos Limites de Controle Superior (LSC) e Inferior (LIC) do gráfico EWMA em função do número da amostra
Tabela 6.4	Valores das observações, médias móveis e estimativas da fase de análise do processo SAL.

Lista de Símbolos

A	escala do gráfico CuSum
A_2, D_3 e D_4	Coeficientes para projeto de gráficos de Shewhart
ARL	Comprimento médio da rodada (Average Run Length)
ARL $L(0)$	ARL para desvio nulo
ARL $L(\delta)$	ARL para desvio δ
c_2, c_4, c_4'	fatores de não tendenciosidade para as estatísticas \bar{s} e $\overline{s^2}$
CCO	Curva Característica de Operação
CEP	Controle Estatístico do Processo
CuSum	Soma Acumulada (Cumulative Sum)
d	distância entre o vértice e o ponto de superposição da máscara V
d_2, d_2^*	fatores de correção para a estatística \bar{R}
EWMA	Exponentially Weigthed Moving Average
FIR	Inicialização rápida (Fast Initial Response)
$f(x)$	função distribuição de probabilidade da variável aleatória X
H	intervalo de decisão
h	intervalo de decisão padronizado
H_0	hipótese nula
H_1	hipótese alternativa
iid	independentemente e identicamente distribuído
K	declividade da máscara V
k	declividade padronizada da máscara V
L	número de múltiplos de desvio padrão em que os limites de controle se distanciam da LC
LC	Linha Central
LIC	Limite Inferior de Controle
LSC	Limite Superior de Controle
MR	Média Móvel (Moving Range)
n	tamanho da amostra
$N(0,1)$	distribuição normal padronizada com média zero e variância unitária
NQA	Nível de Qualidade Aceitável

R	amplitude amostral
s	desvio padrão amostral
$SD(x)$	desvio padrão
s_n	raiz quadrada do valor médio da soma dos quadrados dos desvios
V.A.	variável aleatória
x	resultado possível da V.A. X
\bar{x}	média amostral
Z	distribuição normal padronizada
Z_i	estatística EWMA
α	probabilidade de um erro tipo I
β	probabilidade de um erro tipo II
δ	erro padrão
Δ	desvio do valor nominal
λ	constante de suavização
μ	média populacional
$\hat{\mu}$	estimativa da média
σ	desvio padrão populacional
θ	ângulo da máscara V
\sim	distribuído segundo

RESUMO

Este trabalho apresenta os gráficos de controle CuSum (Cumulative Sum) e EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) para serem utilizados em monitoramento de processos produtivos. Os gráficos CuSum e EWMA são indicados para os processos nos quais se deseja detectar pequenos desvios médios do valor nominal. Com estes gráficos a tomada de decisão sobre a situação do processo, ou seja, se sob controle ou não, é mais simples e objetiva do que a utilização de decisão multicritério dos gráficos de Shewhart. É apresentado de maneira detalhada o procedimento de projeto destes gráficos e, no caso do CuSum, também do algoritmo. Os procedimentos apresentados são a seguir utilizados em um estudo de caso com dois processos de produção: um processo com observações individuais e o outro com observações amostrais. Nestes processos são utilizados ambos os gráficos. Para o processo com observações amostrais, tanto o gráfico de controle CuSum como o gráfico EWMA se mostraram sensíveis em detectar os desvios especificados, que não foram detectados pelo gráfico de Shewhart. Já para o processo de observações individuais, o gráfico CuSum se mostrou mais sensível do que o gráfico EWMA. O uso conjunto do gráfico EWMA - Shewhart dá ao analista a sensibilidade para detectar tanto pequenos como grandes desvios médios do valor nominal do processo.

ABSTRACT

This work presents the control charts CuSum (Cumulative Sum) and EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) which are used to monitor industrial processes. These charts fit for processes in which one wants to detect small deviations from the nominal value. When using these charts, making decisions based on whether the process is under control or not is simpler and more objective than the multicriterion's decision, which is necessary with Shewhart's charts. A detailed description of the design of these charts is presented, as well as the design of the CuSum algorithm. A case study for two production processes is presented: one of them using individual observations, while the other one using sampling observations. For these processes both charts are used. For the process with sampling observations both CuSum and EWMA charts were able to detect the specified deviations, which were not detected by Shewhart's chart. For the process with individual observations, however, the CuSum chart was more sensitive than the EWMA chart. Finally it is shown that employing both EWMA and Shewhart's charts simultaneously allows the analyst to detect both small and large deviations from the nominal value.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Para que um produto atenda às necessidades dos clientes, deve ser produzido por um processo que seja estável e em que todos os envolvidos estejam continuamente em busca de desempenho sempre melhor. O Controle Estatístico do Processo é um conjunto de ferramentas utilizado para fornecer informações que nos permitam atuar em um processo para melhorar sua capacidade ou mesmo reduzir a sua variabilidade. Entre estas ferramentas estão os Gráficos de Controle, que são diagramas nos quais são representadas determinadas características de qualidade em função da sequência de amostras coletadas ao longo do tempo.

Os gráficos de controle mais conhecidos são os gráficos de Shewhart, descritos no Capítulo 3, também conhecidos como gráficos 3-Sigma. Este gráfico é uma ferramenta aparentemente simples de ser utilizada, uma vez que normalmente utilizam-se apenas os limites de controle para estabelecer a situação do processo: se o ponto está plotado dentro dos limites ou não, indicando que o processo está sob controle ou não. Porém, lançando-se mão desta única regra de decisão *não é possível detectar pequenos desvios do valor nominal* em um número razoável de amostras coletadas. Torna-se necessário então utilizar outras regras de decisão para analisar a situação do processo. Neste ponto, a simplicidade do uso de *apenas uma regra de decisão*, perde seu espaço dando lugar a uma tomada de decisão multicritério. O operador ou o usuário que utiliza esta ferramenta vê-se então à frente de um conjunto de regras para serem aplicadas. Regras que, embora aparentemente simples, não o são e por isso deixam de ser utilizadas na maioria das vezes.

No entanto, há situações em que é necessário monitorar um processo produtivo no qual se espera detectar pequenos desvios médios do valor nominal e que isto seja obtido de maneira mais simples do que fazendo uso de regras de decisão adicionais.

Os gráficos de controle de Soma Acumulada ou CuSum (*Cumulative Sum*) e EWMA (*Exponentially Weighed Moving Average*) atendem estas situações.

Ambos têm o objetivo de detectar pequenos desvios médios do valor nominal com a propriedade de serem simples de operacionalizar.

O gráfico CuSum, apresentado no Capítulo 4, utiliza apenas uma *moldura* sobre os pontos plotados para analisar o processo. Esta moldura é denominada Máscara V e desempenha o papel de limites de controle para o gráfico CuSum. Além do gráfico de controle CuSum é possível utilizar um algoritmo de Soma Acumulada em que se compara a estatística Soma Acumulada com o *intervalo de decisão*.

Em especial o gráfico de controle CuSum tem recebido especial atenção nos ambientes de produção que utilizam as normas QS 9000 como referência, sendo inclusive citado nessas normas como ferramenta para a utilização em Controle Estatístico da Qualidade.

O gráfico de controle EWMA é apresentado no Capítulo 5. De maneira semelhante ao gráfico de Shewhart, este gráfico possui *limites de controle* para analisar a situação do processo. Se um ponto estiver plotado além ou aquém do processo será dito fora de controle. Evidenciando-se a vantagem de serem utilizados apenas os limites de controle na análise do processo, não havendo necessidade de outras regras de decisão. Os gráficos EWMA e Shewhart, devido à similaridade de sua construção, podem ser usados de forma conjunta com vantagens em relação ao uso individual dos mesmos.

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como primeiro objetivo apresentar os gráficos de controle de Soma Acumulada e EWMA como ferramentas de controle estatístico da qualidade para processos de produção. Seu segundo objetivo é utilizar os Gráficos de Controle CuSum e EWMA em processos de produção nos quais o responsável tenha

necessidade de detectar pequenos desvios médios do valor nominal. A utilização destes gráficos está descrita no Estudo de Caso, apresentado no Capítulo 6. Nesse estudo foram utilizados dois processos de produção e em ambos os processos os dois gráficos de controle foram utilizados.

1.2 Os dados do processo de produção, os gráficos EWMA e CuSum e a decisão de utilizá-los

Para detectar os pequenos desvios médios do processo, os gráficos CuSum e EWMA ponderam a *série de dados* coletados do processo, ao passo que os gráficos de Shewhart têm como memória do processo de produção apenas o último ponto no gráfico, ou seja a última amostra. As estatísticas utilizadas nos gráficos de Shewhart não são capazes de detectar pequenos desvios médios do processo sem o uso das regras de decisão adicionais.

A utilização das sequências de pontos nas regras de decisão para os processos monitorados com os gráficos de Shewhart é uma maneira de utilizar os dados históricos do processo. Porém, não é uma maneira simples, uma vez que a estatística plotada nestes gráficos não incorpora as observações coletadas previamente. Podendo haver um certo grau de subjetividade durante a tomada de decisão. Por outro lado, os gráficos EWMA e CuSum incorporam em suas estatísticas a série de dados coletados, fornecendo uma maneira objetiva para tomada de decisão e análise.

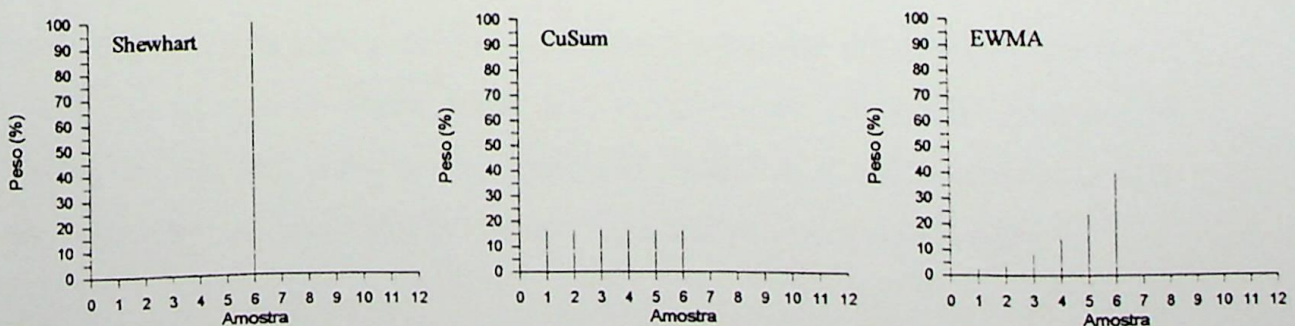


Figura 1.1 - Ponderação dos dados do processo de produção por gráficos de controle

Fonte: Adaptado de Hunter (1986).

O gráfico de Soma Acumulada e o gráfico EWMA ponderam de maneiras diferentes as observações prévias. O procedimento de Soma Acumulada pondera igualmente todas as amostras do processo, enquanto que o gráfico EWMA dá pesos às amostras segundo uma progressão geométrica decrescente e conseqüentemente a curva gerada pelos pesos é uma exponencial.

A Figura 1.1 mostra como os gráficos de controle de Shewhart, CuSum e EWMA e suas respectivas estatísticas ponderam as amostras coletadas ao longo do processo. Essas características motivaram a autora a pesquisar estes gráficos e utilizá-los no estudo de caso, buscando evidenciar as vantagens e as desvantagens de cada um deles.

Os gráficos de controle CuSum e EWMA são projetados para detectar pequenos desvios médios do valor nominal. Estes desvios, expressos em *erro padrão* são utilizados durante a fase de projeto dos gráficos. No Capítulo 2 é apresentada sua definição, assim como considerações a respeito do procedimento de estimativas de outros parâmetros necessários para o projeto dos gráficos.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS

2.1. Introdução

Um processo monitorado com base estatística parte de uma análise descritiva baseada em técnicas visuais utilizando ferramentas como histogramas, gráficos de dispersão, correlação, 'box plot' e 'ramo e folhas', entre outros. Esta análise visual permite identificar algum padrão ou regularidade ou ainda um modelo para o processo.

A análise descritiva também é realizada a fim de que o analista calcule medidas de *posição* e de *variabilidade*, tais como a média e o desvio padrão. Estas medidas são então utilizadas nos modelos usados no monitoramento do processo. O projeto de um gráfico de controle, por exemplo, utiliza a estimativa das medidas de posição e de variabilidade do processo e o modelo de distribuição normal.

2.2 Estatísticas e Parâmetros

Um conjunto de dados pode ser representado por variáveis aleatórias (V.A.) denominadas *estatísticas*. A estatística é uma função dos dados sob análise e pode ser calculada mesmo quando há um conjunto de dados sem nenhum significado específico, ou seja, a estatística é obtida através de uma *operação com um conjunto de dados*. Neste trabalho estaremos lidando com dados que possam ser descritos na forma de V.A. quantitativas. Quando se deseja descrever a *centralização* deste conjunto de dados utiliza-se uma medida de localização, como por exemplo a *média aritmética* ou a *mediana*. Quando se deseja descrever o *espalhamento* dos dados utiliza-se uma medida de dispersão, como por exemplo, a *amplitude R*, a *raiz quadrada do valor médio da soma dos quadrados dos desvios* s_n ou o *desvio padrão amostral* s .

Se um processo de produção apresenta um certo grau de *controle estatístico* (cf. Seção 3.1) então poderá ser caracterizado por uma medida que represente um padrão de variação estável, consistente e repetitivo. Este padrão, que não varia muito

ao longo do tempo, pode ser aproximado por um histograma representando a distribuição de probabilidade $f(x)$ em que x é um resultado possível da V.A. quantitativa gerada ou obtida no processo. A aproximação contínua de $f(x)$ é *função densidade de probabilidade* da V.A. X . Esta função não caracteriza a seqüência temporal dos dados, porém é um modelo matemático utilizado para aproximar o padrão de variação das medidas obtidas de um processo.

O *parâmetro* é uma constante da função distribuição de probabilidade $f(x)$ ou de sua aproximação contínua. Utiliza-se $f(x)$ na sua forma discreta ou contínua para modelar um processo real. O parâmetro de $f(x)$ pode ser estimado por uma estatística obtida a partir dos dados coletados. Uma vez que utiliza-se um número finito de dados não se pode especificar uma única função $f(x)$ para um processo. Haverá sempre uma arbitrariedade relacionada com o uso de uma função $f(x)$ para representar o histograma gerado pelos dados obtidos do processo. Por isso não se deve pensar nos parâmetros de uma distribuição como sendo os verdadeiros e únicos valores da dispersão ou localização do processo mas como aqueles que se obteve ou se estimou caso o modelo adotado a priori, ou por hipótese, seja valido (Wheeler, 1995).

2.3 Estimadores

As estatísticas de localização e de dispersão são *estimadores* dos parâmetros da função $f(x)$, para processos que se apresentem sob controle. Porém se o processo não se apresenta sob controle estatístico, os dados não representam o padrão de variação do processo, mesmo porque este padrão não é único, e portanto não se pode estimar uma única função $f(x)$ representativa e adequada. Embora possam ser calculadas estatísticas a partir dos dados obtidos, tais estatísticas somente descrevem o padrão de variação passado. Conseqüentemente estas estatísticas não podem ser utilizadas para estimar os parâmetros da função $f(x)$ que não pode ser bem definida e não podem ser utilizadas para extrapolar além dos dados sob as quais foram obtidas (Wheeler, 1995).

Para estimar os parâmetros da função $f(x)$ o analista pode dispor de apenas um conjunto de dados, ou seja, apenas uma amostra, ou dispor de um número k de

amostras de um processo cujo comportamento possa ser representado pela função $f(x)$ discreta ou contínua. O procedimento de estimativa é tal que o analista define o parâmetro que será estimado e o estimador que será utilizado para tal.

Os parâmetros de localização e dispersão a serem estimados podem ser por exemplo, a média e o desvio padrão ou a variância. As estatísticas a serem utilizadas são por exemplo a *média aritmética* e o *desvio padrão amostral*. Os estimadores podem ser tendenciosos ou não-tendenciosos. A estatística amostral será dita um estimador não-tendencioso de um parâmetro se seu valor esperado for igual ao parâmetro. Deve-se procurar um estimador de variância mínima. Costa Neto (1977) apresenta as propriedades que um estimador deve possuir: não-tendenciosidade, consistência, eficiência e suficiência.

O uso de um estimador não-tendencioso não garante que o erro de estimação seja menor do que o seria se utilizado um estimador tendencioso. Usar uma estatística no lugar de uma outra não garante um erro de estimação menor (Wheeler, 1995).

2.3.1 Estimativa da Média

Dada a função $f(x)$ que melhor aproxima o processo analisado, o parâmetro que caracteriza a centralização do processo é a média μ que, em sua aproximação contínua é dada por

$$\mu = \int_{\text{todos } x} f(x) dx \quad 2.1$$

A estimativa da média para *uma* amostra é a sua média aritmética \bar{x} . A média aritmética mede a localização de um conjunto de dados e descreve a sua centralização. Para um número k de amostras, a estimativa da média é a média aritmética das médias amostrais. Estes são os melhores estimadores, para *uma* e k amostras, para o parâmetro μ da função densidade de probabilidade.

2.3.2 Estimativa da Variância e do Desvio Padrão

Dada a função $f(x)$ que melhor aproxima o processo analisado, o parâmetro que caracteriza a dispersão do processo é a variância de $f(x)$, denotado por σ^2 ou $V(x)$ e dado, em sua aproximação contínua, por

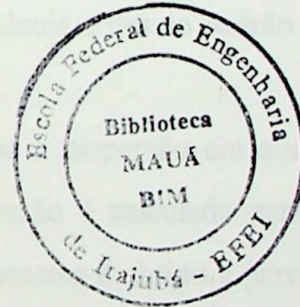
$$\sigma^2 = V(x) = \int_{\text{todos } x} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad 2.2$$

O desvio padrão $SD(x)$ caracteriza a dispersão do processo na mesma unidade de medida de seus dados e é definido como a raiz quadrada da variância, denotado por σ . Este *parâmetro* de dispersão pode ser estimado por *estatísticas* de dispersão diferentes, dentre elas a *amplitude amostral* R , o *desvio padrão amostral* s e a *raiz quadrada do valor médio da soma dos quadrados dos desvios* s_n . Estas estatísticas podem ser calculadas conforme as equações 2.3, 2.4 e 2.5.

$$R = x_{\max} - x_{\min} \quad 2.3$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad 2.4$$

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad 2.5$$



As estimativas da média, variância e desvio padrão podem ser obtidas de posse de apenas *uma* amostra ou de um número k de amostras.

2.3.2.1 Estimativa do desvio padrão baseado em k amostras

A presença de k amostras de tamanho n faz com que o analista, além de escolher o estimador a ser utilizado para estimar o parâmetro de dispersão, tenha que escolher o método de tratar os dados no procedimento de estimativa. Wheeler (1995) apresenta diferentes maneiras de se utilizar a estatística de dispersão para estimar o

desvio padrão $SD(x)$ e a variância $V(x)$. A Figura 2.1 apresenta três possíveis maneiras.

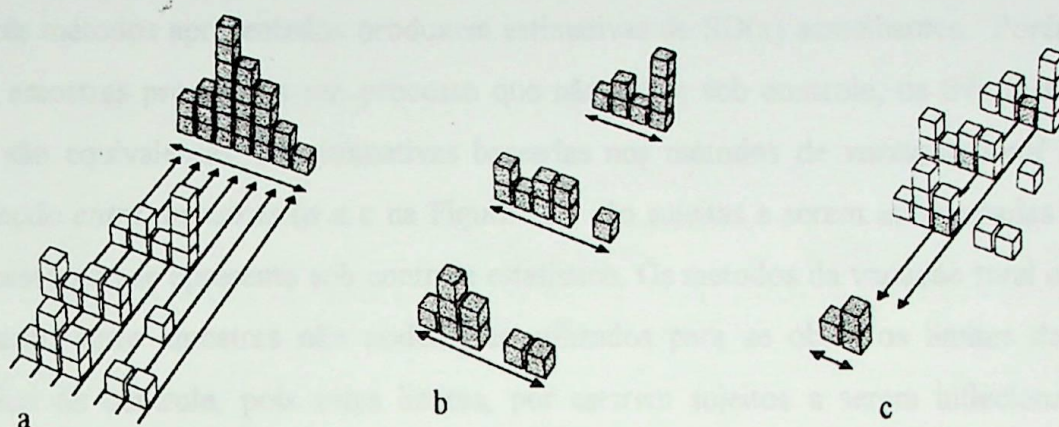


Figura 2.1 Métodos para se estimar a dispersão

Fonte: Adaptado de Wheeler (1995), p.60-61

A Figura 2.1a representa o primeiro método para se estimar a dispersão. Neste caso todos os dados das k amostras são agrupados em uma única amostra. Este método é conhecido como *método da variação total* pois considera todos os dados como sendo apenas um conjunto de dados e a partir dele calcula o desvio padrão.

A Figura 2.1b representa um método para estimar a dispersão em que cada amostra é tratada separadamente e a estatística de dispersão é calculada para cada amostra. Este método, ou seja o da *variação dentro da amostra* é obtido a partir de k amostras de tamanho n . De cada amostra é obtida a estatística de dispersão e então é calculada a média aritmética destes k valores. Esta estatística média é então utilizada para estimar o parâmetro de dispersão da distribuição de x .

O método apresentado na Figura 2.1c é um método indireto para se obter a estimativa da dispersão. Este método baseia-se na *variação entre amostras* e utiliza as médias de cada amostra para construir um conjunto de dados do qual é obtida a estatística de dispersão. Esta estatística é utilizada para obter uma estimativa do desvio padrão $SD(\bar{x})$ da distribuição das médias amostrais. Obtém-se a estimativa do desvio padrão $SD(x)$ do processo multiplicando-se a estimativa $SD(\bar{x})$ por \sqrt{n} .

Se o processo não apresenta nenhuma falta de controle detectável, ou seja se não está atuando em presença de causas especiais de variação como por exemplo ajuste inadequado de máquinas, erros de operação, lote de matéria prima entre outros, os três métodos apresentados produzem estimativas de $SD(x)$ semelhantes. Porém se as k amostras provém de um processo que não esteja sob controle, os três métodos não são equivalentes. As estimativas baseadas nos métodos de *variação total* e de *variação entre amostras* (a e c na Figura 2.1) são sujeitas a serem inflacionadas se o processo não se apresenta sob controle estatístico. Os métodos da variação total ou da variação entre amostras não podem ser utilizados para se obter os limites de um gráfico de controle, pois estes limites, por estarem sujeitos a serem inflacionados, impossibilitam que o gráfico de controle seja utilizado para monitorar o processo.

A Tabela 2.1 relaciona os estimadores do desvio padrão para processos monitorados através de amostras com tamanho $n > 1$. Os estimadores do desvio padrão apresentados na Tabela 2.1 fazem uso de fatores de correção de não-tendenciosidade, d_2 , d_2^* , c_2 , c_4 e c_4' . Estes fatores (com exceção de c_4') são tabelados e podem ser encontrados nos Anexo 2.1 e Anexo 2.2.

O fator de correção para o estimador do desvio padrão obtido a partir da média das variâncias amostrais, quando utilizado o método de variação dentro da amostra, é o valor c_4' . Este fator de correção considera o número k de amostras de tamanho n utilizadas para o cálculo da estatística. O valor do fator de correção c_4' corresponde ao valor c_4 de uma amostra de tamanho $[k(n-1) + 1]$. Assim, para o exemplo da Tabela 2.2, com a estatística baseada em 3 amostras de tamanho 8, tem-se o tamanho de uma amostra fictícia igual a $[3(8-1) + 1] = 22$. Portanto o valor de c_4 para a amostra de tamanho 22 é 0,9882.

Shewhart deliberadamente escolheu o método de variação *dentro* das amostras para a estimação do desvio padrão para o cálculo dos limites de controle dos gráficos de controle (Wheeler, 1995). Os estimadores do desvio padrão $SD(x)$ estão relacionados na Tabela 2.1. As estatísticas utilizadas nos estimadores são, entre outras, a amplitude R , o desvio s_n , o desvio padrão amostral s e a variância amostral s^2 . Quando utilizando o método da variação dentro da amostra, são tomados os valores

médios para as k amostras destas estatísticas (\bar{R} , \bar{s}_n , \bar{s} , \bar{s}^2). Quando utilizando o método de variação entre amostras, as estatísticas são calculadas no conjunto de dados formado pelas médias (\bar{x}) de cada amostra ($R_{\bar{x}}$, $s_{\bar{x}}$).

Tabela 2.1 Estimadores do Desvio Padrão SD(x)

Estatísticas	Estimadores de SD(x)	
	Tendenciosos	Não- tendenciosos
Variação dentro da amostra		
Média da amplitude \bar{R}	$\frac{\bar{R}}{d_2^*}$	$\frac{\bar{R}}{d_2}$
Raiz quadrada da média da soma dos quadrados dos desvios \bar{s}_n	\bar{s}_n	$\frac{\bar{s}_n}{c_2}$
Valor médio do desvio padrão amostral \bar{s}	\bar{s}	$\frac{\bar{s}}{c_4}$
Valor médio da variância amostral \bar{s}^2	$\sqrt{\bar{s}^2}$	$\frac{\sqrt{\bar{s}^2}}{c_4'}$
Variação total		
Amplitude R	—	$\frac{R}{d_2}$
Desvio padrão amostral s	s	$\frac{s}{c_4}$
Variação entre amostras		
Amplitude $R_{\bar{x}}$	—	$\sqrt{n} \frac{R_{\bar{x}}}{d_2}$
Desvio padrão amostral $s_{\bar{x}}$	$\sqrt{n s_{\bar{x}}}$	$\sqrt{n} \frac{s_{\bar{x}}}{c_4}$

Fonte: Adaptado de Wheeler (1995) p.62-65

Wheeler (1995) apresenta o exemplo a seguir, no qual utiliza 3 amostras de tamanho $n = 8$ para estimar o desvio padrão $SD(x)$.

Tabela 2.2 Exemplo dos métodos de estimação

amostra		valores		Método de estimativa : Variação									
				total (a)		dentro da amostra (b)			entre amostras (c)				
				s		s ²		R		xbar			
1		4 5 5 4 8 4 3 7		s = 1.551 R = 6		1.69		2.86		5		5	
2		2 4 3 7 5 4 2 5				1.69		2.86		5		4	
3		3 6 6 4 5 4 6 6				1.20		1.43		3		5	
				médias =>		1.53		2.38		4.3		s _x = 0.577	
				k=1, n=24				k=3, n=8				k=1, n=3	
				c ₄ =0.9892 d ₂ =3.895				c ₄ =0.9650 d ₂ =2.847				c ₄ =0.8862 d ₂ =1.693	

Tabela 2.3 Valores de $SD(x)$ para o exemplo da Tabela 2.2

Método de Variação	Estimadores de $SD(x)$		
	baseados na Amplitude	baseados no desvio padrão	baseados na média da
	R	amostral	variância amostral
		s	$\frac{\bar{s}^2}{s^2}$
Total	$\frac{R}{d_2} = \frac{6}{3,895} = 1,540$	$\frac{s}{c_4} = \frac{1,551}{0,9892} = 1,568$	—
Dentro da amostra	$\frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{4,3}{2,847} = 1,510$	$\frac{\bar{s}}{c_4} = \frac{1,53}{0,9650} = 1,585$	$\frac{\sqrt{s^2}}{c_4} = \frac{\sqrt{2,38}}{0,9882} = 1,561$
Entre amostras	$\sqrt{n} \frac{R_{\bar{x}}}{d_2} = \sqrt{8} \frac{1}{1,693} = 1,671$	$\sqrt{n} \frac{s_{\bar{x}}}{c_4} = \sqrt{8} \frac{0,577}{0,8862} = 1,842$	—

Segundo Wheeler (1995) a escolha da estatística de dispersão não é tão importante *como a escolha do método de estimação*. O método de estimativa baseado em *variação dentro da amostra* não é inflacionado por dados oriundos de processos que não se apresentem sob controle estatístico. Na presença de um processo atuando na presença de causas especiais, os estimadores baseados na variação entre amostras não são inflacionados igualmente. Os estimadores baseados na amplitude e no desvio padrão amostral são menos sensíveis a valores extremos do que o estimador baseado na média da variância amostral. Os estimadores baseados na amplitude e no desvio

padrão amostral são mais robustos e por isso preferidos para o cálculo dos limites de controle.

A estimativa a ser utilizada para a determinação dos limites em um gráfico de controle deve ser calculada a partir de um estimador cuja estatística seja obtida a partir do método de variação *dentro* das amostras.

2.3.2.2 Estimativa do desvio padrão baseado em observações individuais

Um processo monitorado através de observações individuais é essencialmente um processo de amostras seqüenciais de tamanho $n=1$. O controle estatístico neste caso é baseado na observação individual, das quais serão obtidas as estimativas necessárias para o projeto do gráfico de controle.

No caso de observações individuais não é possível utilizar o método de variação dentro das amostras para estimar a variabilidade do processo. Para observações individuais a diferença entre os métodos de estimação baseados na variação total e variação dentro da amostra desaparece, uma vez que tem-se apenas uma amostra com todas as observações. Disto decorre a possibilidade de se estimar a variabilidade com estatísticas inflacionadas, a menos que o processo esteja atuando de fato sob controle. Porém, é possível utilizar o ‘princípio’ do método de estimação baseado em variação dentro da amostra para estimar a variabilidade em processos monitorados com observação individual. Neste caso utiliza-se a estatística Médias Móveis obtida a partir de duas observações consecutivas.

A estimativa do desvio padrão $SD(x)$ para o projeto de gráficos de controle de indivíduos apresentada por Montgomery (1991) baseia-se na utilização de duas observações consecutivas e no cálculo das *médias móveis* MR , (do inglês Moving Range) para estimar a variabilidade do processo. A Média Móvel (MR_i) de duas observações consecutivas é definida por

$$MR_i = |x_i - x_{i-1}| \quad 2.5$$

A estimativa do desvio padrão $SD(X)$ é então obtida através do estimador \overline{MR}/d_2 , ou seja a média geral das médias móveis, dividida pelo fator de não tendenciosidade d_2 . O fator d_2 é uma constante tabelada em função do tamanho da amostra; no caso das *médias móveis* a amostra tem o tamanho $n=2$, e para este caso d_2 é igual a 1,128.

A Tabela 2.4 relaciona os estimadores do desvio padrão para um processo monitorado através de observações individuais, ou seja amostras de tamanho $n=1$

Tabela 2.4 Estimadores do Desvio Padrão $SD(x)$ para observações individuais

Estimadores de $SD(x)$		
Estatística de dispersão	Tendencioso	Não-tendencioso
s	s	$\frac{s}{c_4}$
MR	—	$\frac{\overline{MR}}{d_2}$

Fonte: Adaptado de Wheeler (1995) p.58

Cryer e Ryan (1990) apresentam a estimativa do desvio padrão para gráficos de observações individuais. Utilizam s/c_4 , que é um estimador não tendencioso do desvio padrão $SD(x)$. O estimador s/c_4 , é calculado com base nos dados coletados, por exemplo, em um dia de produção sob controle. Para cada amostra, (no exemplo, dia de produção) é calculado o desvio padrão amostral e em função do tamanho desta amostra a estimativa do desvio padrão é corrigida pela constante c_4 .

A abordagem padrão é a de se utilizar médias móveis MR no procedimento de estimação do desvio padrão utilizando o estimador \overline{MR}/d_2 . A ‘criação artificial’ dos subgrupos de tamanho 2 é apontada por Cryer e Ryan (1990) como uma dificuldade em se estimar $SD(x)$ uma vez que não se pode perceber facilmente mudanças no valor nominal e na dispersão. Ou seja, o uso de médias móveis não conduz a uma boa estimativa de $SD(x)$ pois tendências e oscilações no conjunto de dados tendem a aumentar o seu valor.

Se o processo produz dados segundo uma distribuição normal *iid* (identicamente e independentemente distribuídos), não há muita discrepância entre as estimativas obtidas com os estimadores apresentados e o valor do parâmetro.

Por outro lado Wheeler (1995) argumenta que utilizando uma média móvel de dois valores sucessivos como amplitudes de pseudo amostras de tamanho $n=2$ o analista pode obter uma estimativa de $SD(x)$ que é mais insensível a uma falta de controle no processo do que uma estimativa baseada no método da variação total. Se acontecer do processo estar fora de controle, os limites do gráfico de controle estarão menos inflacionados se baseados em médias móveis de valores sucessivos, do que se tivessem sido calculadas com base na variação total. Um valor extremo tem uma contribuição para a variância amostral *proporcional ao quadrado de seu desvio da média*. No entanto um valor extremo contribui apenas *proporcionalmente a seu desvio da média* para as médias móveis.

É recomendável que o desvio padrão $SD(x)$ seja estimado por ambas as estimativas, quando possível. Se as estimativas coincidirem o projeto do gráfico de controle trará resultados de monitoramento seguro. Caso haja uma discrepância entre as estimativas é sinal de que existe algum problema, podendo ser uma mudança no nível do valor nominal ou uma mudança na dispersão do processo, ou ambas. Essas mudanças afetarão a estimativa S/c_4 mais do que a estimativa \overline{MR}/d_2 . Se o processo for autocorrelacionado afetará \overline{MR}/d_2 mais do que a estimativa S/c_4 . Um processo será autocorrelacionado quando numa sequência de valores houver algum tipo de relacionamento entre valores sucessivos. Em qualquer uma das duas situações, seja no caso das discrepâncias entre estimativas, seja no caso de dados autocorrelacionados, deve-se efetuar uma investigação maior nas causas que estão afetando o processo.

2.4 O Desvio do valor nominal e suas expressões

Um gráfico de controle pode ser projetado para detectar um desvio específico do valor médio do processo. O 'tamanho' de um desvio do valor nominal do processo pode ser escrito de maneiras diferentes. O desvio dado em unidades de medida do

processo é representado por Δ . O desvio do valor nominal pode ser expresso como um múltiplo do desvio padrão da distribuição da população ou como um múltiplo δ do desvio padrão amostral. Neste caso é chamado de erro padrão.

A Figura 2.2 mostra três representações para o desvio do valor nominal do processo. Se, por exemplo, o processo monitorado deve detectar um desvio de 2,7 unidades, a representação deste desvio é $\Delta = 2,7$.

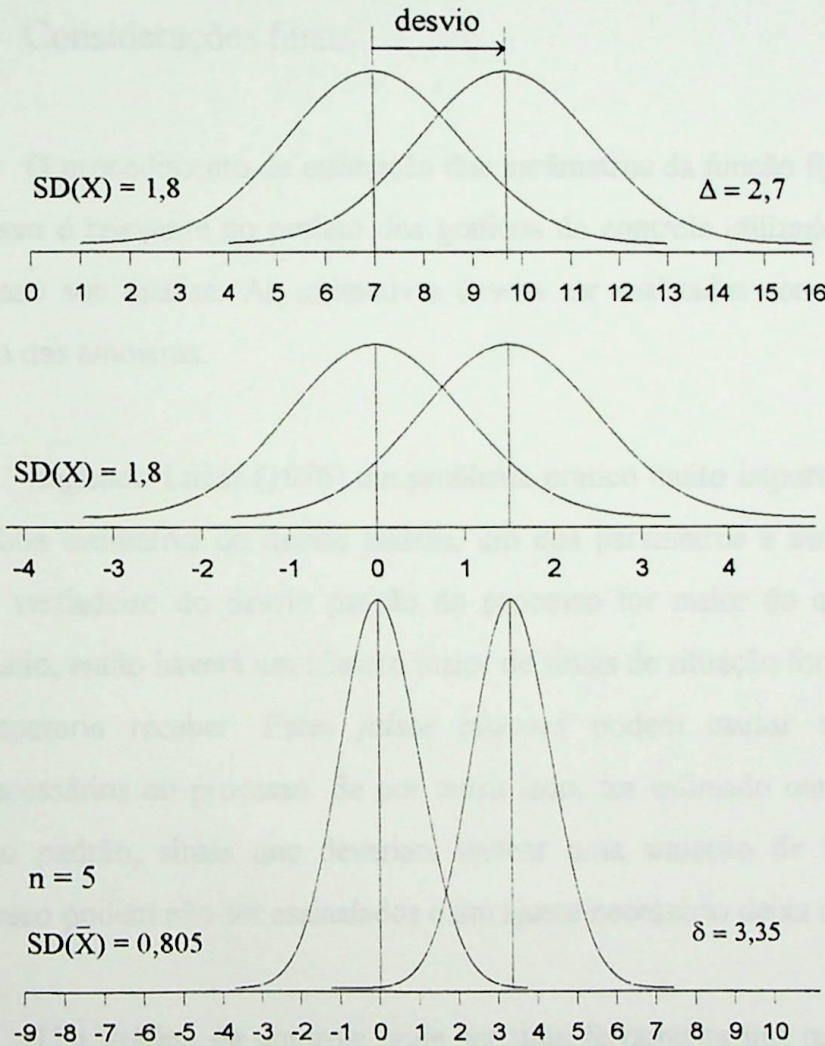


Figura 2.2 Três maneiras de expressar o desvio do valor nominal

Fonte: Adaptado de Wheeler (1995) p.208.

O desvio de 2,7 unidades pode ser representado como múltiplos do desvio padrão populacional e do desvio padrão amostral. Desta forma, se o desvio padrão populacional $SD(X)$ é conhecido e igual a 1,8 o desvio de 2,7 unidades representa um desvio de 1,5 desvios padrão populacional. Se o processo for monitorado através da

coleta sucessiva de amostras de tamanho $n = 5$, o desvio de 2,7 unidades representa $\delta = 3,35$, ou seja 3,35 erros padrão.

$$\Delta = 1,5 \times SD(X) = 1,5 \times 1,8 = 2,7$$

$$\delta = \frac{\Delta}{SD(\bar{X})} = \frac{2,7}{1,8/\sqrt{5}} = 3,35$$

2.5 Considerações finais

O procedimento de estimação dos parâmetros da função $f(x)$ representativa do processo é relevante no projeto dos gráficos de controle utilizados para monitorar o processo sob análise. As estimativas devem ser realizadas considerando a variação dentro das amostras.

Segundo Lucas (1976) um problema prático muito importante é o de se obter uma boa estimativa do desvio padrão, um dos parâmetros a serem estimados. Se o valor verdadeiro do desvio padrão do processo for maior do que o desvio padrão estimado, então haverá um número maior de sinais de situação fora de controle do que se esperaria receber. Estes *falsos alarmes* podem causar alterações e ajustes desnecessários no processo. Se por outro lado, for estimado um valor menor para o desvio padrão, sinais que deveriam indicar uma situação de fora de controle do processo podem não ser assinalados e um ajuste necessário deixa de ser realizado.

Um gráfico de controle pode ser uma ferramenta útil para o analista na sua tarefa de monitorar um processo, desde que os parâmetros utilizados em seu projeto sejam de fato representativos do processo. Uma vez que os parâmetros utilizados não representem o processo, as conclusões obtidas a partir do uso dos gráficos podem não ser seguras.

Uma vez que o analista tenha feito uma análise descritiva do processo a ser monitorado e esteja de posse dos parâmetros da função densidade de probabilidade $f(x)$ o uso do gráfico de controle como ferramenta de controle lhe permite monitorar a

variabilidade e o nível médio do processo. Se o processo estiver operando em níveis médios não aceitáveis, ou seja com um desvio médio do valor nominal inaceitável, o gráfico de controle deve ser projetado de maneira a sinalizar esta situação em um número médio de amostras previamente estabelecido pelo analista. Este número médio de amostras necessário para que um sinal de 'fora de controle' seja dado é chamado de ARL (Average Run Length) e é descrito no capítulo a seguir.

CAPÍTULO 3

GRÁFICOS DE CONTROLE

3.1 Introdução

Walter Shewhart foi o primeiro a reconhecer que a variabilidade era um fato do meio industrial e que isto deveria ser analisado fazendo-se uso dos princípios da probabilidade e estatística (Garvin, 1988). Ele observou que duas peças não eram produzidas igualmente embora com as mesmas especificações, uma vez que a matéria prima, a habilidade do operador, o método, as condições ambientais e os equipamentos, dentre outros fatores, podem variar de alguma maneira. Mesmo as partes produzidas por um mesmo operador, numa mesma máquina podem apresentar certa variabilidade com o tempo. Do ponto de vista gerencial tratava-se de repensar a qualidade dos bens produzidos. A questão não era então a existência ou não da variação, mas a distinção entre a variação aceitável e as variações que indicassem algum problema. Desta análise obteve-se o conceito de Shewhart de Controle Estatístico:

Um fenômeno será dito sob controle estatístico quando, através de experiência passada, pudermos predizer, pelo menos dentro de certos limites, como o fenômeno poderá variar no futuro. Aqui, predizer significa que podemos afirmar, pelo menos aproximadamente, a probabilidade do fenômeno observado ocorrer dentro dos limites dados (Garvin, 1988).

Shewhart desenvolveu técnicas estatísticas para determinar estes limites, assim como métodos gráficos para plotar os valores da produção e julgar se estavam dentro dos limites aceitáveis. Como resultado obteve o Gráfico de Controle do Processo. Ao segregar as causas especiais de variação daquelas inerentes ao processo, assegurava-se então, que a variabilidade devida aos problemas do processo de produção fosse distinguida daquela oriunda da aleatoriedade do processo (Garvin, 1988).

Segundo Wheeler (1995), a essência do controle estatístico é a previsibilidade. Isto não significa prever o exato valor, mas os limites dentro dos quais o valor poderá ocorrer. Assim, um processo que não esteja sob controle não poderá ser previsível. Se os dados se apresentam com um certo grau de variação ao longo do tempo, então pode-se prever, dentro de certos limites, como os dados provavelmente se comportarão no futuro. Em função desta previsibilidade, o planejamento e a gerência da produção se tornam menos vulneráveis. Por outro lado, quando os dados apresentam uma variação incontrolável, o planejamento, a produção e a gerência serão conduzidos de forma empírica.

3.2 O Processo de Produção: Situações Sob Controle e Fora de Controle

A manufatura de produtos que atendam aos requisitos impostos pelo cliente, pelo projeto de engenharia e afins deve ser conduzida em um processo de produção capaz de atender a qualidade desejada. Este processo de produção deve ser então um processo Sob Controle. Um processo de produção é dito *Sob Controle* se e somente se a distribuição de todas as suas características mensuráveis é constante ao longo do tempo. Isto equivale a dizer, de uma maneira prática, que um processo de produção está sob controle se e somente se as medidas centrais e as variâncias de todas as suas características mensuráveis são constantes ao longo do tempo (Hoyer e Ellis, 1996).

Cada um dos quadros da Figura 3.1 representa as distribuições da estatística analisada coletadas sucessivamente ao longo do tempo. O valor nominal é o valor alvo do processo, sob o qual espera-se que as distribuições estejam centralizadas. Ao longo do tempo, tanto o valor médio amostral, quanto a variância podem se alterar, modificando o perfil destas distribuições. A Figura 3.1a representa um processo sob controle. Este é um processo que está centrado em seu valor esperado (valor alvo ou valor nominal) e a variância se mantém constante ao longo do tempo. A Figura 3.1b descreve um processo descentralizado com relação a seu valor nominal, embora sob controle, uma vez que a medida central e de variância são constantes ao longo do tempo. A Figura 3.1c mostra um processo fora de controle onde o valor central e a variância não

são constantes ao longo do tempo. A Figura 3.1d realça o aspecto da previsibilidade: se um processo está sob controle, será possível prever, dentro de certos limites, o resultado esperado de amostras futuras. Por outro lado um processo fora de controle deixa o observador sem poder fazer previsões para o valor futuro.

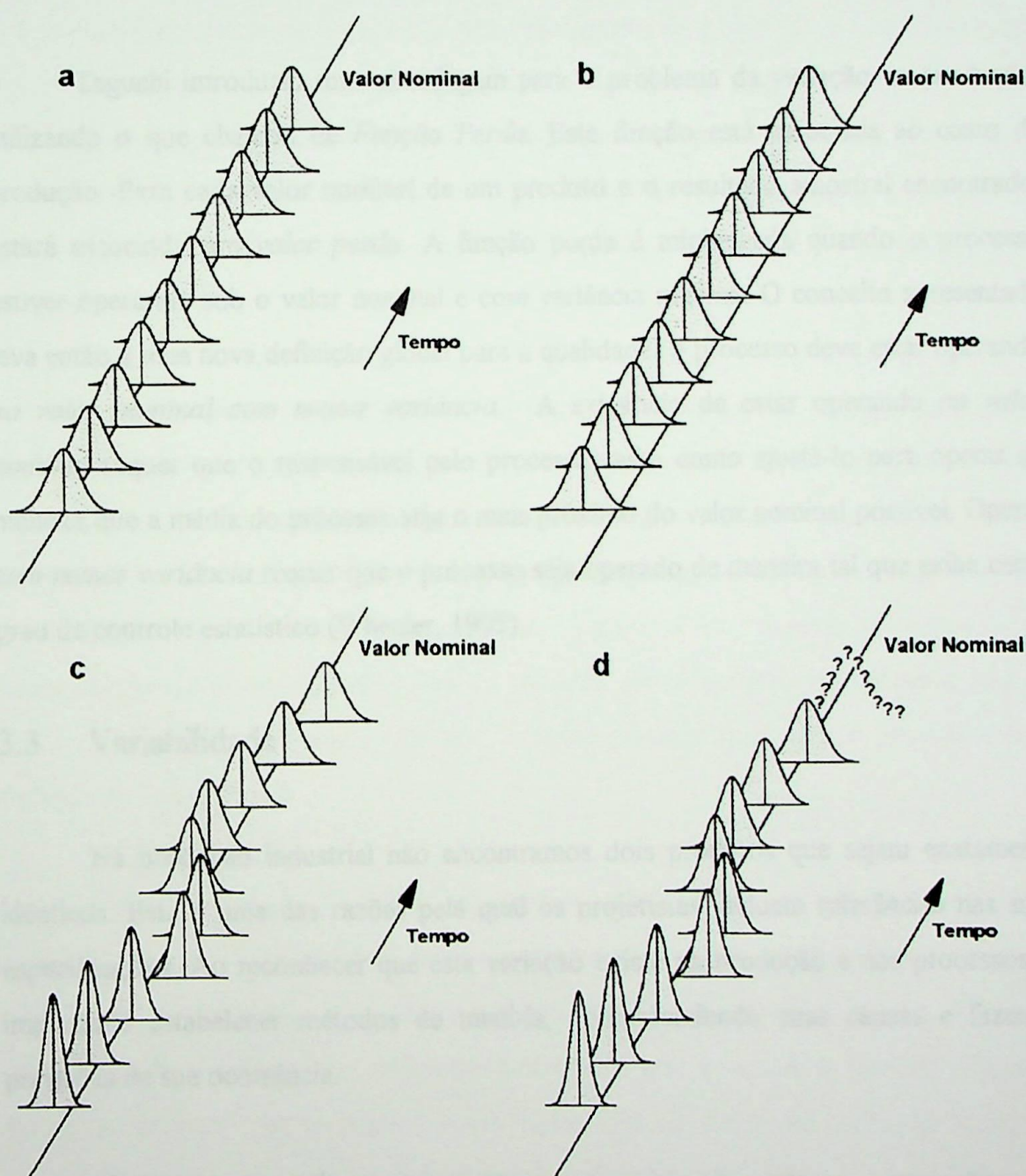


Fig. 3.1 Representação gráfica de processos de produção sob controle centrado no valor nominal (a), sob controle porém com desvio (b) e fora de controle (c e d).

Fonte: Adaptado de Hoyer e Ellis (1996), p.66-69

Wheeler (1995) afirma que a variação sempre cria custos. As atitudes tomadas para lidar com a variação, uma vez presentes no processo de produção, aumentam os custos. Por outro lado, as atitudes tomadas para reduzir as fontes de variabilidade irão diminuir custos e aumentarão a qualidade dos produtos, ou seja, quanto maior o trabalho para reduzir a variabilidade, menores serão os custos devidos à variação.

Taguchi introduziu uma abordagem para o problema da variação na produção, utilizando o que chamou de *Função Perda*. Esta função está associada ao custo de produção. Para cada valor nominal de um produto e o resultado amostral encontrado, estará associado um *valor perda*. A função perda é minimizada quando o processo estiver operando sob o valor nominal e com variância mínima. O conceito apresentado leva então a uma nova definição global para a qualidade: o processo deve estar operando *no valor nominal com menor variância*. A exigência de estar operando *no valor nominal* requer que o responsável pelo processo saiba como ajustá-lo para operar de maneira que a média do processo seja o mais próximo do valor nominal possível. Operar *com menor variância* requer que o processo seja operado de maneira tal que exiba certo grau de controle estatístico (Wheeler, 1995).

3.3 Variabilidade

Na produção industrial não encontramos dois produtos que sejam exatamente idênticos. Esta é uma das razões pela qual os projetistas incluem tolerâncias nas suas especificações. Ao reconhecer que esta variação existe na produção e nos processos, é importante estabelecer métodos de medi-la, compreendendo suas causas e fazendo previsões de sua ocorrência.

Um processo pode ser visto como uma série de ações ou operações e é influenciado por muitos elementos que contribuem para o seu resultado final. Estes elementos ou causas de variação, podem ser basicamente desmembrados em categorias mais gerais ou fontes de variação como materiais, máquinas, métodos, medidas, ambiente e o fator humano (IBM, 1986). Cada um destes elementos contribui em certo grau na variabilidade do processo.

Montgomery (1991) descreve a Teoria de Variabilidade apresentada por Shewhart na década de 20. A teoria apresentada elucida a base para o Controle Estatístico do Processo (CEP), ou seja, a divisão das causas de variabilidade de um processo em *causas comuns* e *causas especiais*.

Independentemente de como o processo tenha sido projetado e sua manutenção seja conduzida, uma certa variabilidade natural estará sempre presente. Esta variabilidade natural é a soma dos efeitos de pequenas causas inevitáveis, ou sejam as *causas comuns*. Quando um processo está operando de uma maneira natural ou aleatória, ou seja sem causas especiais de variabilidade presentes, é dito *estável* ou *sob controle*.

Somente quando o processo estiver sob controle será possível obter conclusões significativas e fazer previsões válidas sobre seu desempenho. Quando um processo está operando de maneira estável, seu resultado pode ser previsto pois os pequenos desvios oriundos das diferentes causas comuns comportam-se aproximadamente segundo uma distribuição normal de probabilidade. A Figura 3.1d mostra o aspecto da imprevisibilidade de um processo fora de controle. Se o processo se comporta fora de controle ao longo do tempo, não será possível prever qual será o resultado num período de tempo futuro.

Outros tipos de variabilidade podem estar presentes no processo. Esta variabilidade, neste caso, oriunda de *causas especiais*, normalmente provêm de um ajuste inadequado das máquinas, erros de operadores, defeitos nas matérias primas, diferenças no método de trabalho e nas condições ambientais, lote de matérias primas, diferentes fornecedores, entre outros. Alguns destes fatores não são evidentes porém há fatores de variação como por exemplo os erros durante o processo que podem ser mais facilmente identificados na busca das causas especiais. Esta variabilidade pode ser identificada utilizando-se por exemplo, um Diagrama de Causa e Efeito, uma das ferramentas do CEP, em que evidenciam-se as causas da variabilidade e seu efeito.

A variabilidade devida às causas especiais é normalmente grande quando comparada com a variabilidade devida às causas comuns e em geral representa níveis inaceitáveis de desempenho do processo. Um processo que esteja produzindo com a presença de causas especiais é dito *Fora de Controle*.

3.3.1 Decomposição da variabilidade

Para compreender o resultado final de um processo, os resultados amostrais sucessivos foram projetados na Figura 3.2a. A variação total do resultado final é a composição da variação de cada resultado amostral. A Figura 3.2b mostra a comparação entre a variação total e a variação num ponto específico no tempo.

Comparando a variação total com a variação num ponto específico, ou amostra, podemos escrever a equação fundamental do CEP:

$$\begin{aligned} \text{Variação Total} = \\ & \text{Variação devida às Causas Comuns} \\ & + \text{Variação devida às Causas Especiais} \end{aligned} \quad 3.1$$

Se o processo estiver sob controle, a variação devida às causas especiais será zero.

Uma vez que a variação de um processo pode ser decomposta em componentes devidos a ambas as causas, os Gráficos de Controle baseados nesta decomposição podem ser úteis no monitoramento do processo. O processo de amostragem para o projeto do gráfico de controle é elaborado de maneira que as eventuais variações devidas às causas especiais possam ser identificadas entre as amostras e que a variação devido às causas comuns esteja presente dentro de cada amostra. Este é o princípio da formação dos subgrupos racionais descrito na seção 3.4.2.

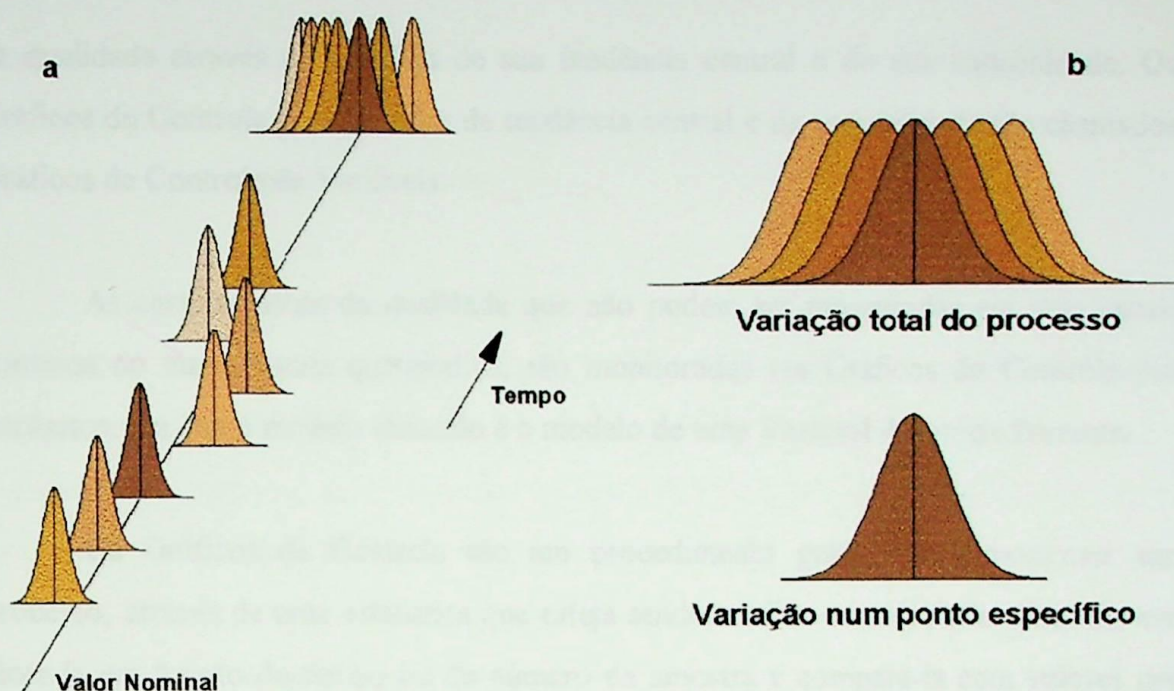


Fig. 3.2 Variação total do resultado final de um processo a partir da variação num ponto específico. Fig. 3.2a projeção dos resultados amostrais sucessivos. Fig. 3.2b Comparação entre a variação num ponto específico e variação total do processo.

Fonte: Adaptado de Hoyer e Ellis, (1996) p. 69

Segundo Hoyer e Ellis (1996) os Gráficos de Controle são uma fotografia da variação devida às causas comuns de um processo. Com esta fotografia o responsável pelo processo pode associar tendências não convencionais da estatística monitorada, com a ocorrência de uma ou mais causas especiais de variação.

3.4 Os Gráficos de Controle

Para se exercer o controle do processo de produção e conseqüentemente, da qualidade é preciso definir quais as características que serão monitoradas durante o processo.

A característica de qualidade que pode ser mensurada e expressa como um valor numa escala contínua de medidas é uma variável e pode ser modelada como um modelo de Variável Aleatória Contínua. Neste caso, é conveniente descrever essa característica

da qualidade através da medida de sua tendência central e de sua variabilidade. Os Gráficos de Controle para medidas de tendência central e de variabilidade são chamados Gráficos de Controle de Variáveis.

As características da qualidade que não podem ser mensuradas em uma escala contínua ou numa escala quantitativa, são monitoradas em Gráficos de Controle por Atributos, em que o modelo utilizado é o modelo de uma Variável Aleatória Discreta.

Os Gráficos de Controle são um procedimento gráfico para monitorar um processo, através de uma estatística que esteja sendo medida ou calculada. Consiste em plotá-la em função do tempo ou do número da amostra e compará-la com valores pré estabelecidos. Estes valores são os *limites de controle*, ou seja, limites pré-estabelecidos como critério de decisão. A decisão a ser tomada é a de verificar se o processo está sob controle ou não. Quando o processo estiver fora de controle será necessário então agir sobre ele de maneira que volte a ficar sob controle após o ajuste.

Se a distribuição das medidas de um produto ou das características de um serviço podem ser determinadas por sua média e seu desvio padrão, ou por sua média e sua amplitude então, num período de tempo ou intervalo de produção pré estabelecidos, poderão ser utilizadas amostras para determinar como o processo está se comportando.

Nas aplicações industriais, não é possível obter a função distribuição de probabilidades da característica monitorada, ou seja, não teremos as curvas de distribuição como apresentadas nas Figuras 3.1 ou 3.2, mas uma estimativa desta função de distribuição. As informações disponíveis para o projeto do gráfico de controle serão os valores encontrados nestas amostras (Hoyer e Ellis, 1996). De posse destas amostras serão estimados os valores da medida central e da medida de dispersão do processo.

3.4.1 O projeto de um gráfico de controle

O procedimento de uso de um gráfico de controle requer que o analista selecione o tamanho da amostra, a frequência de amostragem ou intervalo entre amostras e os

limites de controle. A seleção destes três parâmetros faz parte do projeto do gráfico de controle (Montgomery, 1991). Para cada amostra são obtidas as estatísticas que serão monitoradas pelo gráfico de controle.

Os parâmetros para o projeto do gráfico serão especificados em função da abordagem que será seguida ao projetá-lo. A construção de gráficos de controle pode se basear nas abordagens *Estatística* ou *Econômica*. Em cada uma dessas abordagens outras informações, além do tamanho da amostra e frequência de amostragem, podem ser necessárias, como parâmetros de custo e de projeto.

Segundo Woodall (1985) a 'seqüência de um procedimento de controle' é o número de amostras necessárias antes que um sinal de situação fora de controle seja dado. Um sinal de situação fora de controle indica que provavelmente ocorreu um desvio na média do processo e que alguma ação deva ser tomada a fim de encontrar e corrigir a causa especial de variação, motivo do desvio. Normalmente utiliza-se a Seqüência Média da Rodada (ARL - Average Run Length) para medir o desempenho do procedimento de controle. O ARL é apresentado na Seção 3.7.

Espera-se de um bom procedimento de controle um valor grande de ARL quando o processo estiver sob controle, e um valor pequeno de ARL quando o processo estiver fora de controle. Ou seja, se o processo estiver *sob controle* espera-se que demande um número grande de amostras até que seja sinalizado um falso alarme, ou seja, um sinal de que o processo esteja fora de controle, mesmo estando sob controle. Por outro lado, quando o processo estiver fora de controle, rapidamente deve ser dado um sinal desta situação.

No projeto estatístico são consideradas as probabilidades de um erro tipo I, de um erro tipo II, e o ARL, no procedimento para a seleção dos parâmetros do gráfico de controle. O erro tipo I é o erro que ocorre ao rejeitarmos uma hipótese, de que o parâmetro tem um valor especificado, em geral o valor nominal, hipótese esta dita nula, quando ela é de fato verdadeira. A probabilidade de um erro tipo I é chamada Nível de Significância, simbolizada por α . O erro tipo II é o erro cometido quando não

rejeitamos a hipótese nula quando de fato ela é falsa. A probabilidade de um erro tipo II é simbolizada por β . A seleção do tamanho da amostra e dos limites de controle será então feita para atender a um determinado poder do teste de hipóteses em detectar um desvio particular. A frequência amostral não é normalmente tratada analiticamente.

No projeto econômico, o objetivo é determinar os parâmetros do gráfico de controle que minimizem a *função perda* acumulada esperada (Montgomery et al, 1995). Segundo Montgomery (1991), três categorias de custos são normalmente consideradas no projeto econômico de gráficos de controle: (i) os custos de amostragem e testes, (ii) os custos associados à investigação de sinais de fora de controle e com a reparação ou correção de causas especiais encontradas e (iii) os custos associados à produção de não conformes. Os custos de amostragem e testes incluem as despesas com equipamentos e com o pessoal designado para estas funções e no caso de testes destrutivos, também se inclui o custo unitário dos itens amostrados. Os custos de se investigar e possivelmente corrigir o processo estão associados aos custos de se investigar falsos alarmes bem como aos custos de correção das causas especiais. Os custos para corrigir ou reparar o processo irão depender do tipo de causa especial presente. Finalmente, os custos associados com a produção de não conformes consistem nos custos de falhas, isto é, os custos de retrabalho ou sucata por causas internas, e os custos por reposição ou reparos de itens cobertos por garantia no caso de falhas externas. Os modelos econômicos são normalmente formulados relacionando a função total de custos que expressa o relacionamento entre os parâmetros do gráfico de controle e os três tipos de custos.

Existem pontos fracos em ambas as abordagens. O projeto estatístico não leva em consideração explicitamente os fatores econômicos. A escolha dos parâmetros dos gráficos de controle, nesta abordagem, não incorpora os custos relacionados com a operacionalização dos gráficos. Por outro lado o projeto econômico não considera o desempenho estatístico dos gráficos de controle (Montgomery et al, 1995).

O projeto estatístico é mais apropriado quando o intervalo entre as amostras é pré-determinado e o desvio médio do valor nominal estabelecido deva ser detectado independente de sua frequência. O projeto estatístico é, em muitos casos indicado, uma

vez que o projeto econômico não leva em consideração o fato de que um excessivo número de falsos alarmes introduz uma variabilidade extra no processo e destrói a confiança no procedimento de controle. O projeto estatístico, aqui apresentado, não é o ótimo em termos de minimizar os custos totais, mas é mais simples de ser utilizado.

3.4.2 Os subgrupos racionais

Segundo Montgomery (1991) a idéia fundamental no uso dos gráficos de controle é a coleta de amostras, a ser feita segundo o conceito de *Subgrupos Racionais*, apresentado por Shewhart. Cada subgrupo ou amostra deve ser selecionado de maneira que, se causas especiais estiverem presentes, a chance de se obter diferenças entre subgrupos será maximizada. O subgrupo é formado de maneira que a variação presente entre os subgrupos, ou seja de um subgrupo para outro, seja maior do que a variação encontrada dentro de um subgrupo.

Em ambientes de produção, a ordem com que os produtos são manipulados é uma base lógica para a formação de subgrupos. Neste caso, causas especiais que aconteçam ao longo do tempo poderão ser detectadas.

Dois princípios são utilizados na definição dos subgrupos racionais. O primeiro é de que cada amostra consiste de unidades que são produzidas praticamente ao mesmo tempo, ou o mais próximo possível. Este princípio é utilizado com o propósito de que o gráfico de controle detecte desvios, minimizando a chance de variabilidade devido a causas especiais dentro da amostra. O segundo princípio é o de que a amostra consiste de unidades que são representativas de todas as unidades que foram produzidas desde que a última amostra foi coletada.

Essencialmente um subgrupo é uma amostra aleatória de todos os resultados possíveis do processo naquele intervalo de amostragem. A escolha de um subgrupo racional é muito importante e a seleção adequada das amostras requer consideração cuidadosa do processo, com o objetivo de obter o máximo de informação da análise dos gráficos de controle.

3.5 Os gráficos de Shewhart

3.5.1 Princípios Básicos

Os Gráficos de Controle baseados nas premissas apresentadas por Shewhart têm como característica uma Linha Central (LC) e duas outras linhas horizontais: o Limite Superior de Controle (LSC) e o Limite Inferior de Controle (LIC). Estas linhas estão geralmente posicionadas simetricamente à linha central. O gráfico possui um eixo vertical onde se representa estatística w , e um eixo horizontal onde se representa a sequência no tempo ou numa progressão do número de unidades produzidas, em que os pontos são marcados ou plotados. A Figura 3.3 mostra um exemplo de um gráfico de Shewhart. Os limites superior e inferior e a linha central devem ser estimados quando o processo estiver operando sem a presença de causas especiais de variação.

A linha central representa o valor médio da característica amostrada, correspondendo ao estado sob controle, onde apenas as causas comuns acontecem. Os limites de controle são escolhidos de maneira que, se o processo estiver sob controle, quase todos os pontos plotados se encontrarão entre estes limites.

Normalmente conectam-se os pontos plotados no gráfico de controle com uma linha, possibilitando a visualização de como a sequência dos pontos plotados comporta-se ao longo do tempo.

A construção geral dos gráficos de Shewhart é feita com os limites de controle estabelecidos simetricamente a uma distância de 3 desvios padrão (3-sigma) da linha central. A escolha do valor 3-sigma, feita por Shewhart, não foi uma escolha arbitrária nem acidental. Foi uma escolha deliberada, feita porque 3-sigma proporcionava a devida sensibilidade sem causar um número inaceitável de falsos alarmes (Wheeler, 1995). Porém há situações em que o limite inferior pode assumir o valor zero. É o caso dos gráficos de controle por atributos em que se esse LIC fosse um valor negativo, assumiria o valor zero.

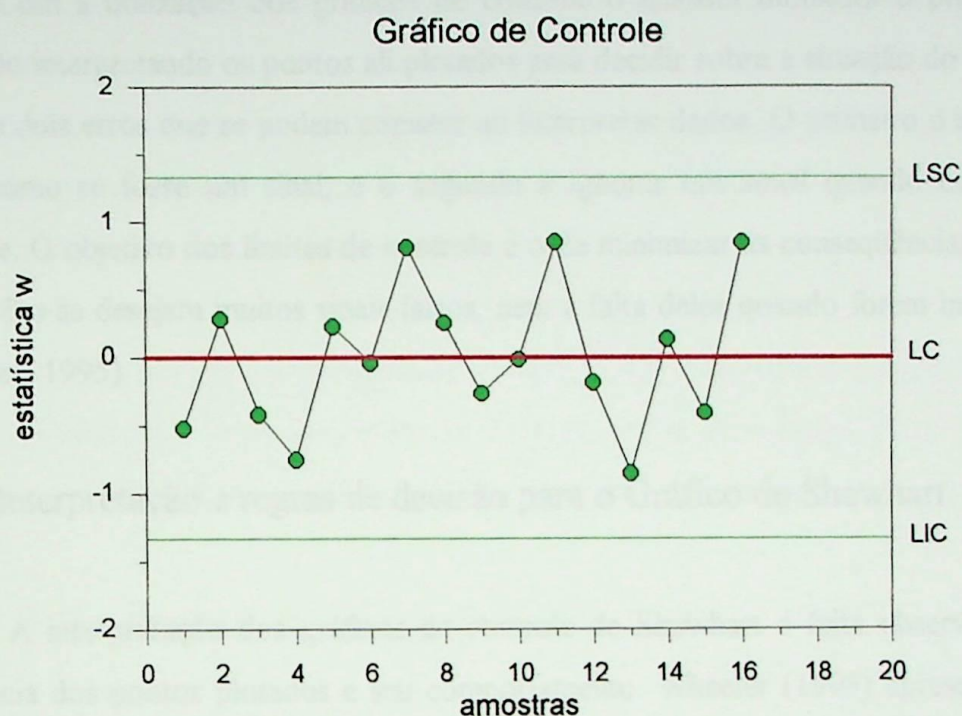


Fig. 3.3 Exemplo de gráfico de controle de Shewhart. As linhas em verde correspondem aos limites de controle superior (LSC) e inferior (LIC) e a linha vermelha corresponde à linha central (LC).

3.5.2 Modelo geral dos gráficos de Shewhart

O modelo geral para os Gráficos de Controle de Shewhart é essencialmente a construção de um gráfico onde seja plotada a estatística w . Esta estatística será a medida ou o cálculo de alguma característica da qualidade de interesse. Serão coletadas amostras do processo em períodos de tempo conforme estabelecidas pelos subgrupos racionais e a estatística w será obtida de cada uma das amostras. Os valores de w serão plotados no gráfico. Seja a média de w , μ_w , e o desvio padrão, σ_w . Desta maneira a Linha Central (LC), o Limite Superior de Controle (LSC) e o Limite Inferior de Controle (LIC) do gráfico serão tais que

$$\text{LSC} = \mu_w + 3\sigma_w \quad 3.2$$

$$\text{LC} = \mu_w \quad 3.3$$

$$\text{LIC} = \mu_w - 3\sigma_w \quad 3.4$$

Com a utilização dos gráficos de controle o analista monitora o processo de produção interpretando os pontos ali plotados para decidir sobre a situação do processo. Existem dois erros que se podem cometer ao interpretar dados. O primeiro é interpretar *ruído* como se fosse um sinal, e o segundo é ignorar um *sinal* quando este estiver presente. O objetivo dos limites de controle é o de minimizar as consequências dos dois erros. Não se desejam muitos sinais falsos, nem a falta deles quando forem importantes (Wheeler, 1995).

3.5.3 Interpretação e regras de decisão para o Gráfico de Shewhart

A interpretação dos gráficos de controle de Shewhart é feita observando-se a sequência dos pontos plotados e seu comportamento. Wheeler (1995) apresenta o que Shewhart definiu como critérios para detectar falta de controle, conhecidas como as *regras de decisão*.

A *regra básica*, ou regra de decisão um, utilizada por Shewhart é de que uma falta de controle é indicada quando um ponto for plotado fora dos limites de controle. Esta é uma regra de fácil compreensão e utilização, uma vez que é prática do ponto de vista da comunicação entre aqueles que utilizam e analisam os gráficos de controle. Mas não é suficiente para avaliar o estado do processo. Assim recorre-se à regras adicionais baseadas em um 'run-test', isto é, na sequência de pontos plotados no gráfico.

A *regra de decisão dois* é a de que uma falta de controle é indicada quando dois de três pontos consecutivos estão no mesmo lado da linha central e a mais de dois desvios padrão da linha central. Esta regra é tida como um 'run-test' ou teste de sequência, uma vez que utiliza mais do que um ponto do gráfico.

A *regra de decisão três* é a de que uma falta de controle é indicada quando quatro de cinco pontos sucessivos estão no mesmo lado da linha central e a mais de um desvio padrão da linha central.

A *regra de decisão quatro* é a de que uma falta de controle é indicada quando oito valores sucessivos estão plotados no mesmo lado da linha central. Por sua simplicidade, esta regra é normalmente escolhida como regra adicional à regra de decisão um. Existem variantes desta regra, como a regra “sete pontos numa sequência”, porém, a regra como aqui apresentada, é mais cautelosa (Wheeler, 1995).

A utilização das regras adicionais a regra básica determina se o processo está ou não sob controle porém incorporando à análise uma dificuldade extra e portanto perdendo na simplicidade e facilidade do uso da regra básica isoladamente.

3.6 A Função Poder para os gráficos de controle

Os procedimentos estatísticos utilizados para monitorar um processo reagem de maneiras diferentes quando da presença de um desvio em seu valor nominal. Ou seja, o procedimento pode, ou não, sinalizar rapidamente um desvio do valor nominal. O analista projeta o gráfico de controle definindo, entre outros aspectos, o desvio do valor nominal que deseja detectar. É preciso comparar os procedimentos e decidir-se por um que o satisfaça em termos do número médio de amostras coletadas até que seja dado um sinal de que o processo está fora de controle. Uma maneira de comparar os procedimentos é utilizar um mesmo conjunto de dados para alguns procedimentos e comparar os resultados obtidos. Porém este procedimento não é geral e a comparação pode ser afetada por características particulares do conjunto de dados utilizado.

O uso de modelos probabilísticos permite a comparação entre os procedimentos de controle de maneira genérica, porém faz pré-suposições que podem ser não verificáveis ou irreais, ou ambas. Desta maneira Wheeler (1995) apresenta uma abordagem probabilística como uma ferramenta para comparar os gráficos de controle. O gráfico de controle é visto como uma sequência de testes de hipóteses. Esta maneira de ver os gráficos de controle permite uma comparação entre as técnicas utilizadas para analisar os dados. A comparação entre os gráficos de controle será conduzida com base no *Poder* de cada gráfico de controle.

Nos gráficos de controle em que se monitora o nível médio do processo, ou seja a medida de tendência central, o *Poder* do gráfico é definido *como a probabilidade teórica com que o gráfico irá detectar um desvio médio particular*. Sendo o Poder do gráfico função do desvio do valor nominal, para desvios diferentes tem-se valores do poder também diferentes. Pode-se dizer que esse Poder é o poder discriminatório do teste, isto é, a capacidade do teste reconhecer ou discriminar diferenças entre o valor nominal original (segundo a hipótese nula, H_0) e o valor esperado da distribuição em presença do desvio (isto é, segundo a hipótese H_1). A Função Poder é a curva relacionando os desvios do valor nominal e o Poder do gráfico (Wheeler, 1995).

3.6.1 O cálculo da Função Poder para as regras de decisão dos gráficos de Shewhart

A presença de pelo menos uma das quatro situações descritas nas regras de decisão apresentadas na Seção 3.5.3 indica que o processo está fora de controle e que uma ação corretiva deva ser realizada no processo para que então volte a situação sob controle.

A Figura 3.4 mostra um desvio ocorrido no processo, representado pela linha azul o qual poderia ter ocorrido em qualquer outra posição. O desvio, a linha central e os limites são os mesmos para cada uma das quatro partes em que a Figura 3.4 foi dividida. Os limites de controle superior e inferior, denominados LSC e LIC, são obtidos sob a hipótese nula, ou seja, quando o processo esteve atuando na ausência de causas especiais.

Em cada uma das partes (a, b, c e d) da Figura 3.4 utiliza-se um conjunto de regras de decisão diferente, como apresentadas na Seção 3.5.3 e indica-se a probabilidade para as zonas delimitadas em função das regras de decisão utilizadas.

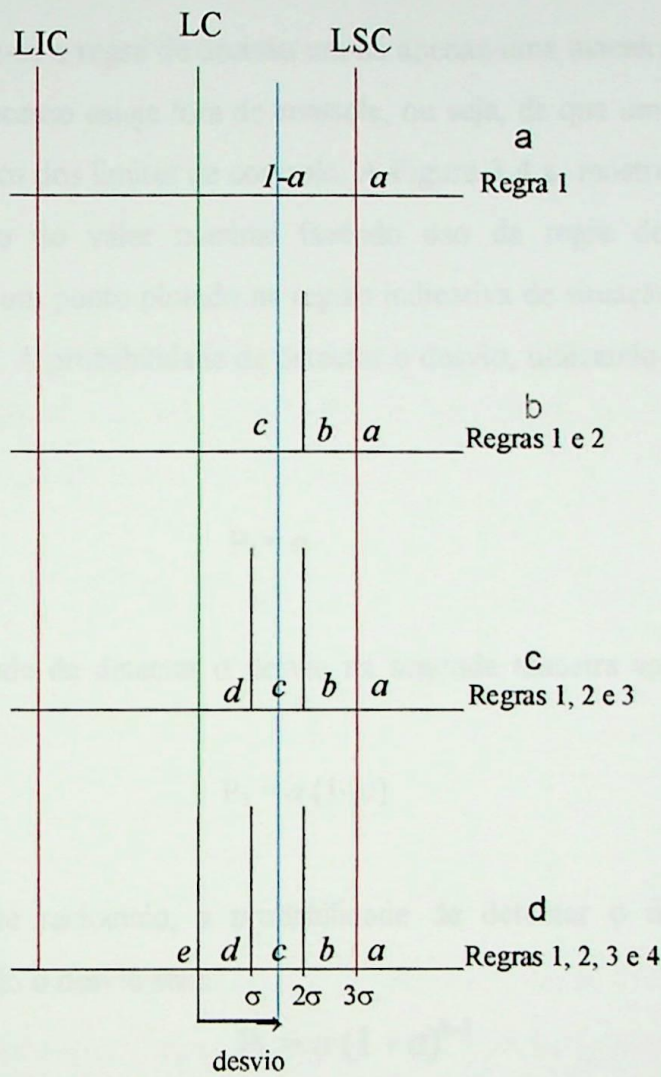


Fig. 3.4 Representação das probabilidades entre os limites impostos pelas regras de decisão utilizadas na interpretação de gráficos de controle

Fonte: Adaptado de Wheeler (1995), p. 213-219

As probabilidades a , b , c , d e e são obtidas de uma distribuição de probabilidades adequada. Utilizando uma *distribuição de probabilidades normal* padronizada Z e expressando o desvio do valor nominal em unidades de erro padrão δ , tal que $Z+\delta \sim N(0,1)$, as probabilidades a , b , c , d e e são tais que

$$\text{Probabilidade } (Z+\delta > 3) = a \tag{3.5}$$

$$\text{Probabilidade } (2 < Z+\delta < 3) = b \tag{3.6}$$

$$\text{Probabilidade } (1 < Z+\delta < 2) = c \tag{3.7}$$

$$\text{Probabilidade } (0 < Z+\delta < 1) = d \tag{3.8}$$

$$e = 1 - a - b - c - d \tag{3.9}$$

Quando utiliza-se a regra de decisão um há apenas uma maneira para se detectar um sinal de que o processo esteja fora de controle, ou seja, de que um ponto tenha sido plotado além ou aquém dos limites de controle. A Figura 3.4.a mostra a probabilidades de detectar o desvio do valor nominal fazendo uso da regra de decisão um. A probabilidade de que um ponto plotado na região indicativa de situação fora de controle é representada por α . A probabilidade de detectar o desvio, utilizando-se apenas a regra de decisão um é

$$P_1 = \alpha \quad 3.10$$

A probabilidade de detectar o desvio na segunda amostra após ter ocorrido o desvio é

$$P_2 = \alpha (1 - \alpha) \quad 3.11$$

Seguindo este raciocínio, a probabilidade de detectar o desvio na k-ésima amostra após ocorrido o desvio será:

$$P_k = \alpha (1 - \alpha)^{k-1} \quad 3.12$$

A probabilidade de detectar um desvio em até k amostras após a sua ocorrência, utilizando-se apenas a regra de decisão 1 é dada por

$$\sum_{i=1}^k P_i = \sum_{i=1}^k \alpha (1 - \alpha)^{i-1} = 1 - (1 - \alpha)^k \quad 3.13$$

A Figura 3.4.b apresenta as probabilidades associadas a detectar um desvio do valor nominal utilizando-se as regras de decisão um e dois. Ou seja a inclusão da regra de que se pelo menos 2 entre 3 pontos sucessivos estão plotados do mesmo lado da LC e a mais de 2 desvios padrão da LC o processo estará fora de controle. A probabilidade de detectar o desvio na primeira amostra após sua ocorrência é $P_1 = \alpha$. Detectar o desvio na segunda amostra após ter ocorrido pode acontecer de duas maneiras: as duas amostras estão plotadas entre os limites de 2 e 3 desvios padrão, neste caso a probabilidade é igual a b^2 ou então a primeira amostra não foi plotada além dos limites de controle mas a

segunda sim, neste caso a probabilidade é igual a $a (b + c)$. A probabilidade de detectar o desvio na segunda amostra após ele ter ocorrido é

$$P_2 = b^2 + a (b + c) \tag{3.14}$$

Um desvio que seja detectado na terceira amostra após ocorrido o sinal pode acontecer de 5 maneiras que estão apresentadas na Tabela 3.1. As regiões com probabilidade a , b e c referem-se a Figura 3.4.b

1 º Ponto Plotado na região com probabilidade	2 º Ponto Plotado na região com probabilidade	3 º Ponto Plotado na região com probabilidade	Probabilidade de detectar na terceira amostra
c	b	a	abc
b	c	a	abc
c	b	b	b^2c
b	c	b	b^2c
c	c	a	ac^2

Tabela 3.1 Possibilidades de detectar um desvio na terceira amostra após a sua ocorrência utilizando as regras de decisão 1 e 2 para os gráficos de Shewhart

Assim a probabilidade de detectar um desvio do valor nominal em três amostras, após a sua ocorrência é

$$P_3 = 2 abc + 2 b^2c + ac^2 \tag{3.15}$$

Para o cálculo da probabilidade de detectar um desvio em k amostras utilizando-se as regras de decisão 1 e 2, não é possível escrever uma fórmula como no caso do uso apenas da regra de decisão 1. Wheeler (1995) apresenta as equações para as probabilidades de se detectar um desvio utilizando as regras 1 e 2 em até 10 amostras. As equações são:

$$P_4 = 3abc^2 + 2b^2c^2 + ac^3 \tag{3.16}$$

$$P_5 = ab^2c^2 + b^3c^2 + 4abc^3 + 2b^2c^3 + ac^4 \tag{3.17}$$

$$P_6 = 3ab^2c^3 + 3 b^3c^3 + 5abc^4 + 2b^2c^4 + ac^5 \tag{3.18}$$

$$P_7 = 6ab^2c^4 + 5b^3c^4 + 6abc^5 + 2b^2c^5 + ac^6 \quad 3.19$$

$$P_8 = ab^3c^4 + b^4c^4 + 10ab^2c^5 + 7b^3c^5 + 7abc^6 + 2b^2c^6 + ac^7 \quad 3.20$$

$$P_9 = 4ab^3c^5 + 4b^4c^5 + 15ab^2c^6 + 9b^3c^6 + 8abc^7 + 2b^2c^7 + ac^8 \quad 3.21$$

$$P_{10} = 11ab^3c^6 + 10b^4c^6 + 21ab^2c^7 + 10b^3c^7 + 8abc^8 + 2b^2c^8 + ac^9 \quad 3.22$$

Embora as equações tenham sido apresentadas para um intervalo de amostragem até dez amostras, é possível expandir este intervalo. Como pode ser visto, as equações para o cálculo da probabilidade de se detectar um desvio na k-ésima amostra refletem um aumento do número de possibilidades do arranjo de pontos plotado em função do número de amostras coletadas. Assim, utilizando-se as regras 1 e 2, a probabilidade de se detectar um desvio após, por exemplo, 6 amostras é calculada através de 14 possíveis maneiras dos pontos plotados estarem dispostos (Equação 3.18); em 7 amostras, a probabilidade é calculada com um conjunto de 20 possibilidades (Equação 3.19).

A Figura 3.4.c representa a probabilidade de detectar um desvio do valor nominal utilizando-se as regras 1, 2 e 3 e a Figura 3.4.d para as regras 1, 2, 3 e 4. Wheeler (1995) apresenta para cada uma destas combinações de regras de decisão as probabilidades de se detectar o desvio do valor nominal na amostra de número k, com k entre 1 e 10. A probabilidade de se detectar um desvio *em até* k amostras é dada pela soma de todas as probabilidades para se detectar o desvio exatamente na amostra i, com $i = 1 \dots k$.

3.7 O ARL - Sequência Média da Rodada

O desempenho de um gráfico de controle, pode ser avaliado, em parte, em termos da sensibilidade para detectar desvios na estatística que está sendo monitorada. Esta sensibilidade pode ser medida pelo número de amostras coletadas até que o gráfico sinalize a ocorrência de um desvio. Para cada amostra coletada, um ponto é plotado no gráfico de controle. O número de pontos até um sinal de fora de controle é uma variável aleatória, usualmente chamada *sequência da rodada* e o valor esperado desta variável aleatória é chamando de ARL – Average Run Length – ou Sequência Média da Rodada. O valor de ARL mede, em média, o número de amostras até que o gráfico de controle sinalize que o processo está fora de controle.

Este sinal tanto pode ser um falso alarme, como um sinal de que o processo realmente está fora de controle após um desvio médio do valor nominal.

O analista, em geral, não deseja que o procedimento de controle escolhido gere muitos falsos alarmes, portanto a estratégia utilizada no projeto de um gráfico de controle baseia-se na escolha de um valor de ARL *grande* quando o processo estiver sob controle. Este valor é representado por ARL $L(0)$ e indica em média o número de amostras coletadas até que ocorra um falso alarme.

De posse do valor de ARL $L(0)$, o analista deve projetar o gráfico de controle de modo que na presença do desvio δ do valor nominal que se deseja detectar, o gráfico de controle sinalize tal situação em um número médio de amostras *pequeno*. Este valor é representado por ARL $L(\delta)$ e indica em média o número de amostras coletadas até que seja sinalizada uma situação de fora de controle. Neste caso, a situação de fora de controle refere-se a um desvio δ do valor nominal.

3.7.1 O cálculo do valor de ARL

Wheeler (1995) apresenta a equação para o cálculo do valor de ARL. Em geral, o valor de ARL para um dado desvio pode ser encontrado calculando-se o somatório

$$ARL = \sum_{\text{todos os } k} k P_k \quad 3.23$$

em que P_k é a probabilidade de se detectar o desvio específico com o conjunto de regras de decisão específico.

Os valores de ARL $L(0)$ e os valores de ARL $L(\delta)$ em função do desvio δ que o analista deseja detectar, escolhido o conjunto de regras de decisão apropriado, podem ser encontrados em Wheeler (1995). O analista estabelece a taxa de falso alarme adequada ao processo monitorado e o número médio de amostras até que seja sinalizado o desvio, uma vez ocorrido.

A Figura 3.5 apresenta os valores de ARL para os gráficos de Shewhart com o uso das regras de decisão. A utilização dos conjuntos de regras de decisão com as regras 2; 4; e 2, 3, e 4 além da regra de decisão um dá ao gráfico de Shewhart maior sensibilidade para detectar o desvio do valor nominal.

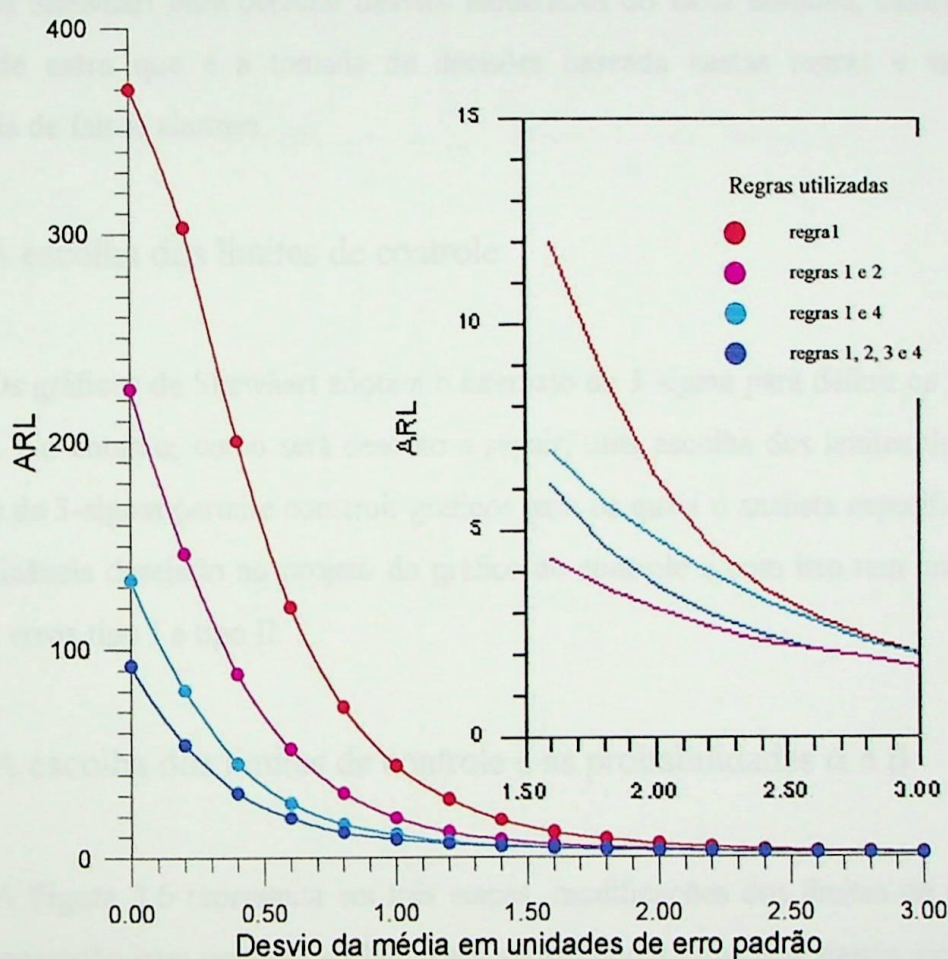


Fig. 3.5 Valores de ARL para os gráficos de Shewhart com o uso das regras de decisão

Para desvios acima de 1,5 erros padrão, a adição das regras de decisão não aumenta sobremaneira a sensibilidade do gráfico, porém para desvios menores a adição das regras de decisão melhora a sensibilidade em se detectar o desvio.

Por exemplo para um desvio de 0,8 erros padrão, com o uso somente da regra de decisão um, o valor de $ARL L(0.8)$ é 72, ao passo que com o uso das regras 1, 2, 3, e 4 o valor de ARL é 12 amostras. Ou seja o desvio $\delta = 0.8$ que somente com o uso da regra

de decisão um seria detectado em média em 72 amostras, com a inclusão das regras de decisão 2, 3 e 4 passa a ser detectado em média em 12 amostras.

A utilização das regras de decisão, se por um lado aumenta a sensibilidade do gráfico de Shewhart para detectar desvios moderados do valor nominal, incorpora uma dificuldade extra que é a tomada de decisões baseada nestas regras e aumenta e frequência de falsos alarmes.

3.8 A escolha dos limites de controle

Os gráficos de Shewhart adotam o intervalo de 3-sigma para definir os limites de controle. No entanto, como será descrito a seguir, uma escolha dos limites de controle diferente de 3-sigma permite construir gráficos para os quais o analista especifica o nível de significância desejado no projeto do gráfico de controle e com isto tem um controle sobre os erros tipo I e tipo II.

3.8.1 A escolha dos limites de controle e as probabilidades α e β

A Figura 3.6 representa em três etapas, modificações dos limites de controle e uma comparação com um teste de hipóteses, mostrando a influência destas modificações sobre a probabilidades dos erros tipo I e tipo II. Em *a* o processo tem os limites originais de controle traçados em verde. Em *b*, os limites de controle estão mais próximos da linha central e estão traçados em roxo e em *c*, os limites de controle estão além dos limites de controle originais e portanto mais afastados da linha central, em azul. Supondo que durante o processo ocorra um desvio do valor central μ_0 para um valor $\mu_1 > \mu_0$, os valores de α e β , isto é, as probabilidades de um erro tipo I e de um erro tipo II, mudarão com a escolha da proximidade dos limites de controle à linha central.

A etapa *c* da Figura 3.6 mostra que, afastando os limites de controle da linha central, diminui-se a probabilidade de ocorrência de um erro tipo I, ou seja o risco de um ponto ser plotado além ou aquém dos limites, indicando uma situação de fora de controle

quando nenhuma causa especial de fato tenha ocorrido. Entretanto afastar os limites de controle implica em aumentar a probabilidade de um erro tipo II, isto é, o risco de um ponto ser plotado entre os limites de controle (situação sob controle), enquanto o processo está realmente fora de controle.

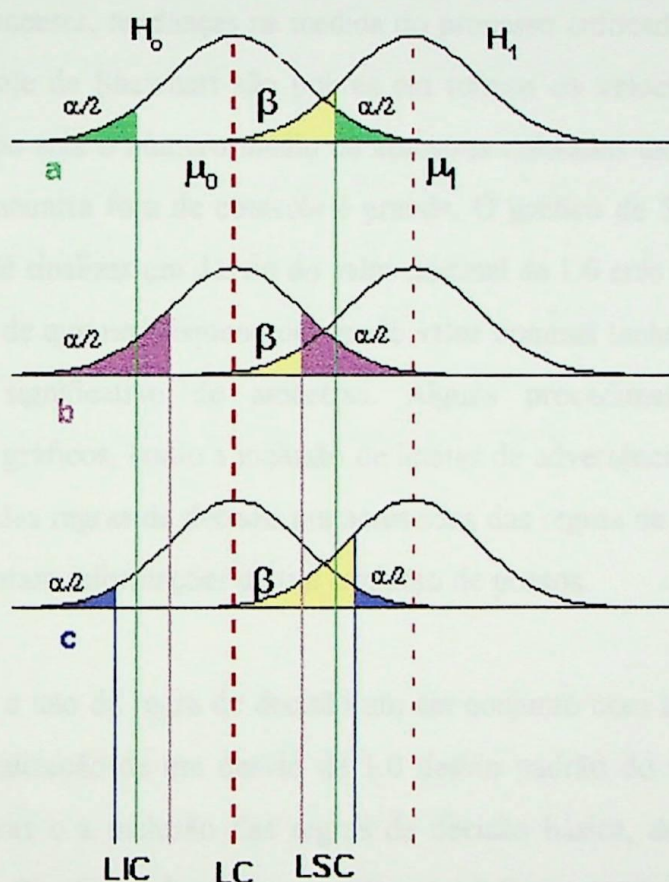


Fig. 3.6 Comparação entre os valores especificados para os limites de controle LIC e LSC e a probabilidade dos erros tipo I (α) e tipo II (β).

Se aproximamos os limites de controle da linha central, a probabilidade de um erro tipo I aumenta (o processo está sob controle, e o gráfico indica uma situação fora de controle) e a probabilidade de um erro tipo II diminui (o processo está fora de controle, e o gráfico de controle não sinaliza este estado). Esta situação está representada em *b* da Figura 3.6. A localização dos limites de controle dá ao gráfico de controle maior ou menor sensibilidade em detectar desvios do valor nominal.

3.9 Gráficos de Controle para pequenos desvios do valor nominal

Em muitas situações práticas ocorrem desvios moderados da média. Segundo Crowder et al. (1997) os gráficos de Shewhart têm uma inabilidade de responder a pequenas, mas permanentes, mudanças na medida do processo enfocado. Nesta situação os gráficos de controle de Shewhart são pobres em termos da velocidade com que o desvio é detectado, ou seja o número médio de amostras coletadas até que um sinal de que o processo se encontra fora de controle é grande. O gráfico de Shewhart leva em média 44 amostras até sinalizar um desvio do valor nominal de 1.0 erro padrão (Wheeler, 1995), assim, o sinal de que um pequeno desvio do valor nominal tenha ocorrido é dado após um número significativo de amostras. Alguns procedimentos podem ser incorporados a estes gráficos, como a inclusão de limites de advertência, ou os testes de sequência, ditados pelas regras de decisão um acrescidas das regras de decisão dois, três e quatro, que incorporam informações de um conjunto de pontos.

Por exemplo o uso da regra de decisão um em conjunto com a regra de decisão dois possibilita a sinalização de um desvio de 1.0 desvio padrão do valor nominal em média em 19 amostras e a inclusão das regras de decisão básica, dois, três e quatro possibilita a sinalização deste desvio em média em 8.8 amostras (Wheeler, 1995). Entretanto, o uso destas regras adicionais diminuem a simplicidade do uso e de interpretação destes gráficos.

Montgomery (1991) apresenta como desvantagem dos gráficos de Shewhart o fato de utilizarem a informação do processo contida somente no último ponto plotado e ignorarem a informação dada pela sequência de pontos. Esta característica faz com que o gráfico de Shewhart seja insensível a pequenos e permanentes desvios no processo, da ordem de até 1,5 desvios padrão.

A fim de se detectar pequenos desvios foram desenvolvidos outros modelos de gráficos de controle, como os gráficos EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) e CuSum (Cumulative Sum). Estes gráficos guardam informações das amostras

anteriores e da mais recente e, com isso, detectam desvios moderados do valor nominal com um número médio de amostras menor do que o faria o gráfico de Shewhart .

No procedimento de detectar pequenos desvios do valor nominal, os múltiplos dos limites de controle para os gráficos não serão mais fixados em 3-sigma e serão estabelecidos de acordo com cada modelo utilizado e do desvio a ser detectado.

Crowder et al. (1997) apresentam duas abordagens alternativas para se detectar a existência de um pequeno desvio do valor nominal no processo. Em uma delas *modifica-se o intervalo de amostragem* e na outra *acumulam-se informações das amostras coletadas sucessivamente*. Costa (1997) apresenta um procedimento no qual se varia tanto o *intervalo de amostragem*, quanto o *tamanho da amostra*.

3.9.1 Intervalo de amostragem variável

Segundo Reynolds (1996) os gráficos de controle com Intervalo de Amostragem Variável (Variable Sampling Interval, VSI) baseiam-se no fato de que a resposta para um desvio no processo depende do número de amostras e não do período de tempo decorrido entre duas coletas. Mesmo que o número de amostras necessárias para se detectar o desvio mantenha-se o mesmo, a diminuição do intervalo de amostragem faz com que o desvio seja detectado num menor período de tempo.

Os gráficos com Intervalo de Amostragem Variável apresentam uma região central e duas regiões de advertência. Se um ponto for plotado na região central, é razoável que se possa esperar mais tempo até a próxima amostra, pois não há evidências de que o processo precise de ajuste. Se, no entanto, o ponto for plotado na região de advertência é razoável que se espere um menor tempo para se amostrar novamente, pois o processo pode estar necessitando de ajuste.

3.9.2 Variação do tamanho da amostra e do intervalo de amostragem

No procedimento de Costa (1997) o intervalo de amostragem e o tamanho da amostra variam. Estes gráficos são projetados com limites de advertência e limites de ação. Assim a busca por causas especiais de variação será iniciada uma vez que se tenha um ponto plotado além dos limites de ação. A posição de cada ponto amostral estabelece o tamanho da próxima amostra e o momento em que deve ser coletada. Se um ponto amostral for plotado entre os limites de advertência e de ação, a próxima amostra deve ser maior e deverá ser coletada num período de tempo menor. Por outro lado se o ponto amostral for plotado próximo da região central, então a próxima amostra poderá ser menor e ser coletada num período de tempo maior.

3.9.3 Informações amostrais acumuladas sucessivamente

A maneira tradicional de se detectar uma situação fora de controle e, portanto, um possível desvio do valor nominal é o de se utilizar critérios de tendências, ou ‘run-test’, no contexto dos gráficos de Shewhart. Estes gráficos não acumulam as informações das amostras anteriores, mas através dos testes de sequência fazem uso dos valores amostrais plotados sucessivamente para uma tomada de decisão. A dificuldade imposta pelas regras adicionais dos gráficos de Shewhart e sua inabilidade de detectar desvios moderados, na falta delas, fez com que se desenvolvessem modelos de gráficos de controle capazes de detectar tais desvios e que fossem fáceis de se utilizar.

Assim, o procedimento de *acumular informações das amostras coletadas sucessivamente* permite detectar mudanças permanentes no processo monitorado. Uma maneira de se utilizar a acumulação de informações incorporadas na estatística analisada é o gráfico de controle de Somas Acumuladas (Cumulative Sum, ou abreviadamente, CuSum). Neste gráfico plota-se a soma acumulada dos desvios do valor nominal de cada amostra (Woodall, 1986; Lucas, 1976). Este gráfico é capaz de detectar pequenas mudanças na distribuição da característica da qualidade, manter um controle apertado sobre o processo de produção e dar uma estimativa do valor do novo nível do processo

ou da nova média. Um desvio no valor nominal do processo é indicado com uma tendência crescente ou decrescente dos pontos plotados. Para analisar as tendências utiliza-se uma Máscara V sobre o gráfico (Figura 3.7), que em linhas gerais cumpre o papel de limite de controle para o gráfico CuSum. Pode-se ainda utilizar um algoritmo de soma acumulada e neste caso não é necessário o gráfico CuSum. A função da Máscara V é desempenhar a função de um *valor de referência*, com a qual se decide sobre a situação do processo.

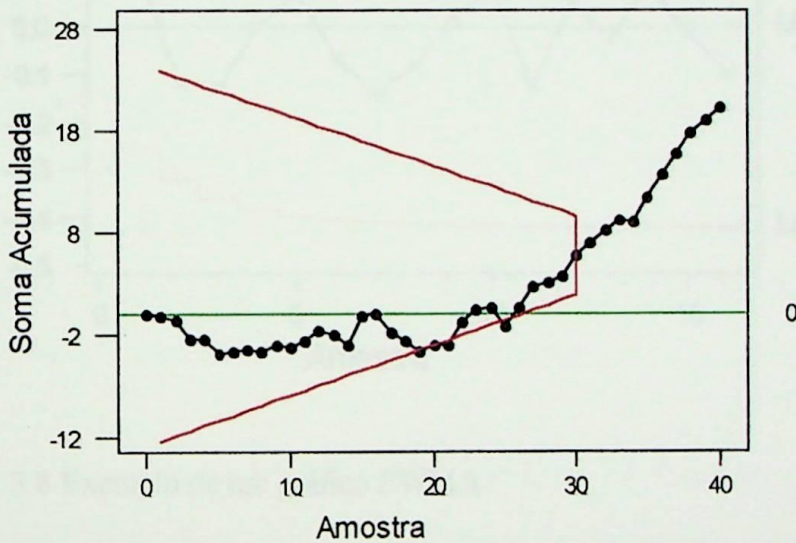


Fig. 3.7 Exemplo de um gráfico CuSum com a utilização da Máscara V.

Lucas (1985) apresenta o gráfico CuSum para atributos, como por exemplo, o número de defeitos por unidades ou a ocorrência de acidentes. Reynolds, Amim e Arnold (1990) apresentam o gráfico CuSum para intervalos de amostragem variável, e neste caso fazem uso da modificação do intervalo entre amostras e a da acumulação sucessiva de informações amostrais.

O gráfico de controle EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) acumula informações sucessivas ponderando as amostras prévias e a mais recente. A estatística plotada é obtida com o parâmetro que pondera as amostras anteriores. Este parâmetro é a constante de suavização λ que pode ser entendida como a memória do gráfico na ponderação das amostras anteriores. O peso dado às amostras é

gradativamente menor, assim as mais remotas têm peso menor do que as mais recentes. O gráfico EWMA (Figura 3.8) é um modelo de série temporal e pode ser utilizado para previsões e para monitorar o processo (Lucas e Saccucci, 1990).

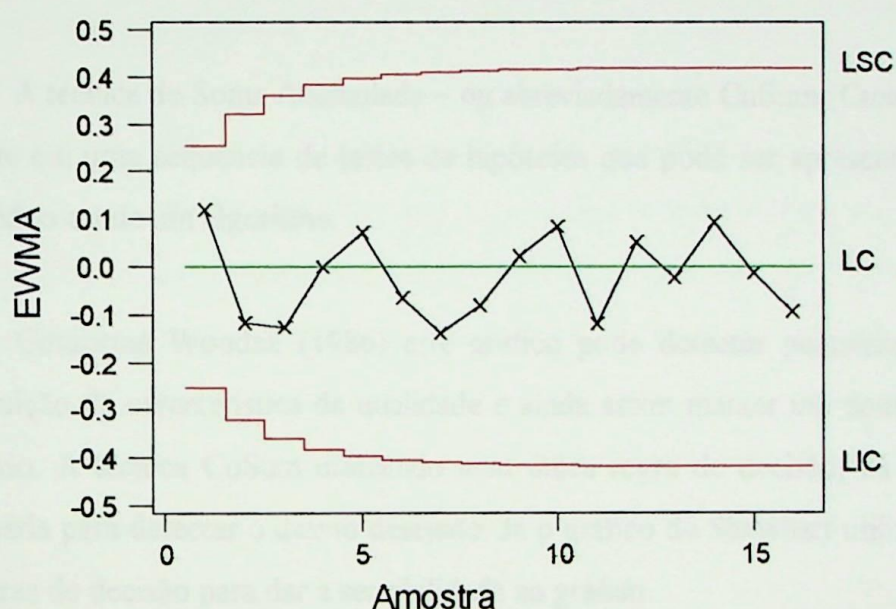


Fig. 3.8 Exemplo de um gráfico EWMA

Prabhu e Runger (1997) apresentam o gráfico de controle EWMA multivariado, utilizado quando várias variáveis devem ser monitoradas no processo. Reynolds (1996) apresenta o gráfico EWMA associado ao gráfico de Shewhart para intervalo de amostragem variável, mas com amostragem em tempos fixados previamente. Nesta modificação, as amostras são sempre coletadas em períodos de tempo fixos, igualmente espaçados. Entretanto, amostras adicionais podem ser coletadas todas as vezes que haja alguma indicação de mudanças no processo e necessidade de ajuste.

Os gráficos CuSum e EWMA e seus respectivos modelos são apresentados nos capítulos seguintes.

CAPÍTULO 4

SOMA ACUMULADA

4.1 Introdução

A técnica de Soma Acumulada – ou abreviadamente CuSum (Cumulative Sum) – consiste em uma seqüência de testes de hipóteses que pode ser apresentada através ou um gráfico ou de um algoritmo.

Conforme Woodall (1986) este gráfico pode detectar pequenas mudanças na distribuição da característica da qualidade e ainda assim manter um controle seguro do processo. A técnica CuSum utilizando *uma* única regra de decisão, dá a sensibilidade necessária para detectar o desvio desejado. Já o gráfico de Shewhart utiliza um *conjunto* de regras de decisão para dar a sensibilidade ao gráfico.

As regras de decisão utilizadas com os gráficos de Shewhart não são simples de serem utilizadas, exigindo do usuário conhecimento e segurança na tomada de decisão, qual seja afirmar que o processo está ou não sob controle e tomar uma atitude corretiva caso esteja fora de controle. Já a simplicidade do uso de limites de controle e uma regra única permite uma decisão rápida e segura. Assim, o operador de um posto de trabalho fica mais confiante em parar o processo para um ajuste ou outra atitude corretiva, após um ponto plotado fora dos limites de controle, do que se tiver que analisar as tendências ou seqüências dos pontos plotados e então tomar uma decisão

O procedimento de soma acumulada proporciona um controle mais rigoroso do processo (Lucas, 1985), o que permite ao analista dar mais ênfase em mantê-lo centrado em seu valor nominal. O seu uso mais comum é para controlar a qualidade de um processo e mantê-lo no seu valor nominal (Lucas, 1976). Se for dado um sinal de que o processo esteja fora de controle, uma ação deverá ser tomada para evitar a produção de itens não-conformes.

A técnica de Soma Acumulada pode ser utilizada tanto para observações individuais como para observações amostrais. No caso de observações individuais, a estatística utilizada será *a soma acumulada dos desvios de cada valor individual com relação à média* dada pela hipótese que está sendo testada. No caso das amostras de tamanho n , $n > 1$, esta estatística será *a soma acumulada dos desvios da média amostral com relação ao valor nominal*.

Além dos gráficos cuja estatística é a média amostral ou o valor individual da observação, Lucas (1985) apresenta a soma acumulada para *atributos* e Johnson e Leone (1962a, 1962b, 1962c) apresentam CuSum para outras estatísticas amostrais tais como a *variabilidade* do processo (variância e amplitude amostrais), o número de *unidades defeituosas*, a *fração defeituosa* e o *número de defeitos*. Porém, estas são estatísticas pouco utilizadas para a análise através da estatística Soma Acumulada, de modo que, usualmente, utiliza-se CuSum para a média amostral e o valor individual.

4.2 O gráfico de Soma Acumulada

O gráfico CuSum acumula informações das amostras do processo de produção ponderando-as igualmente, isto é, todas as amostras têm o mesmo peso. O procedimento para utilização do gráfico de controle de Soma Acumulada baseia-se na coleta sucessiva de amostras de tamanho n da qual é obtida a estatística Soma Acumulada. O gráfico e o algoritmo de Soma Acumulada aqui apresentados utilizarão as observações individuais ou as médias amostrais.

4.2.1 A estatística Soma Acumulada

A técnica de Soma Acumulada prevê que o analista estabeleça previamente a hipótese que irá testar, ou seja, ele deverá conhecer o valor nominal μ_0 que os dados do processo deveriam ter. Os gráficos de Soma Acumulada serão afetados por esta hipótese, conforme mostra a seguir a Equação 4.1 e, portanto, é importante que este valor seja representativo do processo analisado.

O procedimento começa propriamente com o cálculo dos desvios do valor nominal, isto é, a diferença entre o valor observado (ou a média amostral) e o valor nominal μ_0 . De posse deste desvio, inicializa-se a Soma Acumulada. A Soma Acumulada S_i para o i -ésimo período é a soma de todos os desvios do valor nominal desde o período 1 até o período i , dada por

$$S_i = \sum_{j=1}^i (x_j - \mu_0) = (x_i - \mu_0) + S_{i-1} \quad 4.1$$

O valor inicial S_0 no procedimento padrão é zero. Para aumentar a sensibilidade do gráfico CuSum, Lucas e Crosier (1982) apresentam um procedimento de inicialização da Soma Acumulada com um valor diferente de zero. Este procedimento, conhecido como FIR – Fast Initial Response – é apresentado na Seção 4.5.

4.2.2 A Máscara V

É necessário ter uma maneira conclusiva para estabelecer se o processo está fora de controle ou não. Se o processo está sob controle, ou seja, se varia aleatoriamente em torno do valor nominal μ_0 , será observada uma tendência horizontal, em torno deste valor. Ou seja, os desvios positivos do valor nominal são compensados por desvios negativos do valor nominal. Entretanto se a média da estatística monitorada desvia-se para um valor μ_1 , $\mu_1 > \mu_0$, observa-se uma tendência crescente no gráfico CuSum, indicando a ocorrência de um desvio positivo do valor nominal. Se, por outro lado, a média da estatística monitorada desvia-se para um valor μ_1 , $\mu_1 < \mu_0$, observa-se uma tendência decrescente no gráfico CuSum, indicando a ocorrência de um desvio negativo do valor nominal. No entanto, avaliar a tendência dos pontos de maneira visual não é um procedimento bem definido; deve-se, portanto, estabelecer limites para estas tendências. Uma maneira de se estabelecer tais limites é utilizar a Máscara V sobre o gráfico CuSum.

O modelo da Máscara V usada com o gráfico CuSum pode ser visto na Figura 4.1. Os pontos plotados na Figura 4.1 representam a estatística soma acumulada.

As amostras sucessivas são plotadas no eixo das abscissas e a Soma Acumulada é plotada no eixo das ordenadas.

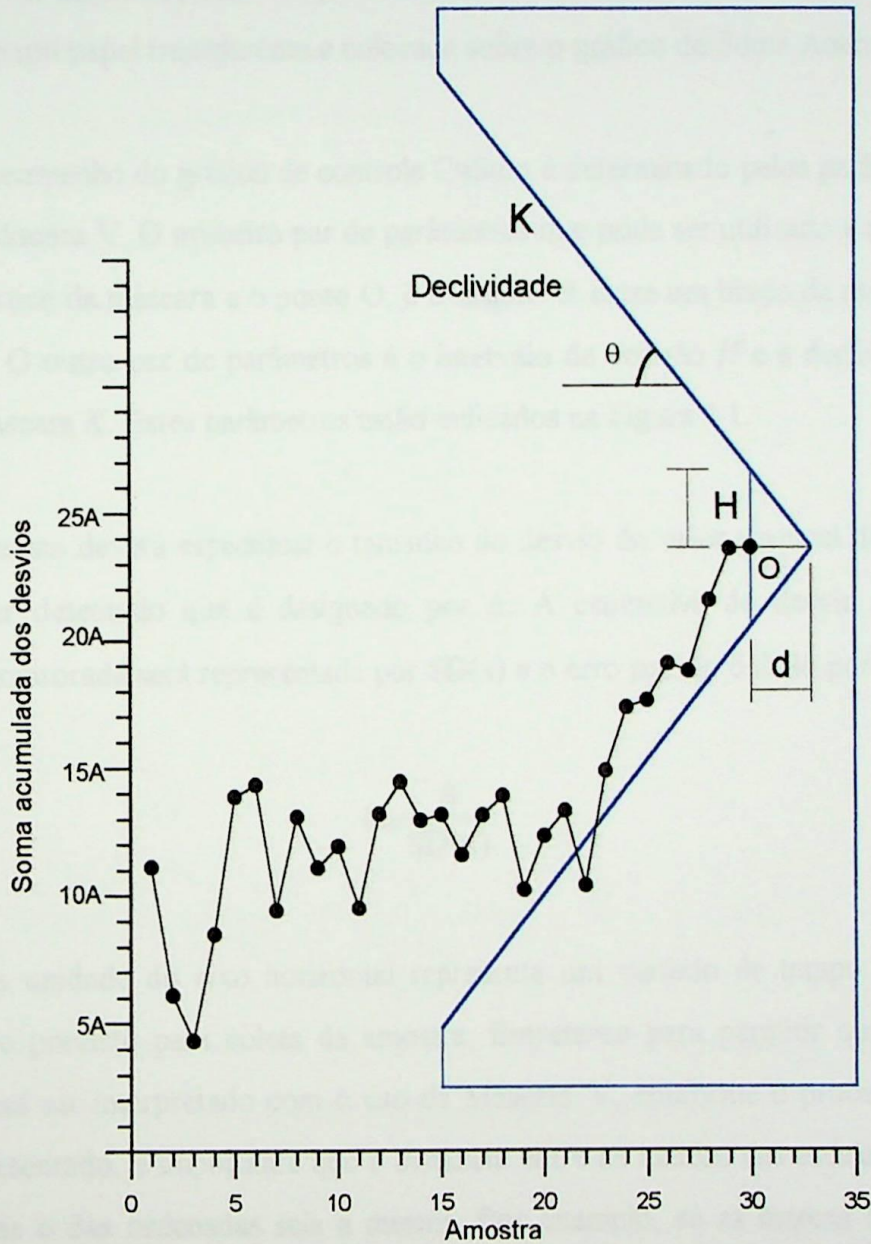


Fig. 4.1 O gráfico de Soma Acumulada, a Máscara V (em azul) e a escala A.

Fonte: Adaptado de Montgomery (1991), p.283.

A Máscara V é uma moldura visual que desempenha papel semelhante aos limites de controle nos gráficos de controle de Shewhart. A cada novo ponto no gráfico, *esta moldura é deslocada de modo que o ponto O da máscara V coincida com o ponto plotado* (Lucas, 1973). A *linha de direção* da Máscara V, ou seja a linha que vai do ponto O até o vértice, deve ser posicionada paralelamente ao eixo das abscissas.

A máscara V indicará um estado de fora de controle quando um ponto tiver sido plotado além ou aquém de seus braços. Visto desta maneira, esta máscara V pode ser desenhada em um papel transparente e colocada sobre o gráfico de Soma Acumulada.

O desempenho do gráfico de controle CuSum é determinado pelos parâmetros de projeto da Máscara V . O primeiro par de parâmetros que pode ser utilizado é a distância d , entre o vértice da máscara e o ponto O , e o ângulo θ , entre um braço da máscara V e a horizontal. O outro par de parâmetros é o intervalo de decisão H e a declividade dos braços da máscara K . Estes parâmetros estão indicados na Figura 4.1.

O analista deverá especificar o tamanho do desvio do valor nominal do processo que deve ser detectado que é designado por Δ . A estimativa do desvio padrão da estatística monitorada será representada por $SD(x)$ e o erro padrão δ dado por

$$\delta = \frac{\Delta}{SD(x)} \quad 4.2$$

Cada unidade do eixo horizontal representa um período de tempo demarcado pelo período previsto para coleta da amostra. Entretanto para permitir que o gráfico CuSum possa ser interpretado com o uso da Máscara V , conforme o procedimento de projeto apresentado, é importante que a distância entre as marcas das escalas dos eixos das abscissas e das ordenadas seja a mesma. Por exemplo, se as marcas do eixo das abscissas estiverem espaçadas de 2 cm, este deve ser o espaçamento entre as marcas do eixo das ordenadas. O espaçamento entre as marcas verticais será a escala A do gráfico. O passo seguinte é estabelecer o valor da medida representada por cada marca, ou seja, a escala A utilizada no eixo vertical. Montgomery (1991) recomenda que este valor deva ser escolhido tal que

$$1.0 \times SD(x) \leq A \leq 2.0 \times SD(x) \quad 4.3$$

O valor A escolhido deve permitir a construção de uma escala de leitura simples, entretanto o valor de $A = 2.0 \text{ SD}(x)$ tem sido recomendado (Lucas, 1976). Na escala da Figura 4.1, a cada 5 unidades do eixo das abscissas correspondem $5A$ unidades no eixo das ordenadas. A declividade K da máscara V é normalmente dada como a metade do desvio Δ , podendo assumir outros valores.

Estabelecido o desvio Δ que se deseja detectar, o fator de escala A e a declividade K da máscara V , o ângulo θ que define a semi-abertura da máscara V é dado por (Ewan, 1963)

$$\theta = \arctan\left(\frac{K}{A}\right) \quad 4.4$$

Para uma declividade $K = \Delta / 2$, o ângulo θ é tal que

$$\theta = \arctan\left(\frac{\Delta}{2A}\right)$$

A distância d entre o vértice da máscara V e o ponto O é função das probabilidades dos erros tipo I e tipo II para uma única amostra, representadas por α e β respectivamente e que devem ser estabelecidas a priori. No Apêndice 1 é apresentada a dedução da Equação 4.5 para a obtenção da distância d , dada por

$$d = \left(\frac{2}{\delta^2}\right) \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) \quad 4.5$$

Se a probabilidade de um erro tipo II for pequena, a Equação 4.5 pode ser expressa como

$$d = -\left(\frac{2}{\delta^2}\right) \ln \alpha \quad 4.6$$

O analista terá escolhido previamente o tamanho da amostra que utilizará para o monitoramento do processo, o desvio Δ que deseja detectar, assim como a probabilidade de um erro tipo I, ou seja o risco do produtor. Uma vez conhecidos os valores de n (tamanho da amostra), Δ (desvio entre o valor nominal do processo e o valor médio em que o processo está atuando) e α (probabilidade de um erro tipo I), a probabilidade de um erro tipo II, ou seja β , pode ser obtida através de uma curva característica de operação (CCO) (Costa Neto, 1977).

Montgomery (1991) apresenta ainda o projeto da Máscara V a partir dos parâmetros H e K . H é o *intervalo de decisão* do procedimento de Soma Acumulada e é dado pela metade da altura da abertura da máscara sobre o ponto O e h é este intervalo de decisão de normalizado, ou seja expresso em múltiplos do desvio padrão $SD(x)$ da estatística amostral. K é a *declividade* dos braços da Máscara V, também chamado de *valor de referência* no algoritmo de Soma Acumulada e k é o valor de referência normalizado.

O intervalo de decisão H é tal que

$$H = Ad \tan \theta \quad 4.7$$

A declividade K da máscara é estabelecida como

$$K = A \tan \theta \quad 4.8$$

Para um dado valor de ARL $L(0)$, a detecção mais rápida do desvio é obtida quando K é aproximadamente $\Delta / 2$ (Lucas, 1976). Outros valores para a declividade podem ser escolhidos dando maior ou menor sensibilidade ao procedimento de somas acumuladas.

O valor de referência H e a declividade K da máscara normalizados são dados por

4.3 O Algoritmo de Soma Acumulada

$$h = \frac{H}{SD(x)} \quad 4.9$$

$$k = \frac{K}{SD(x)} \quad 4.10$$

4.2.3 Estimativa do valor médio do processo após o desvio

Um ponto plotado além dos braços da Máscara V sinaliza que o processo está fora de controle. Um sinal de fora de controle dado na i -ésima amostra, ou seja na amostra superposta ao ponto O da máscara, *indica que o desvio aconteceu a partir da amostra imediatamente anterior àquela plotada fora dos braços*.

Com a indicação de que o processo está fora de controle pode-se estimar o valor médio do processo depois do desvio. O valor médio da estatística monitorada pelo gráfico CuSum é proporcional à inclinação dos pontos plotados. Se o processo está operando com sua média centrada no valor nominal μ_0 então a inclinação será zero. Se por outro lado os pontos plotados seguem uma tendência entre as amostras j e i , a estimativa da média sob este segmento é dada por (Montgomery, 1991)

$$\hat{\mu} = \mu_0 + \frac{S_i - S_j}{i - j} \quad 4.11$$

em que $\hat{\mu}$ é o valor estimado após o desvio ter ocorrido. μ_0 é o valor nominal do processo. S_i é a soma acumulada dos desvios obtida com a última estatística amostral plotada no gráfico CuSum referente ao período até a amostra i e S_j é a soma acumulada dos desvios até a amostra j , ou seja até aquela imediatamente anterior à amostra na qual a estatística tenha sido plotada além dos braços da máscara.

4.3 O Algoritmo de Soma Acumulada

Quando alguns processos são monitorados simultaneamente ou quando os dados do processo são obtidos rapidamente, os procedimentos gráficos deixam de ser adequados e um procedimento computacional é mais eficiente (Lucas, 1973). O algoritmo de Soma Acumulada é um procedimento que calcula *Somas Acumuladas Unilaterais* e as compara com o intervalo de decisão H . Se um valor da soma for maior do que este intervalo, o processo é dito fora de controle.

4.3.1 Somas acumuladas unilaterais

Montgomery (1991) apresenta as Somas Acumuladas Unilaterais como sendo a soma acumulada dos desvios do valor nominal, em uma direção, crescente ou decrescente, que tenha ocorrido durante o processo. A Máscara V é projetada de tal maneira que o desvio do valor nominal a ser detectado tanto pode ser positivo quanto negativo (Equação 4.1). Neste caso o procedimento é chamado bilateral. Entretanto é possível projetar o gráfico de Soma Acumulada para o chamado teste unilateral. A estatística é dada por

$$S_i = \sum_{j=1}^i [x_j - (\mu_o + K)] = [x_i - (\mu_o + K) + S_{i-1}] \quad 4.12$$

A Equação 4.12, do algoritmo de soma acumulada representa uma translação para um dos sentidos do gráfico de soma acumulada.

O algoritmo de Soma Acumulada utiliza estatísticas unilaterais. Seja $S_H(i)$ a soma acumulada para desvios positivos e $S_L(i)$ a soma acumulada para desvios negativos, ambas para o período até a amostra i . $S_H(i)$ e $S_L(i)$ são dadas por

$$S_H(i) = \max[0; x_i - (\mu_o + K) + S_H(i-1)] \quad 4.13$$

$$S_L(i) = \max[0; (\mu_o - K) - x_i + S_L(i-1)] \quad 4.14$$

em que $S_H(0) = 0$ e $S_L(0) = 0$, são os valores iniciais. Este valores podem ser diferentes de zero com o uso da inicialização FIR apresentada na seção 4.5.1. Os valores $S_H(i)$ e $S_L(i)$ acumulam os desvios que são maiores do que K unidades do valor nominal e ambos são reinicializados com zero uma vez que sejam negativos (Lucas, 1976).

Para cada amostra são obtidos os valores $S_H(i)$ e $S_L(i)$ que são colocados em uma tabela e acumulados sucessivamente. A soma acumulada dos desvios $S_H(i)$ e $S_L(i)$ é comparada com o intervalo de decisão H . O intervalo de decisão H representa o limite que pode ser atingido pela soma acumulada unilateral. Se $S_H(i) > H$ ou se $S_L(i) > H$, então o processo será dito fora de controle. O intervalo de decisão H é dado pela Equação 4.7.

4.3.2 A tabela do algoritmo

O algoritmo de Soma Acumulada pode ser implementado em 3 conjuntos de colunas. O primeiro com os valores observados, o segundo com o desvio, a soma acumulada unilateral $S_H(i)$ e o valor N_H . O terceiro com o desvio, a soma acumulada unilateral $S_L(i)$ e o valor N_L .

Tabela 4.1 – Tabela para a implementação do algoritmo de Soma Acumulada.

i	x_i	a			b		
		$x_i - (\mu_0 + K)$	$S_H(i)$	N_H	$(\mu_0 - K) - x_i$	$S_L(i)$	N_L
1	x_1	$x_1 - (\mu_0 + K)$	$S_H(1)$		$(\mu_0 - K) - x_1$	$S_L(1)$	
2	x_2	$x_2 - (\mu_0 + K)$	$S_H(2)$		$(\mu_0 - K) - x_2$	$S_L(2)$	
3	x_3	$x_3 - (\mu_0 + K)$	$S_H(3)$		$(\mu_0 - K) - x_3$	$S_L(3)$	
4	x_4	$x_4 - (\mu_0 + K)$	$S_H(4)$		$(\mu_0 - K) - x_4$	$S_L(4)$	
...	
n	x_n	$x_n - (\mu_0 + K)$	$S_H(n)$		$(\mu_0 - K) - x_n$	$S_L(n)$	

Fonte: Adaptado de Montgomery (1991) p.292.

N_H e N_L indicam o número de períodos em que a soma acumulada unilateral $S_H(i)$ ou $S_L(i)$ foi diferente de zero, imediatamente após ter sido zero. A contagem N_H e N_L inicializa-se ou recomeça sempre que o valor $S_H(i)$ ou $S_L(i)$ assume o valor zero.

A Tabela 4.1 tem tantas linhas quantas forem as observações do processo monitorado. O analista deve comparar o valor de $S_H(i)$ e $S_L(i)$ com o intervalo de decisão H a cada amostra i coletada e concluir pelo estado do processo. Quando o processo estiver fora de controle, o analista deve reiniciar a soma acumulada com o valor zero, ou outro valor se estiver utilizando o procedimento FIR. Se o processo se encontra fora de controle é de interesse do analista encontrar as causas especiais que levaram o processo a tal estado e estimar seu valor médio para que possa fazer o ajuste adequado.

4.3.3 Estimativa do valor médio do processo após o desvio

A utilização do algoritmo de Soma Acumulada tem a propriedade de armazenar os valores das somas unilaterais acumuladas do processo analisado. Este valor será utilizado para a determinação da estimativa do valor médio do processo após dado o sinal de fora de controle, que é dada por (Montgomery, 1991):

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \mu_o + K + \frac{S_H(i)}{N_H} & \text{se } S_H(i) > H \\ \mu_o - K - \frac{S_L(i)}{N_L} & \text{se } S_L(i) > H \end{cases} \quad 4.15$$

4.4 Um exemplo genérico

Um processo de produção foi simulado para exemplo do uso do procedimento de somas acumuladas. Neste processo genérico são produzidas 120 unidades por hora e coletadas amostras de 5 unidades a cada 15 minutos. O valor nominal do processo é 93,0 unidades. O analista deseja detectar um desvio de 0,4 unidades acima do valor nominal, ou seja um valor médio de 93,4 unidades em média em 5 amostras. Durante um dia inteiro de produção são obtidas em torno de 32 amostras.

4.4.1 Estimativas

A Tabela 4.2 apresenta os valores das amostras simuladas de um dia de produção, a média e amplitude amostral e o valor da soma acumulada.

Tabela 4.2 Simulação de amostras de um processo genérico e valores da soma acumulada

amostra						média	amplitude	Máscara V Si
0								0
1	93.2	94.2	93.8	93.1	93.3	93.5	1.1	0.5
2	93.1	93.3	93.8	93.3	94.5	93.6	1.4	1.1
3	93.7	92.3	91.9	93.3	92.9	92.8	1.7	0.9
4	92.7	92.3	93.2	93.5	94.0	93.1	1.8	1.0
5	93.5	93.2	93.0	91.7	93.7	93.0	2.0	1.0
6	91.9	92.1	92.8	93.6	93.4	92.8	1.7	0.8
7	93.4	92.9	92.3	93.2	94.0	93.2	1.7	1.0
8	93.5	93.3	92.7	92.8	93.7	93.2	1.0	1.2
9	92.3	93.0	92.6	92.7	93.0	92.7	0.7	0.9
10	93.2	93.3	93.1	93.0	93.7	93.2	0.7	1.2
11	92.5	93.5	92.6	92.8	92.6	92.8	1.0	0.9
12	93.9	93.0	93.3	93.5	93.6	93.5	0.8	1.4
13	92.7	93.4	93.2	93.0	93.0	93.1	0.6	1.5
14	92.6	92.9	94.2	92.7	92.8	93.0	1.5	1.5
15	92.5	92.7	93.4	94.5	92.5	93.1	2.0	1.6
16	93.1	93.1	93.0	92.8	93.3	93.1	0.5	1.7
17	93.6	93.4	93.8	93.5	93.6	93.6	0.4	2.3
18	93.6	93.5	94.1	93.1	92.4	93.3	1.7	2.6
19	93.9	92.7	92.4	93.8	94.0	93.4	1.6	3.0
20	92.3	93.1	93.0	93.8	93.2	93.1	1.5	3.1
21	93.9	92.8	92.9	93.1	93.9	93.3	1.1	3.4
22	93.2	93.6	93.4	92.9	93.2	93.3	0.7	3.6
23	93.5	93.4	92.6	93.4	93.0	93.2	0.8	3.8
24	94.4	94.0	92.9	92.3	93.1	93.4	2.1	4.2
25	94.2	93.6	94.4	92.0	93.3	93.5	2.4	4.7
26	94.0	92.4	91.7	93.3	93.9	93.1	2.2	4.7
27	93.8	93.1	93.1	93.7	92.7	93.3	1.0	5.0
28	93.7	93.8	93.5	93.9	93.1	93.6	0.8	5.6
29	93.2	93.2	93.2	92.6	93.9	93.2	1.3	5.8
30	91.4	93.8	93.3	92.9	92.2	92.7	2.3	5.6
31	93.5	94.7	92.3	93.5	93.4	93.5	2.4	6.0
32	92.4	92.2	93.2	93.8	93.5	93.0	1.6	6.0
33	93.5	92.5	93.0	93.4	93.0	93.1	1.0	6.1
34	93.7	93.8	93.0	92.5	92.0	93.0	1.8	6.1
35	94.3	93.9	93.3	93.6	93.5	93.7	1.0	6.8
36	93.1	94.6	93.5	93.7	93.4	93.7	1.5	7.5

A estimativa do desvio padrão $SD(x)$ é obtida pelo procedimento de variação dentro da amostra apresentado na Seção 2.3.2.1 a partir da estatística R (amplitude). O estimador de $SD(x)$ é \bar{R} / d_2 e o valor estimado é

$$\frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{1,4}{2,236} = 0,6$$

assim para uma amostra de 5 elementos

$$SD(\bar{x}) = \frac{SD(x)}{\sqrt{n}} = \frac{0,6}{\sqrt{5}} = 0,27$$

4.4.2 Gráfico de Shewhart para o exemplo genérico

Montgomery (1991) apresenta os limites de controle para os gráficos de médias amostrais e de amplitude com coeficientes A_2 , D_3 e D_4 obtidos de tabelas próprias que auxiliam o projeto dos gráficos. Estes coeficientes são dados em função do tamanho da amostra. Supondo que ao longo do tempo o valor médio do processo tenha sido 93,00, ou seja o próprio valor nominal, e o desvio padrão $SD(x)$ tenha sido igual 0,27. Os limites de controle são então dados por

Gráfico de médias amostrais (\bar{x})

$$LSC = \bar{\bar{x}} + A_2 \times \bar{R} = 93,00 + 0.577 \times 1.406 = 93,81$$

$$LC = 93,00$$

$$LIC = \bar{\bar{x}} - A_2 \times \bar{R} = 93,00 - 0.577 \times 1.406 = 92,19$$

Gráfico de Amplitudes (R)

$$LSC = \bar{R} \times D_4 = 1,406 \times 2,115 = 2,97$$

$$LC = \bar{R} = 1,406$$

$$LIC = \bar{R} \times D_3 = 1,406 \times 0 = 0$$

A Figura 4.2 mostra os gráficos de média e amplitude para o processo simulado. O gráfico de amplitudes exibe um padrão de aleatoriedade revelando que o processo esteve atuando sem a presença de uma causa especial de variabilidade

O uso do gráfico de médias amostrais com apenas a regra de decisão básica, ou seja a de um ponto plotado fora do limites de controle, indica que o processo esteve atuando sob controle. O analista que utilizasse as outras regras de decisão observaria que apenas a amostra de número 36 cumpriria a regra de decisão 2 (2 de 3 pontos plotados no mesmo lado da linha central e a mais de dois desvios padrão). Portanto mesmo com o uso das duas regras de decisão diria que o processo esteve atuando sob controle, até a última amostra coletada. Porém, por construção, o processo esteve operando com um desvio do valor nominal. Este desvio é um desvio pequeno, da ordem do desvio que o analista desejava detectar. O gráfico de Shewhart não tem a habilidade para detectar desvios pequenos e portanto o uso do procedimento de somas acumuladas é uma ferramenta da qual o analista pode utilizar para detectar o desvio desejado.

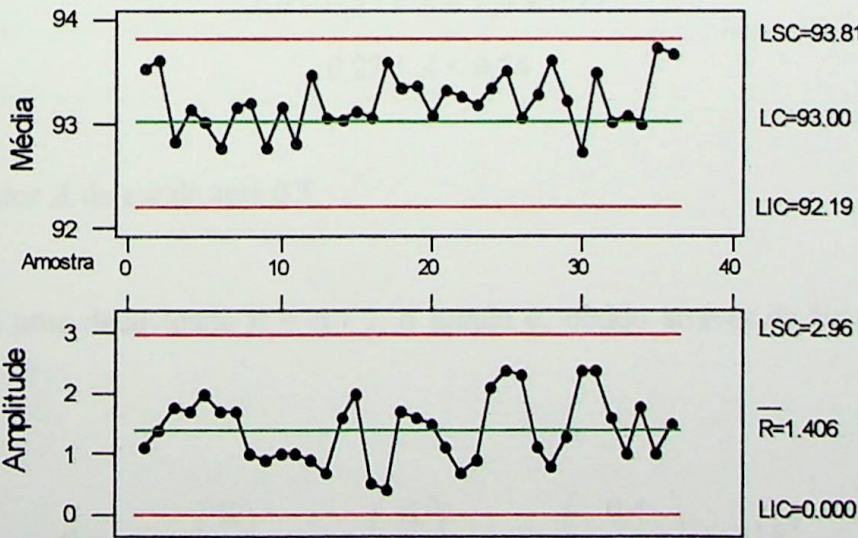


Figura 4.2 Gráfico de Shewhart para o exemplo genérico

4.4.3 Cálculos para o procedimento de Soma Acumulada

A estatística plotada no gráfico de Soma Acumulada é obtida pela Equação 4.1, dada por

$$S_i = \sum_{j=1}^i (x_j - 93,0), \quad i = 1, \dots, 36$$

O analista deseja detectar um desvio de 0,4 unidades no valor médio do processo, desta forma $\Delta = 0,4$. O erro padrão é obtido pela Equação 4.2 e dado por

$$\delta = \frac{\Delta}{SD(\bar{x})} = \frac{0,4}{0,27} = 1,5$$

A escala utilizada para a construção do gráfico de somas acumuladas deve ser escolhida entre os valores

$$1,0 SD(\bar{x}) < A < 2,0 SD(\bar{x})$$

$$1,0 \times 0,27 < A < 2,0 \times 0,27$$

$$0,27 < A < 0,54$$

O valor A da escala será 0,5.

Para uma declividade $K = \Delta / 2$, o ângulo θ , obtido através da Equação 4.4, é dado por

$$\theta = \arctan\left(\frac{K}{A}\right) = \arctan\left(\frac{\Delta}{2A}\right) = \arctan\left(\frac{0,4}{2 \times 0,5}\right) = 21,8^\circ$$

A distância d entre o vértice da máscara e o ponto O da Figura 4.1 pode ser calculada através da Equação 4.5.

$$d = \left(\frac{2}{\delta^2} \right) \ln \left(\frac{1 - \beta}{\alpha} \right)$$

Através da curva característica de operação (Costa Neto, 1977) obtém-se o valor de β . Para a probabilidade de um erro tipo I, estabelecida a priori pelo analista, por exemplo de 5%, ou seja $\alpha = 0,05$, um erro padrão (Equação 4.2) de 1,5 e amostras de tamanho 5, a probabilidade de um erro tipo II é 0,08 ou seja $\beta = 0,08$. Portanto o valor de d para o exemplo é dado por

$$d = \left(\frac{2}{\delta^2} \right) \ln \left(\frac{1 - \beta}{\alpha} \right) = \left(\frac{2}{1,5^2} \right) \ln \left(\frac{1 - 0,08}{0,05} \right) = 2,6$$

O intervalo de decisão H pode ser obtido através da Equação 4.7 e é dado por

$$H = Ad \tan \theta = d \frac{\Delta}{2} = 2,6 \times \frac{0,4}{2} = 0,52$$

A máscara V pode ser construída de posse dos parâmetros ângulo θ e da distância d ou dos parâmetros do valor de referência H e da declividade K . A máscara V do processo genérico é a máscara da Figura 4.3.

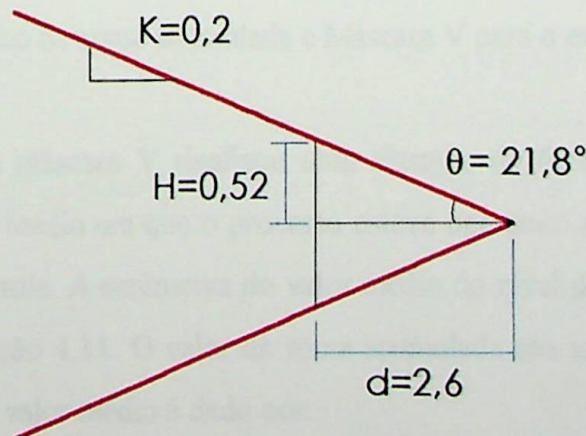


Figura 4.3 Máscara V - Processo genérico

A utilização da Máscara V sobre o gráfico de somas acumuladas está representada na Figura 4.4. A cada ponto plotado no gráfico a máscara é superposta a este ponto. Se algum ponto plotado anteriormente estiver além ou aquém dos braços da máscara é sinal de que o processo está fora de controle.

No caso do exemplo, quando a máscara estava superposta à amostra de número 17, em azul claro, o processo estava sob controle. Porém, com a máscara superposta à amostra de número 18 (em vermelho), um ponto anterior ficou fora do braço inferior da máscara (amostra 16) indicando uma situação fora de controle. Esta situação de processo fora de controle já vem acontecendo desde pelo menos a amostra anterior, ou seja, a amostra de número 15.

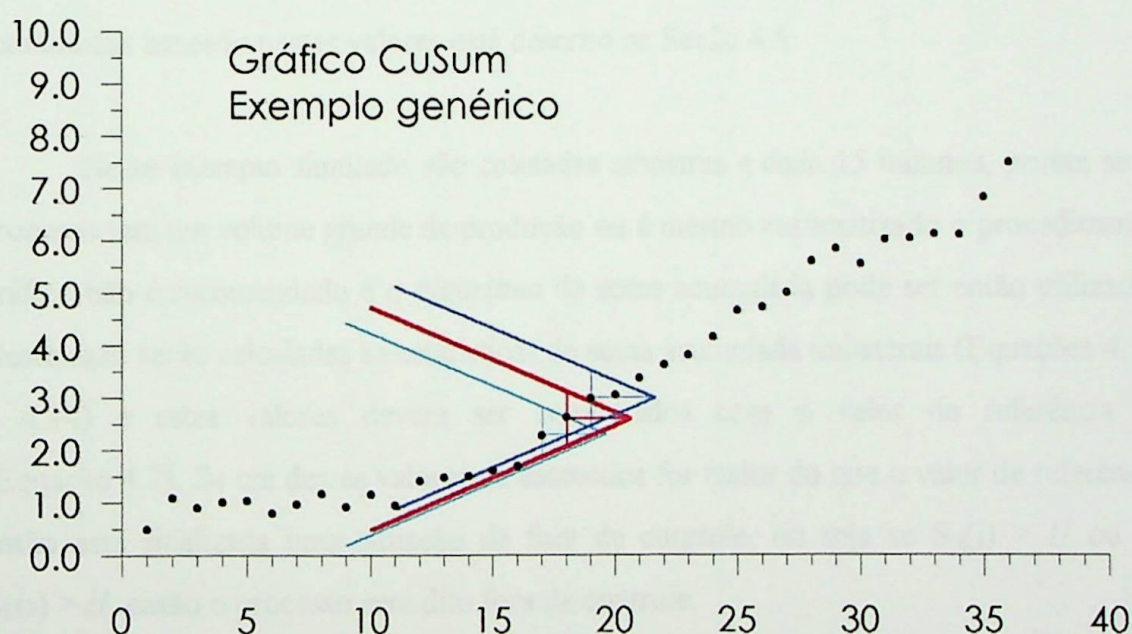


Figura 4.4 Gráfico de soma acumulada e Máscara V para o exemplo genérico

Uma vez que a máscara V sinalizou uma situação de fora de controle, então pode-se estimar o nível médio em que o processo esteve operando a partir do momento que esteve fora de controle. A estimativa do valor médio do nível do processo pode ser obtida através da Equação 4.11. O valor da soma acumulada nas amostras 18 e 16 são $S_{18} = 2.6$ e $S_{16} = 1.7$. O valor médio é dado por:

$$\hat{\mu} = \mu_o + \frac{S_i - S_j}{i - j} = 93,00 + \frac{2,6 - 1,7}{18 - 16} = 93,4$$

Ou seja, o desvio $\Delta = 0,4$ foi sinalizado tão logo o desvio tenha ocorrido dando ao analista subsídios para intervir no processo para um ajuste adequado. Ou seja o desvio começou a ocorrer na amostra de número 15 e em 3 amostras o sinal de uma falta de controle foi dado, o que estava dentro do que o analista esperava, ou seja de que o desvio fosse detectado em até 5 amostras. Porém há casos em que o analista deve impor ao projeto do gráfico o valor de ARL $L(\delta)$ e portanto os parâmetros de construção do gráfico e da máscara são alterados. Esta alteração será realizada com base nos valores de ARL $L(0)$ e ARL $L(\delta)$ especificados pelo analista. O projeto do procedimento de somas acumuladas baseado nestes valores está descrito na Seção 4.5.

Neste exemplo simulado são coletadas amostras a cada 15 minutos, porém se o processo tem um volume grande de produção ou é mesmo automatizado o procedimento gráfico não é recomendado e o *algoritmo* de soma acumulada pode ser então utilizado. Neste caso serão calculadas as estatísticas de soma acumulada unilaterais (Equações 4.13 e 4.14) e estes valores devem ser comparados com o valor de referência H (Equação 4.7). Se um destes valores da estatística for maior do que o valor de referência então está sinalizada uma situação de fora de controle, ou seja se $S_H(i) > H$ ou se $S_L(i) > H$, então o processo será dito fora de controle.

Embora o procedimento gráfico tenha sido suficiente para o exemplo genérico, este será refeito com o uso do algoritmo. Os valores das estatísticas unilaterais para as amostras do exemplo estão apresentadas na Tabela 4.3 e são dadas por

$$S_H(i) = \max[0; x_i - (\mu_o + K) + S_H(i - 1)] = \max[0; x_i - (93,0 + 0,2) + S_H(i-1)]$$

e

$$S_L(i) = \max[0; (\mu_o - K) - x_i + S_L(i - 1)] = \max[0; (93,0 - 0,2) - x_i + S_L(i-1)]$$

O intervalo de decisão H dado pela Equação 4.7 é 0,52. Assim se $S_H(i) > 0,52$ ou se $S_L(i) > 0,52$ então o processo está fora de controle.

N_H e N_L indicam o número de períodos em que a soma acumulada unilateral $S_H(i)$ ou $S_L(i)$ foi diferente de zero, imediatamente após ter sido zero.

Tabela 4.3 Valores das estatísticas unilaterais para o algoritmo de soma acumulada

amostra						média amplitude		Máscara V Si	Algoritmo H=0.52			
									$S_H(i)$	N_H	$S_L(i)$	N_L
0								0	0		0	
1	93.2	94.2	93.8	93.1	93.3	93.5	1.1	0.5	0.3	1	0.0	0
2	93.1	93.3	93.8	93.3	94.5	93.6	1.4	1.1	0.7	2	0.0	0
3	93.7	92.3	91.9	93.3	92.9	92.8	1.7	0.9	0.3	3	0.0	0
4	92.7	92.3	93.2	93.5	94.0	93.1	1.8	1.0	0.2	4	0.0	0
5	93.5	93.2	93.0	91.7	93.7	93.0	2.0	1.0	0.0	0	0.0	0
6	91.9	92.1	92.8	93.6	93.4	92.8	1.7	0.8	0.0	0	0.0	0
7	93.4	92.9	92.3	93.2	94.0	93.2	1.7	1.0	0.0	0	0.0	0
8	93.5	93.3	92.7	92.8	93.7	93.2	1.0	1.2	0.0	0	0.0	0
9	92.3	93.0	92.6	92.7	93.0	92.7	0.7	0.9	0.0	0	0.1	1
10	93.2	93.3	93.1	93.0	93.7	93.2	0.7	1.2	0.0	0	0.0	0
11	92.5	93.5	92.6	92.8	92.6	92.8	1.0	0.9	0.0	0	0.0	0
12	93.9	93.0	93.3	93.5	93.6	93.5	0.8	1.4	0.3	1	0.0	0
13	92.7	93.4	93.2	93.0	93.0	93.1	0.6	1.5	0.1	2	0.0	0
14	92.6	92.9	94.2	92.7	92.8	93.0	1.5	1.5	0.0	0	0.0	0
15	92.5	92.7	93.4	94.5	92.5	93.1	2.0	1.6	0.0	0	0.0	0
16	93.1	93.1	93.0	92.8	93.3	93.1	0.5	1.7	0.0	0	0.0	0
17	93.6	93.4	93.8	93.5	93.6	93.6	0.4	2.3	0.4	1	0.0	0
18	93.6	93.5	94.1	93.1	92.4	93.3	1.7	2.6	0.5	2	0.0	0
19	93.9	92.7	92.4	93.8	94.0	93.4	1.6	3.0	0.7	3	0.0	0
20	92.3	93.1	93.0	93.8	93.2	93.1	1.5	3.1	0.6	4	0.0	0
21	93.9	92.8	92.9	93.1	93.9	93.3	1.1	3.4	0.7	5	0.0	0
22	93.2	93.6	93.4	92.9	93.2	93.3	0.7	3.6	0.7	6	0.0	0
23	93.5	93.4	92.6	93.4	93.0	93.2	0.8	3.8	0.7	7	0.0	0
24	94.4	94.0	92.9	92.3	93.1	93.4	2.1	4.2	0.9	8	0.0	0
25	94.2	93.6	94.4	92.0	93.3	93.5	2.4	4.7	1.2	9	0.0	0
26	94.0	92.4	91.7	93.3	93.9	93.1	2.2	4.7	1.0	10	0.0	0
27	93.8	93.1	93.1	93.7	92.7	93.3	1.0	5.0	1.1	11	0.0	0
28	93.7	93.8	93.5	93.9	93.1	93.6	0.8	5.6	1.5	12	0.0	0
29	93.2	93.2	93.2	92.6	93.9	93.2	1.3	5.8	1.6	13	0.0	0
30	91.4	93.8	93.3	92.9	92.2	92.7	2.3	5.6	1.1	14	0.1	1
31	93.5	94.7	92.3	93.5	93.4	93.5	2.4	6.0	1.3	15	0.0	0
32	92.4	92.2	93.2	93.8	93.5	93.0	1.6	6.0	1.2	16	0.0	0
33	93.5	92.5	93.0	93.4	93.0	93.1	1.0	6.1	1.0	17	0.0	0
34	93.7	93.8	93.0	92.5	92.0	93.0	1.8	6.1	0.8	18	0.0	0
35	94.3	93.9	93.3	93.6	93.5	93.7	1.0	6.8	1.3	19	0.0	0
36	93.1	94.6	93.5	93.7	93.4	93.7	1.5	7.5	1.8	20	0.0	0

A Tabela 4.3 mostra que para a amostra de número 19 o valor de $S_H(19) = 0,7$ que é maior do que $H = 0,52$. Portanto o processo é dito fora de controle e

é sinal de que o valor médio do processo está acima do valor nominal. A estimativa do valor médio do processo pode ser obtida através da Equação 4.15 e é dada por

$$\hat{\mu} = \mu_o + K + \frac{S_H(i)}{N_H} = 93,0 + 0,2 + \frac{0,7}{2} = 93,6$$

Com este algoritmo o analista detectou o desvio do valor nominal de 0,6 unidades. Utilizando o valor de $S_H(18) = 0.5$ que é muito próximo do intervalo de decisão H a estimativa de μ seria 93,5. A sinalização do desvio foi dada em média até 5 amostras, como desejado pelo analista. Porém o valor de $ARL L(\delta)$ pode ser especificado previamente. Com isto o intervalo de decisão H será alterado para satisfazer ao valor de $ARL L(\delta)$ especificado.

4.5 Os valores de ARL para a Soma Acumulada

As probabilidades α e β dos erros tipo I e tipo II utilizadas no projeto da Máscara V e no algoritmo não representam as probabilidades reais do procedimento de soma acumulada pois são apenas para o teste de um ponto plotado no gráfico de controle. Por isso pode-se adotar o valor de ARL como especificação para projetar o gráfico e algoritmo CuSum (Montgomery, 1991).

Quando o processo estiver sob controle, chamamos de $ARL L(0)$ o número médio de amostras coletadas até que o processo sinalize um falso alarme. Um falso alarme acontece quando o processo *está operando sob controle*, mas o procedimento *sinaliza uma situação fora de controle*.

Se o processo estiver operando com a presença de causas especiais e portanto fora de controle, chamamos de $ARL L(\delta)$ o número médio de amostras até que o procedimento sinalize uma situação de fora de controle.

O nível médio estimado do processo após a ocorrência de uma causa especial que tenha levado o processo ao estado fora de controle é dado por

$$\hat{\mu} = \mu_o + \delta \text{ SD}(x)$$

4.16

4.5.1 Comparação de valores de ARL entre alguns gráficos de soma acumulada e gráficos de Shewhart

Wheeler (1995) apresenta uma comparação dos valores de ARL entre alguns projetos de Soma Acumulada e gráficos de Shewhart que utilizam as regras de decisão tal como apresentadas na Seção 3.5.3. Os gráficos de Shewhart e CuSum foram comparados para valores de ARL $L(0)$ muito próximos, mantendo *portanto a mesma taxa de falsos alarmes*. A Figura 4.5 mostra esta comparação. A Tabela 4.4 apresenta os valores de ARL $L(\delta)$ utilizados para a construção do gráfico da Figura 4.5.

Tabela 4.4 Comparação entre alguns gráficos de soma acumulada e os gráficos de Shewhart com uso de regras de decisão

desvio	Shewhart	CuSum	Shewhart	CuSum	Shewhart	CuSum	Shewhart	CuSum	Shewhart	CuSum
	regra	h=4.78	regras	h=4.29	regras	h=3.91	regras	h=3.78	regras	h=3.42
	1	k=.5	1 e 2	k=.5	1 e 4	k=.5	1, 2, 3	k=.5	1, 2,3 e 4	k=.5
0.0	370	374	225	225	153	153	133	134	92	92
0.2	303	136	146	95	90	71	80	65	54	48
0.4	200	45	88	37	51	32	45	30	31	24
0.6	120	22	52	19	30	17	26	16	19	14
0.8	72	13	31	12	20	11	16	11	12	9.1
1.0	44	9.7	19	8.6	14	7.8	11	8.0	8.8	6.9
1.2	28	7.3	12	6.4	11	6.4	7.5	5.9	6.6	5.3
1.4	18	5.9	8.5	5.4	8.4	5.0	5.6	4.8	5.3	4.5
1.6	12	4.9	6.1	4.6	6.9	4.2	4.5	4.1	4.3	3.7
1.8	8.7	4.4	4.6	4.0	5.7	3.6	3.7	3.6	3.6	3.3
2.0	6.3	3.8	3.7	3.6	4.8	3.2	3.1	3.2	3.1	2.9
2.2	4.7	3.4	3.0	3.2	4.0	2.9	2.7	2.9	2.7	2.7
2.4	3.6	3.1	2.5	2.9	3.3	2.6	2.3	2.6	2.3	2.4
2.6	2.9	2.9	2.1	2.6	2.8	2.5	2.1	2.5	2.1	2.3
2.8	2.4	2.7	1.9	2.5	2.3	2.3	1.9	2.3	1.9	2.2
3.0	2.0	2.5	1.7	2.4	2.0	2.2	1.7	2.2	1.7	2.1

Os valores dos parâmetros de projeto do gráfico de soma acumulada são normalizados conforme as Equações 4.9 e 4.10, ou seja os gráficos são projetados

utilizando-se os parâmetros h e k . Os gráficos CuSum utilizados na comparação foram projetados para um declividade $K = \Delta/2$. Portanto com o parâmetro $k = 0,5 = K/SD(x)$ os gráficos foram projetados para detectar desvios de um desvio padrão ($\Delta = 1 SD(x)$) ou maiores. Assim sendo, como $\delta = \Delta / SD(x)$, temos que $\delta = 1$.

As linhas cheias da Figura 4.5 representam projetos CuSum e as linhas pontilhadas gráficos de controle de Shewhart.

A comparação do gráfico de controle de Shewhart com uso da *regra de decisão um* e o procedimento CuSum com os parâmetros $h = 4,78$ e $k = 0,5$ mostra que este CuSum é mais sensível para a região até por volta de $\delta = 2,5$. Neste caso o gráfico de Shewhart tem o valor de $ARL L(0) = 370$ e o gráfico cusum o valor $ARL L(0) = 374$. Por exemplo, para detectar um desvio $\delta = 1,6$, o gráfico de Shewhart tem um valor de $ARL L(1,6) = 12$, enquanto que o gráfico CuSum tem um valor de $ARL L(1,6) = 4,9$. Neste caso CuSum é mais sensível que Shewhart com o uso apenas da regra de decisão básica.

A Figura 4.5 e a Tabela 4.4 mostram que a adição do uso da *regra de decisão quatro* no gráfico de Shewhart leva a um valor de $ARL L(0) = 153$. O gráfico CuSum com os parâmetros $h = 3,91$ e $k = 0,5$ tem o mesmo valor de $ARL L(0) = 153$. Para detectar o mesmo desvio de $\delta = 1,6$ o gráfico de Shewhart tem um valor de $ARL L(1,6) = 6,9$ e o gráfico CuSum um valor $ARL L(1,6) = 4,2$. A adição da regra de decisão quatro torna o gráfico de Shewhart mais sensível. Anteriormente este desvio era detectado em média em 12 amostras e agora é detectado em média em 6,9 amostras. Mesmo assim o gráfico CuSum continua sendo mais sensível do que o gráfico de Shewhart com a inclusão da regra quatro.

O gráfico CuSum com parâmetros $h = 3,42$ e $k = 0,5$ tem um valor de $ARL L(0) = 92$, que é o mesmo valor de $ARL L(0)$ para o gráfico de Shewhart com uso das *quatro regras de decisão*. Porém o gráfico CuSum é ligeiramente mais sensível do que o gráfico de Shewhart para região de desvios até $\delta = 2,2$.

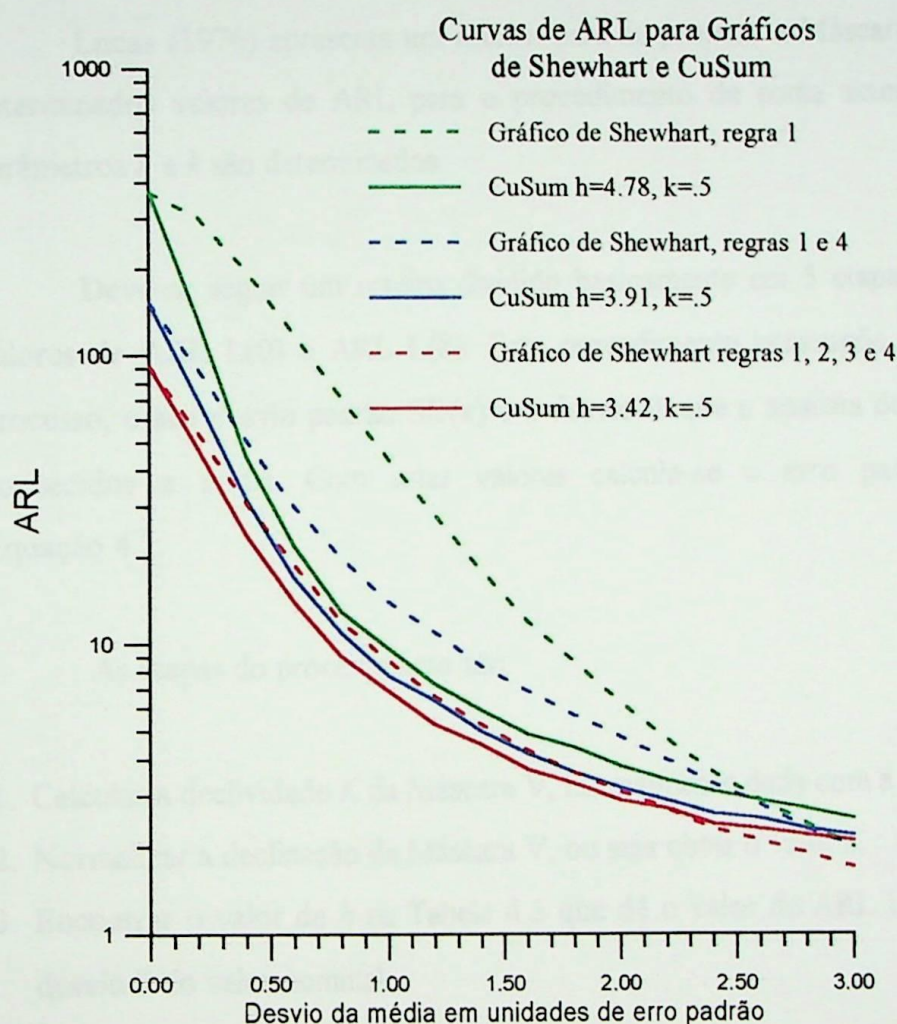


Figura 4.5. Comparação dos valores de ARL para projetos de soma acumulada e de Gráficos de Shewhart.

Fonte: Wheeler (1995)

Embora o uso das quatro regras de decisão torne o gráfico de Shewhart sensível a moderados desvios do valor nominal isto aumenta a dificuldade na interpretação dos pontos plotados. Desse modo a utilização do gráfico de controle deixa de ser simples (Lucas, 1973) e a probabilidade de falso alarme aumenta (Bissel, 1998). O gráfico de soma acumulada incorpora apenas uma regra de decisão na forma da Máscara V para as aplicações gráficas e no caso do algoritmo somente a comparação da estatística soma acumulada com o intervalo de decisão.

4.5.2 Projetando a Máscara V para atender a valores de ARL

Lucas (1976) apresenta um roteiro para se projetar a Máscara V para atender a determinados valores de ARL para o procedimento de soma acumulada no qual os parâmetros h e k são determinados.

Deve-se seguir um roteiro dividido basicamente em 5 etapas para atender aos valores de ARL $L(0)$ e ARL $L(\delta)$. Este procedimento pressupõe que a média μ do processo, o seu desvio padrão $SD(x)$ e o desvio Δ que o analista deseja detectar sejam conhecidos a priori. Com estes valores calcula-se o erro padrão δ através da Equação 4.2.

As etapas do procedimento são:

1. Calcular a declividade K da Máscara V, normalmente dada com a metade do desvio .
2. Normalizar a declinação da Máscara V, ou seja obter o valor k .
3. Encontrar o valor de h na Tabela 4.5 que dê o valor de ARL $L(0)$ desejado para o desvio δ do valor nominal .
4. Calcular o intervalo de decisão H .
5. Checar se a Máscara V é a adequada para ser utilizada ou se será preciso alguma iteração. Até aqui apenas o valor de ARL $L(0)$ foi utilizado. A curva de ARL $L(\delta)$ deve ser examinada para se determinar se a máscara é satisfatória ou não. Um problema que poderá acontecer é um valor de ARL $L(\delta)$ muito alto, ou seja, que a Máscara V demore para detectar o desvio desejado.

Se após a iteração, o valor de ARL $L(\delta)$ ainda for grande, Lucas (1976) sugere duas alternativas para resolver este problema. Diminuir o intervalo entre amostras; o que não altera o valor de ARL $L(\delta)$ porém diminui o tempo até que o desvio seja detectado ou utilizar um valor menor de h dando maior sensibilidade ao desvio, ao custo de um menor valor de ARL $L(0)$.

Tabela 4.5 Valores de ARL para a Máscara V

parâmetros h k		Desvios do valor nominal em erros padrão δ								
		0	0.25	0.5	0.75	1	1.5	2	2.5	3
		ARL L(0)	ARL L(0.25)	ARL L(0.5)	ARL L(0.75)	ARL L(1.0)	ARL L(1.5)	ARL L(2.0)	ARL L(2.5)	ARL L(3.0)
2.5	0.25	13.6	11.2	7.67	5.4	4.06	2.71	2.06	1.68	1.42
4.0	0.25	38.5	24.7	13.2	8.38	6.06	3.91	2.93	2.38	2.05
6.0	0.25	125	50.3	20.9	12.4	8.73	5.51	4.07	3.26	2.74
8.0	0.25	368	83.6	28.8	16.4	11.4	7.11	5.21	4.15	3.48
10.0	0.25	1036	125	36.7	20.4	14.1	8.71	6.35	5.04	4.2
2.0	0.50	19.3	15.2	9.63	6.27	4.49	2.74	1.99	1.58	1.32
3.0	0.50	58.8	36.2	17.2	9.67	6.4	3.75	2.68	2.12	1.77
4.0	0.50	168	74.2	26.6	13.3	8.38	4.75	3.34	2.62	2.19
5.0	0.50	465	139	38	17	10.4	5.75	4.01	3.11	2.57
6.0	0.50	1280	249	51.3	20.9	12.4	6.74	4.67	3.62	2.98
1.5	0.75	21.3	17.2	11	7	4.77	2.73	1.89	1.48	1.24
2.3	0.75	69.9	46	22	11.6	7.13	3.73	2.51	1.91	1.56
3.0	0.75	221	111	39.3	17.3	9.68	4.73	3.12	2.36	1.93
3.8	0.75	688	252	65.6	24.2	12.4	5.76	3.71	2.79	2.27
4.5	0.75	2120	552	105	32.1	15.2	6.73	4.31	3.21	2.59
1.0	1.00	17.6	15	10.4	6.88	4.72	2.63	1.78	1.38	1.17
1.5	1.00	46.9	35.7	20.3	11.5	7.07	3.5	2.24	1.66	1.34
2.0	1.00	129	84	37.9	18.1	10	4.45	2.74	1.99	1.58
2.5	1.00	358	191	67.8	27.3	13.4	5.42	3.25	2.34	1.85
3.0	1.00	981	423	117	39.5	17.4	6.4	3.75	2.68	2.12
3.5	1.00	2670	918	199	55.7	21.8	7.39	4.25	3.01	2.37
0.7	1.50	33.9	28.4	18.9	11.8	7.59	3.66	2.18	1.55	1.25
1.1	1.50	92.1	71.4	40.9	22.3	12.7	5.16	2.8	1.86	1.43
1.5	1.50	275	192	91.6	42.4	21.1	7.08	3.5	2.24	1.66
1.9	1.50	881	536	208	80.4	34.3	9.38	4.26	2.64	1.92
2.3	1.50	2950	1520	474	151	34.5	12	5.03	3.04	2.2

Fonte: Adaptado de Lucas (1976) p.6

Os gráficos da Figura 4.6 foram construídos com valores da Tabela 4.5 e mostram que para um projeto de gráfico de soma acumulada o valor médio do número de amostras necessárias para detectar um desvio, ou seja o valor $ARL L(\delta)$, diminui conforme o desvio a ser detectado aumenta. Em linhas gerais um pequeno desvio do valor nominal exige um valor de $ARL L(\delta)$ maior do que desvios maiores.

Para diferentes valores de referência k (por exemplo 0.5, 0.75 e 1.0) em conjunto com diferentes intervalos de decisão h , obtém-se diferentes valores de $ARL L(0)$ e $ARL L(\delta)$. Isto pode ser observado na Figura 4.6. Com isso o analista pode então projetar seu procedimento de soma acumulada para atender as especificações de $ARL L(0)$, de $ARL L(\delta)$ e do desvio a ser detectado Δ .

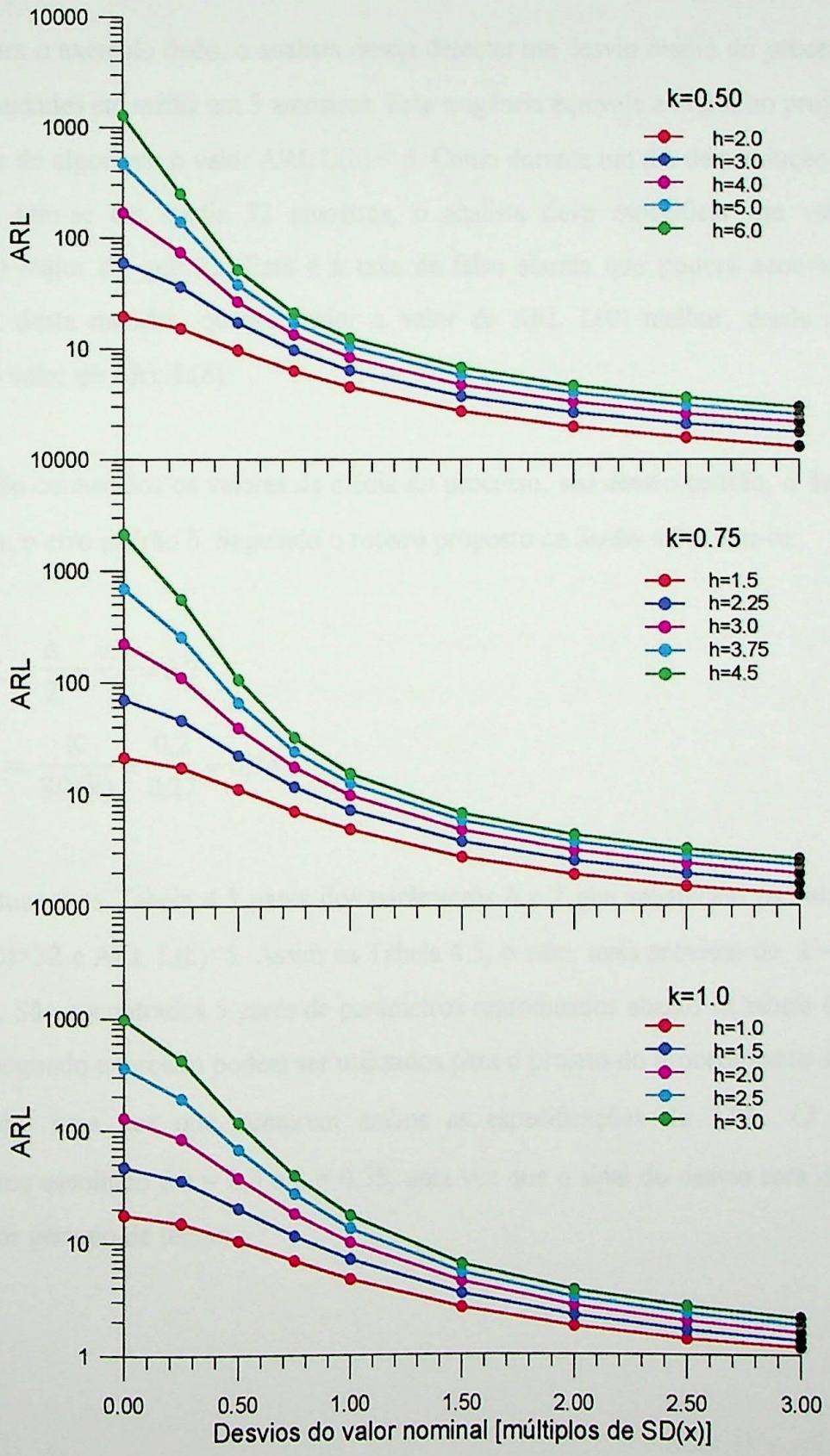


Figura 4.6. Comparação dos valores de ARL para projetos de Soma Acumulada com valores de referência k (0.5, 0.75 e 1.0) e alguns intervalos de decisão h .

4.6 O exemplo genérico: impondo valores de ARL

Para o exemplo dado, o analista deseja detectar um desvio médio do processo de $\Delta = 0,4$ unidades em média em 5 amostras. Esta exigência equivale a impor ao projeto do gráfico ou do algoritmo o valor $ARL L(\delta) < 5$. Como durante um dia de produção, neste processo, tem-se em média 32 amostras, o analista deve especificar um valor de $ARL L(0)$ maior do que 32. Esta é a taxa de falso alarme que poderá acontecer no processo; desta maneira, quanto maior o valor de $ARL L(0)$ melhor, desde que se cumpra o valor de $ARL L(\delta)$.

São conhecidos os valores da média do processo, seu desvio padrão, o desvio Δ e portanto o erro padrão δ . Seguindo o roteiro proposto na Seção 4.5.2 tem-se:

$$1. \quad K = \frac{\Delta}{2} = \frac{0,4}{2} = 0,2$$

$$2. \quad k = \frac{K}{SD(\bar{x})} = \frac{0,2}{0,27} = 0,74$$

3. Buscar na Tabela 4.5 pares dos parâmetros h e k que satisfaçam os valores de $ARL L(0) > 32$ e $ARL L(\delta) < 5$. Assim na Tabela 4.5, o valor mais próximo de $k = 0,74$ é $k = 0,75$. São encontrados 5 pares de parâmetros reproduzidos abaixo na tabela 4.6, dos quais o segundo e terceiro podem ser utilizados para o projeto do procedimento de soma acumulada, uma vez que cumprem ambos as especificações de ARL. O par de parâmetros escolhido é $h = 2,3$ e $k = 0,75$, uma vez que o sinal do desvio será dado em um menor período de tempo.

Tabela 4.6. Valores de ARL L(0) e ARL L(δ) para o exemplo genérico

parâmetros h k		Desvios do valor nominal em erros padrão δ	
		0	1.5
		ARL L(0)	ARL L(1.5)
1.5	0.75	21.3	2.73
2.3	0.75	69.9	3.73
3.0	0.75	221	4.73
3.8	0.75	688	5.76
4.5	0.75	2120	6.73

4. Para o intervalo de decisão normalizado $h = 2,3$ tem-se que

$H = h \times SD(\bar{x}) = 2,30 \times 0,27 = 0,62$

5. O projeto do procedimento CuSum com estes parâmetros tem como valores de ARL L(0) = 69.9 e ARL L(δ) = 3,73, cumprindo com as especificações do analista. A Máscara V projetada para cumprir estas especificações é apresentada na Figura 4.7.

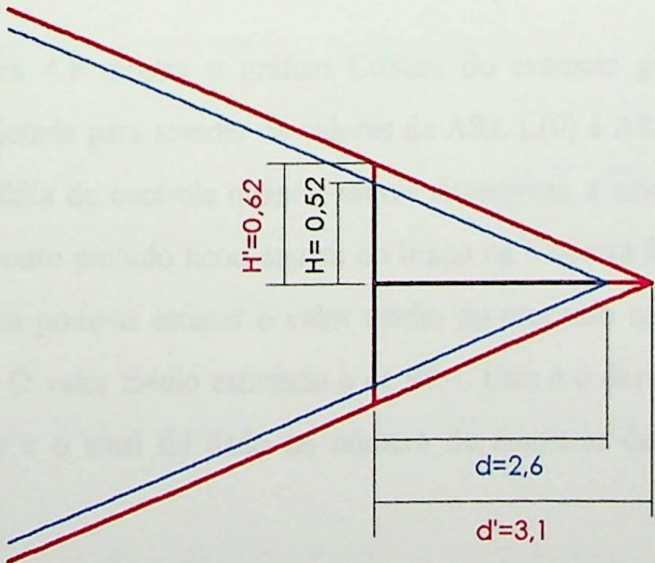


Figura 4.7 Máscaras V utilizadas no exemplo genérico

Uma vez que se manteve a declividade K e o ângulo θ da Máscara V tem-se

$$\theta = \arctan\left(\frac{K}{A}\right) = 21,8^\circ \quad \text{e} \quad K = 0,2$$

Para a Máscara V deste projeto o valor da distância d será

$$H = A d \tan\theta \therefore d = \frac{H}{A \tan\theta} = \frac{0,62}{0,5 \tan(21,8^\circ)} = 3,1$$

A Figura 4.7 mostra as máscaras V utilizadas para monitorar o processo do exemplo genérico. No projeto da Máscara em azul (procedimento padrão) não foram considerados os valores de ARL $L(0)$ e ARL $L(\delta)$. Já no projeto da Máscara V em vermelho estes valores foram considerados. O ângulo θ em ambas as Máscaras é o mesmo, uma vez que depende apenas do desvio e da declividade da máscara, e isto foi fixado na etapa nº 1 do procedimento adotado.

A Figura 4.8 mostra o gráfico CuSum do exemplo genérico com o uso da máscara V projetada para atender os valores de ARL $L(0)$ e ARL $L(1.5)$. A Máscara V detectou uma falta de controle quando estava superposta a amostra de número 19 e a amostra cujo ponto plotado ficou aquém do braço da Máscara foi a amostra de número 16. Desta forma pode-se estimar o valor médio do processo neste intervalo através da Equação 4.11. O valor médio estimado é de 93,4. Este é o desvio médio que o analista deseja detectar e o sinal foi dado no número de amostras determinado a priori pelo analista.

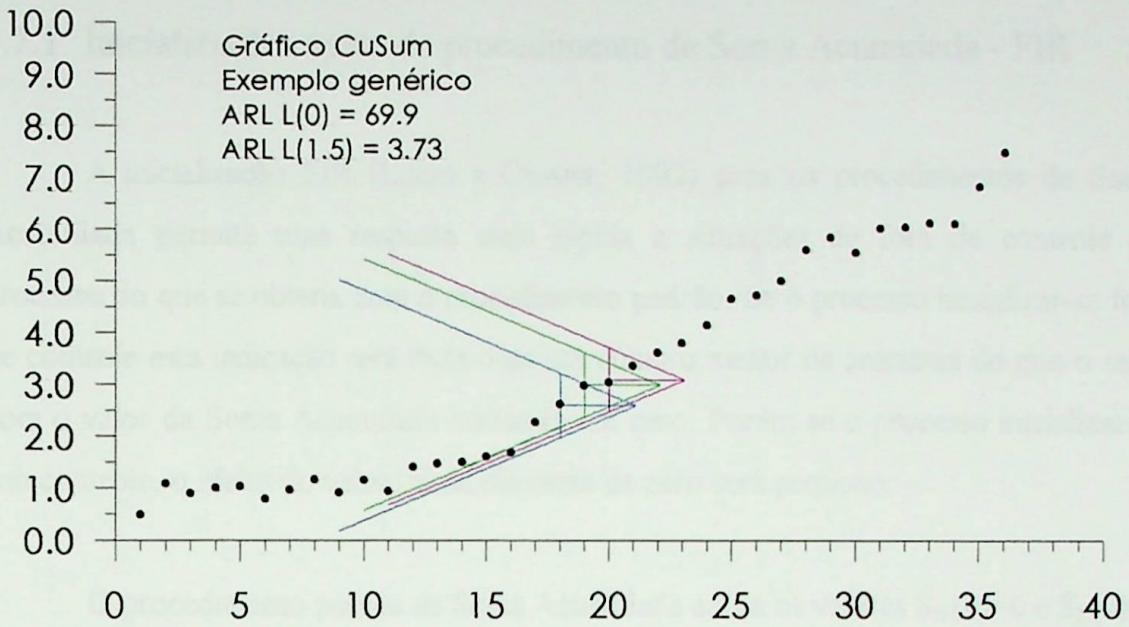


Figura 4.8 Gráfico CuSum e Máscara V projetada para cumprir com valores de ARL $L(0)$ e ARL $L(1.5)$ para o exemplo genérico

Para o exemplo genérico, tanto a máscara padrão V quanto a máscara obtida impondo-se valores de ARL $L(0)$ e ARL $L(\delta)$ tiveram desempenho semelhante: detectaram um desvio médio ocorrido na 16ª amostra. A máscara V padrão detectou na 18ª e a máscara acima na 19ª. Isto aconteceu porque a máscara padrão também satisfaz os requisitos de ARL, o que pode ser visto interpolando-se a Tabela 4.5, em que para a máscara V padrão o intervalo de decisão h é 1,9. Desta forma, para o mesmo valor de k ($k=0.75$) tem-se ARL $L(0) = 45,6$ e ARL $L(\delta) = 3.23$, satisfazendo as especificações do analista. Porém se a máscara V padrão não satisfizesse as especificações do analista, os desempenhos das máscaras V teriam sido diferentes.

4.7 Aprimoramentos para os procedimentos de Soma Acumulada.

Lucas e Crosier (1982) apresentam o procedimento de inicialização rápida de soma acumulada, FIR (Fast Initial Response). A FIR é usada com o propósito de melhorar a sensibilidade do gráfico CuSum. Outro procedimento com o mesmo objetivo são as modificações na máscara V apresentadas por Lucas (1976) e Bissell (1979). Estas modificações são feitas no vértice da máscara, tornando-o semi-parabólico.

4.7.1 Inicialização rápida do procedimento de Soma Acumulada - FIR

A inicialização FIR (Lucas e Crosier, 1982) para os procedimentos de Soma Acumulada permite uma resposta mais rápida a situações de fora de controle do processo do que se obteria com o procedimento padrão. Se o processo inicializar-se fora de controle esta indicação será dada com um número menor de amostras do que o seria com o valor da Soma Acumulada iniciando em zero. Porém se o processo inicializar-se sob controle, o efeito do valor inicial diferente de zero será pequeno.

O procedimento padrão de Soma Acumulada adota os valores $S_H(0)=0$ e $S_L(0)=0$ para o algoritmo e o valor $S_0=0$ para o gráfico. Após um sinal de fora de controle a estatística Soma Acumulada reinicia-se com zero. Para implementar o procedimento FIR, a soma acumulada não é inicializada com o valor zero, mas com um valor inicial diferente

Lucas e Crosier (1982) recomendam como valor inicial para o procedimento FIR a metade do intervalo de decisão do procedimento, ou seja $S_0 = h/2$. Porém outros valores podem ser utilizados como $h/4$, $3h/4$ e h . Com o uso de um valor inicial moderado, tem-se uma pequena diminuição do valor de ARL $L(0)$ e uma diminuição significativa do valor de ARL $L(\delta)$. A Tabela 4.7 apresenta os valores de ARL para Soma Acumulada fazendo-se uso do valor $S_0 = h/2$ como inicializador e sem o uso do procedimento FIR.

Da Tabela 4.7 tem-se que para um procedimento de soma acumulada com $k = 0,5$ e $h = 4,00$ o valor de ARL $L(0)$ é igual a 168. Com o uso da FIR de $S_0 = h/2$, este valor cai para 148,7. Um procedimento de soma acumulada projetado para detectar um desvio cujo erro padrão seja $\delta = 1,5$ que seria detectado em média em 4,75 amostras num procedimento padrão, com o uso da FIR é detectado em 2,86 amostras. A diminuição do valor de ARL $L(\delta)$ com o uso da FIR é conseguido ao custo de uma também diminuição do valor de ARL $L(0)$.

Tabela 4.7 Valores de ARL para o procedimento de somas acumuladas com inicialização rápida FIR

		FIR - S ₀ =h/2																											
		Desvios do valor nominal (múltiplos de SD(x))																											
parâmetros	h	k	0			0.25			0.5			0.75			1			1.5			2			2.5			3		
			S ₀ =0	FIR	S ₀ =0	FIR	S ₀ =0	FIR	S ₀ =0	FIR	S ₀ =0	FIR	S ₀ =0	FIR	S ₀ =0	FIR	S ₀ =0	FIR	S ₀ =0	FIR	S ₀ =0	FIR	S ₀ =0	FIR	S ₀ =0	FIR	S ₀ =0	FIR	
	2.50	0.25	13.6	9.236	11.2	7.553	7.67	5.083	5.4	3.515	4.06	2.624	2.71	1.755	2.06	1.367	1.68	1.169	1.367	1.68	1.169	1.367	1.68	1.169	1.367	1.68	1.169	1.367	1.68
	4.00	0.25	38.5	28.03	24.7	17.36	13.2	8.682	8.38	5.24	6.06	3.69	3.91	2.354	2.93	1.77	2.38	1.441	2.354	2.93	1.77	2.38	1.441	2.354	2.93	1.77	2.38	1.441	2.354
	6.00	0.25	125.0	100.0	50.3	36.77	20.9	13.38	12.4	7.372	8.73	5.053	5.51	3.169	4.07	2.372	3.26	1.932	3.26	1.932	2.74	1.638	2.74	1.638	2.74	1.638	2.74	1.638	2.74
	8.00	0.25	368	315.9	83.6	62.17	28.8	17.83	16.4	9.414	11.4	6.39	7.11	3.967	5.21	2.94	4.15	2.383	3.48	2.046	3.48	2.046	3.48	2.046	3.48	2.046	3.48	2.046	3.48
	10.0	0.25	1036	936.2	125	93.21	36.7	22.12	20.4	11.43	14.1	7.724	8.71	4.767	6.35	3.509	5.04	2.815	4.2	2.381	4.2	2.381	5.04	2.815	4.2	2.381	5.04	2.815	4.2
	2.00	0.50	19.3	15.13	15.2	11.79	9.63	7.178	6.27	4.487	4.49	3.086	2.74	1.869	1.99	1.395	1.58	1.174	1.32	1.069	1.58	1.174	1.32	1.069	1.58	1.174	1.32	1.069	1.58
	3.00	0.50	58.8	49.19	36.2	29.33	17.2	12.88	9.67	6.694	6.4	4.195	3.75	2.352	2.68	1.68	2.12	1.348	1.77	1.165	2.12	1.348	1.77	1.165	2.12	1.348	1.77	1.165	2.12
	4.00	0.50	168.0	148.7	74.2	62.7	26.6	20.06	13.3	8.968	8.38	5.287	4.75	2.862	3.34	2.014	2.62	1.586	2.19	1.325	2.62	1.586	2.19	1.325	2.62	1.586	2.19	1.325	2.62
	5.00	0.50	465	430.4	139	121.7	38.0	28.67	17.0	11.24	10.4	6.347	5.75	3.372	4.01	2.362	3.11	1.856	2.57	1.54	3.11	1.856	2.57	1.54	3.11	1.856	2.57	1.54	3.11
	6.00	0.50	1280	1215	249	222.9	51.3	38.71	20.9	13.48	12.4	7.382	6.74	3.875	4.67	2.703	3.62	2.125	2.98	1.774	3.62	2.125	2.98	1.774	3.62	2.125	2.98	1.774	3.62
	1.50	0.75	21.3	18.15	17.2	14.51	11.0	8.997	7.0	5.498	4.77	3.617	2.73	2.01	1.89	1.43	1.48	1.182	1.24	1.07	1.48	1.182	1.24	1.07	1.48	1.182	1.24	1.07	1.48
	2.25	0.75	69.9	62.08	46.0	40.02	22.0	18.16	11.6	8.918	7.13	5.121	3.73	2.497	2.51	1.67	1.91	1.314	1.56	1.138	1.91	1.314	1.56	1.138	1.91	1.314	1.56	1.138	1.91
	3.00	0.75	221.0	205.2	111	100.3	39.3	33.03	17.3	13.21	9.68	6.747	4.73	3.009	3.12	1.949	2.36	1.489	1.93	1.243	2.36	1.489	1.93	1.243	2.36	1.489	1.93	1.243	2.36
	3.75	0.75	688.0	656.9	252	234.1	65.6	56.19	24.2	18.34	12.4	8.454	5.76	3.528	3.71	2.251	2.79	1.696	2.27	1.386	2.79	1.696	2.27	1.386	2.79	1.696	2.27	1.386	2.79
	4.50	0.75	2120	2068	552	524.6	105	91.62	32.1	24.31	15.2	10.12	6.73	4.042	4.31	2.56	3.21	1.922	2.59	1.559	3.21	1.922	2.59	1.559	3.21	1.922	2.59	1.559	3.21
	1.00	1.00	17.6	15.89	15.0	13.44	10.4	9.118	6.88	5.882	4.72	3.931	2.63	2.131	1.78	1.466	1.38	1.19	1.17	1.071	1.38	1.19	1.17	1.071	1.38	1.19	1.17	1.071	1.38
	1.50	1.00	46.9	42.82	35.7	32.22	20.3	17.75	11.5	9.597	7.07	5.627	3.5	2.606	2.24	1.657	1.66	1.282	1.34	1.115	1.66	1.282	1.34	1.115	1.66	1.282	1.34	1.115	1.66
	2.00	1.00	129	120.8	84.0	77.4	37.9	33.57	18.1	15.1	10.0	7.767	4.45	3.125	2.74	1.873	1.99	1.395	1.58	1.174	1.873	1.99	1.395	1.58	1.174	1.873	1.99	1.395	1.58
	2.50	1.00	358	341.9	191	180.3	67.8	61.02	27.3	22.81	13.4	10.31	5.42	3.663	3.25	2.107	2.34	1.529	1.85	1.252	2.34	1.529	1.85	1.252	2.34	1.529	1.85	1.252	2.34
	3.00	1.00	981	952.6	423	405.5	117	107.5	39.5	33.35	17.4	13.35	6.4	4.208	3.75	2.353	2.68	1.68	2.12	1.348	2.68	1.68	2.12	1.348	2.68	1.68	2.12	1.348	2.68
	3.50	1.00	2670	2621	918	890.8	199	185.5	55.7	47.57	21.8	16.56	7.39	4.752	4.25	2.606	3.01	1.843	2.37	1.46	3.01	1.843	2.37	1.46	3.01	1.843	2.37	1.46	3.01
	0.70	1.50	33.9	32.57	28.4	27.22	18.9	17.9	11.8	11.02	7.59	6.917	3.66	3.202	2.18	1.886	1.55	1.367	1.25	1.146	1.55	1.367	1.25	1.146	1.55	1.367	1.25	1.146	1.55
	1.10	1.50	92.1	89.57	71.4	68.64	40.9	38.71	22.3	20.55	12.7	11.83	5.16	4.278	2.8	2.225	1.86	1.502	1.43	1.207	2.8	2.225	1.86	1.502	1.43	1.207	2.8	2.225	1.86
	1.50	1.50	275	267.9	192	185.8	91.6	87.31	42.4	39.22	21.1	18.67	7.08	5.657	3.5	2.608	2.24	1.657	1.66	1.282	3.5	2.608	2.24	1.657	1.66	1.282	3.5	2.608	2.24
	1.90	1.50	881	866.4	536	524.6	208	200.6	80.4	75.13	34.3	30.49	9.38	7.325	4.26	3.02	2.64	1.828	1.92	1.371	4.26	3.02	2.64	1.828	1.92	1.371	4.26	3.02	2.64
	2.30	1.50	2950	2930	1520	1502	474	461.1	151	142.7	34.5	48.98	12	9.26	5.03	3.447	3.04	2.012	2.2	1.473	5.03	3.447	3.04	2.012	2.2	1.473	5.03	3.447	3.04

Fonte: Adaptado de : Lucas (1987) p. 6 e Lucas e Crosier (1982) p.201

A Figura 4.9 foi construída para $k = 0,5$ e os intervalos de decisão h iguais a 2, 3, 4, 5 e 6.

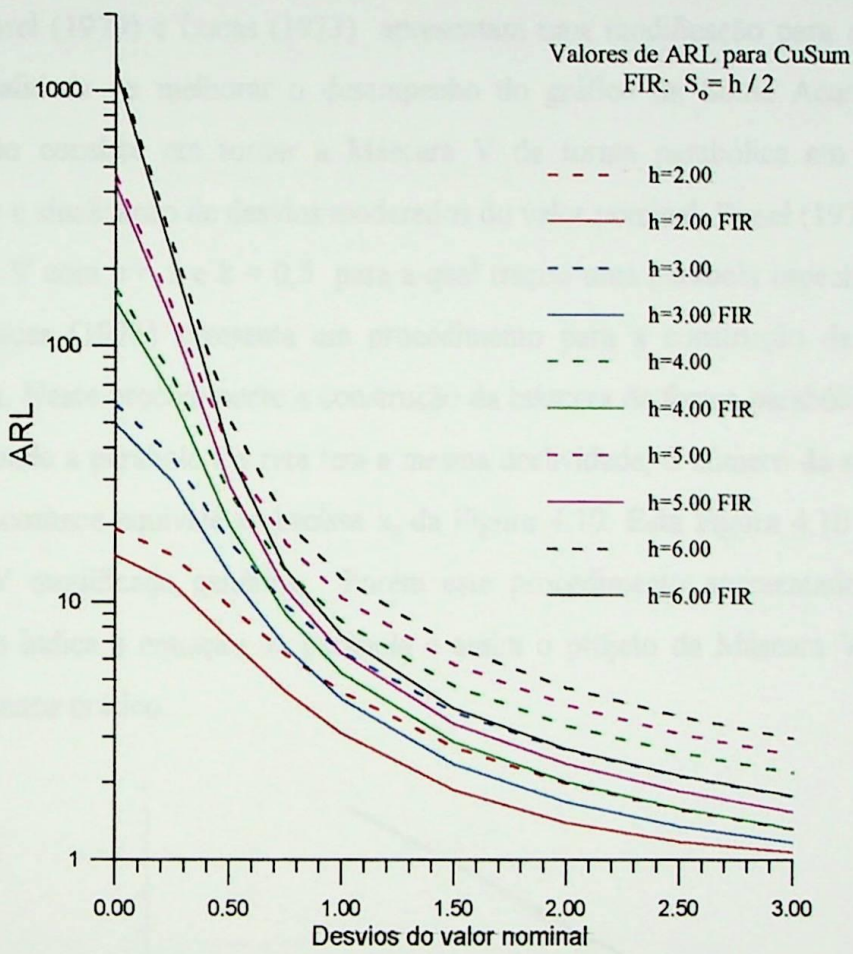


Figura 4.9 Comparação dos valores de ARL para CuSum em procedimentos com e sem inicialização FIR

A Figura 4.9 mostra que os procedimentos de soma acumulada utilizando a inicialização FIR apresentam valores de ARL $L(\delta)$ menores do que o procedimento padrão. Isto é conseguido porém ao custo de uma taxa de falso alarme geralmente menor, ou seja um valor de ARL $L(0)$ menor do que o valor de ARL $L(0)$ do procedimento padrão, especialmente para os procedimentos onde este valor é pequeno.

4.7.2 O projeto modificado da máscara V - Vértice de seção parabólica

A máscara V padrão pode demorar muito tempo até detectar grandes mudanças no valor médio do processo, uma vez que é projetada par detectar pequenos desvios do

valor nominal. Para melhorar o desempenho da Máscara V quando o processo tende a um desvio grande em seu valor nominal, pode-se modificar a máscara V em seu vértice.

Bissel (1979) e Lucas (1973) apresentam uma modificação para a Máscara V com a finalidade de melhorar o desempenho do gráfico de Soma Acumulada. Esta modificação consiste em tornar a Máscara V de forma parabólica em seu vértice, permitindo a sinalização de desvios moderados do valor nominal. Bissel (1979) apresenta a Máscara V com $h = 5$ e $k = 0,5$ para a qual traçou uma parábola específica para seu vértice. Lucas (1973) apresenta um procedimento para a construção da Máscara V modificada. Neste procedimento a construção da máscara de forma parabólica é baseada no ponto onde a parábola e a reta tem a mesma declividade, o número da amostra onde este fato acontece equivale à abscissa x_p da Figura 4.10. Esta Figura 4.10 mostra uma Máscara V modificada genérica. Porém este procedimento apresentado por Lucas (1973) não indica a equação da parábola e assim o projeto da Máscara V modificada torna-se menos prático.

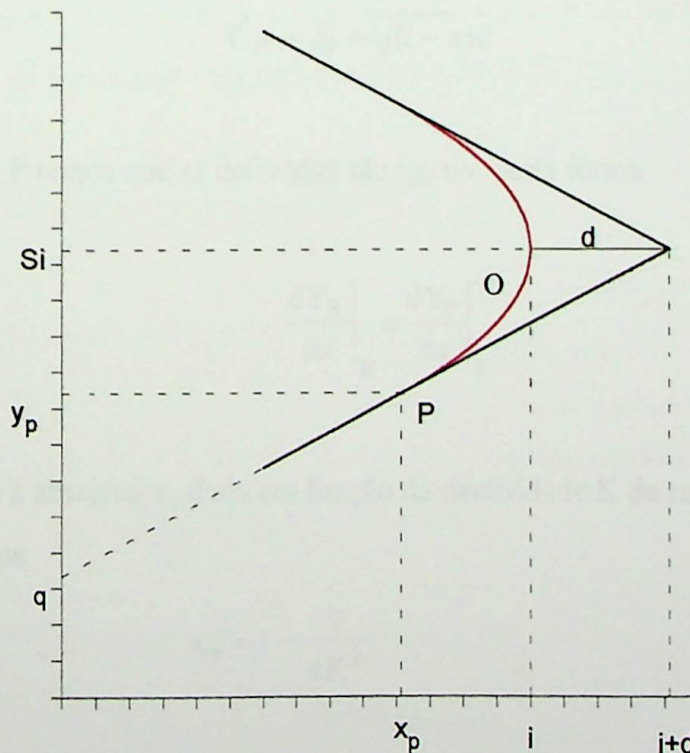


Figura 4.10 Máscara V Modificada

A Figura 4.10 mostra o esquema geométrico utilizado para a construção da Máscara V modificada. Este esquema permite uma construção da Máscara V modificada de maneira mais simples do que a apresentada por Lucas (1973). Com esta construção o

analista projeta a máscara modificada com a declividade K da reta e a distância d da máscara V . Com estes parâmetros o analista projeta o gráfico de maneira que satisfaça as especificações do ARL e do desvio que deseja detectar. De posse das equações da reta e da parábola para a Máscara V Modificada o analista pode desenhar a máscara. O analista deve escolher uma amostra i e obter o valor correspondente a soma acumulada S_i desta amostra. As equações da parábola (Y_P) e da equação da reta (Y_R) são

$$Y_R = Kx + q \quad 4.17$$

$$Y_P = S_i - \sqrt{(i-x)c} \quad 4.18$$

em que as constantes q e c são obtidas através das Equações 4.21 e 4.22. Estas equações referem-se à parte inferior da Máscara, para a parte superior as equações são

$$Y'_R = -Kx + q'$$

$$Y'_P = S_i + \sqrt{(i-x)c}$$

No ponto P temos que as derivadas são iguais, desta forma

$$\left. \frac{dY_R}{dx} \right|_p = \left. \frac{dY_P}{dx} \right|_p \quad 4.19$$

de onde obtemos a abscissa x_p dada em função da declividade K da reta e da constante c da parábola tal que

$$x_p = i - \frac{c}{4K^2} \quad 4.20$$

O valor q (ou q' para a parte superior da Máscara) da reta é obtido a partir da sua declinação K , da distância d e da soma acumulada S_i da amostra i , tal que

$$q = -K(i + d) + S_i \quad 4.21$$

$$q' = K(i + d) + S_i$$

A constante c da equação da parábola é obtida a partir da declinação K da reta e da distância d , tal que

$$c = 4K^2 d \quad 4.22$$

Este resultado permite de maneira simples obter a equação da parábola para o projeto da Máscara V modificada. A equação da parábola é obtida simplesmente a partir dos parâmetros K e d , a amostra i e a soma acumulada S_i . O ponto onde a parábola e a reta da máscara V tem a mesma declividade é o ponto de abscissa x_p que pode ser determinado por

$$x_p = i - \frac{c}{4K^2} = i - \frac{4K^2 d}{4K^2} = i - d \quad 4.23$$

Lucas (1973) apresenta os valores de ARL para a Máscara V modificada. A Figura 4.11 mostra uma comparação dos valores de ARL para os projetos utilizando a Máscara V, a Máscara V Modificada e a inicialização rápida FIR com $S_0 = h/2$. Todos os três projetos com os mesmos parâmetros $h = 2,00$ e $k = 0,5$.

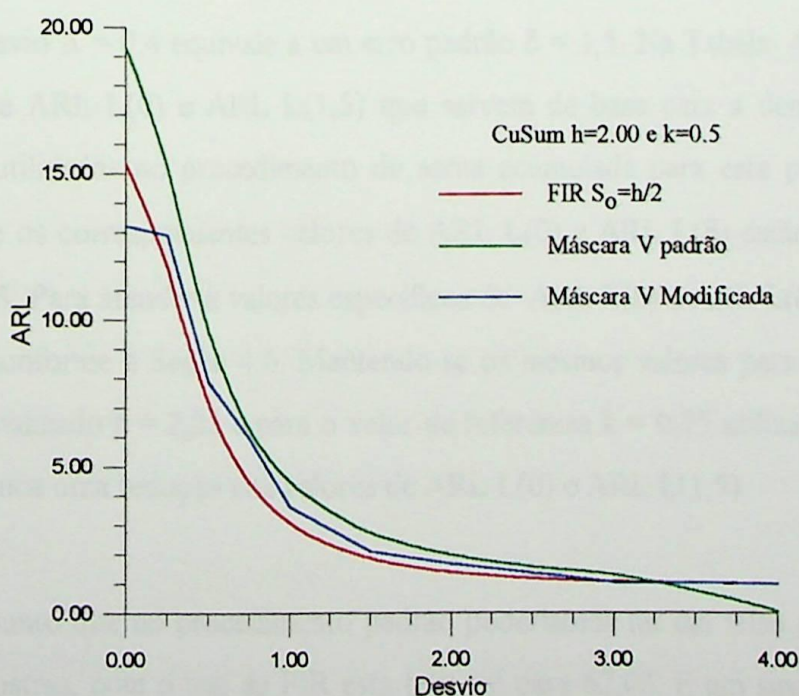


Figura 4.11 Comparação dos valores de ARL para a Máscara V, para a Máscara V Modificada e para a inicialização rápida FIR

Ambos os procedimentos, Máscara V modificada ou inicialização rápida FIR, tornam o CuSum mais sensível ao desvio do valor nominal do que a Máscara V padrão (Lucas, 1973). A Máscara V Modificada é melhor do que a Máscara V padrão em termos de seu valor de ARL $L(\delta)$, porém ao custo de uma taxa de falso alarme maior, ou seja, um valor de ARL $L(0)$ menor.

4.8 O uso da inicialização rápida FIR e da Máscara V Modificada para o exemplo genérico

4.8.1 A inicialização rápida FIR

Embora o analista tenha detectado o desvio Δ dentro do número de amostras especificado utilizando tanto a Máscara V padrão quanto a Máscara V para atender valores de ARL, e bem sucedido em suas especificações em ambos os projetos, apresenta-se a seguir o exemplo do que seria a utilização da inicialização rápida FIR.

O desvio $\Delta = 0,4$ equivale a um erro padrão $\delta = 1,5$. Na Tabela 4.7 encontra-se os valores de ARL $L(0)$ e ARL $L(1,5)$ que servem de base para a determinação dos parâmetros utilizados no procedimento de soma acumulada para este processo. Estes parâmetros e os correspondentes valores de ARL $L(0)$ e ARL $L(\delta)$ estão reproduzidos na Tabela 4.8. Para atender a valores específicos de ARL $L(0)$ e ARL $L(\delta)$, projeta-se a máscara V conforme a Seção 4.6. Mantendo-se os mesmos valores para o intervalo de decisão normalizado $h = 2,25$ e para o valor de referência $k = 0,75$ utilizado na Máscara V padrão temos uma redução nos valores de ARL $L(0)$ e ARL $L(1,5)$.

Enquanto que no procedimento padrão poderíamos ter um falso sinal em média em 69,9 amostras, com o uso da FIR esta taxa cai para 62,08. E um sinal de desvio do valor nominal que era detectado em média em 3,7 amostras, com o uso da FIR passa a ser detectado em média em 2,5 amostras.

Tabela 4.8 Comparação dos valores de ARL $L(0)$ e ARL $L(\delta)$ com o uso da inicialização rápida FIR.

		FIR - $S_0=h/2$			
		Desvios do valor nominal em erros padrão δ			
parâmetros		ARL $L(0)$		ARL $L(1.5)$	
h	k	$S_0=0$	FIR	$S_0=0$	FIR
1.50	0.75	21.3	18.15	2.73	2.01
2.25	0.75	69.9	62.08	3.73	2.50
3.00	0.75	221.0	205.2	4.73	3.01
3.75	0.75	688.0	656.9	5.76	3.53
4.50	0.75	2120	2068	6.73	4.04

O procedimento de soma acumulada com uso da inicialização rápida FIR sinalizou que o processo esteve fora de controle já na segunda amostra o que pode ser visto na Tabela 4.9. Porém este resultado já era conhecido da Tabela 4.3, uma vez que o processo inerentemente pode apresentar uma instabilidade na sua partida, porém estamos interessados em detectar o desvio não na inicialização do processo.

Na Tabela 4.9 tem-se $S_H(i)$ e $S_L(i)$ calculados com o uso das Equações 4.13 e 4.14, respectivamente, utilizando como FIR o valor $S_0 = h/2 = 0,30$.

O procedimento indicou que a próxima amostra (depois da segunda amostra) indicativa de uma situação fora de controle é a amostra de número 19. Assim o processo reinicializa-se na amostra de número 20, após a realização do ajuste adequado, com o valor da soma acumulada igual a 0,30, que é o valor $h/2$. E desta forma para os demais sinais de que o processo esteve fora de controle, sempre o processo é reinicializado com o valor $h/2$.

O procedimento tabular de somas acumuladas com utilização da inicialização rápida FIR sinalizou o desvio médio Δ na amostra de número 19. Sem o uso da FIR este

desvio foi sinalizado na amostra de número 18 (Tabela 4.3), não havendo portanto, uma melhora significativa do valor de ARL $L(\delta)$ para este caso.

Tabela 4.9 Valores de soma acumulada com utilização da inicialização rápida FIR para o exemplo genérico.

amostra						Algoritmo			
						$h = 2.25$	$H=0,61$		
						$S_H(i)$	N_H	$S_L(i)$	N_L
0						0.30		0.30	
1	93.2	94.2	93.8	93.1	93.3	0.6	1	0.0	0
2	93.1	93.3	93.8	93.3	94.5	1.0	2	0.0	0
3	93.7	92.3	91.9	93.3	92.9	0.30	0	0.0	0
4	92.7	92.3	93.2	93.5	94.0	0.2	1	0.0	0
5	93.5	93.2	93.0	91.7	93.7	0.0	0	0.0	0
6	91.9	92.1	92.8	93.6	93.4	0.0	0	0.0	0
7	93.4	92.9	92.3	93.2	94.0	0.0	0	0.0	0
8	93.5	93.3	92.7	92.8	93.7	0.0	0	0.0	0
9	92.3	93.0	92.6	92.7	93.0	0.0	0	0.1	1
10	93.2	93.3	93.1	93.0	93.7	0.0	0	0.0	0
11	92.5	93.5	92.6	92.8	92.6	0.0	0	0.0	0
12	93.9	93.0	93.3	93.5	93.6	0.3	1	0.0	0
13	92.7	93.4	93.2	93.0	93.0	0.1	2	0.0	0
14	92.6	92.9	94.2	92.7	92.8	0.0	0	0.0	0
15	92.5	92.7	93.4	94.5	92.5	0.0	0	0.0	0
16	93.1	93.1	93.0	92.8	93.3	0.0	0	0.0	0
17	93.6	93.4	93.8	93.5	93.6	0.4	1	0.0	0
18	93.6	93.5	94.1	93.1	92.4	0.5	2	0.0	0
19	93.9	92.7	92.4	93.8	94.0	0.7	3	0.0	0
20	92.3	93.1	93.0	93.8	93.2	0.30	0	0.0	0
21	93.9	92.8	92.9	93.1	93.9	0.4	1	0.0	0
22	93.2	93.6	93.4	92.9	93.2	0.5	2	0.0	0
23	93.5	93.4	92.6	93.4	93.0	0.4	3	0.0	0
24	94.4	94.0	92.9	92.3	93.1	0.6	4	0.0	0
25	94.2	93.6	94.4	92.0	93.3	0.9	5	0.0	0
26	94.0	92.4	91.7	93.3	93.9	0.30	0	0.0	0
27	93.8	93.1	93.1	93.7	92.7	0.4	1	0.0	0
28	93.7	93.8	93.5	93.9	93.1	0.8	2	0.0	0
29	93.2	93.2	93.2	92.6	93.9	0.30	0	0.0	0
30	91.4	93.8	93.3	92.9	92.2	0.0	0	0.1	1
31	93.5	94.7	92.3	93.5	93.4	0.3	1	0.0	0
32	92.4	92.2	93.2	93.8	93.5	0.1	2	0.0	0
33	93.5	92.5	93.0	93.4	93.0	0.0	0	0.0	0
34	93.7	93.8	93.0	92.5	92.0	0.0	0	0.0	0
35	94.3	93.9	93.3	93.6	93.5	0.5	1	0.0	0
36	93.1	94.6	93.5	93.7	93.4	1.0	2	0.0	0

4.8.2 A Máscara V modificada

Para construção da Máscara V modificada o analista escolhe a amostra sobre a qual a máscara será superposta. De posse do valor da soma acumulada correspondente, o analista calcula a parábola para o vértice da máscara através da Equação 4.18. A reta da máscara é dada pela Equação 4.17. É preciso calcular as constantes destas equações, que são dadas pelas Equações 4.21 e 4.22.

O analista deseja comparar a Máscara V modificada com a Máscara V padrão, em que alguns dos parâmetros de projeto da máscara são: $d = 2,6$, $K = 0,2$. Supondo que o analista esteja monitorando o processo e a amostra a ser utilizada seja a amostra de número 17, desta maneira, da Tabela 4.2 temos que, $i=17$ e $S_i=2,3$. Assim, para a parte inferior da máscara, temos que

$$q = -K(i + d) + S_i = -0,2(17 + 2,6) + 2,3 = -1,62$$

e a equação da reta é dada por

$$Y_R = Kx + q = 0,2x - 1,62$$

A equação da parábola será dada por

$$Y_p = S_i - \sqrt{(i-x)c}$$

em que

$$c = 4K^2d$$

Desta maneira

$$c = 4K^2d = 4(0,2)^2 \times 2,6 = 0,416$$

e a parábola é então dada por

$$Y_p = S_i - \sqrt{(i-x)c} = 2,3 - \sqrt{(17-x) \times 0,416}$$

Para a parte superior da Máscara V Modificada superposta à amostra de número 17 as equações da reta e da parábola são

$$Y'_R = -Kx + q' = -0,2x + 6,22$$

$$Y'_P = S_i + \sqrt{(i-x)c} = 2,3 + \sqrt{(17-x) \times 0,416}$$

O ponto onde a reta e a parábola tem a mesma derivada é dado pela Equação 4.20 ou 4.23. Para a mostra de número 17 este ponto é a abscissa 14,4.

O analista então de posse destas equações desenha a Máscara V Modificada e como nenhum ponto anterior encontra-se fora dos limites da parábola ou da reta, estabelece que o processo não esteve fora de controle até então. A Figura 4.12 mostra a Máscara V Modificada sobre a amostra 17 e a indicação de que o processo não está fora de controle.

Porém para a amostra de número 18 o processo está fora de controle uma vez que a amostra de número 16 está plotada aquém do traçado tanto da reta quanto da parábola. O analista deve então agir sobre o processo para um ajuste.

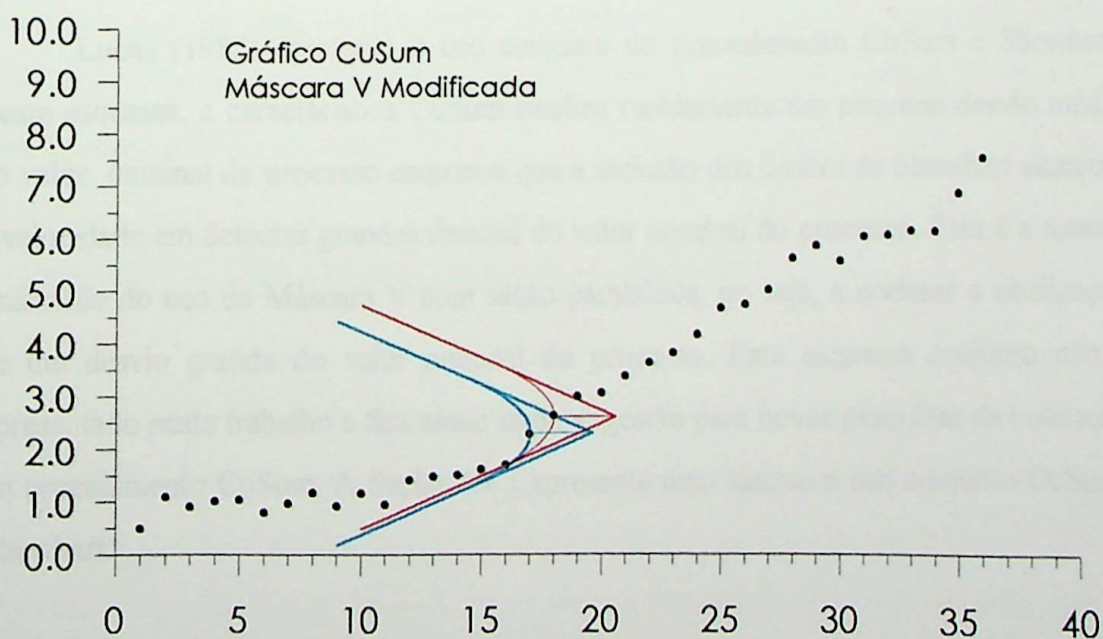


Figura 4.12 Gráfico de Soma Acumulada e Máscara V Modificada para o exemplo genérico

O analista detectou o desvio Δ na amostra de número 18, tanto com o uso da Máscara V padrão quanto com o uso da Máscara V Modificada. Não houve portanto uma melhora significativa em termos de ARL $L(\delta)$. Porém como o desvio detectado é pequeno, o uso da Máscara V Modificada não traria, a princípio, melhora, uma vez que seu uso é indicado para desvios maiores do nível médio do processo.

4.9 Outros aspectos do procedimento de Soma Acumulada

O procedimento de Soma Acumulada apresentado teve como base fundamentos estatísticos. Neste procedimento os valores de ARL são escolhidos *ad doc* para atender os níveis de qualidade aceitável (NQA) e a taxa de falso alarme (Chiu, 1974). Desta forma os aspectos econômicos, como custo de amostragem, intervalo de amostragem, lucro por hora com o processo atuando sob controle e fora de controle, entre outros, não foram considerados. Esta é uma abordagem que ficará como sugestão para novos trabalhos comparativos entre CuSum de base estatística e CuSum de base econômica. Na Seção 4.9.1 é apresentada uma síntese deste modelo.

Lucas (1982) apresenta o uso conjunto do procedimento CuSum e Shewhart. Neste esquema, a característica CuSum sinaliza rapidamente um pequeno desvio médio do valor nominal do processo enquanto que a inclusão dos limites de Shewhart aumenta a velocidade em detectar grandes desvios do valor nominal do processo. Esta é a mesma finalidade do uso da Máscara V com seção parabólica, ou seja, a acelerar a sinalização de um desvio grande do valor nominal do processo. Este esquema conjunto não é apresentado neste trabalho e fica como outra sugestão para novas pesquisas da utilização do procedimento CuSum. A Seção 4.9.2 apresenta uma síntese o uso conjunto CuSum-Shewhart.

4.9.1 O projeto econômico de CuSum - Síntese

O projeto de um gráfico de controle com base econômica é desenvolvido de maneira que o custo de amostragem e testes, os custos associados a investigar e corrigir

as causas especiais e os custos de uma produção de não-conformes afetem a escolha dos limites de controle (Montgomery, 1991).

Chiu (1974) aborda o projeto econômico do gráfico CuSum para controlar médias normais. O projeto econômico é baseado na *Função Perda* por hora de produção. Esta *Função Perda* depende do tamanho da amostra, do intervalo de amostragem, do valor de referência e do intervalo de decisão. Devem ser conhecidos o lucro por intervalo de tempo em que o processo opera sob controle, e o lucro por operar fora de controle. Além de terem de ser conhecidos os custos para coletar uma amostra e para manter o processo sob controle, entre outros.

Vance (1986) propôs um programa para cálculo dos valores de ARL para CuSum. O programa apresentado pode facilitar o projeto econômico de procedimento de soma acumulada, pois para o projeto econômico é necessário minimizar a função perda iterativamente, o que requer muitos cálculos de ARL.

O projeto econômico requer que o analista modele a ocorrência das causas especiais e que faça uma estimativa dos custos previstos no modelo. Estes são aspectos que podem representar dificuldades em se projetar o gráfico de controle do ponto de vista econômico (Montgomery, 1991).

4.9.2 O uso conjunto CuSum- Shewhart - Síntese

A modificação ao procedimento CuSum para incluir a propriedade dos gráficos de Shewhart é feita adicionando-se o critério dos limites de controle. O gráfico Shewhart (ou 3-sigma) é um gráfico CuSum com os parâmetros $K = 3\sigma$ e $h = 0$. Os limites Shewhart são dados com base na estatística *soma acumulada padronizada*, isto é, dividida pelo desvio padrão do processo. Desta maneira os limites de Shewhart são normalmente 3, 3.5 e 4.0. Se a estatística *soma acumulada padronizada* exceder o limite de Shewhart do procedimento utilizado o processo será dito fora de controle.

Lucas (1982) apresenta o *procedimento tabular* para o uso conjunto CuSum-Shewhart. Os valores de ARL este projeto são tabelados a fim de que possa avaliar se haverá melhoras suficientes para justificar o uso do procedimento conjunto.

4.10 Considerações Adicionais

O projeto do gráfico de Soma Acumulada estabelece a priori a declividade da máscara V a ser utilizada. Montgomery (1991) sugere que esta declividade seja $K = \Delta/2$, porém é de interesse verificar o que acontece com uma escolha diferente deste valor.

Outro aspecto que pode ser avaliado é o desejo de se detectar um desvio Δ diferente daquele utilizado no projeto da Máscara V padrão e as modificações que a Máscara V sofre.

4.10.1 Declividades diferentes

O uso de declividades K diferentes, para um mesmo desvio Δ , não altera o valor da distância d que é função dos erros tipo I e II e do erro padrão δ . Estes valores não se alteram em função da declividade K . Porém, o ângulo θ é diretamente proporcional a declividade, assim um aumento da declividade ocasiona um aumento do ângulo θ , o que pode ser verificado na Figura 4.13.

As máscaras com declividade maior são menos sensíveis a detectar o desvio Δ do que as máscaras com declividade menor. A Figura 4.14 mostra três Máscaras V para o exemplo genérico da Seção 4.4. O desvio que o analista deseja detectar é $\Delta = 0,4$. As declividades K utilizadas são: um terço do desvio a ser detectado (ou seja, $K = \Delta/3$), a metade do desvio (ou seja, $K = \Delta/2$) e o próprio desvio ($K = \Delta$).

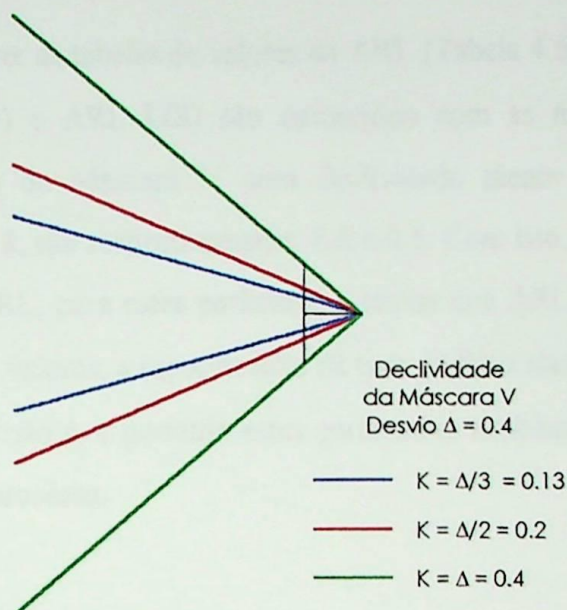


Figura 4.13 - Máscaras V com declividades K diferentes, projetadas para detectar o mesmo desvio Δ .

A Figura 4.14 mostra as Máscaras V para o exemplo genérico, com declividades K diferentes. O desvio $\Delta = 0,4$ que na Máscara V padrão foi detectado na 18ª amostra, com o uso de uma máscara V mais sensível, ou seja com declividade menor, foi detectado na amostra de número 17. A máscara com declividade maior não foi capaz de detectar o desvio desejado.

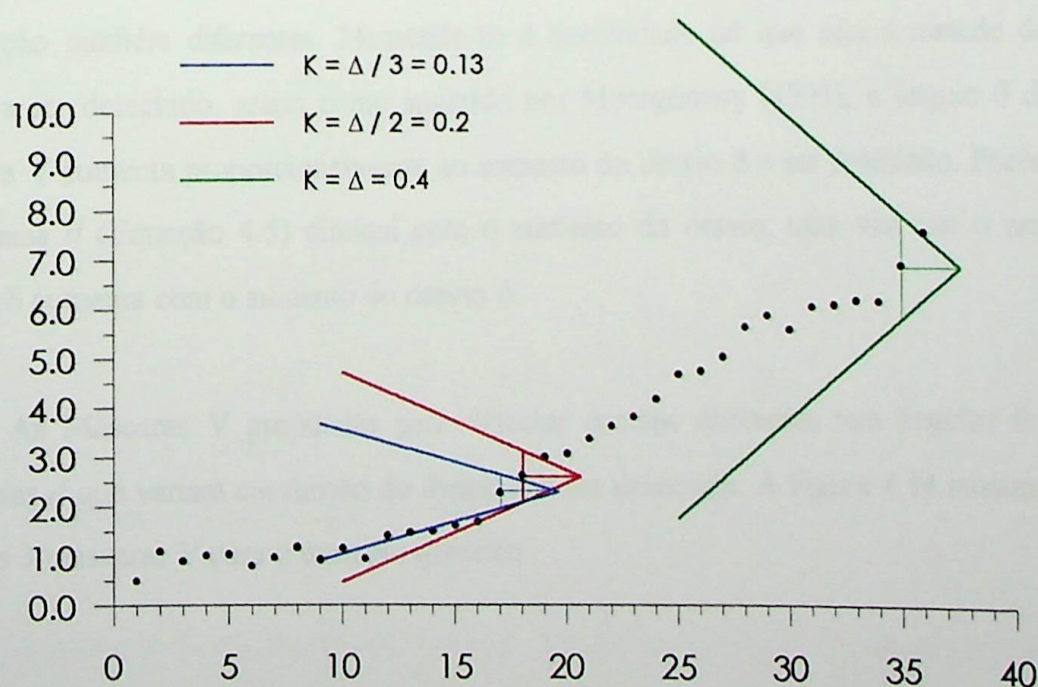


Figura 4.14 - Máscaras V com declividades diferentes, para o exemplo genérico

O analista deve recorrer às tabelas de valores de ARL (Tabela 4.5) para certificar se os valores de ARL $L(0)$ e ARL $L(\delta)$ são cumpridos com as modificações na declividade K . Com o uso da Máscara V com declividade menor ($K = 0,13$) os parâmetros normalizados h e k , são respectivamente; 8,6 e 0,5. Com isto, extrapolando a Tabela 4.5, de valores de ARL, para estes parâmetros, temos que ARL $L(0) = 3400$ e ARL $L(\delta) = 9,31$. Com estes valores, a especificação da taxa de falso alarme é cumprida, porém o valor de ARL $L(\delta)$ não é, e portanto estes parâmetros também não devem ser utilizados para monitorar o processo.

4.10.2 Desvios diferentes

No exemplo genérico apresentado, o analista deseja detectar um desvio $\Delta = 0,4$ com a Máscara V com declividade $K = \Delta/2$. Porém, se desejasse detectar um desvio Δ *menor*, mantendo a mesma declividade da Máscara V, obteria a máscara (em verde) representada na Figura 4.14 com a distância $d = 10,64$. A Máscara V com $d = 2,6$ é a Máscara V padrão projetada na Seção 4.4. Para um desvio Δ *maior* do que 0,4 e a mesma declividade K , a Máscara V padrão projetada tem a distância $d = 1,2$.

As máscaras utilizadas para detectar desvios Δ diferentes têm parâmetros de construção também diferentes. Mantendo-se a declividade tal que seja a metade do desvio a ser detectado, assim como sugerido por Montgomery (1991), o ângulo θ da Máscara V aumenta proporcionalmente ao aumento do desvio Δ a ser detectado. Porém a distância d (Equação 4.5) diminui com o aumento do desvio, uma vez que o erro padrão δ aumenta com o aumento do desvio Δ .

As Máscaras V projetadas para detectar desvios diferentes tem ângulos θ e distâncias d que variam em função do desvio Δ a ser detectado. A Figura 4.14 mostra o uso das 3 máscaras V para o exemplo genérico.

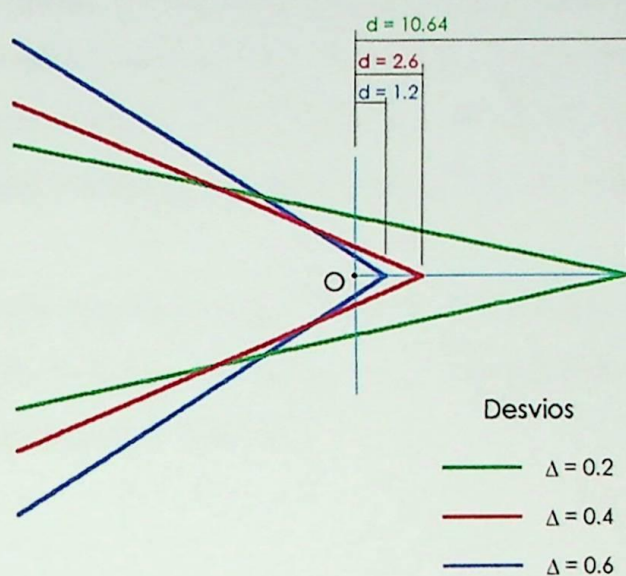


Figura 4.15 - Máscara V para diferentes desvios, mantendo-se a mesma declividade $K = \Delta/2$.

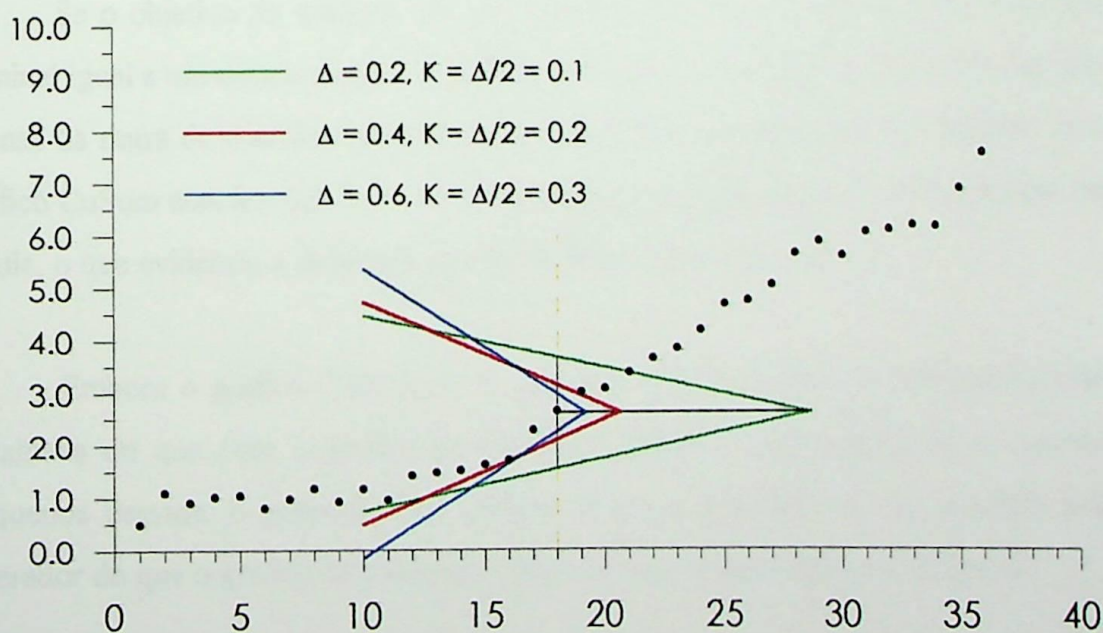


Figura 4.16 - Gráfico CuSum utilizando 3 Máscaras V para 3 desvios Δ diferentes, com declividade $K = \Delta/2$.

A Máscara V projetada para detectar um desvio $\Delta = 0,2$ o faz na amostra de número 21. Os valores normalizados de H e K para a Máscara V projetada são: $h = 0,96$

e $k = 0,37$. Observando-se a Tabela 4.5 para valores de ARL, tem-se que extrapolando os valores de h e k , para os valores normalizados da Máscara projetada, não é possível obter uma taxa de falso alarme maior do que 32 amostras, nem mesmo seria possível detectar desvio $\Delta = 0,2$ em até 5 amostras, que são as especificações do analista.

A Máscara V projetada para detectar um desvio $\Delta = 0,6$ o faz na amostra de número 36. Uma interpolação da Tabela 4.5 sugere que as especificações do analista possam ser satisfeitas em termos de valores de ARL.

4.11 Conclusões

O gráfico de controle CuSum mostra-se eficiente em detectar pequenos desvios do valor nominal, além de ter a propriedade de estimar o valor médio do processo quando este se apresenta fora de controle.

Se o objetivo do analista for, por exemplo, detectar um desvio médio do valor nominal igual a um desvio padrão ($1\text{ SD}(x)$), utilizando um gráfico de Shewhart com uso apenas da regra de decisão básica, este será detectado em média em 44 amostras. Já o gráfico CuSum com $k = 0,5$ e $h = 4,78$ irá detectar o mesmo desvio em 9,7 amostras em média, o que evidencia a diferença de sensibilidade destes dois gráficos.

Embora o gráfico CuSum ou o algoritmo exija do projetista uma técnica mais detalhada do que para o gráfico de Shewhart, diante da necessidade de se detectar pequenos desvios, o procedimento CuSum se torna mais fácil de ser utilizado pelo operador do que o gráfico de Shewhart com o uso das regras adicionais de decisão.

O gráfico CuSum e o algoritmo de Soma Acumulada têm apenas uma regra de decisão a ser utilizada: o uso da máscara V ou o intervalo de decisão H, respectivamente. Estes são critérios objetivos e simples de serem utilizados, não exigindo do operador um grau de subjetividade na análise das tendências ou mesmo a interpretação das regras de decisão de Shewhart.

O gráfico CuSum ou algoritmo de Soma Acumulada permitem estabelecer os valores de $ARL L(0)$ e $ARL L(\delta)$ no seu projeto para monitoramento do processo, detectando pequenos desvios mais rapidamente dos que os gráficos de Shewhart, mesmo quando se usam as quatro regras de decisão.

Se no processo monitorado for necessário detectar também grandes desvios do valor nominal é possível utilizar a Máscara V com vértice parabólico, que aumenta a sensibilidade do procedimento de Soma Acumulada.

A sensibilidade do gráfico CuSum pode ser aumentada também com a utilização do procedimento de inicialização rápida FIR, em que se altera o valor inicial da estatística Soma Acumulada. Este procedimento acelera a sinalização do desvio médio, no caso do processo inicializar-se fora de controle e tem seu efeito rapidamente anulado no caso de processos que se inicializam sob controle.

Uma outra alternativa de procedimento para a detecção de pequenos desvios do valor médio do processo é o gráfico de controle EWMA apresentado no Capítulo 5, a seguir.

CAPÍTULO 5

GRÁFICO EWMA

5.1 Introdução

O gráfico de controle EWMA – Exponentially Weighted Moving Average – foi apresentado inicialmente por Roberts (1959) como o ‘gráfico de médias móveis geometricamente ponderadas’. Diferentemente do gráfico de Shewhart, em que a estatística plotada no gráfico de controle pondera integralmente a observação mais recente e não considera as observações prévias, no gráfico EWMA todas as amostras coletadas são ponderadas.

O peso dado às amostras decresce geometricamente de maneira que, em linhas gerais, a observação mais recente recebe um peso maior e as amostras anteriores pesos sucessivamente menores, da mais recente até a mais remota. A ponderação é feita com o uso de uma constante de suavização λ , que é um dos parâmetros do projeto do gráfico.

Segundo Lucas e Saccucci (1990) o gráfico EWMA é sensível a desvios pequenos do valor médio do processo. O projeto do gráfico EWMA prevê que o analista estabeleça previamente o valor de ARL $L(\delta)$ e o valor de ARL $L(0)$ que serão utilizados no processo.

A estatística EWMA pode ser utilizada para observações individuais, para a média amostral, como para outras estatísticas. Montgomery (1991) apresenta o gráfico EWMA para o número de não conformidades e para o intervalo de tempo entre ocorrências, seguindo um modelo de Poisson. Lucas e Saccucci (1990) apresentam a inicialização rápida FIR para o gráfico EWMA, semelhante a adotada no procedimento de soma acumulada. Apresentam também é possível uma combinação dos gráficos EWMA e Shewhart, melhorando a capacidade de detectar desvios do valor nominal, tanto pequenos quanto grandes.

O gráfico EWMA tem uma certa similaridade com o gráfico de Shewhart quando comparados os procedimentos de tomada de decisão sobre a situação do processo. Diferentemente do procedimento de soma acumulada onde se utiliza uma máscara V para decidir sobre a situação do processo, o gráfico EWMA possui limites de controle, similarmente aos gráficos de Shewhart. A decisão sobre a situação do processo é obtida através do posicionamento da estatística EWMA no gráfico. Se plotada além dos limites de controle, o processo é dito fora de controle, se plotada entre os limites de controle, o processo é dito sob controle. Não há necessidade de outra regra de decisão para a tomada de decisão, o que torna o gráfico EWMA uma ferramenta simples de ser utilizada para monitorar o processo.

Embora o gráfico EWMA possua desempenho comparável ao procedimento de soma acumulada, ele é mais fácil de explicar aos usuários do que o procedimento CuSum, por sua semelhança com os gráficos de Shewhart (Woodall e Maragah, 1990).

5.2 O modelo EWMA

O gráfico EWMA não é uma seqüência de testes de hipóteses, mas um modelo de série temporal que tanto pode ser utilizado (i) para prever o próximo valor na série quanto para (ii) monitorar a série para detectar uma ausência de controle (Wheeler, 1995).

Segundo Crowder (1989), para processos que tem essencialmente variação aleatória com desvios periódicos no nível médio do processo, o gráfico EWMA é uma ferramenta para ser utilizada no monitoramento do processo. Para processos cujo desvio seja gradual, o gráfico EWMA torna-se uma ferramenta de previsão.

Hunter (1986) e Wheeler (1995) apresentam o gráfico EWMA utilizado para previsão. Neste caso, a estatística EWMA é plotada uma amostra à frente da amostra mais recente. Desta maneira, este gráfico fornece um mecanismo dinâmico de controle. Embora o gráfico EWMA possa ser utilizado para previsão, neste trabalho será apresentado o gráfico para monitoramento de processo, como em

Robinson e Ho (1978), Crowder (1987a e 1987b), Lucas e Saccucci (1990) e Montgomery (1991). A estatística EWMA apresentada por estes autores é dada pela Equação 5.1.

No procedimento EWMA as observações x_i , sequencialmente coletadas, tanto podem ser observações individuais do processo, como médias amostrais obtidas através de um plano de amostragem.

5.2.1 A Estatística EWMA

O procedimento de controle é baseado na estatística EWMA Z_i dada por

$$Z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)Z_{i-1} \quad 5.1$$

em que $0 < \lambda \leq 1$ é a constante de suavização que expressa quão remota é a memória do gráfico. O processo é então monitorado com base na estatística Z_i e nos limites de controle superior (LSC) e inferior (LIC) dados pelas Equações 5.10 e 5.12.

A estatística EWMA pode ser então escrita como

$$Z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda) \left[\lambda x_{i-1} + (1 - \lambda)Z_{i-2} \right] \quad 5.2$$

$$Z_i = \lambda x_i + \lambda(1 - \lambda)x_{i-1} + (1 - \lambda)^2 Z_{i-2} \quad 5.3$$

que de maneira genérica é dada por

$$Z_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j x_{i-j} + (1 - \lambda)^i Z_0 \quad 5.4$$

em que Z_0 é o valor inicial. O valor inicial Z_0 pode assumir o valor nominal do processo ou assumir outros valores num procedimento de inicialização rápida FIR, apresentado na Seção 5.5.

5.2.1.1 A constante de suavização λ

A constante de suavização $\lambda \in (0,1]$ representa a memória do gráfico. Pode-se observar, através da Equação 5.1, que para $\lambda = 1$ o valor da estatística EWMA depende apenas da observação mais recente, assim como no caso dos gráficos de controle de Shewhart. Ou seja, as amostras anteriores recebem peso nulo na formação da estatística utilizada no procedimento de controle.

Segundo Crowder (1989) pequenos valores de λ são indicados para detectar pequenos desvios do valor nominal, enquanto que valores maiores de λ são indicados para detectar desvios maiores.

Mantendo-se a mesma taxa de falso alarme, ou seja o mesmo valor de $ARL L(0)$, a constante de suavização λ a ser utilizada na estatística EWMA varia em função do desvio δ a ser detectado. Isto pode ser visto na Figura 5.1.

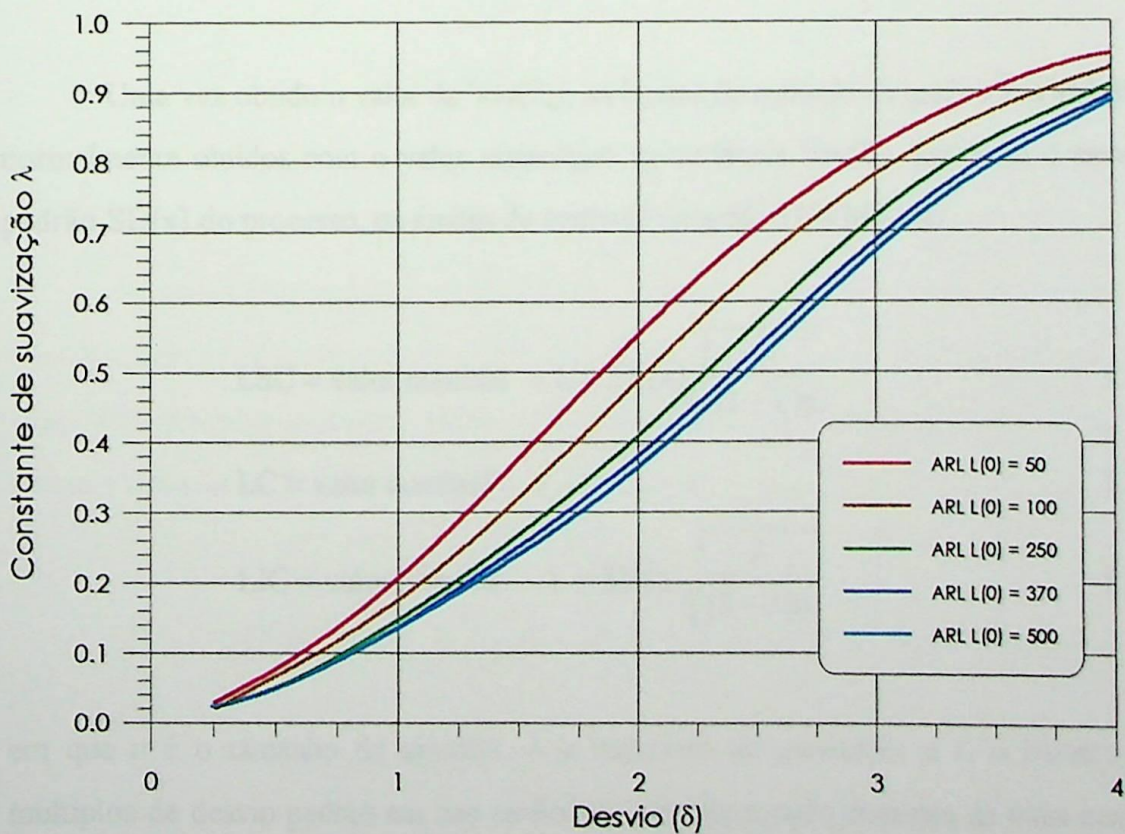


Figura 5.1 - Desvio $\delta \times$ Constante de suavização λ para valores fixos de $ARL L(0)$

Fonte: Adaptado de Crowder (1989) p. 158-159

5.2.2 A variância EWMA

Conforme Lucas e Saccucci (1990) para as observações $x_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ *iid*, a variância de Z_i é tal que

$$\text{Var}(Z_i) = \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) \left[1 - (1 - \lambda)^{2i} \right] \quad 5.5$$

porém, exceto para pequenos valores de λ , o valor da variância de Z_i rapidamente converge para seu valor assintótico, que é dado por

$$\text{Var}(Z_i) = \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) \quad 5.6$$

5.2.3 Os limites de controle do gráfico EWMA

Uma vez obtido o valor da $\text{Var}(Z_i)$, os limites de controle do gráfico EWMA são normalmente obtidos com o valor assintótico da variância $\text{Var}(Z_i)$. Estimado o desvio padrão $\text{SD}(x)$ do processo, os limites de controle do gráfico EWMA são

$$\text{LSC} = \text{valor nominal} + L \times \text{SD}(x) \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)n}} \quad 5.7$$

$$\text{LC} = \text{valor nominal} \quad 5.8$$

$$\text{LIC} = \text{valor nominal} - L \times \text{SD}(x) \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)n}} \quad 5.9$$

em que n é o tamanho da amostra, λ a constante de suavização e L o número de múltiplos de desvio padrão em que os limites controle estarão distantes da linha central LC. Nos gráficos de Shewhart este valor é 3 e por isso são chamados gráficos 3-sigma.

A Figura 5.2 mostra a variância de Z_i em função do número da amostra i . É possível observar que a $\text{Var}(Z_i)$ tende a seu valor assintótico em um número diferente de amostras dependendo da constante de suavização λ utilizada. Para constantes de suavização λ pequenas, este número de amostras é maior do que quando se utiliza uma constante de suavização λ maior.

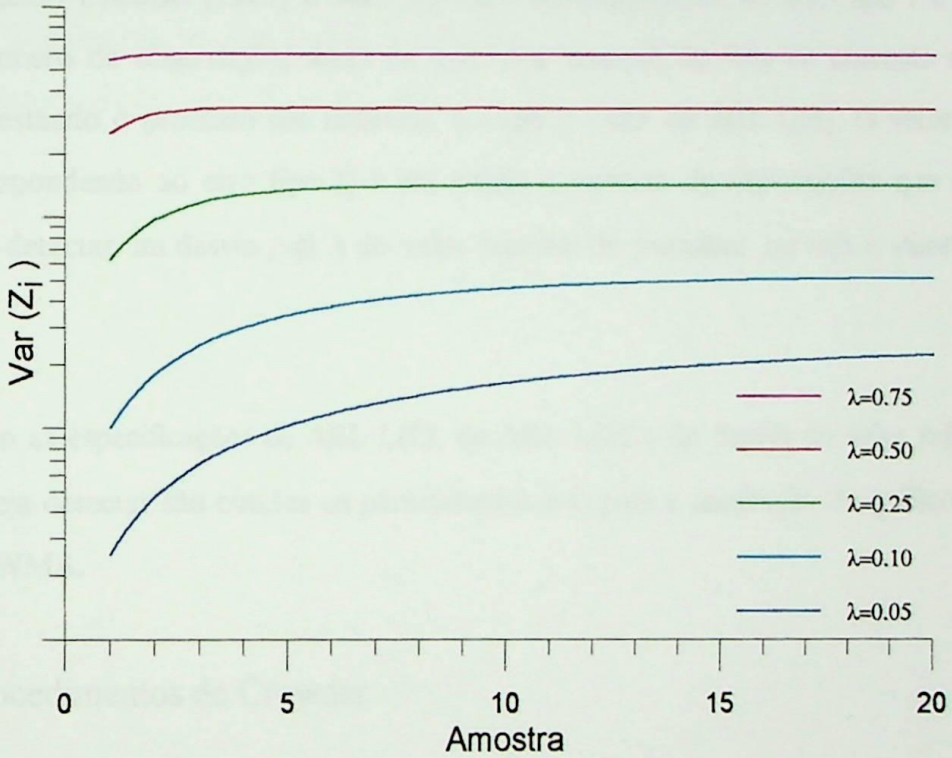


Figura 5.2 Variância da estatística Z_i

Segundo MacGregor e Harris (1990), os limites de controle verdadeiros para as observações iniciais são substancialmente menores do que os valores assintóticos, especialmente para pequenos valores da constante de suavização λ . Assim para as amostras iniciais os limites de controle são dados por

$$\text{LSC} = \text{valor nominal} + L \times \text{SD}(x) \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) \left[1 - (1 - \lambda)^{2i} \right]} \quad 5.10$$

$$\text{LC} = \text{valor nominal} \quad 5.11$$

$$\text{LIC} = \text{valor nominal} - L \times \text{SD}(x) \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) \left[1 - (1 - \lambda)^{2i} \right]} \quad 5.12$$

5.3 Procedimentos de projeto do gráfico EWMA

A estratégia de projeto do gráfico EWMA é a de encontrar o par (λ, L) que minimize o valor de ARL $L(\delta)$ para o valor de ARL $L(0)$ especificado.

Segundo Crowder (1989) o valor de ARL correspondente ao erro tipo I é em média o número de observações antes de que uma situação de fora de controle seja sinalizada, estando o processo sob controle, ou seja o valor de ARL $L(0)$. O valor de ARL correspondendo ao erro tipo II é em média o número de observações que são obtidas até detectar um desvio real Δ do valor nominal do processo, ou seja o valor de ARL $L(\delta)$.

Com as especificações de ARL $L(0)$, de ARL $L(\delta)$ e do desvio do valor médio que se deseja detectar são obtidos os parâmetros λ e L para a confecção do gráfico de controle EWMA.

5.3.1 Procedimentos de Crowder

Crowder (1987a, 1987b, 1989) apresentou três possíveis procedimentos para se projetar um gráfico EWMA. Utilizou um procedimento gráfico (Crowder, 1989) em que para dados valores de ARL $L(0)$ obtêm-se os parâmetros λ e L em função do desvio δ que o analista deseja detectar. O segundo procedimento é computacional (Crowder, 1987a) em que apresenta um programa no qual o usuário obtém os valores de ARL dados os valores de λ e L . É um procedimento iterativo em que o analista testa os pares de parâmetros até que as especificações de valores de ARL sejam satisfeitas. No terceiro procedimento Crowder (1987b) fornece uma tabela de valores de ARL para pares de parâmetros λ e L .

5.3.1.1 O procedimento gráfico

No procedimento gráfico são apresentados gráficos para serem utilizados na sequência de passos para o projeto do gráfico de controle EWMA. Os gráficos apresentados são: $\delta \times \lambda$ e $\lambda \times L$. O gráfico $\delta \times \lambda$ apresenta os valores de λ em função do desvio δ através de curvas com valores de ARL $L(0)$ constantes (Figura 5.1). O gráfico $\lambda \times L$ apresenta os valores de L em função da constante de suavização λ através de curvas de valores de ARL $L(0)$ constantes (Figura 5.3).

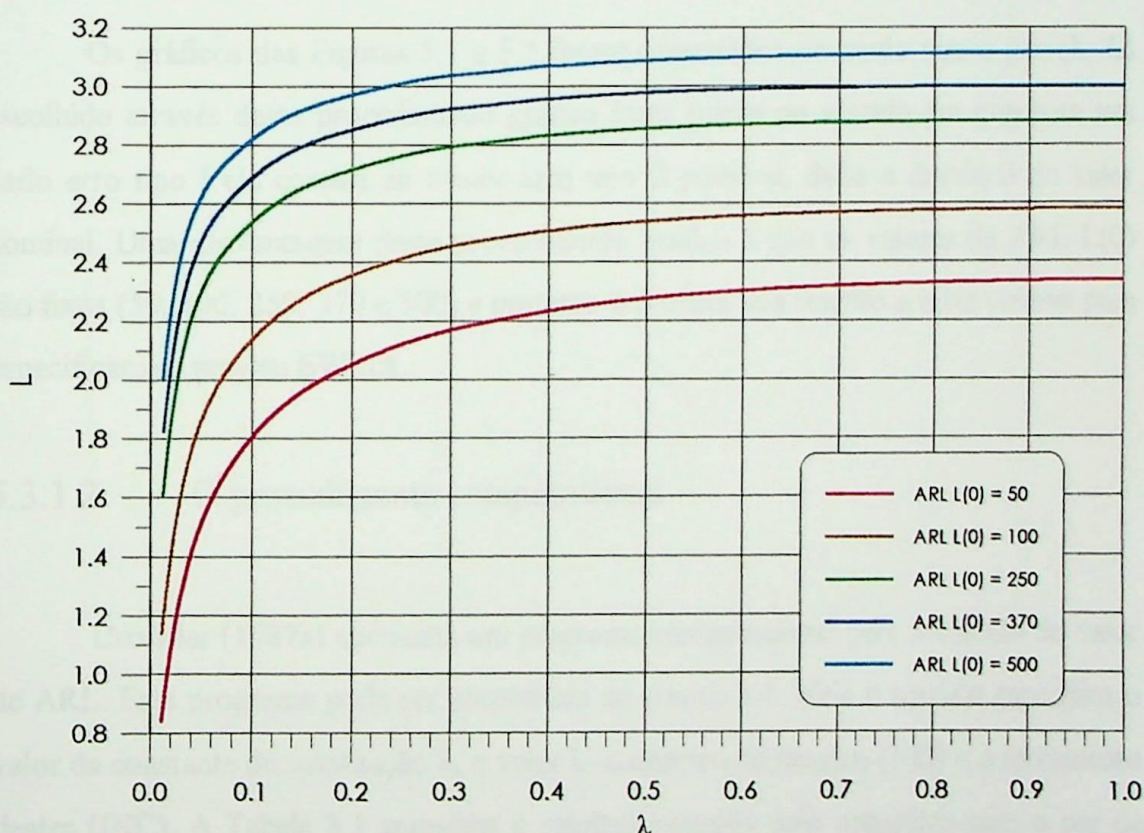


Figura 5.3 - Valores de L para o cálculo dos limites de controle do gráfico EWMA

Fonte: Adaptado de Crowder (1987b) p. 160-161

O projeto do gráfico EWMA através deste procedimento gráfico segue as seguintes etapas: (i) O analista escolhe, entre as opções, o valor de ARL $L(0)$. As opções apresentadas no gráfico são: 50, 100, 250, 370 e 500. Em seguida estabelece o desvio δ que deseja detectar. (ii) Diante destes valores o analista encontra o valor da constante de suavização λ através do gráfico da Figura 5.1. (iii) A partir do gráfico da Figura 5.3, o

analista obtém o valor de L , mantendo o valor de ARL $L(0)$. (iv) Finalmente faz uma análise de sensibilidade em torno do par (λ, L) encontrado, em termos do valor de ARL $L(\delta)$. Embora este seja o procedimento gráfico, é necessário recorrer à Tabela 5.2 para conduzir a análise, uma vez que através dos gráficos não é possível avaliar o valor de ARL $L(\delta)$. Com o par (λ, L) encontrado para o valor de ARL $L(0)$ e o desvio δ , o analista recorre à tabela e verifica se aquele par encontrado é capaz de detectar o desvio δ em um número de amostras dado pelo ARL $L(\delta)$ especificado. Esta análise poderá ser conduzida através de interpolação linear.

Os gráficos das Figuras 5.1 e 5.3 foram construídos de modo que o par (λ, L) escolhido através deste procedimento gráfico fosse ótimo no sentido em que para um dado erro tipo I ele conduz ao menor erro tipo II possível, dado o desvio δ do valor nominal. Uma desvantagem deste procedimento gráfico é que os valores de ARL $L(0)$ são fixos (50, 100, 250, 370 e 500) e portanto o analista fica restrito a estes valores para especificar seu projeto EWMA.

5.3.1.2 O procedimento computacional

Crowder (1987a) apresenta um programa computacional para o cálculo do valor de ARL. Este programa pode ser encontrado no Anexo 5.1. Nele o usuário especifica o valor da constante de suavização λ , o valor L , o número de desvios (ND) e o incremento destes (INC). A Tabela 5.1 apresenta o resultado gerado pelo programa para o par de parâmetros $\lambda = 0,25$ e $L = 2,25$.

O uso do programa é uma maneira rápida de verificar se para dado par de parâmetros (λ, L) os valores de ARL são compatíveis com os valores especificados pelo analista.

Tabela 5.1 - Resultado do programa de Crowder (1987a) de valores de ARL

EWMA - Exponentially Weighted Moving Average	
Programa criado por Stephen V. Crowder	
Dados para a listagem dos valores de ARL	
Constante de suavizacao	Lambda = .25
Fator que multiplica sigma nos limites de controle	L = 2.25
Numero de intervalos dos desvios	ND = 17
Incremento dos desvios	INC = .25
ARL (0.00) =	67.463
ARL (0.25) =	37.859
ARL (0.50) =	17.027
ARL (0.75) =	9.489
ARL (1.00) =	6.268
ARL (1.25) =	4.621
ARL (1.50) =	3.657
ARL (1.75) =	3.038
ARL (2.00) =	2.612
ARL (2.25) =	2.303
ARL (2.50) =	2.068
ARL (2.75) =	1.882
ARL (3.00) =	1.727
ARL (3.25) =	1.594
ARL (3.50) =	1.475
ARL (3.75) =	1.369
ARL (4.00) =	1.277

Como pode ser visto para o par (0,25; 2,25) um desvio $\delta = 1,5$ será detectado em média em 3,6 amostras com uma taxa de falso alarme de 67,4 amostras, em média.

5.3.1.3 Valores tabelados de ARL

Crowder (1987b) apresenta as Tabela 5.2 e 5.3: a Tabela 5.2 é uma tabela de valores de ARL para o gráfico EWMA bilateral e a Tabela 5.3 é uma tabela de valores do desvio padrão de ARL para o gráfico EWMA. Ambas apresentam valores de L , da constante de suavização λ e respectivamente os valores de ARL e de desvio padrão para cada par (λ, L) . Os valores apresentados nas Tabela 5.2 e 5.3 foram obtidos através de método de integração numérica para calcular os valores de ARL.

De posse do desvio δ que deseja detectar e das especificações ARL $L(0)$ e ARL $L(\delta)$, o analista percorre a Tabela 5.2. Nesta são encontrados os possíveis pares de valores (L, λ) que conduzem ao gráfico EWMA que cumpre com as especificações feitas pelo analista.

Nos casos em que mais de um par de valores (L, λ) são encontrados, uma maneira para escolher o par a ser utilizado é recorrer às Figuras 5.1 e 5.3 e à premissa de que para pequenos desvios utiliza-se um valor da constante de suavização λ pequeno e para desvios maiores, constantes de suavização λ maiores. A premissa acima é razoável porque λ grande é próximo do gráfico de Shewhart ($\lambda=1$) e este gráfico é melhor para detectar grandes desvios. Enquanto que para pequenos desvios, situação em que os gráficos de Shewhart não são tão bons, faz-se necessário utilizar teste de sequência, logo utiliza-se uma constante de suavização λ pequena.

Embora as Figuras 5.1 e 5.3 tenham sido plotadas para alguns valores fixos de ARL $L(0)$, que podem não ser os valores especificados, elas podem orientar quanto a escolha do par (λ, L) .

Crowder (1987b) apresenta ainda a Tabela 5.3 de desvio padrão dos valores de ARL para o gráfico EWMA bilateral. Estes valores permitem a escolha do par (λ, L) baseados no valor médio ARL (Tabela 5.2) e no seu desvio padrão.

Outros autores também apresentaram valores de ARL, como Roberts (1959) que os obteve através de simulação e Robinson e Ho (1978) que obteve os valores através de procedimento numérico. Através de maneiras diferentes, os autores encontraram valores de ARL muito próximos.

Tabela 5.2 - Valores de ARL para gráficos EWMA bilaterais

Desvio	L=2.00						L=2.25						L=2.5					
	Lambda						Lambda						Lambda					
	1.00	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	1.00	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	1.00	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05
0.00	21.98	22.88	26.45	38.56	73.28	127.53	40.90	42.25	47.78	67.46	125.10	215.39	80.52	82.49	91.17	124.18	223.35	379.40
0.25	19.13	18.86	20.12	24.83	34.49	43.94	34.53	33.07	33.48	37.86	47.50	56.78	65.77	61.07	58.33	59.66	66.35	73.98
0.50	13.70	12.34	11.89	12.74	15.53	18.97	23.23	19.78	17.62	17.03	19.12	22.52	41.49	33.26	27.16	23.28	23.63	26.64
0.75	9.21	7.86	7.29	7.62	9.36	11.64	14.67	11.64	9.93	9.49	11.02	13.44	24.61	18.05	13.96	11.96	12.95	15.41
1.00	6.25	5.26	4.91	5.24	6.62	8.38	9.41	7.31	6.30	6.27	7.63	9.55	14.92	10.57	8.27	7.52	8.75	10.79
1.25	4.40	3.76	3.95	3.59	5.13	6.56	6.29	4.95	4.42	4.62	5.84	7.42	9.46	6.75	5.52	5.39	6.60	8.31
1.50	3.24	2.84	2.80	3.19	4.20	5.41	4.41	3.58	3.34	3.66	4.74	6.08	6.30	4.65	4.03	4.18	5.31	6.78
1.75	2.49	2.26	2.29	2.68	3.57	4.62	3.24	2.75	2.68	3.04	4.01	5.17	4.41	3.43	3.14	3.43	4.46	5.75
2.00	2.00	1.88	1.95	2.32	3.12	4.04	2.49	2.21	2.23	2.61	3.48	4.51	3.24	2.67	2.57	2.92	3.86	5.00
2.25	1.67	1.61	1.70	2.06	2.78	3.61	2.00	1.85	1.92	2.30	3.09	4.02	2.49	2.17	2.18	2.56	3.42	4.43
2.50	1.45	1.42	1.51	1.85	2.52	3.26	1.67	1.60	1.69	2.07	2.79	3.63	2.00	1.83	1.90	2.29	3.07	4.00
2.75	1.29	1.29	1.37	1.69	2.32	2.99	1.45	1.42	1.51	1.88	2.55	3.32	1.67	1.59	1.69	2.08	2.80	3.64
3.00	1.19	1.19	1.26	1.55	2.16	2.76	1.29	1.29	1.38	1.73	2.36	3.06	1.45	1.41	1.52	1.91	2.57	3.36
3.25	1.12	1.13	1.18	1.43	2.03	2.56	1.19	1.19	1.27	1.59	2.21	2.85	1.29	1.29	1.39	1.77	2.39	3.12
3.50	1.07	1.08	1.12	1.32	1.93	2.39	1.12	1.13	1.21	1.48	2.09	2.66	1.19	1.19	1.28	1.64	2.24	2.92
3.75	1.04	1.05	1.08	1.24	1.83	2.26	1.07	1.08	1.13	1.37	1.99	2.49	1.12	1.13	1.20	1.52	2.13	2.74
4.00	1.02	1.03	1.05	1.17	1.73	2.15	1.04	1.05	1.08	1.28	1.91	2.34	1.07	1.08	1.13	1.42	2.04	2.58

Desvio	L=2.75						L=3.00						L=3.5					
	Lambda						Lambda						Lambda					
	1.00	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	1.00	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	1.00	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05
0.00	167.80	170.64	184.56	242.20	420.78	702.19	370.40	374.50	397.56	502.90	842.15	1379.4	21149	2157.9	2227.3	2640.1	4106.3	6464.0
0.25	132.28	119.08	107.13	98.32	96.17	98.23	281.15	245.76	208.54	171.09	144.74	134.9	1502.7	1245.9	951.18	624.78	385.49	281.00
0.50	78.12	59.04	43.97	32.98	29.50	31.50	155.22	110.76	75.35	48.45	37.41	37.37	723.81	468.68	267.36	123.43	64.72	54.56
0.75	43.51	29.47	20.44	15.34	15.20	17.56	81.22	50.92	31.46	20.16	17.90	19.95	334.40	182.12	88.70	38.68	25.33	25.63
1.00	24.91	16.03	11.19	9.11	9.99	12.11	43.89	25.64	15.74	11.15	11.38	13.51	160.95	78.05	35.97	17.71	14.79	16.60
1.25	14.96	9.58	7.04	6.29	7.42	9.25	24.96	14.26	9.21	7.39	8.32	10.23	81.80	37.15	17.64	10.48	10.37	12.32
1.50	9.46	6.24	4.92	4.78	5.92	7.51	14.97	8.72	6.11	5.47	6.57	8.26	43.96	19.63	10.19	7.25	8.00	9.84
1.75	6.30	4.39	3.72	3.86	4.94	6.34	9.47	5.80	4.45	4.34	5.45	6.94	24.96	11.46	6.70	5.52	6.54	8.21
2.00	4.41	3.28	2.98	3.25	4.26	5.49	6.30	4.15	3.47	3.62	4.67	6.00	14.97	7.33	4.86	4.47	5.55	7.06
2.25	2.49	2.13	2.14	2.51	3.37	4.37	3.24	2.52	2.41	2.75	3.67	4.76	6.30	3.76	3.10	3.28	4.29	5.56
2.50	2.00	1.81	1.88	2.27	3.06	3.98	2.49	2.09	2.10	2.47	3.32	4.32	4.41	2.40	2.30	2.63	3.87	5.03
2.75	1.67	1.58	1.68	2.09	2.81	3.66	2.00	1.79	1.87	2.26	3.05	3.97	3.24	2.40	2.06	2.41	3.54	4.60
3.00	1.45	1.41	1.53	1.93	2.60	3.39	1.67	1.57	1.69	2.09	2.82	3.67	2.49	2.03	2.05	2.41	3.26	4.25
3.25	1.29	1.29	1.40	1.80	2.42	3.17	1.45	1.41	1.53	1.95	2.62	3.42	2.00	1.76	1.85	2.23	3.03	3.95
3.50	1.19	1.10	1.29	1.69	2.27	2.99	1.29	1.29	1.41	1.84	2.45	3.22	1.67	1.56	1.69	2.10	2.84	3.69
3.75	1.12	1.13	1.21	1.57	2.16	2.82	1.19	1.20	1.31	1.73	2.30	3.04	1.45	1.40	1.55	1.99	2.66	3.47

Fonte: Adaptado de Crowder (1987b)

Tabela 5.3 - Valores do desvio padrão de ARL para o gráfico EWMA Bilateral

Desvio	L=2.00						L=2.25						L=2.5					
	Lambda						Lambda						Lambda					
	1.00	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	1.00	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	1.00	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05
0.00	21.47	22.26	25.43	36.45	68.45	118.45	40.40	41.59	46.61	64.98	119.26	204.26	80.02	81.79	89.85	121.33	216.45	366.08
0.25	18.62	18.18	18.97	22.44	29.00	33.97	34.03	32.34	32.14	34.94	40.61	44.27	65.27	60.27	56.77	56.19	58.19	58.69
0.50	13.19	11.58	10.62	10.28	10.62	11.10	22.73	18.94	16.11	14.06	13.12	13.01	40.99	32.34	25.42	19.76	16.46	15.34
0.75	8.69	7.05	6.00	5.35	5.26	5.48	14.16	10.75	8.41	6.78	6.13	6.16	24.10	17.06	12.21	8.77	7.20	6.93
1.00	5.73	4.45	3.66	3.20	3.16	3.34	8.90	6.40	4.85	3.86	3.57	3.69	14.41	9.57	6.60	4.72	4.05	4.05
1.25	3.87	2.95	2.42	2.13	2.15	2.30	5.77	4.05	3.06	2.48	2.38	2.51	8.94	5.76	3.96	2.92	2.64	2.72
1.50	2.69	2.05	1.71	1.53	1.58	1.71	3.88	2.72	2.08	1.74	1.73	1.85	5.78	3.69	2.59	1.99	1.89	1.99
1.75	1.93	1.49	1.28	1.17	1.22	1.33	2.69	1.91	1.51	1.30	1.33	1.44	3.88	2.51	1.81	1.46	1.44	1.54
2.00	1.41	1.13	1.00	0.84	0.99	1.09	1.93	1.41	1.16	1.03	1.07	1.16	2.70	1.79	1.35	1.13	1.15	1.24
2.25	1.06	0.87	0.81	0.79	0.82	0.91	1.41	1.07	0.93	0.84	0.89	0.97	1.93	1.33	1.06	0.91	0.95	1.03
2.50	0.80	0.69	0.67	0.69	0.70	0.78	1.06	0.84	0.77	0.72	0.76	0.83	1.41	1.03	0.86	0.76	0.81	0.88
2.75	0.62	0.55	0.57	0.62	0.60	0.70	0.80	0.67	0.65	0.64	0.66	0.72	1.06	0.81	0.73	0.66	0.71	0.76
3.00	0.47	0.44	0.48	0.57	0.52	0.63	0.62	0.54	0.56	0.59	0.57	0.65	0.80	0.66	0.63	0.60	0.63	0.67
3.25	0.36	0.35	0.40	0.53	0.47	0.58	0.47	0.44	0.48	0.56	0.49	0.60	0.62	0.53	0.55	0.56	0.55	0.60
3.50	0.28	0.28	0.33	0.48	0.44	0.52	0.36	0.35	0.41	0.53	0.43	0.57	0.47	0.44	0.48	0.54	0.48	0.56
3.75	0.21	0.22	0.27	0.43	0.45	0.46	0.28	0.28	0.34	0.49	0.39	0.53	0.36	0.35	0.41	0.53	0.41	0.54
4.00	0.15	0.16	0.21	0.37	0.47	0.38	0.21	0.22	0.28	0.45	0.39	0.49	0.28	0.28	0.35	0.50	0.35	0.53

Desvio	L=2.75						L=3.00						L=3.5					
	Lambda						Lambda						Lambda					
	1.00	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	1.00	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	1.00	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05
0.00	167.30	169.90	183.10	238.97	412.83	696.42	369.90	373.71	395.86	499.32	833.19	1623.0	2148.8	2157.1	2225.5	2635.9	4128.4	6379.0
0.25	131.78	118.22	105.37	94.30	86.19	79.91	280.64	244.84	206.61	166.53	133.15	113.1	1502.3	1244.9	948.90	620.27	370.78	323.77
0.50	77.61	58.03	42.00	28.80	21.05	18.25	154.72	109.87	73.18	43.78	27.59	21.99	723.31	467.48	264.80	117.62	51.87	33.74
0.75	43.01	28.39	18.46	11.63	8.53	7.81	80.71	49.76	29.25	15.92	10.21	8.82	333.90	180.80	86.06	33.28	15.36	11.49
1.00	24.40	14.93	9.29	5.87	4.60	4.45	43.39	24.44	13.60	7.45	5.25	4.89	160.45	76.67	33.38	12.98	6.99	5.95
1.25	14.45	8.49	5.26	3.47	2.93	2.95	24.45	13.07	7.22	4.19	3.25	3.19	81.29	35.76	15.18	6.40	4.05	3.75
1.50	8.95	5.18	3.28	2.30	2.06	2.14	14.46	7.56	4.27	2.67	2.25	2.29	43.45	18.25	7.90	3.74	2.70	2.63
1.75	5.78	3.37	2.21	1.65	1.56	1.64	8.95	4.68	2.76	1.87	1.68	1.75	24.46	10.12	4.60	2.46	1.96	1.99
2.00	3.88	2.32	1.59	1.25	1.23	1.32	5.78	3.09	1.92	1.40	1.32	1.40	14.46	6.04	2.94	1.76	1.51	1.57
2.25	2.70	1.67	1.21	1.00	1.01	1.09	3.88	2.15	1.41	1.10	1.08	1.15	8.95	3.86	2.02	1.34	1.22	1.27
2.50	1.93	1.26	0.97	0.82	0.86	0.93	2.70	1.57	1.10	0.89	0.90	0.98	5.78	2.61	1.48	1.06	1.01	1.06
2.75	1.41	0.98	0.81	0.69	0.75	0.81	1.93	1.19	0.90	0.74	0.78	0.85	3.88	1.86	1.14	0.88	0.86	0.91
3.00	1.06	0.79	0.69	0.61	0.67	0.71	1.41	0.94	0.76	0.63	0.69	0.75	2.70	1.39	0.92	0.74	0.75	0.81
3.25	0.80	0.64	0.61	0.55	0.60	0.63	1.06	0.76	0.66	0.56	0.63	0.67	1.93	1.08	0.77	0.63	0.66	0.73
3.50	0.62	0.53	0.54	0.53	0.54	0.57	0.80	0.63	0.60	0.51	0.58	0.60	1.41	0.87	0.68	0.54	0.60	0.67
3.75	0.47	0.43	0.48	0.52	0.47	0.47	0.62	0.52	0.54	0.49	0.54	0.54	1.06	0.72	0.61	0.47	0.57	0.62
4.00	0.36	0.35	0.42	0.52	0.40	0.51	0.47	0.43	0.48	0.50	0.48	0.49	0.80	0.60	0.57	0.43	0.55	0.56

Fonte : Adaptado de Crowder (1987b)

5.3.2 O procedimento de Robinson e Ho

O procedimento de projeto do gráfico EWMA apresentado por Robinson e Ho (1978) prevê a determinação dos parâmetros λ , L e ainda do tamanho da amostra, dado por n .

Robinson e Ho (1978) apresentam tabelas de valores de ARL para valores de L e de λ em função do desvio $\sqrt{n} \delta$. Este procedimento tem como característica a inclusão do tamanho da amostra como um dos parâmetros para o projeto do gráfico. O analista especifica os valores de ARL $L(0)$ e de ARL $L(\delta)$. O projeto do gráfico pode ser conduzido basicamente em 3 etapas: (i) O analista percorre a coluna da tabela de desvio até encontrar o menor valor de $\sqrt{n} \delta$ que seja maior do que δ e que forneça um valor de ARL $L(\delta)$ próximo do especificado. (ii) Usando interpolação linear encontra o valor da constante de suavização λ , o valor de L e o tamanho da amostra que satisfaçam as especificações e (iii) finalmente calcula os limites de controle.

Como os valores de ARL tabelados por Robinson e Ho (1978) são muito parecidos com os valores encontrados por Crowder (1987b), o analista poderá utilizar a Tabela 5.2 para projetar seu gráfico EWMA. Com o cuidado de especificar o desvio δ , uma vez que o tamanho da amostra ainda não foi determinado. O desvio δ dado por $\Delta/SD(x)$ pressupõe o conhecimento do desvio padrão do processo.

Robinson e Ho (1978) apresentam uma tabela cujo valor de ARL $L(0)$ para todos os pares (λ, L) é igual a 500 (Tabela 5. 4).

Como exemplo do uso desta tabela, digamos que o analista queira detectar um desvio $\delta = 1,0$ com os valores de ARL $L(0) = 500$ e ARL $L(1,0) = 5$. A Tabela 5.5 mostra a sequência de passos de interpolação utilizado no procedimento de Robinson e Ho.

Tabela 5.4 - Valores de λ e L para gráficos EWMA bilaterais com o valor de ARL $L(0)=500$ e valores de ARL para o processo fora de controle.

$\sqrt{n}\delta$	L	2.688	2.846	2.972	3.027	3.056	3.072	3.081	3.086	3.089	3.090	3.090
λ		0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0.00		500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500
0.25		93.6	107	149	189	223	255	283	309	333	354	374
0.50		29.8	31.3	41.4	55	70.9	88.6	108	129	152	176	201
0.75		16.7	15.8	17.9	22.3	28.2	35.7	44.9	56.1	69.4	85	103
1.00		11.6	10.3	10.4	11.8	14.1	17.3	21.6	27.2	34.4	43.3	54.6
1.25		8.92	7.63	7.15	7.55	8.47	9.9	11.9	14.8	18.6	23.7	30.4
1.50		7.27	6.08	5.43	5.44	5.79	6.45	7.45	8.91	11	13.9	17.9
1.75		6.15	5.08	4.4	4.25	4.34	4.63	5.14	5.91	7.05	8.7	11.1
2.00		5.35	4.37	3.71	3.49	3.47	3.58	3.82	4.23	4.87	5.82	7.25
2.25		4.74	3.85	3.22	2.98	2.9	2.91	3.02	3.23	3.58	4.13	4.99
2.50		4.27	3.45	2.86	2.61	2.5	2.47	2.5	2.59	2.78	3.09	3.6
2.75		3.89	3.14	2.58	2.34	2.21	2.15	2.13	2.16	2.26	2.43	2.73
3.00		3.57	3.57	2.88	2.36	2.12	1.99	1.91	1.87	1.9	1.99	2.15

O analista encontra o menor desvio $\sqrt{n}\delta$ maior do que $\delta = 1$ para um valor de ARL $L(1,0)$ próximo de 5, neste caso $\sqrt{n}\delta = 1,75$. Interpolando para ARL $L(1,0) = 5$ encontra que o desvio $\sqrt{n}\delta$ deva ser igual a 1,60. Isto implica numa amostra de tamanho $n = 2,56$ e arredondando para uma amostra de tamanho $n = 3$, o desvio $\sqrt{n}\delta$ deve ser igual a 1,732.

Tabela 5.5 - Exemplo de interpolação para o procedimento de Robinson e Ho

L	2.972	3.027	3.056	3.072	3.076	3.081
λ	0.20	0.30	0.40	0.50	0.54	0.60
$\sqrt{n}\delta$						
1.50	5.43	5.44	5.79	6.45		7.45
1.60	5.00					
1.732				4.76	5.00	5.31
1.75	4.40	4.25	4.34	4.63		5.14

Para este desvio, deve-se então encontrar os valores de L e da constante de suavização λ que satisfaçam a especificação de ARL $L(1,0) = 5,0$. É preciso então interpolar entre os pares (0,50; 3,072) e (0,60; 3,081). Interpolando-se nas linhas encontram-se os valores de ARL $L(1,732)$ e entre as colunas o par cuja constante de suavização λ é igual a 0,544 e L é igual a 3,076.

O gráfico de controle EWMA será então conduzido com amostras de tamanho 3, constante de suavização $\lambda = 0,54$ e $L = 3,076$. Os limites de controle serão calculados através das equações apresentadas na Seção 5.2.3.

5.4 Um exemplo genérico

O exemplo apresentado aqui é o mesmo apresentado no Capítulo 4 para o procedimento de Soma Acumulada.

Neste exemplo o analista deseja monitorar um processo cujo valor nominal é de 93,0 unidades. Ele deseja detectar um desvio de $\Delta = 0,4$ unidades. O monitoramento é feito através de amostras de tamanho 5 coletadas sucessivamente. O analista deseja detectar o desvio, caso este ocorra, com o valor de ARL $L(\delta) < 5$ e com uma taxa de falso alarme maior o que 32 amostras. O analista utilizará o gráfico de controle EWMA para realizar o monitoramento.

5.4.1 Estimativas

A Tabela 5.6 mostra as médias e amplitudes amostrais do processo. O valor estimado do desvio padrão $SD(x)$ do processo é obtido através do estimador \bar{R} / d_2 e é igual a 0,60. O desvio padrão amostral $SD(\bar{x})$ é 0,27 e o desvio $\delta = \Delta / SD(\bar{x})$ é igual a 1,5.

5.4.2 Determinação dos parâmetros λ e L

O projeto do gráfico EWMA prevê a determinação dos parâmetros λ e L , que são obtidos de posse do valor do desvio $\delta = 1,5$ e das especificações de ARL $L(0)$ e ARL $L(1,5)$. Estes parâmetros tanto podem ser obtidos através da Figuras 5.1 e 5.3 como através da Tabela 5.2.

5.4.2.1 Procedimento gráfico de Crowder para o exemplo genérico

O procedimento gráfico de Crowder requer que o analista escolha entre os valores de ARL $L(0)$ aquele que seja mais adequado a seu projeto e a partir daí determine os parâmetros λ e L .

No exemplo genérico, é desejo do analista ter um valor de ARL $L(0) > 32$. Desta forma o valor de ARL $L(0) = 50$ atende as especificações. Logo, para o desvio $\delta = 1,5$ e ARL $L(0) = 50$, o valor da constante de suavização sugerida é $\lambda = 0,38$ (Figura 5.4).

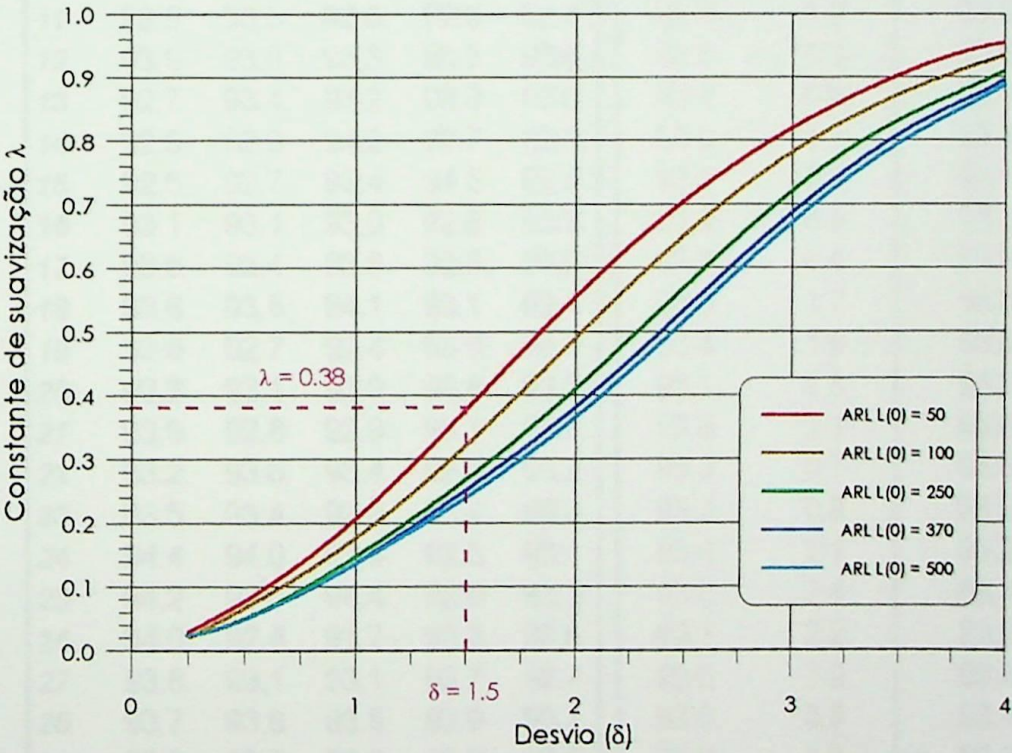


Figura 5.4 - Determinação da constante de suavização λ para o exemplo genérico

Tabela 5.6 Valores amostrais do exemplo genérico

amostra						média	amplitude	$Z_i (\lambda = 0.38)$
0								93.0
1	93.2	94.2	93.8	93.1	93.3	93.5	1.1	93.2
2	93.1	93.3	93.8	93.3	94.5	93.6	1.4	93.3
3	93.7	92.3	91.9	93.3	92.9	92.8	1.7	93.1
4	92.7	92.3	93.2	93.5	94.0	93.1	1.8	93.1
5	93.5	93.2	93.0	91.7	93.7	93.0	2.0	93.1
6	91.9	92.1	92.8	93.6	93.4	92.8	1.7	93.0
7	93.4	92.9	92.3	93.2	94.0	93.2	1.7	93.0
8	93.5	93.3	92.7	92.8	93.7	93.2	1.0	93.1
9	92.3	93.0	92.6	92.7	93.0	92.7	0.7	93.0
10	93.2	93.3	93.1	93.0	93.7	93.2	0.7	93.1
11	92.5	93.5	92.6	92.8	92.6	92.8	1.0	93.0
12	93.9	93.0	93.3	93.5	93.6	93.5	0.8	93.2
13	92.7	93.4	93.2	93.0	93.0	93.1	0.6	93.1
14	92.6	92.9	94.2	92.7	92.8	93.0	1.5	93.1
15	92.5	92.7	93.4	94.5	92.5	93.1	2.0	93.1
16	93.1	93.1	93.0	92.8	93.3	93.1	0.5	93.1
17	93.6	93.4	93.8	93.5	93.6	93.6	0.4	93.3
18	93.6	93.5	94.1	93.1	92.4	93.3	1.7	93.3
19	93.9	92.7	92.4	93.8	94.0	93.4	1.6	93.3
20	92.3	93.1	93.0	93.8	93.2	93.1	1.5	93.2
21	93.9	92.8	92.9	93.1	93.9	93.3	1.1	93.3
22	93.2	93.6	93.4	92.9	93.2	93.3	0.7	93.3
23	93.5	93.4	92.6	93.4	93.0	93.2	0.8	93.2
24	94.4	94.0	92.9	92.3	93.1	93.4	2.1	93.3
25	94.2	93.6	94.4	92.0	93.3	93.5	2.4	93.4
26	94.0	92.4	91.7	93.3	93.9	93.1	2.2	93.2
27	93.8	93.1	93.1	93.7	92.7	93.3	1.0	93.3
28	93.7	93.8	93.5	93.9	93.1	93.6	0.8	93.4
29	93.2	93.2	93.2	92.6	93.9	93.2	1.3	93.3
30	91.4	93.8	93.3	92.9	92.2	92.7	2.3	93.1
31	93.5	94.7	92.3	93.5	93.4	93.5	2.4	93.2
32	92.4	92.2	93.2	93.8	93.5	93.0	1.6	93.2
33	93.5	92.5	93.0	93.4	93.0	93.1	1.0	93.1
34	93.7	93.8	93.0	92.5	92.0	93.0	1.8	93.1
35	94.3	93.9	93.3	93.6	93.5	93.7	1.0	93.3
36	93.1	94.6	93.5	93.7	93.4	93.7	1.5	93.5

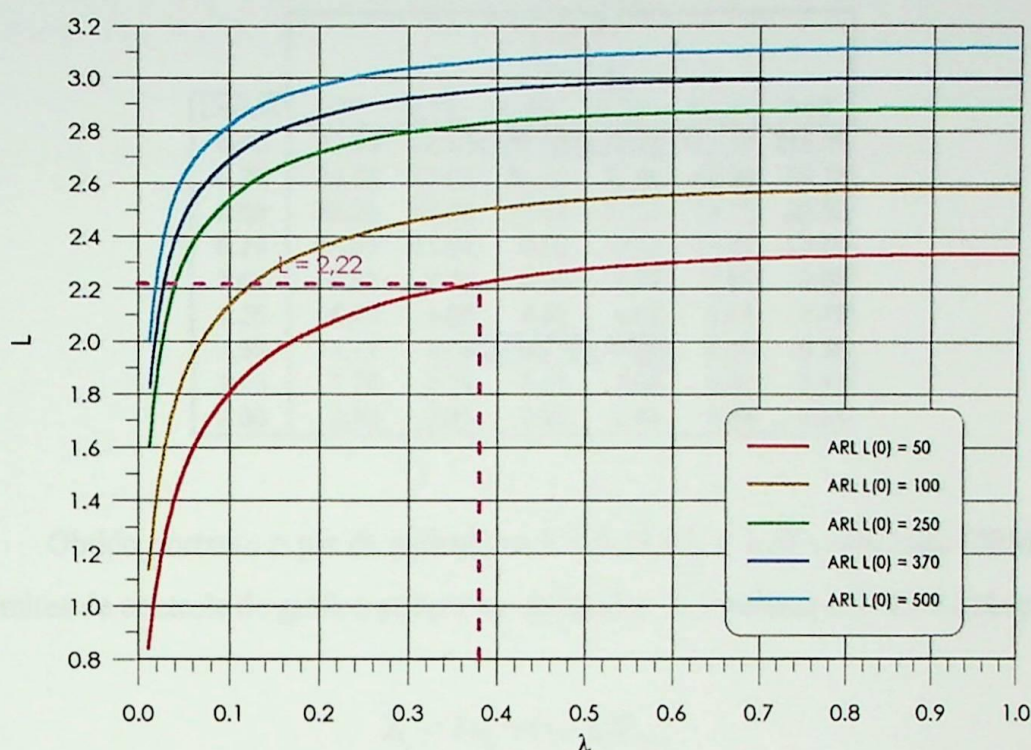


Figura 5.5 - Determinação do valor L para o exemplo genérico

Com a constante de suavização obtida $\lambda = 0,38$ obtém-se na Figura 5.5 o valor de $L = 2,22$, para o mesmo valor de $ARL L(0)$.

O analista deverá recorrer à Tabela 5.2 para verificar se este par $(0,38; 2,22)$ fornece um valor de $ARL L(1,5)$ adequado às suas especificações, ou seja, se este par possui um valor de $ARL L(1,5) < 5$.

A Tabela 5.2 não fornece os valores de ARL para $L = 2,22$, desta maneira utilizaremos o valor $L = 2,25$. Neste caso, interpolando o valor de λ na Tabela 5.2 em $L = 2,25$ encontra-se que o valor de $ARL L(1,5)$ é igual a 3,49 o que atende às especificações. Uma vez que o valor de L utilizado foi de 2,25 e não 2,22 o valor de $ARL L(0)$ obtido por interpolação é igual a 57,2 que também atende às especificações prévias do analista.

Tabela 5.7 - Valores de ARL para o exemplo genérico na faixa de interpolação

Desvio	L=2.25 Lambda					
	1.00	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05
0.00	40.90	42.25	47.78	67.46	125.10	215.39
0.25	34.53	33.07	33.48	37.86	47.50	56.78
0.50	23.23	19.78	17.62	17.03	19.12	22.52
0.75	14.67	11.64	9.93	9.49	11.02	13.44
1.00	9.41	7.31	6.30	6.27	7.63	9.55
1.25	6.29	4.95	4.42	4.62	5.84	7.42
1.50	4.41	3.58	3.34	3.66	4.74	6.08
1.75	3.24	2.75	2.68	3.04	4.01	5.17
2.00	2.49	2.21	2.23	2.61	3.48	4.51

Obtido portanto o par de parâmetros $\lambda = 0,38$ e $L = 2,25$ a estatística EWMA e os limites de controle do gráfico podem ser calculados. A estatística EWMA é dada por

$$Z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}$$

logo tem-se que

$$Z_i = 0,38 \times \bar{x}_i + 0,62 \times Z_{i-1}$$

e os limites de controle assintóticos são dados por (Equações 5.7, 5.8 e 5.9)

$$LSC = \text{valor nominal} + L \times SD(x) \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)n}}$$

$$LC = \text{valor nominal}$$

$$LIC = \text{valor nominal} - L \times SD(x) \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)n}}$$

portanto

$$LSC = 93,0 + 2,25 \times 0,60 \sqrt{\frac{0,38}{(2 - 0,38)5}} = 93,29$$

$$LC = 93,0$$

$$LIC = 93 - 2,25 \times 0,60 \sqrt{\frac{0,38}{(2 - 0,38)5}} = 92,71$$

O gráfico EWMA do exemplo genérico é apresentado na Figura 5.6. O processo se mostra instável no início, sinalizando uma falta de controle na segunda amostra.

Porém o analista deseja analisar o processo passada a fase de inicialização e, digamos que decida não realizar um ajuste na fase inicial do processo. Com o processo em andamento, o sinal de que o processo estava fora de controle foi dado na amostra de número 18, com o ponto plotado exatamente sobre o limite superior de controle.

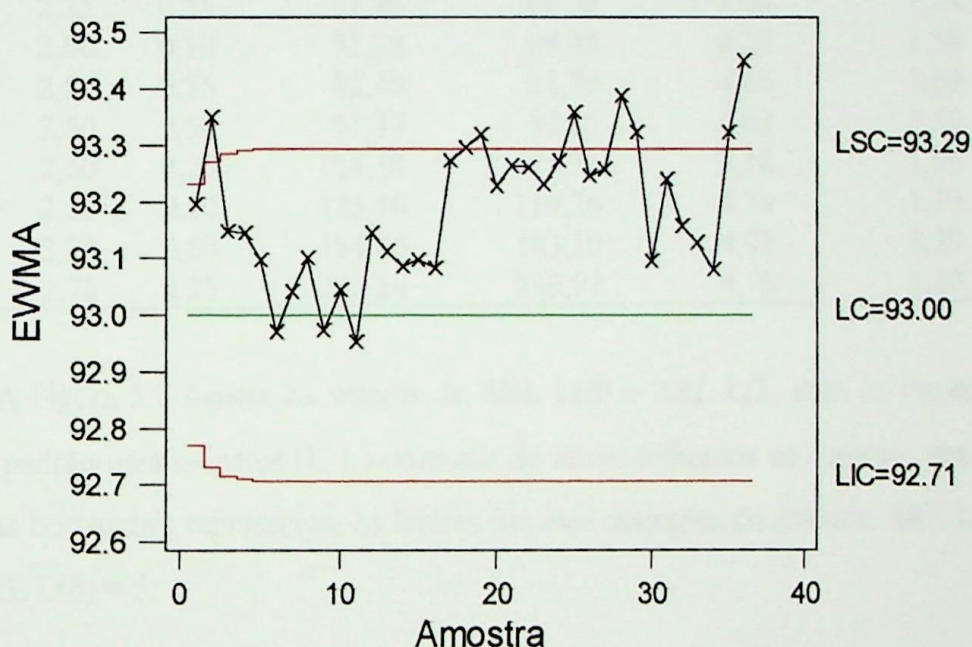


Figura 5.6 - Gráfico EWMA para o exemplo genérico, parâmetros $\lambda=0,38$ e $L=2,25$

5.4.2.2 O uso das Tabelas de Crowder para o exemplo genérico

O procedimento tabular consiste em obter o par (λ, L) de parâmetros a ser utilizado na construção do gráfico de controle EWMA. A partir das especificações de $ARL L(0) > 32$ e $ARL L(1,5) < 5$ o analista obtém na Tabela 5.2 os pares de parâmetros (λ, L) que podem ser utilizados para o projeto do gráfico EWMA. 12 pares possíveis de serem utilizados para o exemplo genérico estão na Tabela 5.8, juntamente com os seus valores de $ARL L(0)$, $ARL L(\delta)$ e os respectivos desvios padrão.

Tabela 5.8 - Pares (λ, L) , valores de ARL $L(0)$ e ARL $L(\delta)$ e respectivos desvios padrão que podem ser utilizados no exemplo genérico

<i>Par</i>	<i>L</i>	λ	ARL $L(0)$	Desvio Padrão ARL $L(0)$	ARL $L(\delta)$	Desvio Padrão ARL $L(\delta)$
1	2,00	0,25	38,56	36,45	3,19	1,53
2	2,25	1,00	40,90	40,40	4,41	3,88
3	2,25	0,75	42,25	41,59	3,58	2,72
4	2,25	0,50	47,78	46,61	3,34	2,08
5	2,25	0,25	67,46	64,98	3,66	1,74
6	2,00	0,10	73,28	68,45	4,20	1,58
7	2,50	0,75	82,49	81,79	4,65	3,69
8	2,50	0,50	91,17	89,85	4,03	2,59
9	2,50	0,25	124,18	121,33	4,18	1,99
10	2,25	0,10	125,10	119,26	4,74	1,73
11	2,75	0,50	184,56	183,10	4,92	3,28
12	2,75	0,25	242,20	238,97	4,78	2,30

A Figura 5.7 mostra os valores de ARL $L(0)$ e ARL $L(\delta)$ com os respectivos desvios padrão para os pares (λ, L) possíveis de serem utilizados no exemplo genérico. As linhas horizontais representam os limites das especificações do analista: ARL $L(0) = 32$ e ARL $L(\delta) = 5$.

A escolha do par (λ, L) deve ser baseada na premissa de que para um desvio pequeno deva-se utilizar uma constante de suavização pequena.

No procedimento gráfico (Seção 5.4.2.1) foi utilizada a Tabela 5.2 de valores de ARL $L(\delta)$ para verificar se o par (λ, L) cumpria com a especificação do analista. Aqui, no procedimento tabular, são utilizados os gráficos das Figuras 5.1 (gráfico $\delta \times \lambda$) e 5.3 (gráfico $\lambda \times L$) para auxiliar na escolha dos parâmetros de projeto do gráfico EWMA.

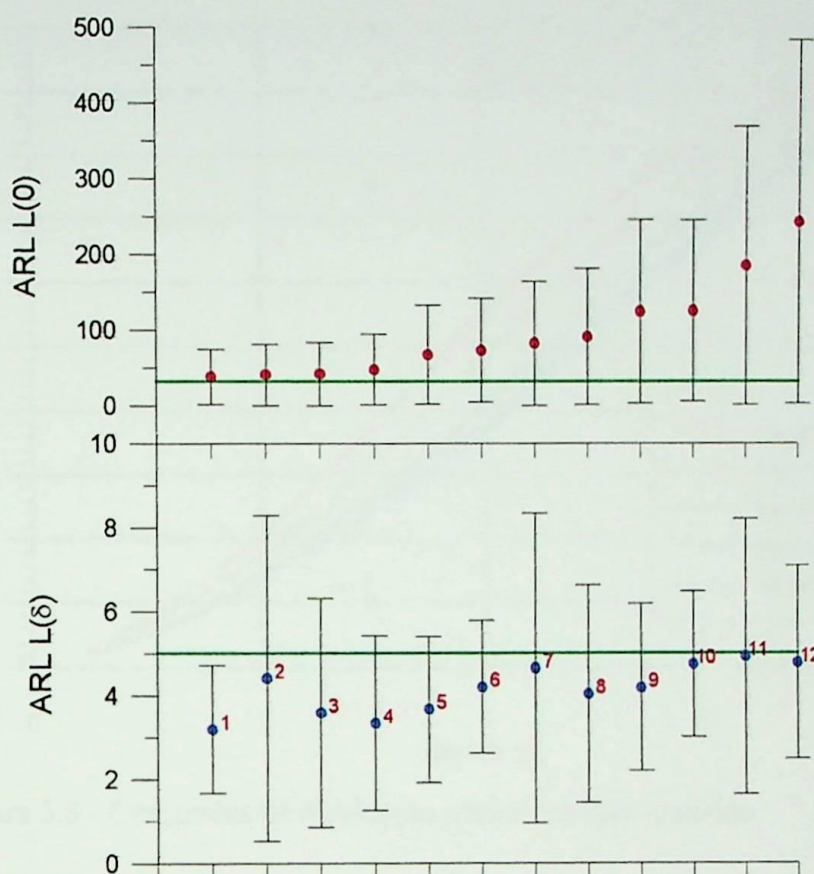


Figura 5.7 - Comparação dos valores de $ARL L(\delta)$ e $ARL L(0)$ para os pares (λ, L) que podem ser utilizados no exemplo genérico.

A Figura 5.8 é a reprodução da Figura 5.2 com valores da constante de suavização λ dos pares passíveis de serem utilizados para o exemplo, demarcados.

A Figura 5.8 conduz à eliminação dos pares cujas constantes de suavização são: 0,50; 0,75, 1,00 e 0,10. Isto não significa que os valores de $ARL L(0)$ destes pares (λ, L) eliminados não tenham um valor de $ARL L(0)$ maior do que 32, (a especificação do analista), mas que pela premissa ‘dos desvios pequenos, λ pequenos’ não são indicados e portanto eliminados. No caso da constante de suavização $\lambda = 0,10$ esta é indicada para desvios δ menores.

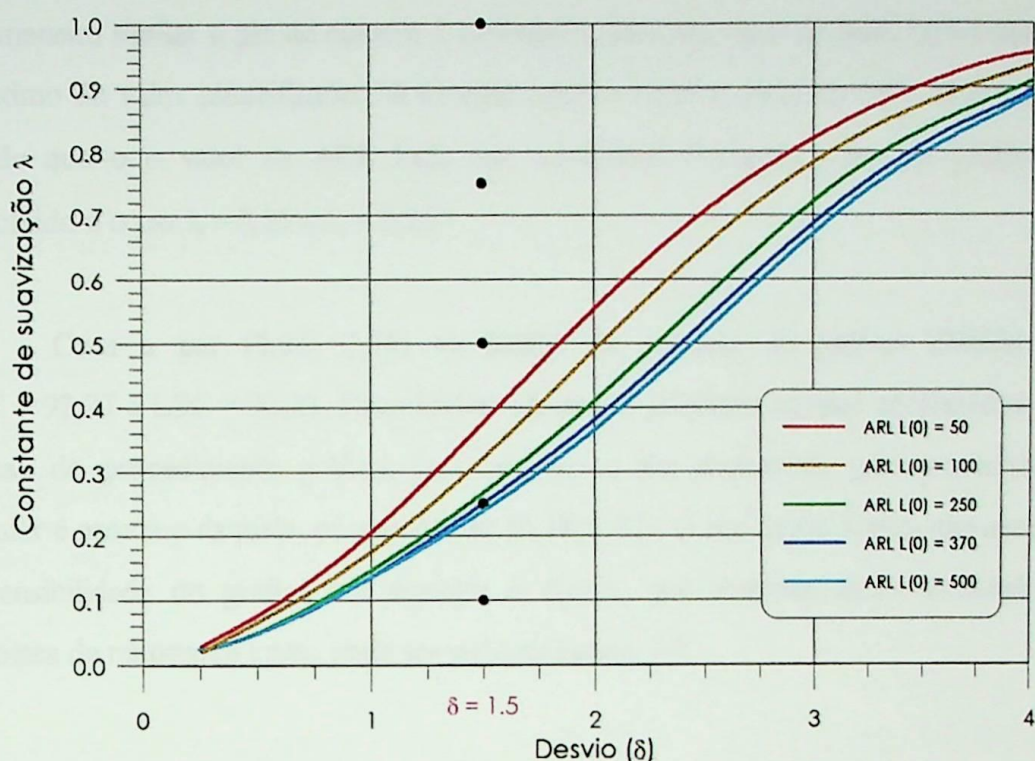


Figura 5.8 - Constantes de suavização para o exemplo genérico

Eliminados os pares cujas constantes de suavização não atendam a premissa ‘dos desvios pequenos, λ pequenos’ os pares (λ, L) restantes estão relacionados na Tabela 5.9.

A constante de suavização a ser utilizada é então definida e seu valor é $\lambda = 0,25$. O par (λ, L) é então definido escolhendo-se o valor de L .

Tabela 5.9 - Pares (λ, L) , valores de ARL $L(0)$ e ARL $L(\delta)$ e respectivos desvios padrão após eliminação prévia de pares.

Par	L	λ	ARL $L(0)$	Desvio Padrão ARL $L(0)$	ARL $L(\delta)$	Desvio Padrão ARL $L(\delta)$
1	2,00	0,25	38,56	36,45	3,19	1,53
5	2,25	0,25	67,46	64,98	3,66	1,74
9	2,50	0,25	124,18	121,33	4,18	1,99
12	2,75	0,25	242,20	238,97	4,78	2,30

Entre os quatro pares restantes, relacionados na Tabela 5.7, o analista elimina os pares de número 9 e 12 por terem valores de ARL $L(\delta)$ próximos do valor especificado pelo analista, uma vez que, quanto antes o desvio for detectado melhor para o processo.

De maneira similar o par de número 1 é eliminado pois seu valor de ARL $L(0)$ é também próximo do valor especificado. Neste caso quanto maior o valor de ARL $L(0)$ melhor, desde que o o valor de ARL $L(\delta)$ seja admissível. Portanto o par de parâmetros escolhido é o par $\lambda = 0,25$ e $L = 2,25$.

Com o par $(0,25; 2,25)$ os limites de controle do gráfico EWMA são $LIC = 92,77$ e $LSC = 93,23$. Estes limites são muito próximos àqueles encontrados com o uso do procedimento gráfico, uma vez que o par encontrado pelo procedimento tabular é próximo daquele, ou seja do par $(0,38; 2,22)$. O uso destes limites não aumenta a sensibilidade do gráfico em detectar o desvio, que continua sendo sinalizado na amostra de número 18 como pode ser visto na Figura 5.9.

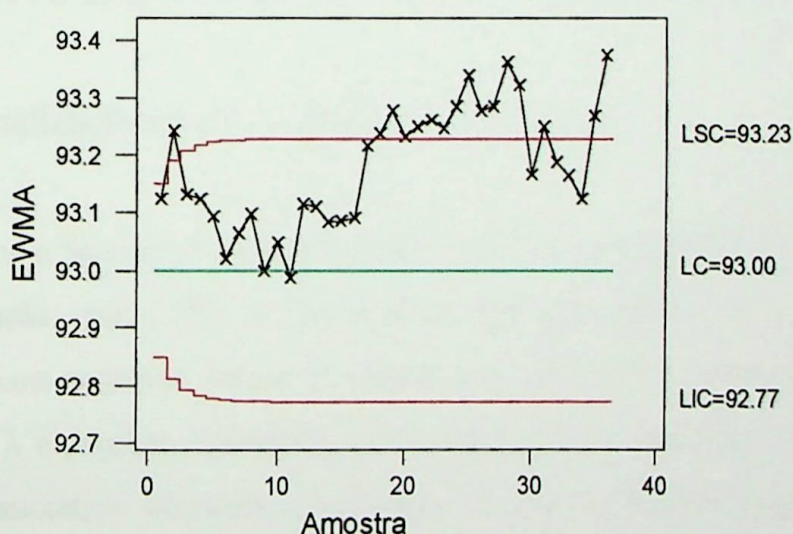


Figura 5.9 - Gráfico EWMA para o exemplo genérico, parâmetros $\lambda=0,25$ e $L=2,25$

A utilização exclusiva dos gráficos das Figuras 5.1 e 5.3 não é suficiente por dois aspectos. Primeiro, mesmo sendo o valor de ARL $L(\delta)$ o menor otimizado, não é possível verificar se ainda está de acordo com o que o analista especificou. Segundo por que as curvas dadas são apenas para alguns valores de ARL $L(0)$. Com a utilização da Tabela 5.2 pode-se então verificar o valor de ARL $L(\delta)$ e o valor de ARL $L(0)$ para o

par (λ, L) escolhido. Se de acordo com as especificações projetará o gráfico, se não, deve experimentar outro par.

A escolha do par a ser utilizado não é única, o que pode ser visto através da Tabela 5.8, em que pelo menos 12 pares poderiam a princípio ser utilizados. Porém o uso conjunto das Tabelas 5.2 e 5.3 e das Figuras 5.1 e 5.3 conduz a uma escolha próxima *do ótimo* uma vez que a Figura 5.1 ($\delta \times \lambda$) foi construída para obter o valor ótimo da constante de suavização λ . A Figura 5.3 ($\lambda \times L$) foi construída de maneira que esta combinação (λ, L) resulte no menor valor de ARL $L(\delta)$ dado o valor de ARL $L(0)$ (Crowder, 1989).

O critério de escolha do par (λ, L) não é único, o que mostra que a escolha dos parâmetros λ e L depende também de um certo “sentimento” ou “bom senso” do analista.

5.5 Inicialização rápida do gráfico EWMA - FIR

Lucas e Saccucci (1990) apresentam a inicialização FIR para o gráfico EWMA. A inicialização rápida FIR é especialmente útil em gráficos de controle EWMA projetados com pequenos valores da constante de suavização λ . Quando a constante de suavização λ é pequena, a variância da estatística EWMA converge demoradamente a seu valor assintótico. Desta maneira o gráfico de controle EWMA baseado no valor do desvio padrão assintótico tende a ser insensível na inicialização do processo.

A inicialização FIR pode ser implementada por dois gráficos EWMA utilizados simultaneamente, cada um inicializado com um valor diferente do valor nominal do processo μ . Um gráfico tem o valor de inicialização abaixo do valor nominal e o outro acima. Os valores de ARL para alguns projetos EWMA com inicialização rápida FIR podem ser encontrados no Anexo 5.2. Lucas e Saccucci (1990) citam que não há uma teoria que indique o valor apropriado para ser utilizado como valor de inicialização. Os valores ali apresentados variam de 0% a 75% do valor do desvio.

Se o processo inicializa-se fora de controle, com um valor de inicialização apropriado o gráfico tende a sinalizar o desvio mais rapidamente. Por outro lado, se o processo inicializa-se sob controle, os dois gráficos EWMA tendem a convergir, e na prática um dos gráficos pode ser descontinuado quando forem suficientemente próximos.

A desvantagem deste procedimento é que requer o uso de dois gráficos EWMA diferentes para monitorar um mesmo processo. Uma alternativa à inicialização FIR é o uso de limites de controle mais apertados na fase de inicialização do processo.

5.6 O uso conjunto dos gráficos EWMA e de Shewhart

O uso conjunto dos gráficos EWMA e Shewhart oferece um desempenho para detectar tanto desvios pequenos quanto desvios grandes. Isto é conseguido adicionando-se os limites de controle de Shewhart ao gráfico EWMA (Lucas e Saccucci, 1990).

A Figura 5.10 mostra estes limites para o exemplo genérico apresentado na Seção 5.4. O gráfico de Shewhart está grafado em vermelho, ao passo que o gráfico EWMA em azul.

Para o exemplo genérico, o processo esteve fora de controle e foi sinalizada tal situação pelo gráfico EWMA nas amostras de número 2 e 18. O desvio ali sinalizado não foi um desvio o qual o gráfico de Shewhart fora capaz de detectar utilizando-se apenas a regra dos limites de controle de 3-sigma.

Segundo Lucas e Saccucci (1990) o uso conjunto dos gráficos EWMA e Shewhart apresentam desempenho comparáveis ao procedimento de EWMA e de CuSum em termos de valores de ARL.

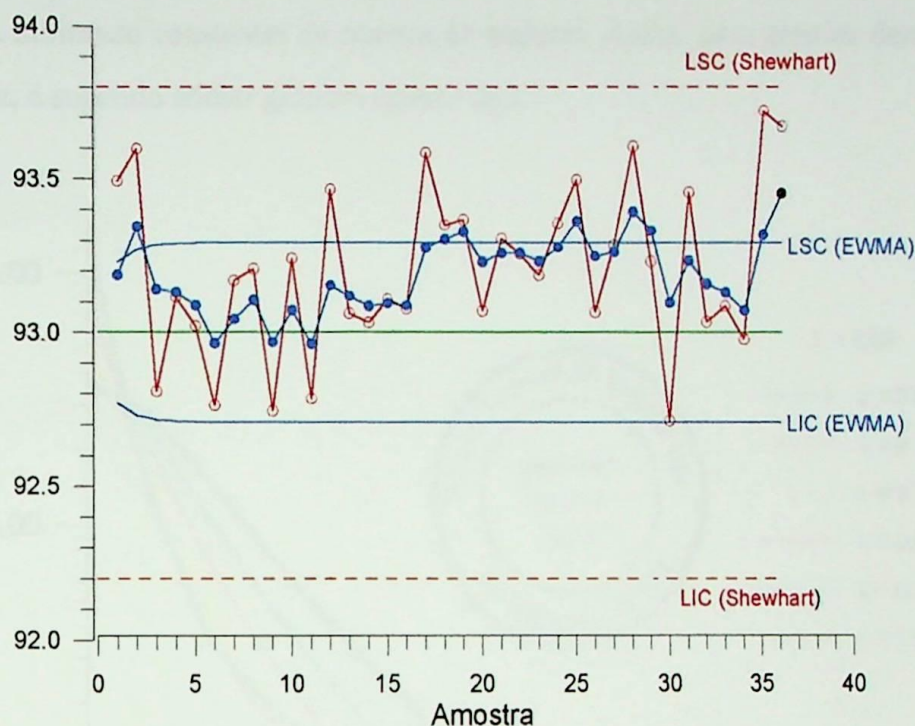


Figura 5.10 - Gráfico EWMA e Shewhart para o exemplo genérico

5.7 Comparação dos valores de ARL para o gráfico EWMA.

Nas Figuras 5.11 e 5.12 pode-se observar os valores de ARL em função dos parâmetros λ e L de projeto do gráfico EWMA.

Na Figura 5.11, a constante de suavização λ assume valores entre 0,05 e 1,00 para um mesmo valor de $L = 3,00$. Este valor de L é o mesmo dos gráficos de Shewhart, desta forma este gráfico EWMA com constante de suavização $\lambda = 1,00$ e limites de controle estabelecidos com os valores assintóticos da variância é um gráfico de Shewhart. Para desvios $0,20 < \delta < 2,00$ o gráfico de Shewhart, que equivale ao gráfico EWMA com $\lambda = 1,00$ e $L = 3,00$ tem desempenho pior do que os outros gráficos EWMA, porém para desvios maiores do que $\delta = 2,00$ o analista deve identificar a constante de suavização λ que irá conduzir ao valor de ARL $L(\delta)$ especificado. Notando que uma escolha de constante de suavização pequena nesta região de grandes desvios não é indicada uma vez que seus valores de ARL $L(\delta)$ são maiores. Para grandes desvios δ e constantes de suavização pequenas o valor de ARL $L(\delta)$ é menor do que os gráficos

EWMA utilizando constantes de suavização maiores. Assim, para grandes desvios, mais uma vez, é sugerido adotar grandes valores de λ .

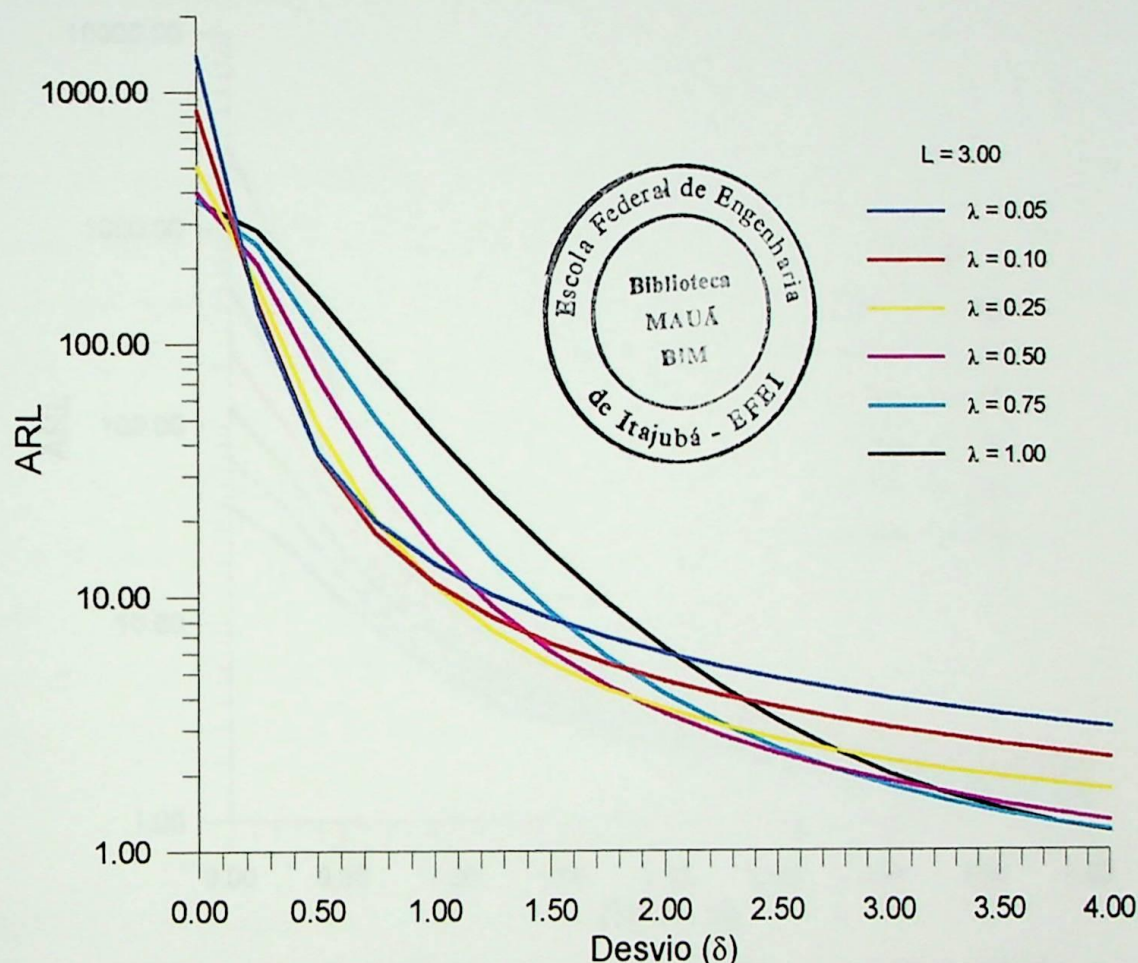


Figura 5.11 - Comparação dos valores de ARL para L fixo e constantes de suavização λ variando entre 0,05 e 1,00.

A Figura 5.12 compara os valores de ARL para uma mesma constante de suavização $\lambda = 0,25$ e valores de L variando entre 2,00 e 3,50.

Com limites de controle “mais apertados” obtidos com menores valores de L , os desvios δ são detectados em um número médio de amostras menor, ou seja menores valores de ARL (δ), do que para limites de controle com valores de L maiores. Porém esta capacidade de detectar o desvio mais rapidamente é conseguida a um preço de se ter valores de ARL $L(0)$ menores o que significa a probabilidade de um falso alarme em um número menor de amostras coletadas. Isto porque o gráfico pode ser visto como tendo limites de controle mais apertados. Por outro lado com limites de controle “mais largos”,

ou seja maiores valores de L , o gráfico EWMA apresenta valores de $ARL L(\delta)$ *maiores*, assim como menores taxas de falso alarme, ou seja $ARL L(0)$.

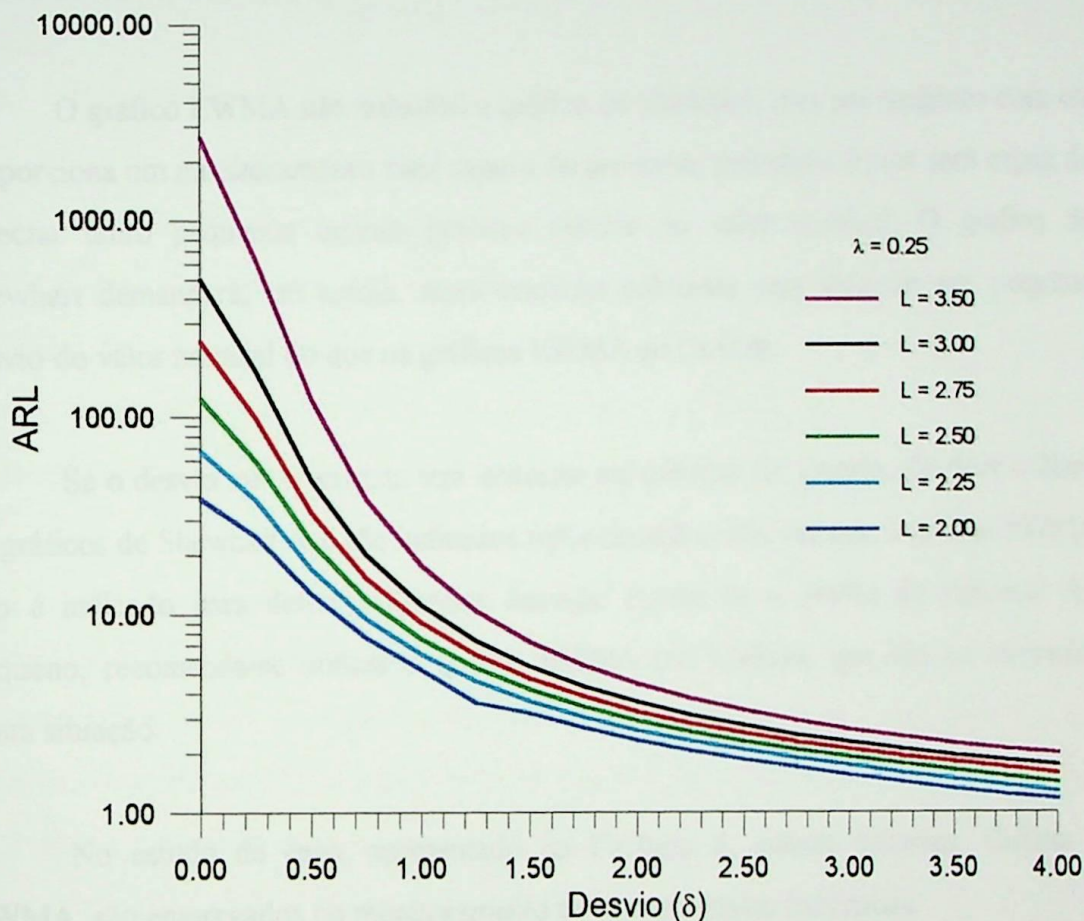


Figura 5.12 - Comparação dos valores de ARL para gráficos EWMA com valores de L entre 2,00 e 3,50 e a constante de suavização λ fixa

5.8 Conclusões

O gráfico EWMA se mostra eficiente como ferramenta para detectar pequenos desvios do valor nominal do processo. Comparado com o gráfico de Shewhart, em termos de seu valor de ARL, se mostra, mais eficiente do que aquele na tarefa de detectar desvios do valor nominal de até 2.0 erros padrão.

O gráfico de controle EWMA é semelhante ao gráfico de Shewhart, em termos de sua operacionalização. A estatística EWMA é plotada sequencialmente no gráfico de controle e uma vez plotada além dos limites de controle, o processo é dito fora de

controle. Porém com a vantagem de não haver necessidade de utilização de outras regras de decisão além daquela que se refere aos limites de controle, o que não acontece com o gráfico de Shewhart.

O gráfico EWMA não substitui o gráfico de Shewhart, mas em conjunto com ele proporciona um monitoramento mais seguro do processo, pois desta forma será capaz de detectar tanto pequenos quanto grandes desvios do valor nominal. O gráfico de Shewhart demandará, em média, mais amostras coletadas para detectar um pequeno desvio do valor nominal do que os gráficos EWMA ou CuSum.

Se o desvio que o analista tem interesse em detectar for grande, ele deve utilizar os gráficos de Shewhart que são indicados nesta situação, uma vez que o gráfico EWMA não é indicado para detectar grandes desvios. Porém se o desvio de interesse for pequeno, recomenda-se utilizar o gráfico EWMA (ou CuSum) que são os indicados nesta situação.

No estudo de caso, apresentado no Capítulo 6, ambos métodos, CuSum e EWMA, são empregados no monitoramento de dois processos industriais.

CAPÍTULO 6

ESTUDO DE CASO

6.1. Introdução

Neste capítulo será descrita a utilização dos gráficos de controle CuSum e EWMA para dois processos industriais, nos quais foram utilizados dados reais. O primeiro, um processo denominado P200, monitorado a partir de amostras de tamanho cinco. O segundo processo, denominado SAL, é monitorado com amostras de observações individuais.

O processo P200 é monitorado, na empresa, através de carta de controle de \bar{x} e s, com amostras coletadas periodicamente. O operador do processo coleta os elementos da amostra e calcula a média e o desvio padrão amostral, plotando os resultados no gráfico. O processo SAL é monitorado através de gráfico de controle de observações individuais x , com amostras coletadas periodicamente.

6.2 O processo P200

O processo P200 é monitorado através de amostras de tamanho 5 coletadas sucessivamente a cada hora de produção. O valor nominal deste processo é de 200,0 u.m.(unidades de medida). O responsável pelo processo deseja detectar um desvio médio do valor nominal igual a 0,4 u.m. em média em até 5 amostras após ocorrido o desvio. A cada dia são coletadas no máximo 24 amostras, logo a taxa de falso alarme deve ser maior do este valor. Para a análise do processo P200 foram utilizados dados de 8 dias de produção. Com amostras de tamanho 5 coletadas sucessivamente. Os dados encontram-se no Anexo 6.1. Durante os 8 dias que foram utilizados para realizar a análise do processo P200, este comportou-se praticamente segundo uma Distribuição Normal, como pode ser visto nos gráficos de normalidade (Normal Plot) na Figura 6.1.

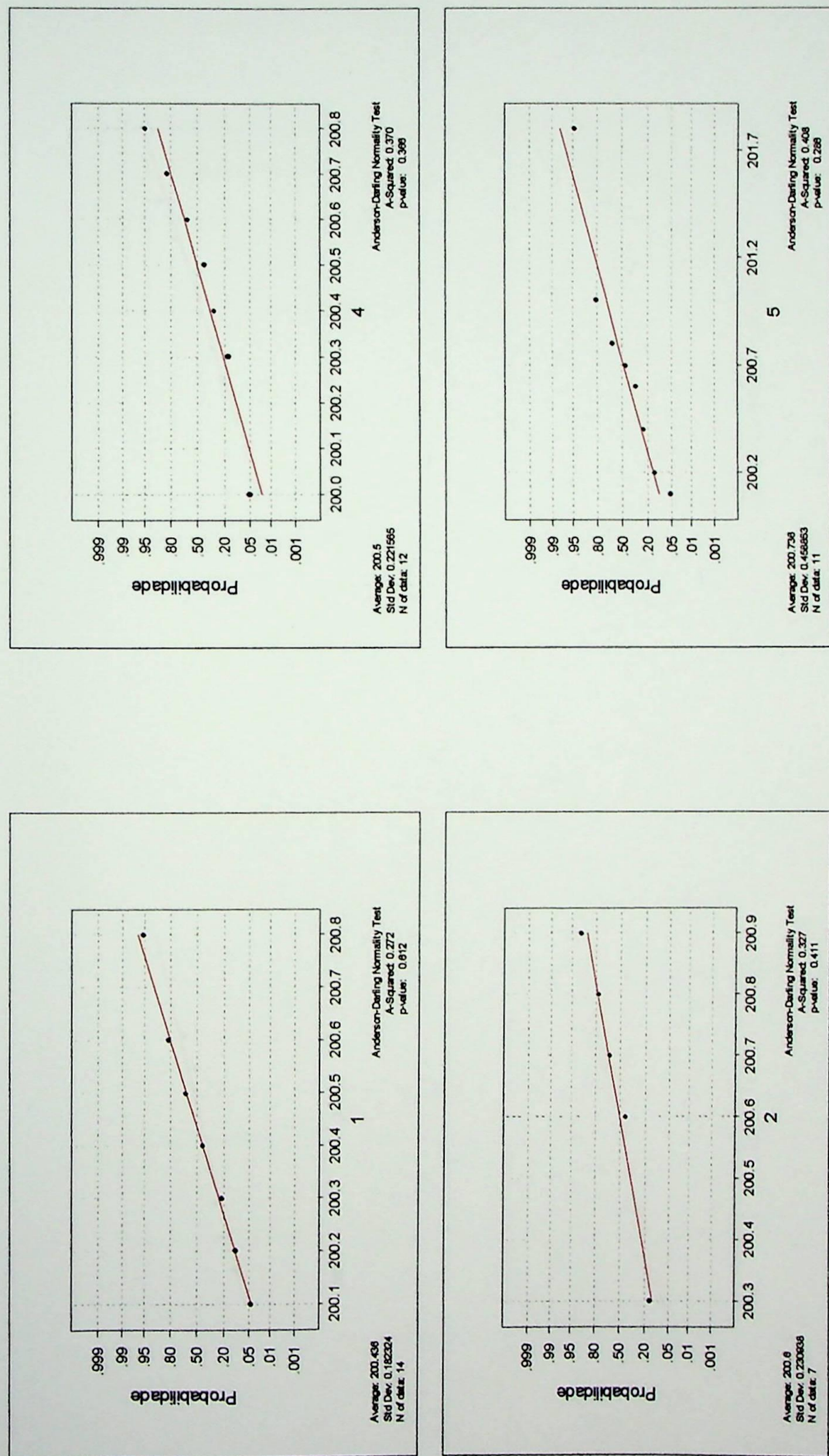


Figura 6.1 - Normal plot dos dias de análise do processo P200: unidade de medida \times probabilidades acumuladas, para os diferentes dias

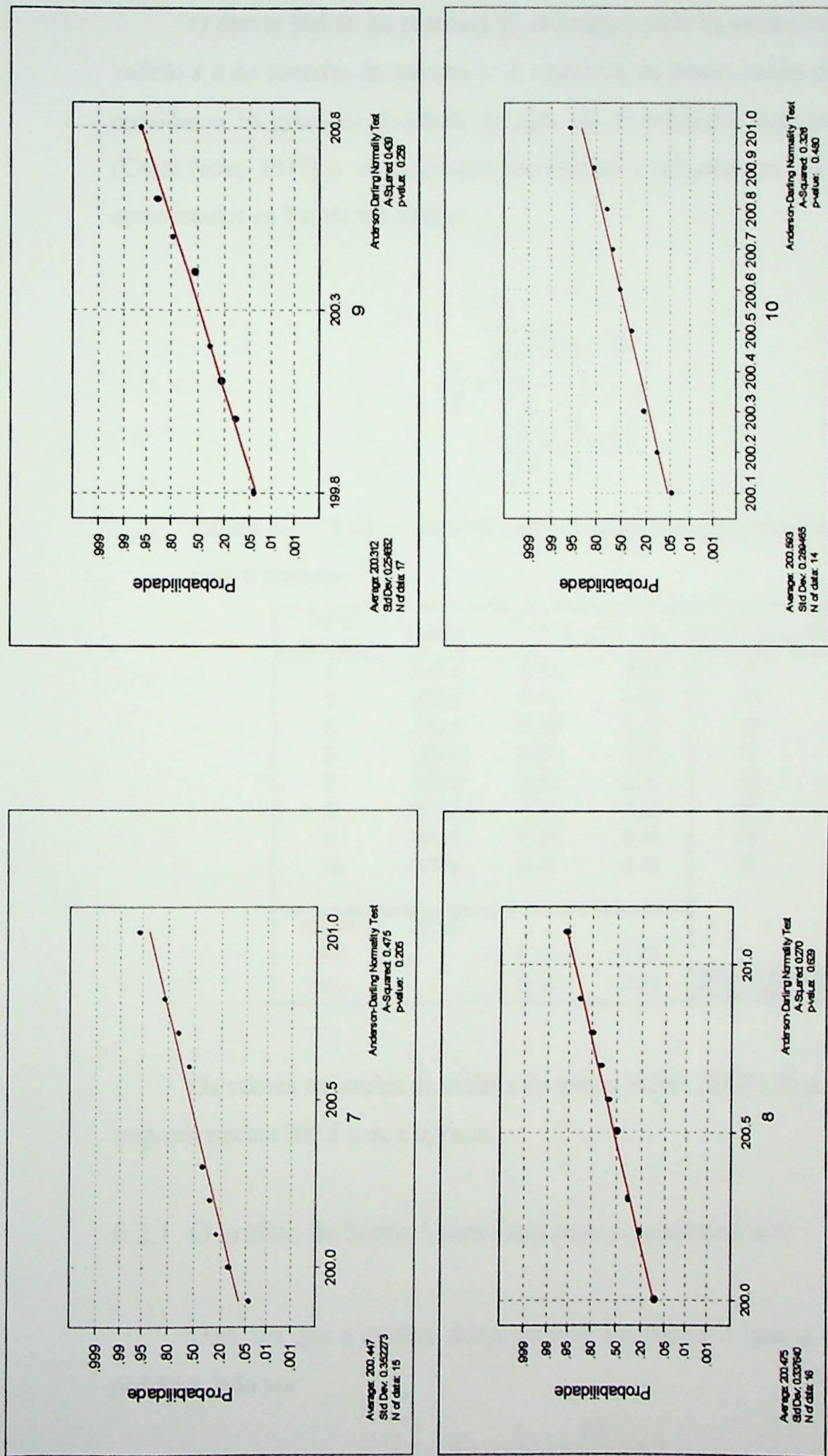


Figura 6.1 *cont* - Normal plot dos dias de análise do processo P200: unidade de medida \times probabilidades acumuladas, para os diferentes dias

O desvio padrão do processo foi estimado a partir da estimativa diária do desvio padrão s e do tamanho da amostra n . A estimativa do desvio padrão do processo P200 considerou os graus de liberdade de cada dia de produção segundo a Equação 6.1 (Costa Neto, 1977) e os resultados intermediários utilizados no cálculo do s_p estão apresentados na Tabela 6.2 abaixo.

$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^8 S_i^2 (n_i - 1)}{\left(\sum_{i=1}^8 n_i \right) - 8}$$

6.1

Tabela 6.1 - Valores utilizados para a estimativa da média e do desvio padrão para o processo P200

dia de produção	média	\bar{s} / c_4	\bar{R} / d_2	# amostras	$S_i^2 (n_i - 1)$
1	200.7	0.43	0.41	17	2.9
2	200.5	0.50	0.50	19	4.5
4	200.5	0.49	0.46	19	4.3
5	200.5	0.31	0.26	17	1.5
7	200.3	0.36	0.35	19	2.3
8	200.5	0.36	0.36	19	2.4
9	200.5	0.39	0.40	18	2.5
10	200.6	0.41	0.41	18	2.8
média	200.5			$s_p^2 =$	0.17
min		0.31	0.26		
max		0.50	0.50		
					S = 0.41

Os valores estimados da média e do desvio padrão $SD(\bar{x})$ do processo P200 são respectivamente 200.5 u.m. e 0,4 u.m.

6.2.1 O gráfico de Soma Acumulada para o processo P200

Uma vez que a analista deseja detectar um desvio Δ igual a 0,4 u.m., o erro padrão é dado por

$$\delta = \frac{\Delta}{SD(\bar{x})} = \frac{0,4}{0,4} = 1,0$$

Os cálculos de projeto da Máscara V para o processo P200 seguem as Equações apresentadas no Capítulo 4.

A estatística soma acumulada plotada no gráfico é dada por

$$S_i = \sum_{j=1}^i (\bar{x}_j - 200,5) = (\bar{x}_i - 200,5) + S_{i-1}$$

A escala a ser utilizada para a construção do gráfico sugerida deve estar entre os valores $1,0 \text{ SD}(\bar{x})$ e $2,0 \text{ SD}(\bar{x})$, de modo que os limites são 0,4 e 0,8. A escala escolhida é 0,5. Assim, a escala A equivale a 0,5 unidades, ou seja, para uma unidade no eixo horizontal, uma unidade no eixo vertical corresponde a 0,5 unidades.

A declividade K da máscara V será a metade do desvio Δ , assim $K = 0,2$. O ângulo θ da Máscara V é então dado por

$$\theta = \arctan\left(\frac{K}{A}\right) = \arctan\left(\frac{\Delta/2}{A}\right) = \arctan\left(\frac{0,2}{0,5}\right) = 21,8^\circ$$

Com a utilização de uma Curva Característica de Operação, a um erro padrão $\delta = 1,00$ ao nível de significância de 5%, com amostras de tamanho 5, corresponderá uma probabilidade de um erro tipo II igual a 0,28. A distância d da Máscara V é dada por

$$d = \frac{2}{\delta^2} \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) = \frac{2}{1} \ln\left(\frac{1-0,28}{0,05}\right) = 5,33 \text{ unidades}$$

O valor de referência H da Máscara V é dado por

$$H = A \times d \times \tan\theta = 0,5 \times 5,33 \times \tan 21,8^\circ = 1,07 \text{ unidades}$$

De posse dos valores padronizados da declividade K e do valor de referência H , a analista verifica se a máscara padrão atende as especificações de ARL feitas pelo responsável do processo. Os valores padronizados de K e H são dados por

$$k = \frac{K}{SD(\bar{x})} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$$

$$h = \frac{H}{SD(\bar{x})} = \frac{1,07}{0,4} = 2,7$$

A Tabela 4.5 de valores de ARL para o gráfico CuSum não apresenta o valor de $h = 2,7$ para a declividade padronizada $k = 0,50$ e portanto será utilizado o valor de referência padronizado $h = 3,00$. Para estes valores de k e h o valor de ARL $L(0)$ é igual a 58,8. O que atende a especificação do responsável pelo processo, porém o valor de ARL $L(1,0)$ é igual a 6,4 que é maior do que o especificado. Assim a máscara V padrão não atende as especificações e portanto deve ser substituída.

Uma alternativa é utilizar a inicialização FIR. Neste caso, utilizando o valor de inicialização $S_0 = H / 2$. Na Tabela 4.7 temos que para o desvio $\delta = 1,0$, com $h = 3,00$ e $k = 0,5$ o valor de ARL $L(0)$ é igual a 49,19 e de ARL $L(\delta) = 4,195$. Portanto o uso da inicialização FIR faz com que o procedimento atenda às especificações. A máscara V sofre duas alterações: o valor de H e de d , mantendo a mesma declividade K e o mesmo ângulo θ . Os novos valores de H e d são:

$$H = h \times SD(\bar{x}) = 3,00 \times 0,4 = 1,2 \text{ unidades}$$

$$d = \frac{H}{A \tan \theta} = \frac{1,2}{0,5 \tan 21,8^\circ} = 6,0 \text{ unidades}$$

Com H igual a 1,2 o valor de inicialização S_0 é igual a 0,6. A Figura 6.2 mostra a máscara V que deve ser utilizada no processo P200.

O gráfico CuSum foi então utilizado nos dias seguintes de produção do processo P200. A máscara V desenhada em uma transparência foi utilizada para verificar se o

processo P200 esteve atuando sob controle ou não. Foram analisados 15 dias de produção. Os gráficos CuSum destes dias são apresentados na Figura 6.4 que compreende todos os 15 dias. Os dados apresentam-se no Anexo 6.2.

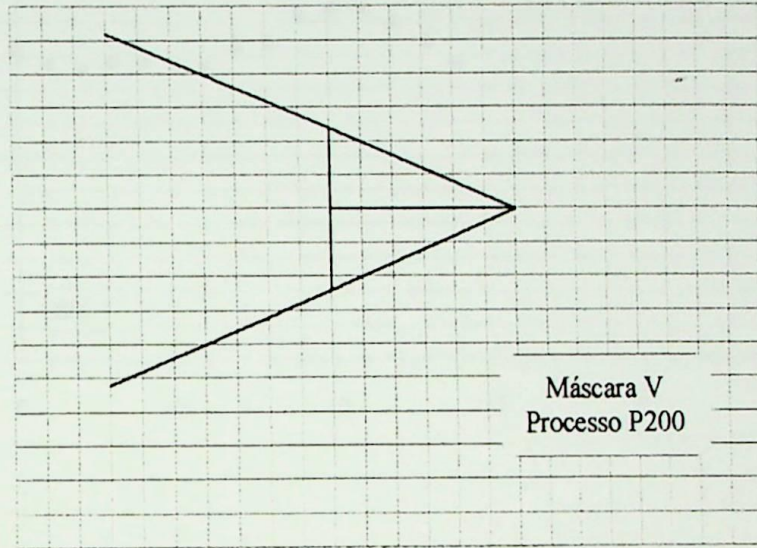


Figura 6.2 - Máscara V padrão para o processo P200

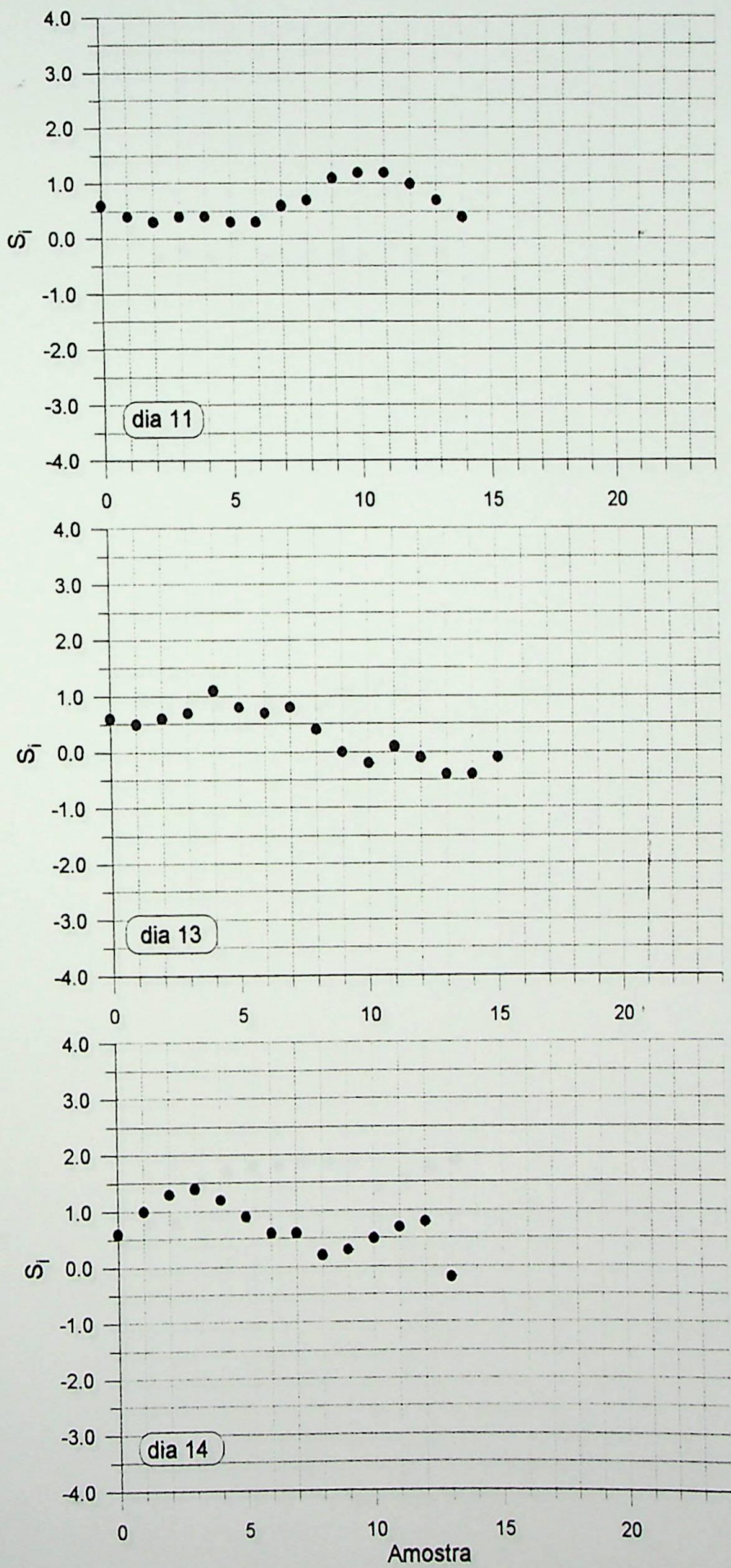


Figura 6.3 - Gráfico de Soma Acumulada para o processo P200

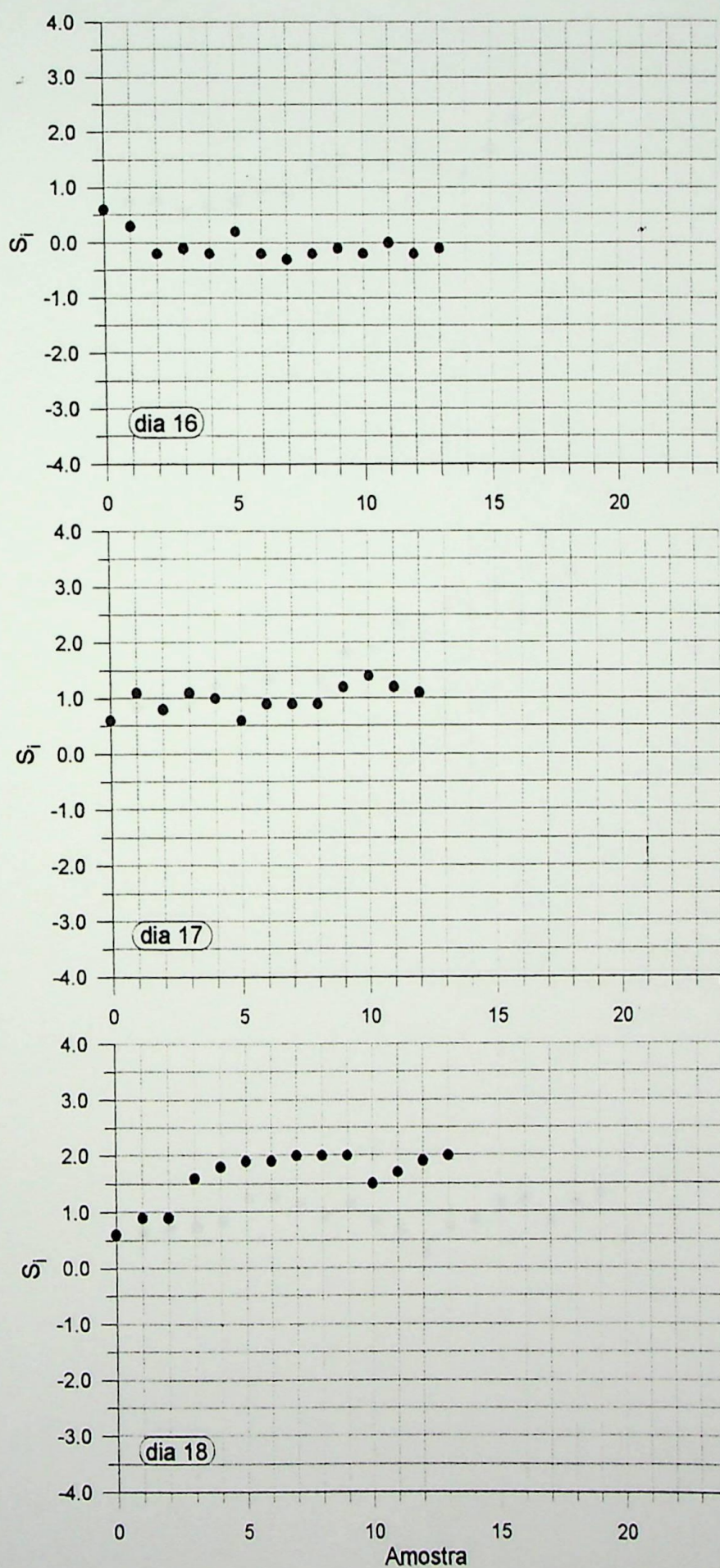


Figura 6.3 (cont.) - Gráfico de Soma Acumulada para o processo P200

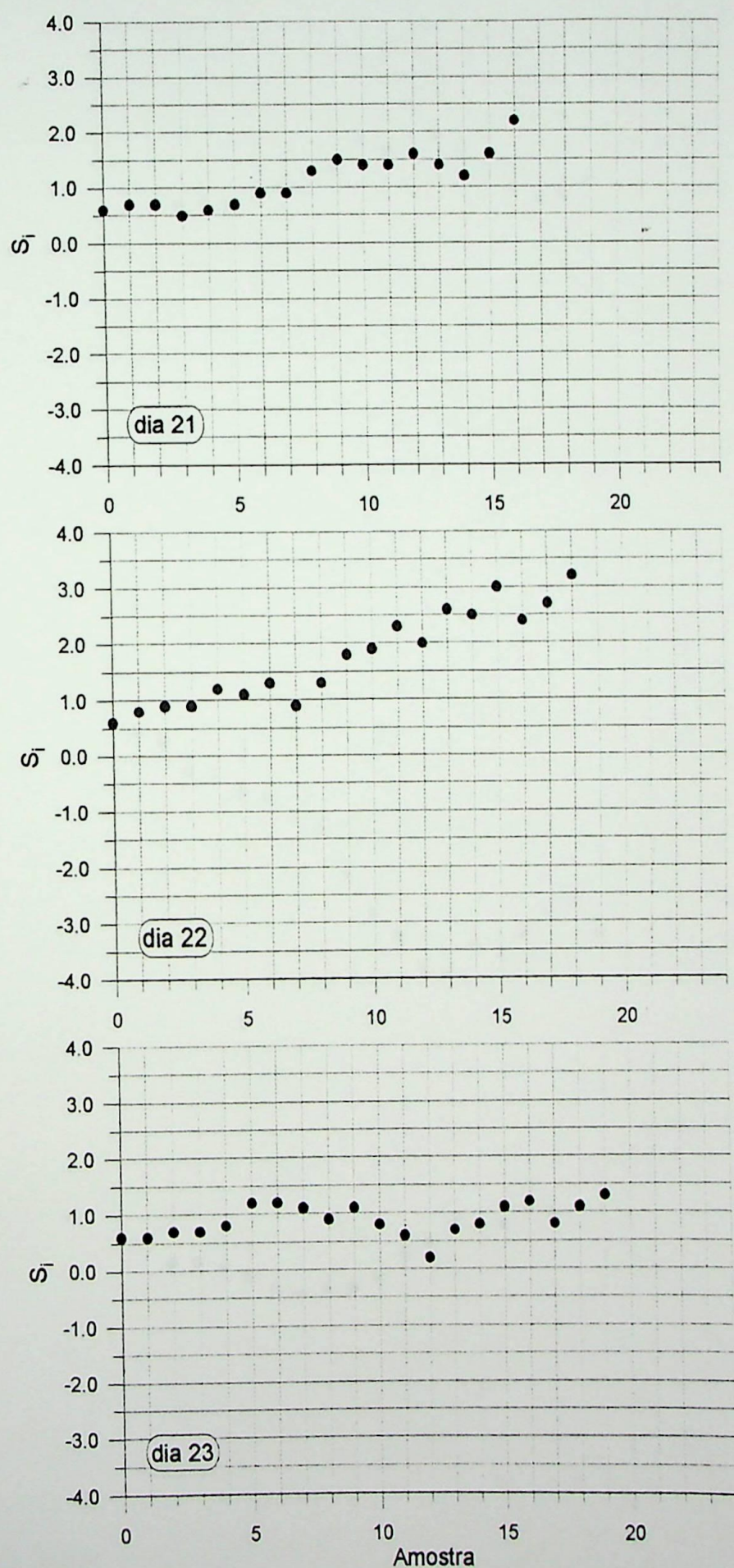


Figura 6.3 (cont.) - Gráfico de Soma Acumulada para o processo P200

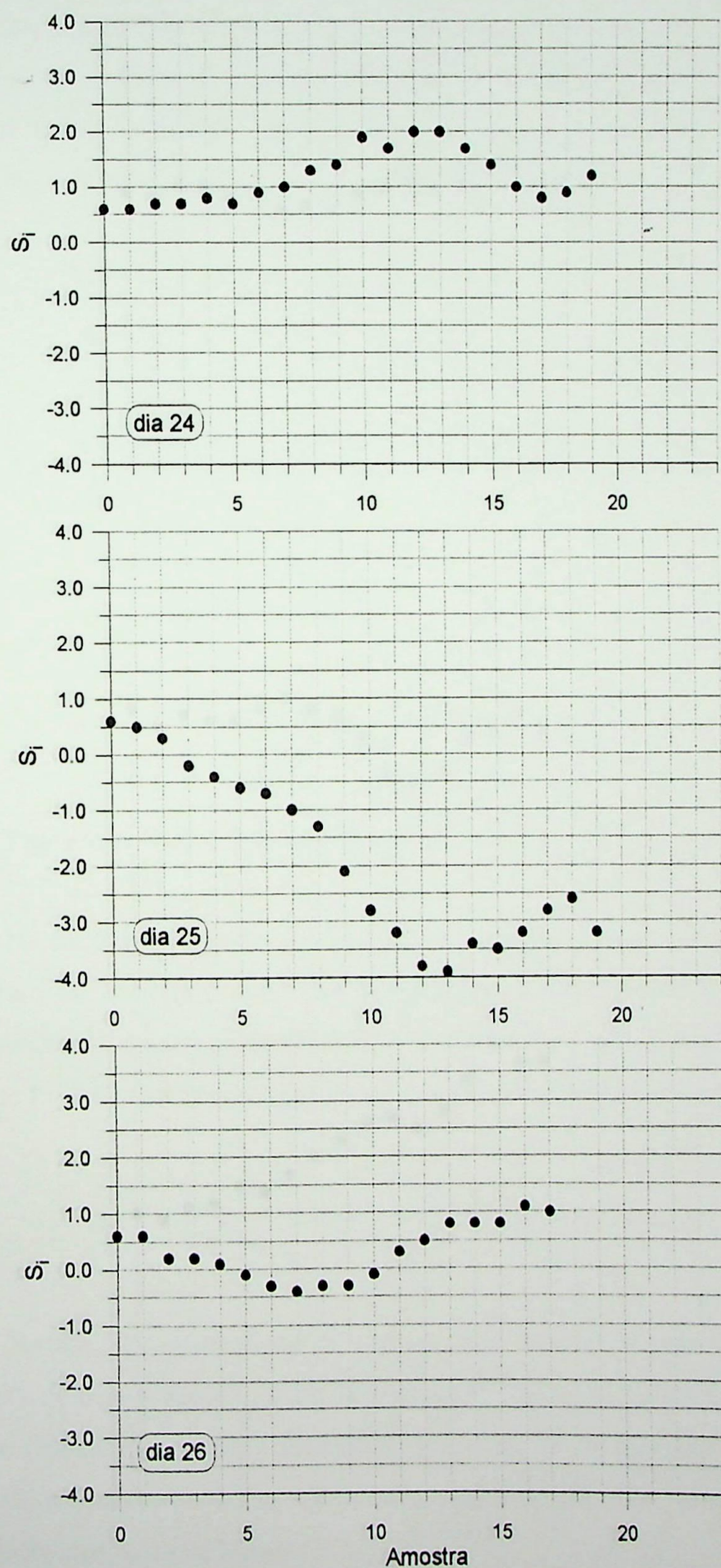


Figura 6.3 (cont.) - Gráfico de Soma Acumulada para o processo P200

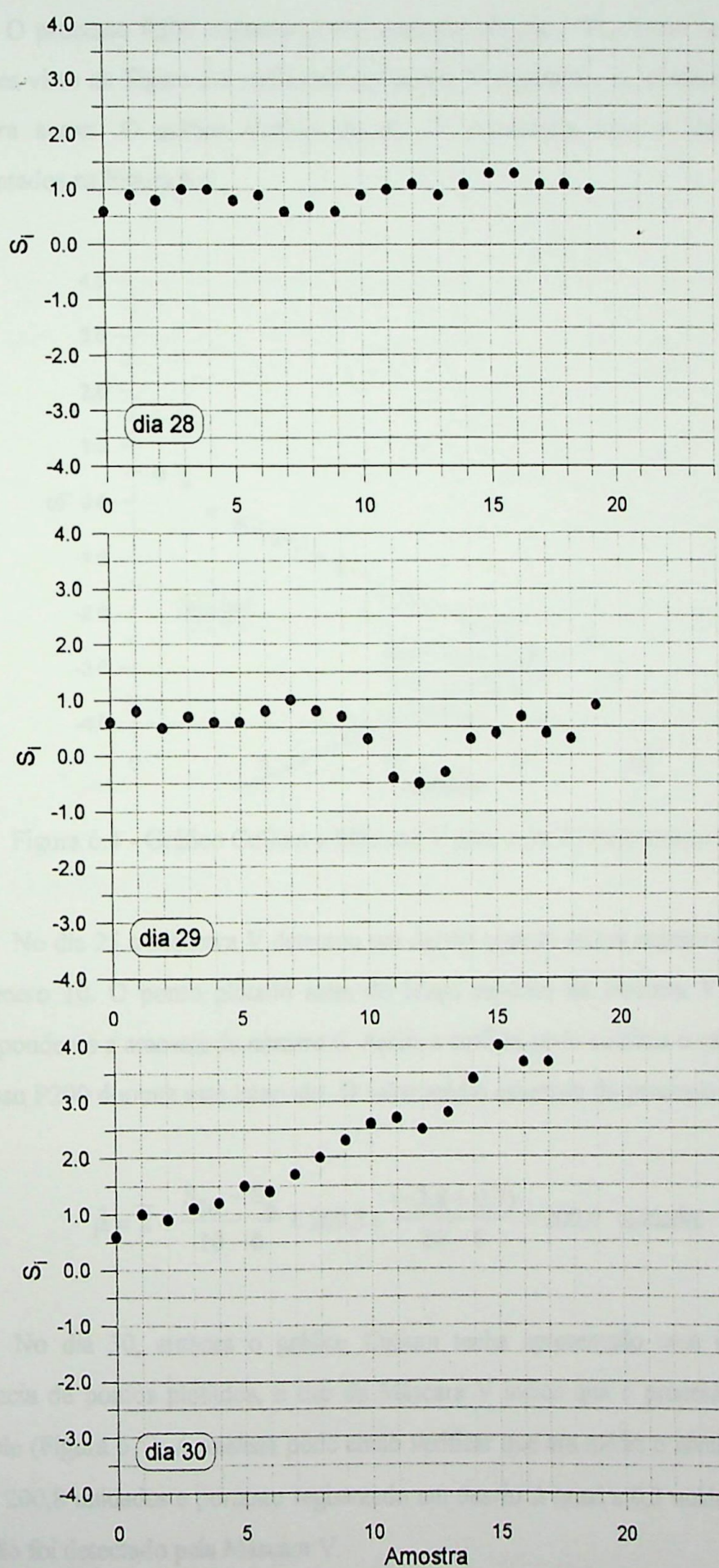


Figura 6.3 (cont.) - Gráfico de Soma Acumulada para o processo P200

O processo P200 manteve-se sob controle, dia após dia, exceto no dia 25. Isto pode ser visto na Figura 6.3 utilizando a máscara V desenhada na transparência que se encontra anexa. O gráfico CuSum do dia 25 juntamente com a Máscara V são apresentados na Figura 6.4.

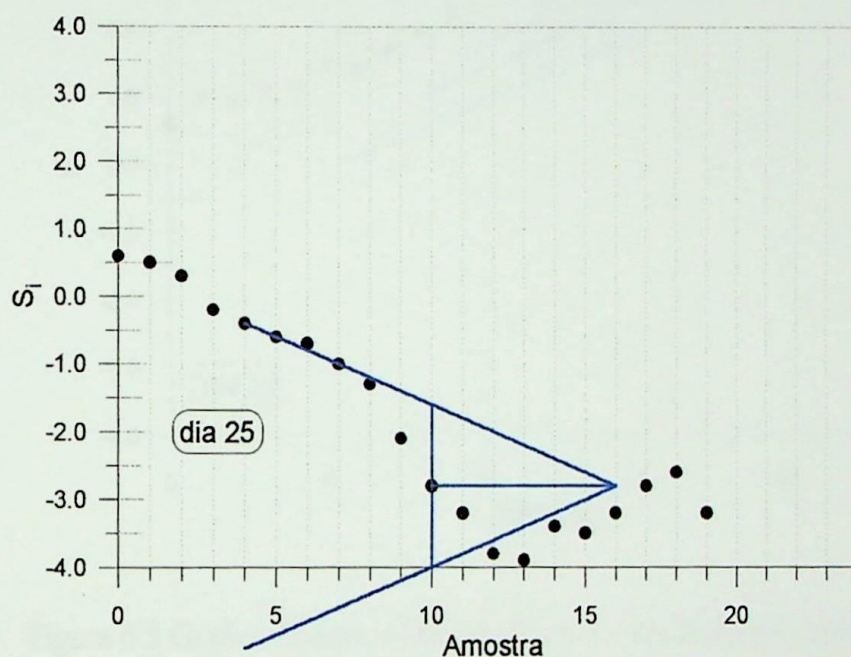


Figura 6.4 - Gráfico CuSum e Máscara V para o dia 25 do processo P200

No dia 25 a Máscara V detectou um desvio quando estava superposta à amostra de número 10. O ponto plotado além do braço superior da Máscara V foi o ponto correspondente a amostra de número 6. Assim a analista pode verificar o valor médio do processo P200 durante este intervalo. O valor médio estimado do processo P200 é dado por:

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{x}} + \frac{S_{10} - S_6}{10 - 6} = 200,5 + \frac{(-2,8 + 0,7)}{10 - 6} = 200,0 \text{ unidades}$$

No dia 30, embora o gráfico CuSum tenha apresentado uma inclinação na seqüência de pontos plotados, o uso da Máscara V indica que o processo esteve sob controle (Figura 6.5). A analista pôde então verificar que em média o nível do processo foi de 200,8 unidades e portanto registrando um desvio Δ igual a 0,3 unidades, que por isso não foi detectado pela Máscara V.

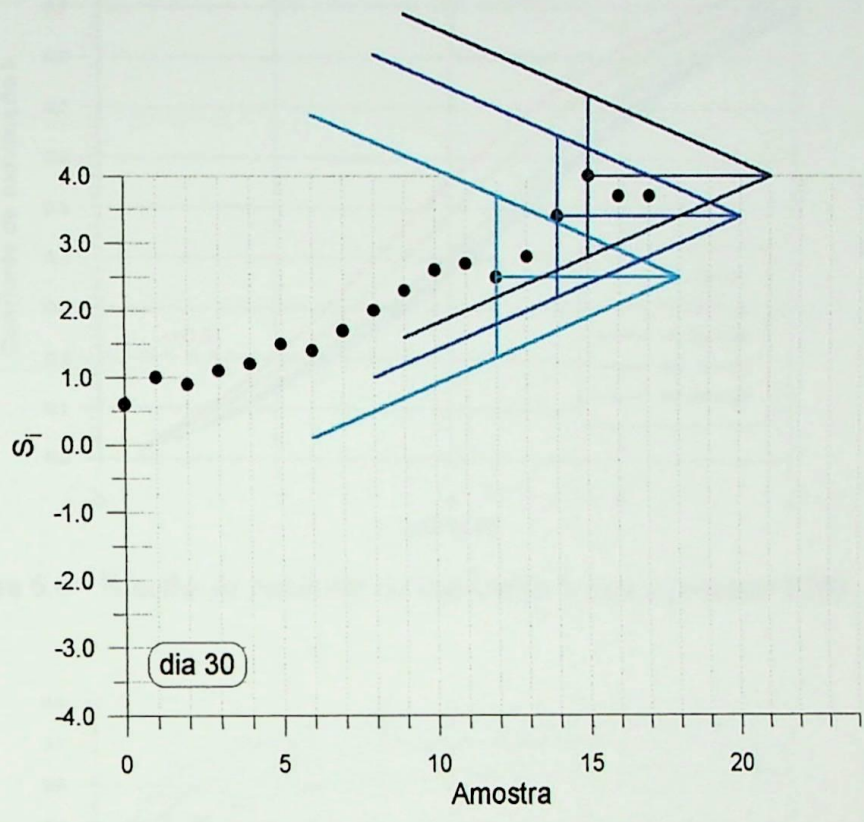


Figura 6.5 Gráfico CuSum e Máscara V para o dia 30 do processo P200

6.2.2 O gráfico EWMA para o processo P200

O procedimento gráfico de Crowder, descrito no Capítulo 5, utiliza as Figuras 6.6 ($\delta \times \lambda$) e 6.7 ($\lambda \times L$), indicando o uso dos parâmetros $\lambda = 0,21$ e $L = 2,05$ para o projeto do gráfico EWMA para o processo P200..

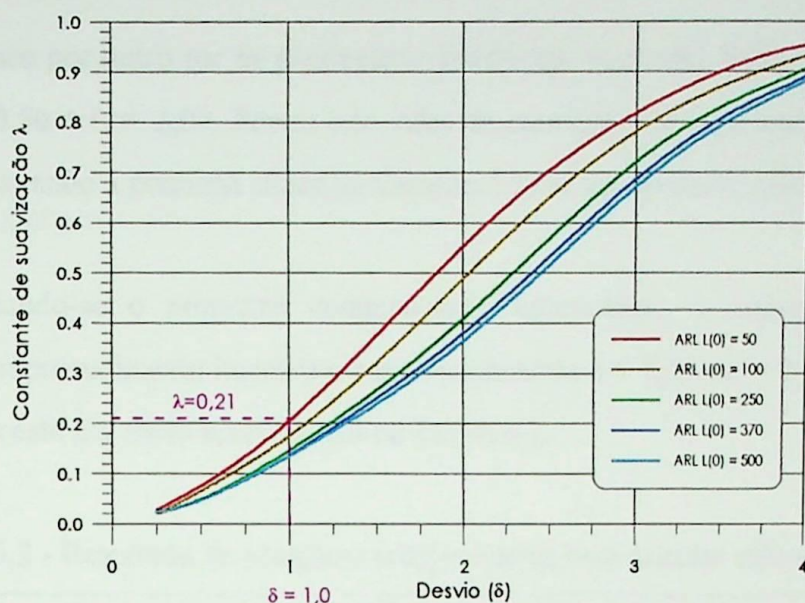


Figura 6.6 - Escolha da constante de suavização λ para o processo P200

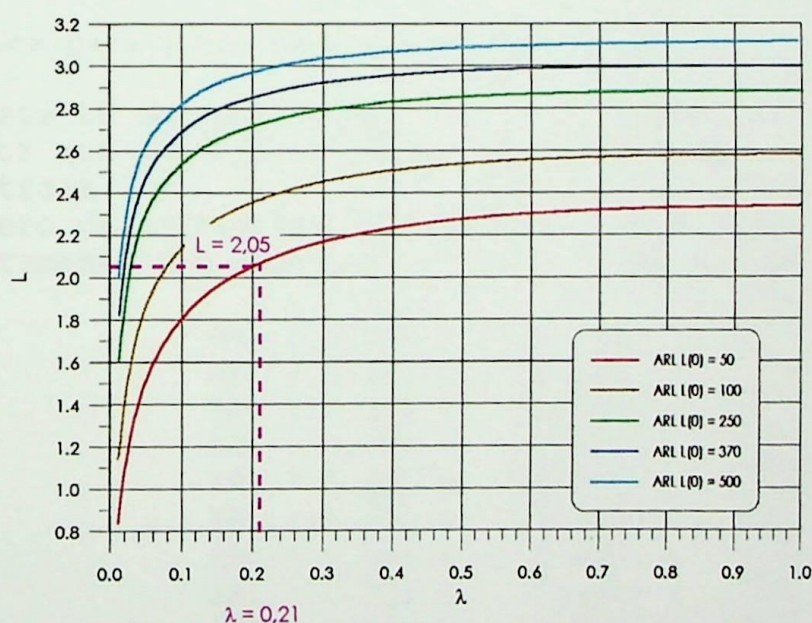


Figura 6.7 - Escolha do valor de L para o processo P200

Estes parâmetros são para uma taxa de falso alarme $ARL L(0)$ igual a 50. Esta é a taxa mais próxima da especificação feita, fornecida pelo procedimento gráfico. Neste caso, o desvio $\delta = 1,0$ é detectado em média em 5,675 amostras (Tabela 5.2). Deste modo, o valor de $ARL L(\delta)$ deste par de parâmetros não satisfaz às especificações do responsável pelo processo P200, tornando-se necessária a busca por outro par (λ, L) .

A busca por outro par de parâmetros remete-nos ao uso da Tabela 5.2, que leva ao par $\lambda = 0,50$ e $L = 2,00$. Porém este valor da constante de suavização é um valor grande contrariando a premissa citada no Capítulo 5 para o projeto dos gráficos EWMA.

Utilizando-se o programa computacional apresentado, a analista encontrou através de um procedimento iterativo o par de parâmetros $\lambda = 0,35$ e $L = 2,0$. Os valores de ARL para este par estão apresentados na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 - Resultado do programa computacional para calcular valores de ARL

EWMA - Exponentially Weighted Moving Average	
Programa para calcular o ARL para graficos EWMA	
Criado por Stephen V. Crowder (1987)	
e modificado por Ana Paula S. Figueiredo	
Dados para a listagem dos valores de ARL	
Constante de suavizacao	Lambda = .35
Fator que multiplica sigma nos limites de controle	L = 2
Numero de intervalos dos desvios	ND = 13
Incremento dos desvios	INC = .25
ARL (0.00) =	31.620
ARL (0.25) =	22.217
ARL (0.50) =	12.159
ARL (0.75) =	7.327
ARL (1.00) =	4.986
ARL (1.25) =	3.717
ARL (1.50) =	2.955
ARL (1.75) =	2.457
ARL (2.00) =	2.110
ARL (2.25) =	1.856
ARL (2.50) =	1.660
ARL (2.75) =	1.505
ARL (3.00) =	1.380

Os valores de ARL $L(0) = 31,6$ e $ARL L(1,0) = 4,98$. Deste modo as especificações do responsável pelo processo P200 são satisfeitas.

Com a constante de suavização λ igual a 0,35 e a estatística EWMA é dada por

$$Z_i = 0,35 \times \bar{x}_i + 0,65 \times Z_{i-1}$$

Com $\lambda = 0,35$ e $L = 2,0$ os limites de controle do gráfico EWMA para cada amostra i são dados por

$$LSC = 200,5 + 2,0 \times 0,4 \sqrt{\left(\frac{0,35}{2 - 0,35}\right) \left[1 - (1 - 0,35)^{2i}\right]} = 200,5 + 0,37 \sqrt{1 - (0,65)^{2i}}$$

$$LC = 200,5$$

$$LIC = 200,5 - 2,0 \times 0,4 \sqrt{\left(\frac{0,35}{2 - 0,35}\right) \left[1 - (1 - 0,35)^{2i}\right]} = 200,5 - 0,37 \sqrt{1 - (0,65)^{2i}}$$

Os valores dos limites de controle se encontram na Tabela 6.3 onde se pode observar que os limites tendem a seus valores assintóticos $LIC = 200,1$ e $LSC = 200,9$ já para a amostra de número 2.

Tabela 6.3 - Valores dos Limites de Controle Superior (LSC) e Inferior (LIC) do gráfico EWMA em função do número i da amostra

i	LSC	LIC	i	LSC	LIC
0	200.5	200.5	12	200.9	200.1
1	200.8	200.2	13	200.9	200.1
2	200.8	200.2	14	200.9	200.1
3	200.9	200.1	15	200.9	200.1
4	200.9	200.1	16	200.9	200.1
5	200.9	200.1	17	200.9	200.1
6	200.9	200.1	18	200.9	200.1
7	200.9	200.1	19	200.9	200.1
8	200.9	200.1	20	200.9	200.1
9	200.9	200.1	21	200.9	200.1
10	200.9	200.1	22	200.9	200.1
11	200.9	200.1	23	200.9	200.1
			24	200.9	200.1

O gráfico EWMA foi então utilizado nos dias seguintes de produção do processo P200. Foram analisados 15 dias de produção. Os gráficos EWMA destes dias são apresentados na Figura 6.8 que compreende todos os 15 dias. Os dados apresentam-se no Anexo 6.2.

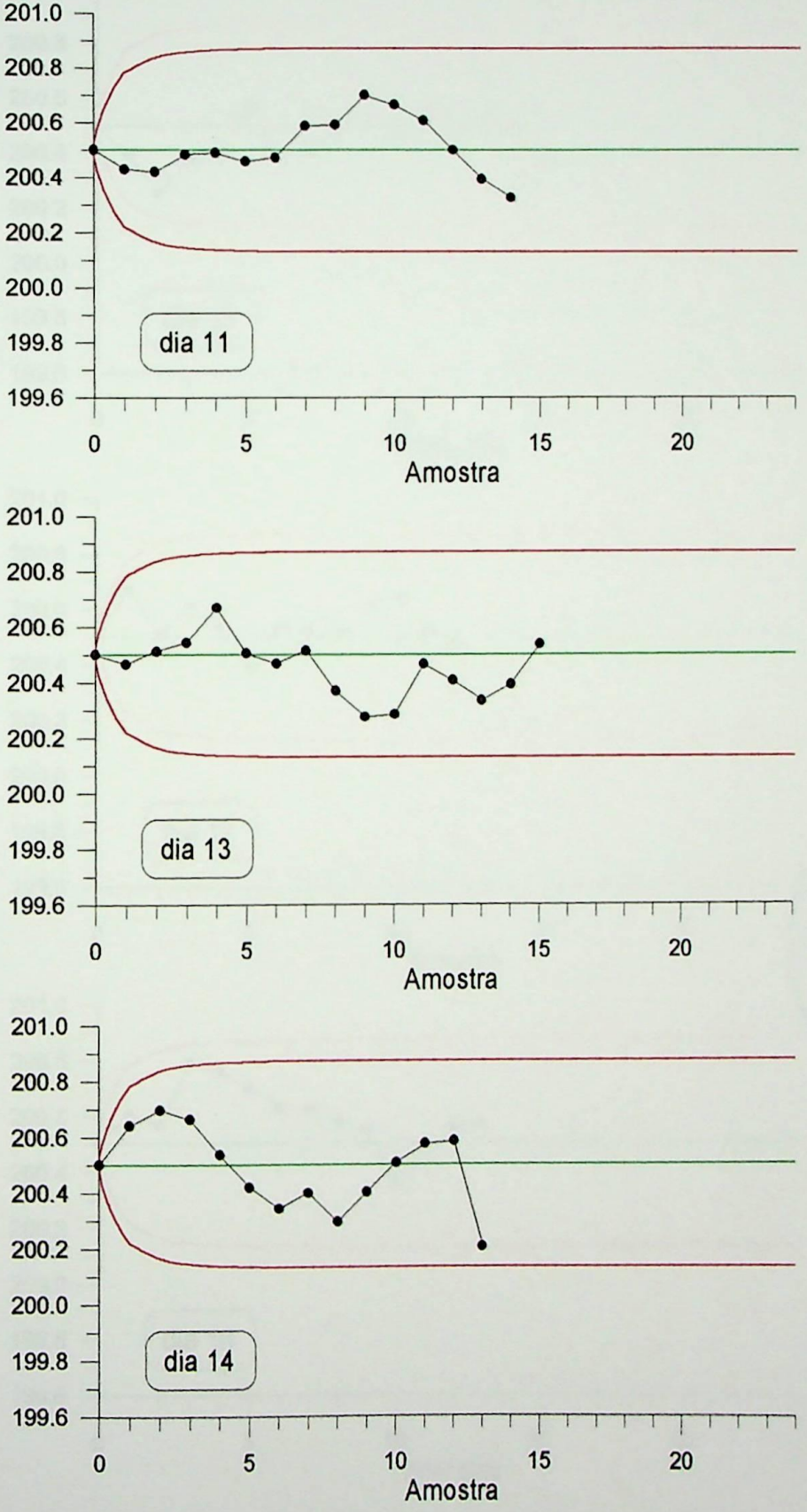


Figura 6.8 - Gráfico EWMA para o processo P200

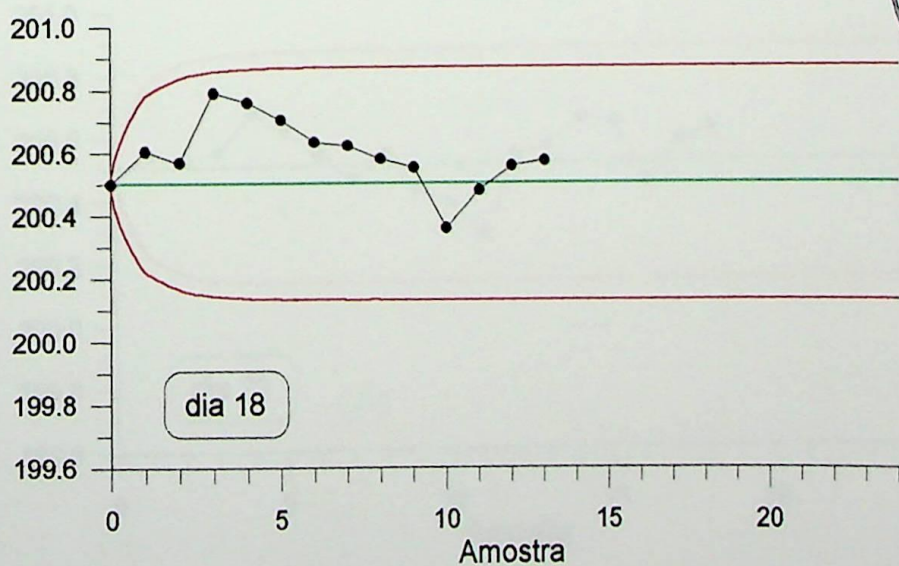
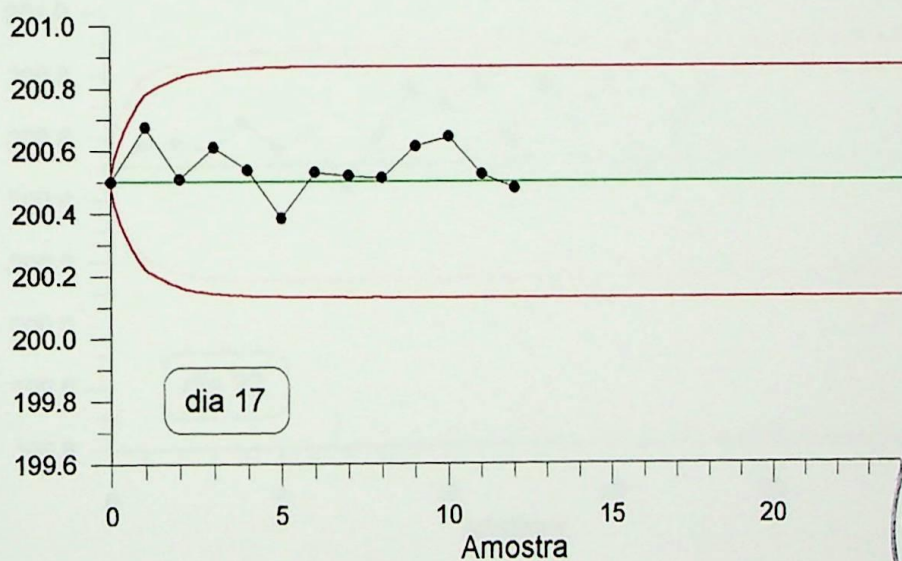
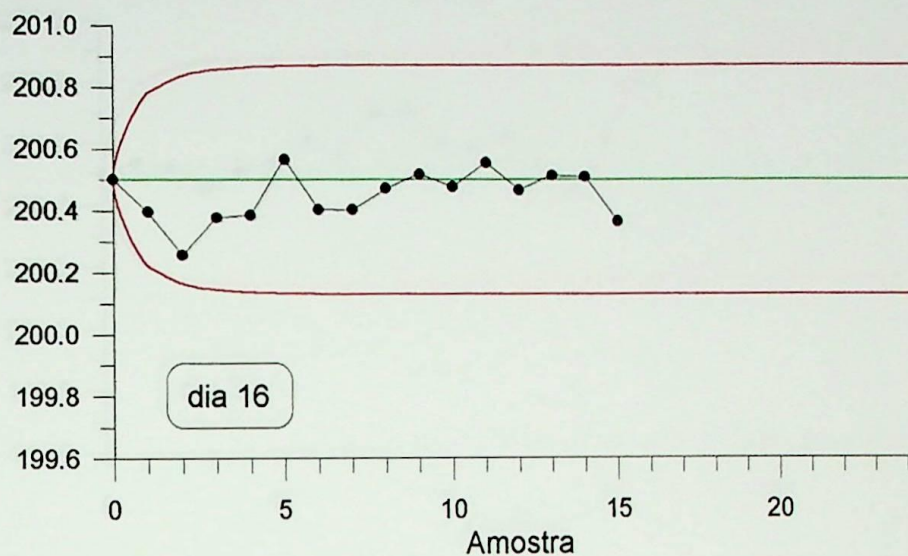


Figura 6.8 (cont) - Gráfico EWMA para o processo P200

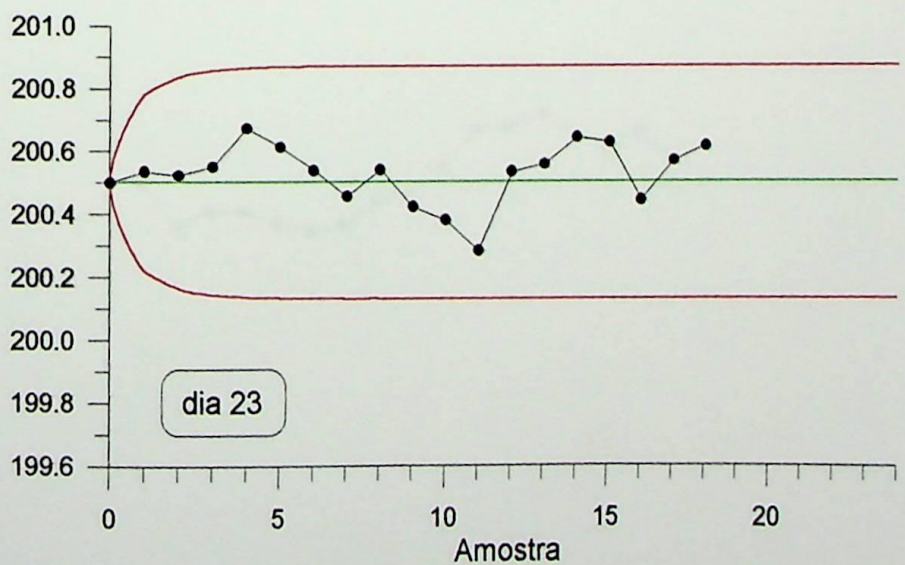
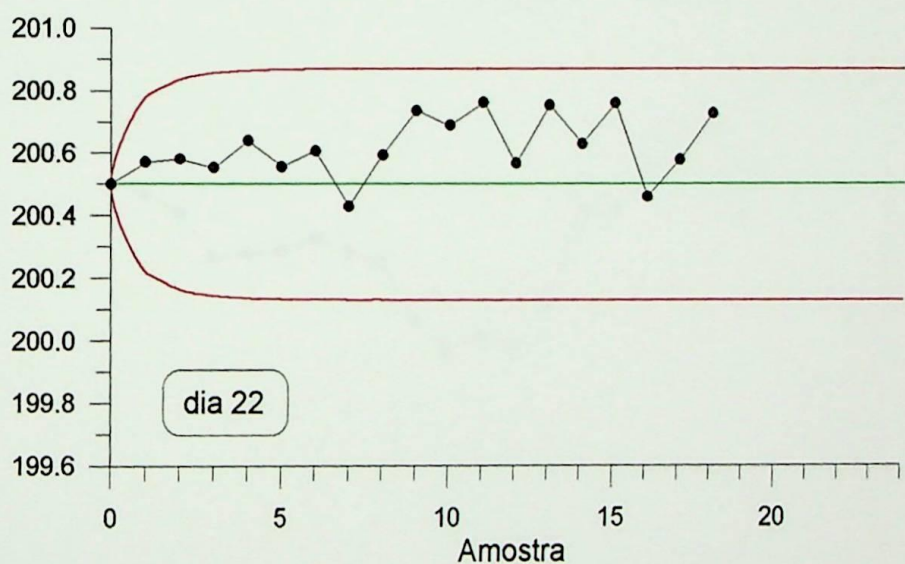
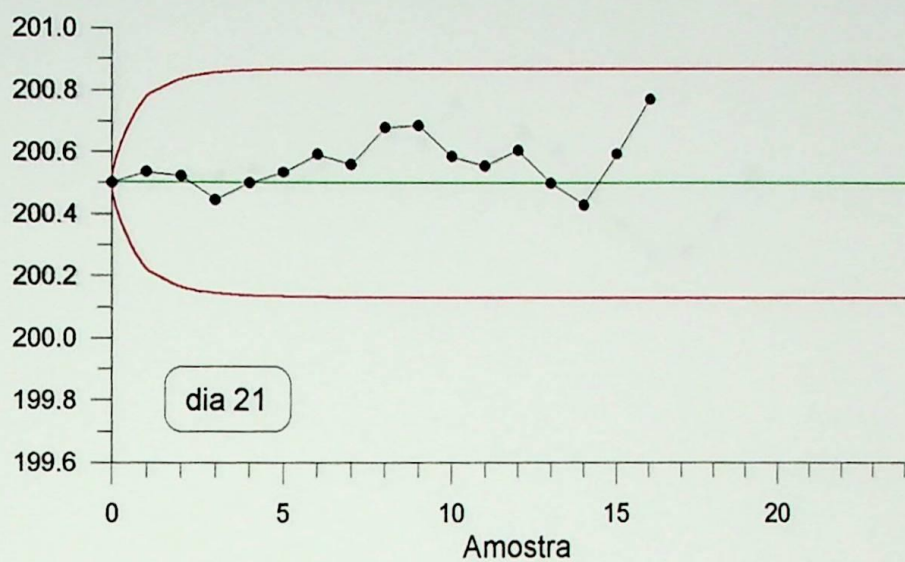


Figura 6.8 (cont) - Gráfico EWMA para o processo P200

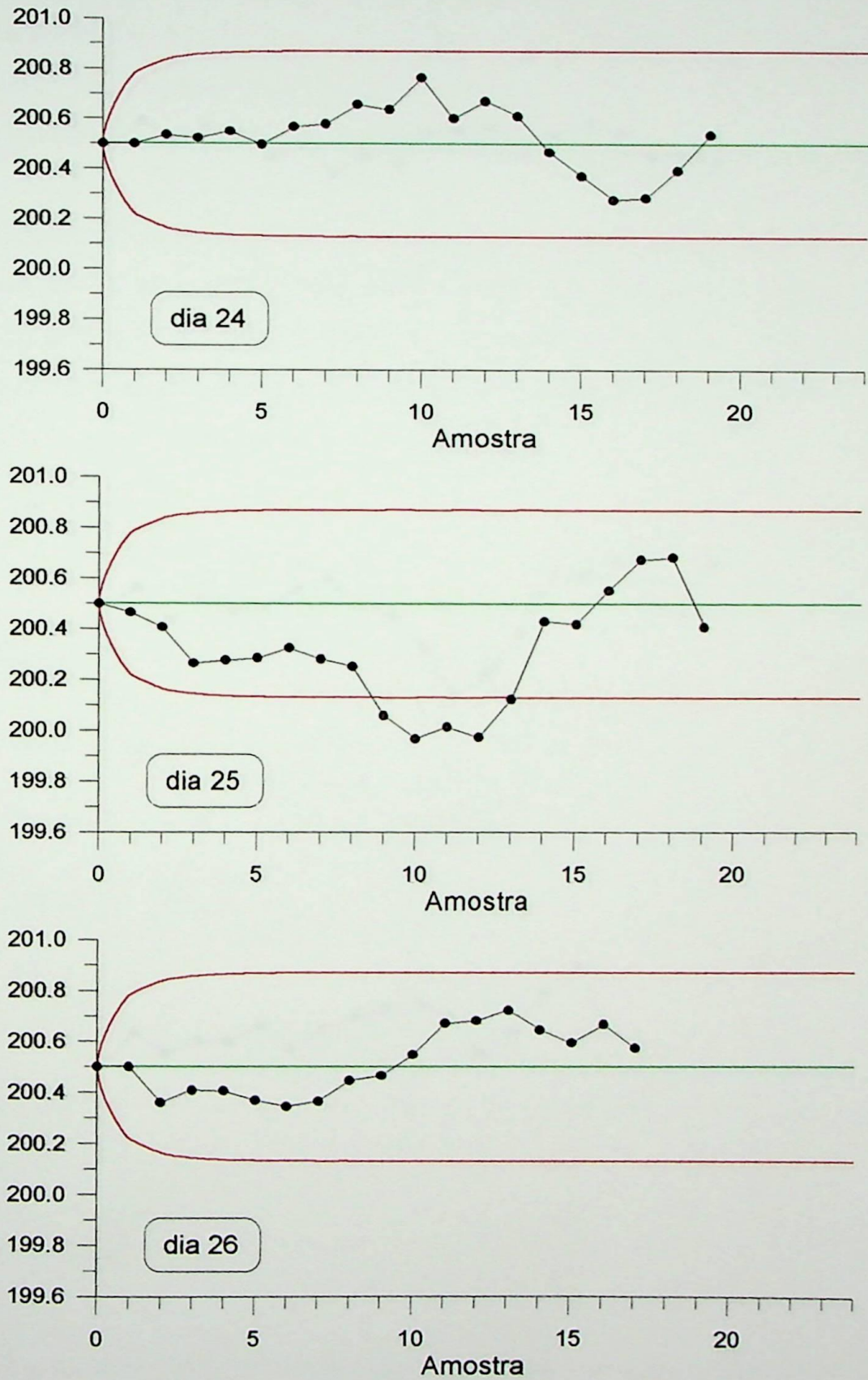


Figura 6.8 (cont) - Gráfico EWMA para o processo P200

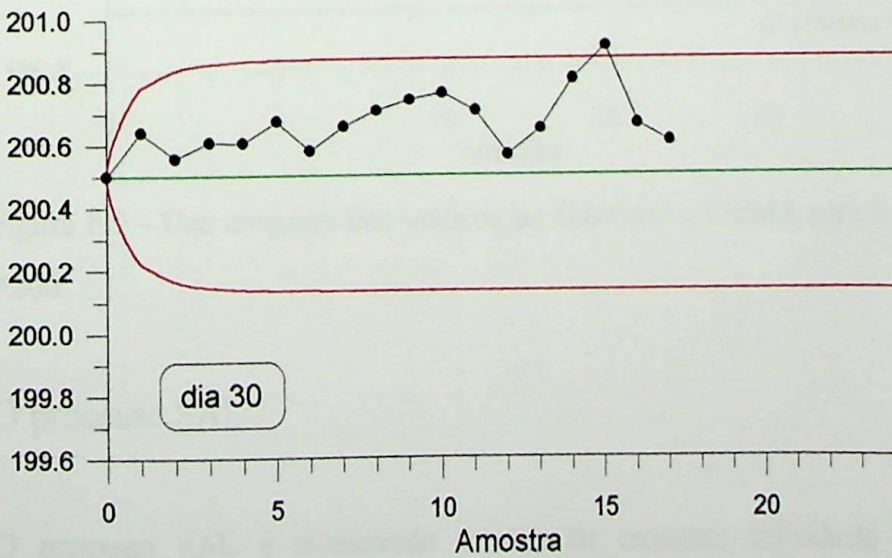
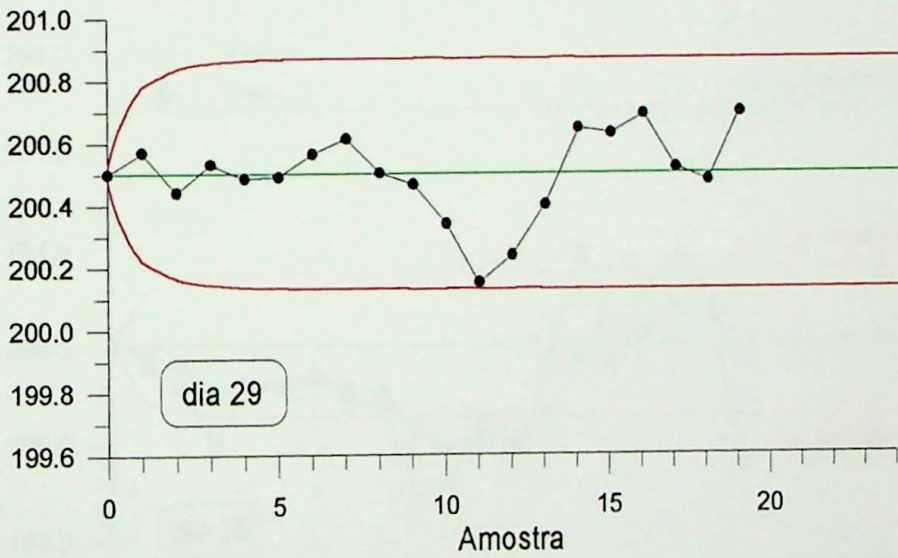
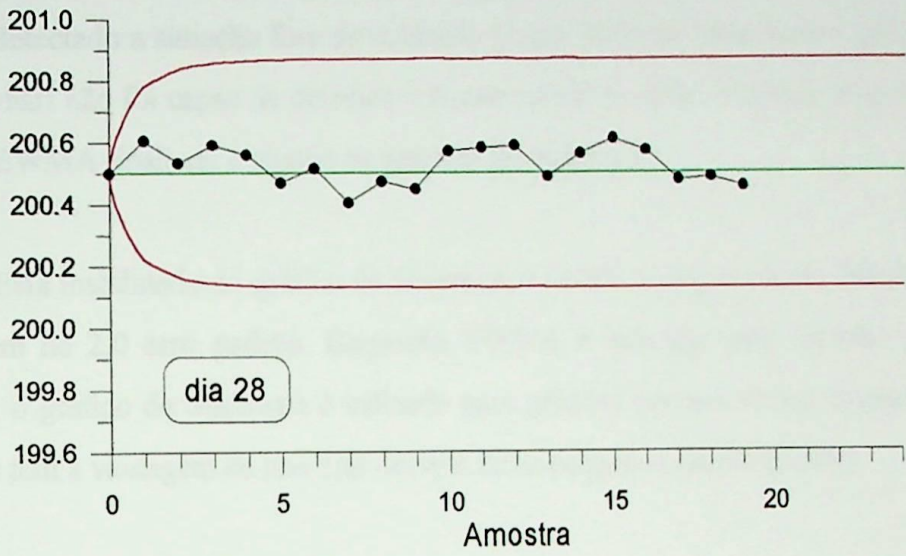


Figura 6.8 (cont) - Gráfico EWMA para o processo P200

A Figura 6.9 mostra o uso conjunto do gráfico de Shewhart e EWMA no dia em que foi detectado a situação fora de controle. O que pode ser observado é que o gráfico de Shewhart não foi capaz de detectar o desvio médio do valor nominal, ao passo que o gráfico EWMA sinalizou o desvio na amostra de número 9.

Esta inabilidade do gráfico de Shewhart é devido a magnitude do desvio, que foi da ordem de 2,0 erro padrão. Enquanto EWMA é indicado para detectar pequenos desvios, o gráfico de Shewhart é indicado para grandes desvios. O uso conjunto destes gráficos tem a vantagem de sinalizar desvios tanto pequenos quanto grandes.

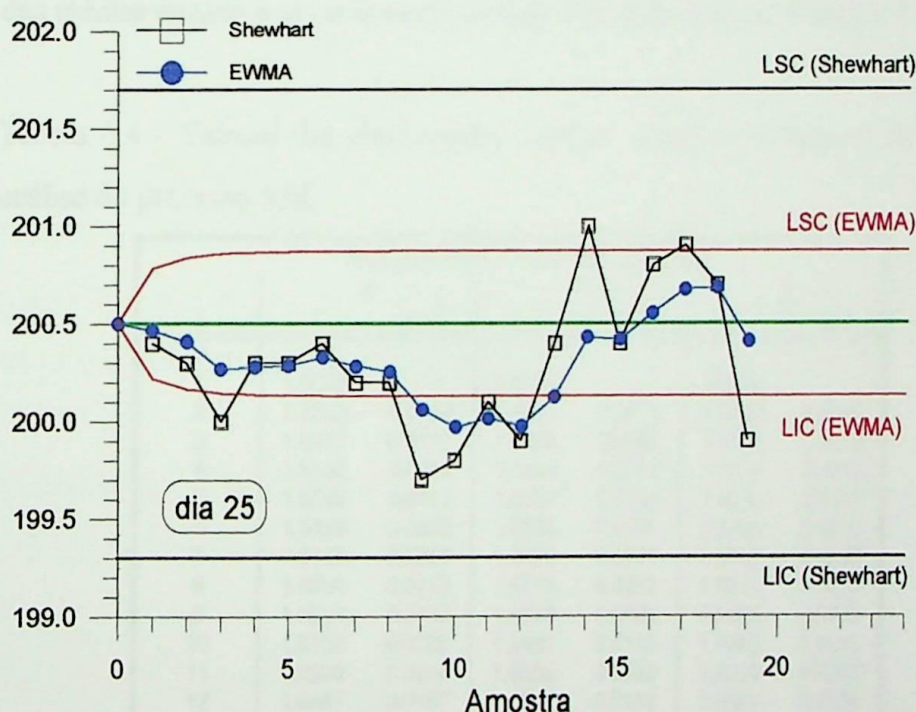


Figura 6.9 - Uso conjunto dos gráficos de Shewhart e EWMA para o processo P200

6.3 O processo SAL

O processo SAL é monitorado através de amostras individuais coletadas sucessivamente. O valor nominal deste processo é 1,65 u.m. e o responsável deseja detectar um desvio médio do valor nominal igual a 0,02 u.m em até 5 amostras. A taxa

de falso alarme deve ser maior do que 24, que é o número máximo de amostras coletadas durante um dia de produção.

Para a análise do processo foram utilizados 3 dias de produção. Estes dias foram os dias 6, 7 e 8. Os gráficos de Soma Acumulada e EWMA foram utilizados então nos 11 dias de produção seguintes. Os dados deste processo apresentam-se no Anexo 6.4.

A média do processo SAL foi estimada em 1,65 u.m. Para se estimar o valor do desvio padrão do processo SAL foram utilizados os estimadores s/c_4 e \overline{MR}/d_2 . O valor estimado do desvio padrão $SD(x)$ é igual a 0,01 u.m. As observações individuais, os valores das médias móveis e as estimativas do desvio padrão estão na Tabela 6.4.

Tabela 6.4 - Valores das observações, médias móveis e estimativas da fase de análise do processo SAL.

Processo Sal - Fase de Análise						
<i>i</i>	6 MR		7 MR		8 MR	
0						
1	1.6222		1.6371		1.6391	
2	1.6305	0.0083	1.6347	0.0024	1.6649	0.0258
3	1.6422	0.0117	1.6408	0.0061	1.6600	0.0049
4	1.6432	0.0010	1.6442	0.0034	1.6619	0.0019
5	1.6746	0.0314	1.6317	0.0125	1.6230	0.0389
6	1.6423	0.0323	1.6504	0.0187	1.6426	0.0196
7	1.6478	0.0055	1.6420	0.0084	1.6398	0.0028
8	1.6651	0.0173	1.6712	0.0292	1.6711	0.0313
9	1.6514	0.0137	1.6795	0.0083	1.6883	0.0172
10	1.6802	0.0288	1.6692	0.0103	1.6916	0.0033
11	1.6390	0.0412	1.6656	0.0036	1.6919	0.0003
12	1.6557	0.0167	1.6505	0.0151	1.6564	0.0355
13	1.6505	0.0052	1.6801	0.0296	1.6422	0.0142
14	1.6532	0.0027	1.6609	0.0192	1.6214	0.0208
15	1.6681	0.0149	1.6574	0.0035	1.6403	0.0189
16	1.6189	0.0492	1.6451	0.0123	1.6532	0.0129
17	1.6277	0.0088	1.6594	0.0143	1.6298	0.0234
18			1.6529	0.0065	1.6411	0.0113
19			1.6565	0.0036	1.6351	0.0060
20			1.6668	0.0103	1.6290	0.0061
21			1.6558	0.0110		
média	1.65	0.018	1.65	0.011	1.65	0.016
s	0.018		0.014		0.022	
c_4	0.9845		0.9876		0.9869	
s/c_4	0.018		0.014		0.022	
d_2		1.128		1.128		1.128
\overline{MR}/d_2		0.016		0.010		0.014

6.3.1 O gráfico de Soma Acumulada para o processo SAL

O responsável pelo processo SAL deseja detectar o desvio $\Delta = 0,02$. O erro padrão referente a este desvio é dado por

$$\delta = \frac{0,02}{0,01} = 2,0$$

A estatística Soma Acumulada plotada no gráfico é dada por

$$S_i = \sum_{j=1}^i (x_j - 1,65) = (x_i - 1,65) + S_{i-1}$$

A escala A a ser utilizada para a construção do gráfico sugerida deve estar entre 1,0 e 2,0 desvios padrão, desta forma a escala deve estar entre 0,01 e 0,02. O valor escolhido para a escala A é igual 0,02. Assim para uma unidade no eixo da abcissa corresponde a 0,02 unidades no eixo da ordenada.

A declividade K da máscara V escolhida é a metade do desvio Δ , portanto $K = 0,01$. O ângulo θ da máscara é dado por

$$\theta = \arctan\left(\frac{0,02}{2 \times 0,02}\right) = 26,57^\circ$$

A probabilidade de um erro tipo II, para a obtenção da distância d da máscara V para o desvio Δ deve ser obtida considerando o nível de significância e o desvio Δ para o caso de apenas uma amostra. Desta forma para $\alpha = 0,05$ o valor da probabilidade β é aproximadamente 0,5. Assim o valor de d é dado por

$$d = \frac{2}{\delta^2} \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) = \frac{2}{4} \ln\left(\frac{1-0,5}{0,05}\right) = 1,15$$

O valor de referência H da Máscara V é dado por

$$H = A \times d \times \tan\theta = 0,02 \times 1,15 \times \tan 26,57^\circ = 0,01$$

De posse dos valores padronizados, da declividade K e do valor de referência H, a analista verifica se a máscara padrão atende as especificações de ARL feitas pelo responsável pelo processo. Os valores padronizados são: $h = 1,0$ e $k = 1,0$. Consultando a Tabela 4.5 temos que para os valores padronizados acima, o valor de ARL $L(2,0)$ é igual a 1,78 atendendo a especificação feita, porém o valor de ARL $L(0)$ é 17,6 e portanto deve-se buscar uma alternativa para atender também a taxa de falso alarme.

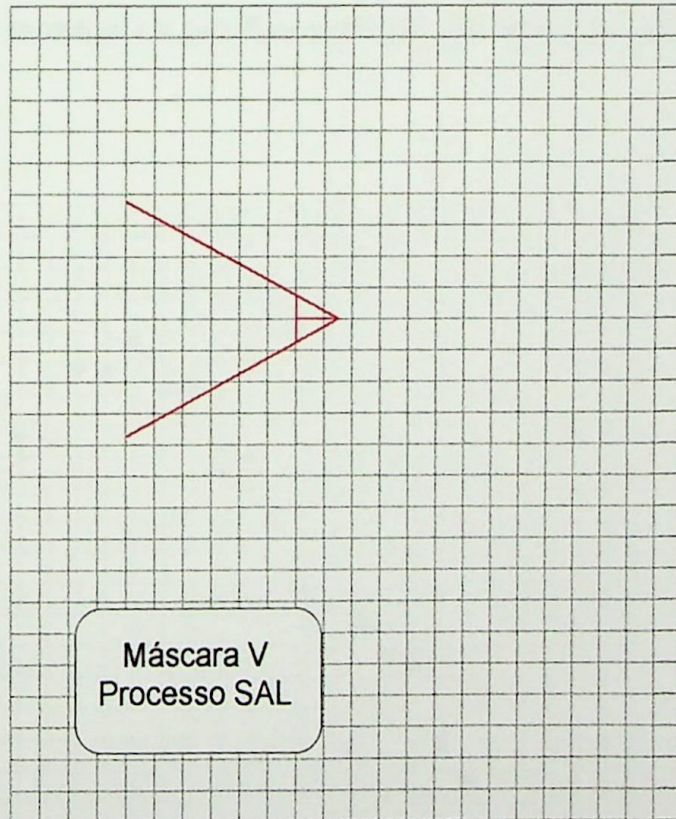


Figura 6.10 - Máscara V para o processo SAL

Uma alternativa é alterar o valor de h e manter o valor de k . Desta forma com $h = 1,5$ o valor de ARL $L(2,0)$ é igual a 2,24 e de ARL $L(0)$ é igual a 46,9. Ambos os valores atendem as especificações.

Com esta alteração o valor de H é então igual a 0,015 e portanto a distância d da máscara V será 1,5 unidades. O ângulo θ e a declividade K se mantêm inalterados uma vez que dependem do desvio Δ e não houve nenhuma alteração a este respeito. A máscara V com estas alterações pode ser vista na Figura 6.10.

O processo SAL apresentou desvio médio do valor nominal maior do que 0,02 unidades, em alguns dos dias em que se utilizou o procedimento de Soma Acumulada para monitorá-lo.

A Figura 6.11 mostra o gráfico CuSum para o dia 17, um dos dias em que o processo esteve atuando fora de controle. Esta figura apresenta a Máscara V superposta sucessivamente a três amostras em que fora sinalizado um desvio do valor médio do processo.

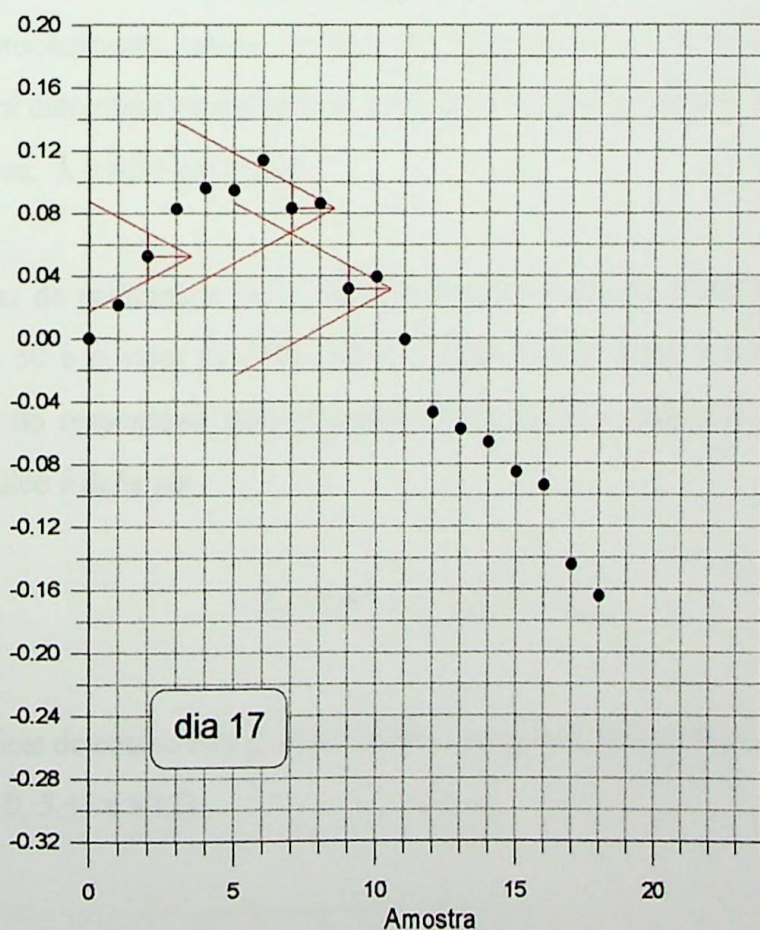


Figura 6.11 - Gráfico CuSum com uso da Máscara V para o processo SAL

Logo no início, na amostra $i = 2$ já foi sinalizado um desvio. O valor médio estimado do processo é de 1,681, ou seja um desvio $\Delta = 0,03$. Na amostra de número 7, o valor médio estimado do processo é igual a 1,619 e portanto um desvio Δ negativo igual a 0,031. E ainda na amostra de número 9, em que o desvio é ainda menor representando um valor de 0,055 abaixo do valor médio do processo.

A Máscara V utilizada com o gráfico CuSum se mostrou sensível aos desvios da ordem de 3 erros padrão, embora tenha sido projetada para detectar desvios menores, da ordem de 2 erros padrão.

6.3.2 O Gráfico EWMA para o processo SAL

O desvio $\Delta = 0,02$ representa, como já foi visto, um erro padrão $\delta = 2,0$. Utilizando o procedimento gráfico de Crowder (Figuras 5.1 e 5.3) como descrito no Capítulo 5, para determinar os parâmetros de projeto do gráfico EWMA encontra-se os seguintes valores: $\lambda = 0,55$ e $L = 2,25$.

Este par de parâmetros (0,55; 2,25) representa o projeto EWMA cuja taxa de falso alarme é 50 e o valor de ARL $L(2,0)$ é igual a 2,23. Estes valores atendem às especificações do responsável pelo processo. Desta forma a estatística EWMA a ser plotada no gráfico é dada por

$$Z_i = 0,55 \times x_i - 0,45 \times Z_{i-1}$$

Os limites de controle do gráfico EWMA, em função da amostra i , são dados por (Equações 5.10, 5.11 e 5.12)

$$LSC = 1,65 + 2,25 \times 0,02 \times \sqrt{\left(\frac{0,55}{2 - 0,55}\right) \times \left[1 - (0,45)^{2i}\right]} = 1,65 + 0,028 \times \sqrt{1 - (0,45)^{2i}}$$

$$LC = 1,65$$

$$LIC = 1,65 - 2,25 \times 0,02 \times \sqrt{\left(\frac{0,55}{2 - 0,55}\right) \times \left[1 - (0,45)^{2i}\right]} = 1,65 - 0,028 \times \sqrt{1 - (0,45)^{2i}}$$

cujos valores assintóticos são $LSC = 1,678$ e $LIC = 1,622$.

Uma vez que se pode utilizar conjuntamente o gráfico de Shewhart e EWMA, esta possibilidade será utilizada para o processo SAL. Os limites de controle do gráfico de Shewhart para observações individuais são dados por

$$LSC_{Shewhart} = \bar{x} + 3 \times \frac{\overline{MR}}{d_2} = 1,65 + 3 \times \frac{0,01}{1,128} = 1,68$$

$$LC_{Shewhart} = \bar{x} = 1,65$$

$$LIC_{Shewhart} = \bar{x} - 3 \times \frac{\overline{MR}}{d_2} = 1,65 - 3 \times \frac{0,01}{1,128} = 1,62$$

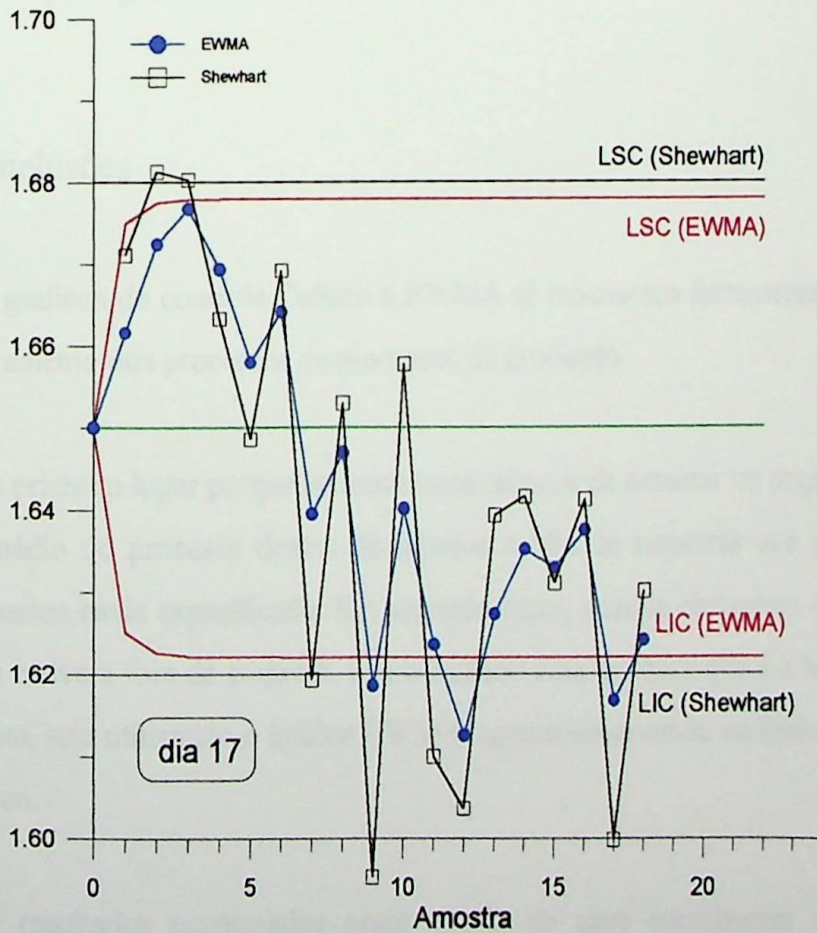


Figura 6.12 - Gráficos de Shewhart e EWMA para o processo SAL

O gráfico da Figura 6.12 mostra o uso conjunto dos gráfico de Shewhart e EWMA para o dia 17. Neste dia o processo SAL esteve operando fora de controle como pode ser visto com a aplicação do gráfico de Soma Acumulada.

O gráfico EWMA não detectou o desvio médio do valor nominal que aconteceu tanto na amostra de número 2 quanto na amostra de número 7. Os desvios apresentados nestas amostras foram respectivamente $\delta = 3,00$ e $\delta = -3,00$. O gráfico EWMA somente detectou o desvio médio na amostra de número 9 quando o desvio apresentado era igual a $\delta = -5,5$.

A Figura 6.12 mostra que o uso conjunto dos gráficos de Shewhart e EWMA torna-se uma ferramenta poderosa no que concerne detectar tanto grandes como pequenos desvios do valor nominal. Neste caso, especificamente, o processo apresentou um desvio grande (da ordem de $\delta = 3,0$) e o gráfico de Shewhart foi mais rápido em sinalizá-lo do que o gráfico EWMA.

6.4 Conclusões

Os gráficos de controle CuSum e EWMA se mostraram ferramentas muito úteis no monitoramento dos processos de processos de produção.

Em primeiro lugar porque se mostraram capazes de detectar os pequenos desvios do valor médio do processo dentro do número médio de amostras que o responsável pelos processos havia especificado. Em segundo lugar, porque obtiveram o sinal de que o processo estivera fora de controle, seja utilizando uma moldura que é a Máscara V, no caso CuSum, seja utilizando o gráfico EWMA, apenas observando os limites de controle deste gráfico.

Os resultados encontrados nesse estudo de caso corroboram as conclusões obtidas nos capítulos anteriores sobre as vantagens do uso dos gráficos CuSum e

EWMA quando o processo puder estar atuando na presença de pequenos desvios do valor médio do processo.

O analista tem então, mais ferramentas disponíveis para o monitoramento do processo e, com a escolha conveniente das mesmas, espera-se que o operador da linha de produção possa de maneira simples e objetiva decidir sobre a situação do processo e com segurança atuar sobre ele caso haja necessidade.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

Os gráficos de controle são um procedimento utilizado no monitoramento de um processo produtivo através de uma estatística que é plotada em função do tempo ou do número da amostra e comparada com valores pré-estabelecidos como critério de decisão. Os gráficos de controle propostos por Shewhart têm como critério de decisão o uso de regras que levam em consideração tendências nos pontos plotados. Utilizando tais regras o analista pode detectar pequenos desvios do valor nominal, porém perdendo a vantagem da simplicidade do uso de uma única regra de decisão.

Uma variabilidade natural estará sempre presente em qualquer processo independentemente de como este tenha sido projetado ou de como sua manutenção seja conduzida. Um processo atuando na presença apenas desta variabilidade é dito sob controle. Porém, se atuando na presença de outros tipos de variabilidade, ou seja de causas especiais, o processo pode se apresentar fora de controle. A variabilidade total de um processo é devida às causas comuns e às causas especiais. Os gráficos de controle são ferramentas que monitoram a variabilidade natural do processo sinalizando uma falta de controle diante da presença de uma causa especial.

Em se monitorando processos de produção, muitas vezes se faz necessário detectar pequenos desvios médios do valor nominal do processo. Os gráficos de controle CuSum e EWMA têm a capacidade de detectar pequenos desvios médios do valor nominal, além de poderem ser projetados para atender as especificações de valores de comprimento médio da rodada (ARL).

Estes gráficos são projetados para detectar pequenos desvios, porém é possível aprimorá-los para atender a necessidade de se detectar grandes desvios. Para o caso do gráfico CuSum, a Máscara V modificada e a inicialização rápida FIR são utilizadas com esta finalidade. No caso do gráfico de EWMA, pode-se utilizar uma inicialização rápida FIR ou ainda a utilizá-lo conjuntamente com o gráfico de Shewhart.

O procedimento de controle de Soma Acumulada e o gráfico de controle EWMA são ferramentas de controle que necessitam de técnica mais detalhada para serem projetadas, porém são mais simples de serem operacionalizadas do que os gráficos de Shewhart que utilizam decisão baseada em muitas regras. Estas regras muitas vezes não são simples de serem utilizadas gerando insegurança na tomada de decisão.

A apresentação do ‘exemplo genérico’ ao longo dos capítulos que descrevem as técnicas de Soma Acumulada e EWMA exemplifica o projeto do procedimento de controle que atende às especificações de ARL's e desvio médio. O projeto do procedimento de Soma Acumulada e do gráfico EWMA, como apresentados respectivamente nos capítulos 4 e 5, é uma maneira *prática* de utilizar estes procedimentos por aqueles que necessitam fazer uso destas ferramentas.

O estudo de caso apresentado mostra que a utilização dos gráficos de controle CuSum e EWMA para o processo de médias amostrais P200 detectou o desvio especificado pelo responsável pelo processo, no número de amostras desejado, sem a sinalização de um falso alarme. Neste estudo de caso, o uso conjunto dos gráficos EWMA e Shewhart se mostrou eficiente. Se por um lado o gráfico EWMA sinaliza *pequenos desvios* mais rapidamente do que o gráfico de Shewhart, para *grandes desvios* o gráfico de Shewhart se mostrou mais eficiente em sinalizar tal falta de controle. Isto ocorreu no caso do processo P200 em que um pequeno desvio médio não foi detectado pelo gráfico de Shewhart, mas pelo gráfico EWMA. Já no processo SAL, um grande desvio não foi detectado pelo gráfico EWMA, mas o foi pelo gráfico de Shewhart. O gráfico CuSum, utilizado no estudo de caso se mostrou tão sensível como os gráficos de Shewhart e EWMA, ou seja foi capaz de detectar tanto os desvios pequenos, para os quais foi projetado, como desvios grandes, especialmente no caso do processo SAL.

Os gráficos CuSum e EWMA não são substitutivos aos gráficos de Shewhart, uma vez que são utilizados para detectar pequenos desvios, mas podem atuar como complemento ao mesmo, auxiliando na melhora do desempenho do processo com a

finalidade de atingir níveis de estabilidade sempre melhores e portanto melhor qualidade dos bens produzidos.

Algumas sugestões de novos trabalhos para estes gráficos são o projeto do procedimento de Soma Acumulada e do gráfico de controle EWMA sob o enfoque econômico, a implementação computacional, de maneira mais 'amigável' dos programas para cálculo de ARL para os gráficos EWMA e CuSum. Ainda a utilização do gráfico de controle EWMA para processos correlacionados e para previsão e o uso destes gráficos no chão de fábrica durante a produção, em tempo real, para verificar a adaptação do operador a estas ferramentas.

ANEXO 2.1
Fatores de correção de tendenciosidade

n	d ₂	c ₂	c ₄	n	d ₂	c ₂	c ₄
2	1.128	.5642	.7979	21	3.778	.9638	.9876
3	1.693	.7236	.8862	22	3.819	.9655	.9882
4	2.059	.7979	.9213	23	3.858	.9670	.9887
5	2.326	.8407	.9400	24	3.895	.9684	.9892
6	2.534	.8686	.9515	25	3.931	.9695	.9896
7	2.704	.8882	.9594	30	4.086	.9748	.9915
8	2.847	.9027	.9650	35	4.213	.9784	.9927
9	2.970	.9139	.9693	40	4.322	.9811	.9936
10	3.078	.9227	.9727	45	4.415	.9832	.9943
11	3.173	.9300	.9754	50	4.498	.9849	.9949
12	3.258	.9359	.9776	55	4.572	.9863	.9954
13	3.336	.9410	.9794	60	4.639	.9874	.9957
14	3.407	.9453	.9810	65	4.699	.9884	.9961
15	3.472	.9490	.9823	70	4.755	.9892	.9964
16	3.523	.9523	.9835	75	4.806	.9900	.9966
17	3.588	.9551	.9845	80	4.854	.9906	.9968
18	3.640	.9576	.9854	85	4.898	.9911	.9970
19	3.689	.9599	.9862	90	4.939	.9916	.9972
20	3.735	.9619	.9869	100	5.015	.9925	.9975

Fonte: Wheeler (1995)

Anexo 2.2

Fator de correção de tendenciosidade
para estimar variâncias $V(x)$ e desvio padrão $SD(x)$
com o uso da amplitude R

Valores de d_2^*

k	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	n=11	n=12
1	1.414	1.906	2.237	2.477	2.669	2.827	2.961	3.076	3.178	3.268	3.348
2	1.276	1.806	2.149	2.404	2.603	2.767	2.905	3.024	3.129	3.221	3.304
3	1.227	1.767	2.120	2.378	2.580	2.746	2.886	3.006	3.112	3.205	3.289
4	1.206	1.749	2.105	2.365	2.569	2.736	2.876	2.997	3.104	3.197	3.281
5	1.189	1.738	2.096	2.358	2.562	2.729	2.870	2.992	3.098	3.192	3.276
6	1.179	1.731	2.090	2.352	2.557	2.725	2.867	2.988	3.095	3.189	3.273
7	1.172	1.726	2.086	2.349	2.554	2.722	2.864	2.986	3.093	3.187	3.271
8	1.167	1.722	2.082	2.346	2.552	2.720	2.862	2.984	3.091	3.185	3.270
9	1.163	1.718	2.080	2.344	2.550	2.718	2.860	2.982	3.089	3.184	3.268
10	1.159	1.716	2.078	2.342	2.548	2.717	2.859	2.981	3.088	3.183	3.267
11	1.157	1.714	2.076	2.341	2.547	2.716	2.858	2.980	3.087	3.182	3.266
12	1.154	1.712	2.075	2.339	2.546	2.715	2.857	2.979	3.087	3.181	3.266
13	1.152	1.711	2.073	2.338	2.545	2.714	2.856	2.978	3.086	3.180	3.265
14	1.151	1.709	2.072	2.337	2.544	2.713	2.855	2.978	3.085	3.180	3.265
15	1.149	1.708	2.071	2.337	2.543	2.713	2.855	2.977	3.085	3.179	3.264
16	1.148	1.707	2.071	2.336	2.543	2.712	2.854	2.977	3.084	3.179	3.264
17	1.147	1.707	2.070	2.335	2.542	2.712	2.854	2.976	3.084	3.179	3.263
18	1.145	1.706	2.069	2.335	2.542	2.711	2.854	2.976	3.084	3.178	3.263
19	1.145	1.705	2.069	2.334	2.541	2.711	2.853	2.976	3.083	3.178	3.263
20	1.144	1.705	2.068	2.334	2.541	2.710	2.853	2.975	3.083	3.178	3.263
21	1.143	1.704	2.068	2.333	2.541	2.710	2.853	2.975	3.083	3.178	3.262
22	1.143	1.704	2.068	2.333	2.540	2.710	2.852	2.975	3.083	3.177	3.262
23	1.142	1.703	2.067	2.333	2.540	2.710	2.852	2.975	3.082	3.177	3.262
24	1.141	1.703	2.067	2.333	2.540	2.709	2.852	2.975	3.082	3.177	3.262
25	1.141	1.702	2.066	2.332	2.540	2.709	2.852	2.974	3.082	3.177	3.262
∞	1.128	1.693	2.059	2.326	2.534	2.704	2.847	2.970	3.078	3.173	3.258

Fonte: Wheeler (1995)

Anexo 5.1

```
' Programa para calcular o ARL para graficos EWMA para controle
' da media em um processo normal
' criado por Stephen V. Crowder (1987) e
' modificado por Ana Paula S. Figueiredo

' O usuario devera especificar:
' AL = peso (lambda) para o EWMA

' L = multiplo dos limites de controle, ou seja,
'     LSC = valor nominal + L * SD(EWMA)
'     LIC = valor nominal - L * SD(EWMA)

' ND = numero de valores de D para o qual o ARL sera calculado
' D = desvio na media do processo, expresso em multiplos do
'     erro padrao
' INC = incremento entre os valores de D

CLS
DIM A(24, 24)
DIM B#(24)
DIM P#(24)
DIM W#(24)
DIM ipivot(24)

INPUT "Alpha="; AL
INPUT "L="; L
INPUT "ND="; ND
INPUT "INC="; INC

H = SQR(AL / (2 - AL)) * L

'
'Pontos da quadratura gaussiana e pesos
'
P#(1) = .9951872199970213#
P#(2) = .9747285559713095#
P#(3) = .9382745520027327#
P#(4) = .886415527004401#
P#(5) = .8200019859739029#
P#(6) = .7401241915785542#
P#(7) = .6480936519369755#
P#(8) = .5454214713888395#
P#(9) = .4337935076260451#
P#(10) = .3150426796961634#
P#(11) = .1911188674736163#
P#(12) = .0640568928626056#

W#(1) = .0123412297999872#
W#(2) = .0285313886289337#
W#(3) = .0442774388174198#
W#(4) = .0592985849154368#
W#(5) = .0733464814110803#
W#(6) = .0861901615319533#
W#(7) = .0976186521041139#
W#(8) = .1074442701159656#
W#(9) = .1155056680537256#
W#(10) = .1216704729278034#
W#(11) = .1258374563468283#
W#(12) = .1279381953467521#

FOR I = 1 TO 12
    P#(25 - I) = -P#(I)
    W#(25 - I) = W#(I)
NEXT I

' Transformacao dos pontos de Gauss e pesos do intervalo (-1,1) para
' o intervalo (-H,H)

FOR I = 1 TO 24
    W#(I) = H * W#(I)
    P#(I) = H * P#(I)
NEXT I
```



```

' Loop exterior - valores de D
FOR KK = 1 TO ND
  D = INC * (KK - 1)

  FOR I = 1 TO 24
    B#(I) = -1#

    FOR J = 1 TO 24
      ARG = (P#(J) - (1# - AL) * P#(I)) / AL
      IF I = J THEN
        A(I, J) = (1# / AL) * W#(I) * (.3989422804014327# * EXP(-.5 * (ARG - D) ^ 2)) - 1#
      ELSE
        A(I, J) = (1# / AL) * W#(J) * (.3989422804014327# * EXP(-.5 * (ARG - D) ^ 2))
      END IF
    NEXT J

  NEXT I

  ' Chamando as subrotinas FACTOR e SUBST:
  ' Fatorizacao triangular e substituicao para resolver o sistema linear
  ' A*X=B
  '
  ' Se iflag <> 0 entao o sistema linear A*X=B podera ser resolvido para X
  ' chamando SUBST

  N = 24
  D1 = WK
  GOSUB FACTOR

  IF iflag = 0 THEN
    PRINT "Determinante igual a zero no sistema linear"
    STOP
  END IF

  DIM X(24)
  N = 24

  GOSUB SUBST
  '
  ' Solucao para o sistema linear
  ' A*X=B

  ARL = 0#

  FOR I = 1 TO 24
    ARG = P#(I) / AL
    ARL = ARL + W#(I) * X(I) * (.3989422804014327# * EXP(-.5 * (ARG - D) ^ 2))
  NEXT I

  ARL = 1# + ARL / AL

  PRINT "ALPHA="; AL;
  PRINT " L="; L; " D=";
  PRINT USING "###.##"; D;
  PRINT " ARL="; ARL

NEXT KK
END
'
' Fim do loop externo em KK
'
' SUBROTINAS
'
SUBST:
'
IF N <= 1 THEN
  X(1) = B#(1) / A(1, 1)
  GOTO 10
END IF
IP = ipivot(1)
X(1) = B#(IP)
FOR I = 2 TO N
  SUM = 0#
  I1 = I - 1
  FOR J = 1 TO I1
    SUM = A(I, J) * X(J) + SUM

```



```

NEXT J
IP = ipivot(I)
X(I) = B#(IP) - SUM
NEXT I
X(N) = X(N) / A(N, N)
I2 = N - 1
FOR ISTEP = 1 TO I2
  I = N - ISTEP
  SUM = 0#
  I3 = I + 1
  FOR J = I3 TO N
    SUM = A(I, J) * X(J) + SUM
  NEXT J
  X(I) = (X(I) - SUM) / A(I, I)
NEXT ISTEP
10 RETURN
'
FACTOR:
'
DIM D1(24)
iflag = 1

FOR I = 1 TO N
  ipivot(I) = I
  ROWMAX = 0#
  FOR J = 1 TO N
    IF ABS(A(I, J)) > ROWMAX THEN ROWMAX = ABS(A(I, J))
  NEXT J
  IF ROWMAX = 0# THEN
    iflag = 0
    ROWMAX = 1#
  END IF
  D1(I) = ROWMAX
NEXT I
IF N <= 1 THEN RETURN
N1 = N - 1
FOR K = 1 TO N1
  colmax = ABS(A(K, K)) / D1(K)
  istar = K
  K1 = K + 1
  FOR I = K1 TO N
    AWIKOD = ABS(A(I, K)) / D1(K)
    IF AWIKOD > colmax THEN
      colmax = AWIKOD
      istar = I
    END IF
  NEXT I
  IF colmax = 0# THEN
    iflag = 0
  ELSE
    IF istar > K THEN
      iflag = -iflag
      I = ipivot(istar)
      ipivot(istar) = ipivot(K)
      ipivot(K) = I
      temp = D1(istar)
      D1(istar) = D1(K)
      D1(K) = temp
      FOR J = 1 TO N
        temp = A(istar, J)
        A(istar, J) = A(K, J)
        A(K, J) = temp
      NEXT J
    END IF
    K2 = K + 1
    FOR I = K2 TO N
      A(I, K) = A(I, K) / A(K, K)
      RATIO = A(I, K)
      K3 = K + 1
      FOR J = K3 TO N
        A(I, J) = A(I, J) - RATIO * A(K, J)
      NEXT J
    NEXT I
  END IF
NEXT K

IF A(N, N) = 0# THEN iflag = 0
RETURN

```


Tabela de valores de ARL para gráfico EWMA com inicialização FIR
Projetos com valor de ARL $L(0) = 500$

desvio	inicializador %	$L=3.090$ $\lambda=1.00$	$L=3.087$ $\lambda=0.75$	$L=3.071$ $\lambda=0.50$	$L=3.054$ $\lambda=0.40$	$L=3.023$ $\lambda=0.30$	$L=2.998$ $\lambda=0.25$	$L=2.962$ $\lambda=0.20$	$L=2.814$ $\lambda=0.10$	$L=2.615$ $\lambda=0.05$	$L=2.437$ $\lambda=0.03$
0.00	0	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500
	25	500	498	497	497	495	491	491	487	470	465
	50	500	496	487	487	485	483	475	468	434	406
	75	500	495	478	471	456	444	429	382	312	258
0.50	0	201	140	88.8	71.2	55.4	48.2	41.8	31.3	28.8	29.3
	25	201	140	87.8	70.0	53.9	46.5	39.7	28.3	24.7	24.3
	50	201	139	86.1	67.8	51.2	43.6	36.6	24.2	19.5	18.4
	75	201	138	82.7	63.5	46.2	38.2	30.8	17.9	12.9	11.4
1.00	0	54.6	30.6	17.5	14.3	12.0	11.1	10.5	10.3	11.4	12.6
	25	54.6	30.2	16.9	13.5	11.1	10.1	9.4	8.75	9.3	10.1
	50	54.6	29.7	15.9	12.4	9.82	8.79	7.93	6.87	6.93	7.36
	75	54.6	29.1	14.5	10.8	7.99	6.86	5.91	4.56	4.28	4.37
2.00	0	7.26	4.54	3.63	3.52	3.54	3.61	3.74	4.36	5.23	5.99
	25	7.26	4.33	3.29	3.13	3.08	3.11	3.17	3.57	4.19	4.74
	50	7.26	4.09	2.87	2.64	2.52	2.5	2.51	2.72	3.08	3.43
	75	7.26	3.81	2.41	2.11	1.9	1.82	1.76	1.76	1.9	2.07
3.00	0	2.15	1.88	1.93	2.02	2.16	2.26	2.38	2.87	3.5	4.03
	25	2.15	1.75	1.69	1.73	1.83	1.9	2.01	2.35	2.8	3.2
	50	2.15	1.63	1.45	1.44	1.46	1.49	1.54	1.8	2.11	2.34
	75	2.15	1.51	1.26	1.21	1.18	1.17	1.16	1.19	1.29	1.41

	10			9			8			7			5			4			2			1		
	xbarra	s	R	xbarra	s	R	xbarra	s	R	xbarra	s	R	xbarra	s	R	xbarra	s	R	xbarra	s	R	xbarra	s	R
0																								
1	200.2	0.24	0.6	200.5	0.27	0.6	200.6	0.28	0.7	200.3	0.28	0.7	201.0	0.40	1.0	200.6	0.33	0.8	200.9	0.31	0.8	201.1	0.32	0.8
2	200.6	0.23	0.6	200.1	0.16	0.4	200.5	0.27	0.5	200.6	0.23	0.5	200.8	0.29	0.7	200.8	0.32	0.8	200.8	0.19	1.1	200.6	0.36	0.8
3	200.5	0.29	0.6	200.0	0.25	0.5	200.6	0.22	0.6	199.9	0.30	0.8	201.0	0.59	1.4	200.6	0.5	1.3	200.3	0.63	1.9	200.9	0.37	0.9
4	200.3	0.18	0.4	200.5	0.43	1.1	200.3	0.08	0.2	200.1	0.33	0.9	201.2	0.78	1.5	200.5	0.29	0.8	200.7	0.24	0.6	200.9	0.33	0.9
5	200.3	0.56	0.4	200.2	0.22	0.6	200.2	0.18	0.5	200.3	0.32	0.8	200.2	0.40	1.0	200.7	0.51	1.3	200.6	0.48	1.2	201.1	0.27	0.8
6	200.6	0.27	0.7	200.4	0.29	0.7	200.0	0.18	0.4	200.3	0.33	0.7	200.7	0.26	0.7	200.3	0.42	0.7	200.3	0.33	0.8	200.6	0.50	1.3
7	200.1	0.39	1.0	200.5	0.19	0.5	200.0	0.09	0.2	200.2	0.19	0.4	200.6	0.29	0.6	200.7	0.33	0.8	200.6	0.16	0.4	200.5	0.19	0.5
8	200.5	0.16	0.4	200.2	0.34	0.8	200.3	0.23	0.6	200.0	0.38	0.8	200.7	0.27	0.7	200.6	0.23	0.6	200.2	0.18	0.5	200.5	0.32	0.8
9	200.9	0.32	0.8	200.8	0.27	0.7	200.0	0.29	0.7	200.0	0.36	1.0	200.1	0.34	0.9	200.4	0.42	1.1	200.5	0.18	0.4	200.8	0.30	0.7
10	200.3	0.43	1.1	200.5	0.76	1.8	200.3	0.31	0.7	200.3	0.19	0.5	200.4	0.26	0.7	200.3	0.42	1.0	200.5	0.29	0.7	200.6	0.39	0.9
11	200.8	0.15	0.4	200.4	0.32	0.7	200.5	0.16	0.4	200.3	0.23	0.6	200.8	0.31	0.8	200.5	0.29	0.4	200.3	0.31	0.7	200.5	0.47	1.1
12	200.9	0.36	0.6	200.5	0.61	1.4	200.8	0.40	1.1	200.4	0.40	0.3	200.2	0.18	0.5	200.5	0.23	0.9	200.5	0.16	0.4	200.4	0.41	1.0
13	201.0	0.40	0.3	200.4	0.09	0.5	201.1	0.63	1.4	200.4	0.19	0.3	200.0	0.18	0.4	200.2	0.22	0.6	200.3	0.08	0.2	200.6	0.29	0.7
14	200.7	0.41	1.1	200.5	0.29	0.7	200.8	0.15	0.4	200.7	0.34	0.6	200.3	0.31	0.7	200.4	0.29	0.7	200.2	0.18	0.5	200.4	0.26	0.7
15	200.9	0.36	0.5	200.4	0.26	0.6	200.9	0.13	0.3	200.8	0.18	0.4	200.5	0.16	0.4	200.5	0.19	0.5	200.7	0.27	0.7	200.9	0.33	0.9
16	200.6	0.41	0.4	200.6	0.31	0.7	200.7	0.40	1.0	200.3	0.43	1.1	200.5	0.29	0.6	200.2	0.34	0.8	200.1	0.34	0.9	200.6	0.32	0.8
17	200.5	0.15	0.3	200.8	0.13	0.3	200.5	0.19	0.5	200.8	0.15	0.4	200.3	0.18	0.4	200.6	0.22	0.6	200.1	0.33	0.9	200.3	0.33	0.7
18				200.8	0.29	0.4	200.2	0.34	0.8				200.8	0.27	0.7	200.3	0.08	0.2	200.6	0.32	0.8	200.7	0.19	0.4
19				200.7	0.32	0.2	200.8	0.27	0.7				200.0	0.76	1.8	200.0	0.38	0.8						
$\overline{\overline{x}}$	200.6			200.5			200.5			200.3			200.5			200.5			200.5			200.7		

[illegible]

[illegible]

Anexo 6.2
Dados Processo P200
CuSum

2110	1810	1710	1610	1410	1310	1110
xbarra	xbarra	xbarra	xbarra	xbarra	xbarra	xbarra
S _i	S _i	S _i	S _i	S _i	S _i	S _i
0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
200.6	200.8	201.0	200.2	200.9	200.4	200.3
0.7	0.9	1.1	0.3	1.0	0.5	0.4
200.5	200.5	200.2	-0.2	200.8	200.6	200.4
0.7	0.9	0.8	-0.1	200.6	0.6	0.3
200.3	201.2	200.8	-0.1	200.6	0.7	0.4
0.5	1.6	1.1	-0.2	200.3	1.1	0.4
200.6	200.7	200.4	0.2	200.2	0.8	0.3
0.6	1.8	200.1	-0.2	200.2	0.7	0.3
200.6	200.6	200.8	-0.3	200.5	0.8	0.6
0.7	1.9	200.5	-0.2	200.1	0.4	0.7
200.7	200.5	200.8	-0.1	200.6	0.0	1.1
0.9	2.0	200.5	-0.2	200.7	-0.2	1.2
200.5	200.6	200.7	0.0	200.6	0.1	1.2
0.9	2.0	200.3	-0.2	199.5	-0.1	1.0
200.9	200.5	200.4	-0.1	200.5	-0.4	0.7
1.3	2.0	200.4	-0.1	200.1	-0.4	0.4
200.7	200.5	200.7	-0.5	200.1	200.8	
1.5	2.0	200.4				
200.4	200.0	200.3				
1.4	1.7	200.4				
200.5	200.7	200.4				
1.6	1.9	200.4				
200.3	200.6	200.4				
1.4	2.0	200.4				
200.3						
1.2						
200.3						
1.6						
200.9						
1.6						
201.1						
2.2						

I	9			10			11		
		EWMA	S _t		EWMA	S _t		EWMA	S _t
0		1.65	0		1.65	0		1.65	0
1	1.6400	1.6445	-0.0100	1.6459	1.6477	-0.0041	1.6329	1.6406	-0.0171
2	1.6300	1.6365	-0.0300	1.6500	1.6490	-0.0041	1.6442	1.6426	-0.0229
3	1.6416	1.6393	-0.0384	1.6264	1.6366	-0.0277	1.6437	1.6432	-0.0292
4	1.6256	1.6318	-0.0628	1.6436	1.6404	-0.0341	1.6549	1.6496	-0.0243
5	1.6317	1.6317	-0.0811	1.6538	1.6478	-0.0303	1.6332	1.6406	-0.0411
6	1.6363	1.6342	-0.0948	1.6325	1.6394	-0.0478	1.6389	1.6397	-0.0522
7	1.6344	1.6343	-0.1104	1.6464	1.6432	-0.0514	1.6334	1.6362	-0.0688
8	1.6480	1.6418	-0.1124	1.6376	1.6401	-0.0638	1.7300	1.6878	0.0112
9	1.6427	1.6423	-0.1197	1.6391	1.6396	-0.0747	1.7045	1.6970	0.0657
10	1.6732	1.6593	-0.0965	1.6491	1.6448	-0.0756	1.6313	1.6609	0.0470
11	1.6490	1.6536	-0.0975	1.6517	1.6486	-0.0739	1.6513	1.6556	0.0483
12	1.6262	1.6385	-0.1213	1.6405	1.6441	-0.0834	1.6538	1.6546	0.0521
13	1.6257	1.6315	-0.1456	1.6554	1.6503	-0.0780	1.6256	1.6387	0.0277
14	1.6499	1.6416	-0.1457	1.5960	1.6205	-0.1320	1.6096	1.6227	-0.0127
15	1.6384	1.6398	-0.1573	1.6286	1.6249	-0.1534		0.7302	
16	1.6227	1.6304	-0.1846	1.6223	1.6235	-0.1811		0.3286	
17	1.6400	1.6357	-0.1946	1.6868	1.6583	-0.1443		0.1479	
18	1.6426	1.6395	-0.2020	1.6392	1.6478	-0.1551		0.0665	
19	1.6438	1.6419	-0.2082	1.6396	1.6433	-0.1655		0.0299	
20				1.6109	1.6255	-0.2046		0.0135	
21				1.6520	1.6401	-0.2026		0.0061	
22				1.6405	1.6403	-0.2121		0.0027	

○
●
●

17	EWMA	S _i	18	EWMA	S _i	20	EWMA	S _i	21	EWMA	S _i
	1.65	0		1.65	0		1.65	0		1.65	0
1.6711	1.6616	0.0211	1.6652	1.6584	0.0152	1.6445	1.6470	-0.0055	1.6366	1.6426	-0.0134
1.6813	1.6724	0.0524	1.6349	1.6455	0.0001	1.6244	1.6346	-0.0311	1.6502	1.6468	-0.0132
1.6803	1.6768	0.0827	1.6200	1.6315	-0.0299	1.6274	1.6306	-0.0537	1.6588	1.6534	-0.0044
1.6633	1.6694	0.0960	1.6791	1.6577	-0.0008	1.6285	1.6295	-0.0752	1.6452	1.6489	-0.0092
1.6486	1.6579	0.0946	1.6769	1.6682	0.0261	1.6045	1.6157	-0.1207	1.6750	1.6632	0.0158
1.6692	1.6641	0.1138	1.6603	1.6639	0.0364	1.6567	1.6383	-0.1140	1.6522	1.6572	0.0180
1.6193	1.6395	0.0831	1.6190	1.6392	0.0054	1.6864	1.6647	-0.0776	1.6353	1.6451	0.0033
1.6530	1.6469	0.0861	1.6198	1.6285	-0.0248	1.6745	1.6701	-0.0531	1.6429	1.6439	-0.0038
1.5953	1.6185	0.0314	1.5950	1.6101	-0.0798	1.6946	1.6836	-0.0085			
1.6577	1.6401	0.0391	1.6000	1.6045	-0.1298	1.6717	1.6770	0.0132			
1.6100	1.6235	-0.0009	1.6231	1.6147	-0.1567	1.6479	1.6610	0.0111			
1.6036	1.6126	-0.0473	1.6235	1.6196	-0.1832	1.7112	1.6886	0.0723			
1.6393	1.6273	-0.0580	1.5957	1.6064	-0.2375	1.6426	1.6633	0.0649			
1.6416	1.6352	-0.0664	1.6220	1.6150	-0.2655	1.8211	1.6401	0.0360			
1.6310	1.6329	-0.0854	1.6016	1.6076	-0.3139	1.8612	1.6517	0.0472			
1.6412	1.6375	-0.0942				1.6814	1.6680	0.0786			
1.5988	1.6167	-0.1444				1.6219	1.6427	0.0505			
1.6300	1.6240	-0.1644				1.8286	1.6349	0.0291			
						1.6669	1.6525	0.0460			
						1.8544	1.6536	0.0504			
						1.6685	1.6618	0.0689			
						1.6463	1.6533	0.0652			

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bissel, A. F. A Semi-parabolic Mask for Cusum Charts. **The Statistician**, v.28, n.1, p.1-7, 1979.
- Bissel, A. F. Correction to "A Semi-parabolic Mask for Cusum Charts". **The Statistician**, v.30, n.1, p.77, 1981.
- _____. Cusum charts - give your data a new look.
<http://www.imc.org.uk/services/coursewa/mba/cusum.htm> (1998).
- Bowker, A. H. e Lieberman, G. J. **Engineering Statistics**. 2nd Ed. Prentice-Hall, Englewood, 1972.
- Breiman, L. **Statistics: With a View Toward Applications**. Houghton Mifflin Company, Boston, 1973.
- Chiu, W. K. The Economic Design of Cusum Charts for Controlling Normal Means. **Applied Statistics**, v.23, n.3, p.420-433, 1974.
- Costa, A. F. B. \bar{X} Chart with Variable Sample Size and Sampling Intervals. **Journal of Quality Technology**, v.29, n.2, p.197-204, Apr. 1997.
- Costa Neto, P. L. O. **Estatística**. Ed. Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1977.
- Crowder, S. V. Average Run Lengths of Exponentially Weighted Moving Average Control Charts. **Journal of Quality Technology**, v.19, n.3, p.161-164, July 1987a.
- _____. A Simple Method for Studying Run-Length Distributions of Exponentially Weighted Moving Average Control Charts. **Technometrics**, v.29, n.4, p.401-407, Nov. 1987b.
- _____. Design of Exponentially Weighted Moving Average Schemes. **Journal of Quality Technology**, v.21, n.3, p.155-162, July 1989.
- Crowder, S. V.; Hawkins, D. M.; Reynolds Jr, M. R.; Yashchin, E. Process Control and Statistical Inference. **Journal of Quality Technology**, v.29, n.2, p.134-139, Abr. 1997.
- Cryer, J. D.; Ryan, T. P. The Estimation of Sigma for an X Chart: \overline{MR} / d_2 or S / c_4 ? **Journal of Quality Technology**, v.22, n.3, p.187-192, July, 1990.
- Ewan, W. D. When and How to use Cu-Sum Charts. **Technometrics**, v.5, n.1, p.1-22, Feb. 1963.

- Garvin, D. A. **Managing Quality - The Strategic Competitive Edge**. The Free Press, New York, 1988.
- Goel, A. L. e Wu, S. M. Determination of ARL and a Countour Nomogram for Cusum Charts to Control Normal Means. **Technometrics**, v.13, n.2, p.221-230, May, 1971.
- Hoyer, W. e Ellis, W. A Graphical Exploration of SPC. Part 1. **Quality Progress**, v.29, n.5, p.65-73, May 1996.
- Hunter, J. S. The Exponentially Weighted Moving Average. **Journal of Quality Technology**, v.18, n.4, p.203-210, Oct. 1986.
- IBM Corporate Technical Institutes. **Process Control, Capability and Improvement**, The Quality Institute. 1984.
- Johnson, N. L.; Leone, F. C. Cumulative Sum Control Charts-Mathematical Principles Applied to their Construction and Use - Part I. **Industrial Quality Control**, June 1962a.
- Johnson, N. L.; Leone, F. C. Cumulative Sum Control Charts-Mathematical Principles Applied to their Construction and Use - Part II. **Industrial Quality Control**, July 1962b.
- Johnson, N. L.; Leone, F. C. Cumulative Sum Control Charts-Mathematical Principles Applied to their Construction and Use - Part III. **Industrial Quality Control**, Aug 1962c.
- Kume, H. **Métodos estatísticos para melhoria da qualidade**. Editora Gente, São Paulo, 1993.
- Lucas, J. M. A modified "V" Mask Control Scheme. **Technometrics**, v.15, n.4, p.833-847, Nov, 1973.
- _____. The Design and Use of V-Mask Control Schemes, **Journal of Quality Technology**, v.8, n.1, Jan. 1976.
- _____. Combined Shewhart - CUSUM Quality Control Schemes, **Journal of Quality Technology**, v.14, n.2, p.51-59, April, 1982.
- _____. Counted Data CUSUM's. **Technometrics**, v.27, n.2, p.129-144, May, 1985.
- Lucas, J. M. e Crosier, R. B. Fast Initial Response for CUSUM Quality-Control Schemes: Give Your CUSUM a Head Start. **Technometrics**, v.24, n.3, Aug. 1982.
- Lucas, J. M. e Saccucci, M. S. Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements. **Technometrics**, v.32, n.1, p.1-29 Feb. 1990.

- Montgomery, D. C. **Introduction to Statistical Quality Control**. 2nd Edition. John Wiley & Sons, New York, 1991.
- Montgomery, D. C et al. Statistically Constrained Economic Design of the EWMA Control Chart. **Journal of Quality Technology** v.27, n.3, July 1995.
- MacGregor, J. F. e Harris, T. J. Discussion on "Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements". **Technometrics**, v.32, n.1, p.23-26, Feb. 1990.
- Prabhu, S. S.; Runger, G. C. Designing a Multivariate EWMA Control Charts. **Journal of Quality Technology**, v.29, n.1, p. 8-15, Jan. 1997.
- Reynolds Jr, M. R. Shewhart and EWMA Variable Sampling Interval Control Charts with Sampling at Fixed Times. **Journal of Quality Technology**, v.28, n.2, p.199-212, Apr. 1996.
- Reynolds, M. R. Jr; Amim, R. W. e Arnold, J. C. CUSUM Charts With Variable Sampling Intervals. **Technometrics**, v.32, n.4, p.371-396, Nov. 1990.
- Roberts, S. W. Control Chart Test Based on Geometric Moving Averages. **Technometrics**, v.1, n.3, p.239-250, Aug. 1959.
- Robinson, P. B. e Ho, T. Y. Average Run Lengths of Geometric Moving Average Charts by Numerical Methods. **Technometrics**, v.20, n.1, p.85-93, Feb. 1978.
- Slate, E. Wald's Sequential Probability Ratio Test. (1997)
<http://www.orie.cornell.edu/~or577/handouts/handouts.html>
- Vance, L. C. Average Run Lengths of Cumulative Sum Control Charts for Controlling Normal Means. **Journal of Quality Technology**, v.18, n.3, p. 189-193, July 1986.
- Woodall, W. H. The statistical design of quality control charts. **The Statistician**, v.34, p.155-160, 1985.
- _____. The Design of CUSUM Quality Control Charts. **Journal of Quality Technology**, v.18, n.2, p. 99-102, Apr. 1986.
- Woodall, W. H. e Maragah, H. D. Discussion on "Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements". **Technometrics**, v.32, n.1, p.17-18, Feb. 1990.
- Wheeler, D. J. **Advanced Topics in Statistical Process Control**. SPC Press, Knoxville, 1995.

APÊNDICE 1

O teste seqüencial da razão de probabilidades de Wald apresentado por Slate (1998) a partir do lema de Neyman Pearson (Breiman, 1973) para o teste das seguintes hipóteses á apresentado a seguir.

$$H_0: x_1, x_2, \dots, x_m \sim f_0(x) \text{ iid}$$

$$H_1: x_1, x_2, \dots, x_m \sim f_1(x) \text{ iid}$$

O lema de Neyman- Pearson diz que o melhor teste para H_0 vs. H_1 é a razão de verossimilhança, enunciada como

$$\text{rejeitar } H_0 \text{ se } \frac{\prod_{i=1}^m f_0(x_i)}{\prod_{i=1}^m f_1(x_i)} > C \quad I.1$$

$$\text{Sejam} \quad L_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_0(x_i) \text{ e} \quad I.2$$

$$L_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_1(x_i) \quad I.3$$

as funções de verossimilhança sob as hipóteses H_0 e H_1 . A razão L_0 / L_1 é chamada de razão de verossimilhança sob as hipóteses H_0 e H_1 . O teste da razão de verossimilhança rejeita H_0 quando a razão L_0 / L_1 é maior do que o valor C pré-estabelecido. O procedimento usual é de obter amostras de tamanho n e o valor C a partir das especificações das probabilidades de ocorrência dos erros tipo I e tipo II, tal que

$$\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0) \quad I.4$$

$$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{falhar em rejeitar } H_0 | H_1) \quad I.5$$

O princípio do teste seqüencial é o de coletar amostras até que se tenha forte evidência ou de H_0 ou de H_1 . Continua-se coletando amostras até que a razão de verossimilhança seja ou muito grande, e neste caso H_1 parece ser a hipótese provável, ou

muito pequena, neste caso H_0 parece ser a hipótese provável. Coleta-se amostras enquanto a razão de verossimilhança se mantenha entre os limites A e B, como em I.6

$$A \leq \frac{L_1(x_1, x_2, \dots, x_m)}{L_0(x_1, x_2, \dots, x_m)} \leq B \quad \text{I.6}$$

Os limites A e B são tais que indicam as regiões de evidência da hipótese nula ou da hipótese alternativa e a região em que se um ponto for plotado deve-se continuar amostrando. A Figura AI.1 mostra estas regiões.

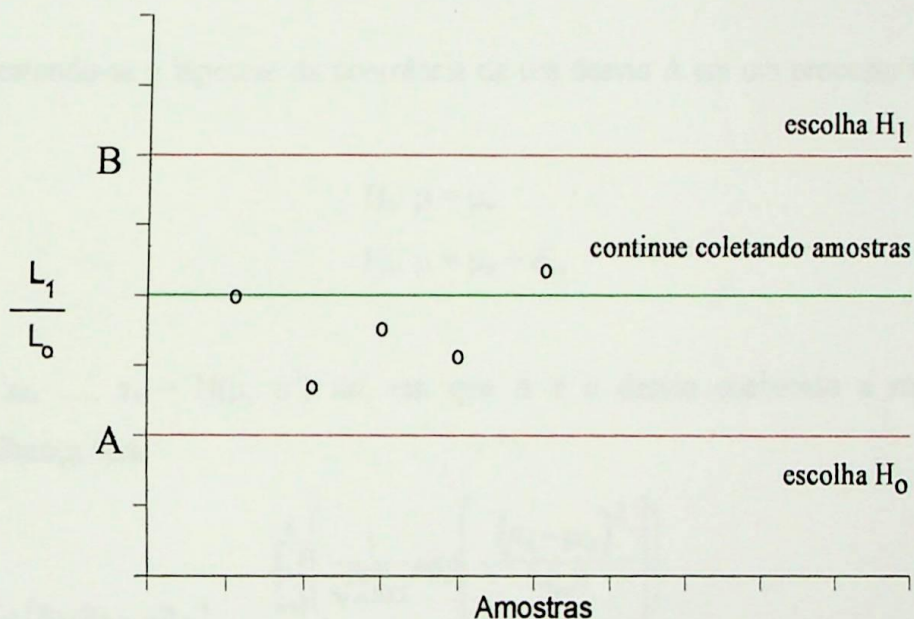


Figura AI - Regiões para escolha das alternativas H_0 ou H_1

Seja o conjunto A_m , tal que

$$A_m = \{(x_1, \dots, x_m) \mid \text{para a amostragem após precisamente } m \text{ observações e escolhe } H_1\}$$

Então para todos $(x_1, \dots, x_m) \in A_m$ a razão de verossimilhança é tal que

$$\frac{L_1(x_1, \dots, x_m)}{L_0(x_1, \dots, x_m)} > B$$

então $\sum_{(x_1, \dots, x_m) \in A_m} L_1(x_1, \dots, x_m) > B \times \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in A_m} L_0(x_1, \dots, x_m)$, o que representa as probabilidades

$$P(\text{escolher } H_1 | H_1) > B \times P(\text{escolher } H_1 | H_0)$$

$$1 - \beta > B \times \alpha \quad \text{I.7}$$

De maneira similar o limite A é obtido e encontra-se

$$A \times (1 - \alpha) > \beta \quad \text{I.8}$$

Testando-se a hipótese da ocorrência de um desvio Δ em um processo normal, tem-se:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu = \mu_0 + \Delta,$$

para $x_1, x_2, \dots, x_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ iid, em que Δ é o desvio conhecido a razão de verossimilhança será

$$\frac{L_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{L_0(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x_i - \mu_0)^2}{2\sigma^2} \right] \right)}{\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x_i - \mu_0 - \Delta)^2}{2\sigma^2} \right] \right)} =$$

$$\prod_{i=1}^n \exp \left[-\frac{(x_i - \mu_0)^2}{2\sigma^2} + \frac{(x_i - \mu_0 - \Delta)^2}{2\sigma^2} \right] =$$

$$\exp \left[-\frac{(x_1 - \mu_0)^2}{2\sigma^2} + \frac{(x_1 - \mu_0 - \Delta)^2}{2\sigma^2} \right] \times \exp \left[-\frac{(x_2 - \mu_0)^2}{2\sigma^2} + \frac{(x_2 - \mu_0 - \Delta)^2}{2\sigma^2} \right] \times \dots$$

$$\dots \times \exp \left[-\frac{(x_n - \mu_0)^2}{2\sigma^2} + \frac{(x_n - \mu_0 - \Delta)^2}{2\sigma^2} \right] =$$

$$\begin{aligned}
& \exp\left[\frac{-\Delta^2 + 2x_1\Delta - 2\mu_0\Delta}{2\sigma^2}\right] \times \exp\left[\frac{-\Delta^2 + 2x_2\Delta - 2\mu_0\Delta}{2\sigma^2}\right] \times \dots \\
& \dots \times \exp\left[\frac{-\Delta^2 + 2x_n\Delta - 2\mu_0\Delta}{2\sigma^2}\right] = \\
& = \exp\left[-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2} + \frac{\Delta}{\sigma^2}(x_1 - \mu_0)\right] \times \exp\left[-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2} + \frac{\Delta}{\sigma^2}(x_2 - \mu_0)\right] \times \dots \\
& \dots \times \exp\left[-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2} + \frac{\Delta}{\sigma^2}(x_n - \mu_0)\right] = \\
& \exp\left[-\frac{n\Delta^2}{2\sigma^2} + \frac{\Delta}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)\right]
\end{aligned}$$

Logo a razão de verossimilhança é tal que

$$\frac{L_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{L_0(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \exp\left[\frac{\Delta}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0) - \frac{n\Delta^2}{2\sigma^2}\right] \quad \text{I.9}$$

O procedimento de teste é o de coletar amostras enquanto a razão de verossimilhança esteja entre A e B, então

$$\begin{aligned}
A & \leq \exp\left[\frac{\Delta}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0) - \frac{n\Delta^2}{2\sigma^2}\right] \leq B \\
\ln A & \leq \left[\frac{\Delta}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0) - \frac{n\Delta^2}{2\sigma^2}\right] \leq \ln B \\
\frac{\sigma^2}{\Delta} \left\{ \ln A + \frac{n\Delta^2}{2\sigma^2} \right\} & \leq \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0) \leq \frac{\sigma^2}{\Delta} \left\{ \ln B + \frac{n\Delta^2}{2\sigma^2} \right\} \quad \text{I.10}
\end{aligned}$$

em que os limites A e B são dados por $A = \frac{\beta}{1-\alpha}$ e $B = \frac{1-\beta}{\alpha}$.

Se a estatística utilizada par detectar um desvio Δ é a média amostral, então

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \sim N(\mu, \sigma_x^2)$$

em que \bar{x}_i é a média amostral de n observações iid da amostra i , e σ_x^2 é conhecida. As hipóteses a serem testadas são

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu = \mu_0 - \Delta \text{ ou } \mu = \mu_0 + \Delta$$

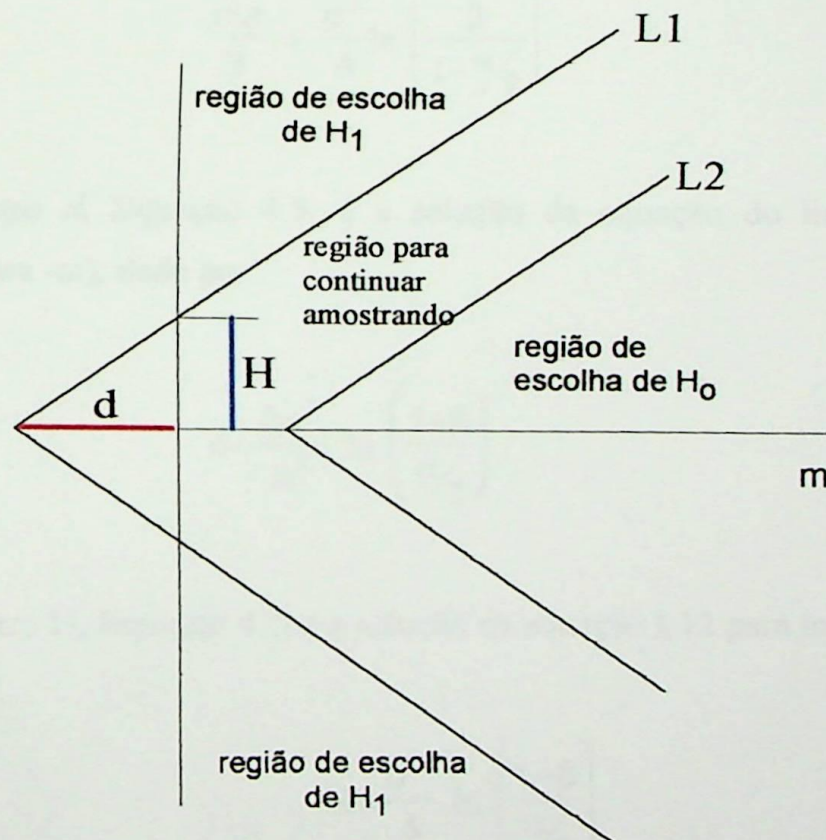


Figura I.2 Regiões de continuação e rejeição para CuSum

O somatório $\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)$ da Equação I.10 é a estatística Soma Acumulada S_i .

As regiões de continuação da amostragem e de escolha entre uma das amostras são

apresentadas na Figura I.2. A probabilidade de um erro tipo I deve ser dividida entre os caso em que o desvio Δ é positivo e negativo. Com metade da probabilidade designada para cada caso. Se a estatística soma acumulada é utilizada para monitorar o processo e o que se deseja não é decidir-se pela hipótese nula ou alternativa, mas detectar o desvio de μ_0 , somente os limite superior L1 será utilizado dado por

$$\frac{m\Delta}{2} + \frac{\sigma^2}{\Delta} \ln \left(\frac{1-\beta}{\alpha/2} \right) \quad \text{I.11}$$

e o limite inferior (L2) dado por

$$\frac{m\Delta}{2} + \frac{\sigma^2}{\Delta} \ln \left(\frac{\beta}{1-\alpha/2} \right) \quad \text{I.12}$$

O parâmetro d , Equação 4.5, é a solução da equação do limite L1 para a igualdade nula (para $-m$), dada por

$$d = \frac{2\sigma^2}{\Delta^2} \ln \left(\frac{1-\beta}{\alpha/2} \right) \quad \text{I.13}$$

O parâmetro H , Equação 4.7, é a solução da equação I.12 para $m=0$, dada por

$$H = \frac{\sigma^2}{\Delta} \ln \left(\frac{1-\beta}{\alpha/2} \right) \quad \text{I.14}$$