

TESE

1012

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA TRANSFERÊNCIA DE  
CALOR E DO ESCOAMENTO DE FLUIDOS

ROGÉRIO FERNANDES BRITO

ORIENTADOR : PROF. DR. GENÉSIO JOSÉ MENON

Dissertação Apresentada ao Curso de Pós-graduação em Engenharia Mecânica como Parte dos  
Requisitos para a Obtenção do Título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica na Área  
de Concentração em Conversão de Energia

ITAJUBÁ – M.G.

1999

CLASS 536.24 (043.2)

C. B862.1

TOMO. 1012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA MAUÁ - EFEI

536.24

B862s

Brito, Rogério Fernandes

Simulação Numérica da Transferência de Calor e do Escoamento de Fluidos: aplicações em engenharia mecânica / por Rogério Fernandes Brito;

orientado por Genésio José Menon.-- Itajubá, MG: [s.n.], 1999.

162 p.:il.

Dissertação (mestrado em Engenharia Mecânica) – Escola Federal de Engenharia de Itajubá.

1 – Transferência de calor. 2 – Convecção Forçada. 3 – Convecção Natural. 4 – Convecção Mista. 5 – Método de Elementos Finitos. I. Menon, Genésio José, orient. II. Escola Federal de Engenharia de Itajubá. III. Título.

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA TRANSFERÊNCIA DE  
CALOR E DO ESCOAMENTO DE FLUIDOS

ROGÉRIO FERNANDES BRITO

Membros da Banca Examinadora

- 1 – Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto ( UFU )
- 2 – Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho ( EFEI )
- 3 – Prof. Dr. Genésio José Menon ( Orientador – EFEI )

ITAJUBÁ – M.G.

1999

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Genésio José Menon pela orientação, dedicação e compreensão prestadas no decorrer deste trabalho.

A todos os professores, funcionários e amigos da EFEI que contribuíram direta ou indiretamente para realização deste trabalho.

A João Batista Dias, pelo apoio prestado na confecção desta dissertação.

A CAPES que me concedeu a bolsa de mestrado durante o decorrer do curso.

## RESUMO

O processo de trabalho e realizado em estudo de polimerização de calor com conversão laminar dos tipos: Natural, natural e nova.

Para o sistema de conversão laminar, utilizou-se a geometria de placas planas para uma zona com tipo de escoamento convectivo entre duas retângulos e simétricas. Para os dois casos, considerou-se as temperaturas nas placas constantes e iguais. Os resultados são apresentados para a regime de permanente e permanente, desenvolvendo o tratamento bidimensional e desconsiderando bidimensionalmente.

Para o problema de conversão natural, analisou-se o tratamento bidimensional por meio de uma cavidade retangular fechada com um corpo quente colocado no seu interior. Três casos são considerados, variando-se a posição vertical do corpo no interior da cavidade. O trabalho para cada um do escoamento flui em cavidade natural, com a presença do corpo interno. Os resultados são apresentados para o regime permanente. Considerando-se as condições de contorno das paredes laterais da cavidade convectiva, as paredes verticais da cavidade são consideradas paredes isoladas e adiabáticas.

No processo de conversão mista, estudou-se a transferência de calor em uma cavidade fechada com uma placa. O fluido entre as placas da temperatura baixa e alta, por uma razão de difusão convectiva. Considerou-se um perfil de velocidade parábolo, na entrada e na saída do fluido da cavidade. Verificou-se também a influência da variação da posição da placa e saída do fluido na cavidade sobre a transferência de calor. Os resultados foram apresentados para o regime permanente. As condições de contorno de temperatura foram tomadas para os casos de conversão natural estudados no presente trabalho.

Aos meus pais  
José e Nirce

Aos meus irmãos

Aos meus amigos

Utilizou-se o método de elementos finitos para a análise de transferência de calor. As distribuições da função corrente  $w$ , temperatura adimensional  $\theta$  e velocidade  $u$ , pressão de Poiseuille  $p$  e a temperatura média do fluido são determinadas em função dos parâmetros de escoamento e geometria.

Com o objetivo de validação do programa computacional desenvolvido, são realizados testes para a geometria retangular fechada e para o escoamento entre placas planas paralelas.

Palavras-chaves

1 - Transferência de calor

2 - Conversão laminar

3 - Conversão Natural

4 - Conversão mista

5 - Método de Elementos Finitos



## ABSTRACT

The purpose of this work is the study of heat transfer problems by the three types of laminar convection: forced, natural and mixed.

For the case of forced convection, a parallel plates channel with either a rectangular or a half-cylindrical obstacle between the plates is studied. The two plates temperatures are assumed as equals and constants. The results are presented for both the steady and unsteady state, for a two-dimensional hydrodynamically developed flow.

For the case of natural convection, the two-dimensional flow within a closed rectangular cavity containing a properly placed hot solid obstacle is analyzed. Three cases are studied: the two first cases concerning two different vertical positions of the hot obstacle and the third case is the classical flow within a rectangular cavity without any obstacle. The horizontal bottom and top surfaces are thermally insulated and the vertical surfaces are assumed to be respectively the hot and cold isothermal surfaces. The results are presented for the steady state.

For the case of mixed convection, the heat transfer is analyzed for an open cavity. The fluid is introduced at a low temperature and leaves the cavity through an adiabatic section. It is assumed a parabolic velocity profile for both the in and out flow. The effect of different positions for the inlet and outlet flow is also analyzed. The temperature boundary conditions are the same as for the natural convection study above.

The finite element method is utilized for solving the conservation equations. The distribution of the stream functions  $\psi$ , adimensional temperature  $\theta$ , vorticity  $\omega$ , average Nusselt number and the average temperature of the fluid are determined as function of the thermal and geometrical parameters.

For the validation of the developed computer program, various tests were carried out for an enclosed rectangular cavity and for the flow between parallel flat plates.

Key Words :

1 – Heat Transfer

2 – Forced Convection

3 – Natural Convection

4 – Mixed Convection

5 – Finite Element Method

# CONTEÚDO

|  | Página |
|--|--------|
| RESUMO   | i      |
| ABSTRACT   | ii     |
| CONTEÚDO   | iii    |
| SIMBOLOGIA   | vi     |
| ÍNDICE DE FIGURAS                                      | xi     |
| ÍNDICE DE TABELAS                                      | xvi    |
| <br>   |        |
| CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO                                 |        |
| 1.1 - Motivação do Trabalho                            | 1      |
| 1.2 - Revisão da Literatura                            | 4      |
| 1.3 - Objetivos do Presente Trabalho                   | 15     |
| 1.4 - Contribuições do Presente Trabalho               | 15     |
| 1.5 - Delineamento do Presente Trabalho                | 16     |
| <br>   |        |
| CAPÍTULO 2: MODELO MATEMÁTICO                          |        |
| 2.1 - Análise Teórica da Convecção Forçada             | 19     |
| 2.1.1 - Equações de Conservação para Convecção Forçada | 19     |
| 2.1.2 - Adimensionalização das Equações                | 20     |
| 2.1.3 - Número de Nusselt Local e Médio                | 25     |
| 2.2 - Análise Teórica da Convecção Natural             | 26     |
| 2.2.1 - Equações de Conservação para Convecção Natural | 26     |
| 2.2.2 - Adimensionalização das Equações                | 29     |
| 2.2.3 - Número de Nusselt Local e Médio                | 32     |
| 2.3 - Análise Teórica da Convecção Mista               | 33     |
| 2.3.1 - Equações de Conservação para Convecção Mista   | 33     |
| 2.3.2 - Adimensionalização das Equações                | 35     |
| 2.3.3 - Número de Nusselt Local e Médio                | 40     |

## CAPÍTULO 3: MODELO NUMÉRICO

|   |    |
|---|----|
| 3.1 - Forma Geral para as Equações de Conservação                               | 42 |
| 3.2 - Método de Elementos Finitos   | 44 |
| 3.3 - Obtenção Geral das Matrizes para os Elementos                             | 47 |
| 3.3.1 - Desenvolvimento da matriz $[C]^e$                                       | 48 |
| 3.3.2 - Desenvolvimento da matriz $[K_\phi]^e$                                  | 49 |
| 3.3.3 - Desenvolvimento da matriz $\{R_\phi\}^e$                                | 50 |
| 3.4 - Obtenção das Matrizes para os Elementos para o Caso de Convecção Forçada  | 54 |
| 3.4.1 - Forma Matricial para os Elementos em Termos da Função Corrente          | 54 |
| 3.4.2 - Forma Matricial para os Elementos em Termos da Temperatura Adimensional | 55 |
| 3.4.3 - Forma Matricial para os Elementos em Termos da Vorticidade              | 56 |
| 3.5 - Algoritmo do Programa Computacional                                       | 57 |

## CAPÍTULO 4: RESULTADOS

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| 4.1 - Introdução                      | 64  |
| 4.2 - Validação dos Modelos Numéricos | 64  |
| 4.2.1 - Convecção Forçada             | 64  |
| 4.2.2 - Convecção Natural             | 71  |
| 4.3 - Resultados do Presente Trabalho | 77  |
| 4.3.1 - Convecção Forçada             | 77  |
| 4.3.2 - Convecção Natural             | 92  |
| 4.3.3 - Convecção Mista               | 105 |

## CAPÍTULO 5: CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

|  |     |
|--|-----|
| 5.1 - Conclusões                           | 146 |
| 5.2 - Recomendações para Trabalhos Futuros | 149 |

APÊNDICE A1: MÉTODO DE GALERKIN PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL  
BIDIMENSIONAL EM REGIME NÃO PERMANENTE

|   |     |
|---|-----|
| A1.1 - Introdução   | 150 |
| A1.2 - Método de Galerkin   | 150 |
| A1.3 - Aproximação dos Termos $\left\{ \dot{\phi} \right\}$ e $\left\{ \phi \right\}$ | 154 |

## APÊNDICE A2: MÉTODO MATRICIAL PARA O CÁLCULO DA VORTICIDADE NO CONTORNO

|   |     |
|---|-----|
| A2.1 - Introdução                         | 156 |
| A2.2 - Cálculo da Vorticidade no contorno | 156 |

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 159

|           |  |     |
|-----------|--|-----|
| $\Delta$  | - comprimento diferencial  | 63  |
| $\lambda$ | - raio de curvatura = $R/L$  | 11  |
| $\lambda$ | - raio da elipse em $x$ para $z$                                     | 43  |
| $\Lambda$ | - matriz global  | 18  |
| $A$       | - indica o ponto que separa uma superfície de outra                  | 34  |
| $A_1$     | - parâmetro da equação (2.1a)  | 42  |
| $A_2$     | - raio de curvatura do corpo físico                                  | 93  |
| $A_2$     | - raio de curvatura da cavidade para altura de corpo                 | 93  |
| $a$       | - coeficiente $a_{ij}$   | 45  |
| $a$       | - comprimento diferencial  | 63  |
| $B$       | - matriz global  | 18  |
| $[B^*]$   | - matriz das derivadas parciais das funções de forma para o elemento | 48  |
| $B$       | - indica o ponto que separa uma superfície de outra                  | 34  |
| $B_1$     | - parâmetro da equação (2.1a)  | 42  |
| $b$       | - coeficiente $b_{ij}$   | 45  |
| $[C^*]$   | - matriz de ponderação do elemento                                   | 48  |
| $C$       | - valor específico a pressão constante                               | 10  |
| $C$       | - indica o ponto que separa uma superfície de outra                  | 34  |
| $C_1$     | - parâmetro da equação (2.1a)  | 42  |
| $d$       | - comprimento vertical de uma seção (convecção traza)                | 5   |
| $D$       | - comprimento adimensional vertical de uma seção                     | 10  |
| $D_1$     | - raio de curvatura = $R/L$  | 11  |
| $d_1$     | - raio elemento  | 18  |
| $d_2$     | - raio elemento  | 48  |
| $D$       | - indica o ponto que separa uma superfície de outra                  | 34  |
| $D_1$     | - parâmetro da equação (2.1a)  | 42  |
| $e$       | - elemento   | 48  |
| $E$       | - número total de elementos do domínio                               | 154 |

## SIMBOLOGIA

### CARACTERES LATINOS

| Símbolo           | Designação   | Página |
|-------------------|--|--------|
| a                 | = coeficiente ou   | 45     |
|                   | = comprimento dimensional  | 65     |
| A                 | = razão de aspecto = $H/L$ ,   | 11     |
|                   | = área do elemento triangular ou                                     | 45     |
|                   | = matriz global  | 18     |
| A'                | = indica o ponto que separa uma superfície da outra                  | 34     |
| A <sub>1</sub>    | = parâmetro da equação (3.1a)  | 42     |
| A <sub>1</sub>    | = razão de aspecto do corpo quente                                   | 93     |
| A <sub>2</sub>    | = razão da altura da cavidade pela altura de corpo                   | 93     |
| b                 | = coeficiente ou   | 45     |
|                   | = comprimento dimensional  | 65     |
| B                 | = matriz global  | 18     |
| [B <sup>e</sup> ] | = matriz das derivadas parciais das funções de forma para o elemento | 48     |
| B'                | = indica o ponto que separa uma superfície da outra                  | 34     |
| B <sub>1</sub>    | = parâmetro da equação (3.1a)  | 42     |
| c                 | = coeficiente  | 45     |
| [C <sup>e</sup> ] | = matriz capacitância do elemento                                    | 48     |
| c <sub>p</sub>    | = calor específico a pressão constante                               | 19     |
| C'                | = indica o ponto que separa uma superfície da outra                  | 34     |
| C <sub>1</sub>    | = parâmetro da equação (3.1a)  | 42     |
| d                 | = comprimento vertical de uma seção ( convecção mista )              | 5      |
| D                 | = comprimento adimensional vertical de uma seção                     | 18     |
| D <sub>h</sub>    | = diâmetro hidráulico = $2H$   | 69     |
| dA                | = área elementar   | 48     |
| dV                | = volume elementar   | 48     |
| D'                | = indica o ponto que separa uma superfície da outra                  | 34     |
| D <sub>1</sub>    | = parâmetro da equação (3.1a)  | 42     |
| e                 | = elemento   | 46     |
| E                 | = número total de elementos do domínio                               | 154    |

|              |   |          |
|--------------|---|----------|
| $E'$         | = indica o ponto que separa uma superfície da outra   | 34       |
| $F'$         | = indica o ponto que separa uma superfície da outra   | 34       |
| $F_X$        | = força de campo adimensional na direção X  | 21       |
| $F_Y$        | = força de campo adimensional na direção Y  | 21       |
| $g$          | = aceleração gravitacional  | 2        |
| $Gr$         | = número de Grashof = $g\beta(T_h - T_c)H^3/\nu^2$  | 11       |
| $h$          | = coeficiente médio de transferência de calor por convecção   | 69       |
| $H$          | = altura da geometria ( dimensão característica )   | 2        |
| $h_1$        | = altura do obstáculo retangular  | 78       |
| $H_1$        | = altura adimensional do obstáculo retangular   | 78       |
| $\bar{h}$    | = comprimento vertical da posição do centro do corpo quente   | 93       |
| $K$          | = condutibilidade térmica do fluido   | 19       |
| $[K_\phi]^c$ | = matriz rigidez para o elemento de uma grandeza $\phi$ qualquer                                      | 47       |
| $L$          | = comprimento da geometria  | 2        |
| $L_1$        | = comprimento adimensional do obstáculo retangular  | 78       |
| $L_2$        | = comprimento adimensional da posição na direção do centro do obstáculo semi-cilíndrico ou retangular | 78       |
| $M$          | = número de pontos da malha na direção X  | 71       |
| $n$          | = direção normal à superfície   | 20       |
| $N$          | = número de pontos da malha na direção Y ou<br>= função de forma                                      | 71<br>45 |
| $NE$         | = número de elementos   | 71       |
| $[N^c]$      | = matriz função de forma para o elemento  | 45       |
| $Nu$         | = número de Nusselt médio   | 7        |
| $Nu_c$       | = número de Nusselt médio na superfície fria  | 92       |
| $Nu_h$       | = número de Nusselt médio na superfície quente  | 17       |
| $Nu_m$       | = número de Nusselt médio até uma determinada posição   | 26       |
| $Nu_x$       | = número de Nusselt local   | 26       |
| $p$          | = pressão   | 19       |
| $P$          | = pressão adimensional  | 20       |
| $Pe$         | = número de Péclet = $Re Pr$  | 8        |
| $Pr$         | = número de Prandtl = $\nu/\alpha$  | 7        |
| $q$          | = fluxo de calor por convecção  | 20       |
| $q^c$        | = fluxo de calor no elemento  | 48       |

|                |   |          |
|----------------|---|----------|
| $Q_\phi$       | = função especificada   | 42       |
| $Q_\psi$       | = função especificada da função corrente  | 25       |
| $Q_\theta$     | = função especificada da temperatura adimensional                               | 25       |
| $Q_\omega$     | = função especificada da vorticidade  | 25       |
| $r$            | = raio do obstáculo semi-cilíndrico   | 22       |
| $R$            | = raio adimensional do obstáculo semi-cilíndrico                                | 22       |
| $Ra$           | = número de Rayleigh = $Gr Pr$  | 9        |
| $\{R\}$        | = matriz residual global  | 154      |
| $Re$           | = número de Reynolds = $U_0 H/\nu$  | 7        |
| $\{R^e\}$      | = matriz residual do elemento   | 150      |
| $\{R\}$        | = matriz residual global  | 154      |
| $\{R_\phi\}^e$ | = vetor do lado direito da equação matricial do tipo $AX = B$                   | 47       |
| $S$            | = superfície de contorno qualquer   | 33       |
| $S_1$          | = superfície isotérmica quente  | 2        |
| $S_2$          | = superfície isotérmica fria ou<br>= fronteira aberta                           | 2<br>2   |
| $S_3$          | = superfície isolada termicamente ou<br>= fronteira aberta                      | 3<br>2   |
| $S_4$          | = superfície isolada termicamente   | 3        |
| $S_5$          | = superfície isotérmica quente  | 3        |
| $t$            | = tempo ou<br>= espessura   | 19<br>48 |
| $T$            | = temperatura   | 19       |
| $T_c$          | = temperatura baixa   | 2        |
| $T_h$          | = temperatura alta  | 2        |
| $T_o$          | = temperatura média = $(T_h + T_c) / 2$   | 20       |
| $u$            | = velocidade do fluido na direção vertical $x$                                  | 12       |
| $U$            | = velocidade adimensional do fluido na direção $X$                              | 20       |
| $U_o$          | = velocidade média do fluido  | 20       |
| $v$            | = velocidade do fluido na direção $Y$   | 19       |
| $V$            | = velocidade adimensional do fluido na direção $Y$                              | 20       |
| $x$            | = coordenada horizontal   | 2        |
| $X$            | = coordenada adimensional na direção horizontal ou<br>= matriz global incógnita | 20<br>18 |

|   |   |    |
|---|---|----|
| y | = coordenada vertical                         | 2  |
| Y | = coordenada adimensional na direção vertical | 20 |

## CARACTERES GREGOS

| Símbolo          | Designação   | Página   |
|------------------|--|----------|
| $\alpha$         | = difusibilidade térmica do fluido   | 21       |
| $\alpha_1$       | = coeficiente da equação linear da grandeza $\phi^e$   | 44       |
| $\alpha_2$       | = coeficiente da equação linear da grandeza $\phi^e$   | 44       |
| $\alpha_3$       | = coeficiente da equação linear da grandeza $\phi^e$   | 44       |
| $\beta$          | = coeficiente de expansão volumétrica do fluido  | 27       |
| c                | = corpo quente   | 93       |
| $\delta$         | = coordenada vertical medida a partir do centro da seção de dimensão<br>D ( convecção mista ) ou<br>= parâmetro da equação (3.1) | 39<br>42 |
| $\tau$           | = tempo adimensional   | 20       |
| $\Delta\tau$     | = incremento de tempo adimensional   | 75       |
| $\lambda$        | = parâmetro da equação ( 3.1 )   | 42       |
| $\rho$           | = massa específica do fluido   | 19       |
| $\theta$         | = temperatura adimensional   | 13       |
| $\{ \theta \}$   | = matriz global da temperatura adimensional  | 58       |
| $\{ \theta^e \}$ | = matriz temperatura adimensional do elemento  | 56       |
| $\phi$           | = grandeza genérica, a qual pode ser $\psi$ , $\theta$ ou $\omega$   | 42       |
| $\phi^e$         | = equação linear para distribuição da grandeza $\phi$ no elemento  | 44       |
| $\phi_o(X,Y)$    | = função especificada no contorno  | 150      |
| $\{ \phi \}^e$   | = matriz função escalar $\phi$ do elemento   | 45       |
| $\nu$            | = viscosidade cinemática do fluido   | 12       |
| $\mu$            | = viscosidade dinâmica do fluido   | 19       |
| $\gamma$         | = ângulo de inclinação com a horizontal  | 12       |
| $\omega$         | = vorticidade  | 15       |
| $\{ \omega \}$   | = matriz global da vorticidade   | 58       |
| $\{ \omega^e \}$ | = matriz vorticidade do elemento   | 56       |

|              |  |    |
|--------------|--|----|
| $\Omega$     | = domínio  | 4  |
| $\psi$       | = função corrente  | 15 |
| $\{\psi\}$   | = matriz global da função corrente   | 57 |
| $\{\psi^e\}$ | = matriz função corrente do elemento   | 55 |
| $\ell$       | = pequena distância do contorno ou   | 24 |
|              | = comprimento adimensional para o início de aquecimento da placa                             | 65 |
| $\ell_1$     | = comprimento do obstáculo retangular  | 78 |
| $\ell_2$     | = comprimento da posição, na direção X, do centro do obstáculo semi-cilíndrico ou retangular | 22 |
| $\bar{\ell}$ | = comprimento horizontal da posição do centro do corpo quente                                | 93 |

## ÍNDICES

| Símbolo | Designação  | Página |
|---------|---|--------|
| B       | = ponto nodal pertencente ao contorno                     | 24     |
| $\beta$ | = representa os pontos nodais i, j, k                     | 47     |
| e       | = elemento  | 44     |
| i       | = ponto nodal i   | 44     |
| j       | = ponto nodal j   | 44     |
| k       | = ponto nodal k   | 44     |
| M       | = indica que usa-se o método matricial para ser calculada | 24     |
| N       | = indica o valor já calculado ou                          | 154    |
|         | = ponto nodal a uma pequena distância $\ell$ do contorno  | 24     |
| N+1     | = indica o valor que está sendo calculado                 | 154    |
| T       | = transposta  | 48     |
| w       | = parede  | 20     |
| .       | = indica que a condição de contorno já foi aplicada       | 158    |
| *       | = usado para diferenciar a mesma variável sem esse índice | 93     |
| x       | = calculado ao longo do eixo X                            | 12     |
| $\phi$  | = assume ser $\psi$ , $\theta$ ou $\omega$                | 47     |

## ÍNDICE DE FIGURAS

| Figura | Designação   | Página |
|--------|--|--------|
| 1.1    | Geometria para convecção forçada do caso 1   | 2      |
| 1.2    | Geometria para convecção forçada do caso 2   | 2      |
| 1.3    | Geometrias para a convecção natural dos casos 1, 2 e 3   | 3      |
| 1.4    | Geometrias para a convecção mista dos casos 1 e 2  | 5      |
| 1.5    | Geometrias para a convecção mista dos casos 3 e 4  | 6      |
| 2.1a   | Geometria de placas planas paralelas com obstáculo   | 22     |
| 2.1b   | Domínio computacional e condições de contorno adimensionais  | 22     |
| 2.2a   | Geometria de uma cavidade retangular fechada com um corpo quente colocado no seu interior  | 28     |
| 2.2b   | Domínio computacional e condições de contorno adimensionais  | 28     |
| 2.3a   | Geometria de uma cavidade retangular semi-aberta   | 37     |
| 2.3b   | Domínio computacional e condições de contorno adimensionais  | 37     |
| 3.1    | Domínio para a solução das equações  | 46     |
| 3.2    | Elemento triangular e função de interpolação linear  | 46     |
| 3.3    | Fluxograma geral do programa computacional   | 60     |
| 4.1a   | Geometria e condições de contorno dimensionais para o caso 1   | 68     |
| 4.1b   | Geometria e condições de contorno adimensionais para o caso 1  | 68     |
| 4.2a   | Caso 1 - Distribuição de $\psi$ , regime permanente  | 68     |
| 4.2b   | Caso 1 - Distribuição de $\theta$ , regime permanente  | 68     |
| 4.3a   | Geometria e condições de contorno dimensionais para o caso 2   | 70     |
| 4.3b   | Geometria analisada e condições de contorno adimensionais para o caso 2  | 70     |
| 4.4a   | Caso 2 - Distribuição de $\psi$ , regime permanente  | 70     |
| 4.4b   | Caso 2 - Distribuição de $\theta$ , regime permanente  | 70     |
| 4.5a   | Geometria quadrada e as condições de contorno dimensionais   | 72     |
| 4.5b   | Geometria quadrada analisada e as condições de contorno adimensionais  | 72     |
| 4.6    | Influência do número de elementos NE no número de Nusselt médio na superfície quente $Nu_h$ : (a) $Gr = 20.000$ ; (b) $Gr = 341.070$ | 73     |
| 4.7    | Tempo de CPU [s] por iteração versus o número de elementos NE: $Gr = 341.070$ ; $Pr = 0,733$ ; $A = 1,0$ e $\Delta\tau = 0,0001$     | 75     |

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 4.8a  | Geometria e condições de contorno dimensionais ( Caso 1 )  | 82 |
| 4.8b  | Geometria e condições de contorno adimensionais ( Caso 1 )   | 82 |
| 4.9   | Malhas de elementos finitos utilizadas nos testes computacionais para o caso 1   | 83 |
| 4.10  | Temperatura média do fluido versus número de elementos NE para um incremento de tempo adimensional $\Delta\tau = 0,008$ ( Caso 1 )   | 84 |
| 4.11  | Temperatura média do fluido versus o tempo $\tau$ para um incremento de tempo adimensional $\Delta\tau = 0,008$ ( Caso 1 )   | 84 |
| 4.12a | Geometria e condições de contorno dimensionais ( Caso 2 )  | 85 |
| 4.12b | Geometria e condições de contorno adimensionais ( Caso 2 )   | 85 |
| 4.13  | Malhas de elementos finitos utilizadas nos testes computacionais para o caso 2   | 86 |
| 4.14  | Temperatura média do fluido versus número de elementos NE para um incremento de tempo adimensional $\Delta\tau = 0,008$ ( Caso 2 )   | 87 |
| 4.15  | Temperatura média do fluido versus o tempo $\tau$ para um incremento de tempo adimensional $\Delta\tau = 0,008$ ( Caso 2 )   | 87 |
| 4.16  | Distribuições da função corrente $\psi$ para o caso 1 para $Re = 160$ ; $Pr = 1$ e os tempos adimensionais $\tau$ : (a) $\tau = 0,4$ ; (b) $\tau = 0,8$ ; $Pr = 1$ (c) $\tau = 2,4$ e (d) $\tau = 5,6$   | 88 |
| 4.17  | Distribuições da temperatura adimensional $\theta$ para o caso 1 para $Re = 160$ ; $Pr = 1$ e os tempos adimensionais $\tau$ : (a) $\tau = 0,4$ ; (b) $\tau = 0,8$ ; (c) $\tau = 2,4$ e (d) $\tau = 5,6$ | 89 |
| 4.18  | Distribuições da função corrente $\psi$ para o caso 2 para $Re = 160$ ; $Pr = 1$ e os tempos adimensionais $\tau$ : (a) $\tau = 0,4$ ; (b) $\tau = 0,8$ ; $Pr = 1$ (c) $\tau = 2,4$ e (d) $\tau = 5,6$   | 90 |
| 4.19  | Distribuições da temperatura adimensional $\theta$ para o caso 2 para $Re = 160$ ; $Pr = 1$ e os tempos adimensionais $\tau$ : (a) $\tau = 0,4$ ; (b) $\tau = 0,8$ ; (c) $\tau = 2,4$ e (d) $\tau = 5,6$ | 91 |
| 4.20a | Geometria e condições de contorno dimensionais   | 96 |
| 4.20b | Geometria e condições de contorno adimensionais  | 96 |
| 4.21  | Malha uniforme $28 \times 56$ de elementos finitos utilizada no programa computacional para os três casos  | 97 |
| 4.22  | Número de Nusselt médio na superfície quente $Nu_h$ versus número de Grashof $Gr$ , para os três casos   | 98 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 4.23  | Número de Nusselt médio na superfície fria $Nu_c$ versus número de Grashof $Gr$ , para os três casos   | 98  |
| 4.24  | Distribuições da função corrente $\psi$ e da temperatura $\theta$ para o caso 1 com $Pr = 0,733$ ; $A = 2$ ; $A1 = 0,98$ ; $A2 = 11$ ; $L^* = 0,5$ e $H^* = 0,5$                           | 102 |
| 4.25  | Distribuições da função corrente $\psi$ e da temperatura $\theta$ para o caso 2 com $Pr = 0,733$ ; $A = 2$ ; $A1 = 0,98$ ; $A2 = 11$ ; $L^* = 0,5$ e $H^* = 0,2454$                        | 103 |
| 4.26  | Distribuições da função corrente $\psi$ e da temperatura $\theta$ para o caso 3 com $Pr = 0,733$ ; $A = 2$ e $H^* = 0$ ( sem corpo interno )   | 104 |
| 4.27a | Cavidade semi-aberta e as condições de contorno dimensionais (Caso 1)  | 111 |
| 4.27b | Cavidade semi-aberta analisada e as condições de contorno adimensionais ( Caso 1 )   | 111 |
| 4.28a | Cavidade semi-aberta e as condições de contorno dimensionais (Caso 2)  | 112 |
| 4.28b | Cavidade semi-aberta analisada e as condições de contorno adimensionais ( Caso 2 )   | 112 |
| 4.29a | Cavidade semi-aberta e as condições de contorno dimensionais (Caso 3)  | 113 |
| 4.29b | Cavidade semi-aberta analisada e as condições de contorno adimensionais ( Caso 3 )   | 113 |
| 4.30a | Cavidade semi-aberta e as condições de contorno dimensionais (Caso 4)  | 114 |
| 4.30b | Cavidade semi-aberta analisada e as condições de contorno adimensionais ( Caso 4 )   | 114 |
| 4.31  | Malha uniforme $28 \times 56$ de elementos finitos utilizada no programa computacional para os quatro casos  | 115 |
| 4.32  | Número de Nusselt médio na superfície quente $Nu_h$ versus número de elementos NE para $Re = 1$ . ( Caso 1 )   | 116 |
| 4.33  | Número de Nusselt médio na superfície quente $Nu_h$ versus número de elementos NE para $Re = 100$ . ( Caso 1 )   | 116 |
| 4.34a | Desvio percentual, em relação à malha mais refinada com 2.970 elementos, do número de Nusselt médio na superfície quente $Nu_h$ versus o número de elementos NE para $Re = 1$ ( Caso 1 )   | 117 |
| 4.34b | Desvio percentual, em relação à malha mais refinada com 2.970 elementos, do número de Nusselt médio na superfície quente $Nu_h$ versus o número de elementos NE para $Re = 100$ ( Caso 1 ) | 117 |
| 4.35  | Distribuições da função corrente $\psi$ para os casos 1 e 2 para $Re = 1$ ;  |     |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
|       | Pr = 0,7; A = 2 e D = 0,2   | 122 |
| 4.36  | Distribuições da função corrente $\psi$ para os casos 1 e 2 para Re = 10;<br>Pr = 0,7; A = 2 e D = 0,2            | 123 |
| 4.37  | Distribuições da função corrente $\psi$ para os casos 1 e 2 para Re = 50;<br>Pr = 0,7; A = 2 e D = 0,2            | 124 |
| 4.38  | Distribuições da função corrente $\psi$ para os casos 1 e 2 para Re = 100;<br>Pr = 0,7; A = 2 e D = 0,2           | 125 |
| 4.39  | Distribuições da temperatura adimensional $\theta$ para os caso 1 e 2<br>para Re = 1; Pr = 0,7; A = 2 e D = 0,2   | 126 |
| 4.40  | Distribuições da temperatura adimensional $\theta$ para os caso 1 e 2 para<br>Re = 10; Pr = 0,7; A = 2 e D = 0,2  | 127 |
| 4.41  | Distribuições da temperatura adimensional $\theta$ para os caso 1 e 2 para<br>Re = 50; Pr = 0,7; A = 2 e D = 0,2  | 128 |
| 4.42  | Distribuições da temperatura adimensional $\theta$ para os caso 1 e 2 para<br>Re = 100; Pr = 0,7; A = 2 e D = 0,2 | 129 |
| 4.43a | Número de Nusselt médio na superfície quente $Nu_h$ versus número de<br>Reynolds Re ( Caso 1 )                    | 132 |
| 4.43b | Número de Nusselt médio na superfície quente $Nu_h$ versus número de<br>Reynolds Re ( Caso 2 )                    | 132 |
| 4.44  | Distribuições da função corrente $\psi$ para os casos 3 e 4 para Re = 1;<br>Pr = 0,7; A = 2 e D = 0,2             | 137 |
| 4.45  | Distribuições da função corrente $\psi$ para os casos 3 e 4 para Re = 10;<br>Pr = 0,7; A = 2 e D = 0,2            | 138 |
| 4.46  | Distribuições da função corrente $\psi$ para os casos 3 e 4 para Re = 50;<br>Pr = 0,7; A = 2 e D = 0,2            | 139 |
| 4.47  | Distribuições da função corrente $\psi$ para os casos 3 e 4 para Re = 100;<br>Pr = 0,7; A = 2 e D = 0,2           | 140 |
| 4.48  | Distribuições da temperatura adimensional $\theta$ para os caso 3 e 4 para<br>Re = 1; Pr = 0,7; A = 2 e D = 0,2   | 141 |
| 4.49  | Distribuições da temperatura adimensional $\theta$ para os caso 3 e 4<br>para Re = 10; Pr = 0,7; A = 2 e D = 0,2  | 142 |
| 4.50  | Distribuições da temperatura adimensional $\theta$ para os caso 3 e 4 para<br>Re = 50; Pr = 0,7; A = 2 e D = 0,2  | 143 |
| 4.51  | Distribuições da temperatura adimensional $\theta$ para os caso 3 e 4 para  |     |

$Re = 100$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$  e  $D = 0,2$

144

4.52a Número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  versus número de Reynolds  $Re$  ( Caso 3 )

145

4.52b Número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  versus número de Reynolds  $Re$  ( Caso 4 )

145

A2.1 Pontos nodais internos e do contorno

156

# ÍNDICE DE TABELAS

| Tabela | Designação  | Página |
|--------|---|--------|
| 3.1    | Parâmetros das equações (3.1) e (3.1a) para convecção forçada                                 | 42     |
| 3.2    | Parâmetros das equações (3.1) e (3.1a) para convecção natural                                 | 43     |
| 3.3    | Parâmetros das equações (3.1) e (3.1a) para convecção mista                                   | 43     |
| 4.1    | Comparação de resultados para a geometria quadrada da figura 4.5:<br>Gr = 20.000 ; Pr = 0,733 | 76     |
| 4.2    | Comparação de resultados para a geometria quadrada da figura 4.5:<br>Pr = 0,733               | 76     |

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 – Motivação do Trabalho

O estudo do escoamento dos fluidos tem um importante papel na história do desenvolvimento de equipamentos encontrados nas indústrias, comércios e residências. O projeto e desenvolvimento dos diversos equipamentos no campo da engenharia atingiram o nível atual de eficiência graças ao conhecimento da dinâmica do escoamento dos fluidos.

No presente trabalho estuda-se problemas envolvendo a convecção forçada, natural e mista.

O problema de convecção forçada entre placas planas paralelas horizontais e verticais tem sido bastante estudado e vários trabalhos numéricos e experimentais podem ser encontrados na literatura. O estudo deste fenômeno é de grande interesse no campo da engenharia. Dentre as várias aplicações, o estudo da convecção forçada é de vital importância no projeto de ar-condicionado, em trocadores de calor, no resfriamento de componentes eletrônicos e outros.

No presente trabalho estuda-se numericamente a convecção forçada do escoamento de fluido entre placas planas paralelas e horizontais com um obstáculo colocado sobre a superfície. Serão considerados dois casos, envolvendo diferentes geometrias para o obstáculo.

As figuras 1.1 e 1.2 mostram as geometrias que serão analisadas no presente trabalho, as quais serão chamadas de caso 1 e caso 2, respectivamente. Tanto para o caso 1, como para o caso 2, há interesse em conhecer o escoamento e a distribuição de temperatura do fluido.

Para a convecção natural, o estudo do escoamento no interior de cavidades retangulares fechadas com um corpo interno quente apresenta diversas aplicações no campo da engenharia. Esse fenômeno desempenha papel importante em aplicações, tais como: aquecimento ou resfriamento de produtos alimentícios ou químicos; aquecimento residencial e industrial; resfriamento em reatores nucleares; resfriamento de componentes eletrônicos; sistemas de energia solar e outros.

O presente trabalho estuda numericamente a convecção natural em uma cavidade retangular fechada com um corpo quente de seção transversal retangular colocado no seu interior.

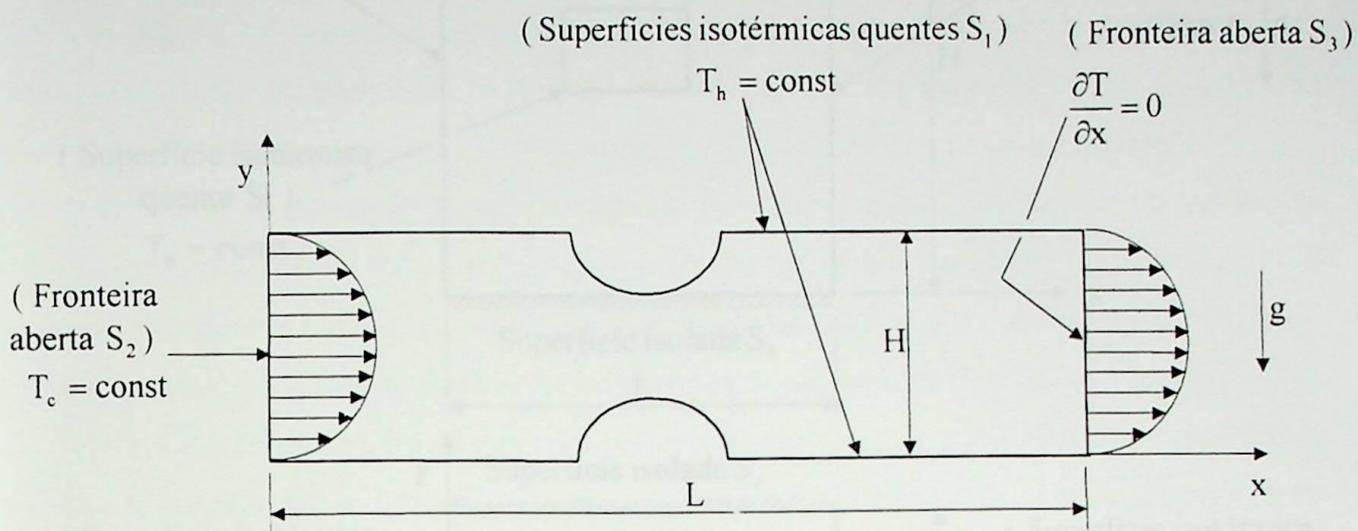


Figura 1.1 – Geometria para convecção forçada do caso 1.

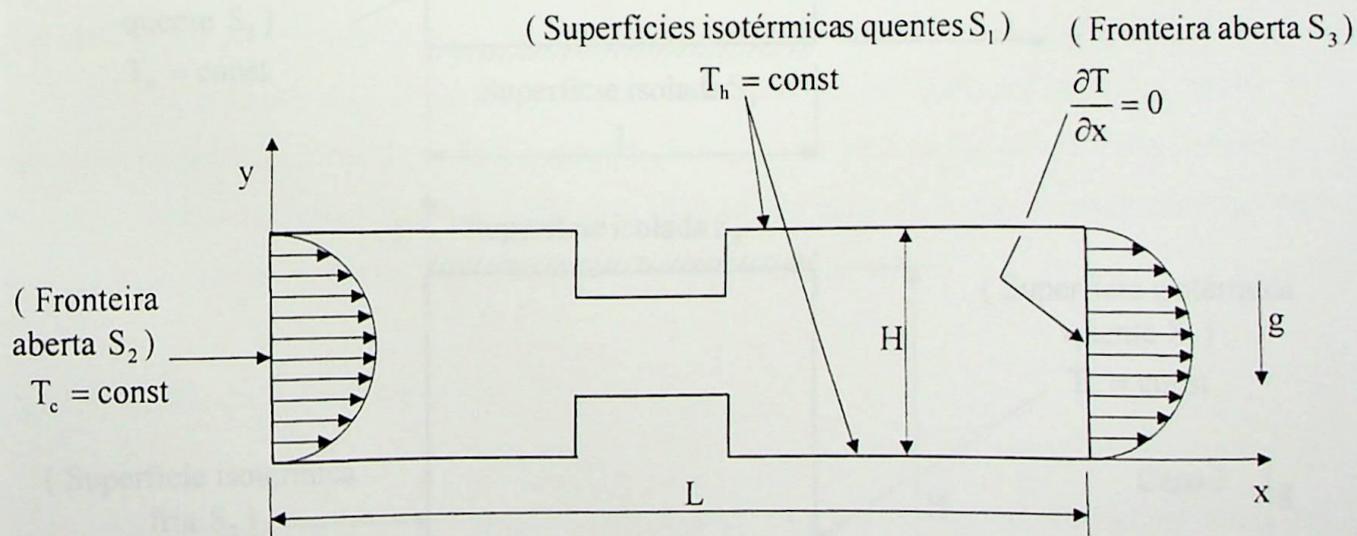


Figura 1.2 – Geometria para convecção forçada do caso 2.

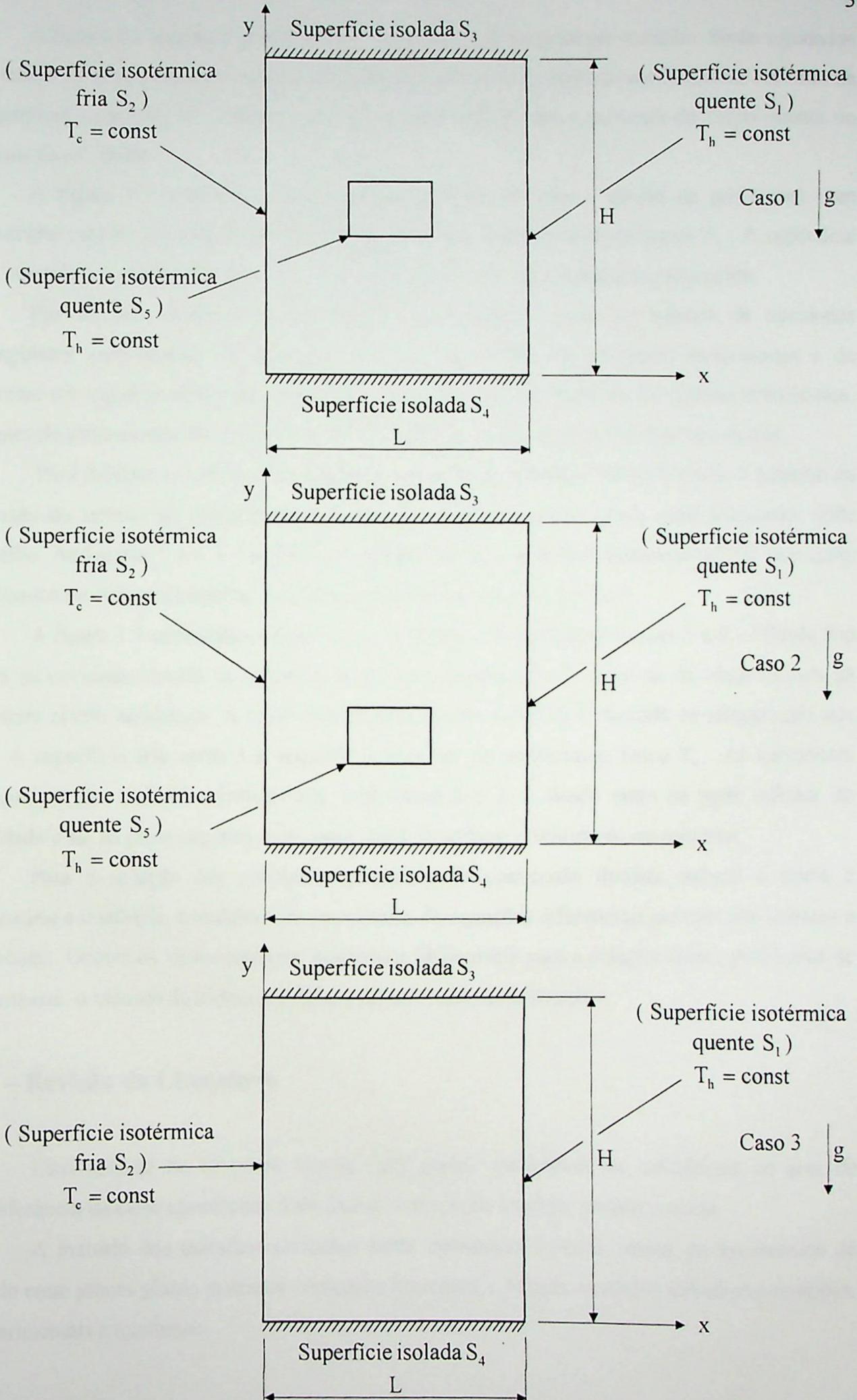


Figura 1.3 – Geometrias para a convecção natural dos casos 1, 2 e 3 .

A figura 1.3 mostra a geometria que será analisada no presente trabalho. Serão estudados três casos. Os dois primeiros casos analisam a influência da posição do corpo quente mantido na temperatura uniforme. No terceiro caso faz-se uma análise sem a presença do corpo quente no interior da cavidade.

A figura 1.3 mostra o domínio computacional  $\Omega$  para o estudo de problemas com convecção natural. As superfícies  $S_1$  e  $S_5$  são mantidas quentes na temperatura  $T_h$ . A superfície  $S_2$  é mantida fria na temperatura  $T_c$ . As superfícies  $S_3$  e  $S_4$  são isoladas termicamente.

Por último, estuda-se numericamente a convecção mista no interior de cavidades retangulares semi-abertas. O problema de convecção mista em cavidades semi-abertas é de interesse em algumas aplicações industriais, tais como: no resfriamento de centrais termelétrica, tanques de armazenamento de fluidos, resfriamento de equipamentos eletrônicos e outros.

Para mostrar os efeitos da mudança da posição de entrada e saída do fluido e também da inversão do sentido do escoamento que entra na cavidade, quatro casos serão analisados neste trabalho. As figuras 1.4 e 1.5 mostram as geometrias e o domínio computacional  $\Omega$  que serão analisados no presente trabalho, sendo denominados de casos 1, 2, 3 e 4.

A figura 1.4 apresenta os casos 1 e 2. A figura 1.5 apresenta os casos 3 e 4. O fluido frio entra na cavidade através da fronteira aberta com temperatura  $T_c$  e sai da cavidade através da fronteira aberta adiabática. A superfície vertical quente à direita é mantida na temperatura alta  $T_h$ . A superfície fria vertical à esquerda é mantida na temperatura baixa  $T_c$ . As superfícies horizontais são isoladas termicamente. Nos casos 1 e 3, o fluido entra na parte inferior da cavidade e sai na parte superior. Nos casos 2 e 4, inverte-se o sentido de escoamento.

Para a solução dos problemas propostos de convecção forçada, natural e mista é necessária a resolução simultânea de um sistema de equações diferenciais parciais não lineares e acopladas. Dentre os vários métodos numéricos disponíveis para a solução desses problemas de engenharia, o método de elementos finitos foi utilizado nesse trabalho.

## 1.2 – Revisão da Literatura

Uma revisão da literatura mostra uma grande quantidade de referências na área de transferência de calor envolvendo trabalhos de convecção forçada, natural e mista.

A maioria dos trabalhos revisados sobre convecção forçada tratam do escoamento de fluido entre placas planas paralelas verticais e horizontais. Foram revisados trabalhos numéricos, experimentais e analíticos.

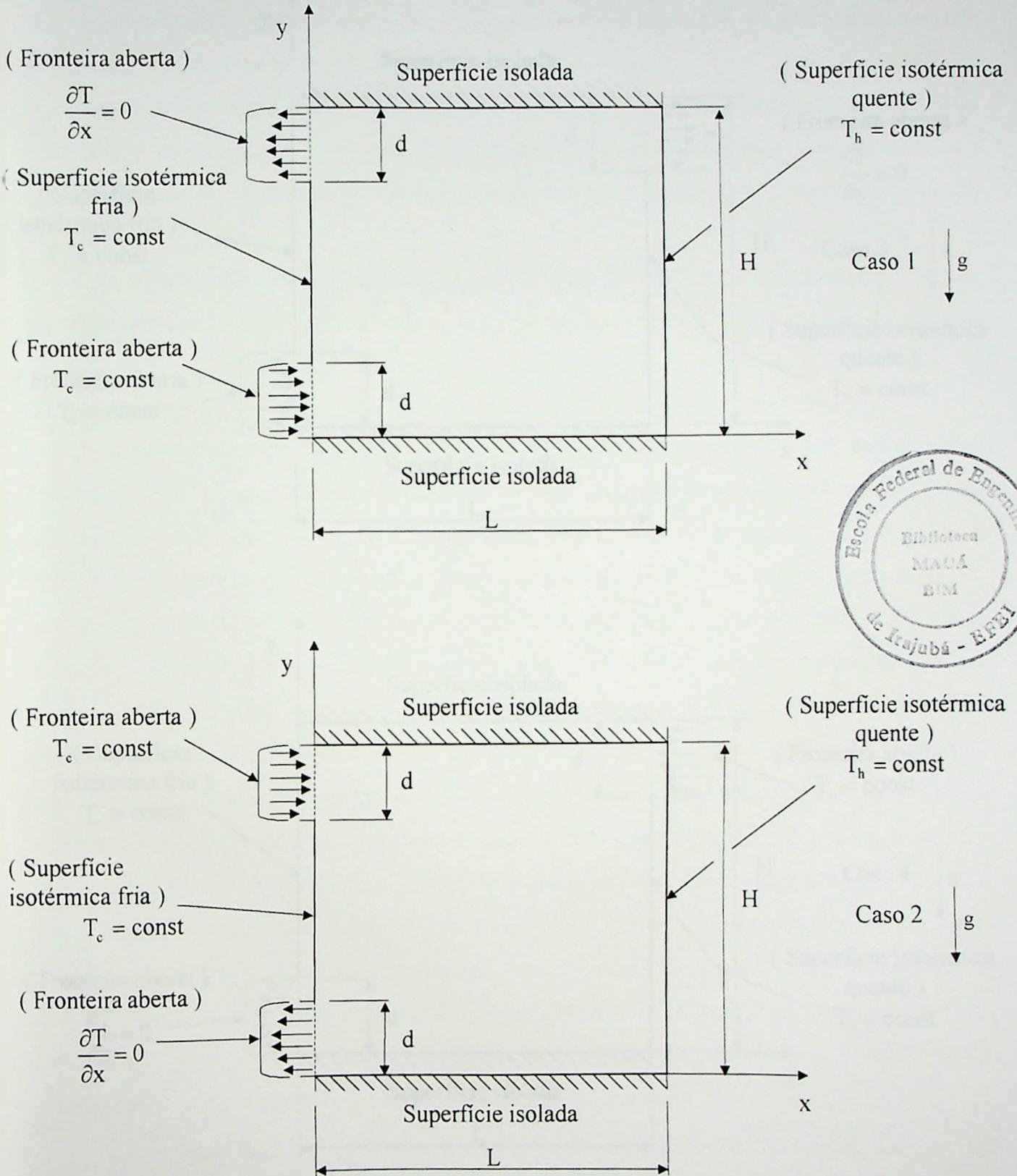


Figura 1.4 – Geometrias para a convecção mista dos casos 1 e 2 .

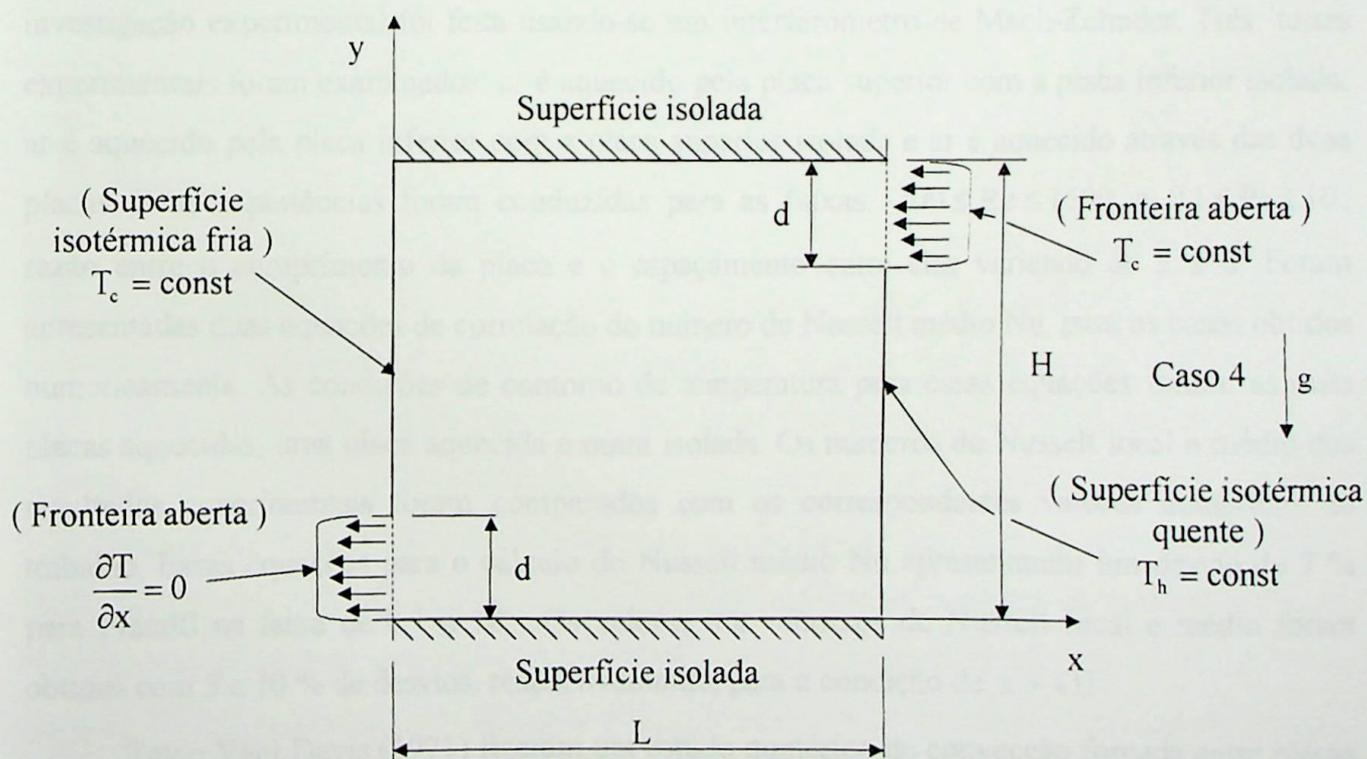
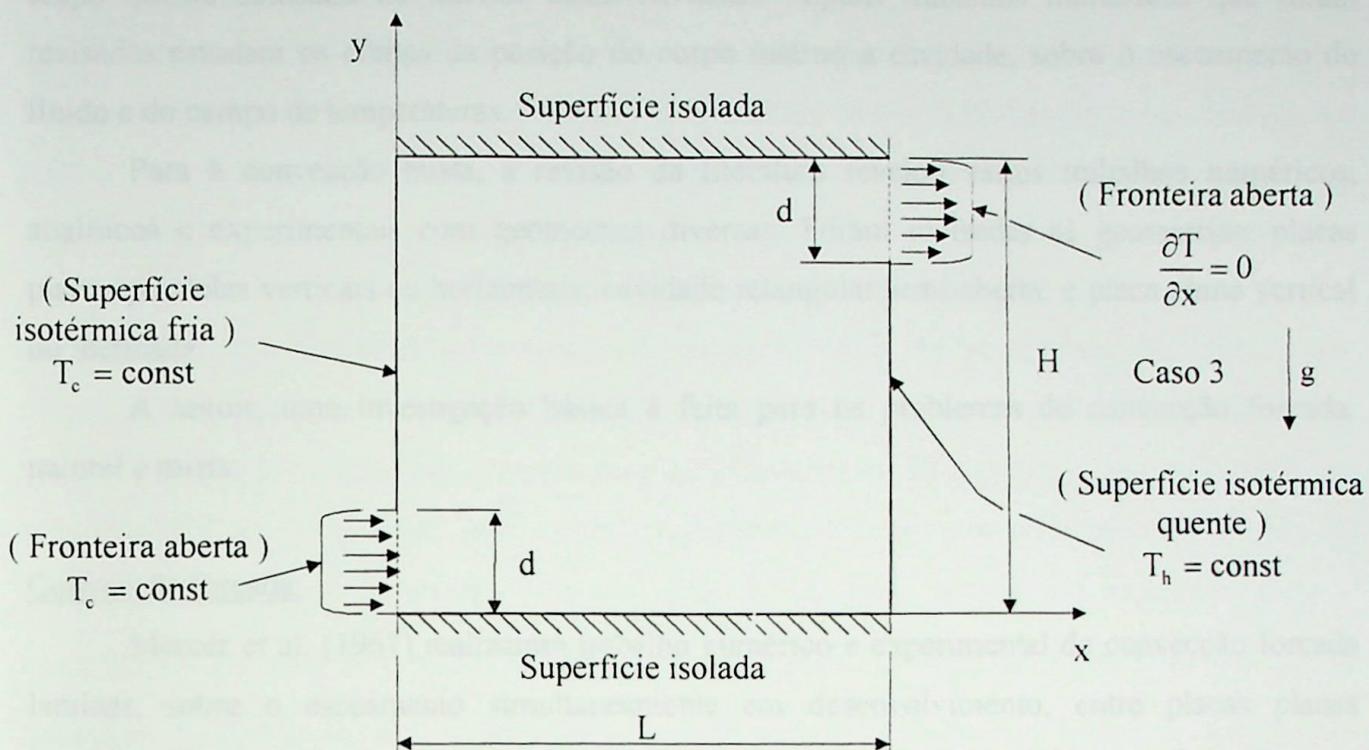


Figura 1.5 – Geometrias para a convecção mista dos casos 3 e 4 .

Os trabalhos encontrados para os casos de convecção natural, estudam o escoamento de fluido numa cavidade retangular fechada, ou estudam uma cavidade retangular fechada com um corpo quente colocado no interior dessa cavidade. Alguns trabalhos numéricos que foram revisados estudam os efeitos da posição do corpo interno à cavidade, sobre o escoamento do fluido e do campo de temperaturas.

Para a convecção mista, a revisão da literatura revelou vários trabalhos numéricos, analíticos e experimentais com geometrias diversas. Foram revisadas as geometrias: placas planas paralelas verticais ou horizontais; cavidade retangular semi-aberta; e placa plana vertical ou inclinada.

A seguir, uma investigação básica é feita para os problemas de convecção forçada, natural e mista:

#### Convecção forçada:

Mercer et al. (1967) realizaram trabalho numérico e experimental de convecção forçada laminar, sobre o escoamento simultaneamente em desenvolvimento, entre placas planas paralelas. Na obtenção da solução numérica, foi utilizado o método de diferenças finitas para se resolver as equações de conservação na forma bidimensional e no regime permanente. A investigação experimental foi feita usando-se um interferômetro de Mach-Zehnder. Três testes experimentais foram examinados: ar é aquecido pela placa superior com a placa inferior isolada; ar é aquecido pela placa inferior com a placa superior isolada e ar é aquecido através das duas placas. Suas experiências foram conduzidas para as faixas:  $300 \leq Re \leq 1500$  e  $0,1 \leq Pr \leq 10$ , razão entre o comprimento da placa e o espaçamento entre elas variando de 2 a 8. Foram apresentadas duas equações de correlação do número de Nusselt médio  $Nu$ , para os casos obtidos numericamente. As condições de contorno de temperatura para essas equações foram: as duas placas aquecidas; uma placa aquecida e outra isolada. Os números do Nusselt local e médio dos resultados experimentais foram comparados com os correspondentes valores numéricos do trabalho. Essas equações para o cálculo do Nusselt médio  $Nu$  apresentaram um desvio de 7 % para Prandtl na faixa de 0,1 a 10. Os valores dos números de Nusselt local e médio foram obtidos com 5 e 10 % de desvios, respectivamente, para a condição de  $x > 4H$ .

Tay e Vahl Davis (1971) fizeram um estudo numérico de convecção forçada entre placas planas paralelas utilizando o método de elementos finitos. As propriedades do fluido são constantes, não há geração interna de calor e a dissipação viscosa é desprezível. O perfil de velocidade é desenvolvido e parabólico. Dois casos foram estudados: as duas placas são mantidas com temperaturas variando linearmente; a placa superior é mantida com um fluxo de calor constante e a inferior isolada. O objetivo do trabalho foi determinar a distribuição de

temperaturas e a variação do número de Nusselt local ao longo da direção do escoamento. Os resultados obtidos numericamente foram comparados com os resultados analíticos de Lundberg et al. (1963), apresentando boa concordância.

Nguyen (1991) fez um estudo numérico de convecção forçada do escoamento de fluido em desenvolvimento na região de entrada de uma cascata de placas planas paralelas, horizontais e finas, com escoamento uniforme na entrada. As equações de conservação, bidimensionais e no regime não permanente, foram expressas na forma de diferenças finitas. Considerou-se dois casos: temperaturas constantes das placas e fluxo de calor constante das placas. Os resultados foram obtidos para Reynolds na faixa de 1 a 20 e para  $Pr = 0,7$ . As propriedades do fluido foram consideradas constantes. Foram utilizados os métodos ADI (Alternating Direction Implicit) e QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) para soluções das equações regentes, obtendo-se uma melhor estabilidade. Os números de Nusselt médio  $Nu$ , os números incrementais da transferência de calor  $N(\infty)$  para escoamento desenvolvido e o comprimento térmico de entrada  $L_{th}^*$  foram apresentados no trabalho. Esses números são de interesses prático e teórico, especialmente os números  $N(\infty)$  que são usados no projeto de dispositivos de ar condicionado com placas paralelas.

Nguyen e Maclaine-cross (1991) estenderam o trabalho de Nguyen (1991) para faixas maiores dos números de Prandtl e Reynolds. Os resultados do trabalho de Nguyen e Maclaine-cross (1991) foram obtidos para as seguintes faixas:  $0,2 < Pr < 100$  e  $40 \leq Re \leq 2000$ .

Nguyen (1992) estendeu o seu estudo dos trabalhos de Nguyen (1991) e Nguyen e Maclaine-cross (1991). Nesse trabalho foi incluído o estudo de convecção forçada de um duto circular. O escoamento foi considerado hidrodinamicamente desenvolvido. O perfil de temperatura foi adotado ser uniforme na região de entrada das geometrias estudadas. As equações de conservação, bidimensionais e no regime permanente foram expressas na forma de diferenças finitas. Para o problema de placas planas paralelas e duto circular, considerou-se dois tipos de condições de contorno: temperaturas constantes das placas e fluxo de calor constante das placas. O método ADI e QUICK foram usados para resolver as equações de diferenças finitas. Para as duas geometrias estudadas, os resultados foram obtidos para número de Péclet  $Pe$  na faixa de 1 a 1.000, apresentado uma boa concordância com os trabalhos anteriores de Nguyen (1991) e de Nguyen e Maclaine-cross (1991).

Young e Vafai (1998) realizaram um estudo numérico de convecção forçada laminar do escoamento hidrodinamicamente desenvolvido entre placas planas paralelas. Um obstáculo retangular, condutor e aquecido foi montado sobre a superfície horizontal inferior. As superfícies horizontais foram isoladas termicamente, exceto na região da superfície horizontal

inferior onde se encontrava o obstáculo. O fluido foi considerado frio na região de entrada e isolado na região de saída da cavidade. As equações de conservação, bidimensionais e no regime permanente foram discretizadas pelo método de elementos finitos. Para examinar as influências no escoamento e na transferência de calor, os parâmetros geométricos do obstáculo, como altura e largura, foram variados e seis casos foram estudados. O trabalho teve como objetivo estudar as influências das mudanças dos diversos parâmetros como: parâmetros geométricos do obstáculo, número de Reynolds, condutividade térmica do sólido e método de aquecimento no obstáculo. Foram analisadas as seguintes faixas: razão da condutividade térmica do sólido sobre o fluido entre 1 a 6.600 ;  $200 \leq Re \leq 2.000$  ; razão de largura do obstáculo pela distância entre as placas  $0,125 \leq w/H \leq 0,5$  ; razão da altura do obstáculo pela distância entre as placas  $0,125 \leq h/H \leq 0,25$  e  $Pr = 0,72$  . Os resultados mostraram que a forma e o material do obstáculo tiveram um importante efeito no escoamento do fluido e na transferência de calor. Duas equações de correlação para os resultados numéricos foram apresentadas: uma para a forma do obstáculo fixada e outra equação para a forma do obstáculo variando. Essas equações resultaram em desvios menores do que 6 % . Em uma das comparações realizadas, utilizou-se uma solução analítica de Cess e Shaffer (1959) para o cálculo do Nusselt local na face superior do obstáculo. Os resultados desta comparação apresentaram uma boa concordância.

#### Convecção natural:

Valencia e Frederik (1989) realizaram um estudo numérico de convecção natural laminar em uma cavidade quadrada fechada. Uma parte de cada superfície vertical foi mantida na temperatura constante e a outra parte restante foi isolada termicamente. As superfícies horizontais foram isoladas termicamente. As partes das superfícies verticais com temperatura especificada foram variadas e cinco casos foram obtidos e estudados no trabalho. As equações de conservação, bidimensionais e no regime permanente foram resolvidas pelo método SIMPLEC. Os resultados foram obtidos para Rayleigh na faixa de  $10^3$  a  $10^7$  e  $Pr = 0,71$ . Os autores apresentaram a seguinte equação de correlação para o cálculo do número de Nusselt médio na região da superfície vertical com temperatura adimensional especificada:

$$Nu = C Ra^b,$$

onde “C” e “b” foram apresentadas no trabalho para cada caso estudado. As expressões para o cálculo do número de Nusselt médio tiveram um desvio máximo de  $\pm 6\%$  .

Ghaddar (1992) estudou numericamente a convecção natural de um cilindro horizontal aquecido uniformemente colocado dentro de uma cavidade retangular fechada. As paredes da cavidade são isoladas termicamente e o escoamento é considerado laminar e bidimensional. A

dinâmica do escoamento e o comportamento térmico foram analisados para diferentes fluxos de calor aplicados ao cilindro. Na análise numérica foram consideradas as seguintes relações: altura da cavidade pelo diâmetro do cilindro igual a 40 ; largura da cavidade pelo diâmetro do cilindro igual a 15 ; e a dimensão da posição vertical do centro do cilindro pelo diâmetro do cilindro igual a 10 . Os resultados foram obtidos para as seguintes faixas:  $10 < Ra < 1.000$  e  $Pr = 0,72$  . Foi utilizado o método de elementos espectrais, com malhas não uniformes. Foram obtidos numericamente, as seguintes equações de correlação:

$$Nu = 1,81 Ra^{0,207} \quad ;$$

$$Nu = 0,604 Ra^{0,2083} \quad ;$$

apresentando erros de 7,4 e 19,9 % , respectivamente. Os valores numéricos de Nusselt apresentaram-se um pouco maior em relação aos valores de Nusselt obtidos experimentalmente, para número de Rayleigh  $Ra < 10^9$  . As regiões com trocas de calor mais altas ocorreram na parte do fluido na região mais alta da cavidade. Para todos os fluxos de calor examinados, a velocidade mais alta do fluido ocorreu numa distância de aproximadamente 9 vezes o diâmetro do cilindro ao longo da linha central vertical, acima do cilindro aquecido.

Sasaguchi et al. (1998) estudaram numericamente a convecção natural da água em uma cavidade retangular fechada com um cilindro no seu interior. As paredes da cavidade foram consideradas isoladas e o cilindro foi mantido na temperatura baixa de  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  . O trabalho teve como objetivo estudar o efeito da posição do cilindro frio na cavidade retangular. Na análise numérica, foram realizados os cálculos para a relação entre altura e diâmetro igual a 6 e relação da largura pelo diâmetro igual a 4 . Foram consideradas três posições do cilindro no interior da cavidade: na posição superior, no centro da cavidade e na posição inferior da cavidade. Foram ainda analisadas as seguintes temperaturas iniciais para a água: 4 , 6 , 8 e  $12 \text{ }^\circ\text{C}$  . As equações de conservação, bidimensionais e no regime não permanente foram resolvidas pelo método de diferenças finitas. Os resultados mostraram que as mudanças na posição do cilindro e nas temperaturas iniciais da água afetaram bastante o escoamento do fluido. Devido a inversão da densidade da água para a temperatura de  $4 \text{ }^\circ\text{C}$  , o escoamento do fluido e a distribuição de temperatura foram muito complexos.

### Convecção mista:

Tao (1960) estudou analiticamente a convecção mista entre placas planas paralelas verticais e em dutos horizontais de seção retangular para escoamento plenamente desenvolvido. As condições de contorno consideradas para o caso de placas paralelas verticais foram: temperatura com variação axial linear e temperatura da placa constante para um mesmo nível

horizontal. Para o duto retangular, a temperatura era constante para uma dada seção periférica e linear na direção axial. O objetivo do trabalho propunha um novo método o qual introduzia uma função complexa, onde as partes real e imaginária eram relacionadas aos campos de velocidade e de temperatura, respectivamente. O método do trabalho fornecia as soluções físicas em termos de séries de funções elementares, ao invés de séries de Fourier. Dois casos foram estudados no trabalho e seus resultados foram comparados com outros trabalhos numéricos previamente estudados na literatura.

Quintiere e Mueller (1973) estudaram também analiticamente a convecção mista entre placas paralelas planas, verticais e finitas. O escoamento foi considerado permanente e bidimensional. Para o caso de convecção natural para canal aquecido simetricamente, as condições de contorno de temperaturas consideradas foram: temperaturas das placas uniformes ou mudança repentina nas temperaturas das placas. Ainda para convecção natural, para o caso de aquecimento assimétrico das placas, foram consideradas temperaturas uniformes e diferentes nas placas. Para os casos de convecção forçada e convecção mista, foram consideradas as condições de contorno de temperaturas uniformes e simétricas nas placas. Os resultados foram analisados para a seguintes faixas:  $0,01 \leq Pr \leq 10$  e  $1 < Ra < 10^5$ . O trabalho apresentou resultados satisfatórios para alguns exemplos sobre uma grande faixa de condições. Para o caso de convecção natural pura, com temperatura constante da placa, mostrou-se uma boa concordância com a solução numérica de Bodoia e Osterle (1962), para valores pequenos de Rayleigh. O efeito da condição de pressão na região de entrada foi examinado, sendo responsável por um efeito importante na transferência de calor e no comportamento do escoamento para números de Rayleigh altos.

Oosthuizen e Paul (1985) realizaram um estudo numérico de convecção mista em uma cavidade retangular com uma parede vertical aquecida e outra parede vertical resfriada, permanecendo as paredes horizontais isoladas. Na parede vertical resfriada, existem uma entrada e uma saída para o escoamento. O escoamento desenvolvido entra na cavidade na mesma temperatura da parede vertical fria. Um estudo também foi feito invertendo-se o sentido do escoamento. Foi utilizado o método de elementos finitos para se resolver as equações de conservação na forma bidimensional, permanente e no regime laminar. Foram obtidos resultados para:  $Pr = 0,7$ ;  $0 \leq Re \leq 500$ ;  $-10^4 \leq Gr \leq 5 \times 10^5$ ;  $A = 2$  e  $4$  e um único valor da dimensão de entrada e de saída do escoamento. Foram estudados os casos limites para convecção natural ( $Re \rightarrow 0$ ) e convecção forçada pura ( $Gr \rightarrow 0$ ).

Aung e Worku (1987) também realizaram um estudo numérico de convecção mista em canal constituído por placas planas paralelas verticais. A condição de contorno foi de aquecimento assimétrico das paredes sob fluxos de calor uniforme. O escoamento forçado, na

região de entrada do duto, foi adotado ser espacialmente uniforme e dirigido para cima. A razão dos fluxos de calor variou de 0 a 1, caracterizando o grau de aquecimento assimétrico. Os resultados do problema foram obtidos para:  $Pr = 0,72$ ;  $0 \leq Gr/Re \leq 500$ . Comparando-se os casos de temperatura uniforme da parede (UWT) com o caso de fluxo de calor uniforme (UHF), para esse último, os resultados mostraram que as forças de empuxo introduziram um menor grau de assimetria nos perfis de velocidade. Ocasinou-se assim um menor influência sobre os parâmetros térmicos e hidrodinâmicos do problema. Similarmente, o escoamento reverso foi mais propenso a ocorrer no caso UWT do que em UHF. Verificou-se que até o valor de  $Gr/Re = 500$ , nenhum escoamento reverso foi observado no trabalho para quaisquer valores da razão do fluxo de calor.

Ramachandran et al. (1987) apresentaram uma análise numérica e experimental de convecção mista de ar escoando sobre uma superfície aquecida isotermicamente e inclinada a  $45^\circ$ . Foi utilizado o método de diferenças finitas para resolver as equações de conservação, bidimensionais e no regime permanente. Os resultados foram obtidos para as seguintes faixas:  $0 \leq Gr/Re^2 \leq 5$ ;  $5000 \leq Re \leq 60.000$  e  $Pr = 0,7$ . O número de Nusselt local e as distribuições de velocidades e temperaturas foram mostrados para os casos de escoamento “ajudado” e “oposto” às forças de empuxo. Comparando-se os resultados numéricos e experimentais obtidos no trabalho, observou-se que eles se apresentaram de uma maneira bastante semelhantes, apresentando um desvio menor do que 10%. Além do mais, as distribuições de temperaturas e velocidades podem ser consideradas como sendo somente uma função de  $Gr/Re^2$  e de  $y(u_\infty/\nu x)^{1/2}$  e a expressão local  $Nu Re^{-1/2}$  como sendo somente uma função de  $Gr/Re^2$ , para todos os números de Reynolds.

Yao (1987) apresentou um estudo analítico e numérico de convecção mista ao longo de uma placa plana. Três casos foram examinados: placas verticais, horizontais e inclinadas. Foi utilizado o método de diferenças finitas para se resolver as equações de conservação na forma bidimensional e permanente. Também, foram obtidas soluções em séries em termos de  $Gr/Re^2$ . O número de Prandtl foi mantido em  $Pr = 1$  e a relação  $(Gr/Re^2)_x$ , variou entre  $0 \leq (Gr/Re^2)_x \leq 2000$ . Os resultados mostraram que o parâmetro regente ao longo de uma placa vertical foi  $Gr/Re^2$ , se  $Re \rightarrow \infty$ . Para valores baixos de Reynolds, os parâmetros regentes foram  $Gr^{-1/4}$  e  $Re$ . Para uma placa horizontal, o parâmetro regente foi  $Gr/Re^{3/2}$  e não  $Gr/Re^{5/2}$ , como sugerido por alguns trabalhos anteriores ao estudo de Yao (1987). Para uma placa inclinada, o parâmetro regente foi  $Gr/Re^2 \sin \gamma$ , sendo  $\gamma$  o ângulo de inclinação com a

horizontal para  $\gamma < 85^\circ$ . Ainda para placa inclinada, estudos experimentais mostraram que a instabilidade no escoamento não ocorreu nessa faixa.

Lin et al. (1991) realizaram um estudo numérico de convecção mista entre placas planas verticais, utilizando o método de diferenças finitas. As equações de conservação foram escritas na forma bidimensional e no regime permanente. As condições de contorno do trabalho foram: fluxos de calor constantes nas duas placas e fluxos diferentes nas placas. Os resultados foram obtidos para um caso típico:  $Pr = 5$  ;  $Gr/Re = 1000$  ; taxa de transferência de calor da placa para o fluido igual nas duas placas e com valor igual a 10 e a razão do fluxo de calor das placas igual a 0,5 . Foram expressas equações de correlação, para escoamento “ajudado” e “oposto”, para o cálculo do número de Nusselt com um desvio máximo de 15 % . Os resultados mostraram que aumentando-se as forças de empuxo em escoamento “ajudado”, diminuiu-se o número de Nusselt em ambos regimes permanente e não permanente. Para escoamento “oposto”, o aumento de  $Gr/Re$  reduziu o número de Nusselt.

Safi e Loc (1994) estudaram numericamente a convecção mista laminar em uma cavidade semi-aberta. A cavidade era formada por uma entrada, localizada na região superior da superfície vertical à esquerda, e uma saída localizada na região inferior da superfície vertical à direita. Foram considerados dois tipos de condições de contorno para as superfícies verticais e horizontais. No primeiro, as superfícies eram condutoras. No segundo, as superfícies eram consideradas adiabáticas. Considerou-se um perfil de velocidade uniforme na entrada, com temperatura adimensional quente  $\theta = 1$ . Na saída, dois tipos de condições de contorno foram impostas. Uma foi de escoamento uniforme com temperatura adimensional fria  $\theta = 0$  e outra de isolamento. Os resultados mostraram que nenhuma diferença foi observada para essas duas condições de contorno na saída da cavidade. Foi utilizado o método de diferenças finitas para resolver as equações de conservação, bidimensionais e no regime não permanente, em termos da vorticidade, função corrente e temperatura adimensional. O método ADI (Alternating Direction Implicit) foi usado para resolver as equações parabólicas do problema. As propriedades do fluido foram consideradas constantes, exceto a densidade nos termos de empuxo que segue a relação de Boussinesq. Os resultados foram obtidos para os seguintes valores:  $Re = 150$  e  $300$  ;  $Pr = 0,33$  ;  $1,43$  ;  $0,71$  e  $5,5$  ;  $Gr = 450.000$  ;  $112.500$  ;  $90.000$  ;  $9.000$  ;  $Gr/Re^2 = 0,1$  ;  $1$  ;  $5$  e  $H/d = 15$ , onde a dimensão de entrada da cavidade foi igual à dimensão de saída da mesma. Utilizou-se uma malha uniforme com  $61 \times 61$  nós. No trabalho, foram analisados os efeitos das variações das condições de contorno, da razão do número  $Gr/Re^2$  e de cada parâmetro adimensional  $Re$  ,  $Gr/Re^2$  e  $Pe$  . Os resultados mostraram que a estratificação térmica ocorreu quando  $Gr/Re^2 = 1$ . Aumentando-se o valor da razão  $Gr/Re^2$ , aumentou-se a estratificação térmica,

mas apareceram outras correntes reversas do fluido, como a formação de vórtex. Os resultados mostraram também que o escoamento é fortemente dependente dos números de Peclet  $Pe$  e da razão  $Gr/Re^2$ .

Ingham e outros (1995) obtiveram resultados numéricos de convecção mista, sobre o escoamento hidrodinamicamente desenvolvido entre placas planas paralelas. As equações de conservação, bidimensionais e no regime permanente, foram expressas na forma de diferenças finitas. Foram considerados três tipos de condições de contorno: a placa inferior é mantida na temperatura alta e a placa superior na temperatura baixa; a placa superior na temperatura alta e a placa inferior na temperatura baixa; as duas placas mantidas na temperatura alta. Para esse último, a condição de contorno de temperatura na saída foi igual a 1. Para os dois primeiros casos, o perfil de temperatura na saída foi linear, com valores de temperatura variando entre os valores das superfícies fria e quente. Na região de entrada, o fluido foi considerado frio. Os resultados foram obtidos para as seguintes faixas:  $5 \leq Re \leq 10$  ;  $0 \leq Gr/Re^2 \leq 40$  e  $Pr = 7,02$ . Para o caso de aquecimento da placa inferior, uma região de recirculação do fluido próxima à superfície quente e orientada transversalmente foi observada, modificando o processo da transferência de calor. No caso de aquecimento da placa superior, o processo da transferência de calor foi auxiliado pelo empuxo. Esse gerou uma camada de fluido estratificada termicamente próxima à superfície quente. Na região de entrada do fluido, formaram-se altos gradientes de temperatura, aumentando a transferência de calor. Para o caso de aquecimento nas duas placas, os efeitos da estratificação e da recirculação dos casos anteriores apareceram combinados e com uma maior intensidade. Comparando-se o caso de aquecimento nas duas placas com o caso de aquecimento na placa inferior, a transferência de calor da placa inferior foi maior nesse último caso, por causa dos maiores efeitos de recirculação. Comparando-se o mesmo caso de aquecimento nas duas placas com o caso de aquecimento na placa superior, a transferência de calor da placa superior é maior nesse primeiro caso citado, por causa do aumento da estratificação.

Para os problemas de convecção forçada, natural e mista que aparecem na literatura, são observados vários trabalhos com diversas aplicações importantes nas áreas da engenharia. Esses trabalhos foram aplicados em uma grande quantidade de geometrias e condições de contorno, utilizando vários métodos de solução. No presente trabalho, com a aplicação do método de elementos finitos, há a possibilidade de estudar geometrias com formas geométricas complexas com várias condições de contorno.

### 1.3 – Objetivos do Presente Trabalho

O presente trabalho tem como objetivo o estudo numérico da convecção forçada, natural e mista, considerando o escoamento laminar e bidimensional em regime permanente e não permanente. O estudo fornece como resultados, para os casos de convecção forçada, natural e mista, as distribuições da função corrente ( $\psi$ ), temperatura adimensional ( $\theta$ ) e vorticidade ( $\omega$ ).

Para o problema da convecção forçada, casos 1 e 2 das figuras 1.1 e 1.2, são obtidas as distribuições da função corrente ( $\psi$ ), da temperatura adimensional ( $\theta$ ), bem como a temperatura média do fluido em função do tempo adimensional.

Para os problemas de convecção natural, casos 1 a 3 da figura 1.3 e convecção mista, casos 1 a 4 das figuras 1.4 e 1.5, são obtidos os números de Nusselt médio ( $Nu$ ), em função dos diversos parâmetros geométricos e térmicos, permitindo calcular o fluxo de transferência de calor.

### 1.4 – Contribuições do Presente Trabalho

Uma contribuição importante do presente trabalho foi o desenvolvimento sistemático das equações, em uma forma geral para aplicação do método de elementos finitos. As equações matriciais e lineares obtidas pela aplicação do método de elementos finitos possibilitam o estudo tanto de problemas de transferência de calor por convecção forçada, como de natural ou mista. Assim podem ser estudadas geometrias bidimensionais arbitrárias com diversos tipos de condições de contorno.

Também, através deste trabalho, é possível visualizar as distribuições da temperatura adimensional e o escoamento do fluido no interior das cavidades fechadas e semi-abertas.

Para o estudo de convecção forçada foram apresentadas as distribuições de temperatura adimensional e da função corrente, as quais permitem visualizar o escoamento do fluido num canal com obstáculo, para o regime não permanente. Foi estudada a influência da mudança da forma do obstáculo nessas distribuições e no cálculo da temperatura média no fluido.

Para o problema de convecção natural, foi realizado o estudo da influência da variação da posição de um corpo quente, colocado no interior de uma cavidade retangular fechada, comparada com o caso clássico de escoamento no interior de uma cavidade retangular fechada.

E finalmente, a contribuição para o problema de convecção mista, apresentado neste trabalho, foi estender o estudo do problema de uma cavidade semi-aberta. Verificou-se a

influência da posição de entrada e da saída de fluido na cavidade, e o sentido do escoamento, no número Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  e nas distribuições de temperatura adimensional e da função corrente.

## 1.5 – Delineamento do Presente Trabalho

A seguir, são apresentados os conteúdos dos capítulos, de uma forma geral.

### Capítulo 2 – Modelo Matemático

Nesse capítulo, inicialmente são apresentadas as equações de conservação na forma dimensional para cada tipo de convecção, ou seja, forçada, natural e mista. Essas equações se apresentam juntamente com as hipóteses do escoamento considerados, mais as condições iniciais e condições de contorno.

Com o objetivo de reduzir o número de parâmetros e generalizar a solução numérica do problema, as equações de conservação na forma dimensional, são adimensionalizadas e escritas em termos da temperatura adimensional  $\theta$ , função corrente  $\psi$ , vorticidade  $\omega$  e dos números de Grashof  $Gr$ , de Prandtl  $Pr$  e de Reynolds  $Re$ , dependendo do tipo de convecção.

Depois, são apresentadas as expressões para o cálculo do número de Nusselt médio  $Nu$  para os problemas de convecção forçada, natural e mista.

### Capítulo 3 – Modelo Numérico

Nesse capítulo o método de elementos finitos é usado para a solução numérica das equações para problemas de convecção forçada, natural e mista. Utilizou-se o elemento triangular de três nós, com variação linear das grandezas dentro de cada elemento.

Nesse trabalho, as equações matriciais lineares obtidas pelo método numérico para a função corrente  $\psi$ , temperatura adimensional  $\theta$  e vorticidade  $\omega$  são desenvolvidas numa forma matricial geral para o elemento, válida para convecção forçada, natural ou mista.

Finalmente, será descrito o programa computacional desenvolvido e utilizado para solucionar o sistema de equações globais acopladas em termos da função corrente  $\psi$ , temperatura adimensional  $\theta$  e vorticidade  $\omega$ , seguindo-se os cálculos do número de Nusselt médio  $Nu$  e da temperatura média no fluido em todo domínio  $\Omega$ .

## Capítulo 4 – Resultados

Neste capítulo, o programa computacional desenvolvido para cada tipo de geometria é testado, comparando-se os resultados obtidos com aqueles encontrados na literatura, para validação do programa computacional.

Para o problema de convecção forçada, os resultados do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  são comparados com os resultados obtidos na literatura. Esses resultados foram obtidos para dois casos testes, considerando-se as seguintes condições de contorno: temperaturas iguais nas duas placas e temperaturas diferentes nas placas. Nos dois casos testes, o perfil de velocidade foi considerado desenvolvido.

Para convecção natural, os resultados do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  também são comparados com os resultados obtidos na literatura. Os resultados foram obtidos para o caso clássico de uma cavidade quadrada fechada, considerando as paredes horizontais isoladas e as paredes verticais com temperaturas adimensionais  $\theta = 1$  e  $-1$ .

Para mostrar a potencialidade do método desenvolvido neste trabalho, foram estudados diversos casos de convecção forçada, natural e mista.

Para o problema de convecção forçada são obtidas os resultados para duas geometrias de placas planas paralelas com um obstáculo colocado entre elas. São apresentadas as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$ , função corrente  $\psi$  e a temperatura média do fluido, em todo domínio  $\Omega$ , para o regime não permanente e permanente. Os números de Reynolds e Prandtl permaneceram constantes e iguais a  $Re = U_0 H/\nu = 160$  e  $Pr = \nu/\alpha = 1$ , para as duas geometria estudadas.

Para o problema de convecção natural, são obtidos os resultados para três geometrias de cavidades retangulares fechadas, variando-se alguns parâmetros geométricos e térmicos. São apresentadas, além das distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  e da função corrente  $\psi$ , os números de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  e fria  $Nu_c$ . Para as três geometria estudadas, alguns parâmetros utilizados foram: número de Grashof  $Gr = g\beta(T_h - T_c)H^3/\nu^2$  variando de  $10^4$  a  $5 \times 10^5$ , número de Prandtl  $Pr = \nu/\alpha = 0,733$  e razão de aspecto  $A = H/L = 2$ .

Para o problema de convecção mista, são obtidos os resultados para quatro geometrias de cavidades retangulares, semi-abertas, variando-se alguns parâmetros geométricos e térmicos. São apresentadas as distribuições de temperatura adimensional  $\theta$  e da função corrente  $\psi$ , juntamente com os resultados do número de Nusselt médio quente  $Nu_h$ . Os parâmetros utilizados para os quatro casos são: número de Grashof  $Gr = g\beta(T_h - T_c)H^3/\nu^2$  variando de 0 a  $5 \times 10^5$ , número de Prandtl  $Pr = \nu/\alpha = 0,7$ , número de Reynolds  $Re = U_0 H/\nu$  variando de 1 a

100 , razão de aspecto  $A = H/L = 2$  e razão da dimensão da entrada ou da saída do fluido pela altura da cavidade  $D = d/H = 0,2$  .

## Capítulo 5 – Conclusões e Recomendações

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões obtidas neste trabalho, para cada tipo de convecção.

Finalmente, faz-se algumas recomendações para possíveis trabalhos futuros, visando estender os estudos realizados neste trabalho.

## Apêndices

No Apêndice A1, faz-se o desenvolvimento da equação diferencial bidimensional em regime não permanente, aplicando o método de Galerkin, a fim de obter a equação matricial linear e global, do tipo  $A X = B$  .

Por último, são apresentadas as referências bibliográficas consultadas, para elaboração do presente trabalho.

## CAPÍTULO 2

### MODELO MATEMÁTICO

#### 2.1 – Análise Teórica da Convecção Forçada

##### 2.1.1 – Equações de Conservação para Convecção Forçada

As equações de conservação para o estudo de convecção forçada em canais terão as seguintes considerações:

- regime não permanente;
- escoamento bidimensional e laminar;
- escoamento incompressível;
- a função dissipação viscosa foi desprezada;
- as propriedades físicas do fluido são constantes ( $\rho, \mu, c_p, K$ );
- sem geração interna de calor;
- os efeitos de compressibilidade são desprezados.

Mediante as considerações acima as equações de conservação são:

i) continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

ii) quantidade de movimento

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \rho g \sin \gamma, \quad (2.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \rho g \cos \gamma, \quad (2.3)$$

iii) energia

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{K}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (2.4)$$

Uma geometria de placas planas paralelas, com um obstáculo colocado entre elas, encontra-se ilustrada na figura 2.1, juntamente com as condições de contorno consideradas na

análise teórica. As superfícies  $S_1$  representarão as superfícies isotérmicas quente com temperatura  $T_h$ , enquanto que  $S_2$  será estabelecido como sendo uma fronteira aberta com o fluido frio entrando na temperatura  $T_c$ . Através da fronteira aberta  $S_3$ , o fluido sai adiabaticamente. A fronteira  $S_4$  representa uma fronteira adiabática de simetria. As componentes de velocidades do fluido na parede  $u_w$  e  $v_w$  ( em  $S_1$  ) são nulas.

As condições iniciais e de contorno da presente análise são:

a) condições iniciais:

para  $t = 0$ :

$$u = v = 0 \quad (\text{ em } \Omega ), \quad (2.5a)$$

$$T = T_0 \quad (\text{ em } \Omega ), \quad (2.5b)$$

ii) condições de contorno:

para  $t > 0$ :

$$T = T_h \quad (\text{ em } S_1 ), \quad (2.5c)$$

$$T = T_c \quad (\text{ em } S_2 ), \quad (2.5d)$$

$$q = \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (\text{ em } S_3 ), \quad (2.5e)$$

$$u_w = v_w = 0 \quad (\text{ em } S_1 \text{ e } S_4 ), \quad (2.5f)$$

$$u = -0,048y^2 + 0,48y \quad (\text{ em } S_2 \text{ e } S_3 ), \quad (2.5g)$$

$$v = 0 \quad (\text{ em } S_2 \text{ e } S_3 ). \quad (2.5h)$$

Onde  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$  são mostrados na figura 2.1.

## 2.1.2 – Adimensionalização das Equações

São introduzidas as seguintes variáveis adimensionais para adimensionalizar as equações de conservação, visando assim, generalizar a análise teórica:

$$\tau = \frac{U_o t}{H}, \quad X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad U = \frac{u}{U_o},$$

$$V = \frac{v}{U_o}, \quad P = \frac{p}{\rho U_o^2}, \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}. \quad (2.6)$$

Onde  $U_o$  é a velocidade média,  $p$  é a pressão,  $\rho$  é a massa específica e  $H$  é a distância entre as placas.

Substituindo (2.6) em (2.1), resulta:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0. \quad (2.7)$$

Substituindo (2.6) em (2.2), resulta:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + F_x, \quad (2.8)$$

onde Re é o número de Reynolds definido pela relação:

$$\text{Re} = \frac{U_0 H}{\nu}, \quad (2.9)$$

e  $F_x$  é a força de campo definido por:

$$F_x = \frac{-g H \sin \gamma}{U_0^2}. \quad (2.10)$$

Substituindo (2.6) em (2.3), resulta:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + F_y, \quad (2.11)$$

onde  $F_y$  é a força de campo definido por:

$$F_y = \frac{-g H \cos \gamma}{U_0^2}. \quad (2.12)$$

Substituindo (2.6) em (2.4), resulta:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right). \quad (2.13)$$

onde Pr é o número de Prandtl definido pela relação:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad (2.14)$$

sendo Pe o número de Peclet definido por:

$$\text{Pe} = \text{Re Pr}. \quad (2.15)$$

Os termos de pressão que aparecem nas equações (2.8) e (2.11) podem ser eliminados. Isto é conseguido derivando-se a equação (2.8) em relação a Y, e a equação (2.11) em relação a X. Em seguida, as equações são subtraídas, resultando:

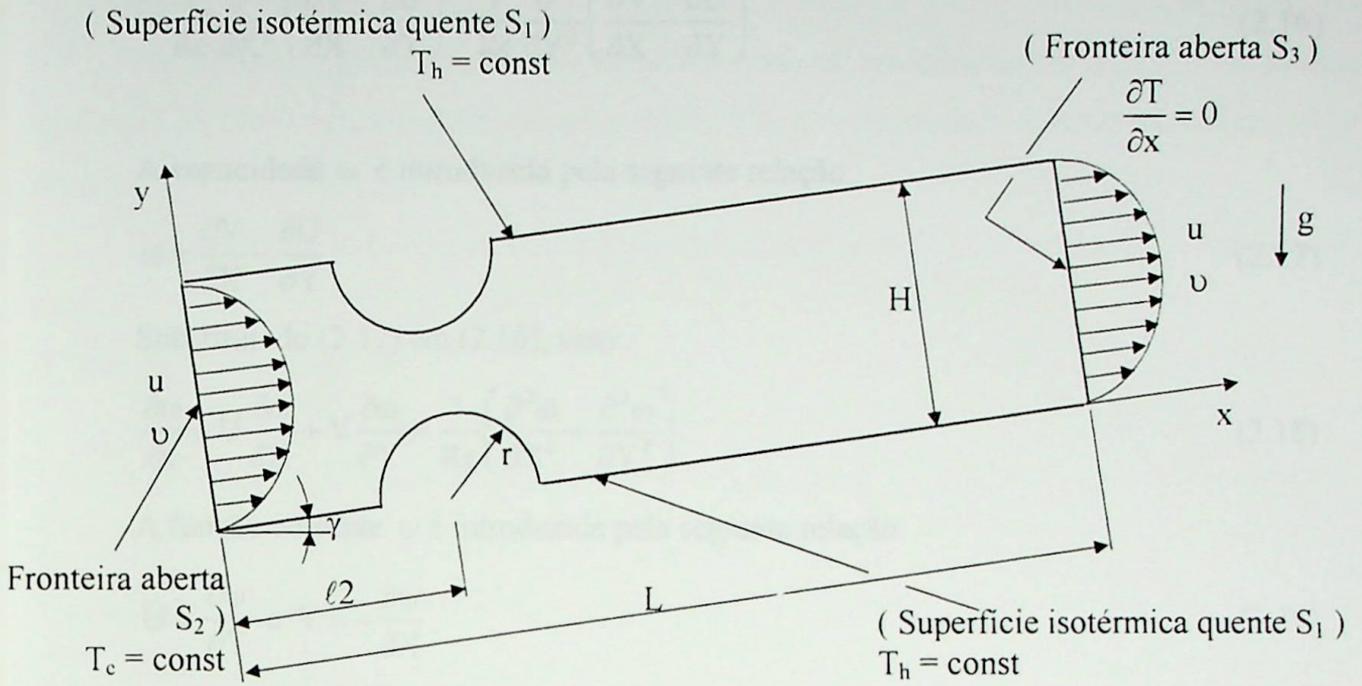


Figura 2.1a – Geometria de placas paralelas com obstáculo.

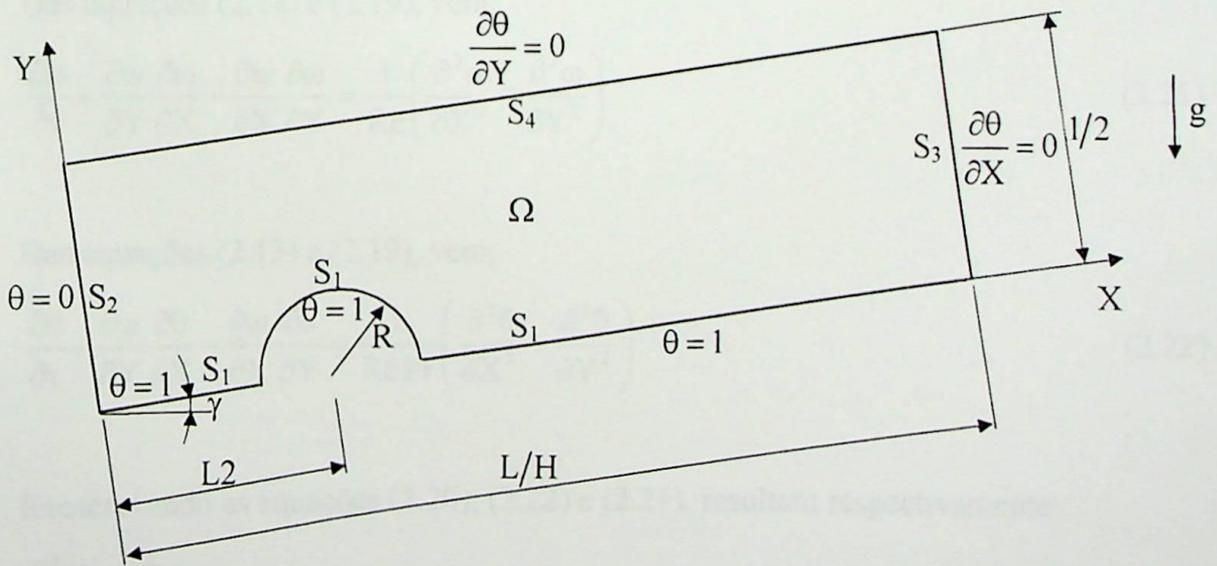


Figura 2.1b – Domínio computacional e condições de contorno adimensionais.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + U \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + V \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

A vorticidade  $\omega$  é introduzida pela seguinte relação:

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}. \quad (2.17)$$

Substituindo (2.17) em (2.16), vem:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right). \quad (2.18)$$

A função corrente  $\psi$  é introduzida pela seguinte relação:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad \text{e} \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X}. \quad (2.19)$$

Com a definição dada por (2.19), a equação da continuidade (2.7) fica satisfeita.

Das equações (2.17) e (2.19), resulta:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega. \quad (2.20)$$

Das equações (2.18) e (2.19), vem:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right). \quad (2.21)$$

Das equações (2.13) e (2.19), vem:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{RePr}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right). \quad (2.22)$$

Reescrevendo as equações (2.20), (2.22) e (2.21), resultam respectivamente:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{\text{RePr}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}. \quad (2.25)$$

As equações (2.23), (2.24) e (2.25) representam as equações de conservação em termos da função corrente ( $\psi$ ), temperatura adimensional ( $\theta$ ) e vorticidade ( $\omega$ ), tendo sido eliminada a pressão.

As condições iniciais e de contorno consideradas no item 2.1.1, na forma adimensional, são:

i) condições iniciais:

para  $\tau = 0$ :

$$\psi = \theta = \omega = 0 \quad (\text{em } \Omega), \quad (2.26)$$

ii) condições de contorno:

para  $\tau > 0$ :

$$\theta = 0 \quad (\text{em } S_2), \quad (2.24a)$$

$$\theta = 1 \quad (\text{em } S_1), \quad (2.24b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad (\text{em } S_3), \quad (2.24c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (\text{em } S_4), \quad (2.24d)$$

$$\psi_w = 0 \quad (\text{em } S_1), \quad (2.23a)$$

$$\psi_w = 4 \quad (\text{em } S_4), \quad (2.23b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = 0 \quad (\text{em } S_3), \quad (2.23c)$$

$$\psi = -0,016 Y^3 + 0,24 Y^2 \quad (\text{em } S_2), \quad (2.23d)$$

$$\omega_w = \omega_M \quad (\text{em } S_1), \quad (2.25a)$$

ou 
$$\omega_w = \frac{3(\psi_B - \psi_N)}{\ell^2} - \frac{\omega_N}{2} \quad (\text{em } S_1), \quad (2.25b)$$

$$\omega = 0,096 Y - 0,48 \quad (\text{em } S_2), \quad (2.25c)$$

$$\omega = 0 \quad (\text{em } S_4), \quad (2.25d)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial X} = 0 \quad (\text{em } S_3), \quad (2.25e)$$

onde  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$  são as superfícies no contorno do domínio  $\Omega$ , mostrado na figura 2.1b. As superfícies  $S_1$  e  $S_2$  são, respectivamente, as superfícies quente e fria. As superfícies  $S_3$  e  $S_4$  são as superfícies isoladas. A equação (2.26) estabelece a condição inicial para  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$  em todo o domínio  $\Omega$ . As equações (2.24a) e (2.24b) estabelecem que as temperaturas adimensionais baixa e alta são, respectivamente, 0 e 1. As equações (2.24c) e (2.24d) indicam que o fluxo de calor através das superfícies  $S_3$  e  $S_4$  é nulo. As equações (2.23a), (2.23b), (2.23c) e (2.23d) estabelecem respectivamente as condições de impermeabilidade e aderência no contorno. As equações (2.25a) e (2.25b) são utilizadas para calcular a vorticidade sobre a superfície  $S_1$ . A equação (2.25a) foi utilizada na aplicação do método matricial para o caso de escoamento entre placas com obstáculo entre elas e malhas não uniformes. O apêndice A2 mostra o método matricial para o cálculo da vorticidade no contorno. A equação (2.25b) foi utilizada no caso de escoamento entre placas planas com malhas uniformes. Na equação (2.25b),  $\omega_w$  representa a vorticidade do fluido junto ao contorno sendo,  $\psi_B$  o valor da função corrente no contorno,  $\psi_N$  o valor da função corrente a um ponto situado a uma pequena distância  $\ell$  do contorno e  $\omega_N$  o valor da vorticidade também situado a uma distância  $\ell$  do contorno.

As equações de conservação (2.23), (2.24) e (2.25) podem ser escritas na seguinte forma condensada:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + Q_\psi = 0, \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{\text{RePr}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + Q_\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (2.28)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + Q_\omega = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}, \quad (2.29)$$

onde:

$$Q_\psi = \omega, \quad (2.27a)$$

$$Q_\theta = \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right), \quad (2.28a)$$

$$Q_\omega = \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right). \quad (2.29a)$$

### 2.1.3 – Número de Nusselt Local e Médio

As equações (2.27), (2.28) e (2.29) representam um sistema de equações diferenciais parciais não lineares e acopladas. Para se resolver este sistema de equações, será usado o método

de elementos finitos com o objetivo de determinar as distribuições das funções  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ . Assim, será possível calcular o número de Nusselt local e médio em função de parâmetros geométricos e térmicos do problema.

As definições dos números de Nusselt local e médio estão definidos no apêndice B, que apresentam as seguintes relações:

i) Número de Nusselt local para a superfície  $S_1$  :

$$Nu_x = \frac{\left( \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \Big|_{y=H}}{\theta_p - \theta_m}, \quad (2.30)$$

onde  $\theta_p$  é a temperatura adimensional na parede e  $\theta_m$  é a temperatura média adimensional na seção.

ii) Número de Nusselt médio para a superfície  $S_1$  :

$$Nu_m = \frac{1}{x} \int_0^x Nu_x dx, \quad (2.31)$$

onde  $Nu_m$  é o número de Nusselt médio da posição inicial de aquecimento até a posição  $x$ .

$$Nu = \frac{1}{L} \int_0^L Nu_x dx, \quad (2.32)$$

onde  $Nu$  é o número de Nusselt médio em toda a placa.

Os números de Nusselt local e médio, descritos acima, podem ser escritos em função de parâmetros geométricos e térmicos do problema, respectivamente como :

$$Nu_x = Nu_x (\text{Parâmetros geométricos, Re, Pr}), \quad (2.33)$$

$$Nu = Nu (\text{Parâmetros geométricos, Re, Pr}). \quad (2.34)$$

Sendo que os parâmetros  $Re$  e  $Pr$  estão definidos pelas equações (2.9) e (2.14), respectivamente.

## 2.2 – Análise Teórica da Convecção Natural

### 2.2.1 – Equações de Conservação para Convecção Natural

As equações de conservação para o estudo de convecção natural em cavidades fechadas terão as seguintes considerações:

- a) regime não permanente;
- b) escoamento bidimensional e laminar;
- c) escoamento incompressível;

- d) a função dissipação viscosa foi desprezada;
- e) as propriedades físicas do fluido ( $\rho$ ,  $\mu$ ,  $c_p$ ,  $K$ ) são constantes, exceto a densidade nos termos de empuxo;
- f) sem geração interna de calor;
- g) os efeitos de compressibilidade são desprezados.

Mediante as considerações acima as equações de conservação são:

i) continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.35)$$

ii) quantidade de movimento

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho g \beta (T - T_o) \sin \gamma, \quad (2.36)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho g \beta (T - T_o) \cos \gamma, \quad (2.37)$$

iii) energia

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{K}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (2.38)$$

Uma geometria de cavidade retangular fechada, com um corpo quente colocado no seu interior, encontra-se ilustrada na figura 2.2, juntamente com as condições de contorno consideradas na análise teórica. As superfícies  $S_1$  e  $S_5$  representarão as superfícies isotérmicas quentes com temperatura  $T_h$ , enquanto que a superfície  $S_2$  representará uma superfície isotérmica fria com temperatura  $T_c$ . As superfícies  $S_3$  e  $S_4$  estarão isoladas termicamente, não havendo fluxo de calor passando através delas, e as componentes de velocidades do fluido na parede ( em  $S_1, S_2, S_3, S_4$  e  $S_5$  ) são todas nulas.

As condições iniciais e de contorno da presente análise são:

a) condições iniciais:

para  $t = 0$ :

$$u = v = 0 \quad (\text{ em } \Omega ), \quad (2.39a)$$

$$T = T_0 = \frac{T_c + T_h}{2} \quad (\text{ em } \Omega ), \quad (2.39b)$$

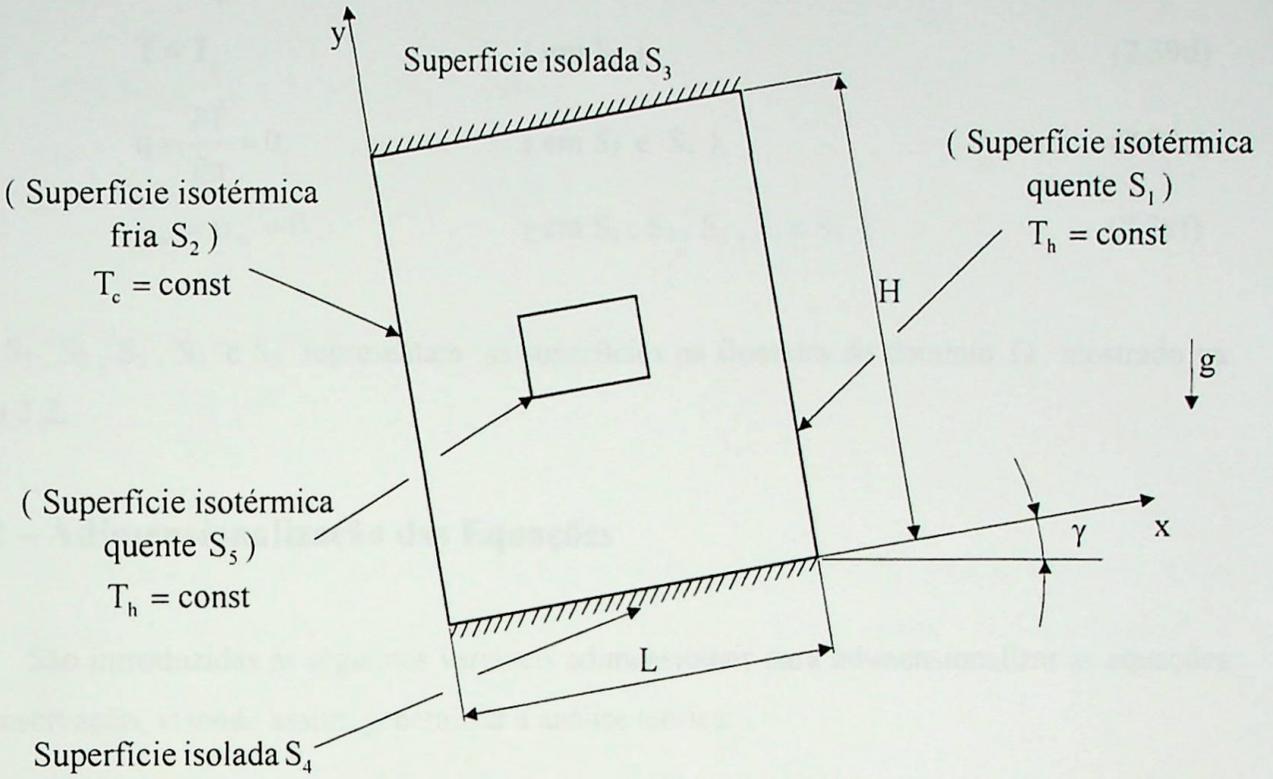


Figura 2.2a – Geometria de uma cavidade retangular fechada com um corpo quente colocado no seu interior.

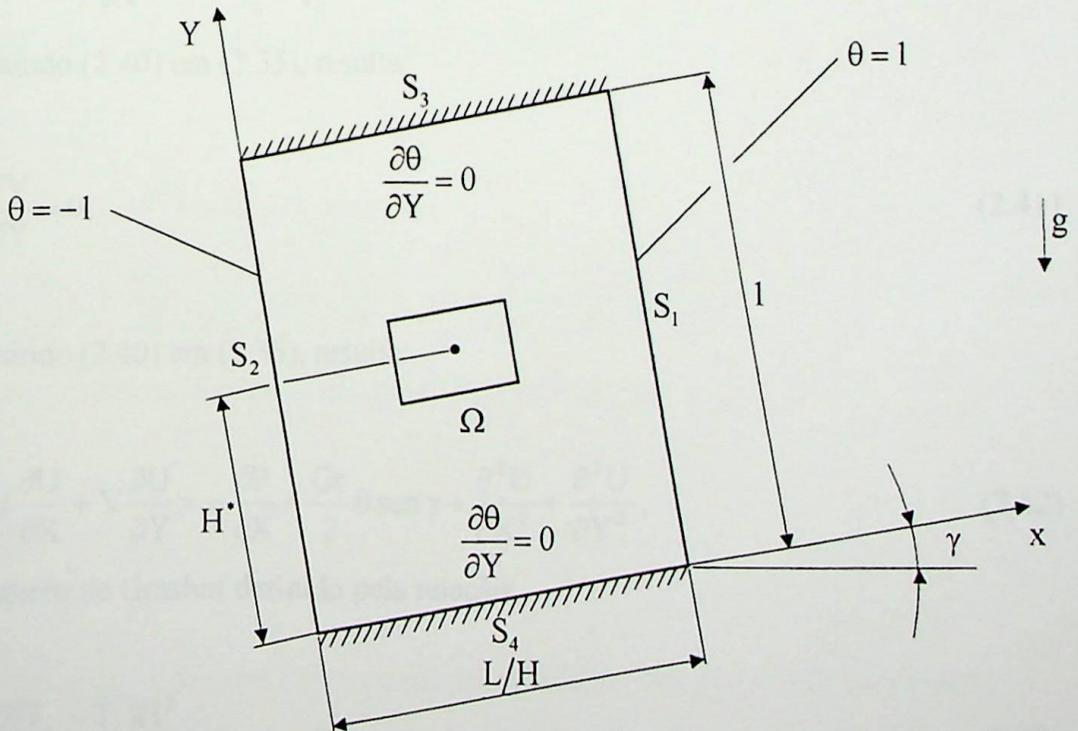


Figura 2.2b – Domínio computacional e condições de contorno adimensionais.

ii) condições de contorno:

para  $t > 0$ :

$$T = T_h \quad (\text{em } S_1 \text{ e } S_5), \quad (2.39c)$$

$$T = T_c \quad (\text{em } S_2), \quad (2.39d)$$

$$q = \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (\text{em } S_3 \text{ e } S_4), \quad (2.39e)$$

$$u_w = v_w = 0 \quad (\text{em } S_1, S_2, S_3, S_4 \text{ e } S_5), \quad (2.39f)$$

onde  $S_1, S_2, S_3, S_4$  e  $S_5$  representam as superfícies na fronteira do domínio  $\Omega$ , mostrado na figura 2.2.

### 2.2.2 – Adimensionalização das Equações

São introduzidas as seguintes variáveis adimensionais para adimensionalizar as equações de conservação, visando assim, generalizar a análise teórica:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{vt}{H^2}, X = \frac{x}{H}, Y = \frac{y}{H}, U = \frac{uH}{v}, \\ V &= \frac{vH}{v}, P = \frac{pH^2}{\rho v^2}, \theta = \frac{T - T_o}{T_h - T_o}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Substituindo (2.40) em (2.35), resulta:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0. \quad (2.41)$$

Substituindo (2.40) em (2.36), resulta:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{Gr}{2} \theta \text{sen } \gamma + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \quad (2.42)$$

onde  $Gr$  é o número de Grashof definido pela relação:

$$Gr = \frac{g\beta(T_h - T_c)H^3}{v^2}, \quad (2.43)$$

Substituindo (2.40) em (2.37), resulta:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{Gr}{2} \theta \cos \gamma + \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}, \quad (2.44)$$

Substituindo (2.40) em (2.38), resulta:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right), \quad (2.45)$$

onde  $Pr$  é o número de Prandtl definido pela relação:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{K} = \frac{\rho \nu c_p}{K}. \quad (2.46)$$

Os termos de pressão que aparecem nas equações (2.42) e (2.44) podem ser eliminados. Isto é conseguido derivando-se a equação (2.42) em relação a  $Y$ , e a equação (2.44) em relação a  $X$ . Em seguida, as equações são subtraídas, resultando:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + U \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + V \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = \\ & = \frac{Gr}{2} \cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{Gr}{2} \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

A vorticidade  $\omega$  é introduzida pela seguinte relação:

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}. \quad (2.48)$$

Substituindo (2.48) em (2.47), vem:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{Gr}{2} \left( \cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial X} - \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2}. \quad (2.49)$$

A função corrente  $\psi$  é introduzida pela seguinte relação:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \text{ e } V = -\frac{\partial \psi}{\partial X}. \quad (2.50)$$

Com a definição dada por (2.50), a equação da continuidade (2.41) fica satisfeita.

Das equações (2.48) e (2.50), resulta:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega. \quad (2.51)$$

Das equações (2.49) e (2.50), vem:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{Gr}{2} \left( \cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial X} - \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2}. \quad (2.52)$$

Das equações (2.45) e (2.50), vem:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right). \quad (2.53)$$

Rescrevendo as equações (2.51), (2.53) e (2.52), resultam respectivamente:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0. \quad (2.54)$$

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) + \frac{Gr}{2} \left( \cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial X} - \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}. \quad (2.56)$$

As equações (2.54), (2.55) e (2.56) representam as equações de conservação em termos da função corrente ( $\psi$ ), temperatura adimensional ( $\theta$ ) e vorticidade ( $\omega$ ), tendo sido eliminada a pressão.

As condições iniciais e de contorno consideradas no item 2.2.1, na forma adimensional, são:

i) condições iniciais:

para  $\tau = 0$ :

$$\psi = \theta = \omega = 0 \quad (\text{em } \Omega), \quad (2.57)$$

ii) condições de contorno:

para  $\tau > 0$ :

$$\theta = 1 \quad (\text{em } S_1 \text{ e } S_5), \quad (2.55a)$$

$$\theta = -1 \quad (\text{em } S_2), \quad (2.55b)$$

$$q = \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad (\text{em } S_3 \text{ e } S_4), \quad (2.55c)$$

$$\psi_w = 0 \quad (\text{em } S_1, S_2, S_3, S_4 \text{ e } S_5), \quad (2.54a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (\text{em } S_1, S_2, S_3, S_4 \text{ e } S_5), \quad (2.54b)$$

$$\omega_w = \frac{3(\psi_B - \psi_N)}{\ell^2} - \frac{\omega_N}{2} \quad (\text{em } S_1, S_2, S_3, S_4 \text{ e } S_5), \quad (2.56a)$$

onde  $S_1, S_2, S_3, S_4$  e  $S_5$  são as superfícies no contorno do domínio  $\Omega$ , mostrado na figura 2.2b. A equação (2.57) estabelece a condição inicial para  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$  em todo o domínio  $\Omega$ . As equações (2.55a) e (2.55b) estabelecem que as temperaturas adimensionais baixa e alta são respectivamente -1 e 1. A equação (2.55c) indica que o fluxo de calor através das superfícies  $S_3$  e  $S_4$  é nulo. As equações (2.54a) e (2.54b) estabelecem respectivamente as condições de impermeabilidade e aderência no contorno. Na equação (2.56a),  $\omega_w$  representa a vorticidade do fluido junto ao contorno sendo,  $\psi_B$  o valor da função corrente no contorno,  $\psi_N$  o valor da função corrente a um ponto situado a uma pequena distância  $\ell$  do contorno e  $\omega_N$  o valor da vorticidade também situado a uma distância  $\ell$  do contorno.

As equações de conservação (2.54), (2.55) e (2.56) podem ser escritas na seguinte forma condensada:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + Q_\psi = 0, \quad (2.58)$$

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + Q_\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} + Q_\omega = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}, \quad (2.60)$$

onde:

$$Q_\psi = \omega, \quad (2.58a)$$

$$Q_\theta = \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right), \quad (2.59a)$$

$$Q_\omega = \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) + \frac{Gr}{2} \left( \cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial X} - \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right). \quad (2.60a)$$

### 2.2.3 – Número de Nusselt Local e Médio

As equações (2.58), (2.59) e (2.60) representam um sistema de equações diferenciais parciais não lineares e acopladas. Para se resolver este sistema de equações, será usado o método de elementos finitos com o objetivo de determinar as distribuições das funções  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ . Assim,

será possível calcular o número de Nusselt local e médio em função de parâmetros geométricos e térmicos do problema.

As definições dos números de Nusselt local e médio estão definidos no apêndice B, que apresentam as seguintes relações:

i) Número de Nusselt local para as superfícies  $S_1$  e  $S_2$  :

$$Nu_x = \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_s, \quad (2.61)$$

onde S pode ser a superfície  $S_1$  ou  $S_2$ .

ii) Número de Nusselt médio para a superfície S:

$$Nu = \frac{1}{S} \int_S Nu_x \Big|_s dS, \quad (2.62)$$

onde S pode ser a superfície  $S_1$  ou  $S_2$ .

Os números de Nusselt local e médio, descritos acima, podem ser escritos em função de parâmetros geométricos e térmicos do problema, respectivamente como :

$$Nu_x = Nu_x ( \text{Parâmetros geométricos, Gr, Pr} ), \quad (2.63)$$

$$Nu = Nu ( \text{Parâmetros geométricos, Gr, Pr} ) . \quad (2.64)$$

Sendo que os parâmetros Gr e Pr estão definidos pelas equações (2.43) e (2.46), respectivamente.

## 2.3 – Análise Teórica da Convecção Mista

### 2.3.1 – Equações de Conservação para Convecção Mista

As equações de conservação para o estudo de convecção mista em cavidades semi-abertas terão as seguintes considerações:

- regime não permanente;
- escoamento bidimensional e laminar;
- escoamento incompressível;
- a função dissipação viscosa foi desprezada;
- as propriedades físicas do fluido ( $\rho, \mu, c_p, K$ ) são constantes, exceto a densidade nos termos de empuxo;

- f) sem geração interna de calor;  
g) os efeitos de compressibilidade são desprezados.

Mediante as considerações acima as equações de conservação são:

ii) continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.65)$$

iii) quantidade de movimento

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho g \beta (T - T_c) \sin \gamma, \quad (2.66)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho g \beta (T - T_c) \cos \gamma, \quad (2.67)$$

iv) energia

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{K}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (2.68)$$

A figura 2.3 mostra uma geometria de cavidade retangular semi-aberta, podendo representar um grande número de problemas, tais como equipamentos industriais e de resfriamento de equipamentos eletrônicos. Tais situações poderiam ser consideradas aqui como uma geometria onde se tem uma parede vertical aquecida, uma parede vertical resfriada e duas paredes horizontais isoladas. E ainda, em uma das paredes verticais, existem duas passagens onde ocorrem o escoamento forçado de entrada de um fluido e uma outra saída para o mesmo, caracterizando assim, o modelo de convecção mista em uma cavidade semi-fechada. A figura 2.3a e 2.3b mostram, com maior clareza, a geometria e as condições de contorno que serão consideradas na análise teórica. Variando-se as posições de entrada e de saída do fluido na cavidade e invertendo-se o sentido de escoamento, quatro casos serão estabelecidos no presente trabalho. Da figura 2.3b, a superfície C'D' representará uma superfície isotérmica quente com temperatura  $T_h$ , enquanto que a superfície F'A' representará uma superfície isotérmica fria com temperatura  $T_c$ . As superfícies D'E' e B'C' ficarão isoladas termicamente, não havendo fluxo de calor passando através delas, e as componentes de velocidades do fluido na parede ( em B'C', C'D', D'E' e F'A' ) são todas nulas. As fronteiras abertas A'B' e E'F' representarão, respectivamente, as seções de entrada e de saída de fluido. A fronteira E'F' será considerada adiabática, enquanto que a seção A'B' apresentará a mesma temperatura  $T_c$  da superfície fria F'A'.

As condições iniciais e de contorno da presente análise são:

b) condições iniciais:

para  $t = 0$ :

$$u = v = 0 \quad (\text{em } \Omega), \quad (2.69a)$$

$$T = T_c \quad (\text{em } \Omega), \quad (2.69b)$$

iii) condições de contorno:

para  $t > 0$ :

$$T = T_h \quad (\text{em } C'D'), \quad (2.69c)$$

$$T = T_c \quad (\text{em } F'A' \text{ e } A'B'), \quad (2.69d)$$

$$q = \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (\text{em } B'C' \text{ e } D'E'), \quad (2.69e)$$

$$u_w = v_w = 0 \quad (\text{em } B'C', C'D', D'E' \text{ e } F'A'), \quad (2.69f)$$

onde  $A'B'$ ,  $B'C'$ ,  $C'D'$ ,  $D'E'$ ,  $E'F'$  e  $F'A'$  representam as fronteiras do domínio  $\Omega$ , mostrado na figura 2.3b.

### 2.3.2 – Adimensionalização das Equações

São introduzidas as seguintes variáveis adimensionais para adimensionalizar as equações de conservação, visando assim, generalizar a análise teórica:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{U_o t}{H}, \quad X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad U = \frac{u}{U_o}, \\ V &= \frac{v}{U_o}, \quad P = \frac{p}{\rho U_o^2}, \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Substituindo (2.70) em (2.65), resulta:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0. \quad (2.71)$$

Substituindo (2.70) em (2.66), resulta:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{Gr}{Re^2} \theta \sin \gamma + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right), \quad (2.72)$$

onde Gr é o número de Grashof definido pela relação:

$$Gr = \frac{g\beta(T_h - T_c)H^3}{\nu^2}, \quad (2.73)$$

e Re é o número de Reynolds definido pela relação:

$$Re = \frac{U_o H}{\nu}, \quad (2.74)$$

Substituindo (2.70) em (2.67), resulta:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{Gr}{Re^2} \theta \cos \gamma + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right). \quad (2.75)$$

Substituindo (2.70) em (2.68), resulta:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Re Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right), \quad (2.76)$$

onde Pr é o número de Prandtl definido pela relação:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{K} = \frac{\rho \nu c_p}{K}. \quad (2.77)$$

Os termos de pressão que aparecem nas equações (2.72) e (2.75) podem ser eliminados. Isto é conseguido derivando-se a equação (2.72) em relação a Y, e a equação (2.75) em relação a X. Em seguida, as equações são subtraídas, resultando:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + U \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + V \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = \\ & = \frac{Gr}{Re^2} \cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{Gr}{Re^2} \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right). \end{aligned} \quad (2.78)$$

A vorticidade  $\omega$  é introduzida pela seguinte relação:

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}. \quad (2.79)$$

Substituindo (2.79) em (2.78), vem:

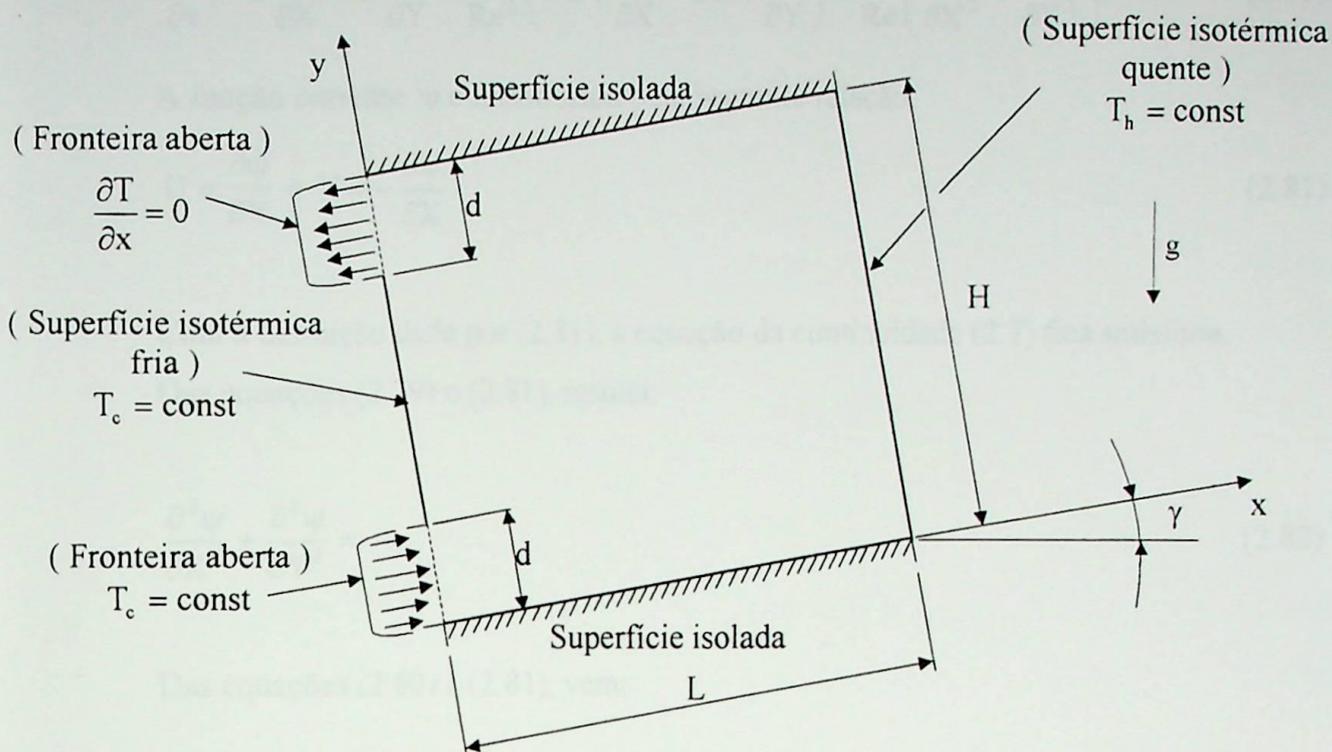


Figura 2.3a – Geometria de uma cavidade retangular semi-aberta.

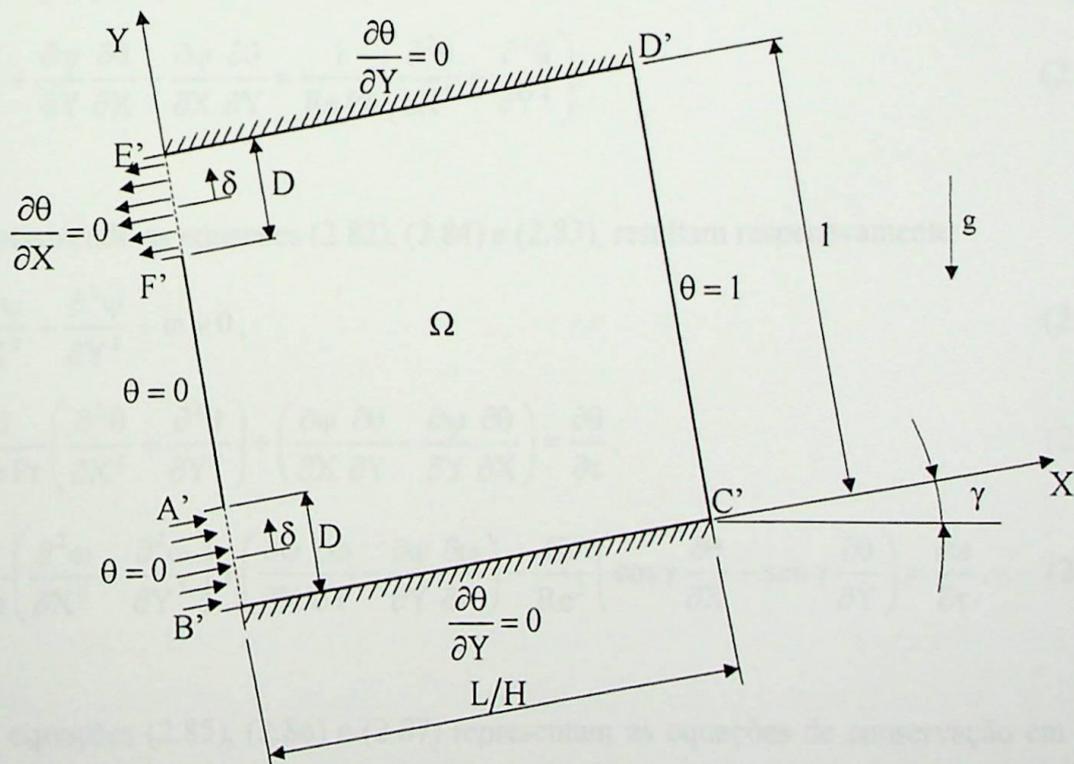


Figura 2.3b – Domínio computacional e condições de contorno adimensionais.

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{Gr}{Re^2} \left( \cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial X} - \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right). \quad (2.80)$$

A função corrente  $\psi$  é introduzida pela seguinte relação:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \text{ e } V = -\frac{\partial \psi}{\partial X}. \quad (2.81)$$

Com a definição dada por (2.81), a equação da continuidade (2.7) fica satisfeita.

Das equações (2.79) e (2.81), resulta:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega. \quad (2.82)$$

Das equações (2.80) e (2.81), vem:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{Gr}{Re^2} \left( \cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial X} - \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right). \quad (2.83)$$

Das equações (2.76) e (2.81), vem:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Re Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right). \quad (2.84)$$

Rescrevendo as equações (2.82), (2.84) e (2.83), resultam respectivamente:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0, \quad (2.85)$$

$$\frac{1}{Re Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (2.86)$$

$$\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) + \frac{Gr}{Re^2} \left( \cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial X} - \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}. \quad (2.87)$$

As equações (2.85), (2.86) e (2.87) representam as equações de conservação em termos da função corrente ( $\psi$ ), temperatura adimensional ( $\theta$ ) e vorticidade ( $\omega$ ), tendo sido eliminada a pressão.

As condições iniciais e de contorno consideradas no item 2.3.1, na forma adimensional, são:

ii) condições iniciais:

para  $\tau = 0$ :

$$\psi = \theta = \omega = 0 \quad (\text{em } \Omega), \quad (2.88)$$

iii) condições de contorno:

para  $\tau > 0$ :

$$\theta = 1 \quad (\text{em } C'D'), \quad (2.86a)$$

$$\theta = 0 \quad (\text{em } F'A'B'), \quad (2.86b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (\text{em } D'E' \text{ e } B'C'), \quad (2.86c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad (\text{em } E'F'), \quad (2.86d)$$

$$\psi_w = 0 \quad (\text{em } B'C'D'E'), \quad (2.85a)$$

$$\psi_w = D \quad (\text{em } F'A'), \quad (2.85b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} = 0 \quad (\text{em } B'C'D'E' \text{ e } F'A'), \quad (2.85c)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = 0 \quad (\text{em } E'F' \text{ e } A'B'), \quad (2.85d)$$

$$\psi = \frac{1}{2}D + \frac{3}{2}\delta - \frac{2\delta^3}{D^2} \quad (\text{em } A'B'), \quad (2.85e)$$

$$\psi = \frac{1}{2}D - \frac{3}{2}\delta + \frac{2\delta^3}{D^2} \quad (\text{em } E'F'), \quad (2.85f)$$

$$\omega_w = \frac{3(\psi_B - \psi_N)}{\ell^2} - \frac{\omega_N}{2} \quad (\text{em } B'C'D'E' \text{ e } F'A'), \quad (2.87a)$$

$$\omega = \frac{12\delta}{D^2} \quad (\text{em } A'B'), \quad (2.87b)$$

$$\omega = -\frac{12\delta}{D^2} \quad (\text{em } E'F'), \quad (2.87c)$$

onde  $A'B'$ ,  $B'C'$ ,  $C'D'$ ,  $D'E'$ ,  $E'F'$  e  $F'A'$  são as fronteiras no contorno do domínio  $\Omega$ , mostrado na figura 2.3b,  $D$  é o comprimento dimensional de entrada e de saída dos dutos e  $H$  o comprimento característico. A equação (2.88) estabelece a condição inicial para  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$  em todo o domínio  $\Omega$ . As equações (2.86a) e (2.86b) estabelecem que as temperaturas adimensionais alta e baixa são, respectivamente, 1 e 0. As equações (2.86c) e (2.86d) indicam que o fluxo de calor através, respectivamente, das superfícies  $D'E'$ ,  $B'C'$  e  $E'F'$  é nulo. As equações (2.85a), (2.85b), (2.85c) e (2.85d) estabelecem respectivamente as condições de impermeabilidade e aderência no contorno. As equações (2.85e) e (2.85f) são utilizadas para

calcular a função corrente, respectivamente, sobre as seções A'B' (entrada) e E'F' (saída). Na equação (2.87a),  $\omega_w$  representa a vorticidade do fluido junto ao contorno sendo,  $\psi_B$  o valor da função corrente no contorno,  $\psi_N$  o valor da função corrente a um ponto situado a uma pequena distância  $\ell$  do contorno e  $\omega_N$  o valor da vorticidade também situado a uma distância  $\ell$  do contorno. As equações (2.87b) e (2.87c) são utilizadas para calcular a vorticidade, respectivamente, sobre as seções A'B' e E'F'.

As equações de conservação (2.85), (2.86) e (2.87) podem ser escritas na seguinte forma condensada:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + Q_\psi = 0, \quad (2.89)$$

$$\frac{1}{\text{Re Pr}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + Q_\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (2.90)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + Q_\omega = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}, \quad (2.91)$$

onde:

$$Q_\psi = \omega, \quad (2.89a)$$

$$Q_\theta = \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right), \quad (2.90a)$$

$$Q_\omega = \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \left( \cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial X} - \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right). \quad (2.91a)$$

### 2.3.3 – Número de Nusselt Local e Médio

As equações (2.89), (2.90) e (2.91) representam um sistema de equações diferenciais parciais não lineares e acopladas. Para se resolver este sistema de equações, será usado o método de elementos finitos com o objetivo de determinar as distribuições das funções  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ . Assim, será possível calcular o número de Nusselt local e médio em função de parâmetros geométricos e térmicos do problema.

As definições dos números de Nusselt local e médio estão definidos no apêndice B, que apresentam as seguintes relações:

i) Número de Nusselt local para as superfícies C'D' e E'F'A'B' :

$$\text{Nu}_x = \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_s, \quad (2.92)$$



onde S pode ser a superfície C'D' ou E'F'A'B'.

ii) Número de Nusselt médio para a superfície S:

$$Nu = \frac{1}{S_s} \int_{S_s} Nu_x | dS, \quad (2.93)$$

onde S pode ser a superfície C'D' ou E'F'A'B'.

Os números de Nusselt local e médio, descritos acima, podem ser escritos em função de parâmetros geométricos e térmicos do problema, respectivamente como :

$$Nu_x = Nu_x ( \text{Parâmetros geométricos, Gr, Re, Pr} ), \quad (2.94)$$

$$Nu = Nu ( \text{Parâmetros geométricos, Gr, Re, Pr} ) . \quad (2.95)$$

Sendo que os parâmetros Gr , Re e Pr estão definidos pelas equações (2.73) , (2.74) e (2.77), respectivamente.

$$Nu_x = A \left( \frac{Nu_x Pr}{Re Pr} - \frac{Nu_x Re}{Re Pr} \right) + B \frac{Gr}{Re} + C \frac{Pr}{Pr} + D, \quad (3.1a)$$

onde A, B, C e D são grandezas que podem depender de  $\theta$ ,  $\phi$  ou de parâmetros  $d$ ,  $L$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $C_1$  e  $A_3$ , e são dados constantes as tabelas seguintes.

A tabela 3.1 apresenta os parâmetros para as equações (3.1) e (3.1a) para o problema de transferência de calor de convecção forçada. O mesmo ocorre para as tabelas 3.2 e 3.3, as quais apresentam os parâmetros para problemas de convecção natural e mista, respectivamente.

| $\theta$ | $\phi$ | $d$               | $A_1$ | $A_2$ | $C_1$ | $A_3$ |
|----------|--------|-------------------|-------|-------|-------|-------|
| 0        | 0      | 1                 | 0     | 0     | 0     | 1     |
| 0        | 1      | $\frac{1}{Re Pr}$ | 1     | 0     | 0     | 0     |
| 0        | 1      | $\frac{1}{Re}$    | 1     | 0     | 0     | 0     |

Tabela 3.1 - Parâmetros das equações (3.1) e (3.1a) para convecção forçada

## CAPÍTULO 3

### MODELO NUMÉRICO

#### 3.1 – Forma Geral para as Equações de Conservação

As equações (2.27), (2.28) e (2.29) para convecção forçada; (2.58), (2.59) e (2.60) para convecção natural; (2.89), (2.90) e (2.91) para convecção mista, dadas no capítulo 2, podem ser escritas na seguinte forma geral:

$$\delta \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + Q_\phi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau}, \quad (3.1)$$

onde  $Q_\phi$  é uma função especificada dada por:

$$Q_\phi = A_1 \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \phi}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + B_1 \frac{\partial \theta}{\partial X} + C_1 \frac{\partial \theta}{\partial Y} + D_1 \omega, \quad (3.1a)$$

sendo  $\phi$  uma grandeza que pode representar  $\psi$ ,  $\theta$  ou  $\omega$  os parâmetros  $\delta$ ,  $\lambda$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$  são dados conforme as tabelas seguintes.

A tabela 3.1 apresenta os parâmetros para as equações (3.1) e (3.1a) para o problema de transferência de calor de convecção forçada. O mesmo ocorre para as tabelas 3.2 e 3.3, as quais apresentam os parâmetros para problemas de convecção natural e mista, respectivamente.

| $\phi$   | $\lambda$ | $\delta$                 | $A_1$ | $B_1$ | $C_1$ | $D_1$ |
|----------|-----------|--------------------------|-------|-------|-------|-------|
| $\psi$   | 0         | 1                        | 0     | 0     | 0     | 1     |
| $\theta$ | 1         | $\frac{1}{\text{Re Pr}}$ | 1     | 0     | 0     | 0     |
| $\omega$ | 1         | $\frac{1}{\text{Re}}$    | 1     | 0     | 0     | 0     |

Tabela 3.1 – Parâmetros das equações (3.1) e (3.1a) para convecção forçada .

| $\phi$   | $\lambda$ | $\delta$       | $A_1$ | $B_1$                      | $C_1$                       | $D_1$ |
|----------|-----------|----------------|-------|----------------------------|-----------------------------|-------|
| $\psi$   | 0         | 1              | 0     | 0                          | 0                           | 1     |
| $\theta$ | 1         | $\frac{1}{Pr}$ | 1     | 0                          | 0                           | 0     |
| $\omega$ | 1         | 1              | 1     | $\frac{Gr}{2} \cos \gamma$ | $-\frac{Gr}{2} \sin \gamma$ | 0     |

Tabela 3.2 – Parâmetros das equações (3.1) e (3.1a) para convecção natural .

| $\phi$   | $\lambda$ | $\delta$         | $A_1$ | $B_1$                         | $C_1$                          | $D_1$ |
|----------|-----------|------------------|-------|-------------------------------|--------------------------------|-------|
| $\psi$   | 0         | 1                | 0     | 0                             | 0                              | 1     |
| $\theta$ | 1         | $\frac{1}{RePr}$ | 1     | 0                             | 0                              | 0     |
| $\omega$ | 1         | $\frac{1}{Re}$   | 1     | $\frac{Gr}{Re^2} \cos \gamma$ | $-\frac{Gr}{Re^2} \sin \gamma$ | 0     |

Tabela 3.3 – Parâmetros das equações (3.1) e (3.1a) para convecção mista .

As condições de contorno relativas às equações (2.27) a (2.29) para convecção forçada; (2.58) a (2.60) para convecção natural e (2.89) a (2.91) para convecção mista, dadas no capítulo 2, podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\phi = \phi(X, Y), \quad (3.1b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0. \quad (3.1c)$$

As condições de contorno dadas pelas equações (2.25a) e (2.25b) para convecção forçada, (2.56a) para convecção natural e (2.87a) para convecção mista devem ser tratadas separadamente.

### 3.2 – Método de Elementos Finitos

Muitos problemas de engenharia podem ser modelados através de equações diferenciais parciais, bidimensionais, não lineares e acopladas. A solução analítica destas equações são limitadas, devido à complexidade matemática. Para a solução destes problemas, torna-se conveniente a utilização de métodos numéricos. Dentre os vários métodos numéricos existentes, o método de elementos finitos foi utilizado nesse trabalho juntamente com o método de Galerkin.

O método de elementos finitos é uma ferramenta numérica para obtenção da solução das equações diferenciais do problema em questão. O método é bastante utilizado em diversas áreas da engenharia. Esse método tem como vantagens: 1 – fácil adaptação às linhas de fronteira do domínio em estudo, simplificando a aplicação das condições de contorno; 2 – o método permite variar a quantidade e geometria dos elementos para modelagem do domínio em estudo, podendo concentrar maior número de elementos nas regiões de maiores gradientes das grandezas envolvidas, melhorando a precisão dos resultados, sem o aumento das dificuldades de aplicação do método.

O método de elementos finitos será usado para a solução numérica da equação (3.1), juntamente com as condições de contorno (3.1b) e (3.1c).

A figura 3.1 ilustra, de uma forma genérica, o domínio no plano (X, Y) para a solução da equação (3.1). O domínio é dividido em elementos triangulares e cada triângulo representa um elemento do domínio. Para cada vértice do triângulo, tem-se um nó ou ponto nodal. Dependendo da discretização do domínio, um nó pode pertencer a mais ou menos elementos. Para cada nó, associa-se um valor da grandeza  $\phi$ . Da figura 3.2, os pontos nodais i, j, k, apresentam as coordenadas  $(X_i, Y_i)$ ,  $(X_j, Y_j)$  e  $(X_k, Y_k)$  e as quantidades escalares  $\phi_i$ ,  $\phi_j$  e  $\phi_k$ , respectivamente.

A distribuição da grandeza  $\phi^e$  no elemento varia linearmente, dentro de cada elemento e seu valor escalar é aproximado pela equação linear, como segue:

$$\phi = \phi^e = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y. \quad (3.2)$$

Para cada ponto nodal i, j e k resulta, respectivamente:

$$\phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i, \quad (3.2a)$$

$$\phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j, \quad (3.2b)$$

$$\phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k. \quad (3.2c)$$

Resolvendo o sistema de equações (3.2a), (3.2b) e (3.2c), resulta:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} [(X_j Y_k - X_k Y_j) \phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k) \phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i) \phi_k], \quad (3.3a)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} \left[ (Y_j - Y_k) \phi_i + (Y_k - Y_i) \phi_j + (Y_i - Y_j) \phi_k \right], \quad (3.3b)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} \left[ (X_k - X_j) \phi_i + (X_i - X_k) \phi_j + (X_j - X_i) \phi_k \right], \quad (3.3c)$$

onde  $A$  é a área do elemento triangular dado por:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix}. \quad (3.4)$$

Substituindo as equações (3.3a), (3.3b) e (3.3c) que correspondem, respectivamente, aos valores de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  na equação (3.2), resulta na equação do elemento:

$$\phi = \phi^e = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k, \quad (3.5)$$

onde  $N_i$ ,  $N_j$  e  $N_k$  são as funções de forma dadas a seguir:

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i X + c_i Y), \quad (3.6a)$$

$$\text{com } a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \quad b_i = Y_j - Y_k, \quad c_i = X_k - X_j, \quad (3.6b)$$

$$N_j = \frac{1}{2A} (a_j + b_j X + c_j Y), \quad (3.6c)$$

$$\text{com } a_j = X_k Y_i - Y_i X_k, \quad b_j = Y_k - Y_i, \quad c_j = X_i - X_k, \quad (3.6d)$$

$$N_k = \frac{1}{2A} (a_k + b_k X + c_k Y), \quad (3.6e)$$

$$\text{com } a_k = X_i Y_j - X_j Y_i, \quad b_k = Y_i - Y_j, \quad c_k = X_j - X_i. \quad (3.6f)$$

A equação (3.5) pode ser escrita na seguinte forma matricial :

$$\phi = \phi^e(X, Y) = [N^e] \{\phi\}^e = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix}, \quad (3.7)$$

onde se considera que:

$$\phi^e = 0, \text{ para fora do elemento;}$$

$$\phi^e = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k, \text{ dentro do elemento e no contorno do elemento.}$$

Como as funções de forma  $N_i$ ,  $N_j$  e  $N_k$  são funções lineares em relação às variáveis  $X$  e  $Y$ , os gradientes nas direções,  $X$  ou  $Y$ , serão constantes em cada elemento.

Os gradientes nas direções  $X$  e  $Y$  são, respectivamente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial N_i}{\partial X} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial X} \phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial X} \phi_k, \quad (3.8a)$$

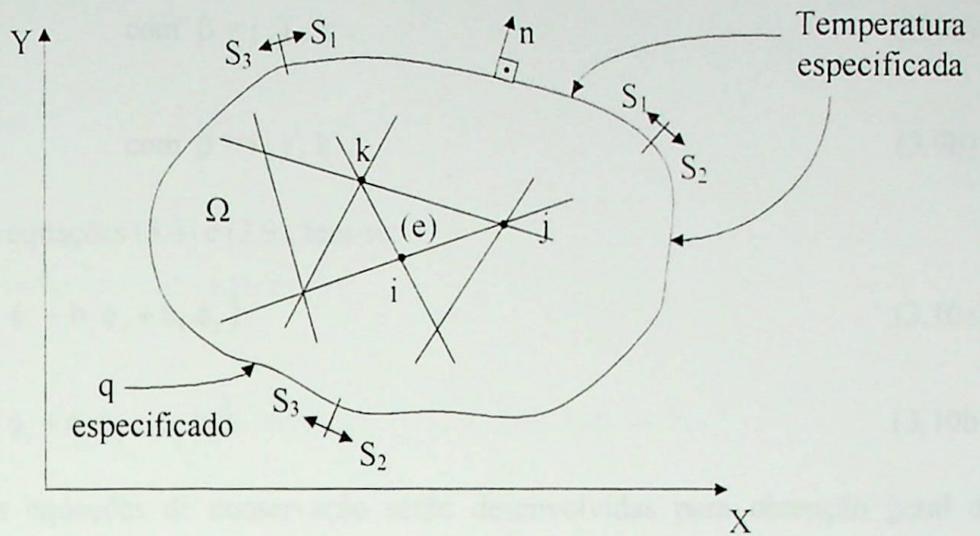


Figura 3.1 – Domínio para a solução das equações.

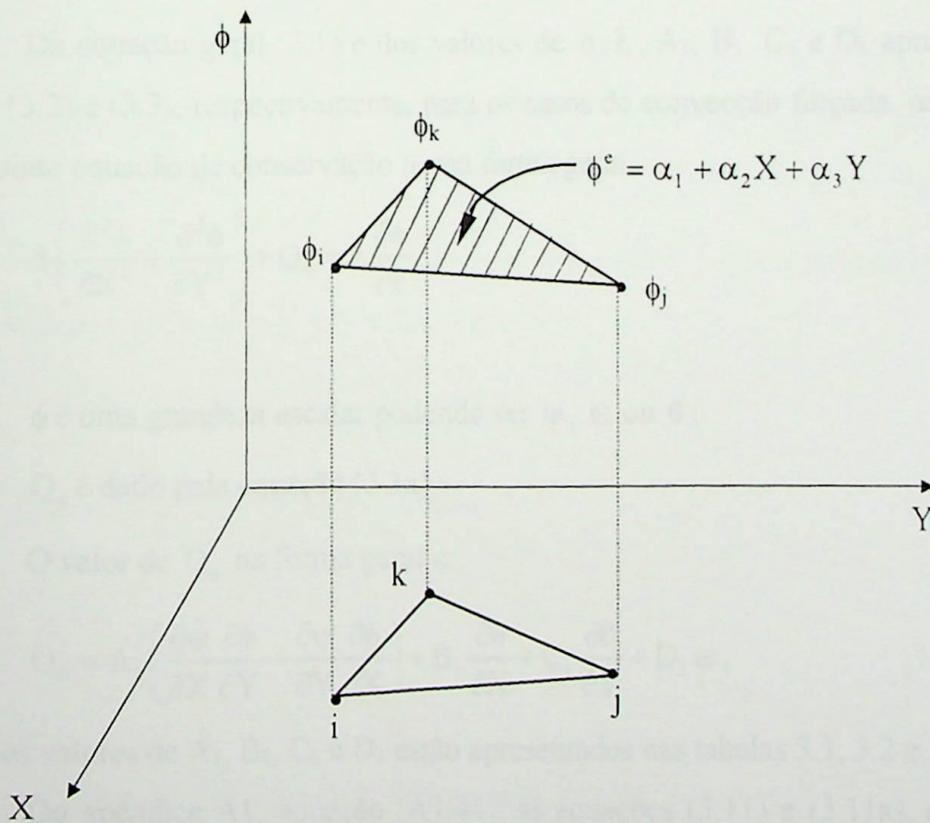


Figura 3.2 - Elemento triangular e função de interpolação linear.

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{\partial N_i}{\partial Y} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial Y} \phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial Y} \phi_k. \quad (3.8b)$$

Das equações (3.6), resulta em:

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial X} = \frac{b_\beta}{2A} \quad \text{com } \beta = i, j, k. \quad (3.9a)$$

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial Y} = \frac{c_\beta}{2A} \quad \text{com } \beta = i, j, k. \quad (3.9b)$$

Portanto das equações (3.8) e (3.9), tem-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{1}{2A} (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k), \quad (3.10a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{1}{2A} (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k). \quad (3.10b)$$

A seguir, as equações de conservação serão desenvolvidas para obtenção geral das matrizes para os elementos, utilizando o método de elementos finitos. Após essa etapa, o programa computacional será implementado para os casos estudados de convecção forçada, natural e mista.

### 3.3 – Obtenção Geral das Matrizes para os Elementos

Da equação geral (3.1) e dos valores de  $\delta, \lambda, A_1, B_1, C_1$  e  $D_1$  apresentados nas tabelas (3.1), (3.2) e (3.3), respectivamente, para os casos de convecção forçada, natural e mista, tem-se a seguinte equação de conservação numa forma geral:

$$\delta \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + Q_\phi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau}, \quad (3.11)$$

onde:

$\phi$  é uma grandeza escalar podendo ser  $\psi, \omega$  ou  $\theta$ ;

$Q_\phi$  é dado pela equação (3.1a).

O valor de  $Q_\phi$  na forma geral é:

$$Q_\phi = A_1 \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \phi}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + B_1 \frac{\partial \theta}{\partial X} + C_1 \frac{\partial \theta}{\partial Y} + D_1 \omega, \quad (3.11a)$$

onde os valores de  $A_1, B_1, C_1$  e  $D_1$  estão apresentados nas tabelas 3.1, 3.2 e 3.3.

Do apêndice A1, equação (A1.44), as equações (3.11) e (3.11a), em uma forma geral, podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\left[ [K_\phi]^e + \frac{1}{\Delta \tau} [C]^e \right] \{ \phi^e \}_{N+1} = \frac{1}{\Delta \tau} [C]^e \{ \phi^e \}_N - \{ R_\phi \}^e. \quad (3.12)$$

De acordo com as equações (A1.36), (A1.37), (A1.38) e (A1.39) tem-se:

$$[C]^e = \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV, \quad (3.12a)$$

$$[K_\phi]^e = \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV, \quad (3.12b)$$

$$\{R_\phi\}^e = - \int_{V^e} [N^e]^T Q_\phi^e dV - \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA. \quad (3.12c)$$

### 3.3.1 – Desenvolvimento da matriz $[C]^e$

Da equação (3.12a) a matriz do elemento  $[C]^e$  é dada como sendo:

$$[C]^e = \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV. \quad (3.13)$$

A matriz de forma para um elemento triangular é dada pela equação (3.7), como:

$$[N^e] = [N_i \quad N_j \quad N_k], \quad (3.14)$$

onde  $N_i$ ,  $N_j$  e  $N_k$  são as funções de forma dadas pelas equações (3.6a), (3.6c) e (3.6e).

Considera-se o elemento com um espessura  $t$ . Portanto,  $dV = t dA$ . Logo, das equações (3.13) e (3.14) tem-se:

$$[C]^e = \int_{A^e} \lambda t \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} dA = \lambda t \int_{A^e} \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} dA. \quad (3.15)$$

Resolvendo os produtos das matrizes da equação (3.15), e utilizando a equação (7.34) da referência de Zienkiewicz (1971), dada por:

$$\int_{A^e} N_i^a N_j^b N_k^c dA = \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!} 2A. \quad (3.16)$$

Das equações (3.16) e (3.15), vem:

$$[C]^e = \frac{\lambda t A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

onde  $A$  é a área do elemento dada pela equação (3.4).

### 3.3.2 – Desenvolvimento da matriz $[K_\phi]^e$

Da equação (3.12b) a matriz do elemento  $[K_\phi]^e$  é dada como sendo:

$$[K_\phi]^e = \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV. \quad (3.18)$$

A matriz das derivadas das funções de forma para o elemento é dada pela equação (A1.23) como:

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} & \frac{\partial N_j}{\partial X} & \frac{\partial N_k}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} & \frac{\partial N_j}{\partial Y} & \frac{\partial N_k}{\partial Y} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Substituindo (3.9) em (3.19), resulta:

$$[B^e] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

A matriz transposta  $[B^e]^T$  de (3.20) é:

$$[B^e]^T = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Substituindo (3.20) e (3.21) em (3.18), vem:

$$\begin{aligned} [K_\phi]^e &= \int_{V^e} \frac{\delta}{4A^2} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} dV = \\ &= \frac{\delta}{4A^2} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \int_{V^e} dV. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Considera-se o elemento com uma espessura  $t$ . Portanto,  $dV = t dA$ . Assim, tem-se que:

$$\int_{V^e} dV = \int_{S^e} t dA = tA. \quad (3.23)$$

Substituindo (3.23) em (3.22) vem:

$$[K_\phi]^e = \frac{\delta t}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

### 3.3.3 – Desenvolvimento da matriz $\{R_\phi\}^e$

Para o presente trabalho, em todos os casos, seja de convecção forçada, natural ou mista, nas superfícies onde o gradiente de  $\phi$  é conhecido, tem-se  $q = \partial\phi/\partial n = 0$ . Logo, a equação (3.12c) reduz-se à seguinte:

$$\{R_\phi\}^e = - \int_{V^e} [N^e]^T Q_\phi^e dV, \quad (3.25)$$

sendo  $Q_\phi^e$  dado pela equação (3.11a) e  $dV = t dA$ , a equação (3.25), torna-se:

$$\begin{aligned} \{R_\phi\}^e &= - \int_{A^e} \left[ A_1 \left( \frac{\partial\psi}{\partial X} \frac{\partial\phi}{\partial Y} - \frac{\partial\psi}{\partial Y} \frac{\partial\phi}{\partial X} \right) + B_1 \frac{\partial\theta}{\partial X} + C_1 \frac{\partial\theta}{\partial Y} + D_1 \omega \right] [N^e]^T t dA = \\ &= - \int_{A^e} t A_1 \left( \frac{\partial\psi}{\partial X} \frac{\partial\phi}{\partial Y} - \frac{\partial\psi}{\partial Y} \frac{\partial\phi}{\partial X} \right) [N^e]^T dA - \int_{A^e} t B_1 \frac{\partial\theta}{\partial X} [N^e]^T dA \\ &\quad - \int_{A^e} t C_1 \frac{\partial\theta}{\partial Y} [N^e]^T dA - \int_{A^e} t D_1 [N^e]^T \omega dA. \end{aligned} \quad (3.26)$$

A equação (3.26) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{R_\phi\}^e = -(\{R_\phi\}_1^e + \{R_\phi\}_2^e + \{R_\phi\}_3^e + \{R_\phi\}_4^e). \quad (3.27)$$

#### i-) Cálculo de $\{R_\phi\}_1^e$

Da equação (3.26), vem que:

$$\{R_\phi\}_1^e = \int_{A^e} t A_1 \left( \frac{\partial\psi}{\partial X} \frac{\partial\phi}{\partial Y} - \frac{\partial\psi}{\partial Y} \frac{\partial\phi}{\partial X} \right) [N^e]^T dA. \quad (3.28)$$

Define-se  $E_1$ , como:

$$E_1 = \frac{\partial\psi^e}{\partial X} \frac{\partial\phi^e}{\partial Y} - \frac{\partial\psi^e}{\partial Y} \frac{\partial\phi^e}{\partial X}. \quad (3.29)$$

As funções  $\psi^e$  e  $\phi^e$  do elemento podem ser assim escritas:

$$\psi^e = [N^e] \{\psi^e\}, \quad (3.30)$$

$$\phi^e = [N^e] \{\phi^e\}. \quad (3.31)$$

Das equações (3.9a) e (3.9b), resulta que:

$$\frac{\partial\psi^e}{\partial X} = \frac{1}{2A} (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k), \quad (3.32a)$$

$$\frac{\partial\psi^e}{\partial Y} = \frac{1}{2A} (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k), \quad (3.32b)$$

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial X} = \frac{1}{2A} (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k), \quad (3.32c)$$

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial Y} = \frac{1}{2A} (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k). \quad (3.32d)$$

Substituindo as equações (3.32) em (3.29) e rearranjando vem:

$$E_1 = \frac{1}{4A^2} \left[ (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k) (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) - (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k) (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) \right] \quad (3.33)$$

Da equação (3.28), observando-se que  $E_1$  é constante dentro de cada elemento, vem que:

$$\{R_\phi\}_i^e = t A_1 E_1 \int_{A^e} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dA. \quad (3.34)$$

Das equações (3.16) e (3.34), vem que:

$$\{R_\phi\}_i^e = \frac{t A_1 E_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.35)$$

Substituindo (3.33) em (3.35) vem:

$$\{R_\phi\}_i^e = \left[ \frac{t A_1}{12 A} (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k) (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) - \frac{t A_1}{12 A} (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k) (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) \right] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = A_1 F_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.36)$$

onde:

$$F_1 = \frac{t}{12 A} \left[ (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k) (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) - (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k) (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) \right] \quad (3.37)$$

## ii-) Cálculo de $\{R_\phi\}_2^e$

Da equação (3.26), vem que:

$$\{R_\phi\}_2^e = \int_{A^e} t B_1 \frac{\partial \theta}{\partial X} [N^e]^T dA, \quad (3.38)$$

onde o termo  $G_1$  da equação (3.38), pode ser escrito para o elemento da seguinte forma:



$$G_1 = \frac{\partial \theta^c}{\partial X}. \quad (3.39)$$

A função  $\theta^c$  do elemento pode ser assim escrita:

$$\theta^c = [N^c] \{ \theta^c \}. \quad (3.40)$$

Da equação (3.10a) resulta que:

$$\frac{\partial \theta^c}{\partial X} = \frac{1}{2A} (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k). \quad (3.41)$$

Substituindo a equação (3.41) em (3.39) vem:

$$G_1 = \frac{1}{2A} (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k). \quad (3.42)$$

Da equação (3.38), observando que  $G_1$  é constante dentro de cada elemento, vem que:

$$\{R_\phi\}_2^c = t B_1 G_1 \int_{A^c} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} dA. \quad (3.43)$$

Das equações (3.16) e (3.43), vem que:

$$\{R_\phi\}_2^c = \frac{t B_1 G_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.44)$$

Substituindo (3.42) em (3.44), vem:

$$\{R_\phi\}_2^c = \frac{t B_1}{6A} (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = B_1 H_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.45)$$

onde:

$$H_1 = \frac{t}{6A} (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k). \quad (3.46)$$

### iii-) Cálculo de $\{R_\phi\}_3^c$

De uma maneira análoga ao cálculo de  $\{R_\phi\}_2$ , pode-se mostrar que o valor da matriz

$\{R_\phi\}_3^c$  é:

$$\{R_\phi\}_3^c = \frac{tC_1}{6A} (c_i\theta_i + c_j\theta_j + c_k\theta_k) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = C_1 I_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.47)$$

onde:

$$I_1 = \frac{t}{6A} (c_i\theta_i + c_j\theta_j + c_k\theta_k). \quad (3.48)$$

#### iv) Cálculo de $\{R_\phi\}_4^c$

Da equação (3.26), vem que:

$$\{R_\phi\}_4^c = \int_{A^e} tD_1 [N^c]^T \omega \, dA = \int_{A^e} tD_1 [N^c]^T [N^c] \{\omega^c\} \, dA, \quad (3.49)$$

onde  $\omega$  na equação (3.49) é:

$$\omega = [N^c] \{\omega^c\}. \quad (3.50)$$

A equação (3.49) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \{R_\phi\}_4^c &= \int_{A^e} tD_1 \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} \, dA = \\ &= tD_1 \int_{A^e} \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} \, dA. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Das equações (3.51) e (3.16), resulta:

$$\{R_\phi\}_4^c = \frac{tD_1 A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} = D_1 J_1 \begin{Bmatrix} (2\omega_i + \omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + 2\omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + \omega_j + 2\omega_k) \end{Bmatrix}, \quad (3.52)$$

onde:

$$J_1 = \frac{tA}{12}. \quad (3.53)$$

Substituindo os resultados obtidos pelas equações (3.36), (3.45), (3.47) e (3.52) em (3.27), resulta em:

$$\{R_\phi\}_4^c = -(A_1 F_1 + B_1 H_1 + C_1 I_1) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - D_1 J_1 \begin{Bmatrix} (2\omega_i + \omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + 2\omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + \omega_j + 2\omega_k) \end{Bmatrix}, \quad (3.54)$$

onde  $F_1$ ,  $H_1$ ,  $I_1$  e  $J_1$  são dadas pelas equações (3.37), (3.46), (3.48) e (3.53), respectivamente. Os valores de  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$  são apresentados nas tabelas 3.1, 3.2 e 3.3, de acordo com o tipo de convecção.

Os resultados obtidos para as equações (3.11) e (3.11a), de uma forma geral e de acordo com as tabelas 3.1, 3.2 e 3.3, respectivamente, para problemas de convecção forçada, natural e mista, podem ser resumidos e são apresentados a seguir. Da equação (3.12), tem-se:

$$\left[ [K_\phi]^c + \frac{1}{\Delta\tau} [C]^c \right] \{ \phi^c \}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau} [C]^c \{ \phi^c \}_N - \{ R_\phi \}^c, \quad (3.55)$$

onde, da equação (3.24), (3.17) e (3.54) vem, respectivamente, que:

$$[K_\phi]^c = \frac{\delta t}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

$$[C]^c = \frac{\lambda t A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

$$\{ R_\phi \}^c = -(A_1 F_1 + B_1 H_1 + C_1 I_1) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - D_1 J_1 \begin{Bmatrix} (2\omega_i + \omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + 2\omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + \omega_j + 2\omega_k) \end{Bmatrix}. \quad (3.58)$$

A seguir, as equações gerais (3.55), (3.56), (3.57) e (3.58), obtidas para uma grandeza  $\phi$  qualquer, serão aplicadas para o caso de convecção forçada. Assim, serão obtidas as formas matriciais para os elementos em termos da função corrente ( $\psi$ ), temperatura adimensional ( $\theta$ ) e vorticidade ( $\omega$ ).

### 3.4 – Obtenção das Matrizes para os Elementos para o Caso de Convecção Forçada

#### 3.4.1 – Forma Matricial para os Elementos em Termos da Função Corrente

Da tabela 3.1 para  $\phi = \psi$ , tem-se:  $Q_\phi = Q_\psi$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\delta = 1$ ,  $A_1 = 0$ ,  $B_1 = 0$ ,  $C_1 = 0$  e  $D_1 = 1$ . Como o problema estudado é bidimensional, adota-se uma espessura unitária, isto é,  $t = 1$ . Substituindo esses valores nas equações (3.1), (3.1a), (3.55), (3.55), (3.57) e em (3.58) vem que:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + Q_\psi = 0. \quad (3.59)$$

onde:

$$Q_\psi = \omega. \quad (3.59a)$$

Substituindo  $\phi = \psi$  e  $\lambda = 0$  nas equações (3.55) e (3.57), vem:

$$[K_\psi]^c \{ \psi^c \} = -\{R_\psi\}^c. \quad (3.60)$$

Fazendo  $\phi = \psi$  e  $\delta = 1$  na equação (3.56), resulta em:

$$[K_\phi]^c = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

$$\{ \psi \}^c = \begin{Bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \end{Bmatrix}. \quad (3.62)$$

Fazendo  $\phi = \psi$ ,  $A_1 = 0$ ,  $B_1 = 0$ ,  $C_1 = 0$  e  $D_1 = 1$  na equação (3.58), resulta em:

$$\{R_\psi\}^c = -J_1 \begin{Bmatrix} (2\omega_i + \omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + 2\omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + \omega_j + 2\omega_k) \end{Bmatrix}, \quad (3.63)$$

onde  $J_1$  é dado pela equação (3.53), como sendo:

$$J_1 = \frac{A}{12}. \quad (3.64)$$

### 3.4.2 – Forma Matricial para os Elementos em Termos de Temperatura Adimensional

Da tabela 3.1 para  $\phi = \theta$  tem-se:  $Q_\phi = Q_\theta$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\delta = 1/(\text{RePr})$ ,  $A_1 = 1$ ,  $B_1 = 0$ ,  $C_1 = 0$  e  $D_1 = 0$ . Substituindo esses valores nas equações (3.1), (3.1a), (3.55), (3.56), (3.57) e em (3.58) vem que:

$$\frac{1}{\text{RePr}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + Q_\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (3.65)$$

onde:

$$Q_\theta = \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right). \quad (3.65a)$$

Substituindo  $\phi = \psi$  e  $\lambda = 1$  nas equações (3.55) e (3.57), vem:

$$\left[ [K_\theta]^e + \frac{1}{\Delta\tau} [C]^e \right] \{ \theta^e \}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau} [C]^e \{ \theta^e \}_N - \{ R_\theta \}^e. \quad (3.66)$$

$$[C]^e = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Fazendo  $\phi = \theta$  e  $\delta = 1/(\text{RePr})$  na equação (3.56), resulta em:

$$[K_\theta]^e = \frac{1}{4A \text{RePr}} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

Fazendo  $\phi = \theta$ ,  $A_1 = 1$ ,  $B_1 = 0$ ,  $C_1 = 0$  e  $D_1 = 0$  na equação (3.58) resulta em:

$$\{ R_\theta \}^e = -F_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.69)$$

onde  $F_1$  é dado pela equação (3.37), como sendo:

$$F_1 = \frac{1}{12A} \left[ (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k) (c_i \theta_i + c_j \theta_j + c_k \theta_k) - (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k) (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k) \right]. \quad (3.69a)$$

### 3.4.3 – Forma Matricial para os Elementos em Termos da Vorticidade

Da tabela 3.1 para  $\phi = \omega$  tem-se:  $Q_\phi = Q_\omega$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\delta = 1/\text{Re}$ ,  $A_1 = 1$ ,  $B_1 = 0$ ,  $C_1 = 0$  e  $D_1 = 0$ . Substituindo esses valores nas equações (3.1), (3.1a), (3.55), (3.56), (3.57) e em (3.58) vem que:

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + Q_\omega = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}, \quad (3.70)$$

onde:

$$Q_\omega = \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X}. \quad (3.70a)$$

Substituindo  $\phi = \omega$  e  $\lambda = 1$  nas equações (3.55) e (3.57), vem:

$$\left[ [K_\omega]^e + \frac{1}{\Delta\tau} [C]^e \right] \{ \omega^e \}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau} [C]^e \{ \omega^e \}_N - \{ R_\omega \}^e. \quad (3.71)$$

$$[C]^e = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Fazendo  $\phi = \omega$  e  $\delta = 1/Re$  na equação (3.56), resulta em:

$$[K_\omega]^e = \frac{1}{4A Re} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

Fazendo  $\phi = \omega$ ,  $A_1 = 1$ ,  $B_1 = 0$ ,  $C_1 = 0$  e  $D_1 = 0$  na equação (3.58) resulta em:

$$\{R_\omega\}^e = -F_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.74)$$

onde  $F_1$  é dado pela equação (3.37), como sendo:

$$F_1 = \frac{1}{12A} \left[ (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k)(c_i \omega_i + c_j \omega_j + c_k \omega_k) - (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k)(b_i \omega_i + b_j \omega_j + b_k \omega_k) \right]. \quad (3.74a)$$

O mesmo procedimento do item 3.4, para o caso de convecção forçada, se aplica também para os casos de convecção natural e mista.

### 3.5 – Algoritmo do Programa Computacional

No item 3.3 foi obtida a equação geral (3.12), para os elementos, em função da grandeza  $\phi$ . Nos itens 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3 foram desenvolvidas os termos da equação geral (3.12), em função dos diversos parâmetros apresentados nas tabelas 3.1, 3.2 e 3.3. A grandeza  $\phi$  da equação (3.12) pode representar, como já visto no item 3.1, a função corrente  $\psi$ , a temperatura adimensional  $\theta$  ou a vorticidade  $\omega$ . A equação (3.12) pode representar todos os casos estudados de convecção forçada, natural ou mista. O apêndice A1 mostra como as matrizes globais podem ser formadas a partir da equação geral do elemento (3.12), em função da grandeza  $\phi$ . Reescrevendo a equação (3.12) para os elementos, em função de  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ , respectivamente, resulta nas seguintes matrizes globais:

$$[K_\psi] \{ \psi \} = - \{ R_\psi \}, \quad (3.75)$$

$$\left[ [K_\theta] + \frac{1}{\Delta\tau} [C] \right] \{ \theta \}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau} [C] \{ \theta \}_N - \{ R_\theta \}, \quad (3.76)$$

$$\left[ [K_\omega] + \frac{1}{\Delta\tau} [C] \right] \{ \omega \}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau} [C] \{ \omega \}_N - \{ R_\omega \}. \quad (3.77)$$

As equações (3.75), (3.76) e (3.77) podem ser escritas numa forma compacta, respectivamente, resultando em:

$$\left[ \tilde{K}_\psi \right] \left\{ \psi \right\} = \left\{ \tilde{R}_\psi \right\}, \quad (3.75a)$$

$$\left[ \tilde{K}_\theta \right] \left\{ \theta \right\} = \left\{ \tilde{R}_\theta \right\}, \quad (3.76a)$$

$$\left[ \tilde{K}_\omega \right] \left\{ \omega \right\} = \left\{ \tilde{R}_\omega \right\}. \quad (3.77a)$$

As equações (3.75a), (3.76a) e (3.77a) formam um sistema de equações lineares acopladas. Para resolver estas equações foi desenvolvido um programa computacional, para cada tipo de convecção, com o objetivo de obter as distribuições das funções  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\omega$ , calcular o número de Nusselt médio em função dos parâmetros geométricos e térmicos e ainda, calcular a temperatura média do fluido.

As matrizes  $\left[ \tilde{K}_\psi \right]$ ,  $\left[ \tilde{K}_\theta \right]$  e  $\left[ \tilde{K}_\omega \right]$  tem seus coeficientes mantidos constantes, pois o incremento de tempo  $\Delta\tau$  será um parâmetro que assume um valor fixo para cada iteração. Essas matrizes são simétricas e de banda.

Os coeficientes de cada matriz que compõem a diagonal principal e as diagonais superiores não nulas, são armazenadas na forma de uma matriz coluna. Assim, é possível reduzir a área de armazenamento e o tempo de cálculo computacional.

As matrizes  $\{ \psi \}$ ,  $\{ \theta \}$  e  $\{ \omega \}$  são as incógnitas e devem ser calculadas para cada tempo  $\tau$ .

As matrizes  $\left\{ \tilde{R}_\psi \right\}$ ,  $\left\{ \tilde{R}_\theta \right\}$  e  $\left\{ \tilde{R}_\omega \right\}$  possuem coeficientes que são dependentes da vorticidade  $\omega$ , função corrente  $\psi$  ou da temperatura adimensional  $\theta$ . Os coeficientes  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ , respectivamente, das matrizes  $\left\{ \tilde{R}_\psi \right\}$ ,  $\left\{ \tilde{R}_\theta \right\}$  e  $\left\{ \tilde{R}_\omega \right\}$  são avaliados para o tempo  $\tau - \Delta\tau$ .

Na figura 3.3 tem-se o fluxograma do programa computacional em uma forma geral, para os problemas de convecção forçada, natural ou mista. A seguir será descrito todos os passos e alguns detalhes de cada bloco do fluxograma.

#### 1-) Leitura de dados ( bloco 1 )

Os dados lidos inicialmente no programa computacional são:

a-) número de pontos da malha na direção X;

b-) número de pontos da malha na direção Y;

c-) razão de aspecto;

d-) número de Prandtl;

e-) número de Grashof;

f-) número de Reynolds;

g-) intervalo de tempo;

h-) número máximo de iteração;

i-) número dos pontos da malha referente à posição do corpo quente interno ( convecção natural ) ou à posição de entrada e saída do fluido na cavidade semi-aberta ( convecção mista ).

#### 2-) Geração de malha ( bloco 2 )

O programa computacional possui uma subrotina para geração de malha uniforme com elementos triangulares. Esta subrotina calcula as coordenadas dos pontos nodais, a topologia dos elementos, os números dos elementos e o número de elementos. A geração de malha não uniforme foi realizada com o auxílio do software Easymesh.

#### 3-) Leitura das condições iniciais ( bloco 3 )

Inicialmente, a função corrente  $\psi$ , a temperatura adimensional  $\theta$ , e a vorticidade  $\omega$  assumem o valor zero em todo o domínio, conforme descrito nas equações (2.26), (2.57) e (2.88), respectivamente, para os casos de convecção forçada, natural e mista.

#### 4-) Leitura das condições de contorno ( bloco 4 )

Os dados impostos para as condições de contorno são:

a-) numeração dos pontos nodais com temperaturas especificadas;

b-) valores das temperaturas especificadas para os pontos nodais correspondentes às superfícies fria e quente;

c-) número de pontos nodais com temperaturas especificadas;

d-) numeração dos pontos nodais sobre o contorno;

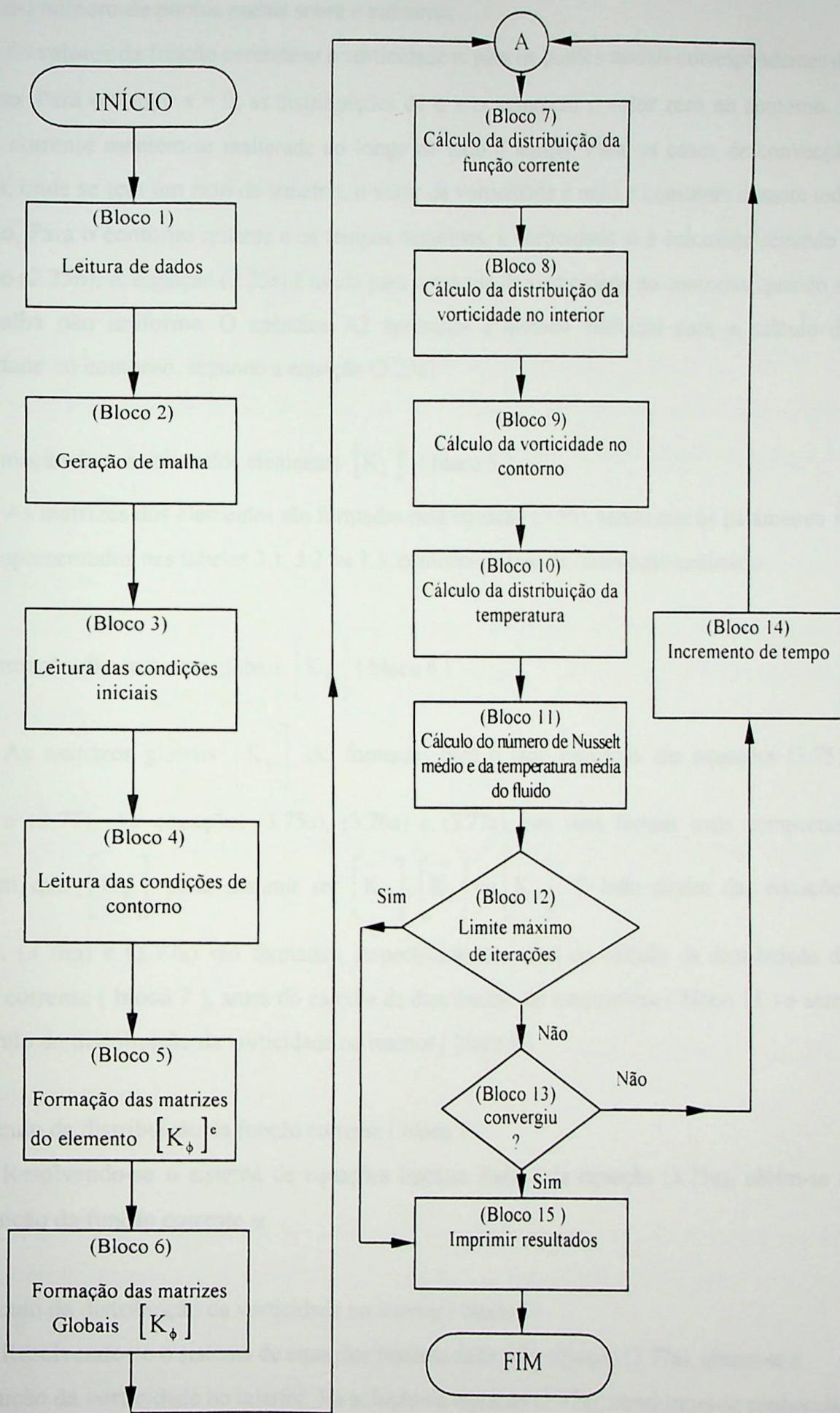


Figura 3.3 - Fluxograma geral do programa computacional.

e-) número de pontos nodais sobre o contorno;

f-) valores da função corrente  $\psi$  e vorticidade  $\omega$  para os pontos nodais correspondentes do contorno. Para o tempo  $\tau = 0$ , as distribuições de  $\psi$  e  $\omega$  assumem o valor zero no contorno. A função corrente mantém-se inalterada ao longo de todo o tempo. Para os casos de convecção forçada, onde se tem um eixo de simetria, o valor da vorticidade é nulo e constante durante todo o tempo. Para o contorno restante e os tempos seguintes, a vorticidade  $\omega$  é calculada segundo a equação (2.25b). A equação (2.25a) é usada para o cálculo da vorticidade no contorno, quando se tem malha não uniforme. O apêndice A2 apresenta o método matricial para o cálculo da vorticidade no contorno, segundo a equação (2.25a).

### 5-) Formação das matrizes dos elementos $[K_\phi]^e$ ( bloco 5 )

As matrizes dos elementos são formadas pela equação (3.56), sendo que os parâmetros  $\delta$  e  $t$  são apresentados nas tabelas 3.1, 3.2 ou 3.3, conforme o tipo de convecção analisado.

### 6-) Formação das matrizes globais $[K_\phi]$ ( bloco 6 )

As matrizes globais  $[K_\phi]$  são formadas para o lado esquerdo das equações (3.75), (3.76) e (3.77). As equações (3.75a), (3.76a) e (3.77a), nas suas formas mais compactas, mostram que  $[K_\phi]$  pode assumir ser  $[\tilde{K}_\psi]$ ,  $[\tilde{K}_\theta]$  ou  $[\tilde{K}_\omega]$ . O lado direito das equações (3.75a), (3.76a) e (3.77a) são formadas, respectivamente, antes do cálculo da distribuição da função corrente ( bloco 7 ), antes do cálculo da distribuição da temperatura ( bloco 11 ) e antes do cálculo da distribuição da vorticidade no interior ( bloco 9 ).

### 7-) Cálculo da distribuição da função corrente ( bloco 7 )

Resolvendo-se o sistema de equações lineares dado pela equação (3.75a), obtém-se a distribuição da função corrente  $\psi$ .

### 8-) Cálculo da distribuição da vorticidade no interior ( bloco 8 )

Resolvendo-se o sistema de equações lineares dada pela equação (3.77a), obtém-se a distribuição da vorticidade no interior. Na solução da equação (3.77a), consideram-se conhecidas as vorticidades nos pontos nodais do contorno.

## 9-) Cálculo da vorticidade no contorno ( bloco 9 )

Das equações (2.25b) , (2.56a) e (2.87a) obtém-se a vorticidade do fluido nos pontos nodais do contorno.

## 10-) Cálculo da distribuição da temperatura adimensional ( bloco 10 )

Resolvendo-se o sistema de equações lineares dada pela equação (3.76a), obtém-se a distribuição da temperatura adimensional  $\theta$ .

## 11-) Cálculo do número de Nusselt médio ou da temperatura média do fluido ( bloco 11 )

Aplicando as equações (2.32), (2.62) e (2.93), respectivamente, para convecção forçada, natural e mista, é possível determinar os números de Nusselt médios para as superfícies  $S_i$  (  $i = 1$  ou  $2$  ).

## 12-) Verificação do limite máximo de iteração ( bloco 12 )

O programa computacional verifica se o número de iterações atingiu o número máximo de iteração, valor este fornecido na leitura de dados ( bloco 1 ). Quando a igualdade é atingida o processo de cálculo é interrompido.

## 13- ) Verificação de convergência ( bloco 13 )

Conclui-se que houve convergência ou que se atingiu o regime permanente, quando o seguinte critério é estabelecido:

$$\sum_{i=1}^n \left[ Nu^{\tau} - Nu^{\tau - \Delta\tau} \right] \leq 10^{-4} , \quad (3.78)$$

onde a somatória representa a soma dos  $n$  últimos valores de iteração. Na maioria dos casos estudados, adotou-se  $100 \leq n \leq 200$ .

## 14-) Incremento de tempo ( bloco 14 )

Se o critério dado na equação (3.78) for obedecido, o processo de cálculo é interrompido. Caso contrário, o tempo é incrementado e o processo de cálculo é iniciado a partir de A ( ver figura 3.3 – fluxograma geral do programa computacional ).

## 15-) Imprimir resultados ( bloco 15 )

Os resultados para as distribuições de  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ , bem como os números de Nusselt médio e a temperatura média do fluido podem ser impressos para cada iteração, ou seja, para cada tempo  $\tau$ .

Os cálculos apresentados neste trabalho foram realizados num microcomputador PC PENTIUM 233MHz MMX, com 32 Mb de memória EDO-RAM, usando o compilador FORTRAN PowerStation 4.0 .

No capítulo seguinte serão apresentados os testes de comparações do programa computacional para a cavidade retangular fechada e para placas planas paralelas. Os resultados serão comparados com os encontrados na literatura. Após a avaliação do programa computacional, serão obtidos os resultados para escoamento de fluido em cavidade retangular fechada com um corpo quente colocado no seu interior e para escoamento em cavidades retangulares semi-abertas.

## 4.2 – Validação dos Modelos Numéricos

### 4.2.1 – Convecção Forçada

Nesta seção, os resultados dos casos para convecção forçada entre placas planas paralelas são comparados com os resultados de Ghani e Dow (1987), Lytle (1989) e Lytle et al. (1995). Para esses casos foram considerados dois casos. Caso 1: escoamento desenvolvido bidimensionalmente e laminarmente em duas placas paralelas aquecidas com temperaturas diferentes das placas, sendo a placa superior uma parede adiabática quente com temperatura constante  $\theta = 1$  e a placa inferior, uma parede adiabática fria com temperatura constante  $\theta = 0$ . Caso 2: escoamento laminar desenvolvido bidimensionalmente e laminarmente em duas placas paralelas aquecidas com temperaturas iguais em

## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS

#### 4.1 – Introdução

Neste capítulo apresentam-se os resultados referentes aos casos de convecção forçada, natural e mista, obtidos pelos programas computacionais desenvolvidos, onde se utilizou o método de elementos finitos para a solução das equações de conservação.

Serão apresentadas as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$ , da função corrente  $\psi$ , os valores do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$ , em função dos seus respectivos parâmetros térmicos e geométricos e a temperatura média do fluido, dependendo do tipo de convecção.

Primeiramente, foram realizados vários testes computacionais para algumas geometrias clássicas. Uma delas foi para o caso de convecção forçada entre placas planas paralelas. Em seguida, fez-se também a validação do programa computacional para cavidade de geometria quadrada, para o caso de convecção natural. Assim, pode-se comparar os resultados com aqueles publicados na literatura. Depois disto, os programas computacionais são adaptados para as geometrias do trabalho presente obtendo-se assim os resultados para os casos de convecção forçada, natural e mista.

#### 4.2 – Validação dos Modelos Numéricos

##### 4.2.1 – Convecção Forçada

Nesta seção, os resultados dos testes para convecção forçada entre placas planas paralelas são comparados com os resultados de Bhatti e Shah (1987), Ozisik (1990) e Ingham et al. (1995). Dois casos testes foram considerados neste trabalho. Caso 1: escoamento desenvolvido hidrodinamicamente e termicamente em desenvolvimento entre placas planas paralelas com temperaturas diferentes das placas, sendo a placa superior uma superfície isotérmica quente com temperatura constante  $\theta = 1$  e a placa inferior, uma superfície isotérmica fria com temperatura constante  $\theta = 0$ . Caso 2: teremos também escoamento desenvolvido hidrodinamicamente e termicamente em desenvolvimento entre placas planas paralelas com temperaturas iguais nas

placas, ou seja, as duas placas com superfície isotérmica quente com temperatura constante. Tanto para o Caso 1, como para o Caso 2, o número de Prandtl  $Pr$  será  $Pr = 7,02$ .

Com o objetivo de facilitar as comparações dos resultados obtidos pelo presente trabalho com os resultados encontrados na literatura, são introduzidas as seguintes variáveis adimensionais, segundo a referência de Ingham et al. (1995).

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\nu}{a^2} t, \quad X = \frac{x}{a Re}, \quad Y = \frac{y}{a}, \quad U = \frac{u}{U_0}, \\ V &= \frac{v}{U_0}, \quad P = \frac{(p - p_c + g\rho_c y)}{\rho_c U_0^2}, \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Seguindo o mesmo procedimento descrito no item 2.1.2 do capítulo 2, para o problema de convecção forçada, e introduzindo as variáveis adimensionais (4.1), utilizadas por Ingham et al. (1995), obtém-se as seguintes equações de conservação em termos de  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ :

$$\frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}, \quad (4.4)$$

onde  $Re$  é o número de Reynolds definido pela relação:

$$Re = \frac{a U_0}{\nu}, \quad (4.5)$$

onde  $Pr$  é o número de Prandtl definido pela relação:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad (4.6)$$

$A$  é a razão de aspecto da geometria:

$$A = \frac{H}{L}, \quad (4.7)$$

$\ell$  é o comprimento adimensional para o início de aquecimento na placa superior, definido pela relação:

$$\ell = \frac{b}{a Re}. \quad (4.8)$$

As condições iniciais e de contorno consideradas nos testes na forma adimensional, conforme mostram as figuras 4.1b e 4.3b, respectivamente, para os casos testes 1 e 2, são:

i) condições iniciais:

para  $\tau = 0$ :

$$\psi = \theta = \omega = 0 \quad (\text{em } \Omega), \quad (4.9)$$

ii) condições de contorno:

para  $\tau > 0$ :

$$\theta = 0 \quad (\text{em } A'E'D'), \quad (\text{para o caso 1}) \quad (4.10a)$$

$$\theta = 0 \quad (\text{em } A'E'), \quad (\text{para o caso 2}) \quad (4.10b)$$

$$\theta = 1 \quad (\text{em } C'B'A'), \quad (4.10c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (\text{em } E'D'), \quad (4.10d)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad (\text{em } D'C'), \quad (4.10e)$$

$$\psi_w = 0 \quad (\text{em } E'D'), \quad (4.10f)$$

$$\psi_w = 2 \quad (\text{em } C'B'A'), \quad (\text{para o caso 1}) \quad (4.10g)$$

$$\psi_w = 1 \quad (\text{em } C'B'A'), \quad (\text{para o caso 2}) \quad (4.10h)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} = 0 \quad (\text{em } E'D' \text{ e } C'B'A'), \quad (4.10i)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = 0 \quad (\text{em } A'E' \text{ e } D'C'), \quad (4.10j)$$

$$\psi = \frac{(Y-1)[3-(Y-1)^2]}{2} \quad (\text{em } A'E' \text{ e } D'C'), \quad (\text{para o caso 1}) \quad (4.10l)$$

$$\psi = \frac{Y(3-Y^2)}{2} \quad (\text{em } A'E' \text{ e } D'C'), \quad (\text{para o caso 2}) \quad (4.10m)$$

$$\omega_w = \frac{3(\psi_B - \psi_N)}{\ell^2} - \frac{\omega_N}{2} \quad (\text{em } E'D' \text{ e } C'B'A'), \quad (\text{para o caso 1}) \quad (4.10n)$$

$$\omega_w = \frac{3(\psi_B - \psi_N)}{\ell^2} - \frac{\omega_N}{2} \quad (\text{em } C'B'A'), \quad (\text{para o caso 2}) \quad (4.10o)$$

$$\omega_w = 0 \quad (\text{em } E'D'), \quad (\text{para o caso 2}) \quad (4.10p)$$

$$\omega = 3(Y-1) \quad (\text{em } A'E' \text{ e } D'C'), \quad (\text{para o caso 1}) \quad (4.10q)$$

$$\omega = 3Y \quad (\text{em } A'E' \text{ e } D'C'), \quad (\text{para o caso 2}) \quad (4.10r)$$

Para os testes computacionais, considera-se o regime não permanente e o escoamento como sendo bidimensional e desenvolvido. Os parâmetros utilizados pelos dois casos testes são:

$$Pr = 7,02, \quad (4.11a)$$

$$Re = 10, \quad (4.11b)$$

$$A = 0,2, \quad (\text{ para o caso 1 } ) \quad (4.11c)$$

$$A = 0,33, \quad (\text{ para o caso 2 } ) \quad (4.11d)$$

$$\ell = 0,8, \quad (\text{ para o caso 1 } ) \quad (4.11e)$$

$$\ell = 0. \quad (\text{ para o caso 2 } ) \quad (4.11f)$$

Segue-se uma descrição mais detalhada dos resultados dos dois casos testes.

### CASO 1:

A figura 4.1 mostra a geometria e as condições de contorno para o Caso 1, onde a região A'B'C'D'E'A' delimita a região da geometria em estudo. Este caso trata-se de um escoamento hidrodinamicamente desenvolvido e termicamente em desenvolvimento, entre placas planas paralelas com temperaturas diferentes das placas. Nos testes computacionais, foram utilizados: número de Prandtl  $Pr = 7,02$ , número de Reynolds  $Re = 10$  e razão de aspecto de  $A = H/L = 0,2$ ; 0,5 e 1,0. Na figura 4.1, a seção B'C' representa a superfície isotérmica quente mantida na temperatura  $\theta = 1$  e as seções A'B' e D'E' representam a superfície isotérmica fria mantida na temperatura  $\theta = 0$ . As seções E'A' e C'D' representam as regiões de entrada e saída do fluido, respectivamente. Na seção E'A', o fluido entra com uma temperatura  $\theta = 0$  e em C'D', a região é considerada como isolada termicamente, não havendo fluxo de calor através dela.

A figura 4.2 mostra, para o Caso 1, os resultados do caso teste analisado. As figuras 4.2a e 4.2b apresentam, respectivamente, as distribuições de  $\psi$  e  $\theta$  para o regime permanente. Neste caso teste, foi utilizado uma malha uniforme  $76 \times 16$  com 2.250 elementos, número de Prandtl  $Pr = 7,02$ , número de Reynolds  $Re = 10$  e razão de aspecto  $A = H/L = 0,2$ . Os resultados obtidos foram comparados com os resultados de Ozisik (1990). Segundo Ozisik (1990), o comprimento adimensional  $X$  para escoamento termicamente desenvolvido, é  $X = 0,4Pr$ . Neste caso teste, foi adotado um comprimento adimensional  $X$  igual a  $X = \frac{L}{aRe} = 10$ , sendo  $2a = H$ .

Da figura 4.1, a seção A'B' representa o comprimento para o início de aquecimento na placa superior. O valor adimensional da seção A'B' também foi adotado, como sendo,  $\ell = \frac{b}{aRe} = 0,8$ .

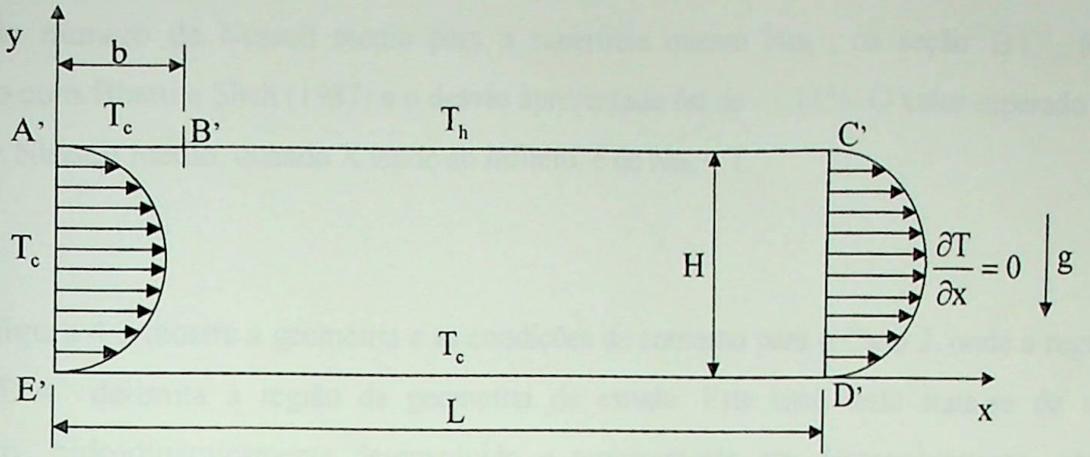


Figura 4.1a – Geometria e condições de contorno dimensionais para o caso 1.

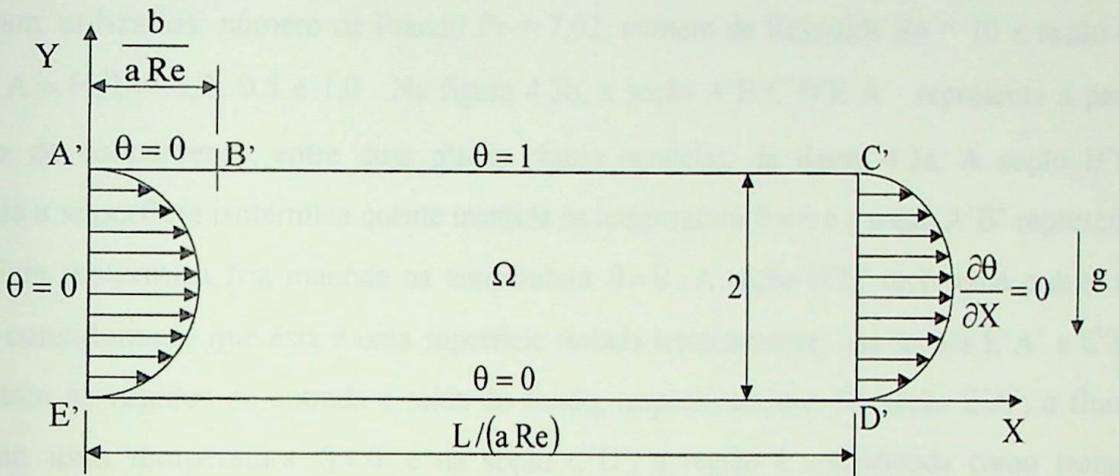


Figura 4.1b – Geometria e condições de contorno adimensionais para o caso 1.

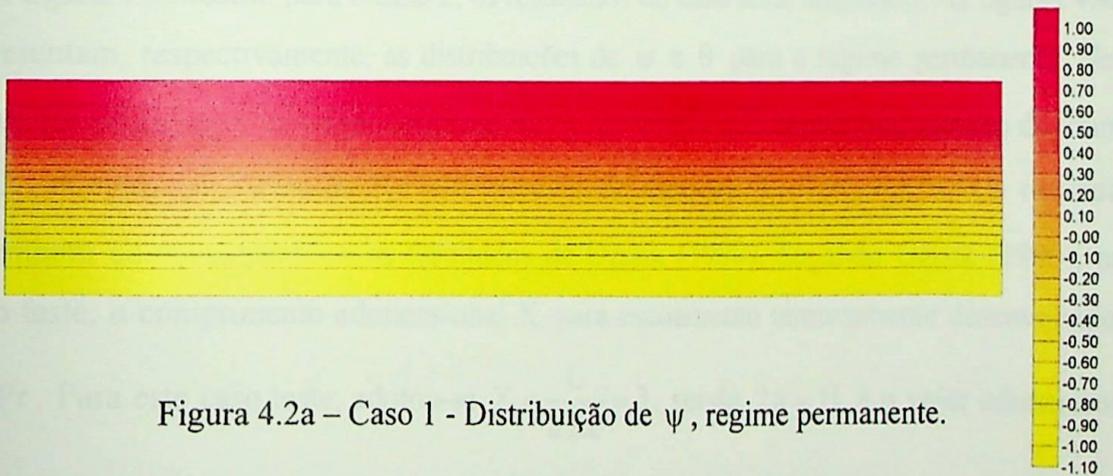


Figura 4.2a – Caso 1 - Distribuição de  $\psi$ , regime permanente.

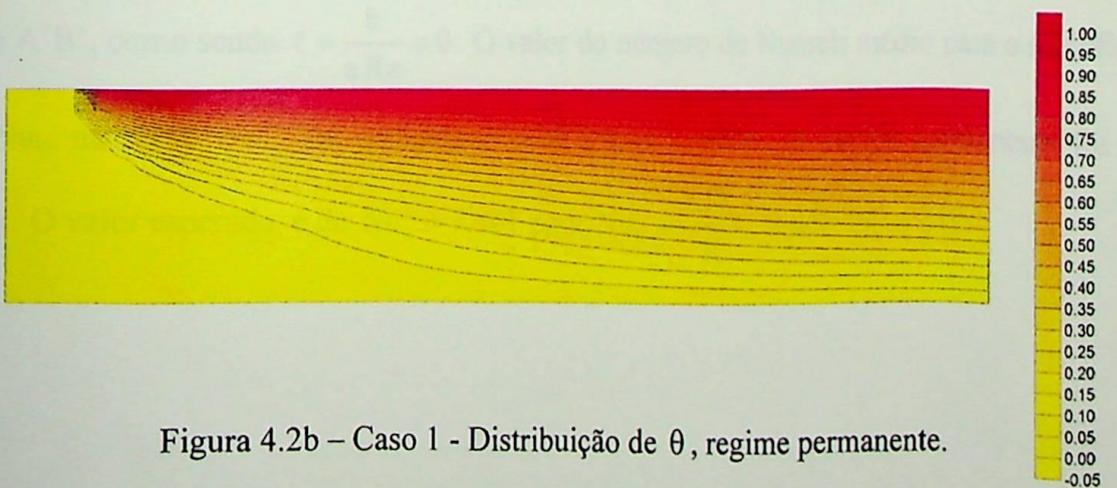


Figura 4.2b – Caso 1 - Distribuição de  $\theta$ , regime permanente.

O valor do número de Nusselt médio para a superfície quente  $Nu_h$ , na seção B'C', foi comparado com Bhatti e Shah (1987) e o desvio apresentado foi de -1,11%. O valor esperado do número de Nusselt médio, quando X tende ao infinito, é de  $Nu_h = 1$ .

#### CASO 2:

A figura 4.3 mostra a geometria e as condições de contorno para o Caso 2, onde a região A'B'C'D'E'A' delimita a região da geometria de estudo. Este caso teste trata-se de um escoamento, hidrodinamicamente desenvolvido e termicamente em desenvolvimento, entre placas planas paralelas com temperaturas iguais em ambas placas. Assim como no caso 1, neste teste foram utilizados: número de Prandtl  $Pr = 7,02$ , número de Reynolds  $Re = 10$  e razão de aspecto  $A = H/L = 0,2; 0,5$  e  $1,0$ . Na figura 4.3b, a seção A'B'C'D'E'A' representa a parte simétrica de escoamento, entre duas placas planas paralelas, da figura 4.3a. A seção B'C' representa a superfície isotérmica quente mantida na temperatura  $\theta = 1$  e a seção A'B' representa a superfície isotérmica fria mantida na temperatura  $\theta = 0$ . A seção D'E' representa o eixo de simetria considerando que esta é uma superfície isolada termicamente. As seções E'A' e C'D' representam as regiões de entrada e saída do fluido, respectivamente. Na seção E'A', o fluido entra com uma temperatura  $\theta = 0$  e na seção C'D', a região é considerada como isolada termicamente, não havendo fluxo de calor através dela.

A figura 4.4 mostra, para o caso 2, os resultados do caso teste analisado. As figuras 4.4a e 4.4b apresentam, respectivamente, as distribuições de  $\psi$  e  $\theta$  para o regime permanente. Neste caso teste, foi utilizado uma malha uniforme  $105 \times 35$  com 7.072 elementos, número de Prandtl  $Pr = 7,02$ , número de Reynolds  $Re = 10$  e razão de aspecto  $A = H/L = 0,33$ . Os resultados foram também comparados com os resultados de Ozisik (1990). Segundo Ozisik (1990), para este caso teste, o comprimento adimensional X, para escoamento termicamente desenvolvido, é  $X = 0,4 Pr$ . Para este caso teste, adotou-se  $X = \frac{L}{a Re} = 3$ , sendo  $2a = H$  e o valor adimensional

da seção A'B', como sendo  $\ell = \frac{b}{a Re} = 0$ . O valor do número de Nusselt médio para a superfície quente  $Nu_h$ , na seção B'C', foi comparado com Ozisik (1990) e o desvio apresentado foi de -4,72%. O valor esperado, é de  $Nu_h = 7,541$  para  $Nu_h = \frac{h D_h}{K}$ , sendo  $D_h = 2H$ .

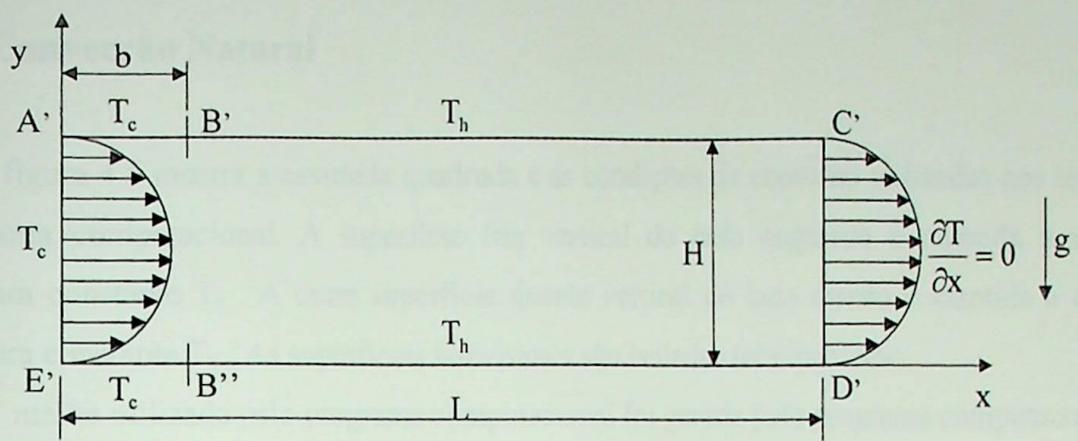


Figura 4.3a – Geometria e condições de contorno dimensionais para o caso 2.

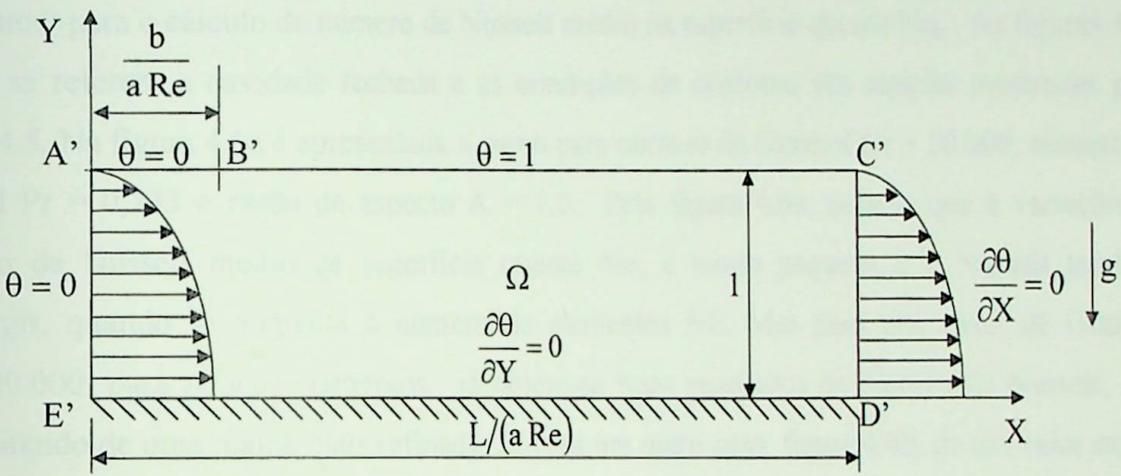


Figura 4.3b – Geometria analisada e condições de contorno adimensionais para o caso 2.

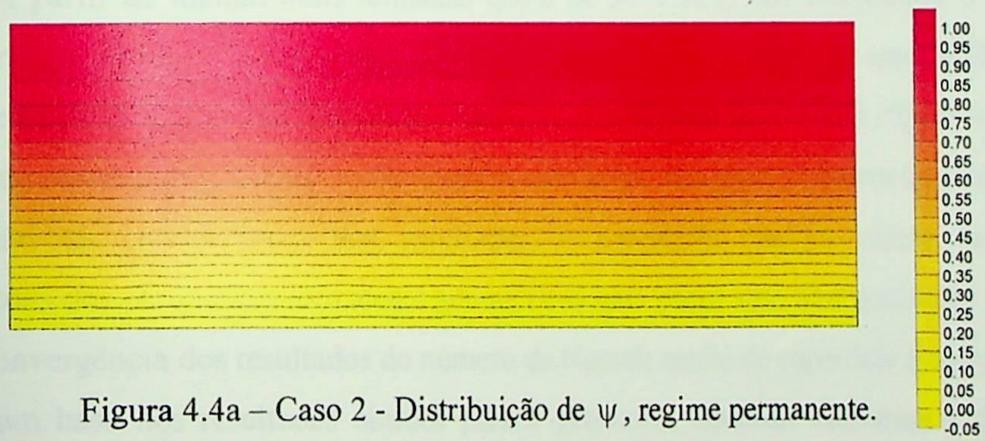


Figura 4.4a – Caso 2 - Distribuição de  $\psi$ , regime permanente.



Figura 4.4b – Caso 2 - Distribuição de  $\theta$ , regime permanente.

## 4.2.2 – Convecção Natural

A figura 4.5 mostra a cavidade quadrada e as condições de contorno utilizadas nos testes do programa computacional. A superfície fria vertical do lado esquerdo é mantida a uma temperatura constante  $T_c$ . A outra superfície quente vertical do lado direito é mantida a uma temperatura constante  $T_h$ . As superfícies horizontais são isoladas termicamente.

A malha utilizada pelo programa computacional foi gerada pelo programa computacional tratando-se de uma malha uniforme. Os números de pontos são M, direção X, e N, na direção Y.

As figuras 4.6a e 4.6b mostram a influência do número de elementos (de 162 a 3.362 elementos) para o cálculo do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$ . As figuras 4.6a e 4.6b se referem a cavidade fechada e as condições de contorno são aquelas mostradas pela figura 4.5. Na figura 4.6a é apresentada a curva para número de Grashof  $Gr = 20.000$ , número de Prandtl  $Pr = 0,733$  e razão de aspecto  $A = 1,0$ . Pela figura 4.6a, nota-se que a variação do número de Nusselt médio da superfície quente  $Nu_h$  é muito pequena e o Nusselt tende a convergir, quando se aumenta o número de elementos NE. Mas para este caso, de Grashof  $Gr = 20.000$ , para poucos elementos, já obtém-se bons resultados do número de Nusselt, não necessitando de uma malha mais refinada. Já para um outro caso, figura 4.6b, de um valor maior do número de Grashof  $Gr = 341.070$ , número de Prandtl  $Pr = 0,733$  e razão de aspecto  $A = 1,0$ , é necessário usar uma malha mais refinada para se obter a convergência esperada do número de Nusselt. A partir de malhas mais refinadas que a de  $30 \times 30$  (1.682 elementos), o número de Nusselt médio da superfície quente  $Nu_h$  varia muito pouco e a partir de uma malha  $40 \times 40$  (3.042 elementos), o valor do número de Nusselt converge para  $Nu_h = 6,033$  (figura 4.3b). Mas o aumento do número de Grashof  $Gr$  não implica apenas em aumentar o número de elementos para a obtenção da convergência dos resultados, é necessário analisar outras variações ou combinações dos parâmetros térmicos e geométricos para poder sim, tirar quaisquer conclusões sobre a convergência dos resultados do número de Nusselt médio da superfície quente  $Nu_h$ .

Com base nos resultados obtidos para a geometria estudada, conforme a figura 4.5, é adotado a malha  $42 \times 42$  (3.362 elementos). A escolha, baseada nas figuras 4.6a e 4.6b, levou em conta a convergência do número de Nusselt médio da superfície quente  $Nu_h$  e seu valor é  $Nu_h = 2,569$ , para número de Grashof  $Gr = 20.000$ , número de Prandtl  $Pr = 0,733$  e razão de aspecto  $A = 1,0$ . Para a mesma malha  $42 \times 42$ , com um número de Grashof  $Gr = 341.070$ , Prandtl  $Pr = 0,733$  e razão de aspecto  $A = 1,0$ , o número de Nusselt médio da superfície quente  $Nu_h$  é  $Nu_h = 6,033$ .

Observa-se que, quanto maior o número de elementos utilizados pelo programa computacional, a convergência do número de Nusselt tende a ser alcançada. Mas para isto,

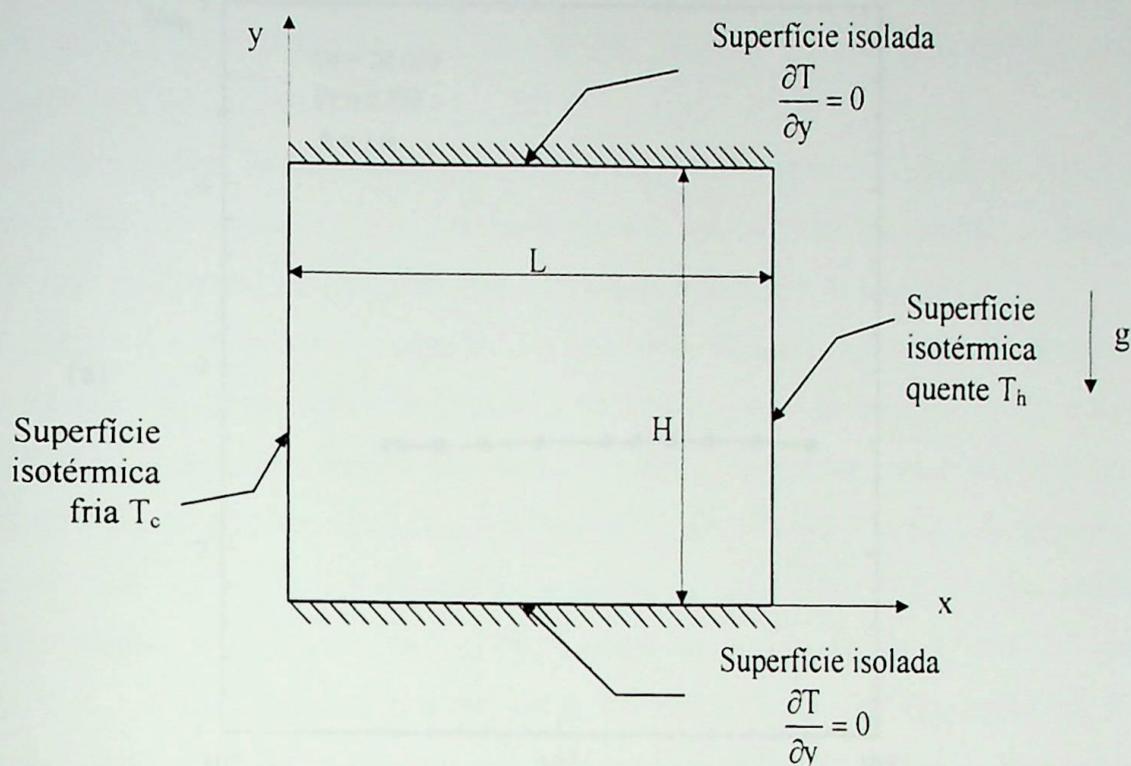


Figura 4.5a – Geometria quadrada e as condições de contorno dimensionais.

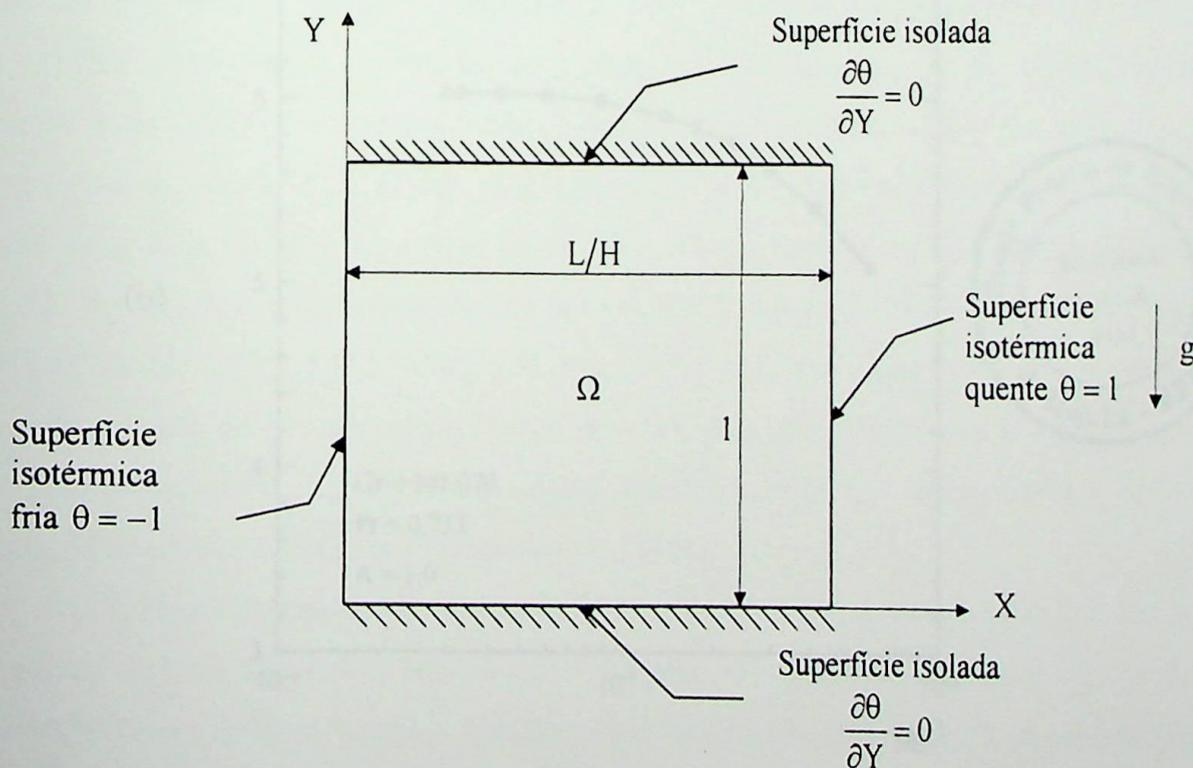


Figura 4.5b – Geometria quadrada analisada e as condições de contorno adimensionais.

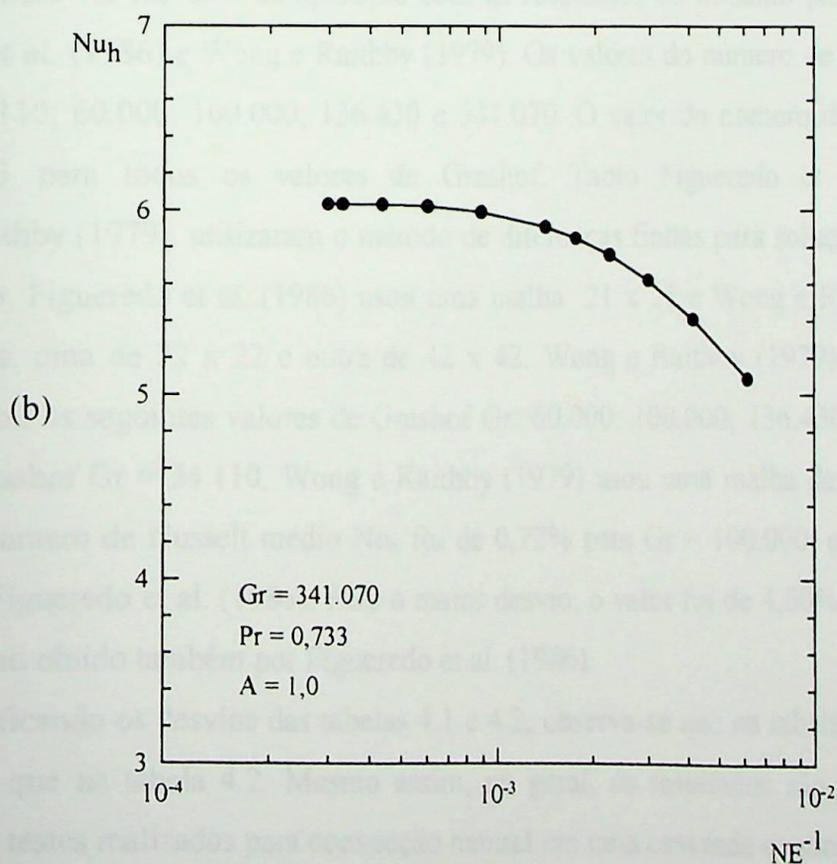
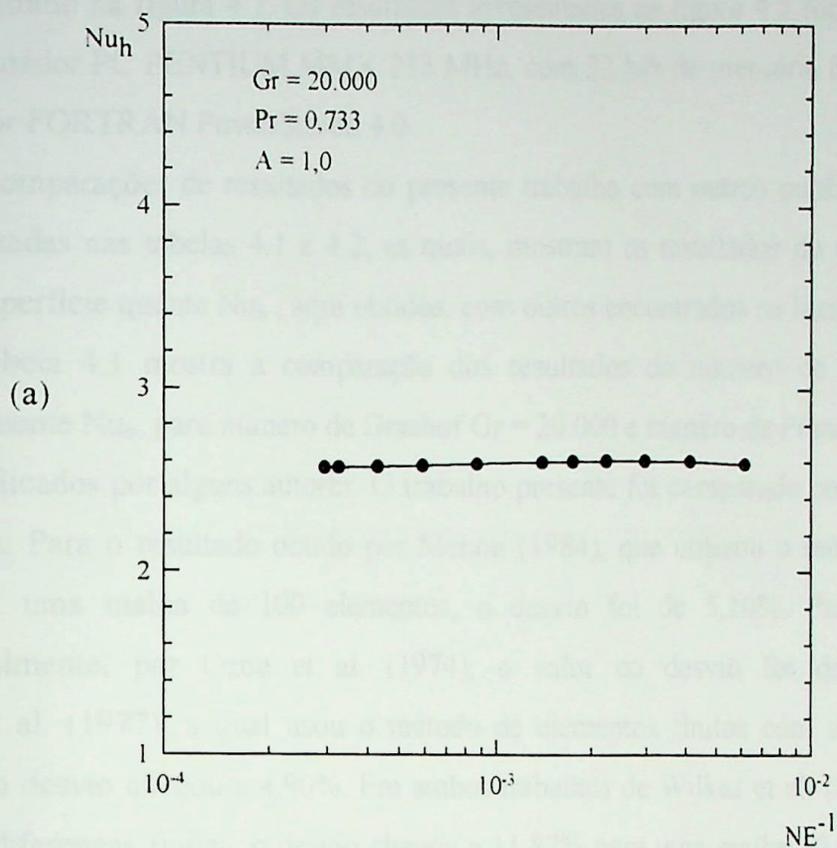


Figura 4.6 – Influência do número de elementos NE no número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$ : (a)  $Gr = 20.000$  ; (b)  $Gr = 341.070$  .

maior será o custo computacional e a área de memória requerida pelo programa computacional, como é mostrado na figura 4.7. Os resultados apresentados na figura 4.7 foram realizados num microcomputador PC PENTIUM MMX 233 MHz, com 32 Mb de memória EDO-RAM, usando o compilador FORTRAN PowerStation 4.0 .

As comparações de resultados do presente trabalho com outros publicados na literatura são apresentadas nas tabelas 4.1 e 4.2, as quais, mostram os resultados do número de Nusselt médio da superfície quente  $Nu_h$  , aqui obtidos, com outros encontrados na literatura.

A tabela 4.1 mostra a comparação dos resultados do número de Nusselt médio da superfície quente  $Nu_h$ , para número de Grashof  $Gr = 20.000$  e número de Prandtl  $Pr = 0,733$ , com aqueles publicados por alguns autores. O trabalho presente foi comparado com cinco resultados da literatura. Para o resultado obtido por Menon (1984), que utilizou o método de elementos finitos com uma malha de 100 elementos, o desvio foi de 5,10%. Para o caso obtido, experimentalmente, por Ozoe et al. (1974), o valor do desvio foi de 6,65%. Já para Tabarrok et al. (1977), a qual usou o método de elementos finitos com uma malha de 200 elementos, o desvio chegou a 4,90%. Em ambos trabalhos de Wilkes et al. (1966), utilizando o método de diferenças finitas, o desvio chegou a 11,87% para uma malha 10 x 10 e 2,06% para uma malha de 20 x 20.

A tabela 4.2 faz uma comparação com os resultados do trabalho presente e com os de Figueredo et al. (1986) e Wong e Raithby (1979). Os valores do número de Grashof  $Gr$  usados foram: 34.110; 60.000; 100.000; 136.430 e 341.070. O valor do número de Prandtl  $Pr$  foi de  $Pr = 0,733$  para todos os valores de Grashof. Tanto Figueredo et al. (1986), como Wong e Raithby (1979), utilizaram o método de diferenças finitas para solução das equações de conservação. Figueredo et al. (1986) usou uma malha 21 x 21 e Wong e Raithby (1979) usou duas malhas: uma de 22 x 22 e outra de 42 x 42. Wong e Raithby (1979) , para a malha de 22 x 22, usou os seguintes valores de Grashof  $Gr$ : 60.000; 100.000; 136.430 e 341.070. Para o valor de Grashof  $Gr = 34.110$ , Wong e Raithby (1979) usou uma malha de 42 x 42. O menor desvio do número de Nusselt médio  $Nu_h$  foi de 0,72% para  $Gr = 100.000$ , em relação ao valor obtido por Figueredo et al. (1986). Para o maior desvio, o valor foi de 4,60%, para  $Gr = 34.110$ , em relação ao obtido também por Figueredo et al. (1986).

Verificando os desvios das tabelas 4.1 e 4.2, observa-se que na tabela 4.1 os desvios são maiores do que na tabela 4.2. Mesmo assim, no geral, os resultados são considerados bons. Portanto, os testes realizados para convecção natural em uma cavidade quadrada são satisfatórios e validam o programa computacional para este tipo de geometria.

No item seguinte serão apresentados os resultados obtidos, pelo programa computacional desenvolvido, para os três tipos de convecção.

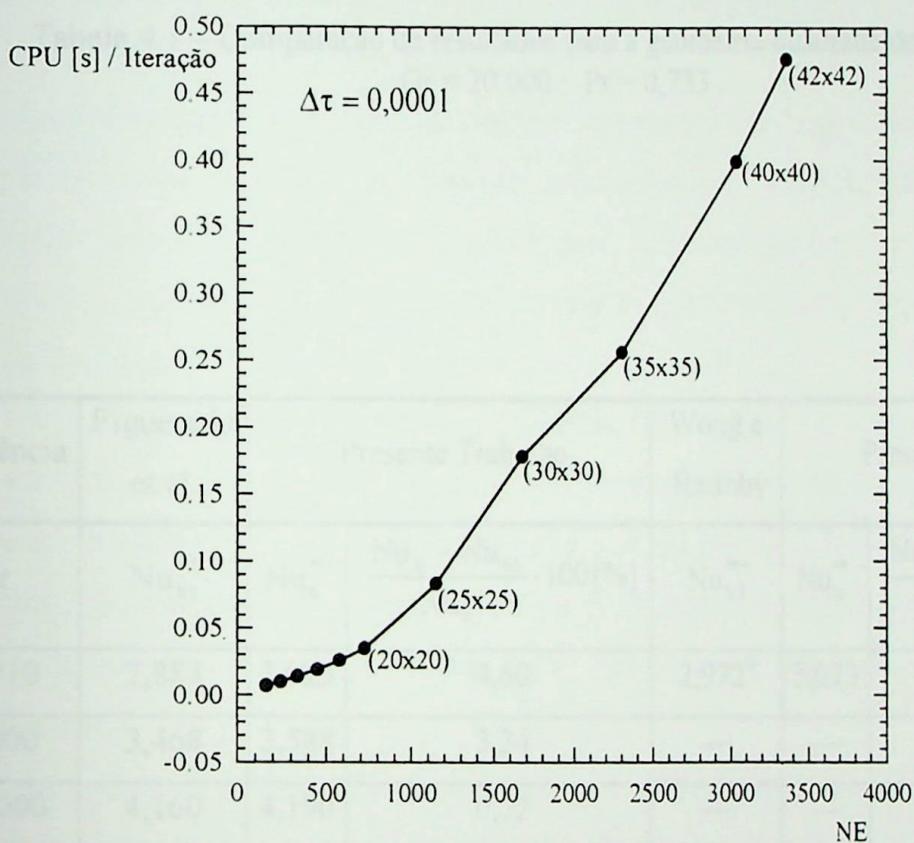


Figura 4.7 - Tempo de CPU [s] por iteração versus o número de elementos NE:  
 $Gr = 341.070$  ;  $Pr = 0,733$  ;  $A = 1,0$  e  $\Delta\tau = 0,0001$  .

| Referência        | $Nu_h$ | Desvio [%] | Método Utilizado                    |
|-------------------|--------|------------|-------------------------------------|
| Presente Trabalho | 2,569  | —          | Elementos Finitos (3.362 elementos) |
| Menon             | 2,70   | - 5,10     | Elementos Finitos (100 elementos)   |
| Ozoe e outros     | 2,74   | - 6,65     | Valor Experimental                  |
| Tabarrok e outros | 2,695  | - 4,90     | Elementos Finitos (200 elementos)   |
| Wilkes e outros   | 2,874  | - 11,87    | Diferenças Finitas (10 x 10)        |
| Wilkes e outros   | 2,516  | 2,06       | Diferenças Finitas (20 x 20)        |

Tabela 4.1 – Comparação de resultados para a geometria quadrada da figura 4.5:  
Gr = 20.000 ; Pr = 0,733 .

| Referência | Figueredo et al. | Presente Trabalho |   | Wong e Raithby     | Presente Trabalho |   |
|------------|------------------|-------------------|---|--------------------|-------------------|---|
| Gr         | $Nu_{h1}$        | $Nu_h^{**}$       | $\frac{Nu_h - Nu_{h1}}{Nu_h} \cdot 100$ [%] | $Nu_{h2}^{***}$    | $Nu_h^{**}$       | $\frac{Nu_h - Nu_{h2}}{Nu_h} \cdot 100$ [%] |
| 34.110     | 2,884            | 3,023             | 4,60  | 2,972 <sup>+</sup> | 3,023             | 1,69  |
| 60.000     | 3,468            | 3,588             | 3,34  | —                  | —                 | —   |
| 100.000    | 4,160            | 4,190             | 0,72  | —                  | —                 | —   |
| 136.430    | 4,686            | 4,602             | -1,83                                       | 4,51               | 4,602             | 2,00  |
| 341.070    | —                | —                 | —   | 5,92               | 6,033             | 1,87  |

Tabela 4.2 – Comparação de resultados para a geometria quadrada da figura 4.5:  
Pr = 0,733 .

+ Resultado para Malha 42 x 42

\* Resultado para Malha 21 x 21

\*\* Método de elementos finitos: malha 42 x 42 (3.362 elementos)

\*\*\* Resultado para Malha 22 x 22

## 4.3 – Resultados do Presente Trabalho

Os resultados teóricos de transferência de calor são mostrados nos itens seguintes para os três tipos de convecção: forçada, natural e mista. O programa computacional desenvolvido mostrou-se satisfatório para as geometrias quadradas e para placas planas paralelas. Assim, será utilizado para se obter os resultados para a geometria de placas planas paralelas com obstáculos retangular e semi-cilíndrico, para cavidades retangulares fechadas com um corpo interno quente e para cavidades retangulares semi-abertas.

### 4.3.1 – Convecção Forçada

Este item apresenta os resultados teóricos de transferência de calor por convecção forçada entre placas planas paralelas com obstáculo para dois casos. As figuras 4.8 e 4.12 ilustram as geometrias e as condições de contorno dimensionais e adimensionais para os dois casos. Devido à simetria do problema, analisa-se apenas metade da geometria. O escoamento é considerado desenvolvido e bidimensional.

As figuras 4.8a e 4.8b mostram a geometria e as condições de contorno dimensionais e adimensionais, respectivamente, do caso 1 para escoamento entre placas planas paralelas com um obstáculo semi-cilíndrico colocado entre as placas. As placas, assim como as superfícies dos obstáculos, são mantidas na temperatura alta  $\theta = 1$ . Na região de entrada, o fluido é considerado frio e mantido na temperatura baixa  $\theta = 0$ . Na saída, o fluido é considerado isolado termicamente.

As figuras 4.12a e 4.12b mostram a geometria e as condições de contorno dimensionais e adimensionais, respectivamente, do caso 2 para escoamento entre placas planas paralelas com um obstáculo retangular colocado entre as placas. As placas e as superfícies do obstáculo são mantidas na temperatura alta  $\theta = 1$ . Nas regiões de entrada e saída, tem-se temperatura baixa  $\theta = 0$  e fluido isolado termicamente, respectivamente.

O capítulo 2 apresenta toda a formulação teórica, com as condições iniciais e de contorno. O capítulo 3 apresenta o método de solução das equações de conservação, obtidas pelo método de elementos finitos.

As equações de conservação para convecção natural são dadas pelas equações (2.54), (2.55) e (2.56). Estas equações representam as equações de conservação em termos da função corrente ( $\psi$ ), temperatura adimensional ( $\theta$ ) e vorticidade ( $\omega$ ), respectivamente, e são dadas por:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{\text{Re Pr}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}, \quad (4.14)$$

onde Re é o número de Reynolds definido pela relação:

$$\text{Re} = \frac{U_o H}{\nu}, \quad (4.15)$$

Pr é o número de Prandtl definido pela relação:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{K} = \frac{\rho \nu c_p}{K}. \quad (4.16)$$

Define-se, a seguir, os seguintes parâmetros geométricos.

A é a razão de aspecto da geometria:

$$A = \frac{H}{L}, \quad (4.17)$$

R é a razão de raio da superfície semi-esférica ( caso 1 ) pela distância entre as placas:

$$R = \frac{r}{H}, \quad (4.18)$$

L2 é a razão da posição horizontal do centro do obstáculo semi-cilíndrico ( caso 1 ) ou retangular ( caso 2 ) pela distância entre as placas:

$$L2 = \frac{\ell 2}{H}, \quad (4.19)$$

L1 é a razão do comprimento ( caso 2 ) do obstáculo retangular pela distância entre as placas:

$$L1 = \frac{\ell 1}{H}, \quad (4.20)$$

H1 é a razão da altura ( caso 2 ) do obstáculo retangular pela distância entre as placas:

$$H1 = \frac{h1}{H}. \quad (4.21)$$

Para o estudo de convecção forçada, dois casos são abordados. Considera-se o regime não permanente e o escoamento como sendo bidimensional e desenvolvido. Os parâmetros utilizados pelos 2 casos são:

Caso 1:

$$\text{Pr} = 1, \quad (4.22a)$$

$$\text{Re} = 160, \quad (4.22b)$$

$$A = 0,5, \quad (4.22c)$$

$$L2 = 0,5, \quad (4.22d)$$

$$R = 0,167. \quad (4.22e)$$

### Caso 2:

$$Pr = 1, \quad (4.23a)$$

$$Re = 160, \quad (4.23b)$$

$$A = 0,5, \quad (4.23c)$$

$$L2 = 0,5, \quad (4.23d)$$

$$L1 = 0,334, \quad (4.23e)$$

$$H1 = 0,167. \quad (4.23f)$$

Para os dois casos, foram utilizadas malhas não uniformes, concentrando-se um maior número de elementos próximo à região do obstáculo.

As figuras 4.9 e 4.13, apresentam para os casos 1 e 2, respectivamente, as malhas de elementos finitos utilizadas nos testes computacionais. Foram escolhidas três malhas não uniformes para cada caso, denominadas de: malha A, malha B e malha C. Para o caso 1, conforme a figura 4.102, tem-se: malha A ( 177 elementos ), malha B ( 541 elementos ) e malha C ( 1.110 elementos ). Para o caso 2, conforme a figura 4.105, tem-se: malha A ( 171 elementos ), malha B ( 506 elementos ) e malha C ( 1.035 elementos ).

As figuras 4.10 e 4.14 mostram para os casos 1 e 2, respectivamente, um estudo da influência do refinamento da malha sobre os resultados da temperatura média do fluido, nos regimes permanente e não permanente. Para cada caso, foram utilizadas quatro malhas não uniformes. Para o caso 1, utilizou-se malhas com 177, 453, 541 e 1.110 elementos. Para o caso 2, utilizou-se as malhas com 171, 427, 506 e 1.035 elementos. Observa-se que a convergência dos valores da temperatura média do fluido ocorre à medida que o número de elementos aumenta. Para o caso 1, pouca diferença do valor da temperatura média se observa no refinamento da malha de 541 elementos para 1.110 elementos. O mesmo acontece no caso 2, para o refinamento da malha com 506 elementos para 1.035 elementos.

As figuras 4.11 e 4.15 mostram para os casos 1 e 2, respectivamente, um estudo da influência do refinamento da malha versus o tempo. Foram utilizadas três malhas para cada caso: malhas A, B e C. Tanto para o caso 1, como para o caso 2, observa-se que com o aumento do tempo, aumenta-se o valor da temperatura média do fluido, até a sua convergência para o regime permanente. Para o caso 1, comparando a malha B ( 541 elementos ) com a malha A ( 177 elementos ), obteve-se um desvio de  $-4,77\%$  no cálculo da temperatura média do fluido

no regime permanente. Ainda para o caso 1, este desvio é desprezível, quando se compara a malha C com a malha B e seu valor é de  $-0,36\%$ . Para o caso 2, os resultados são semelhantes, o desvio da malha B para A é de  $-4,63\%$  e da malha C para a malha B é de  $-0,53\%$ , também no regime permanente. Assim, para a malha B, em relação a malha C em qualquer dos dois casos, o desvio é menor do que  $-0,6\%$ , o que pode ser considerado satisfatório. Para os resultados a seguir, serão adotadas as malhas mais refinadas, isto é, as malhas com 1.110 elementos para o caso 1 e 1.035 elementos para o caso 2.

As condições iniciais e de contorno são apresentadas, a seguir, para os dois casos de estudo de convecção forçada entre placas planas paralelas com um obstáculo colocado sobre elas.

Para os dois casos, tem-se:

i) condições iniciais:

para  $\tau = 0$ :

$$\psi = \theta = \omega = 0 \quad (\text{em } \Omega), \quad (4.24)$$

ii) condições de contorno:

para  $\tau > 0$ :

$$\theta = 0 \quad (\text{em } S_2), \quad (4.25a)$$

$$\theta = 1 \quad (\text{em } S_1), \quad (4.25b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad (\text{em } S_3), \quad (4.25c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (\text{em } S_4), \quad (4.25d)$$

$$\psi_w = 0 \quad (\text{em } S_1), \quad (4.25e)$$

$$\psi_w = 4 \quad (\text{em } S_4), \quad (4.25f)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = 0 \quad (\text{em } S_3), \quad (4.25g)$$

$$\psi = -0,016 Y^3 + 0,24 Y^2 \quad (\text{em } S_2), \quad (4.25h)$$

$$\omega_w = \omega_M \quad (\text{em } S_1), \quad (4.25i)$$

$$\omega = 0,096 Y - 0,48 \quad (\text{em } S_2), \quad (4.25j)$$

$$\omega = 0 \quad (\text{em } S_4), \quad (4.25l)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial X} = 0 \quad (\text{em } S_3), \quad (4.25m)$$

onde:

$S_1$  é a superfície isotérmica quente com temperatura  $T_h$ ;

$S_2$  é a superfície isotérmica fria com temperatura  $T_c$ ;

$S_3$  e  $S_4$  são as superfícies isoladas ;

$\Omega$  representa o domínio da geometria analisada.

As figuras de 4.16 a 4.19 apresentam as distribuições da função corrente  $\psi$  e temperatura adimensional  $\theta$  para os dois casos, considerando os valores de  $Re = 160$ ,  $Pr = 1$  e para vários tempos adimensionais.

As figuras 4.16 e 4.18, apresentam, respectivamente, para os casos 1 e 2, as distribuições da função corrente  $\psi$ . Para os tempos iniciais, conforme mostram as figuras 4.16(a) e 4.18(a), a presença do obstáculo faz deformar as linhas da função corrente na região de fluido acima do obstáculo. A camada de fluido que passa sobre o obstáculo, seja este cilíndrico ou retangular, tende a arrastar o fluido para uma posição horizontal mais a frente. Assim, do lado direito do corpo, forma-se uma região de fluido, com baixas velocidades, recirculando no sentido horário. Devido à simetria do problema, um outra região de recirculação se encontra ao lado direito do obstáculo superior, recirculando no sentido contrário. Para os tempos finais, figuras 4.16(d) e 4.18(d), as deformações das linhas de corrente, próximas ao obstáculo, tornam-se menos acentuadas.

As figuras 4.17 e 4.19, mostram, respectivamente, para os casos 1 e 2, as distribuições de temperatura adimensional  $\theta$ . Para os tempos iniciais, conforme mostram as figuras 4.17(a) e 4.19(a), observa-se uma pequena região de fluido, próxima à direita do obstáculo, com altos gradientes de temperaturas. Essa região de altos gradientes para o caso 2, conforme a figura 4.19(a), é um pouco mais acentuada, em relação à figura 4.17(a), pois o obstáculo retangular possui uma maior área do que o obstáculo semi-cilíndrico. Nota-se que a distribuição de temperatura, para os dois casos, na região de fluido no lado esquerdo do obstáculo, praticamente não se altera durante todo o regime de escoamento. Isto se deve ao fato do fluido entrar no canal numa temperatura baixa  $\theta = 0$  e também, não ter-se desenvolvido termicamente. Com o incremento do tempo, aumenta-se a região de fluido com temperaturas mais elevadas em todo domínio  $\Omega$ . Das figuras 4.17(d) e 4.19(d), respectivamente, para os casos 1 e 2, observa-se que na região de recirculação próxima à direita do obstáculo, devido às baixas velocidades do fluido tem-se uma região de fluido com temperaturas mais elevadas. Comparando-se as figuras 4.17(d) e 4.19(d), a região de fluido mais quente na região de recirculação, acontece para o caso 2, conforme a figura 4.19(d).

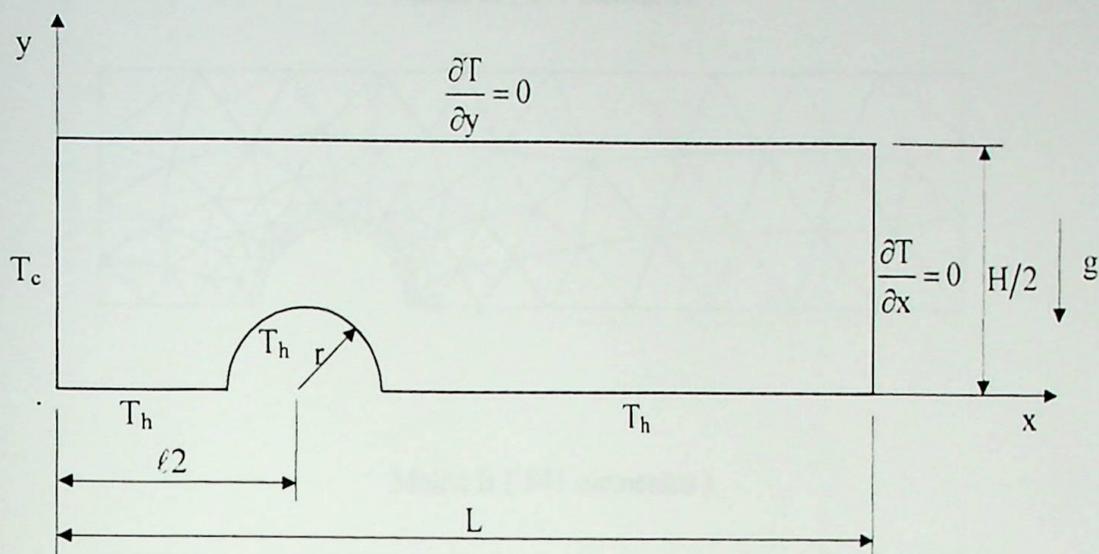


Figura 4.8a – Geometria e condições de contorno dimensionais ( Caso 1 ).

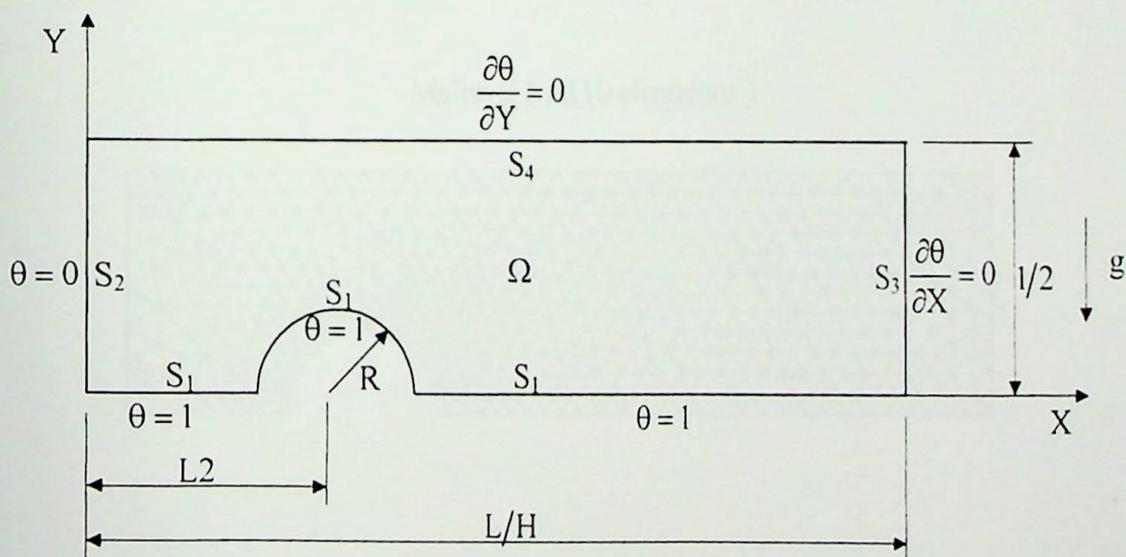
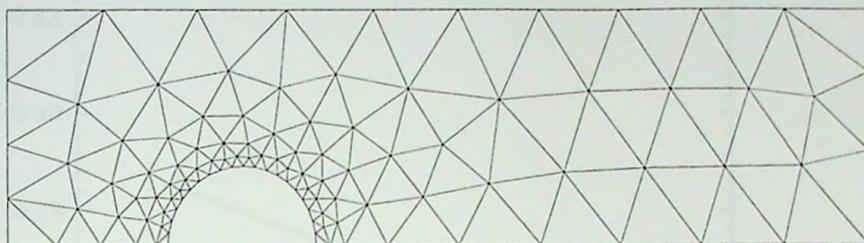
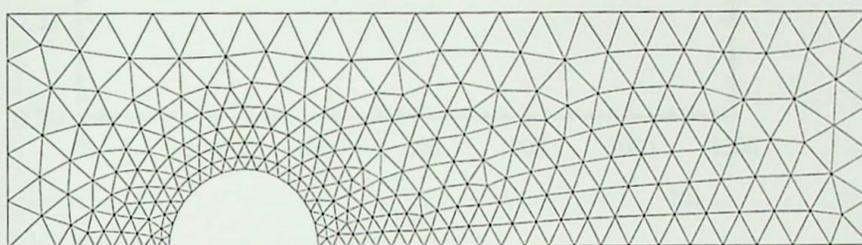


Figura 4.8b – Geometria e condições de contorno adimensionais ( Caso 1 ).

Malha A ( 177 elementos )



Malha B ( 541 elementos )



Malha C ( 1.110 elementos )

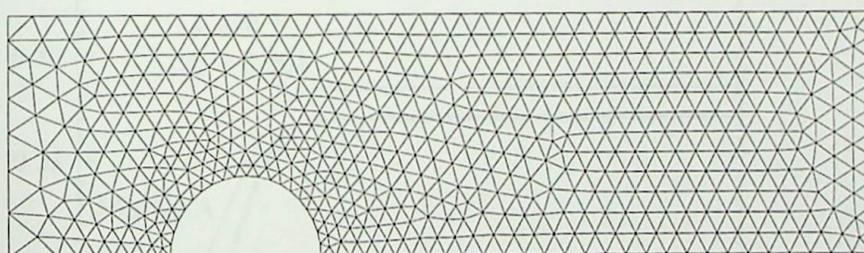


Figura 4.9 – Malhas de elementos finitos utilizadas nos testes computacionais para o caso 1 .

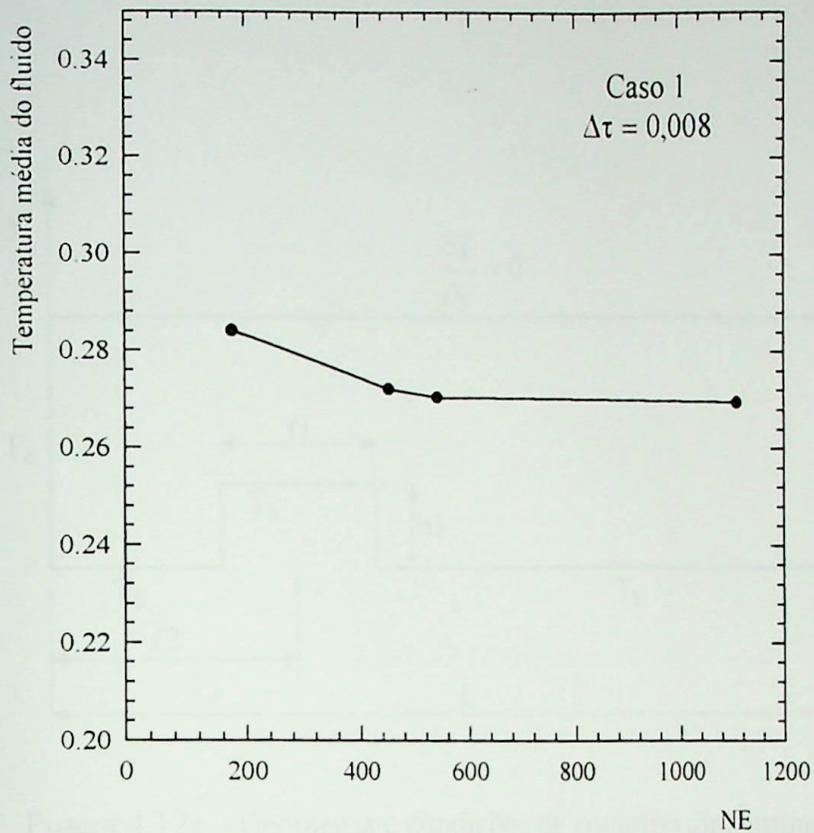


Figura 4.10 – Temperatura média do fluido versus número de elementos NE para um incremento de tempo adimensional  $\Delta\tau = 0,008$  ( Caso 1 ).

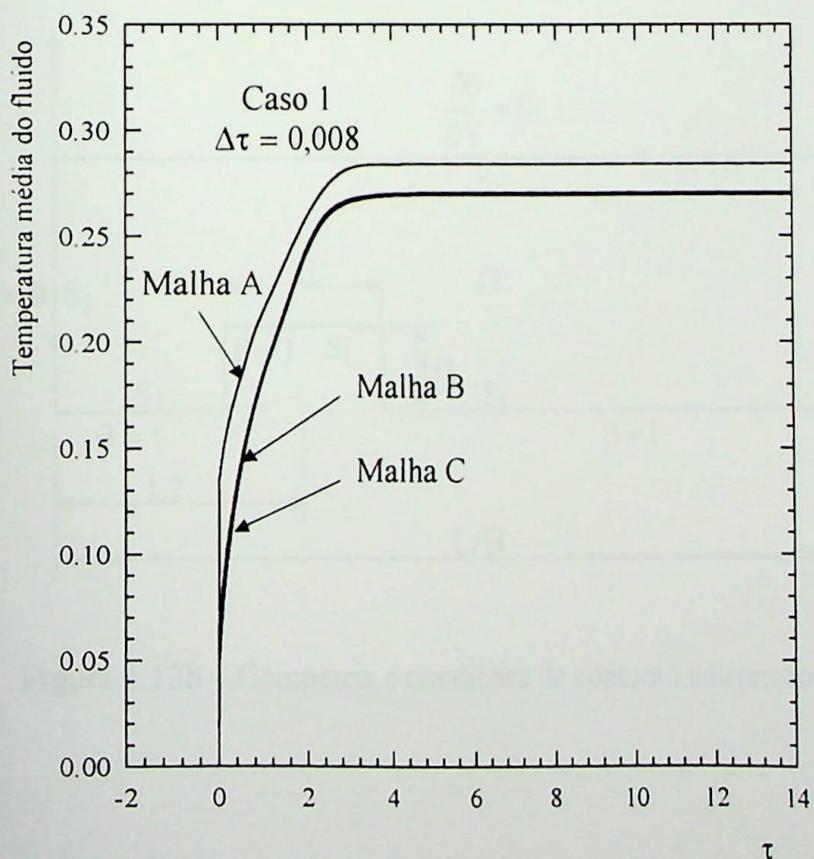


Figura 4.11 – Temperatura média do fluido versus o tempo  $\tau$  para um incremento de tempo adimensional  $\Delta\tau = 0,008$  ( Caso 1 ).

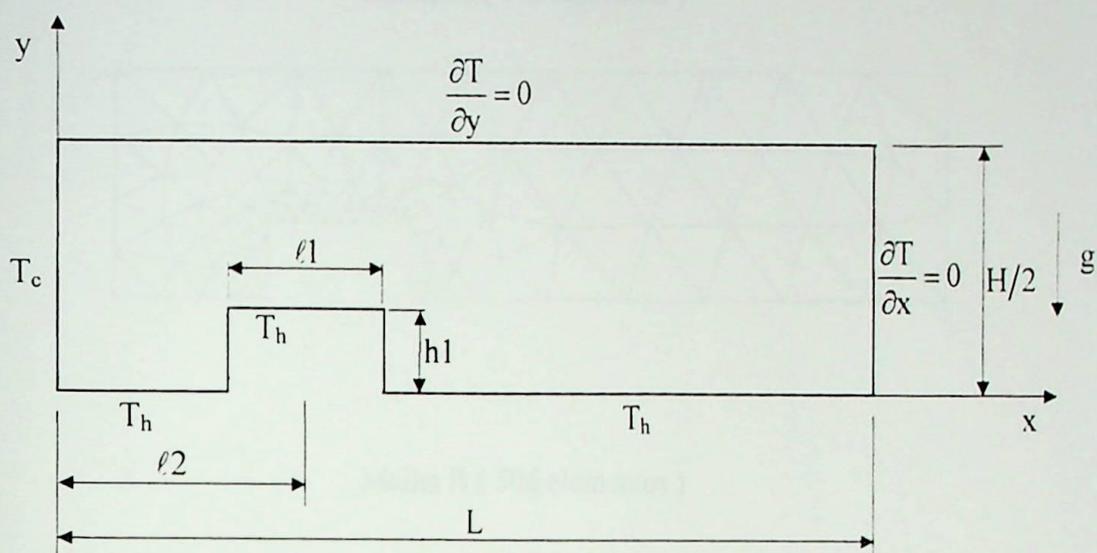


Figura 4.12a – Geometria e condições de contorno dimensionais ( Caso 2 ).

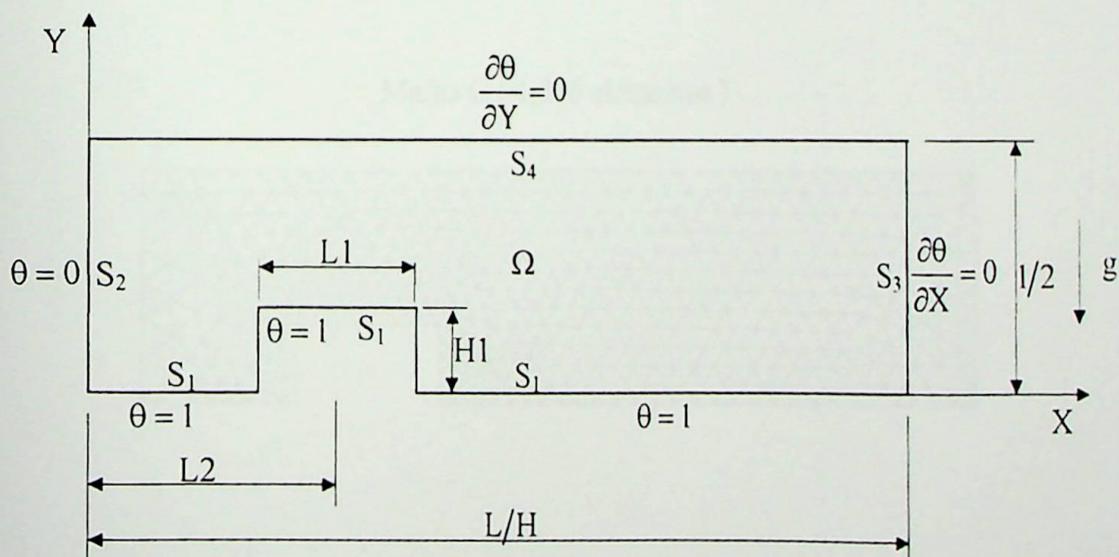
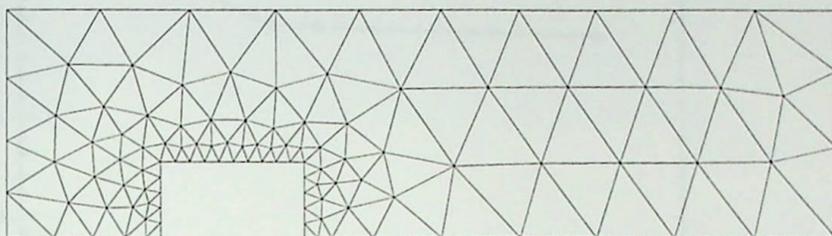
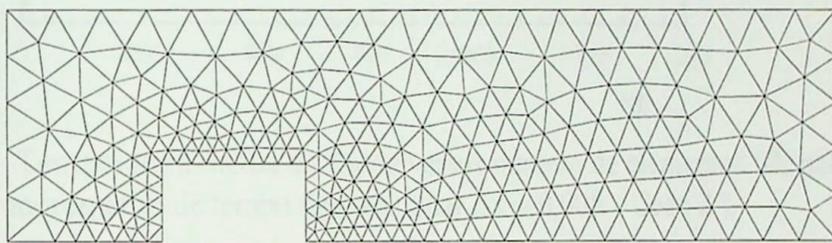


Figura 4.12b – Geometria e condições de contorno adimensionais ( Caso 2 ).

Malha A ( 171 elementos )



Malha B ( 506 elementos )



Malha C ( 1.035 elementos )

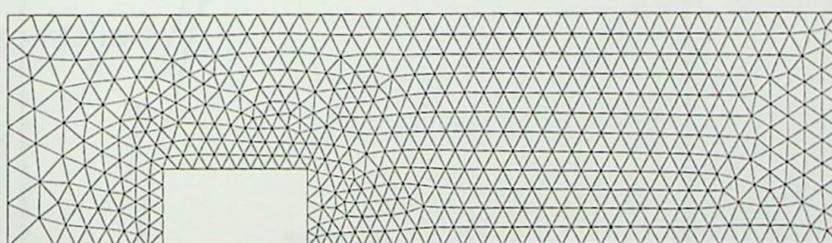


Figura 4.13 – Malhas de elementos finitos utilizadas nos testes computacionais para o caso 2 .

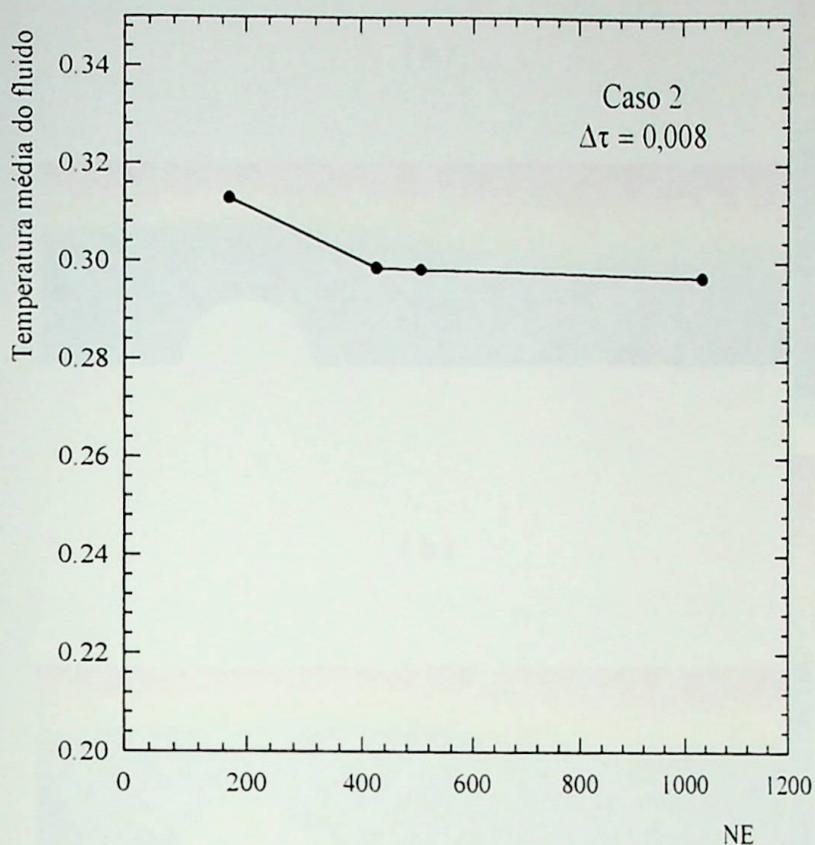


Figura 4.14 – Temperatura média do fluido versus número de elementos NE para um incremento de tempo adimensional  $\Delta\tau = 0,008$  ( Caso 2 ).

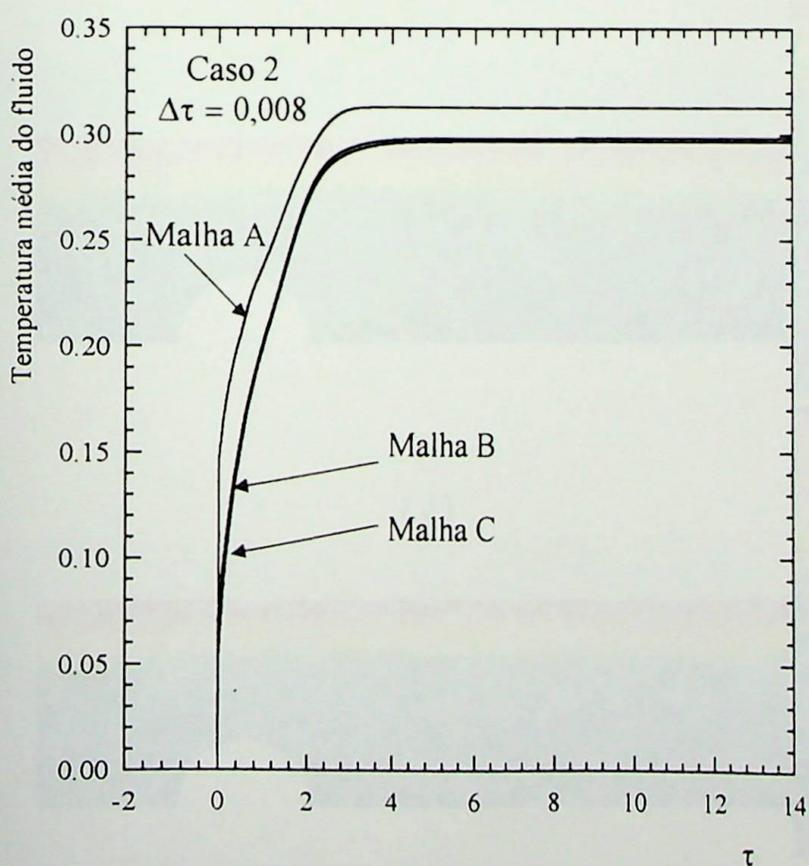


Figura 4.15 – Temperatura média do fluido versus o tempo  $\tau$  para um incremento de tempo adimensional  $\Delta\tau = 0,008$  ( Caso 2 ).

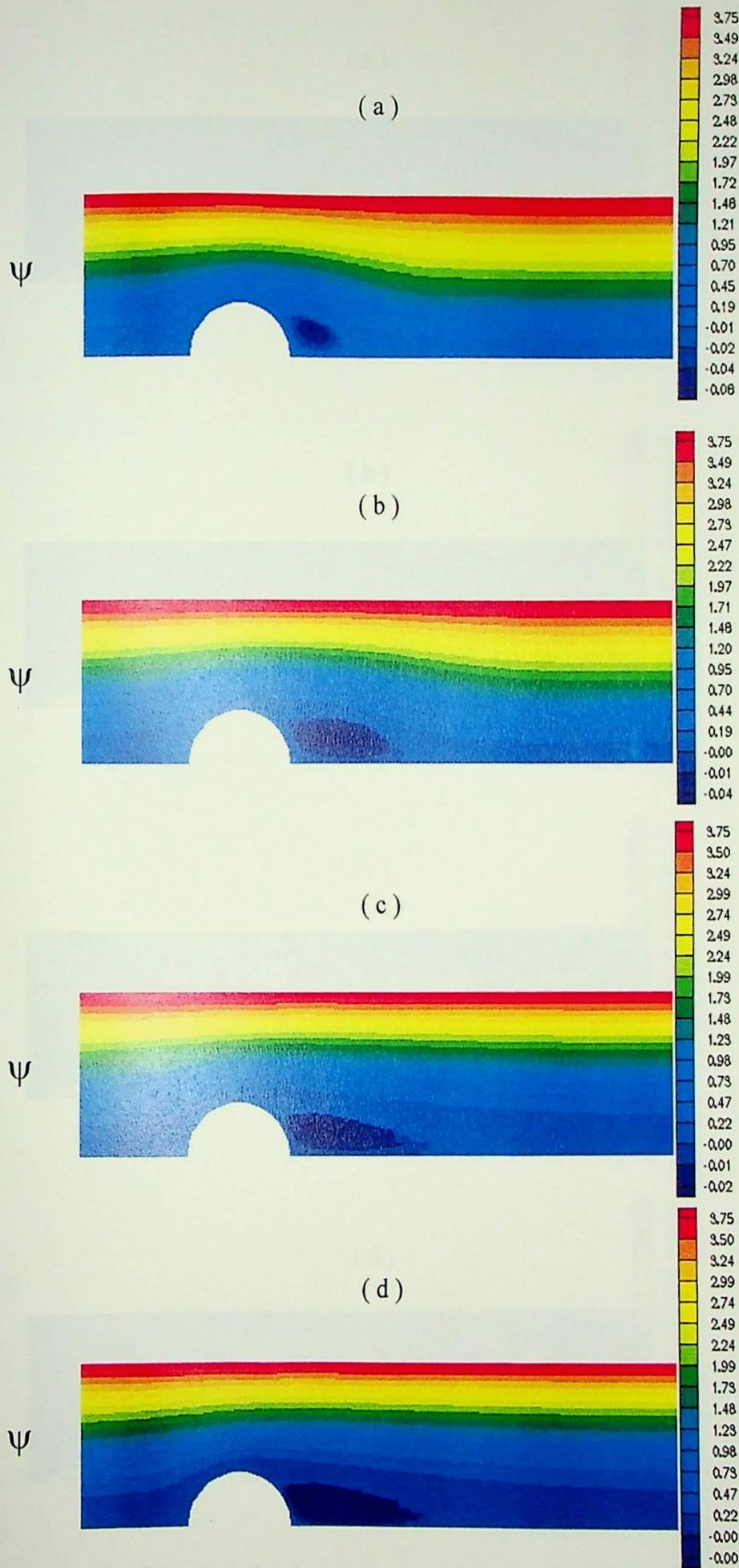


Figura 4.16 – Distribuições da função corrente  $\psi$  para o caso 1 para  $Re = 160$  ;  $Pr = 1$  e os tempos adimensionais  $\tau$ : (a)  $\tau = 0,4$  ; (b)  $\tau = 0,8$  ; (c)  $\tau = 2,4$  e (d)  $\tau = 5,6$  .

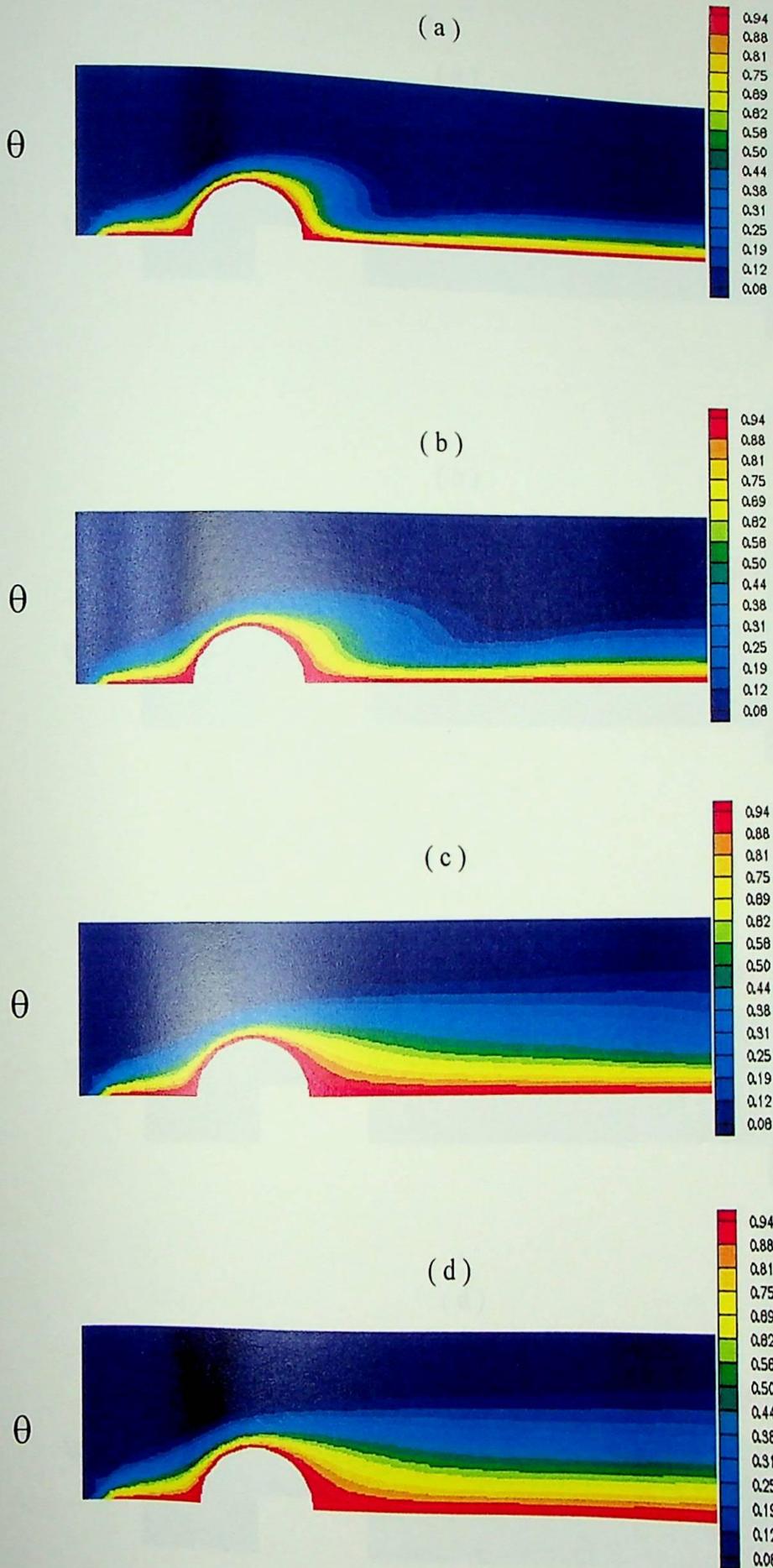


Figura 4.17 – Distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  para o caso 1 para  $Re = 160$ ;  $Pr = 1$  e os tempos adimensionais  $\tau$ : (a)  $\tau = 0,4$ ; (b)  $\tau = 0,8$ ; (c)  $\tau = 2,4$  e (d)  $\tau = 5,6$ .

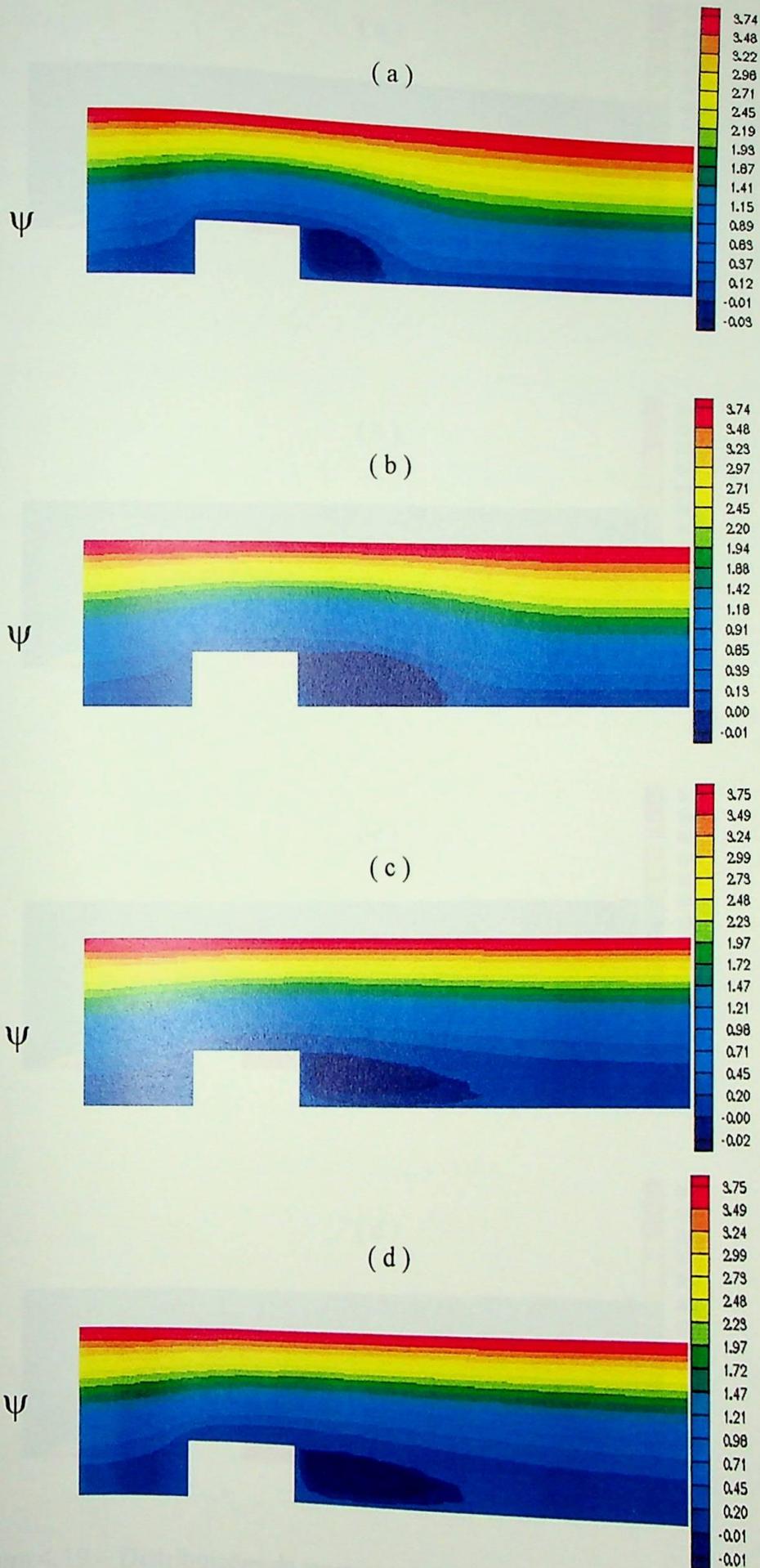


Figura 4.18 – Distribuições da função corrente  $\psi$  para o caso 2 para  $Re = 160$ ;  $Pr = 1$  e os tempos adimensionais  $\tau$ : (a)  $\tau = 0,4$ ; (b)  $\tau = 0,8$ ; (c)  $\tau = 2,4$  e (d)  $\tau = 5,6$ .

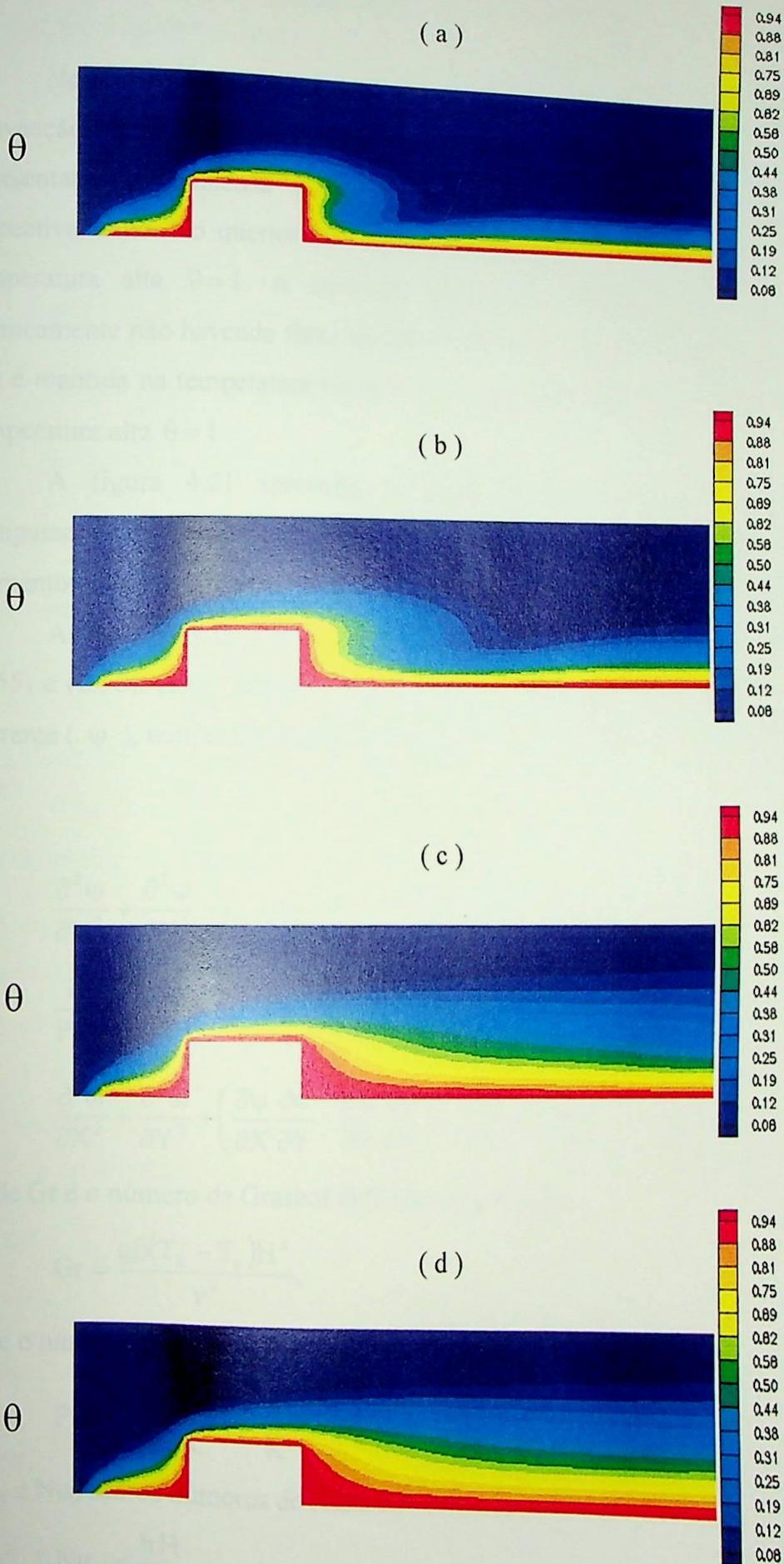


Figura 4.19 – Distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  para o caso 2 para  $Re = 160$ ;  $Pr = 1$  e os tempos adimensionais  $\tau$ : (a)  $\tau = 0,4$ ; (b)  $\tau = 0,8$ ; (c)  $\tau = 2,4$  e (d)  $\tau = 5,6$ .

### 4.3.2 – Convecção Natural

Neste item são apresentados os resultados do estudo da transferência de calor por convecção natural no interior de uma cavidade retangular fechada. As figuras 4.20a e 4.20b apresentam a geometria e as condições de contorno dimensionais e adimensionais, respectivamente. No interior da cavidade, encontra-se um corpo quente retangular mantido na temperatura alta  $\theta = 1$ . A cavidade retangular fechada possui duas superfícies isoladas termicamente não havendo fluxo de calor sobre elas. No lado esquerdo da cavidade, a superfície fria é mantida na temperatura baixa  $\theta = -1$  e no lado direito, a superfície quente é mantida na temperatura alta  $\theta = 1$ .

A figura 4.21 apresenta a malha de elementos finitos utilizada no programa computacional para os três casos. Utilizou-se uma malha  $28 \times 56$  uniforme com 2.970 elementos.

As equações de conservação para convecção natural são dadas pelas equações (2.54), (2.55) e (2.56). Estas equações representam as equações de conservação em termos da função corrente ( $\psi$ ), temperatura adimensional ( $\theta$ ) e vorticidade ( $\omega$ ), respectivamente, e são dadas por:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0, \quad (4.26)$$

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) + \frac{Gr}{2} \left( \cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial X} - \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}, \quad (4.28)$$

onde Gr é o número de Grashof definido pela relação:

$$Gr = \frac{g\beta(T_h - T_c)H^3}{\nu^2}, \quad (4.29)$$

Pr é o número de Prandtl definido pela relação:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{K} = \frac{\rho \nu c_p}{K}, \quad (4.30)$$

$Nu_c$  e  $Nu_h$  são os números de Nusselt médio na superfície fria e quente, respectivamente, onde:

$$Nu_c = \frac{hH}{K}, \quad (4.31a)$$

$$Nu_h = \frac{hH}{K}. \quad (4.31b)$$

Define-se, a seguir, os seguintes parâmetros geométricos.

A é a razão de aspecto da cavidade:

$$A = \frac{H}{L}, \quad (4.32)$$

A1 é a razão de aspecto do corpo quente:

$$A1 = \frac{H_c}{L_c}, \quad (4.33)$$

A2 é a razão da altura da cavidade pela altura do corpo:

$$A2 = \frac{H}{H_c}, \quad (4.34)$$

H\* é a razão da posição vertical do centro do corpo pela altura da cavidade:

$$H^* = \frac{\bar{h}}{H}, \quad (4.35)$$

L\* é a razão da posição horizontal do centro do corpo pela largura da cavidade:

$$L^* = \frac{\bar{\ell}}{L}. \quad (4.36)$$

Para o estudo de convecção natural, três casos são abordados. Considera-se o regime não permanente e o escoamento como sendo bidimensional. Os parâmetros utilizados pelos 3 casos são:

Caso 1:

$$10^4 \leq Gr \leq 5 \times 10^5, \quad (4.37a)$$

$$Pr = 0,733, \quad (4.37b)$$

$$A = 2, \quad (4.37c)$$

$$A1 = 0,98, \quad (4.37d)$$

$$A2 = 11, \quad (4.37e)$$

$$L^* = 0,5, \quad (4.37f)$$

$$H^* = 0,5. \quad (4.37g)$$

Caso 2:

$$10^4 \leq Gr \leq 5 \times 10^5, \quad (4.38a)$$

$$Pr = 0,733, \quad (4.38b)$$

$$A = 2, \quad (4.38c)$$

$$A1 = 0,98, \quad (4.38d)$$

$$A2 = 11, \quad (4.38e)$$

$$L^* = 0,5, \quad (4.38f)$$

$$H^* = 0,2454. \quad (4.38g)$$

Caso 3:

$$10^4 \leq Gr \leq 5 \times 10^5, \quad (4.39a)$$

$$Pr = 0,733, \quad (4.39b)$$

$$A = 2, \quad (4.39c)$$

$$H^* = 0 \text{ ( sem corpo interno )}. \quad (4.39d)$$

Em todos os três casos foi usado uma malha de elementos finitos  $28 \times 56$ , o que corresponde a um total de 2.970 elementos.

O caso 3 corresponde a situação clássica da cavidade sem corpo no seu interior.

Os casos 1 e 2 correspondem, respectivamente, às situações onde o corpo está no centro da cavidade e aproximadamente a 25% da altura da cavidade  $H$ .

As condições iniciais e de contorno são apresentadas, a seguir, para os três casos de estudo de convecção natural em uma cavidade fechada com um corpo quente.

i) condições iniciais:

para  $\tau = 0$ :

$$\psi = \theta = \omega = 0 \quad (\text{ em } \Omega), \quad (4.40)$$

ii) condições de contorno:

para  $\tau > 0$ :

$$\theta = -1 \quad (\text{ em } S_2), \quad (4.41a)$$

$$\theta = 1 \quad (\text{ em } S_1 \text{ e } S_5), \quad (4.41b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (\text{ em } S_3 \text{ e } S_4), \quad (4.41c)$$

$$\psi_w = 0 \quad (\text{ em } S_1, S_2, S_3, S_4 \text{ e } S_5), \quad (4.41d)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} = 0 \quad (\text{ em } S_1, S_2, S_3, S_4 \text{ e } S_5), \quad (4.41e)$$

$$\omega_w = \frac{3(\psi_B - \psi_N)}{\ell^2} - \frac{\omega_N}{2} \quad (\text{ em } S_1, S_2, S_3, S_4 \text{ e } S_5), \quad (4.41f)$$

onde:

$S_1$  é a superfície isotérmica quente com temperatura  $T_h$ ;

$S_2$  é a superfície isotérmica fria com temperatura  $T_c$ ;

$S_3$  e  $S_4$  são as superfícies isoladas :

$S_5$  são as superfícies isotérmicas do corpo quente com temperatura  $T_h$  ;

$\Omega$  representa o domínio da geometria analisada.

As figuras 4.22 e 4.23 mostram, para os três casos citados, o número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  e na superfície fria  $Nu_c$ , respectivamente, versus o número de Grashof  $Gr$  .

A figura 4.22 apresenta o resultado do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  versus o número de Grashof  $Gr$ . Desta figura, observa-se que, à medida que cresce o número de Grashof, o valor do número de Nusselt médio na superfície quente também cresce para toda a faixa do número de Grashof. Para um dado valor do número de Grashof, por exemplo  $Gr = 10^5$ , tem-se valores diferentes do número de Nusselt médio  $Nu_h$  para cada um dos casos. Para os casos 1 e 2, observa-se que quando diminui-se o valor de  $H^*$ , o valor do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  também diminui. Para o caso 3, os valores do Nusselt  $Nu_h$  são maiores em relação aos casos 1 e 2.

A figura 4.23 apresenta o resultado do número de Nusselt médio na superfície fria  $Nu_c$  versus o número de Grashof  $Gr$  . As curvas da figura 4.23 tem o mesmo comportamento das curvas da figura 4.22, isto é, com o aumento do Grashof, aumenta-se também o valor do Nusselt médio  $Nu_c$  . Para número de Grashof na faixa  $Gr = 10^5$  até  $5 \times 10^5$ , as curvas para os casos 1 e 2 praticamente coincidem. As mesmas curvas, para Grashof na faixa  $Gr = 10^4$  até  $10^5$ , diferem muito pouco uma da outra. Observa-se para os casos 1 e 2 que os números de Nusselt médio na superfície fria  $Nu_c$  são maiores que os números de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$ , considerando os mesmos parâmetros. Entretanto, para o caso 3, o número de Nusselt médio nas superfícies quente e fria são iguais. As justificativas para os resultados apresentados nas figuras 4.22 e 4.23 serão apresentados no final deste item, após realizar as distribuições da função corrente e temperatura.

As figuras de 4.24 a 4.26 apresentam a distribuição da função corrente  $\psi$  e temperatura adimensional  $\theta$  para os três casos, considerando os valores do número de Grashof  $Gr = 10^4$ ,  $10^5$  e  $5 \times 10^5$  .

A figura 4.24 apresenta os resultados para o caso 1 onde o corpo quente está no centro da cavidade retangular. Na figura 4.24, as distribuições da função corrente  $\psi$  são apresentadas no lado esquerdo da página e as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  no lado direito. Para a distribuição da função corrente  $\psi$ , observa-se o aparecimento de duas células que giram no sentido anti-horário. O fluido que está próximo à superfície quente ( superfície à direita com

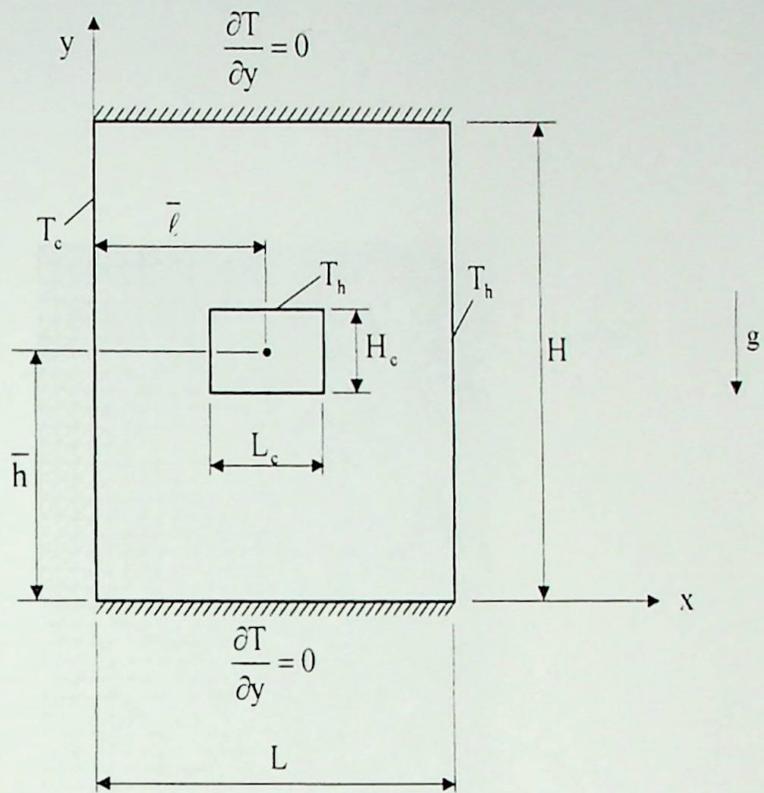


Figura 4.20a – Geometria e condições de contorno dimensionais.

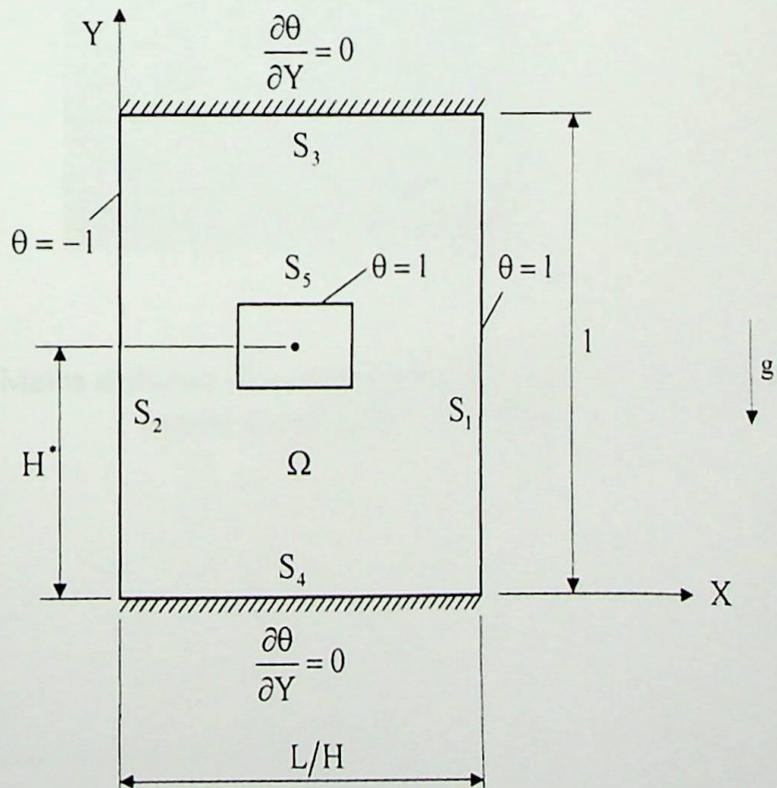


Figura 4.20b – Geometria e condições de contorno adimensionais.

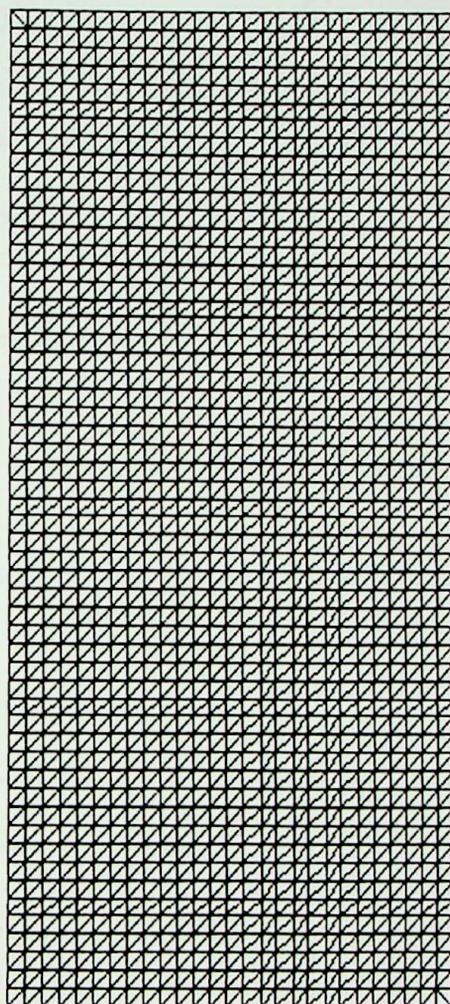


Figura 4.21 – Malha uniforme  $28 \times 56$  de elementos finitos utilizada no programa computacional para os três casos.

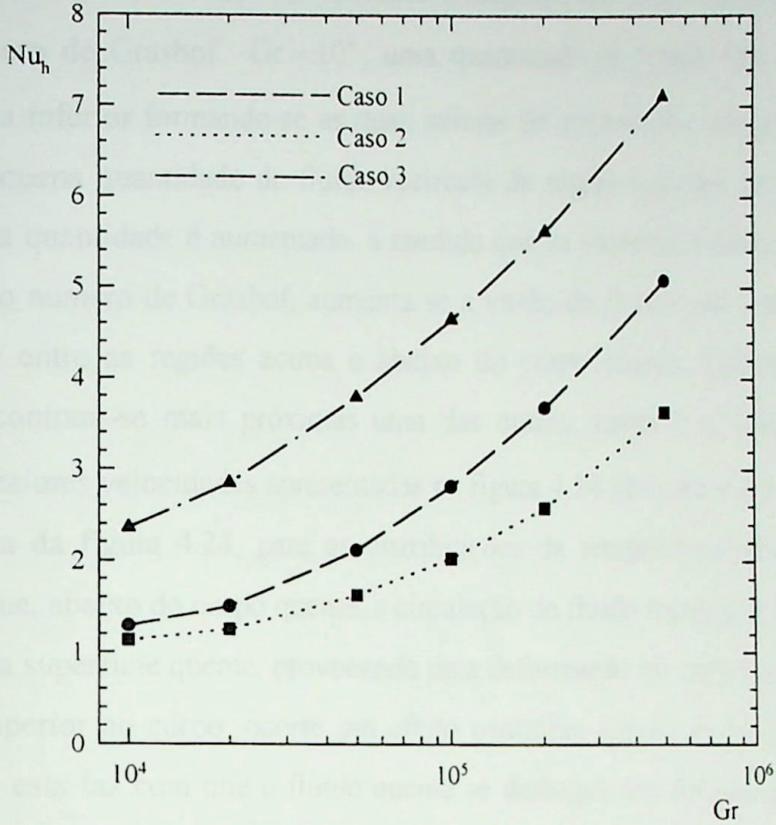


Figura 4.22 – Número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  versus número de Grashof  $Gr$ , para os três casos.

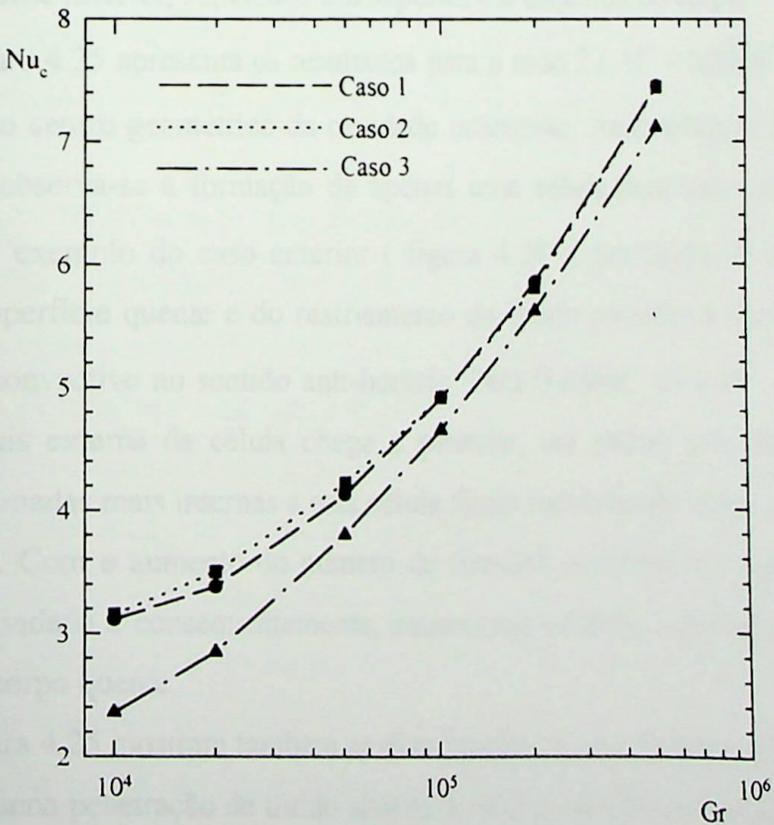


Figura 4.23 – Número de Nusselt médio na superfície fria  $Nu_c$  versus número de Grashof  $Gr$ , para os três casos.

$\theta = 1$ ) é aquecido e sobe. O fluido próximo à superfície fria ( $\theta = -1$ ) é resfriado e desce. O corpo quente, na posição central da cavidade retangular, provoca a formação destas duas células. Para o número de Grashof  $Gr = 10^4$ , uma quantidade de fluido fica recirculando na região superior e na inferior formando-se as duas células de convecção. Ainda para  $Gr = 10^4$ , nota-se que uma pequena quantidade de fluido recircula da região superior da cavidade para a região inferior. Esta quantidade é aumentada, à medida que se aumenta o número de Grashof. Quando se aumenta o número de Grashof, aumenta-se a vazão de fluido que circula dentro da cavidade retangular e entre as regiões acima e abaixo do corpo quente. Quando as linhas da função corrente encontram-se mais próximas uma das outras, maior é a velocidade neste local. As regiões de maiores velocidades apresentadas na figura 4.24 são para  $Gr = 5 \times 10^5$ .

Ainda da figura 4.24, para as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$ , pode ser observado que, abaixo do corpo quente, a circulação do fluido transporta uma parte do fluido frio na direção da superfície quente, provocando uma deformação no campo de temperatura. Na parte do fluido superior ao corpo, ocorre um efeito contrário. Como a circulação ocorre no sentido anti-horário, esta faz com que o fluido quente se desloque em direção à superfície fria. Com o aumento do número do Grashof, aumenta a deformação do campo de temperatura. Quando as linhas isotérmicas se aproximam entre si, isto indica um alto gradiente de temperatura. Para Grashof  $Gr = 5 \times 10^5$ , regiões com altos gradientes de temperatura se formam próximo à superfície quente inferior, superfície fria superior e à esquerda do corpo.

A figura 4.25 apresenta os resultados para o caso 2 ( $H^* = 0,2454$ ) onde o corpo quente está abaixo do centro geométrico da cavidade retangular. Analisando as distribuições da função corrente  $\psi$ , observa-se a formação de apenas uma célula para todos os números de Grashof estudados. A exemplo do caso anterior ( figura 4.24 ), por causa do aquecimento do fluido próximo à superfície quente e do resfriamento do fluido próximo à superfície fria, forma-se o escoamento convectivo no sentido anti-horário. Para Grashof  $Gr = 10^4$ , uma camada de fluido da região mais externa da célula chega a penetrar, um pouco, pelo lado esquerdo do corpo quente. As camadas mais internas a esta célula ficam recirculando numa mesma região acima do corpo quente. Com o aumento do número de Grashof, aumenta-se a recirculação do fluido no interior da cavidade e conseqüentemente, aumenta-se também a penetração de fluido pelo lado esquerdo do corpo quente.

A figura 4.25 mostram também as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$ . Como se tem uma pequena penetração de fluido abaixo do corpo quente, a circulação do fluido na direção da superfície quente será pequena. Ou seja, para valores de Grashof  $Gr = 10^4$  e  $10^5$ , não se forma nenhuma região de altos gradientes de temperaturas próximas à superfície quente. Para

Grashof  $Gr = 5 \times 10^5$  obtém uma penetração maior de fluido, provocando altos gradientes de temperatura próximos à esta superfície quente. Comparando as figuras 4.24 e 4.25 para  $Gr = 5 \times 10^5$ , observa-se que a região com altos gradientes de temperatura próxima à superfície quente tem menor dimensão para o caso onde o corpo está na posição mais baixa.

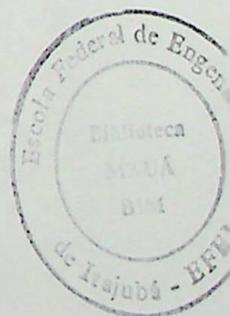
A figura 4.26 apresenta os resultados para o caso 3 ( $H^* = 0$ ) onde não se tem nenhum corpo quente no interior da cavidade retangular. O escoamento, assim como nos outros casos, se dá no sentido anti-horário. Forma-se apenas uma célula convectiva que ocupa toda a cavidade retangular. À medida que se aumenta o número de Grashof, aumenta-se a circulação do fluido na cavidade. Na figura para Grashof  $Gr = 5 \times 10^5$ , as linhas de  $\psi$  estão mais próximas uma das outras junto às superfícies quente e fria indicando altas velocidades do fluido.

Nas distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  para a figura 4.26, os gradientes são altos nas regiões próximas das superfícies quente e fria. Para Grashof  $Gr = 10^4$ , as linhas de temperatura se apresentam quase que paralelas uma das outras, demonstrando um caso de condução pura com baixos gradientes de temperatura. Para Grashof  $Gr = 10^5$ , as linhas de temperatura estão mais deformadas, devido a maior recirculação do fluido, provocando altos gradientes de temperatura próximos às duas superfícies. Para Grashof  $Gr = 5 \times 10^5$ , os gradientes são ainda maiores do que para  $Gr = 10^5$ .

Após analisar as ilustrações das distribuições da função corrente  $\psi$  e da temperatura adimensional  $\theta$  das figuras 4.24 a 4.26, pode-se justificar o comportamento das curvas, dos números de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  e na superfície fria  $Nu_c$ , das figuras 4.22 e 4.23.

A figura 4.22, como já descrita anteriormente, apresenta o número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  versus o número de Grashof  $Gr$  para os três casos estudados. Observa-se que, para o caso 3 (figura 4.26) com valores de Grashof  $Gr = 10^5$  e  $5 \times 10^5$ , a ausência do corpo interno faz com que haja uma maior região, próximas às superfícies quente e fria, com altos gradientes de temperatura. Com a presença do corpo, nos casos 1 e 2, essa região com altos gradientes diminui. As distribuições de temperatura adimensional  $\theta$  das figuras 4.24 e 4.25 para  $Gr = 5 \times 10^5$  mostram com maior clareza essas regiões. Nesses mesmos casos 1 e 2, quando o parâmetro  $H^*$  diminui, essa região, próxima à superfície quente, também diminui. Como o corpo quente está na mesma temperatura  $\theta = 1$  da superfície quente à direita, as trocas de calor na região entre o corpo e a superfície quente diminuem. Conseqüentemente, a dimensão vertical da região com gradientes altos de temperatura que estão próximos à superfície quente também diminuem. Logo, os valores dos números de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  diminuem, para um dado valor de Grashof.

A figura 4.23, também já descrita anteriormente neste capítulo, apresenta o número de Nusselt médio na superfície fria  $Nu_c$  versus o número de Grashof  $Gr$  para os três casos. Nos casos 1 e 2, a presença do corpo quente faz com que aumentem os gradientes de temperaturas na região entre o corpo e a superfície fria. Como resultado disto, as curvas de Nusselt  $Nu_c$  para os casos 1 e 2, estão ligeiramente acima em relação ao caso 3 ( sem corpo interno ). Poucas diferenças se observa entre os casos 1 e 2, sendo que para Grashof na faixa de  $Gr = 10^5$  a  $5 \times 10^5$  as curvas de Nusselt  $Nu_c$  coincidem.



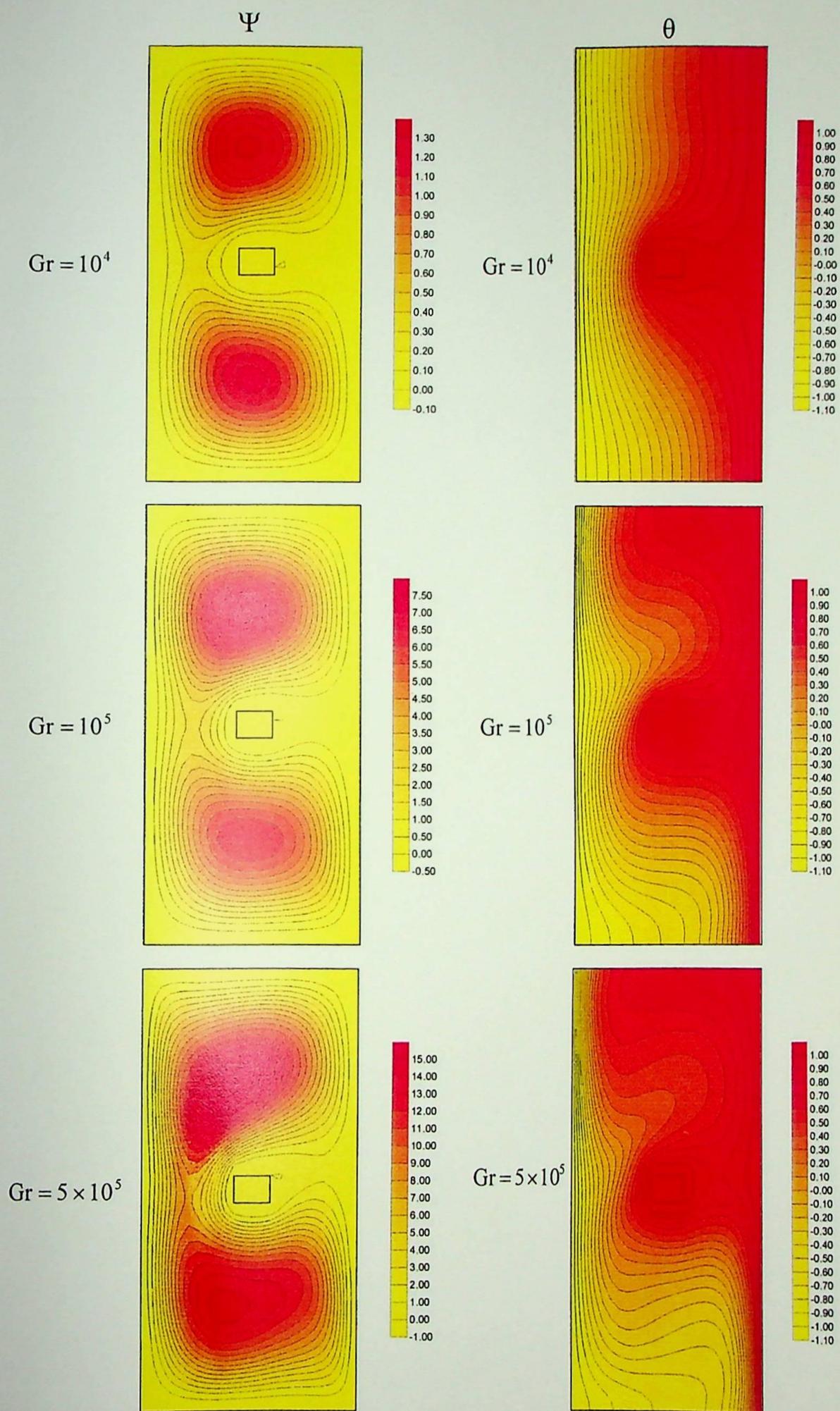


Figura 4.24 – Distribuições da função corrente  $\psi$  e da temperatura  $\theta$  para o caso 1 com  $Pr = 0,733$ ;  $A = 2$ ;  $A_1 = 0,98$ ;  $A_2 = 11$ ;  $L^* = 0,5$  e  $H^* = 0,5$ .

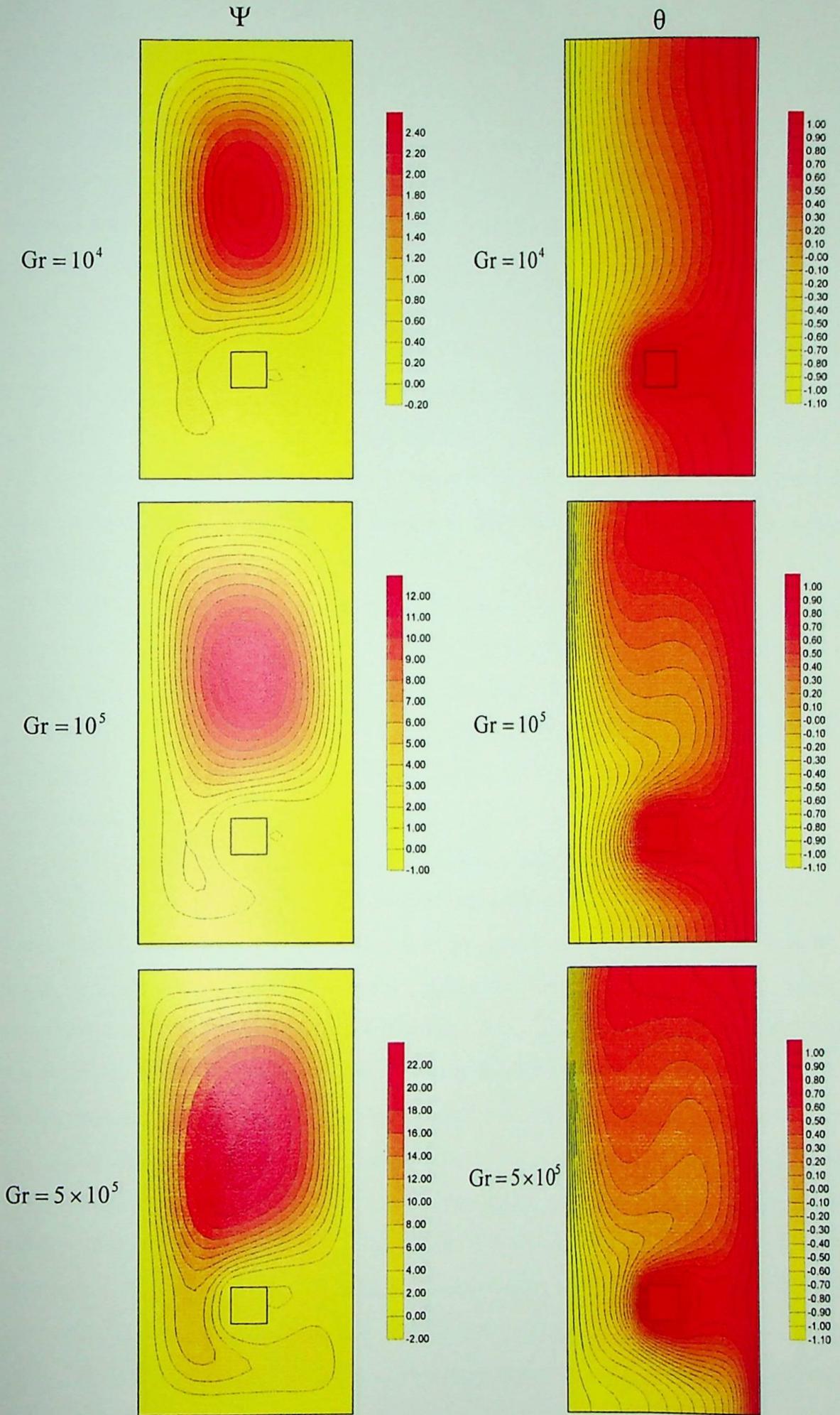


Figura 4.25 – Distribuições da função corrente  $\psi$  e da temperatura  $\theta$  para o caso 2 com  $Pr = 0,733$ ;  $A = 2$ ;  $A1 = 0,98$ ;  $A2 = 11$ ;  $L^* = 0,5$  e  $H^* = 0,2454$ .

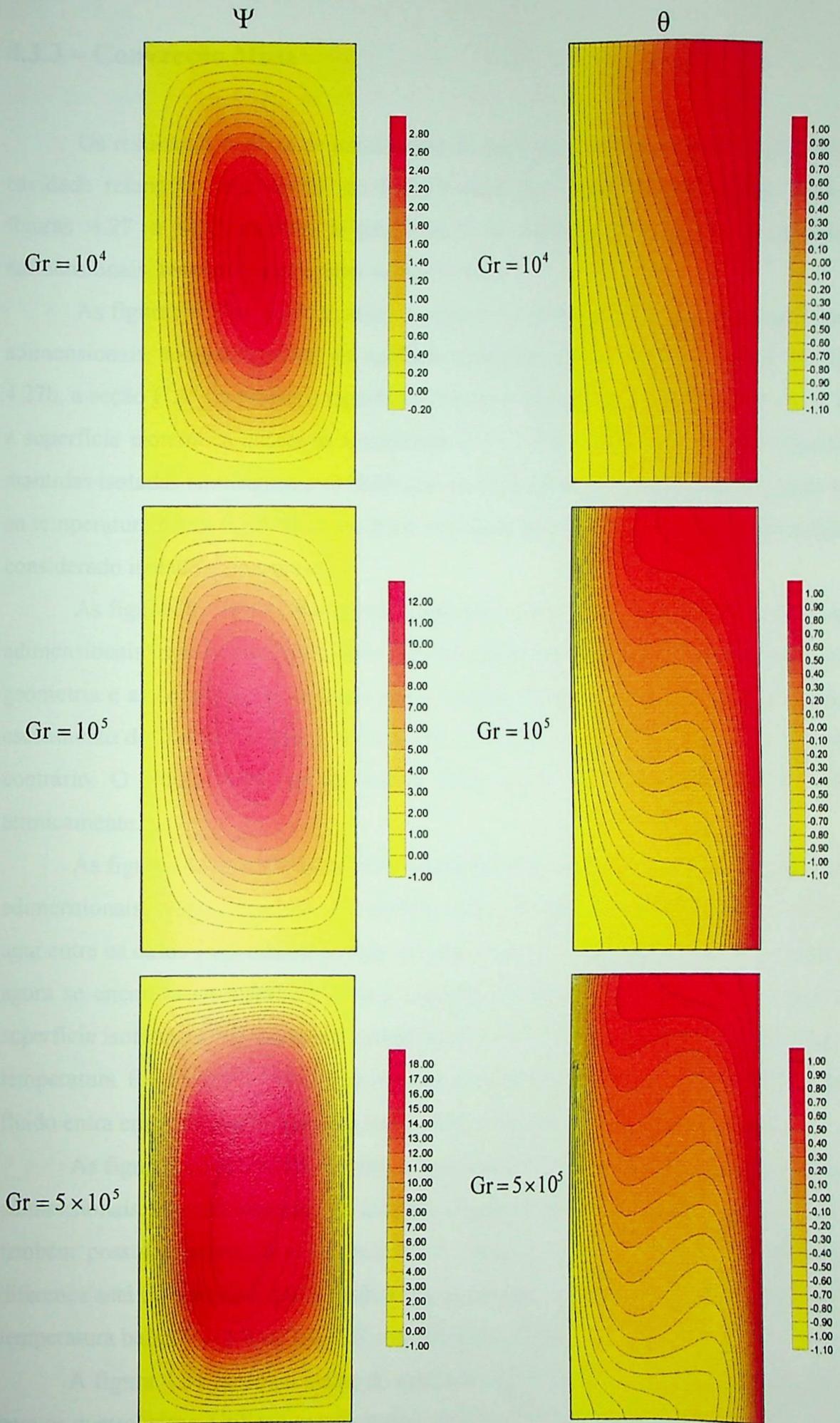


Figura 4.26 – Distribuições da função corrente  $\psi$  e da temperatura  $\theta$  para o caso 3 com  $Pr = 0,733$ ;  $A = 2$  e  $H^* = 0$  (sem corpo interno).

### 4.3.3 – Convecção Mista

Os resultados teóricos de transferência de calor por convecção mista no interior de uma cavidade retangular semi-aberta são tratados neste item. Serão analisados quatro casos. As figuras 4.27 a 4.30 ilustram a geometria e as condições de contorno dimensionais e adimensionais, respectivamente, para os quatro casos.

As figuras 4.27a e 4.27b mostram a geometria e as condições de contorno dimensionais e adimensionais, respectivamente, da cavidade retangular semi-aberta para o caso 1. Da figura 4.27b, a seção  $F'A'$  representa a superfície isotérmica fria mantida na temperatura  $\theta = 0$ ,  $C'D'$  é a superfície isotérmica quente na temperatura  $\theta = 1$  e  $D'E'$  e  $B'C'$  representam as superfícies mantidas isoladas termicamente. O fluido que recircula dentro da cavidade entra pela seção  $A'B'$  na temperatura baixa  $\theta = 0$ . O fluido deixa a cavidade pela seção  $E'F'$  e em sua saída, o fluido é considerado isolado termicamente.

As figuras 4.28a e 4.28b mostram a geometria e as condições de contorno dimensionais e adimensionais, respectivamente, da cavidade retangular semi-aberta para o caso 2. Nota-se que a geometria e as condições de contorno são as mesmas do caso 1, com a diferença do sentido de escoamento do fluido. No caso 1, o fluido entra em  $A'B'$  e sai em  $E'F'$ . Para o caso 2, ocorre o contrário. O fluido entra, na temperatura baixa  $\theta = 0$ , em  $E'F'$  e sai em  $A'B'$ , isolado termicamente.

As figuras 4.29a e 4.29b mostram a geometria e as condições de contorno dimensionais e adimensionais, respectivamente, da cavidade retangular semi-aberta para o caso 3. A diferença aqui entre os casos 1 e 2 está na posição de saída ( caso 1 ) ou de entrada ( caso 2 ) do fluido que agora se encontra na superfície vertical à direita. Da figura 4.29b, a seção  $F'A'$  representa a superfície isotérmica fria mantida na temperatura  $\theta = 0$ ,  $C'D'$  é a superfície isotérmica quente na temperatura  $\theta = 1$  e  $E'F'$  e  $B'C'$  representam as superfícies mantidas isoladas termicamente. O fluido entra em  $A'B'$ , na temperatura baixa  $\theta = 0$ , e sai em  $D'E'$ , isolado termicamente.

As figuras 4.30a e 4.30b mostram a geometria e as condições de contorno dimensionais e adimensionais, respectivamente, da cavidade retangular semi-aberta para o caso 4. Este caso também possui a geometria e as condições de contorno iguais ao caso 3 anterior descrito. A diferença está no sentido a qual o fluido entra na cavidade. No caso 4, o fluido entra em  $D'E'$ , na temperatura baixa  $\theta = 0$  e sai em  $A'B'$ , isolado termicamente.

A figura 4.31 mostra a malha de elementos finitos utilizada no programa computacional para os quatro casos. Utilizou-se uma malha  $28 \times 56$  uniforme com 2.970 elementos.

Em todos os casos a cavidade retangular semi-aberta é composta por duas superfícies horizontais isoladas termicamente. No lado esquerdo da cavidade, a superfície fria é mantida na

temperatura  $\theta = 0$  e no lado direito, a superfície quente é mantida na temperatura  $\theta = 1$ . Uma diferença, entre os casos estudados, se dá nas posições das regiões de entrada e da saída do fluido. Outra diferença resulta de qual lado o fluido entra na cavidade. Tanto a entrada, como a saída, se localizam somente nas superfícies verticais da cavidade. É importante destacar que, independente da posição ou lado de entrada ou de saída do fluido, o fluido entra sempre na temperatura baixa  $\theta = 0$  e sai sempre isolado termicamente. Em cada caso as posições de entrada e saída do fluido são fixas.

As equações de conservação para convecção mista são dadas pelas equações (2.85), (2.86) e (2.87). Estas equações representam as equações de conservação em termos da função corrente ( $\psi$ ), temperatura adimensional ( $\theta$ ) e vorticidade ( $\omega$ ), respectivamente, e são dadas por:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0, \quad (4.42)$$

$$\frac{1}{\text{Re Pr}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (4.43)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \left( \cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial X} - \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}, \quad (4.44)$$

onde Gr é o número de Grashof definido pela relação:

$$\text{Gr} = \frac{g\beta(T_h - T_c)H^3}{\nu^2}, \quad (4.45)$$

Re é o número de Reynolds definido pela relação:

$$\text{Re} = \frac{U_o H}{\nu}, \quad (4.46)$$

Pr é o número de Prandtl definido pela relação:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{K} = \frac{\rho \nu c_p}{K}, \quad (4.47)$$

$\text{Nu}_h$  o número de Nusselt médio da superfície quente onde:

$$\text{Nu}_h = \frac{hH}{K}. \quad (4.48)$$

Define-se, a seguir, os seguintes parâmetros geométricos:

D é a razão da dimensão da entrada ou da saída do fluido pela altura da cavidade:

$$D = \frac{d}{H}, \quad (4.49)$$

e A é a razão de aspecto definido por:

$$A = \frac{H}{L}. \quad (4.50)$$

Para o estudo de convecção mista quatro casos são abordados. Considera-se o regime não permanente e o escoamento como sendo bidimensional. Todos os quatro casos utilizam os mesmos parâmetros, sendo que a diferença de um caso para o outro estão nas posições de entrada e saída do fluido e no sentido de seu escoamento. Os parâmetros utilizados pelos 4 casos são:

$$0 \leq Gr \leq 5 \times 10^5, \quad (4.51a)$$

$$Pr = 0,7, \quad (4.51b)$$

$$1 \leq Re \leq 100, \quad (4.51c)$$

$$A = 2, \quad (4.51d)$$

$$D = 0,2. \quad (4.51e)$$

Fez-se um estudo da influência do refinamento da malha sobre os resultados do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  para todos os casos. Este estudo é apresentado a seguir para o caso 1.

As figuras 4.32 e 4.33 mostram, para o caso 1, o número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  versus o número de elementos NE. As curvas são apresentadas para Grashof  $Gr = 10^4$  e  $5 \times 10^5$ . As figuras 4.32 e 4.33 são apresentadas para número de  $Re = 1$  e 100, respectivamente. As malhas utilizadas foram 360, 1.190, 1.520 e 2.970 elementos. Observa-se que a convergência dos valores do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  ocorre à medida que o número de elementos NE aumenta.

As figuras 4.34a e 4.34b apresentam, também para o caso 1, os desvios percentuais do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  em relação ao número de elementos NE. Foram utilizadas malhas com 360, 1.190, 1.520 e 2.970 elementos. As figuras 4.34a e 4.34b são para Grashof  $10^4$  e  $5 \times 10^5$  e Reynolds 1 e 100, respectivamente. Os desvios são calculados com relação a malha mais refinada com 2.970 elementos.

Das figuras 4.34a e 4.34b se observa que o desvio diminui com o refinamento da malha. Para uma malha com 1.520 elementos o desvio é menor que 0,40 %, o que pode ser considerado satisfatório. Apesar disto em todos os casos a seguir apresentados foi utilizada uma malha uniforme  $28 \times 56$  com 2.970 elementos.

Para o caso 1, conforme mostrado nas figuras 4.27a e 4.27b, será feita uma validação do programa computacional de convecção mista, para o caso limite quando  $Re \rightarrow 0$ , o qual recai no caso de convecção natural. Esta situação limite foi testada usando os programas de convecção natural e mista com a finalidade de verificar os desvios nos resultados calculados para o número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$ . Neste teste foram considerados os seguintes parâmetros: número de Grashof  $Gr = 10^4, 10^5$  e  $5 \times 10^5$ ; número de Prandtl fixo em  $Pr = 0,7$  e razão de aspecto  $A = 2$ . Foi utilizada uma malha uniforme  $28 \times 56$  equivalente a 2.970 elementos. O maior desvio no cálculo do número de Nusselt médio da superfície quente  $Nu_h$  foi de  $-7,95\%$  para  $Gr = 5 \times 10^5$  e o menor desvio foi de  $-4,53\%$  para  $Gr = 10^4$ .

As condições iniciais e de contorno das equações 4.42 a 4.44 são apresentadas, a seguir, para os quatro casos de estudo de convecção mista em uma cavidade retangular semi-aberta.

i) condições iniciais para todos os casos:

para  $\tau = 0$ :

$$\psi = \theta = \omega = 0 \quad (\text{em } \Omega), \quad (4.52)$$

ii) condições de contorno do caso 1:

da figura 4.27b, tem-se:

para  $\tau > 0$ :

$$\theta = 0 \quad (\text{em } F'A'B'), \quad (4.53a)$$

$$\theta = 1 \quad (\text{em } C'D'), \quad (4.53b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (\text{em } D'E' \text{ e } B'C'), \quad (4.53c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad (\text{em } E'F'), \quad (4.53d)$$

$$\psi_w = 0 \quad (\text{em } B'C'D'E'), \quad (4.53e)$$

$$\psi_w = D \quad (\text{em } F'A'), \quad (4.53f)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} = 0 \quad (\text{em } B'C'D'E' \text{ e } F'A'), \quad (4.53g)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = 0 \quad (\text{em } E'F' \text{ e } A'B'), \quad (4.53h)$$

$$\psi = \frac{1}{2}D + \frac{3}{2}\delta - \frac{2\delta^3}{D^2} \quad (\text{em } A'B'), \quad (4.53i)$$

$$\psi = \frac{1}{2}D - \frac{3}{2}\delta + \frac{2\delta^3}{D^2} \quad (\text{em } E'F'), \quad (4.53j)$$

$$\omega_w = \frac{3(\psi_B - \psi_N)}{\ell^2} - \frac{\omega_N}{2} \quad (\text{em } B'C'D'E' \text{ e } F'A'), \quad (4.53l)$$

$$\omega = \frac{12\delta}{D^2} \quad (\text{em } A'B'), \quad (4.53m)$$

$$\omega = -\frac{12\delta}{D^2} \quad (\text{em } E'F'), \quad (4.53n)$$

onde:

$\delta$  é uma coordenada paralela à direção do eixo Y, mas medida a partir da linha de centro da entrada A'B' ou da saída E'F', como mostrado na figura 4.27b ;

$\Omega$  representa o domínio da geometria analisada.

iii) condições de contorno do caso 2:

Da figura 4.28b, tem-se:

Para  $\tau > 0$  :

$$\theta = 0 \quad (\text{em } E'F'A'), \quad (4.54a)$$

$$\theta = 1 \quad (\text{em } C'D'), \quad (4.54b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (\text{em } D'E' \text{ e } B'C'), \quad (4.54c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad (\text{em } A'B'), \quad (4.54d)$$

$$\psi_w = 0 \quad (\text{em } F'A'), \quad (4.54e)$$

$$\psi_w = D \quad (\text{em } B'C'D'E'), \quad (4.54f)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} = 0 \quad (\text{em } B'C'D'E' \text{ e } F'A'), \quad (4.54g)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = 0 \quad (\text{em } E'F' \text{ e } A'B'), \quad (4.54h)$$

$$\psi = \frac{1}{2}D - \frac{3}{2}\delta + \frac{2\delta^3}{D^2} \quad (\text{em } A'B'), \quad (4.54i)$$

$$\psi = \frac{1}{2}D + \frac{3}{2}\delta - \frac{2\delta^3}{D^2} \quad (\text{em } E'F'), \quad (4.54j)$$

$$\omega_w = \frac{3(\psi_B - \psi_N)}{\ell^2} - \frac{\omega_N}{2} \quad (\text{em } B'C'D'E' \text{ e } F'A'), \quad (4.54l)$$

$$\omega = -\frac{12\delta}{D^2} \quad (\text{em } A'B'), \quad (4.54m)$$

$$\omega = \frac{12\delta}{D^2} \quad (\text{em } E'F'), \quad (4.54n)$$

iv) condições de contorno do caso 3:

Da figura 4.29b, tem-se:

Para  $\tau > 0$ :

$$\theta = 0 \quad (\text{em } F'A'B'), \quad (4.55a)$$

$$\theta = 1 \quad (\text{em } C'D'), \quad (4.55b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (\text{em } E'F' \text{ e } B'C'), \quad (4.55c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad (\text{em } D'E'), \quad (4.55d)$$

$$\psi_w = 0 \quad (\text{em } B'C'D'), \quad (4.55e)$$

$$\psi_w = D \quad (\text{em } E'F'A'), \quad (4.55f)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} = 0 \quad (\text{em } B'C'D' \text{ e } E'F'A'), \quad (4.55g)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = 0 \quad (\text{em } A'B' \text{ e } D'E'), \quad (4.55h)$$

$$\psi = \frac{1}{2}D + \frac{3}{2}\delta - \frac{2\delta^3}{D^2} \quad (\text{em } A'B' \text{ e } D'E'), \quad (4.55i)$$

$$\omega_w = \frac{3(\psi_B - \psi_N)}{\ell^2} - \frac{\omega_N}{2} \quad (\text{em } B'C'D' \text{ e } E'F'A'), \quad (4.55j)$$

$$\omega = \frac{12\delta}{D^2} \quad (\text{em } A'B' \text{ e } D'E'), \quad (4.55l)$$

v) condições de contorno do caso 4:

Da figura 4.30b, tem-se:

Para  $\tau > 0$ :

$$\theta = 0 \quad (\text{em } F'A' \text{ e } D'E'), \quad (4.56a)$$

$$\theta = 1 \quad (\text{em } C'D'), \quad (4.56b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (\text{em } E'F' \text{ e } B'C'), \quad (4.56c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad (\text{em } A'B'), \quad (4.56d)$$

$$\psi_w = 0 \quad (\text{em } E'F'A'), \quad (4.56e)$$

$$\psi_w = D \quad (\text{em } B'C'D'), \quad (4.56f)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} = 0 \quad (\text{em } B'C'D' \text{ e } E'F'A'), \quad (4.56g)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = 0 \quad (\text{em } A'B' \text{ e } D'E'), \quad (4.56h)$$

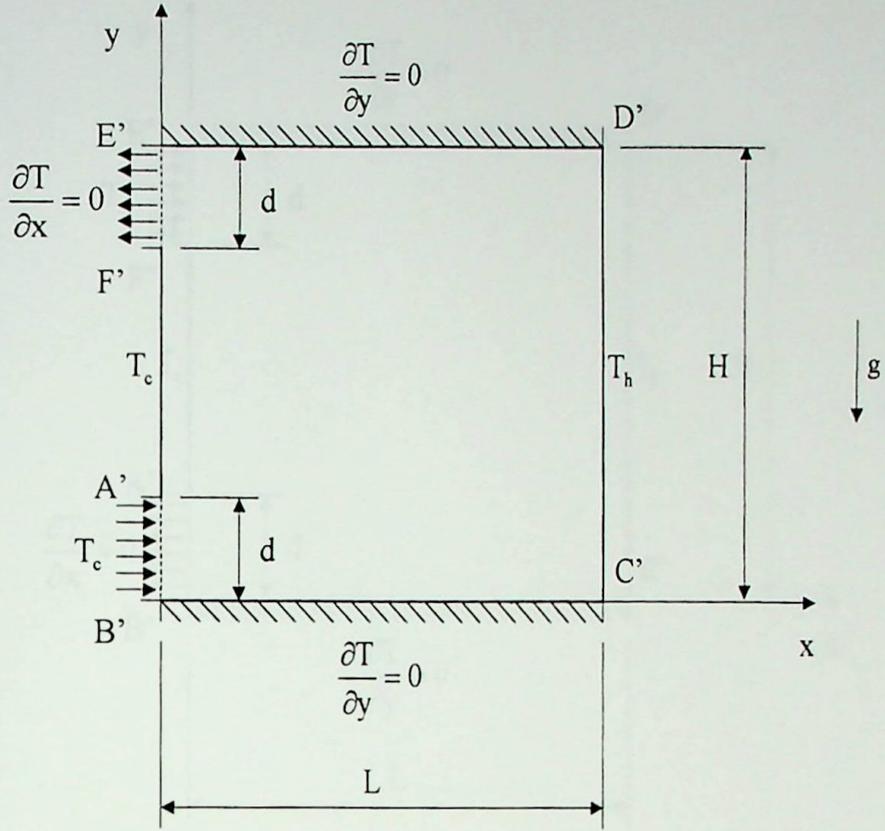


Figura 4.27a – Cavityde semi-aberta e as condições de contorno dimensionais ( Caso 1 ).

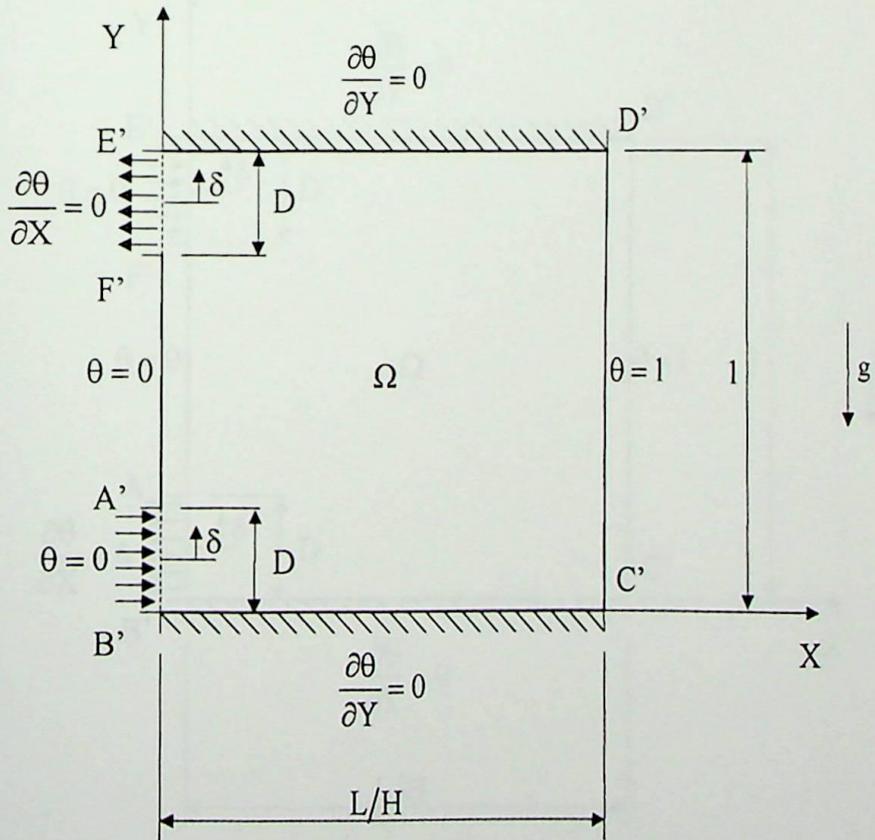


Figura 4.27b – Cavityde semi-aberta analisada e as condições de contorno adimensionais ( Caso 1 ).

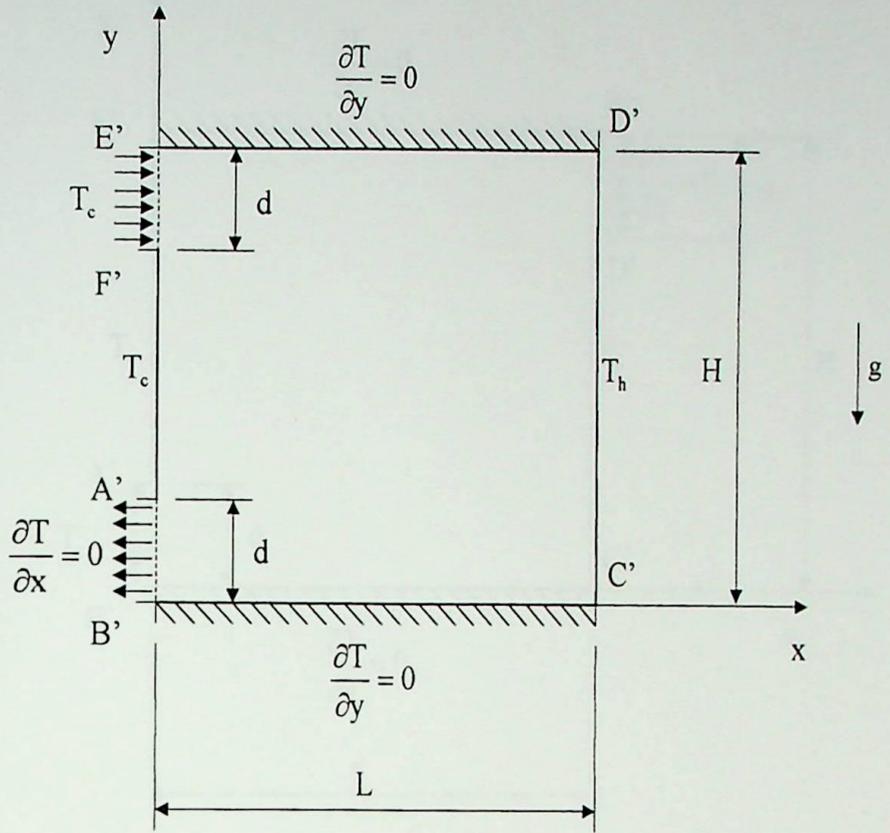


Figura 4.28a – Cavityde semi-aberta e as condições de contorno dimensionais ( Caso 2 ).

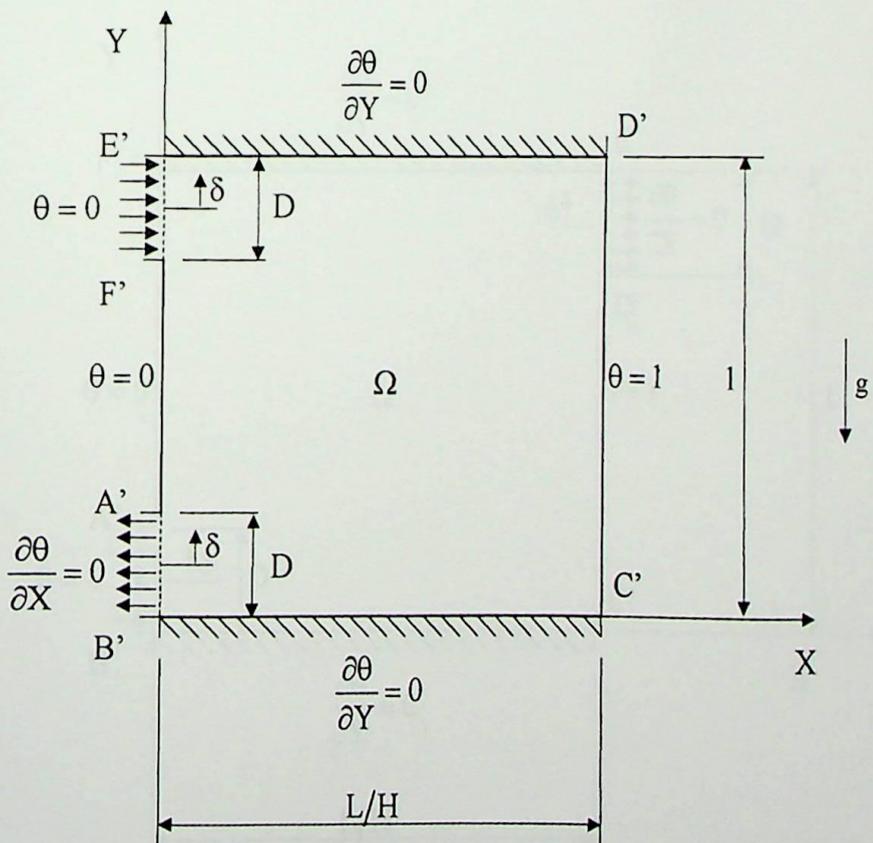


Figura 4.28b – Cavityde semi-aberta analisada e as condições de contorno adimensionais ( Caso 2 ).

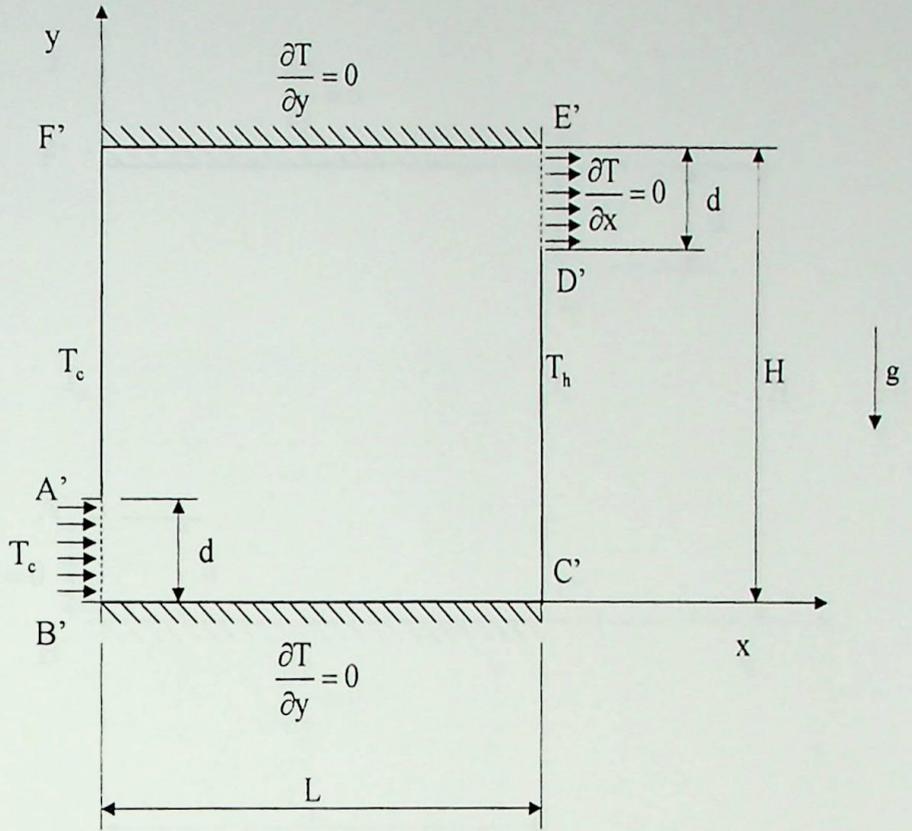


Figura 4.29a – Cavidade semi-aberta e as condições de contorno dimensionais ( Caso 3 ).

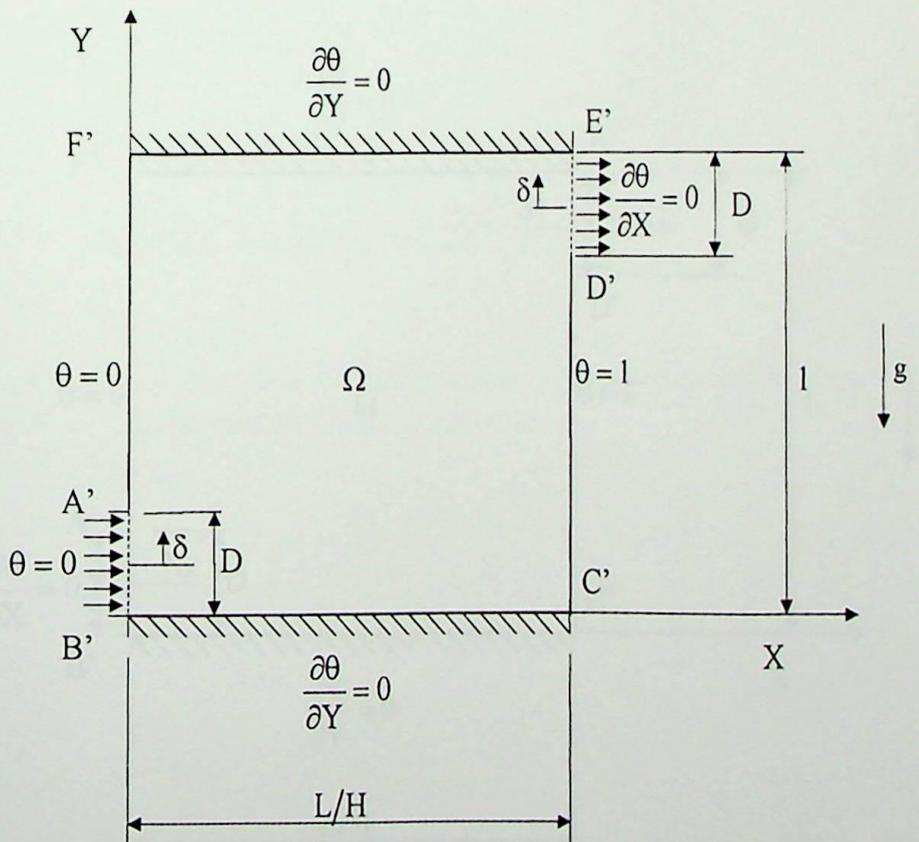


Figura 4.29b – Cavidade semi-aberta analisada e as condições de contorno adimensionais ( Caso 3 ).

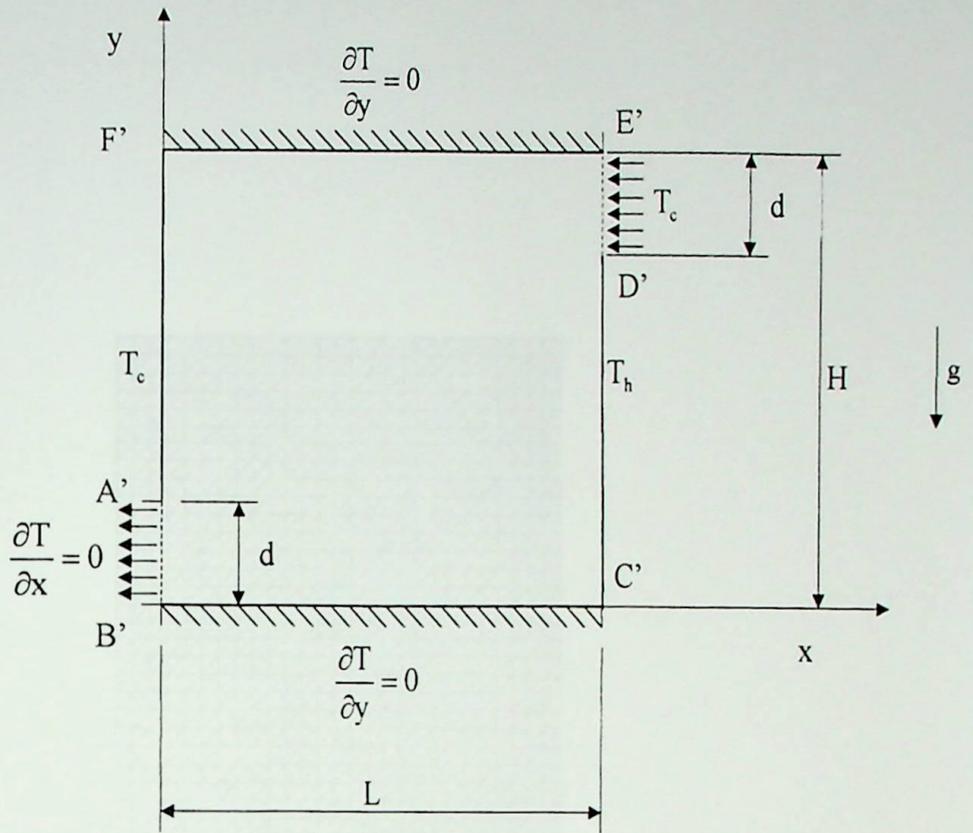


Figura 4.30a – Cavityde semi-aberta e as condições de contorno dimensionais ( Caso 4 ).

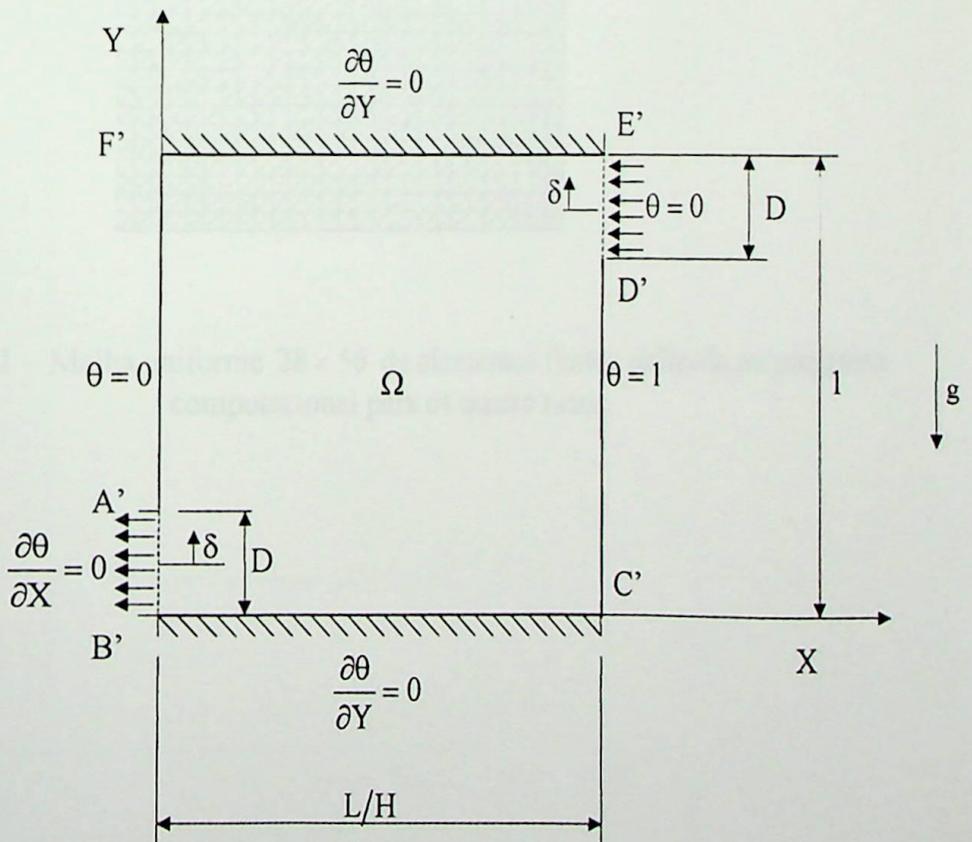


Figura 4.30b – Cavityde semi-aberta analisada e as condições de contorno adimensionais ( Caso 4 ).

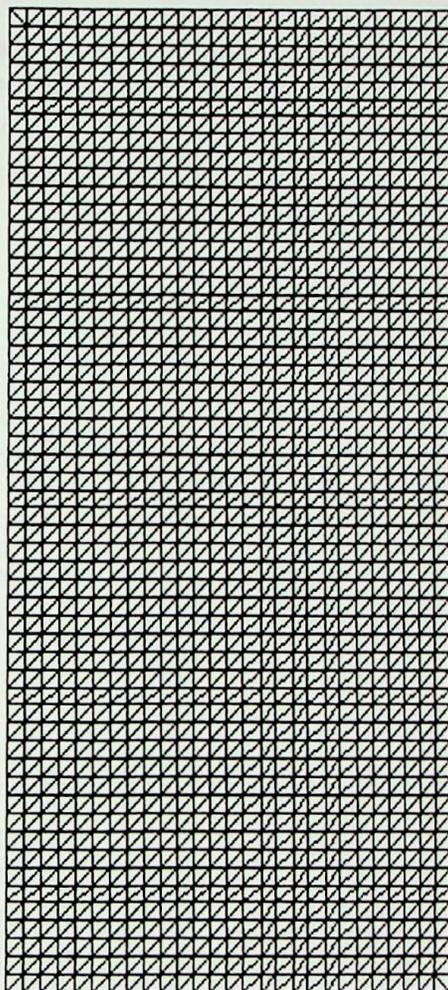


Figura 4.31 – Malha uniforme  $28 \times 56$  de elementos finitos utilizada no programa computacional para os quatro casos.

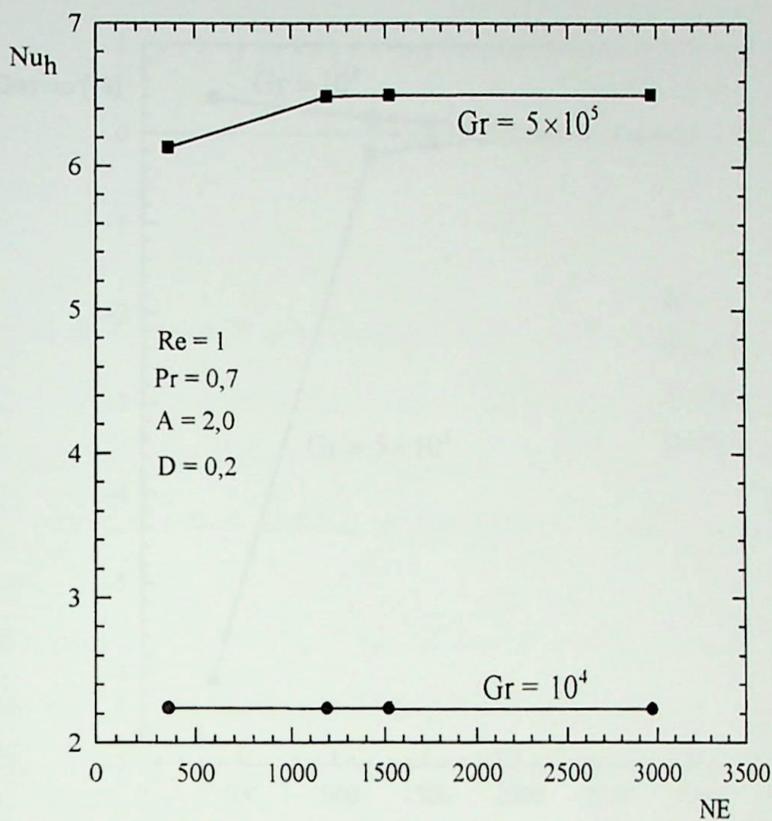


Figura 4.32 – Número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  versus número de elementos NE para  $Re = 1$ . ( Caso 1 )

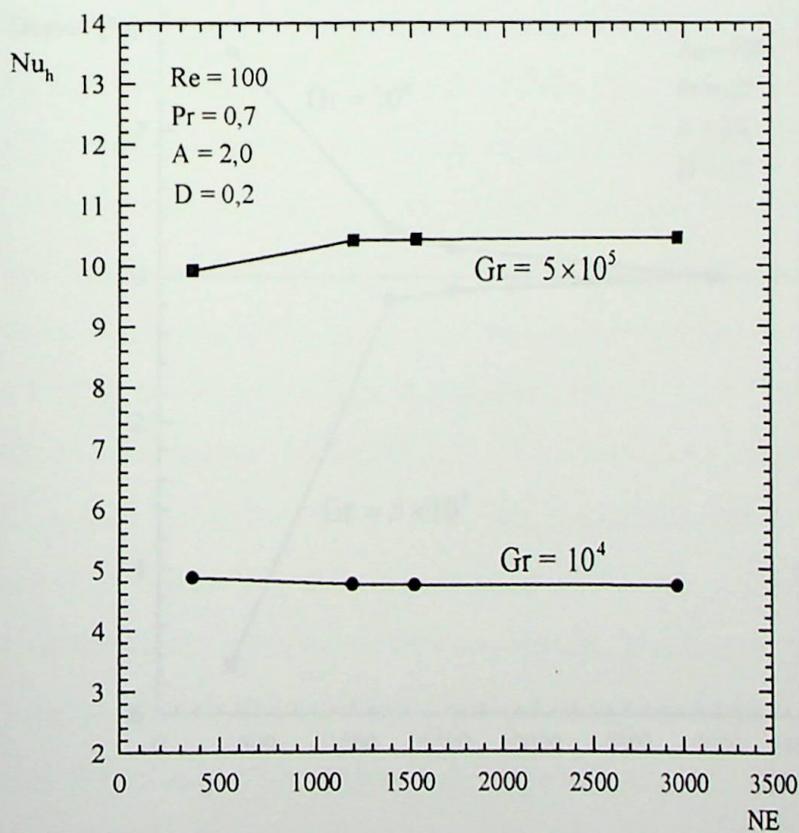


Figura 4.33 – Número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  versus número de elementos NE para  $Re = 100$ . ( Caso 1 )

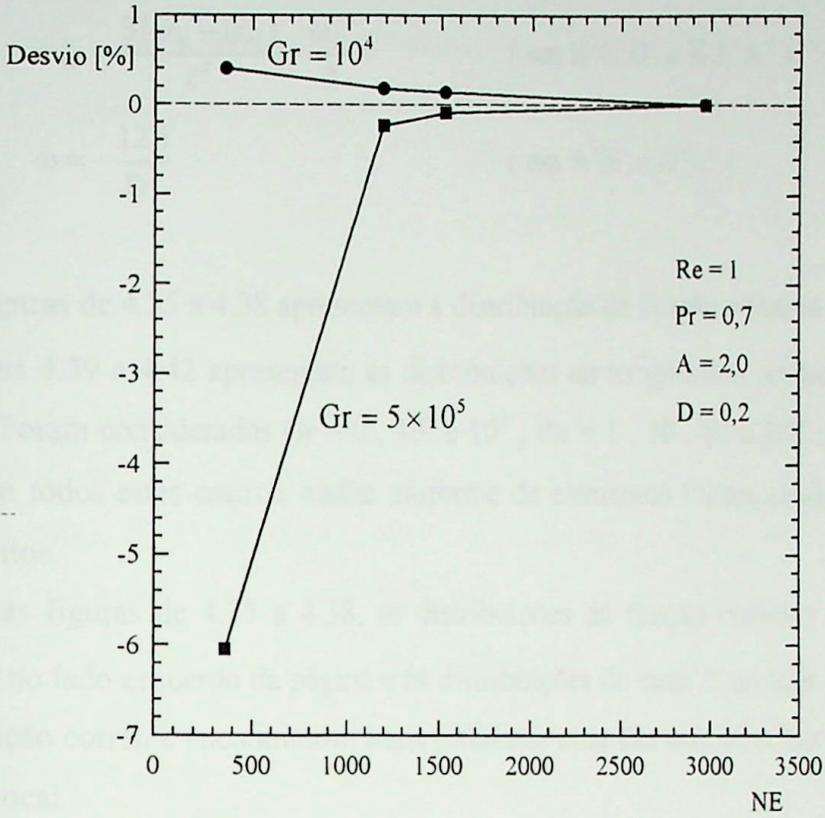


Figura 4.34a – Desvio percentual, em relação à malha mais refinada com 2.970 elementos, do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  versus o número de elementos NE para  $Re = 1$  ( Caso 1 ).

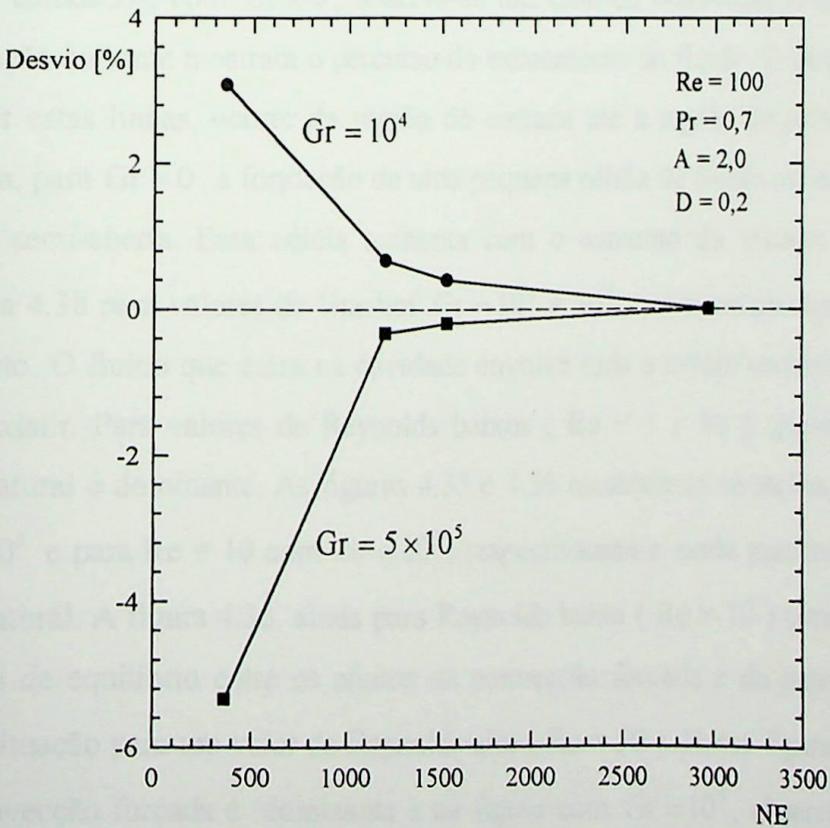


Figura 4.34b – Desvio percentual, em relação à malha mais refinada com 2.970 elementos, do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  versus o número de elementos NE para  $Re = 100$  ( Caso 1 ).

$$\psi = \frac{1}{2}D - \frac{3}{2}\delta + \frac{2\delta^3}{D^2} \quad (\text{em } A'B' \text{ e } D'E'), \quad (4.56i)$$

$$\omega_w = \frac{3(\psi_B - \psi_N)}{\ell^2} - \frac{\omega_N}{2} \quad (\text{em } B'C'D' \text{ e } E'F'A'), \quad (4.56j)$$

$$\omega = -\frac{12\delta}{D^2} \quad (\text{em } A'B' \text{ e } D'E'). \quad (4.56l)$$

As figuras de 4.35 a 4.38 apresentam a distribuição da função corrente  $\psi$  para os casos 1 e 2; as figuras 4.39 a 4.42 apresentam as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  para os casos 1 e 2. Foram considerados  $Gr = 0, 10^4$  e  $10^5$ ;  $Re = 1, 10, 50$  e  $100$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$ ;  $D = 0,2$ . Em todos estes casos a malha uniforme de elementos finitos usada foi  $28 \times 56$  com 2.970 elementos.

Para as figuras de 4.35 a 4.38, as distribuições da função corrente  $\psi$  do caso 1 são apresentadas no lado esquerdo da página e as distribuições do caso 2, no lado direito. Quando as linhas da função corrente encontram-se mais próximas uma das outras, maior é a velocidade do fluido neste local.

A partir de agora, analisaremos as distribuições da função corrente  $\psi$  das figuras 4.35 a 4.38, para o caso 1, para todos os valores de Grashof e Reynolds estudados. Para todos os valores de Reynolds estudados, com  $Gr = 0$ , observa-se um caso de convecção forçada pura, onde as linhas de função corrente mostram o percurso do escoamento do fluido. O escoamento do fluido, mostrado por estas linhas, ocorre da região de entrada até a região de saída da cavidade. Se observa ainda, para  $Gr = 0$ , a formação de uma pequena célula de fluido recirculando nos cantos da cavidade semi-aberta. Essa célula aumenta com o aumento do número de Reynolds. As figuras 4.35 a 4.38 para valores de Grashof  $Gr = 10^4$  e  $10^5$ , apresentam uma mesma estrutura de escoamento. O fluido que entra na cavidade envolve toda a célula convectiva, quando for o caso desta existir. Para valores de Reynolds baixos ( $Re = 1$  e  $10$ ), geralmente o efeito da convecção natural é dominante. As figuras 4.35 e 4.36 mostram as situações, para  $Re = 1$  com  $Gr = 10^4, 10^5$  e para  $Re = 10$  com  $Gr = 10^5$ , respectivamente, onde predomina-se o efeito da convecção natural. A figura 4.36, ainda para Reynolds baixo ( $Re = 10$ ) com  $Gr = 10^4$ , mostra uma situação de equilíbrio entre os efeitos da convecção forçada e da natural. A figura 4.37 apresenta a situação para um valor de Reynolds alto ( $Re = 50$ ). Nessa figura, com  $Gr = 10^4$ , o efeito da convecção forçada é dominante e na figura com  $Gr = 10^5$ , observa-se um equilíbrio dos efeitos da convecção natural e da convecção forçada. Para valores de Reynolds mais altos ( $Re = 100$ ), como apresentado na figura 4.38, o efeito da convecção forçada se sobrepõe ao

efeito da convecção natural, mesmo para um valor de Grashof alto ( $Gr = 10^5$ ). Em geral, para valores altos de Reynolds ( $Re = 50$  ou  $100$ ) com valores nulos ou baixos de Grashof ( $Gr = 0$  ou  $10^4$ ), o efeito da convecção forçada é predominante. Com valores altos de Grashof ( $Gr = 10^5$ ) para valores baixos de Reynolds ( $Re = 1$  ou  $10$ ), o efeito da convecção natural é predominante.

A seguir, analisaremos as distribuições da função corrente  $\psi$  das figuras 4.35 a 4.38 para o caso 2 para todos os valores de Grashof e Reynolds utilizados. Para todos os valores de Reynolds na faixa de  $Re = 1$  a  $100$  com  $Gr = 0$ , um caso de convecção forçada pura é observado, onde as linhas de função corrente mostram o comportamento do escoamento do fluido. Esse escoamento se dá da entrada da cavidade até a saída. Ainda para  $Gr = 0$ , nota-se a formação de uma pequena célula de fluido recirculando nos cantos da cavidade semi-aberta. Essa célula aumenta com o aumento do número de Reynolds. As figuras 4.35 a 4.38 analisadas, para  $Gr = 10^4$  e  $10^5$ , apresentam uma mesma estrutura de escoamento. O fluido que entra na cavidade, desce paralelamente, próximo à superfície fria, na direção da região de saída da cavidade. Para valores de Reynolds baixos ( $Re = 1$  e  $10$ ), geralmente o efeito da convecção natural é dominante. As figuras 4.35 e 4.36 mostram as situações, para  $Re = 1$  com  $Gr = 10^4$ ,  $10^5$  e para  $Re = 10$  com  $Gr = 10^5$ , respectivamente, onde o efeito da convecção natural se sobrepõe. A figura 4.36, para um valor de Reynolds baixo ( $Re = 10$ ) com  $Gr = 10^4$ , mostra uma situação onde os efeitos da convecção forçada e da convecção natural estão presentes ao mesmo tempo. À medida que se aumenta o número de Reynolds, o fluido que entra na cavidade empurra a célula convectiva, na direção da superfície quente, dificultando a sua recirculação. A figura 4.37, para Reynolds alto ( $Re = 50$ ) com  $Gr = 10^4$ , mostra uma situação onde o efeito da convecção forçada é mais acentuado do que o efeito convectivo. Ainda para  $Re = 50$  com  $Gr = 10^5$ , observa-se um equilíbrio dos efeitos da convecção natural e da convecção forçada. Para Reynolds bem altos ( $Re = 100$ ), conforme figura 4.38, situações diferentes acontecem para as figuras com  $Gr = 10^4$  e  $10^5$ . Quando  $Gr = 10^4$ , o efeito da convecção forçada é mais forte, enquanto que, para  $Gr = 10^5$ , um equilíbrio aparece entre os efeitos citados. Em geral, para valores altos de Reynolds ( $Re = 50$  ou  $100$ ) com valores nulos ou baixos de Grashof ( $Gr = 0$  ou  $10^4$ ), o efeito da convecção forçada é predominante. Com valores altos de Grashof ( $Gr = 10^5$ ) para valores baixos de Reynolds ( $Re = 1$  ou  $10$ ), o efeito da convecção natural é predominante.

As figuras 4.39 a 4.42 apresentam a distribuição da temperatura adimensional  $\theta$  para os casos 1 e 2. Foram considerados  $Gr = 0, 10^4$  e  $10^5$ ;  $Re = 1, 10, 50$  e  $100$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$ ;  $D = 0,2$ .

Para as figuras de 4.39 a 4.42, as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  do caso 1 são apresentadas no lado esquerdo da página e as distribuições do caso 2, no lado direito. As linhas isotérmicas representam os pontos, na região do fluido na cavidade semi-aberta, onde se tem o mesmo valor da temperatura adimensional. As diferenças de temperaturas entre duas isotérmicas próximas é constante. Nota-se uma deformação das linhas isotérmicas próximo à região de saída do fluido. Na seção de saída do fluido e nas superfícies horizontais, devido à condição de contorno de isolamento térmico aplicada, as isotermas são perpendiculares à essas respectivas superfícies. Quando as linhas isotérmicas se encontram próximas uma das outras, se forma uma região com altos gradientes de temperatura, implicando em maiores trocas de calor nesta região do fluido.

A seguir, serão analisadas as distribuições de temperatura adimensional  $\theta$  das figuras 4.39 a 4.42, para o caso 1, para todos os valores de Grashof e Reynolds estudados. Na figura 4.39, para  $Re = 1$  com  $Gr = 0$ , as linhas de temperatura que se apresentam paralelas uma com as outras, na maior parte da região de fluido na cavidade, demonstra ser um exemplo de condução pura. Com o aumento do número de Reynolds, ainda para  $Gr = 0$ , aumenta-se a vazão de fluido que entra na cavidade, provocando assim, uma deformação no campo de temperatura. O fluido, na temperatura baixa, empurra as linhas isotérmicas na direção da superfície quente. Quando se tem valores de Reynolds altos ( $Re = 50$ ) com  $Gr = 0$ , maior é a deformação no campo de temperatura. Para Reynolds mais altos ( $Re = 100$ ) com  $Gr = 0$ , formam-se regiões com altos gradientes de temperatura próximas à superfície quente. Conforme já visto nas figuras de 4.35 a 4.38, a recirculação do fluido na cavidade ocorre no sentido anti-horário. Da figura 4.39, com  $Gr = 10^4$ , na parte do fluido na região mais baixa da cavidade, a circulação do fluido transporta uma parte do fluido frio na direção da superfície quente, provocando uma deformação no campo de temperatura. Um efeito contrário ocorre na parte do fluido na região mais alta da cavidade. Com o aumento do número de Grashof para  $Gr = 10^5$ , aumenta a deformação do campo de temperatura formando-se regiões com altos gradientes de temperatura. Essas regiões, conforme figura 4.39, com  $Gr = 10^5$ , apresentam-se próximas às superfícies quente inferior e fria superior, sendo essa última, abaixo da região de saída do fluido. Da figura 4.40 com  $Gr = 10^4$ , além da deformação das isotermas provocadas pela recirculação do fluido na cavidade, observa-se agora, com o aumento do Reynolds para  $Re = 10$ , uma deformação ocorrida devido a maior vazão de fluido frio que entra na cavidade. Ainda na figura 4.40, com o aumento do Grashof para

$Gr = 10^5$ , aumenta-se a deformação no campo de temperatura, formando-se novamente regiões com altos gradientes de temperatura próximo às superfícies quente inferior e fria superior, abaixo da região de saída do fluido. A figura 4.41, para  $Re = 50$  com  $Gr = 10^4$  e  $10^5$ , apresenta a mesma estrutura de distribuição da temperatura da figura 4.40, para os mesmos valores de Grashof. A diferença ocorre no aumento da vazão de fluido que entra na cavidade, provocando regiões de altos gradientes de temperatura próximo à superfície quente inferior, sendo mais acentuados quando  $Gr = 10^5$ . O mesmo acontece quando se tem valores de Reynolds bem mais altos, conforme mostra a figura 4.42, para  $Re = 100$  com  $Gr = 10^4$  e  $10^5$ . Nestes casos de Grashof  $Gr = 10^4$  e  $10^5$ , uma grande parte de fluido frio se forma próximo e acima da região de entrada da cavidade, formando-se extensas regiões de altos gradientes de temperatura próxima à superfície quente.

A seguir, serão analisadas as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  das figuras 4.39 a 4.42, para o caso 2, para todos os valores de Grashof e Reynolds estudados. Na figura 4.39 para  $Gr = 0$ , as linhas de temperatura se apresentam paralelas uma com as outras, mostrando um caso de condução pura. Devido à condição de contorno de isolamento aplicada, na saída da cavidade, ocorre uma deformação das linhas isotérmicas próxima a essa região. Essas linhas são perpendiculares à superfície de saída e também às superfícies horizontais da cavidade. As figuras 4.40, 4.41 e 4.42, com  $Gr = 0$ , mostram que com o aumento do número de Reynolds, aumenta a deformação das linhas isotérmicas próximas à região de entrada de fluido. Para a figura 4.17, para  $Re = 100$ , com  $Gr = 0$ , forma-se uma região de altos gradientes de temperatura próximo à superfície quente superior. Na figura 4.39 para  $Gr = 10^4$ , a recirculação do fluido na cavidade provoca uma deformação no campo de temperatura. Com o aumento do número de Grashof para  $Gr = 10^5$ , aumenta a deformação do campo de temperatura. Na figura 4.39 com  $Gr = 10^5$ , formam-se regiões de altos gradientes de temperatura próximas às superfícies quente inferior e fria superior. Da figura 4.40, para Reynolds baixo ( $Re = 10$ ) com  $Gr = 10^4$  e  $10^5$ , poucas mudanças foram observadas nas distribuições de temperatura em relação as mesmas situações da figura 4.39. A figura 4.41 para Reynolds alto ( $Re = 50$ ) com  $Gr = 10^4$ , a maior vazão de fluido frio que entra na cavidade empurra as linhas de temperatura na direção da superfície quente, provocando uma deformação no campo de temperatura. Com  $Gr = 10^5$ , devido a maior recirculação do fluido, em relação à situação quando  $Gr = 10^4$ , a deformação das linhas isotérmicas é menos acentuada, próxima à região de entrada do fluido. Na figura 4.42 para  $Re = 100$  com  $Gr = 10^4$  e  $10^5$ , pode-se observar uma mesma estrutura de distribuição da temperatura em relação às mesmas situações da figura 4.41. Na figura 4.42, com  $Gr = 10^4$ , o

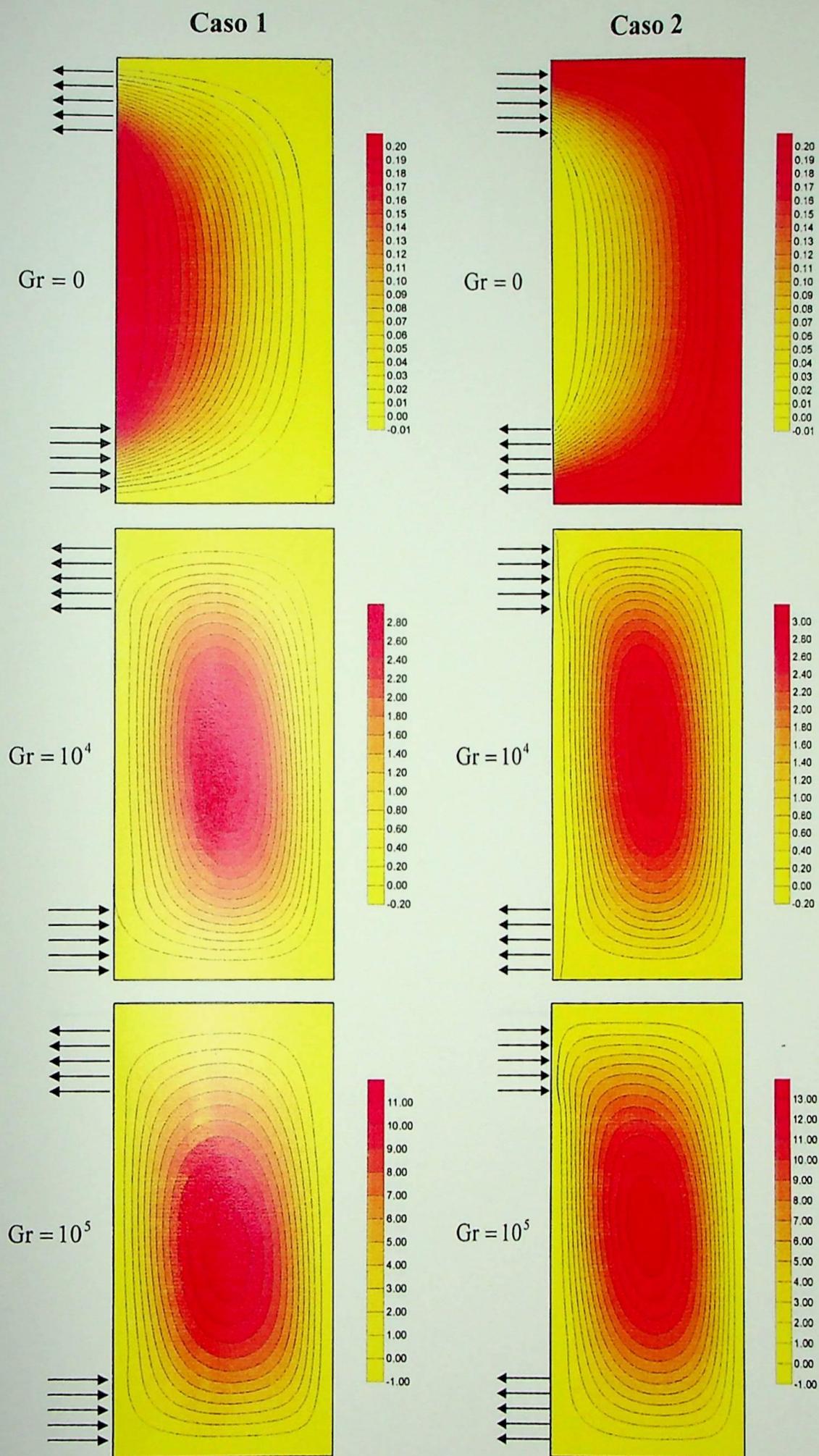


Figura 4.35 – Distribuições da função corrente  $\psi$  para os casos 1 e 2 para  $Re = 1$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$  e  $D = 0,2$ .

Caso 1

Caso 2

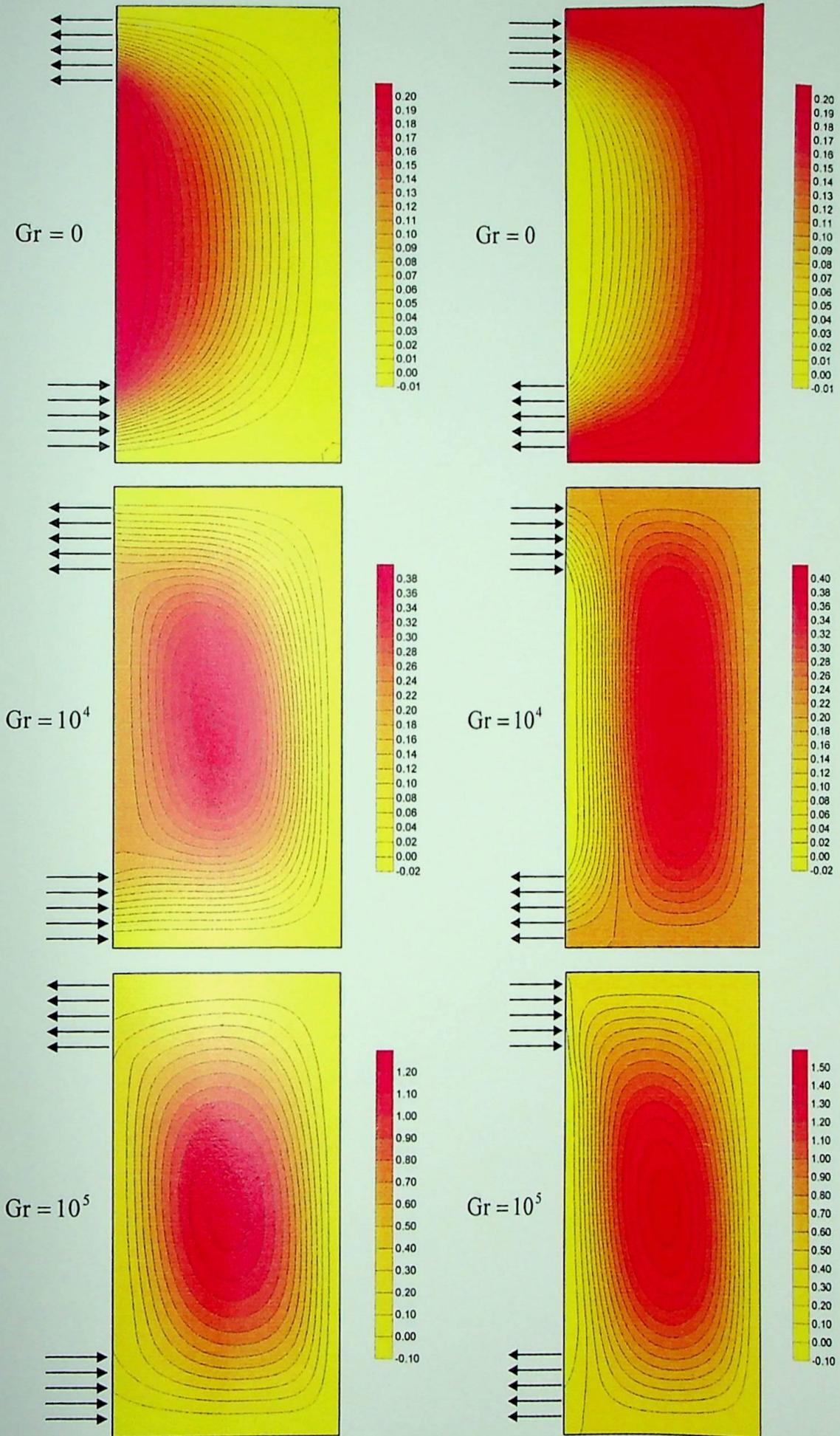


Figura 4.36 – Distribuições da função corrente  $\psi$  para os casos 1 e 2 para  $Re = 10$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$  e  $D = 0,2$ .

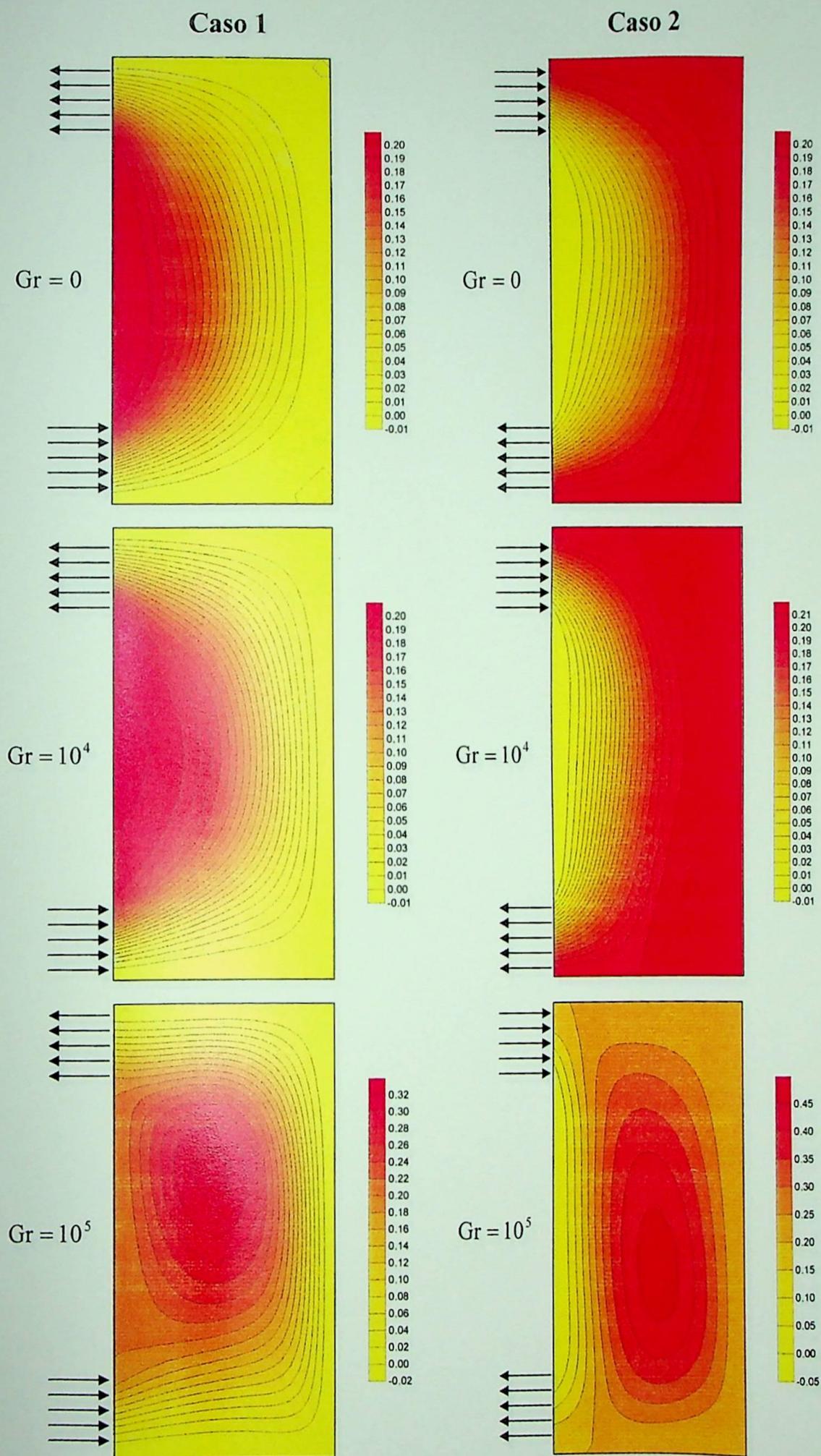


Figura 4.37 – Distribuições da função corrente  $\psi$  para os casos 1 e 2 para  $Re = 50$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$  e  $D = 0,2$ .

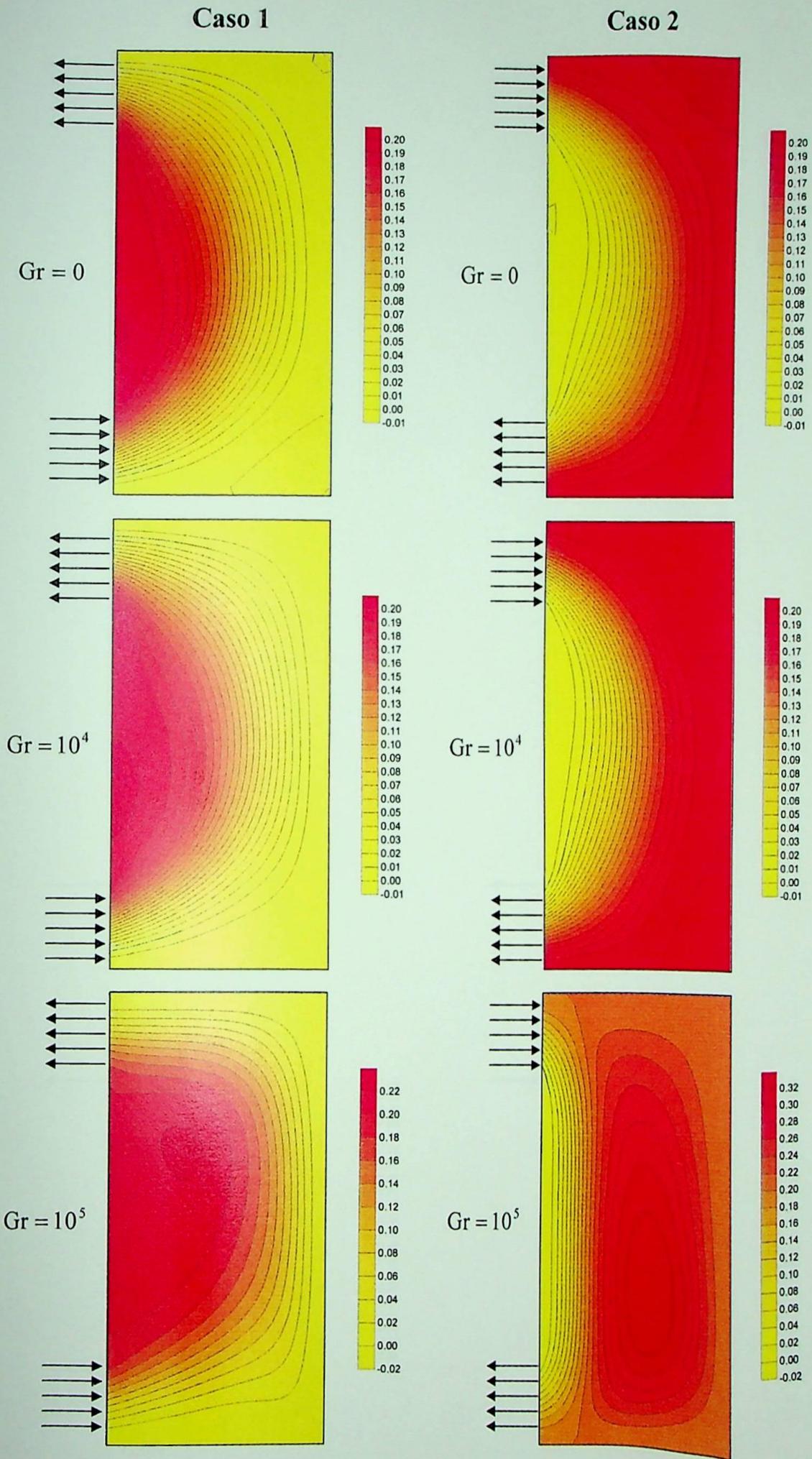


Figura 4.38 – Distribuições da função corrente  $\psi$  para os casos 1 e 2 para  $Re = 100$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$  e  $D = 0,2$ .

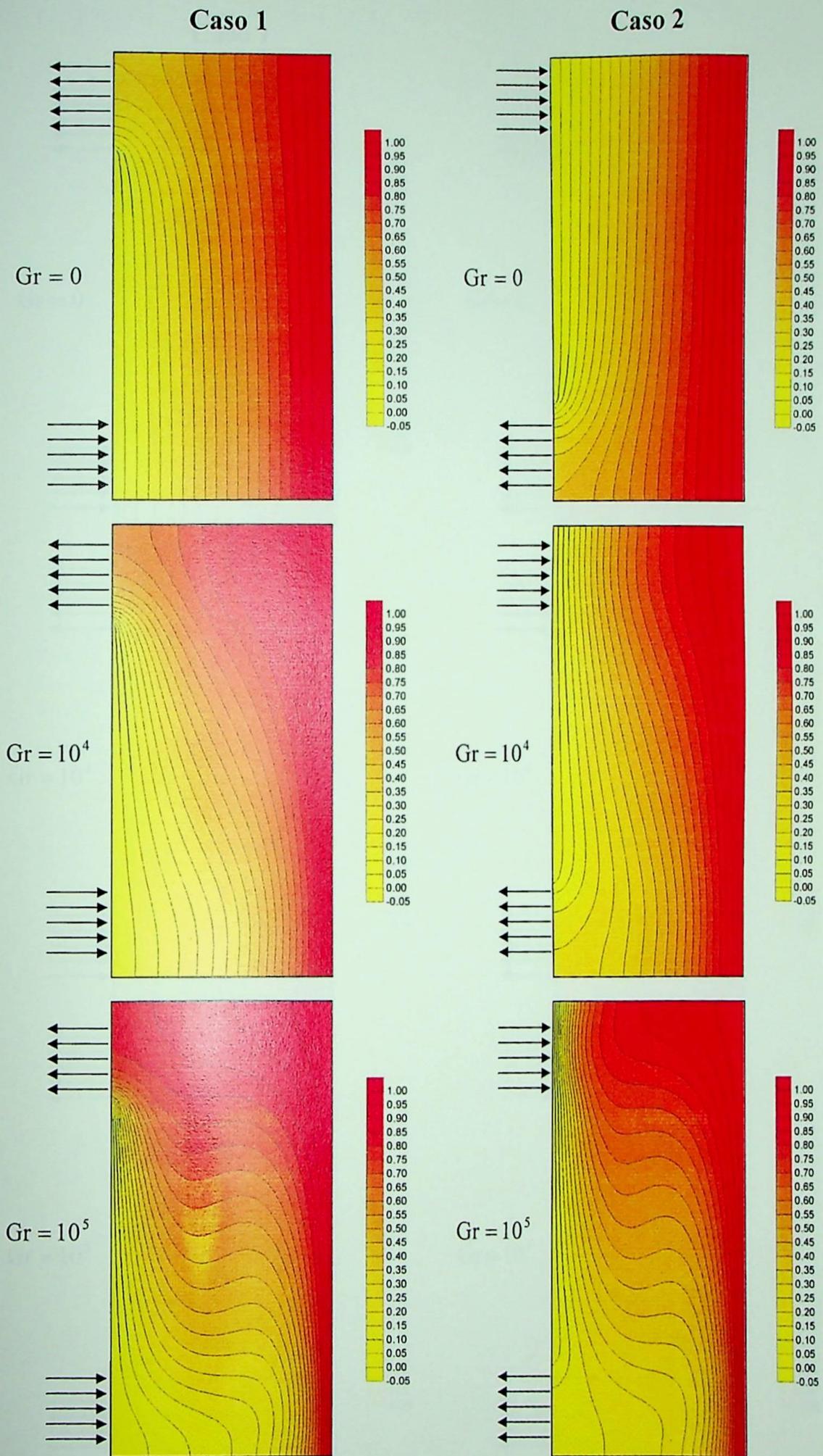


Figura 4.39– Distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  para os caso 1 e 2 para  $Re = 1$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$  e  $D = 0,2$ .

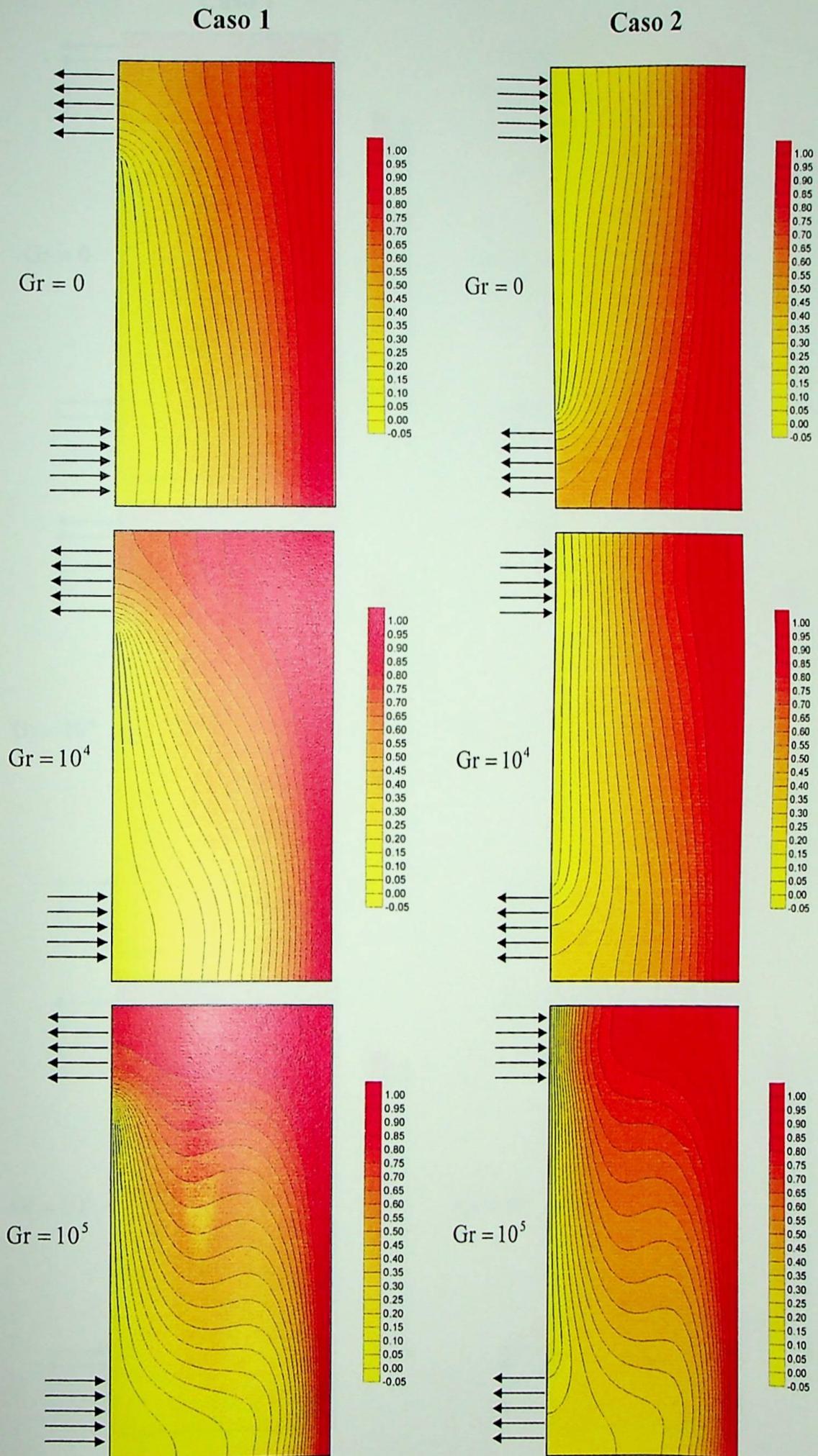


Figura 4.40 – Distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  para os caso 1 e 2 para  $Re = 10$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$  e  $D = 0,2$ .

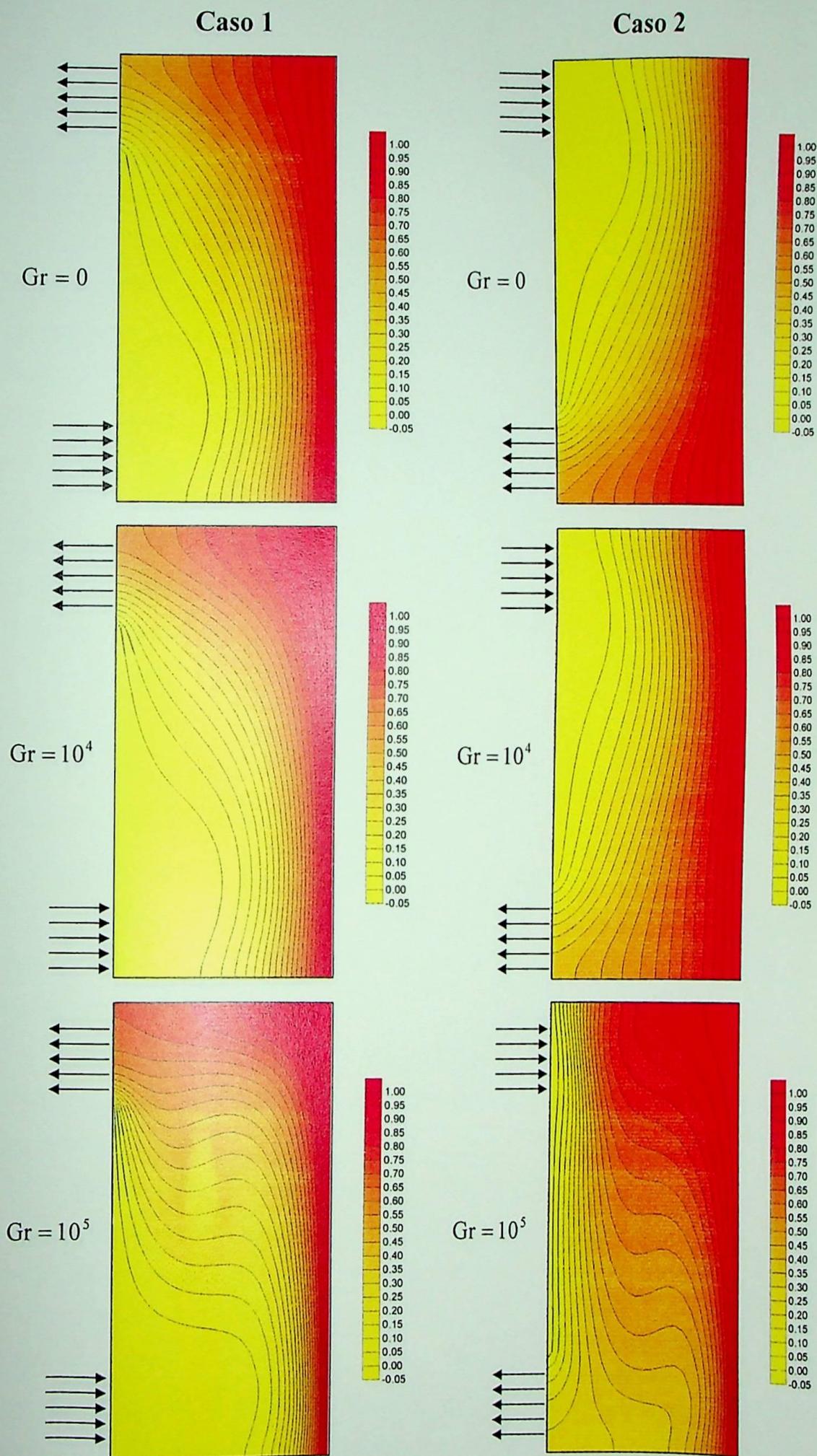


Figura 4.41 – Distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  para os caso 1 e 2 para  $Re = 50$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$  e  $D = 0,2$ .

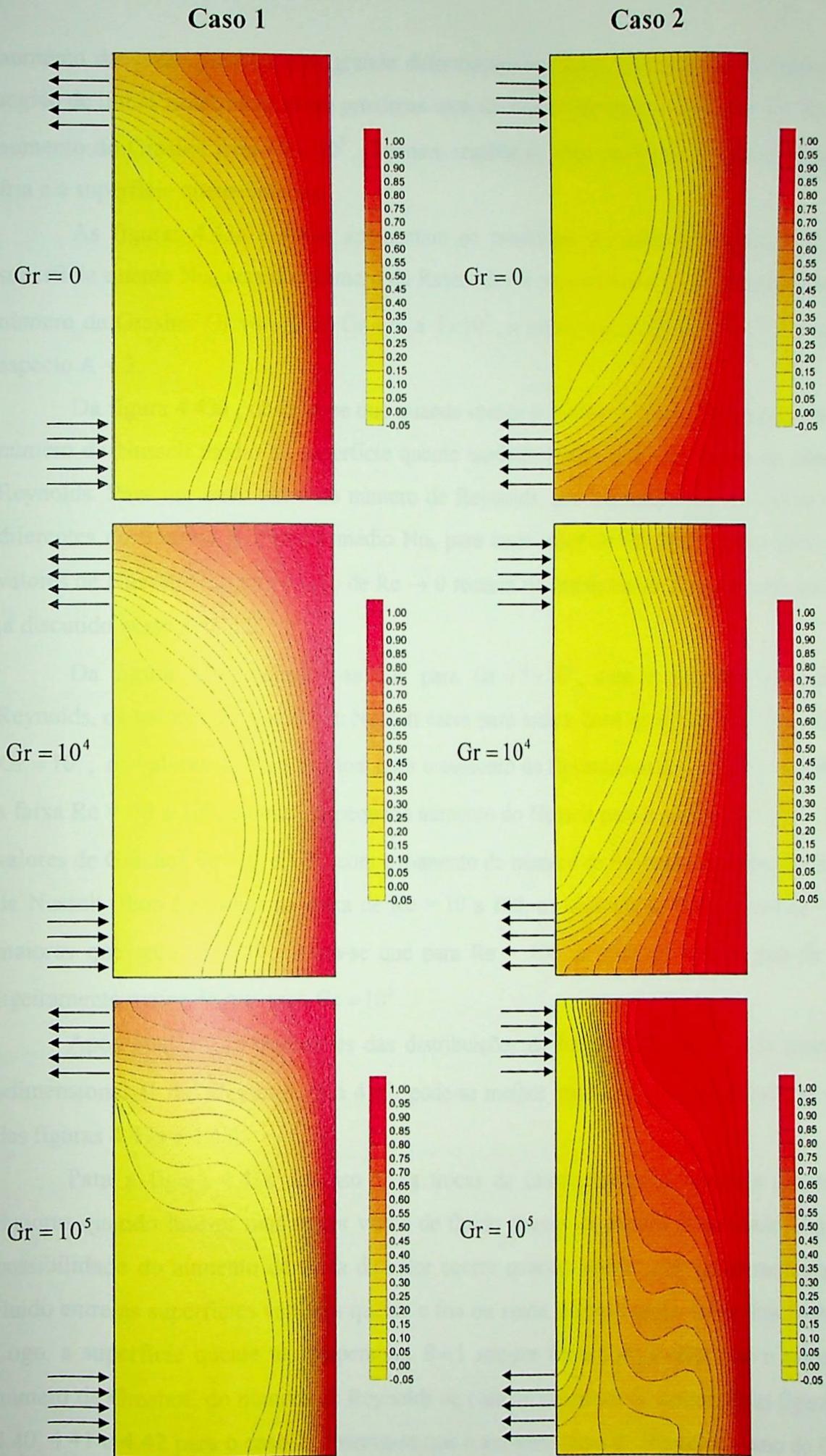


Figura 4.42 – Distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  para os caso 1 e 2 para  $Re = 100$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$  e  $D = 0,2$ .

aumento da vazão provoca uma grande deformação das linhas isotérmicas, formando-se uma região de linhas isotérmicas muito próximas uma das outras, próxima à superfície quente. Com o aumento do Grashof para  $Gr = 10^5$ , formam regiões de altos gradientes próximas à superfície fria e à superfície quente inferior.

As figuras 4.43a e 4.43b apresentam os resultados do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  versus o número de Reynolds  $Re$  para os casos 1 e 2, respectivamente. O número de Grashof  $Gr$  variou de  $Gr = 0$  a  $5 \times 10^5$ , o número de Prandtl  $Pr = 0,7$  e a razão de aspecto  $A = 2$ .

Da figura 4.43a, observa-se que quando cresce o número de Reynolds cresce, o valor do número de Nusselt médio na superfície quente também cresce para toda a faixa do número de Reynolds. Para um dado valor do número de Reynolds, por exemplo  $Re = 10$ , tem-se valores diferentes do número de Nusselt médio  $Nu_h$  para cada valor de Grashof. Nota-se aqui, que os valores de Nusselt  $Nu_h$  para o caso de  $Re \rightarrow 0$  recaem no problema de convecção natural, como já discutido neste item 4.3.3.

Da figura 4.43b, observa-se que para  $Gr = 5 \times 10^5$ , com o aumento do número de Reynolds, os valores do número de Nusselt caem para toda a faixa do número de Reynolds. Para  $Gr = 10^5$ , os valores de Nusselt caem com o aumento do Reynolds na faixa de  $Re = 1$  a 50. Para a faixa  $Re = 50$  a 100, ocorre um pequeno aumento do Nusselt para o mesmo  $Gr = 10^5$ . Já para valores de Grashof  $Gr = 0$  e  $10^4$ , com o aumento do número de Reynolds, aumenta-se o número de Nusselt. Para Reynolds na faixa de  $Re = 10$  a 100, os números de Nusselt para  $Gr = 0$  são maiores que para  $Gr = 10^4$ . Nota-se que para  $Re = 100$ , o valor do Nusselt para  $Gr = 0$  é ligeiramente maior do que para  $Gr = 10^5$ .

Após analisar as ilustrações das distribuições da função corrente  $\psi$  e da temperatura adimensional  $\theta$  das figuras 4.35 a 4.42, pode-se melhor analisar o comportamento das curvas, das figuras 4.43a e 4.43b.

Para a figura 4.43a do caso 1, as trocas de calor próxima à superfície quente serão maiores quando houver uma maior vazão de fluido através da entrada da cavidade. Uma outra possibilidade do aumento da troca de calor ocorre quando houver uma maior recirculação do fluido entre as superfícies verticais quente e fria ou ainda, a combinação destes dois fenômenos. Logo, a superfície quente na temperatura  $\theta = 1$  sempre trocará mais calor com o aumento do número de Grashof, do número de Reynolds ou com os aumentos de ambos. Pelas figuras 4.39, 4.40, 4.41 e 4.42 para o caso 1, observa-se que o aumento tanto do Reynolds, como do Grashof faz aumentar a região com altos gradientes de temperatura próxima à superfície isotérmica quente. O que implica em altas taxas de transferência de calor e altos números de Nusselt  $Nu_h$ .

Da figura 4.43b, para o caso 2, observa-se que para um valor de Grashof alto, por exemplo  $Gr = 5 \times 10^5$ , quando se aumenta o número de Reynolds, diminui o valor de Nusselt  $Nu_h$ . O mesmo acontece para  $Gr = 10^5$ , menos para Reynolds na faixa de 50 a 100, onde ocorre um ligeiro aumento do Nusselt, sendo este menor que 2%. Para valores de Grashof  $Gr = 0$  e  $10^4$ , com o aumento do número de Reynolds, aumenta-se os valores de Nusselt. Uma pequena queda do Nusselt ocorreu para  $Gr = 10^4$  e Reynolds na faixa de  $Re = 1$  e 10. Para Reynolds na faixa de  $Re = 10$  a 100, os valores de Nusselt são maiores com  $Gr = 0$  quando comparados com  $Gr = 10^4$ . Quando se tem uma convecção forçada pura ( $Gr = 0$ ), quanto maior o Reynolds, maior será o valor de Nusselt. Através das figuras 4.35, 4.36 e 4.37 para  $Gr = 10^5$ , pode-se explicar a razão da queda do número de Nusselt  $Nu_h$  para valores de Grashof na faixa de  $Gr = 10^5$  a  $5 \times 10^5$  e Reynolds na faixa de  $Re = 1$  a 50. As figuras 4.35, 4.36 e 4.37 para  $Gr = 10^5$ , mostram que com o aumento do número de Reynolds, na faixa de  $Re = 1$  a 50, a vazão de fluido recirculando na célula, no sentido anti-horário, diminui. O sentido em que o fluido entra na cavidade é oposto ao sentido de recirculação da célula, na região superior do fluido dentro da cavidade. Consequentemente, as trocas de calor próxima à superfície isotérmica quente diminui, provocando uma ligeira queda no resultado do número de Nusselt  $Nu_h$ .

As figuras de 4.44 a 4.47 apresentam a distribuição da função corrente  $\psi$  para os casos 3 e 4; as figuras 4.48 a 4.51 apresentam as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  para os casos 3 e 4. Foram considerados  $Gr = 0, 10^4$  e  $10^5$ ;  $Re = 1, 10, 50$  e  $100$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$ ;  $D = 0,2$ . Em todos estes casos a malha uniforme de elementos finitos usada foi  $28 \times 56$  com 2.970 elementos.

Para as figuras de 4.44 a 4.47, as distribuições da função corrente  $\psi$  do caso 3 são apresentadas no lado esquerdo da página e as distribuições do caso 4, no lado direito.

A seguir, analisaremos as distribuições da função corrente  $\psi$  das figuras 4.44 a 4.47, para o caso 3, para todos os valores de Grashof e Reynolds estudados. Para todos os valores de Reynolds na faixa de  $Re = 1$  a 100 com  $Gr = 0$ , observa-se um caso de convecção forçada pura, onde as linhas de corrente mostram o comportamento da vazão do fluido na cavidade. Ainda para  $Gr = 0$ , observa-se a formação de uma pequena célula de fluido recirculando nos cantos opostos da cavidade. Essa célula aumenta com o aumento do número de Reynolds. Em geral, para valores de Grashof  $Gr = 10^4$  e  $10^5$ , as linhas da função corrente apresentam uma estrutura semelhante entre si. O fluido que entra na cavidade, na temperatura baixa, escoar na direção da superfície quente. O fluido se aquece e sobe, na direção da região de saída da cavidade, envolvendo toda a célula convectiva, quando esta existir. Geralmente o efeito da convecção natural se sobrepõe ao efeito da convecção forçada para valores de Reynolds baixos ( $Re = 1$  e

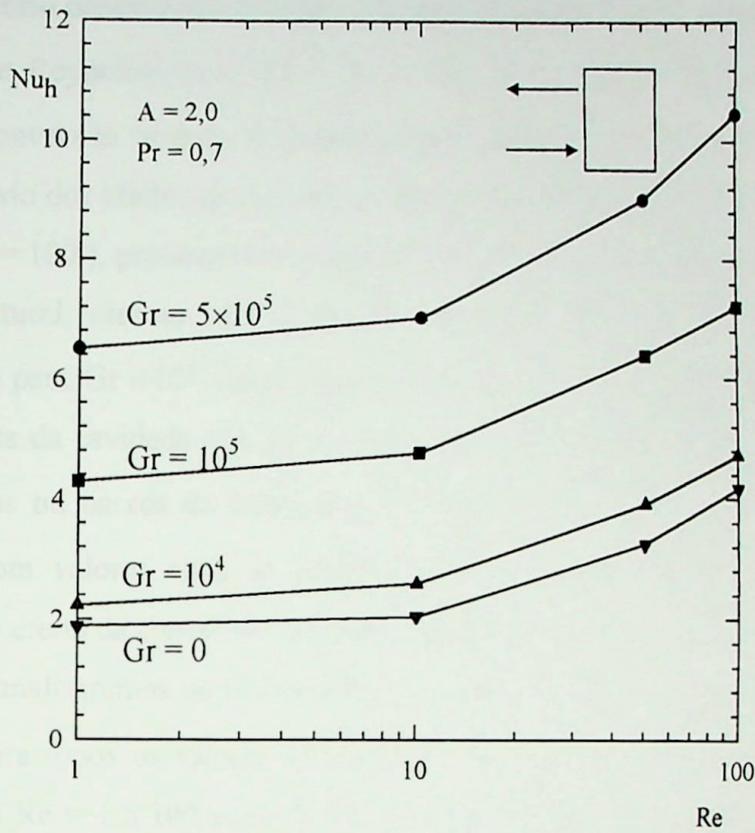


Figura 4.43a – Número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  versus número de Reynolds  $Re$  ( Caso 1 ).

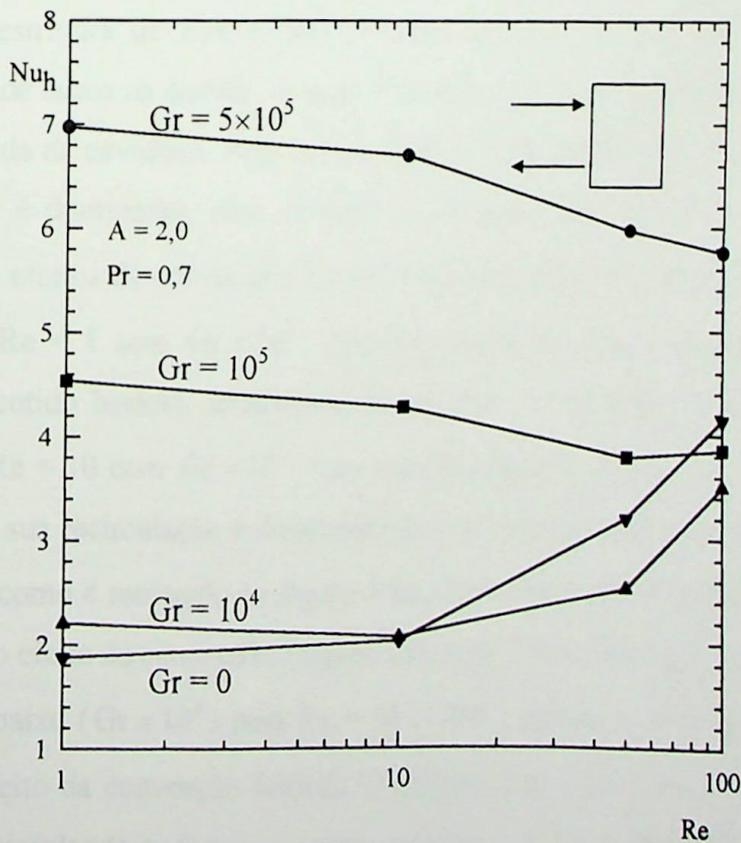


Figura 4.43b – Número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  versus número de Reynolds  $Re$  ( Caso 2 )

10 ). As figuras 4.44 e 4.45 mostram estas situações, para  $Re = 1$  com  $Gr = 10^4$ ,  $10^5$  e para  $Re = 10$  com  $Gr = 10^5$ , respectivamente. Na figura 4.45 para  $Re = 10$  com  $Gr = 10^4$ , uma situação de equilíbrio ocorre entre os efeitos da convecção forçada e da natural. Na figura 4.46, para um valor de Reynolds alto ( $Re = 50$ ), com um valor do Grashof baixo ( $Gr = 10^4$ ) predomina-se a convecção forçada. Da mesma figura, para um valor de Grashof alto ( $Gr = 10^5$ ), ocorre um equilíbrio dos efeitos de convecção. Na figura 4.47, para valores bem altos do número de Reynolds ( $Re = 100$ ), praticamente o efeito da convecção forçada é dominante sobre o efeito da convecção natural, mesmo para a situação com um valor alto do número de Grashof ( $Gr = 10^5$ ). Ainda para  $Gr = 10^5$ , uma pequena célula de recirculação aparece na parte do fluido na região mais alta da cavidade. Em geral, para valores altos de Reynolds ( $Re = 50$  ou  $100$ ) com valores nulos ou baixos de Grashof ( $Gr = 0$  ou  $10^4$ ), o efeito da convecção forçada é predominante. Com valores altos de Grashof ( $Gr = 10^5$ ) para valores baixos de Reynolds ( $Re = 1$  ou  $10$ ), o efeito da convecção natural é predominante.

A seguir, analisaremos as distribuições da função corrente  $\psi$  das figuras 4.44 a 4.47, para o caso 4, para todos os valores de Grashof e Reynolds estudados. Para os valores de Reynolds na faixa  $Re = 1$  a  $100$  com  $Gr = 0$ , demonstra-se ter um caso de convecção forçada pura. As células nos cantos da cavidade aumentam com o aumento do número de Reynolds. Para valores com Grashof  $Gr = 10^4$  e  $10^5$ , geralmente, as linhas das distribuições da função corrente apresentam uma estrutura de distribuição semelhantes entre si. O fluido que entra na parte superior da cavidade escoar na direção da superfície fria, descendo paralelamente à esta superfície até a região de saída da cavidade. Para valores baixos de Reynolds ( $Re = 1$  ou  $10$ ), o efeito da convecção natural é dominante, com exceção da situação da figura 4.45, para  $Re = 10$  com  $Gr = 10^4$ , onde os efeitos da convecção natural e da convecção forçada estão em equilíbrio. Na figura 4.44, para  $Re = 1$  com  $Gr = 10^5$ , observa-se uma segunda e pequena célula de fluido recirculando no sentido horário, localizando-se próximo à região de entrada da cavidade. Da figura 4.45, para  $Re = 10$  com  $Gr = 10^5$ , essa mesma célula de fluido, que recircula no sentido horário, diminui a sua recirculação e desaparece para a situação quando se tem  $Re = 50$ , para o mesmo  $Gr = 10^5$ , como é mostrado na figura 4.46. Com valores de Reynolds altos ( $Re = 50$  e  $100$ ), geralmente o efeito da convecção forçada sobrepõe o efeito da convecção natural. Para um valor de Grashof baixo ( $Gr = 10^4$ ) para  $Re = 50$  e  $100$ , figuras 4.46 e 4.47, respectivamente, predomina-se o efeito da convecção forçada. Da figura 4.46 para  $Re = 50$  com  $Gr = 10^4$ , uma célula de fluido recirculando se forma no canto superior junto à superfície fria da cavidade. Essa célula aumenta com o aumento do Reynolds para  $Re = 100$ . Ainda na figura 4.46 para  $Re = 50$

com  $Gr = 10^4$ , a célula convectiva próxima à região inferior, desaparece quando se aumenta o número de Reynolds para  $Re = 100$  ( figura 4.47 ). Para  $Re = 50$  e  $100$  com  $Gr = 10^5$ , conforme figuras 4.46 e 4.47, respectivamente, um equilíbrio dos efeitos da convecção forçada e da convecção natural ocorrem. Da figura 4.47, para valores de Reynolds mais altos (  $Re = 100$  ), a recirculação do fluido diminui na situação com  $Gr = 10^5$ . Ainda com  $Gr = 10^5$ , para a mesma figura 4.47, uma pequena célula de fluido recircula no canto superior, quando se aumenta o valor do número de Reynolds de  $Re = 50$  para  $100$ .

As figuras de 4.48 a 4.51 apresentam a distribuição da temperatura adimensional  $\theta$  para os casos 3 e 4. Foram considerados  $Gr = 0, 10^4$  e  $10^5$ ;  $Re = 1, 10, 50$  e  $100$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$ ;  $D = 0,2$ .

Para as figuras de 4.48 a 4.51, as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  do caso 3 são apresentadas no lado esquerdo da página e as distribuições do caso 4, no lado direito.

A seguir, serão analisadas as figuras 4.48 a 4.51 para o caso 3 para todos os valores de Grashof e Reynolds estudados. Da figura 4.48 para  $Re = 1$  com  $Gr = 0$ , tem-se um caso de condução pura, exceto na região de saída de fluido da cavidade. Com o aumento do Reynolds, aumenta a vazão de fluido que entra na cavidade, deformando o campo de temperatura próximo à região de entrada. Para  $Re = 50$  com  $Gr = 0$ , se forma uma extensa região de altos gradientes de temperatura próximo à superfície quente. Para Reynolds mais altos (  $Re = 100$  ) com  $Gr = 0$ , da figura 4.51, forma-se uma grande região de fluido frio na cavidade. Da figura 4.48, para  $Re = 1$  com  $Gr = 10^4$ , a recirculação do fluido faz deformar o campo de temperatura na cavidade. Com o aumento do número de Grashof para  $Gr = 10^5$ , aumenta a deformação do campo de temperatura e formam-se regiões com altos gradientes de temperatura próximas às superfícies quente inferior e fria superior. Da figura 4.49, para  $Re = 10$ , o aumento da vazão de fluido provoca pequenas deformações no campo de temperatura, próxima à região de entrada do fluido. Da figura 4.50, para um valor alto do número de Reynolds (  $Re = 50$  ), além das deformações que ocorrem devido à recirculação do fluido na cavidade com  $Gr = 10^4$  e  $10^5$ , as linhas isotérmicas são arrastadas na direção da superfície quente, formando-se ali regiões de altos gradientes de temperatura. Observa-se que com  $Gr = 10^5$ , em consequência do aumento do Reynolds, não se forma uma região de altos gradientes próximo à superfície fria superior. Da figura 4.51, para um valor alto do número de Reynolds  $Re = 100$ , os efeitos da convecção forçada praticamente dominam os efeitos da convecção natural, mesmo para um número de Grashof alto (  $Gr = 10^5$  ). Ainda na figura 4.51, observa-se que para todos os valores de Grashof, formam-se extensas regiões de altos gradientes de temperatura próxima à superfície quente.

A seguir, serão analisadas as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  das figuras 4.48 a 4.51, para o caso 4, para todos os valores de Grashof e Reynolds estudados. Para o caso 4 analisado, observa-se que existe um ponto de singularidade na região de entrada do fluido na cavidade, onde o valor da temperatura passa de  $\theta=0$  para  $\theta=1$ , impostas pelas condições de contorno adimensionais. Neste ponto, tem-se linhas de temperaturas muito próximas uma das outras, resultando em altíssimos gradientes de temperatura no local. Da figura 4.48 para  $Re = 1$  com  $Gr = 0$ , as deformações das linhas isotérmicas ocorrem em consequência das condições de contorno de temperatura aplicadas. Devido à distribuição não uniforme das linhas de temperaturas, o caso 4 não apresentou um situação de condução pura, como aconteceu para os casos 1, 2 e 3 com  $Gr = 0$  ( figuras 4.39 e 4.48 ). Da figura 4.48 para  $Re = 1$  com  $Gr = 10^4$ , a recirculação do fluido faz deformar o campo de temperatura na cavidade. Com o aumento do número de Grashof para  $Gr = 10^5$ , aumenta a deformação do campo de temperatura, formando regiões com altos gradientes de temperatura próximas às superfícies quente inferior e fria superior. A figura 4.49 apresenta as distribuições das linhas de temperaturas para  $Re = 10$  para os diversos números de Grashof. Praticamente não se observou mudanças nas distribuições de temperatura quando se aumentou o número de Reynolds de  $Re = 1$  para 10. Da figura 4.50, para valores altos do número de Reynolds ( $Re = 50$ ), observa-se uma maior parte de fluido, na temperatura baixa, na região mais alta da cavidade. O fluido frio, que entra na cavidade, empurra as linhas de temperatura para a região mais baixa da cavidade. Com valores mais altos do número de Reynolds, como é mostrado na figura 4.51 para  $Re = 100$ , aumenta ainda mais a parte de fluido frio na região mais alta da cavidade. Não se observou maiores alterações nas regiões de altos gradientes próxima à superfície quente inferior, para a situação de  $Re = 100$  com  $Gr = 10^5$ , em relação à figura 4.50 para o mesmo valor do número de Grashof.

As figuras 4.52a e 4.52b apresentam os resultados do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  versus o número de Reynolds  $Re$  para os casos 3 e 4, respectivamente. O número de Grashof  $Gr$  variou de  $Gr = 0$  a  $5 \times 10^5$ , número de Prandtl  $Pr = 0,7$  e a razão de aspecto  $A = 2$ .

As curvas de Nusselt para o caso 3, da figura 4.52a, tem o mesmo comportamento das curvas de Nusselt  $Nu_h$  da figura 4.43a para o caso 1. À medida que cresce o número de Reynolds, o valor do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  também cresce para toda a faixa do número de Reynolds. Para um dado valor do número de Reynolds, por exemplo  $Re = 10$ , tem-se valores diferentes do número de Nusselt médio  $Nu_h$  para cada um dos casos.

A figura 4.52b apresenta as curvas de Nusselt  $Nu_h$  para o caso 4. Para Grashof  $Gr = 5 \times 10^5$ , a variação do número de Nusselt  $Nu_h$  foi desprezível e igual a 0,95%, para número

de Reynolds na faixa de  $Re = 1$  a 100. Para Grashof  $Gr = 10^5$ , a variação do número de Nusselt  $Nu_h$  foi um pouco mais alta. O aumento foi de 8,4% para valores de Reynolds  $Re = 1$  e 100. A maior variação percentual do Nusselt  $Nu_h$ , para  $Gr = 10^5$ , apresentou-se entre  $Re = 50$  e 100 e seu valor foi 5,9%. Para Grashof baixos, no caso de  $Gr = 0$  e  $10^4$ , com o aumento do número de Reynolds, aumenta-se o número de Nusselt  $Nu_h$  para Reynolds na faixa de  $Re = 10$  a 100. Com Reynolds na faixa de  $Re = 1$  a 10 para  $Gr = 0$  e  $10^4$ , as curvas do número de Nusselt  $Nu_h$  praticamente se coincidem. A maior diferença do Nusselt para esta faixa de Reynolds citada ocorre em  $Re = 1$  e o seu valor é 5,9%.

Após analisar as ilustrações das distribuições da função corrente  $\psi$  e da temperatura adimensional  $\theta$  das figuras 4.44 a 4.51, pode-se melhor analisar o comportamento das curvas, das figuras 4.52a e 4.52b.

Para a figura 4.52a do caso 3, as curvas de Nusselt  $Nu_h$  da figura 4.52a tiveram o mesmo comportamento da figura 4.43a para o caso 1. O aumento de qualquer parâmetro térmico, seja o número de Reynolds ou o número de Grashof, aumenta-se a região com altos gradientes de temperatura próxima à superfície isotérmica quente. Assim, maiores serão os valores do número de Nusselt  $Nu_h$ . As figuras 4.48, 4.49, 4.50 e 4.51 para o caso 3, mostram o aumento das regiões de altos gradientes próximo à superfície quente, quando se aumenta ou o Grashof ou o Reynolds. Observa-se ainda que os valores do Nusselt  $Nu_h$  para o caso 3 são ligeiramente maiores que os valores de Nusselt  $Nu_h$  para o caso 1, para todas as faixas do número de Grashof e do Reynolds.

Para a figura 4.52b do caso 4, a variação do Nusselt  $Nu_h$ , entre  $Re = 1$  e 100, foi muito pouca para  $Gr = 10^5$  e desprezível para  $Gr = 5 \times 10^5$ . Para  $Gr = 10^5$ , devido ao sentido de escoamento do fluido na entrada, com o aumento da vazão, pouco efeito se tem na região próxima à superfície quente. Pelas figuras 4.48, 4.49, 4.50 e 4.51 para  $Gr = 10^5$ , observa-se que na região próxima à superfície quente inferior, os traçados das linhas isotérmicas praticamente não mudam. Para os valores de  $Gr = 0$ ,  $10^4$ , as mesmas figuras 4.48, 4.49, 4.50 e 4.51, mostram que com o aumento do número de Reynolds, as linhas isotérmicas próximas à superfície quente tendem a ficar mais próximas uma das outras, principalmente quando  $Re = 100$ . Como o fluido entra na temperatura baixa  $\theta = 0$ , conforme é mostrado na figura 4.30b, este deformam as linhas isotérmicas para a direção da região de saída da cavidade, fazendo com que as linhas isotérmicas fiquem mais próximas da superfície isotérmica quente. Logo, aumenta-se a região, próxima à superfície quente, com altos gradientes de temperatura. Conseqüentemente, aumenta-se o número de Nusselt  $Nu_h$  na superfície isotérmica quente.

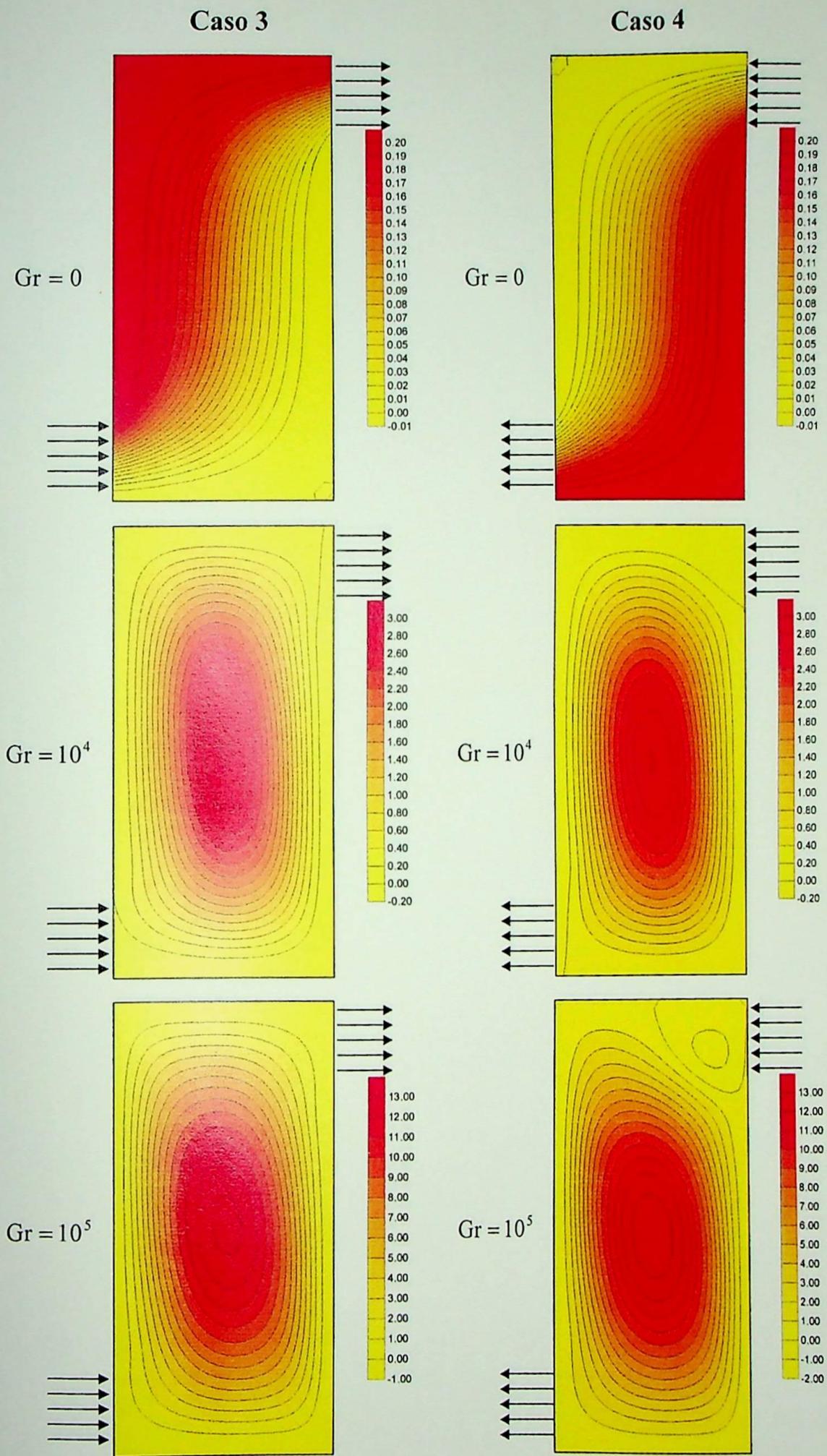


Figura 4.44 – Distribuições da função corrente  $\psi$  para os casos 3 e 4 para  $Re = 1$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$  e  $D = 0,2$ .

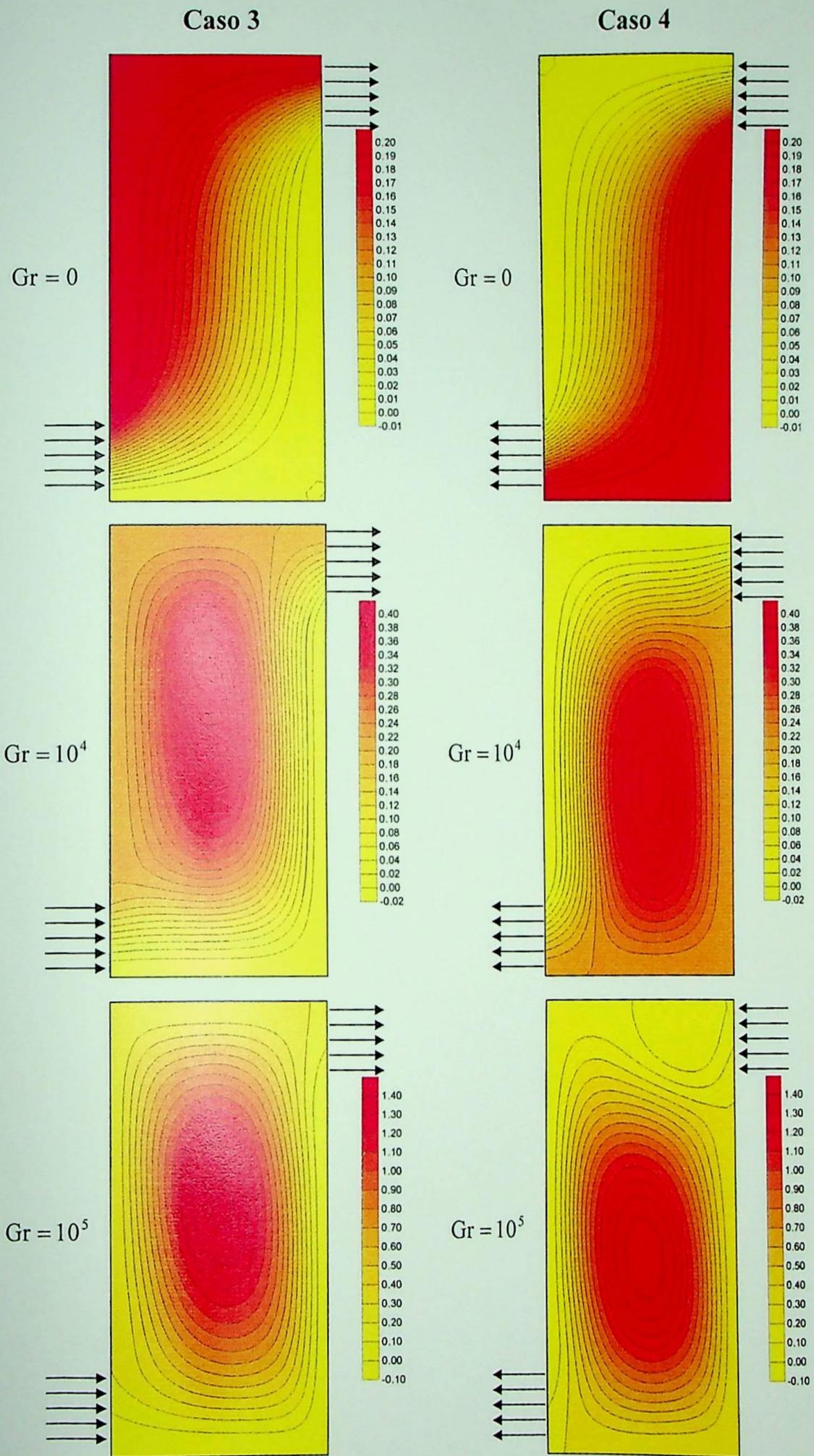


Figura 4.45 – Distribuições da função corrente  $\psi$  para os casos 3 e 4 para  $Re = 10$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$  e  $D = 0,2$ .

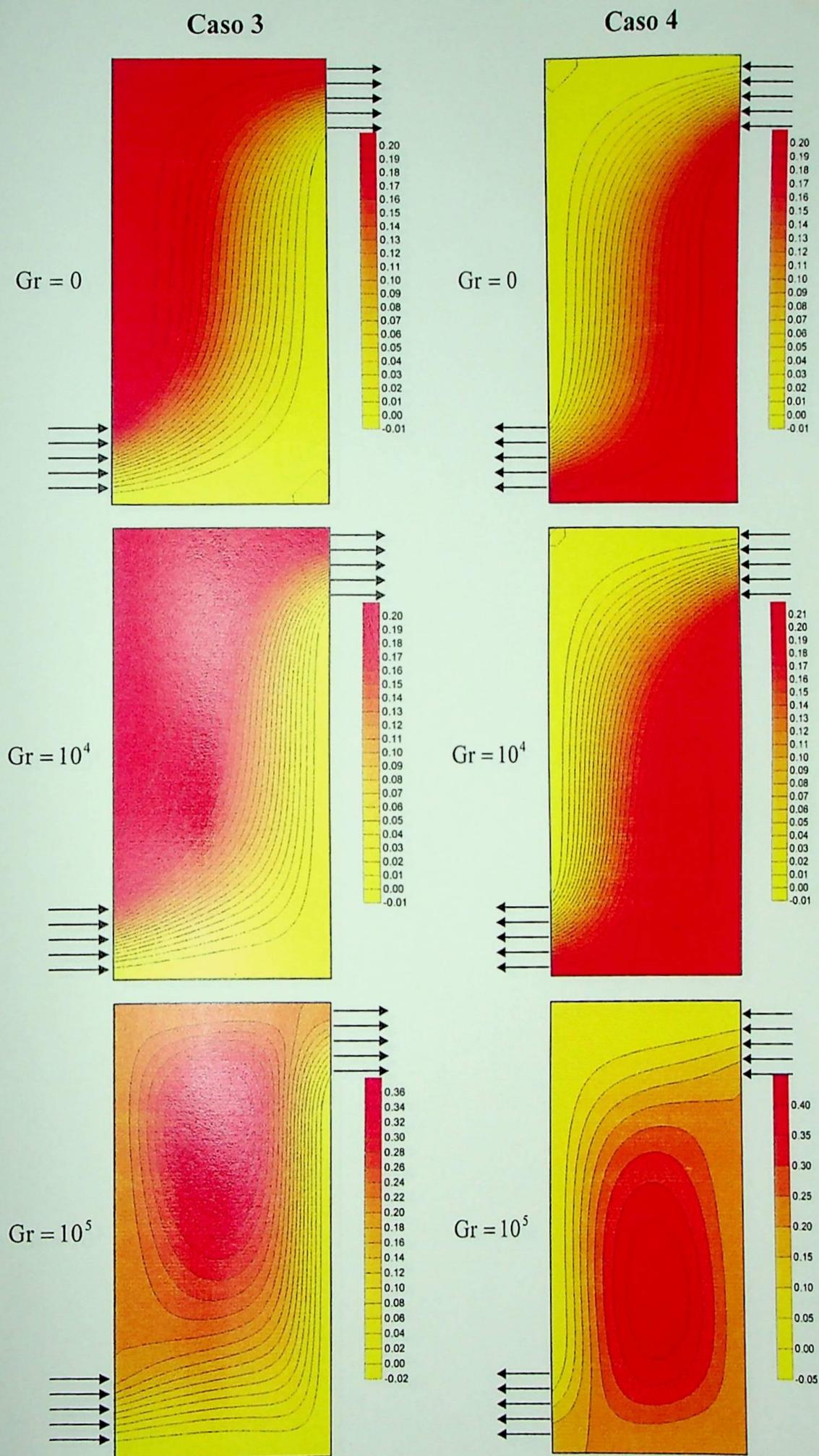


Figura 4.46 – Distribuições da função corrente  $\psi$  para os casos 3 e 4 para  $Re = 50$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$  e  $D = 0,2$ .

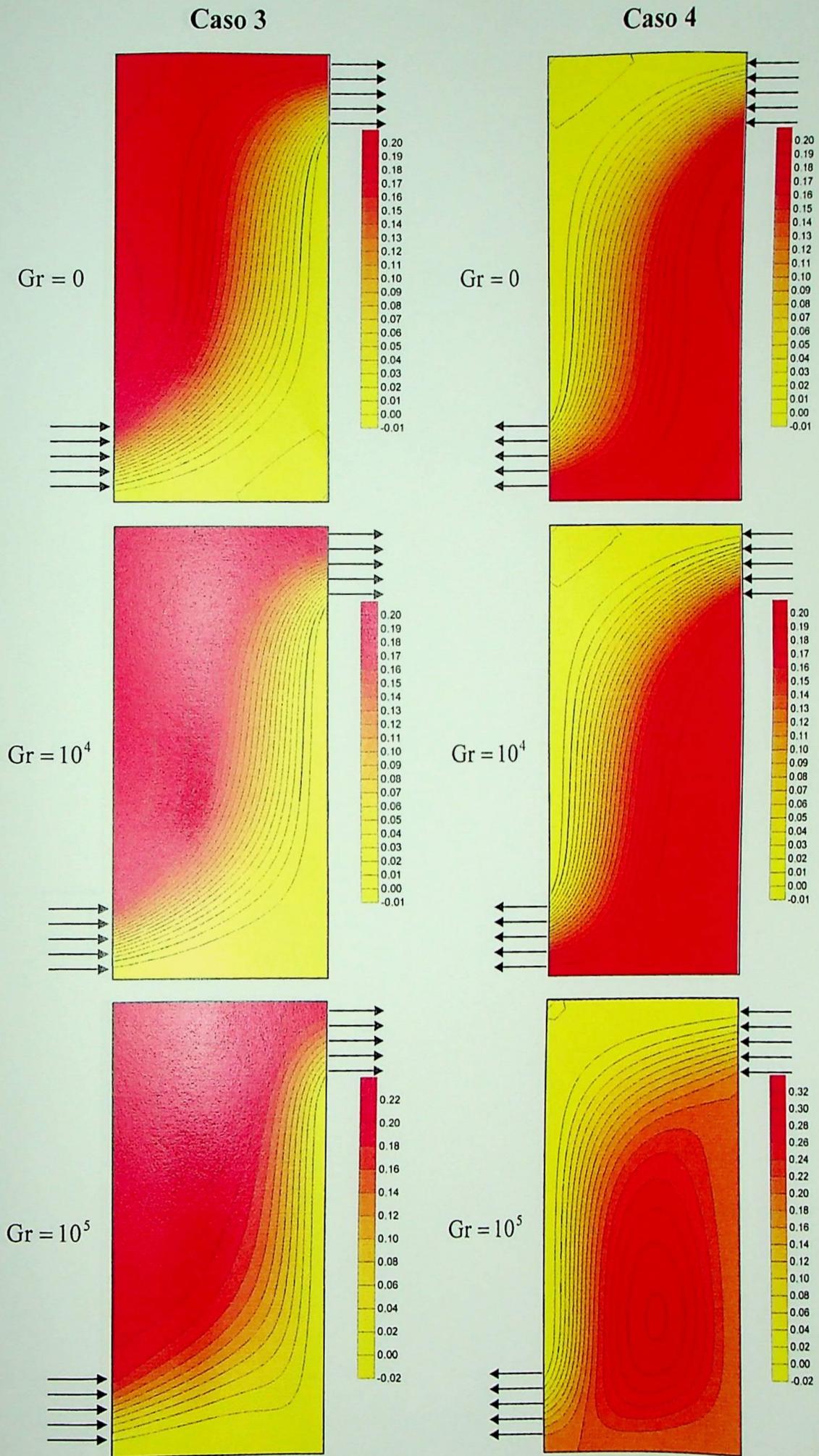


Figura 4.47 – Distribuições da função corrente  $\psi$  para os casos 3 e 4 para  $Re = 100$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$  e  $D = 0,2$ .

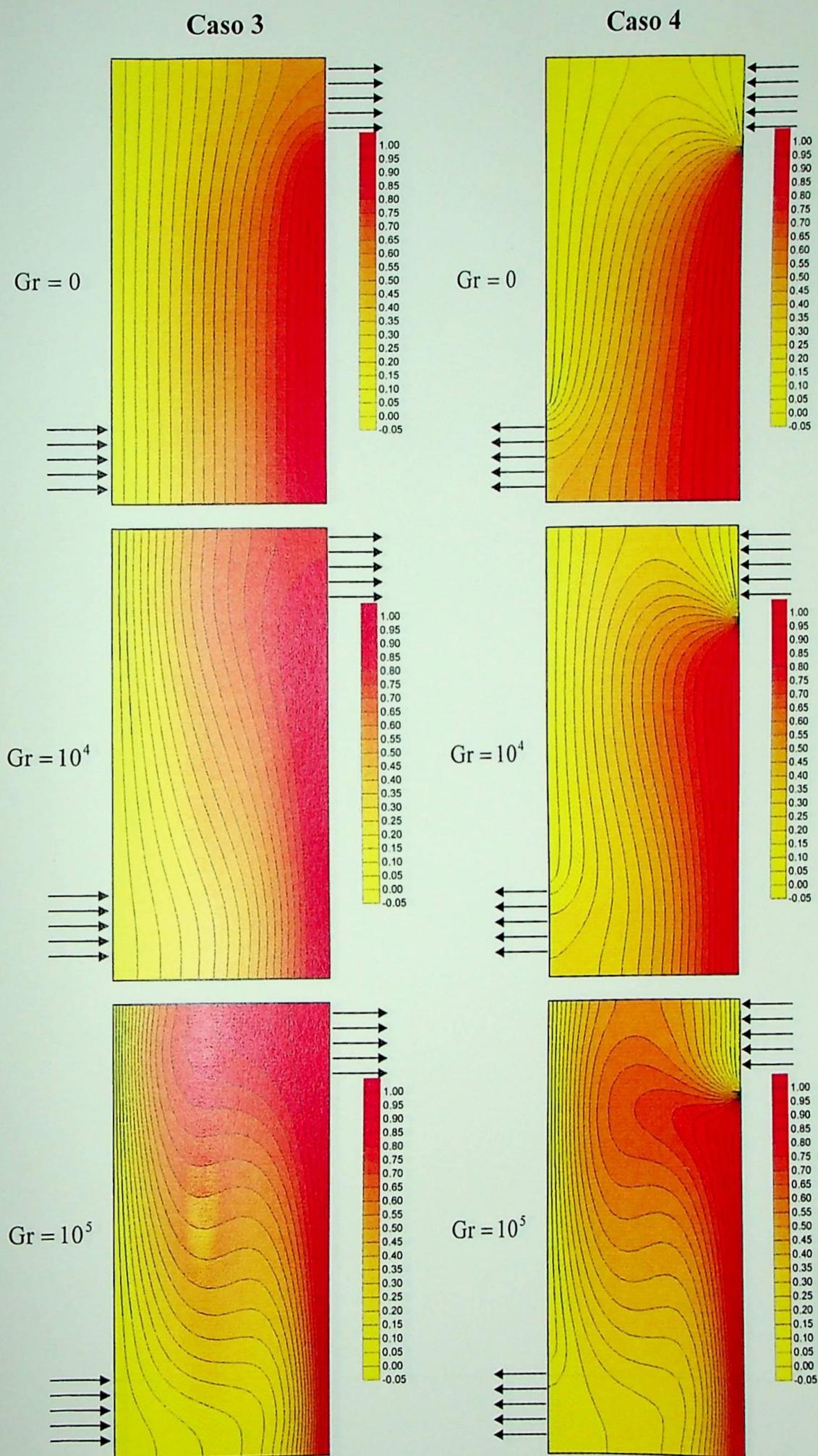


Figura 4.48 – Distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  para os caso 3 e 4 para  $Re = 1$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$  e  $D = 0,2$ .

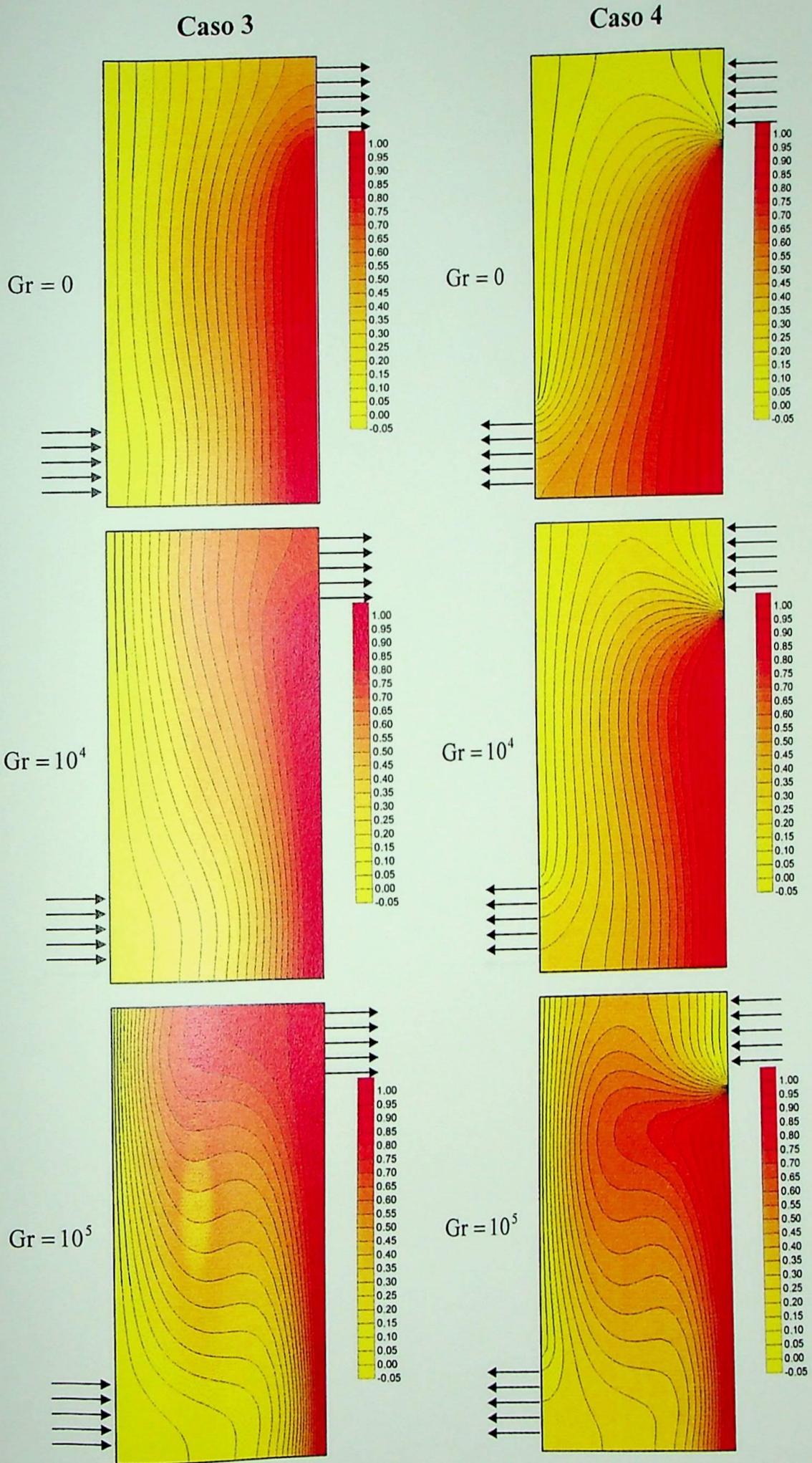


Figura 4.49 – Distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  para os caso 3 e 4 para  $Re = 10$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$  e  $D = 0,2$ .

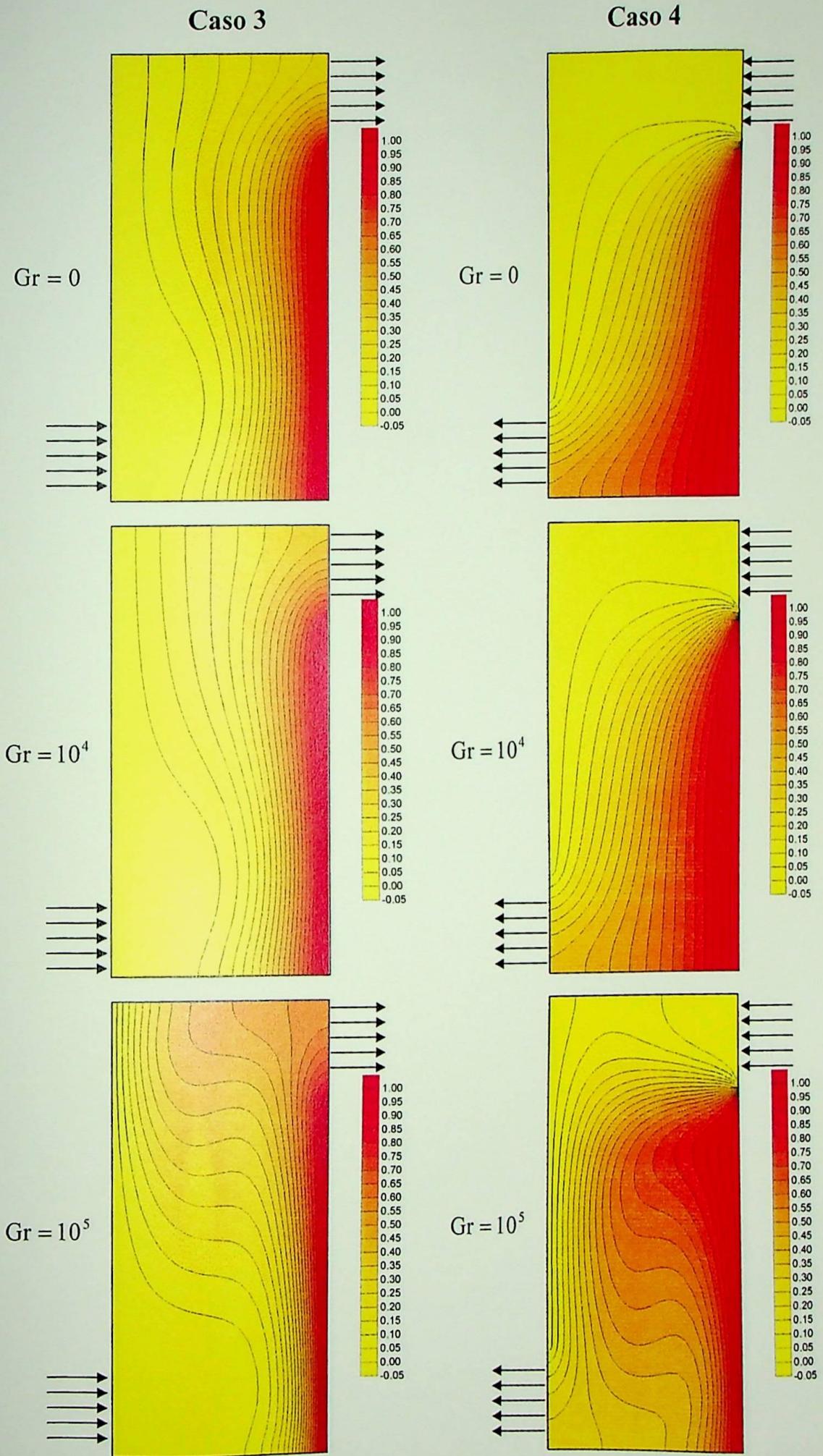


Figura 4.50 – Distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  para os caso 3 e 4 para  $Re = 50$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$  e  $D = 0,2$ .

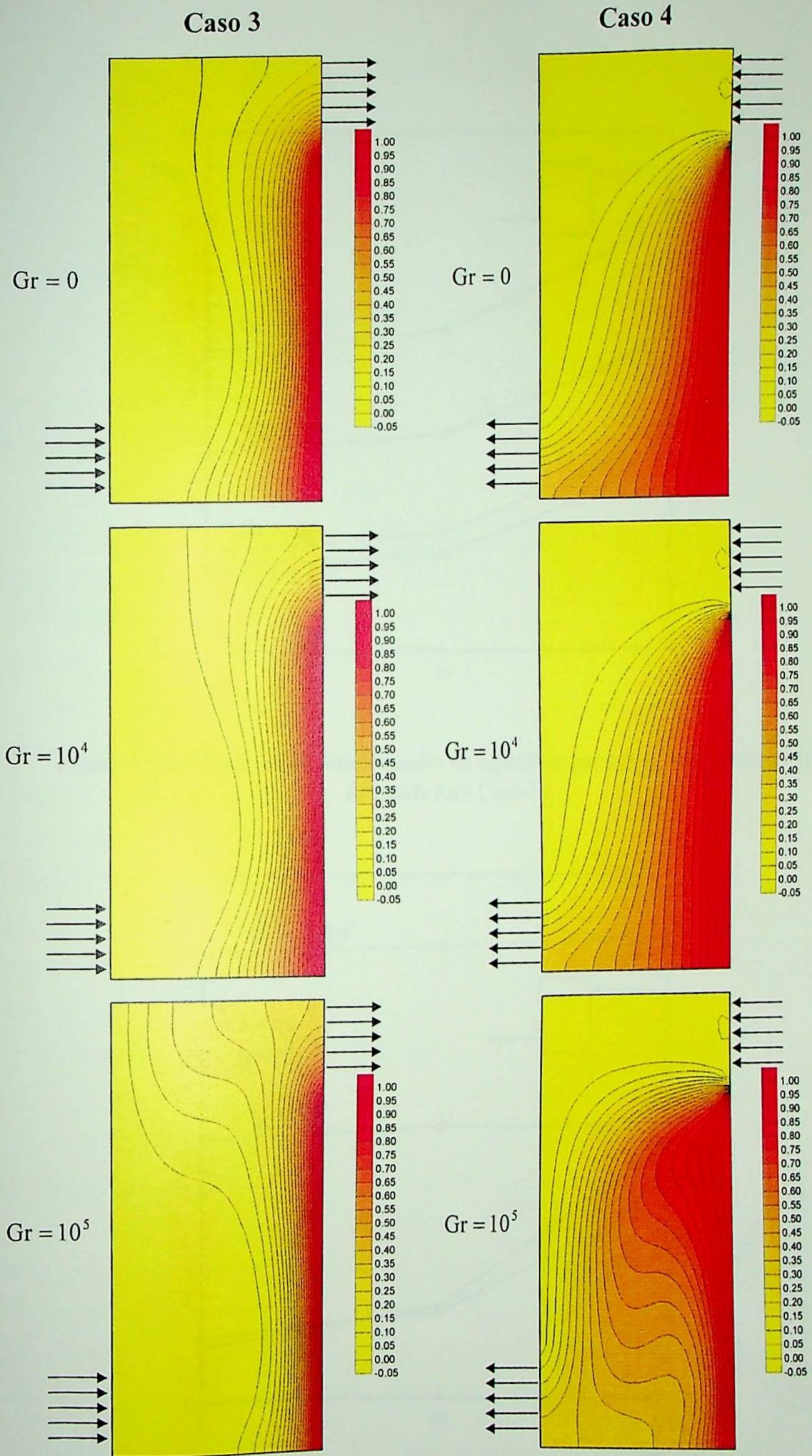


Figura 4.51 – Distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  para os caso 3 e 4 para  $Re = 100$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $A = 2$  e  $D = 0,2$ .

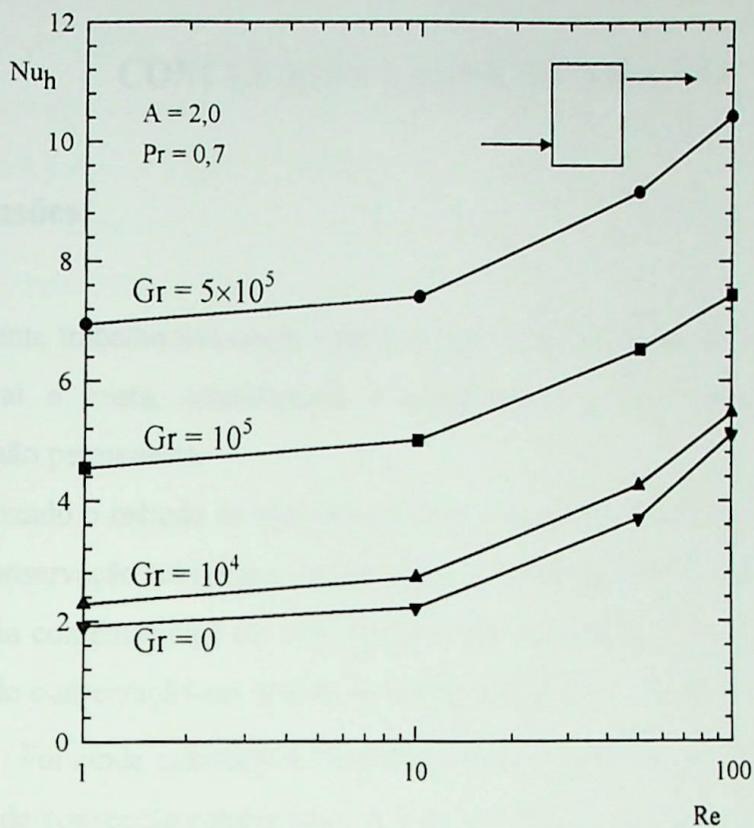


Figura 4.52a – Número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  versus número de Reynolds  $Re$  ( Caso 3 ).

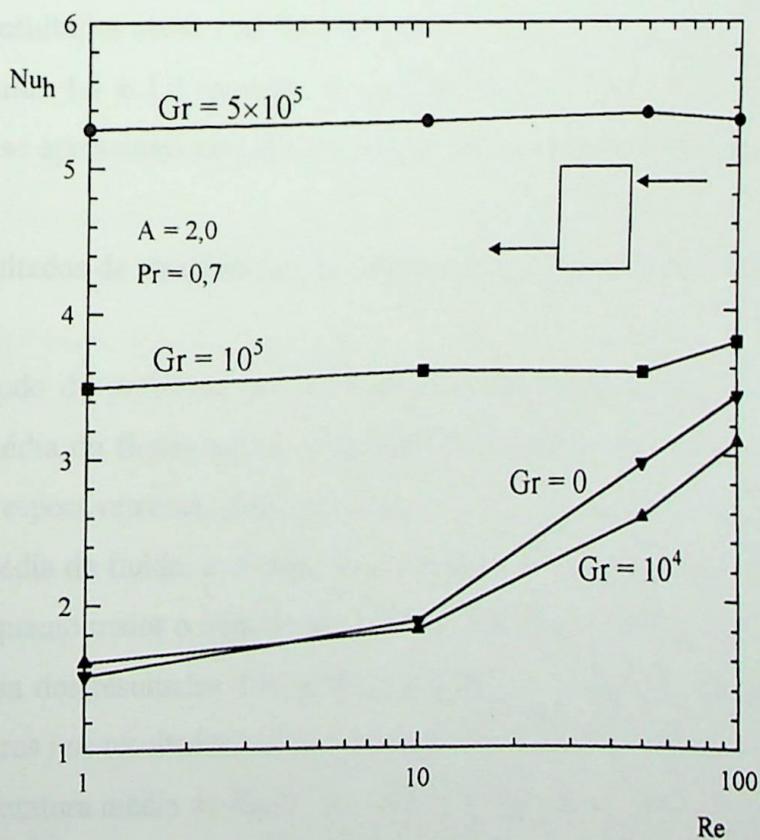


Figura 4.52b – Número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  versus número de Reynolds  $Re$  ( Caso 4 ).



## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

#### 5.1 – Conclusões

O presente trabalho tem como objetivo o estudo da transferência de calor por convecção forçada, natural e mista, considerando o escoamento laminar, bidimensional, em regime permanente e não permanente.

Foi utilizado o método de elementos finitos com elementos triangulares para resolver as equações de conservação em regime não permanente. Para cada tipo de convecção, desenvolveu-se um programa computacional em FORTRAN. Estes programas foram utilizados para solução das equações de conservação em termos de função corrente  $\psi$ , temperatura adimensional  $\theta$  e vorticidade  $\omega$ . Foi ainda calculado o número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$ , para os problemas de convecção natural e mista. Para convecção forçada, calculou-se a temperatura média do fluido e para convecção natural, calculou-se também o número de Nusselt médio na superfície fria  $Nu_c$ .

A fim de validar os programas computacionais desenvolvidos no presente trabalho, foram utilizados os resultados obtidos na literatura para cavidades fechadas e para canais.

As figuras 1.1 e 1.2 mostram as geometrias para o estudo de problemas de convecção forçada, onde se apresentam os casos de placas planas paralelas com obstáculos colocados entre elas.

Os resultados de transferência de calor por convecção forçada estão apresentados no item 4.3.1.

No estudo do problema de convecção forçada, primeiramente estuda-se a variação da temperatura média do fluido versus o número de elementos NE, conforme mostram as figuras 4.10 e 4.14, respectivamente, para os casos 1 e 2. Nota-se a convergência dos valores da temperatura média do fluido, à medida que o número de elementos aumenta. Também, pode-se concluir que, quanto maior o número de elementos utilizados nos cálculos, maior é a tendência da convergência dos resultados. Entretanto, um aumento significativo no número de elementos pode levar a erros nos resultados, devido ao acúmulo de erros nos cálculos computacionais.

A temperatura média do fluido em função do tempo adimensional  $\tau$  estão mostrados nas figuras 4.11 e 4.15, respectivamente, para os casos 1 e 2. Foram utilizados três malhas não uniformes de elementos finitos. As figuras 4.9 e 4.13, apresentam as malhas utilizadas nos testes

computacionais, respectivamente, para os casos 1 e 2. Das figuras 4.11 e 4.15, observa-se que à medida que aumenta o número de elementos, os valores da temperatura média tendem a convergir. Para os tempos finais, mostrados nas figuras 4.11 e 4.15, os valores da temperatura média no fluido tendem ao regime permanente. Nota-se ainda uma variação desprezível dos resultados da temperatura média do fluido, comparando-se as malhas B e C, para os dois casos. Comparando-se as figuras 4.11 e 4.15, nota-se que os valores da temperatura média do fluido, no caso 2, são maiores, para qualquer instante de tempo ou malha utilizada, do que no caso 1.

As figuras 4.16 a 4.19 mostram as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  e da função corrente  $\psi$  dos casos 1 e 2 para placas planas paralelas com um obstáculo colocado entre elas. Estas figuras mostram as distribuições para o regime não permanente, como mostrado nas letras (a), (b) e (c) e permanente, letra (d). Estas figuras revelam a existência de uma região de recirculação formada em decorrência da existência do obstáculo. Também, pelo fato da existência de simetria em relação ao eixo X, existe uma outra região de recirculação, apresentando escoamento no sentido contrário.

A figura 1.3 apresenta a geometria estudada para o problema de convecção natural, onde se tem o caso de cavidade retangular fechada com um corpo quente colocado no seu interior.

Os resultados de transferência de calor por convecção natural estão apresentadas no item 4.3.2.

Para os três casos estudados, utilizou-se uma malha uniforme com 2.970 elementos, conforme é mostrado na figura 4.21. As figuras 4.22 e 4.23 mostram, respectivamente, os resultados dos números de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  e fria  $Nu_c$  em função número do Grashof Gr. Da figura 4.22, observa-se que o  $Nu_h$  cresce com o aumento do número de Grashof, e apresenta valores mais altos, à medida que a posição do corpo interno quente aumenta, com exceção do caso sem corpo interno, o qual possui valores mais altos do  $Nu_h$ , dentre todos os casos. A presença do corpo interno faz com que diminuam as trocas de calor na superfície quente, logo as trocas de calor são maiores no caso 3, onde não existe o corpo interno. Da figura 4.23, observa-se que  $Nu_c$  cresce com o aumento do número de Grashof e para os casos 1 e 2, tem-se valores ligeiramente maiores do que para o caso 3. Nessa situação, a presença do corpo quente na cavidade faz aumentar as trocas de calor junto à superfície vertical fria.

As figuras 4.24 a 4.26 mostram a distribuição da temperatura adimensional  $\theta$  e da função corrente  $\psi$  dos casos 1, 2 e 3. As distribuições são apresentadas para o regime permanente. Da figura 4.24 para o caso 1, o escoamento é formado por duas células convectivas, girando no mesmo sentido anti-horário. Nota-se que à medida que diminuiu-se a posição vertical do corpo até a sua ausência no interior da cavidade, o escoamento fica formado por apenas uma célula convectiva. Ainda quando aumenta-se o número de Grashof, aumenta as regiões de altos

gradientes de temperaturas, para todos os casos, próximas às superfícies fria superior, quente inferior e ainda próxima do corpo quente.

As figuras 1.4 e 1.5 apresentam as geometrias para os problemas de convecção mista para cavidades retangulares semi-abertas.

Os resultados de transferência de calor por convecção mista estão apresentadas no item 4.3.3.

As figuras 4.32 e 4.33 mostram o efeito da variação do número de elementos NE sobre o número de Nusselt  $Nu_h$ , para  $Gr = 10^4$  e  $5 \times 10^5$ . Para todos os casos, utilizou-se uma malha uniforme com 2.970 elementos, conforme é mostrado na figura 4.31. Os valores de Reynolds foram  $Re = 1$  e  $100$ , respectivamente, conforme figuras 4.32 e 4.33. É observado que usando a malha com 1.520 elementos o valor do  $Nu_h$  encontra-se praticamente convergido. Isto pode ser melhor verificado através das figuras 4.34a e 4.34b, que mostram o desvio percentual do  $Nu_h$  versus o número de elementos, para  $Re = 1$  e  $100$ , respectivamente.

As figuras 4.35 a 4.42 e 4.44 a 4.51 mostram as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  e da função corrente  $\psi$  dos casos 1, 2, 3 e 4. As distribuições são apresentadas para o regime permanente. Nas figuras, para função corrente, nota-se que o escoamento formado por uma célula convectiva, tem-se o domínio do efeito convectivo, pois a convecção natural prevalece sobre a convecção forçada. O contrário, a convecção forçada é dominante e a recirculação de fluido é desprezível. Observa-se das figuras para distribuição de temperatura, quanto maior o número de Grashof, maiores serão as regiões de altos gradientes de temperatura, próximas às superfícies fria e quente. Dependendo do caso analisado, podem ocorrer pequenas variações das posições, próximas às superfícies verticais, de altos gradientes de temperatura. Também, quanto maior for o número de Reynolds, maior será a região de fluido frio no interior da cavidade semi-aberta.

As figuras 4.43a, 4.43b, 4.52a e 4.52b mostram, respectivamente, para os casos 1, 2, 3 e 4, o número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_h$  versus o número de Reynolds  $Re$ , para valores de Grashof  $Gr = 0, 10^4, 10^5$  e  $5 \times 10^5$ . Para os casos 1 e 3, nota-se que  $Nu_h$ , para todos os valores de Grashof, aumenta à medida que o número de Reynolds aumenta. Para os casos 2 e 4, quando aumenta-se o número de Reynolds, aumenta-se também o Nusselt  $Nu_h$ , para valores baixos e nulos de Grashof, ou seja,  $Gr = 0$  e  $10^4$ . Para o caso 2 com valores de Grashof,  $Gr = 10^5$  e  $5 \times 10^5$ , com o aumento do Reynolds, diminuem o Nusselt  $Nu_h$ . Porém, para o caso 2 com os mesmos valores de Grashof  $Gr = 10^5$  e  $5 \times 10^5$ , com o aumento do Reynolds, praticamente não se obtém diferenças nos resultados do número de Nusselt  $Nu_h$ .

Apesar dos resultados teóricos não tenham sido comparados com outros resultados teóricos e experimentais, devido a indisponibilidade de dados, acredita-se que o objetivo do presente trabalho tenha sido alcançado e que algum avanço se obteve nos estudos de convecção forçada, natural e mista.

## 5.2 – Recomendações para Trabalhos Futuros

Com o presente trabalho, pode-se sugerir novos trabalhos, estendendo-se o estudo deste:

- a) Considerar a convecção mista para os problemas de placas planas paralelas.
- b) Aplicar o método de Petrov-Galerkin para as geometrias de placas planas paralelas.
- c) Aplicar o método de Taylor-Galerkin para problemas de convecção forçada, natural e mista para o regime não permanente.
- d) Utilizar malhas não uniformes, concentrando-se mais elementos próximos às regiões de altos gradientes para os casos de convecção natural e mista.
- e) Realizar o estudo do problema de convecção natural do presente trabalho, para outras formas geométricas e posições do corpo interno quente, incluindo no seu lugar, um corpo frio. Considerar também a existência de condução de calor no corpo interno.
- f) Estudar os efeitos das mudanças das dimensões e posições de entrada e saída de fluido da cavidade, para os casos de convecção mista do presente trabalho. Estender as faixas dos valores dos números de Grashof, Reynolds e Prandtl.
- g) Considerar no estudo de convecção mista do presente trabalho, um duto montado na região de entrada de fluido da cavidade e outro duto na saída. Considerar o escoamento no interior do duto como sendo desenvolvido termicamente e hidrodinamicamente.
- h) Considerar o efeito da condutividade térmica do obstáculo, variando também a sua geometria, para o problema de canais com obstáculo do presente trabalho.
- i) Obter equações de correlações do número de Nusselt médio em função dos diversos parâmetros térmicos e geométricos, para os problemas estudados no presente trabalho, visando facilitar a aplicação dos resultados aos problemas de engenharia.

## APÊNDICE A1

### MÉTODO DE GALERKIN PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL BIDIMENSIONAL EM REGIME NÃO PERMANENTE

#### A1.1 – Introdução

Seja a equação diferencial bidimensional em regime não permanente (Sergeling, 1984):

$$\delta \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + Q_\phi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau}, \quad (A1.1)$$

com as seguintes condições de contorno :

$$\phi = \phi_0(X, Y), \quad (A1.2)$$

$$q = \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial X} + \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial n}, \quad (A1.3)$$

onde  $\phi$  representa uma função escalar;  $\phi_0(X, Y)$  representa uma função especificada no contorno;  $q$  é fluxo de calor normal  $n$  à superfície  $S$  do contorno;  $\lambda$  é um parâmetro de valor constante, e  $\tau$  é o tempo adimensional.

#### A1.2 – Método de Galerkin

A equação (A1.1) pode ser escrita da seguinte forma :

$$\delta \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + \left( Q_\phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right) = 0. \quad (A1.4)$$

A integral residual de volume é apresentada na seguinte forma:

$$\{R^c\} = - \int_{V^c} [N^c]^T \left\{ \delta \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + \left( Q_\phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right) \right\} dV = 0. \quad (A1.5)$$

A equação (A1.5) pode ser escrita como sendo :

$$\begin{aligned} \{R^c\} = & - \int_{V^c} [N^c]^T \delta \frac{\partial^2 \phi^c}{\partial X^2} dV - \int_{V^c} [N^c]^T \delta \frac{\partial^2 \phi^c}{\partial Y^2} dV \\ & - \int_{V^c} [N^c]^T \left( Q_\phi - \lambda \frac{\partial \phi^c}{\partial \tau} \right) dV. \end{aligned} \quad (A1.6)$$



As derivadas devem ser transformadas para as formas de menor ordem, usando a derivada de produto.

Usa-se a seguinte derivada do produto:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) = [N^e]^T \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial X^2} + \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X}. \quad (A1.7)$$

Rearranjando a equação (A1.7), resulta :

$$[N^e]^T \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) - \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X}. \quad (A1.8)$$

Para o segundo termo da equação (A1.6), segue-se o mesmo procedimento:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) = [N^e]^T \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial Y^2} + \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y}. \quad (A1.9)$$

Rearranjando a equação (A1.9), resulta :

$$[N^e]^T \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial Y^2} = \frac{\partial}{\partial Y} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) - \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y}. \quad (A1.10)$$

Substituindo as equações (A1.8) e (A1.10) em (A1.6), resulta :

$$\begin{aligned} \{R^e\} = & - \int_{V^e} \left[ \delta \frac{\partial}{\partial X} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) - \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right] dV \\ & - \int_{V^e} \left[ \delta \frac{\partial}{\partial Y} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) - \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right] dV \\ & - \int_{V^e} [N^e]^T \left( Q_0^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) dV. \end{aligned} \quad (A1.11)$$

Rearranjando a equação (A1.11), resulta :

$$\begin{aligned} \{R^e\} = & \int_{V^e} \left[ \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right] dV \\ & - \int_{V^e} \left[ \delta \frac{\partial}{\partial X} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) + \delta \frac{\partial}{\partial Y} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) \right] dV \\ & - \int_{V^e} [N^e]^T \left( Q_0^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) dV. \end{aligned} \quad (A1.12)$$

A segunda integral de volume da equação (A1.12) pode ser transformada em uma integral de superfície usando o teorema de Gauss (Olmstead, 1961), resultando :

$$\int_{A^e} \left[ \delta [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right] dA. \quad (A1.13)$$

A equação (A1.13) pode ser reduzida para a seguinte forma :

$$\int_{A^e} [N^e]^T \left( \delta \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) dA. \quad (A1.14)$$

Substituindo a equação (A1.3) em (A1.14), vem :

$$\int_{A^e} [N^e]^T \left( \delta \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) dA = \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA. \quad (A1.15)$$

Portanto, a integral residual completa fica na seguinte forma :

$$\begin{aligned} \{R^e\} = & \int_{V^e} \left[ \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right] dV - \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA \\ & - \int_{V^e} [N^e]^T \left( Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) dV. \end{aligned} \quad (A1.16)$$

A função escalar  $\phi^e$  é definida na seguinte forma matricial :

$$\phi^e = [N^e]^T \{ \phi^e \}. \quad (A1.17)$$

As derivadas  $\frac{\partial \phi^e}{\partial X}$  e  $\frac{\partial \phi^e}{\partial Y}$  na primeira integral da equação (A1.16) podem ser

substituídas por :

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial X} = \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \{ \phi^e \} \text{ e } \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} = \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \{ \phi^e \}. \quad (A1.18)$$

Portanto, rearranjando as equações (A1.17) e (A1.18) em (A1.16), resulta :

$$\begin{aligned} \{R^e\} = & \left[ \int_{V^e} \left( \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial [N^e]}{\partial X} + \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial [N^e]}{\partial Y} \right) dV \right] \{ \phi^e \} - \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA \\ & - \int_{V^e} [N^e]^T Q_\phi^e dV + \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] \frac{\partial \{ \phi^e \}}{\partial \tau} dV. \end{aligned} \quad (A1.19)$$

$$\text{Definindo, } \left\{ \dot{\phi}^e \right\} = \frac{\partial \{ \phi^e \}}{\partial \tau}. \quad (A1.20)$$

Da equação (A1.17),  $\phi^e$  é definida por :

$$\phi^e = [N^e]^T \{ \phi^e \}, \quad (A1.21)$$

com isto, define-se a matriz  $\{g^e\}$  como sendo :

$$\{g^e\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \\ \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial N_i^e}{\partial X} & \frac{\partial N_j^e}{\partial X} & \frac{\partial N_k^e}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial Y} & \frac{\partial N_j^e}{\partial Y} & \frac{\partial N_k^e}{\partial Y} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{array} \right\} = [B^e] \{ \phi^e \}. \quad (A1.22)$$

Onde a matriz das derivadas das funções de forma  $[B^e]$  é dada por:

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} & \frac{\partial N_j}{\partial X} & \frac{\partial N_k}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} & \frac{\partial N_j}{\partial Y} & \frac{\partial N_k}{\partial Y} \end{bmatrix}. \quad (A1.23)$$

A matriz  $[B^e]^T$  é dada por:

$$[B^e]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} & \frac{\partial N_i}{\partial Y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial X} & \frac{\partial N_j}{\partial Y} \\ \frac{\partial N_k}{\partial X} & \frac{\partial N_k}{\partial Y} \end{bmatrix}. \quad (A1.24)$$

A primeira integral da equação (A1.19), com o uso das equações (A1.23) e (A1.24), pode ser escrita como:

$$\left[ \int_{V^e} \left( \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial [N^e]}{\partial X} + \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial [N^e]}{\partial Y} \right) dV \right] \{ \phi^e \} = \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV \{ \phi^e \}. \quad (A1.25)$$

A última integral da equação (A1.19), com o uso da equação (A1.20), pode ser escrita como :

$$\int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] \left\{ \dot{\phi}^e \right\} dV = [C]^e \left\{ \dot{\phi}^e \right\}, \quad (A1.26)$$

onde :

$$[C]^e = \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV. \quad (A1.27)$$

Substituindo as equações (A1.25) e (A1.26) em (A1.19), resulta :

$$\begin{aligned} \{ R^e \} = & \left[ \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV \right] \{ \phi^e \} - \int_{\Lambda^e} [N^e]^T q^e dA \\ & - \int_{V^e} [N^e]^T Q_\phi^e dV + C^e \left\{ \dot{\phi}^e \right\} = 0. \end{aligned} \quad (A1.28)$$

Onde:

$$[C]^e = \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV, \quad (A1.29)$$

$$[K]^e = \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV, \quad (A1.30)$$

$$\{F\}^c = \int_{A^c} -[N^c]^T q^c dA, \quad (A1.31)$$

$$\{E\}^c = \int_{V^c} -[N^c]^T Q_\phi^c dV. \quad (A1.32)$$

Fazendo a minimização de  $\{R^c\}$ , tem-se :

$$\{R\} = \sum_{c=1}^E \{R^c\} = 0. \quad (A1.33)$$

Logo, substituindo (A1.28) em (A1.33), resulta :

$$\begin{aligned} \{R\} = \sum_{c=1}^E \left[ \int_{V^c} \delta [B^c]^T [B^c] dV \right] \{\dot{\phi}^c\} + \sum_{c=1}^E \left[ \int_{A^c} -[N^c]^T q^c dA \right] \\ + \sum_{c=1}^E \left[ \int_{V^c} -[N^c]^T Q_\phi^c dV \right] + \sum_{c=1}^E \left[ C^c \left\{ \dot{\phi}^c \right\} \right] = 0. \end{aligned} \quad (A1.34)$$

A equação (A1.34) pode ser escrita na seguinte forma condensada :

$$\{R\} = [C] \left\{ \dot{\phi} \right\} + [K] \{\phi\} + \{E\} + \{F\} = 0, \quad (A1.35)$$

onde :

$$[C] = \sum_{c=1}^E [C]^c = \sum_{c=1}^E \left[ \int_{V^c} \lambda [N^c]^T [N^c] dV \right], \quad (A1.36)$$

$$[K] = \sum_{c=1}^E [K]^c = \sum_{c=1}^E \left[ \int_{V^c} \delta [B^c]^T [B^c] dV \right], \quad (A1.37)$$

$$\{E\} = \sum_{c=1}^E \{E\}^c = \sum_{c=1}^E \left[ \int_{V^c} -[N^c]^T Q_\phi^c dV \right], \quad (A1.38)$$

$$\{F\} = \sum_{c=1}^E \{F\}^c = \sum_{c=1}^E \left[ \int_{A^c} -[N^c]^T q^c dA \right]. \quad (A1.39)$$

### A1.3 – Aproximação dos Termos $\left\{ \dot{\phi} \right\}$ e $\{\phi\}$

O termo  $\left\{ \dot{\phi} \right\}$  na equação (A1.35) será aproximado usando diferenças finitas para frente,

na seguinte forma:

$$\left\{ \dot{\phi} \right\} = \frac{1}{\Delta\tau} (\{\phi\}_{N+1} - \{\phi\}_N), \quad (A1.40)$$

onde:

$\{\phi\}_{N+1}$  é a distribuição de  $\phi$  obtida no tempo  $\tau_{N+1}$  ;

$\{\phi\}_N$  é a distribuição de  $\phi$  obtida no tempo  $\tau_N$  ;

$\Delta\tau$  é o incremento de tempo dado por  $\Delta\tau = \tau_{N+1} - \tau_N$ .

O termo  $\{\phi\}$  na equação (A1.35) será avaliado no tempo  $\tau_{N+1}$ , isto é:

$$\{\phi\} = \{\phi\}_{N+1}. \quad (\text{A1.41})$$

Substituindo (A1.40) e (A1.41) em (A1.35), vem:

$$\left[ [K] + \frac{1}{\Delta\tau}[C] \right] \{\phi\}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau}[C]\{\phi\}_N - \{E\} - \{F\}, \quad (\text{A1.42})$$

definindo:

$$\{R\} = \{E\} + \{F\}. \quad (\text{A1.43})$$

De (A1.42) e (A1.43), vem:

$$\left[ [K] + \frac{1}{\Delta\tau}[C] \right] \{\phi\}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau}[C]\{\phi\}_N - \{R\}. \quad (\text{A1.44})$$



Figura A2.1 - Malha nodal interna e da estrutura

A Figura A2.1 mostra uma malha nodal bidimensional com a numeração de todos os pontos

nodais.

Os pontos nodais com numeração 1, 2, 4, 10, 14, 12, 11, 6 e 7 formam parte da malha

da malha nodal externa, 3, 5, 8, 9, 13 e 15 são pontos internos.

## APÊNDICE A2

### MÉTODO MATRICIAL PARA O CÁLCULO DA VORTICIDADE NO CONTORNO

#### A2.1 – Introdução

No caso de problemas onde a geometria é complexa ou a malha não é uniforme, existe grande dificuldade para calcular a vorticidade no contorno dadas pelas equações (2.25b), (2.56a) ou (2.87a), respectivamente, para os casos de convecção forçada, natural ou mista.

Mostra-se no item A2.2 seguinte uma maneira alternativa de se calcular a vorticidade no contorno para os casos de convecção forçada, natural e mista.

#### A2.2 – Cálculo da Vorticidade no Contorno

Apresenta-se a seguir, o desenvolvimento teórico para se calcular a vorticidade nos pontos nodais do contorno.

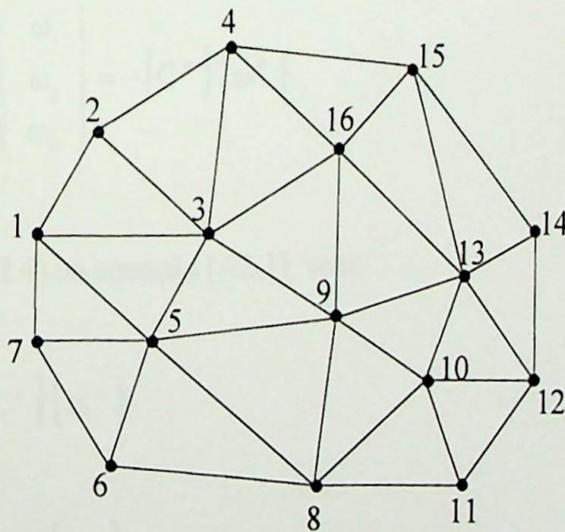


Figura A2.1 – Pontos nodais internos e do contorno.

A figura A2.1 mostra uma geometria bidimensional com a numeração de todos os pontos nodais.

Os pontos nodais com numeração: 1, 2, 4, 15, 14, 12, 11, 8, 6 e 7 fazem parte do contorno e os pontos nodais 5, 3, 9, 10, 13 e 16 são pontos internos.

O sistema matricial do elemento para a função corrente  $\psi$  é dado pela equação (3.60), como sendo:

$$[K_\psi]^e \{\psi^e\} = -\{R_\psi\}^e \quad (A2.1)$$

A matriz  $\{R_\psi\}^e$  pode ser obtida das equações (3.63) e (3.64) como:

$$\{R_\psi\}^e = -\frac{A}{12} \begin{Bmatrix} (2\omega_i + \omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + 2\omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + \omega_j + 2\omega_k) \end{Bmatrix} = -\frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} \quad (A2.2)$$

Mas, da equação (3.67), tem-se:

$$[C]^e = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (A2.3)$$

Assim, das equações (A2.2) e (A2.3), vem que:

$$\{R_\psi\}^e = -[C]^e \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} = -[C]^e \{\omega^e\} \quad (A2.4)$$

Substituindo (A2.4) na equação (A2.1), vem:

$$[K_\psi]^e \{\psi^e\} = [C]^e \{\omega^e\} \quad (A2.5)$$

Definindo a matriz  $[B^e]$  como:

$$[B^e] = [K_\psi]^e \{\psi^e\} \quad (A2.6)$$

Assim, das equações (A2.5) e (A2.6), vem que:

$$[C^e] \{\omega^e\} = \{B^e\} . \quad (A2.7)$$

A partir da equação (A2.7) para o elemento, obtém-se a seguinte equação na forma global.

$$[C] \{\omega\} = \{B\} . \quad (A2.8)$$

Aplicando a condição de contorno de vorticidade conhecida nos pontos internos, a equação (A2.8) é modificada, podendo ser escrita como:

$$[C'] \{\omega\} = \{B'\} . \quad (A2.9)$$

Resolvendo o sistema dado pela equação (A2.9), obtemos a distribuição das vorticidades no contorno  $\omega_M$ .

Pode ser observado que neste método de cálculo, a vorticidade nos pontos nodais do contorno, podem ser obtidas quando se conhece a função corrente em todos os pontos nodais e a vorticidade nos pontos nodais interiores.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ✓ Aung, W. ; Worku, G. , “Mixed Convection in Ducts with Asymmetric Wall Heat Fluxes”, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 109, pp. 947-951, 1987.
- ✓ Bhatti, M. S. ; Shah, R. K., “Laminar Convective Heat Transfer in Ducts”. In: Kakaç, S., Shah, R. K. e Aung, W., “Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer”, John Wiley & Sons, pp. 30-41, 1987.
- ✓ Bodoia, J.R. ; Osterle, J.F. , “The Development of Free Convection between Heated Vertical Plates”, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 84, pp. 40-44, 1962.
- Cess, R. D. ; Shaffer, E. C., “Heat Transfer to Laminar Flow Between Parallel Plates with a Prescribed Wall Heat Flux”, *Applied Scientific Research*, Vol. A8, pp. 339-344, 1959.
- Figueredo, J.R. ; Ganzarolli, M.M. ; Almeida, P.I.F., “Convecção Natural em Cavidades Retangulares – Solução Numérica”, In: II Congresso Latino-americano de Transferência de Calor e Matéria, São Paulo, pp. 62-73, 1986.
- Ghaddar, N. K., “Natural Convection Heat Transfer Between a Uniformly Heated Cylindrical Element and its Rectangular Enclosure”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 2.327-2.334, 1992.
- Ingham, D. B.; Watson, P. ; Heggs, P. J. , “Recirculating Laminar Mixed Convection in a Horizontal Parallel Plate Duct”, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol.16, pp. 202-210, 1995.
- Lin, T. F.; Yin, C. P. ; Yan, W.M. , “Transient Laminar Mixed Convective Heat Transfer In a Vertical Flat Duct”, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 113, pp. 384-390, 1991.
- Lundberg, R. E.; Reynolds, W. C. ; Kays, W. M., “Heat Transfer with Laminar Flow in Concentric Annuli with Constant and Variable Wall Temperature and Heat Flux”, NASA TN D-1972, Washington, D. C., 1963.

- Menon, G. J., "Convecção Natural no Interior de Coletores Solares Concentradores de Parábolas Compostas". Tese de Doutorado, ITA, São José dos Campos, 1984.
- Mercer, W.E. ; Pearce, W.M. ; Hitchcock, J.E. , "Laminar Forced Convection In The Entrance Region Between Parallel Flat Plates", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 89, pp.251-257, 1967.
- Nascimento, M. A. R., "Estudo Teórico de Convecção Natural em Coletores Concentradores com Absorvedor Cilíndrico", Dissertação de Mestrado, EFEI, Itajubá, 1988.
- Nguyen, T. V., "Laminar Heat Transfer for Thermally Developing Flow in Ducts", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 1.733-1.741, 1992.
- Nguyen, T. V., "Low Reynolds Number Simultaneously Developing Flows in the Entrance Region of Parallel Plates", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 34, pp. 1.219-1.225, 1991.
- Nguyen, T.V. ; Maclaine-cross, I. L. , "Simultaneously Developing, Laminar Flow, Forced Convection in the Entrance Region of Parallel Plates", *Journal of Heat Transfer*, Vol.113, pp. 837-842, 1991.
- Olmstead, J. M. H., "Advanced Calculus", Prentice - Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.
- Oosthuizen, P.H. ; Paul, J.T. , "Mixed Convective Heat Transfer in a Cavity". In: *The 23rd National Heat Transfer Conference.*, 1985, Denver, Colorado, University of Delaware, pp. 159-169, 1985.
- Ozisik, M. N. , "Transferência de Calor - Um Texto Básico", Editora Guanabara Koogan S. A., 1990.
- Ozoe, H.; Yamamoto, K.; Sayama, H. ; Churchill, S. W., "Natural Circulation in na Inclined Rectangular Channel Heated on One Side na Cooled on the Opposing Side", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 17, pp. 1.209-1.217, 1974.
- Quintiere, J. ; Mueller, W.K. , "An Analysis of Laminar Free and Forced Convection between Finite Vertical Parallel Plates", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 95, pp. 53-59, 1973.

- Ramachandran, N.; Armaly, B.F. ; Chen, T.S. , “Measurements of Laminar Mixed Convection Flow Adjacent to an Inclined Surface”, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 109, pp. 146-150, 1987.
- ✕ Safi, M. J. ; Loc, T. P., “Development of Thermal Stratification in a Two-Dimensional Cavity: a Numerical Study”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 37, pp. 2.017-2.024, 1994.
- Sasaguchi, K.; Kuwabara, K.; Kusano, K. ; Kitagawa, H., “Transient Cooling of Water Around a Cylinder in a Rectangular Cavity – a Numerical Analysis of the Effect of the Position of the Cylinder”, *Int. J. heat Mass Transfer*, Vol. 41, pp. 3.149-3.156, 1998.
- ✕ Sergeling, L.J., “Applied Finite Element Analysis”, John Wiley and Sons, Inc., New York, 2nd ed., 1984.
- ✕ Tabarrok, B.; Lin, R.C., “Finite Element Analysis of Free Convection Flow”, *Int. J. Heat Transfer*, Vol. 20, pp. 945-952, 1977.
- Tao, L.N. , “On Combined Free and Forced Convection in Channels”, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 82, pp. 233-238, 1960.
- ✕ Tay, A. O.; Vahl Davis, G. , “Application Of The Finite Element Method To Convection Heat Transfer Between Parallel Planes”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 14, pp. 1.057-1.069, 1971.
- Valencia, A. ; Frederick, R. L., “Heat Transfer in Square Cavities with Partially Active Vertical Walls”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 32, pp. 1.567-1.574, 1989.
- Wilkes, J.O. ; Churchill, S.W., “The Finite – Difference Computation in a Rectangular Enclosures”, *AIChE Journal*, Vol. 12, pp. 161-166, 1966.
- Wong, H.H. ; G.D. Raithby, “Improved Finite – Difference Methods Based on a Critical Evaluation of the Approximation Errors”, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 2, pp. 139-163, 1979.
- ✕ Yao, L.S. , “Two-Dimensional Mixed Convection Along a Flat Plate”, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 109, pp. 440-445, 1987.

Young, T. J. ; Vafai, K., "Convective Cooling of a Heated Obstacle in a Channel", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 41, pp. 3.131-3.148, 1998.

× Zienkiewicz, O. C., "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw – Hill, London, 1971.

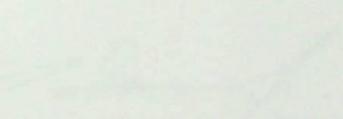
ANEXO I

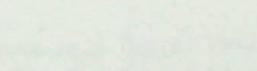
PROMOÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

A Banca Examinadora, através do processo nº 128 de 22 de Maio de 1998, considerando a qualidade da Dissertação de Mestrado intitulada "Simulação Numérica da Transferência de Calor e do Escoamento de Fluidos", aprovou o encaminhamento ao Senhor Diretor Coordenador dos Cursos de Engenharia do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) - Departamento de Engenharia Acadêmica e ex-0015 do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) - Departamento de Engenharia Acadêmica, na Área de Concentração em Engenharia de Energia, para que se realize a seguinte organização regimental, a saber:

Assinada em São Carlos, em 1998.

  
Prof. Antonio de Souza Neto  
1º Examinador - ITA

  
Prof. Renato Mourão  
2º Examinador - ITA

  
Prof. Carlos José Moran  
3º Examinador - EPB  
Orientador



Ministério da Educação e do Desporto  
**ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ**

## ANEXO I

### PRONUNCIAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

A Banca Examinadora, abaixo assinada, nomeada pela Portaria nº 125 de 22 de Março de 1999, considerando o resultado do Julgamento da Prova de Defesa Pública da Dissertação de Mestrado intitulada "**Simulação Numérica da Transferência de Calor e do Escoamento de Flúidos**", apresenta pronunciamento no sentido de que o Coordenador dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Escola Federal de Engenharia de Itajubá solicite ao DRA (Departamento de Registro Acadêmico) a expedição do título de **Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica**, na **Área de Concentração em Conversão de Energia**, satisfeitas as demais exigências regimentais, à **Rogério Fernandes Brito**.

Itajubá, 23 de Março de 1999

Prof. Aristeu da Silveira Neto  
1º Examinador - UFU

Prof. Nelson Manzanarés Filho  
2º Examinador - EFEI

Prof. Genésio José Menon  
3º Examinador - EFEI  
Orientador



Ministério da Educação e do Desporto  
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

ANEXO II

FOLHA DE JULGAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

Título da Dissertação: "Simulação Numérica da Transferência de Calor e do Escoamento de Fluidos"

Autor Rogério Fernandes Brito

JULGAMENTO

| Examinadores | Conceito | Rubrica |
|--------------|----------|---------|
| 1º           | A+       |         |
| 2º           | A+       |         |
| 3º           | A+       |         |

Resultado Médio: Conceito: A+, ou seja, aprovado  
com distinção

Observações: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Itajubá, 23 de Março de 1999.

Prof. Aristeu da Silveira Neto  
1º Examinador - UFU

Prof. Nelson Manzanares Filho  
2º Examinador - EFEI

Prof. Genésio José Menon  
3º Examinador - EFEI  
Orientador