

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**RADIAÇÃO DE CORPO NEGRO DO CAMPO  
ESCALAR**

**Tiago Garcia Ribeiro**

ITAJUBÁ, AGOSTO DE 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Tiago Garcia Ribeiro**

**RADIAÇÃO DE CORPO NEGRO DO CAMPO ESCALAR**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física.

**Área de concentração:** Teoria de Campos, Gravitação e Cosmologia

**Orientador:** Prof. Dr. Edisom de Souza Moreira Junior

AGOSTO DE 2014

ITAJUBÁ - MG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Tiago Garcia Ribeiro**

**RADIAÇÃO DE CORPO NEGRO DO CAMPO ESCALAR**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 14 de agosto de 2014, conferindo ao autor o título de **Mestre em Ciências em Física**.

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Edisom de Souza Moreira Junior (Orientador)

Prof. Dr. Antonio Soares de Castro

Prof. Dr. Rero Marques Rubinger

AGOSTO DE 2014

ITAJUBÁ - MG

*Dedico este trabalho à minha família: João, Nilda e Filipe.*

*Eles me incentivaram a conhecer o universo! Porém,  
mais importante que isso, me deram a certeza de um lar.*

"Cultivar as ciências e não amar os seres humanos é como  
acender uma tocha e fechar os olhos."  
(Provérbio chinês)

# Agradecimentos

Agradeço antes de tudo a Deus, a força maior que me torna capaz de acordar todos os dias e ir em busca dos meus sonhos. A todos os meus familiares, em especial a meu pai João, minha mãe Nilda e meu irmão Filipe. Não disponho de espaço aqui para agradecer-lhes por tudo que fizeram, e ainda fazem, por mim. Pela força que sempre me concederam, às horas de atenção, à confiança depositada. Agradeço também aos familiares da minha namorada e em especial a ela, Rafaela. Não tenho palavras para dizer tudo que esta fez por mim. O apoio que sempre me deu, a confiança, o carinho, o respeito pelas minhas decisões.

À toda comunidade UNIFEI que me proporcionou um ambiente de estudo, ao qual só tenho a agradecer. Aos professores do mestrado em física com os quais tive a oportunidade de aprender muito mais que a beleza da ciência, aprendi exemplos de grandes seres humanos. Dentre esses professores agradeço em especial ao meu orientador, Edisom de Souza Moreira Jr., pelo comprometimento com o desenvolver deste trabalho, o respeito a mim, o exemplo, o incentivo. As inúmeras horas de discussão sobre a física que tive com ele durante este trabalho representam, com certeza, a maior parte do aprendizado que tive durante o mestrado.

Agradeço a todos os meus professores e amigos de graduação, os quais sempre me incentivaram a seguir em frente. Em especial ao Thiago Bonifácio, que sempre se fez presente em todo meu mestrado, pela paciência em escutar minhas intermináveis conversas, reclamações e desabafos. Também de forma muito especial, agradeço a Rafael Estevão e, em memória, a seu pai Rozimar Estevão. Este, ao falecer no início de 2012, fez com que aquele desistisse de vir para o mestrado comigo, me deixando assim a difícil questão: como sair de Muriaé sem meu fiel companheiro de viagens?

De forma especial agradeço aqui ao meu orientador de graduação, Ademar Barbosa Guimarães. Ele foi a inspiração para que eu buscasse prosseguir nos estudos e o exemplo de professor que sempre buscarei seguir.

E por último, mas não menos importante, agradeço a todos os amigos que fiz em Itajubá durante o mestrado. Aos meus amigos de república, da sala de estudo dos mestrandos em física e matemática, aos amigos e também vizinhos da travessa Dr. João de Faria e de forma geral aos amigos que fiz no bairro Cruzeiro. Vocês foram minha família durante todo esse tempo.

# Resumo

No presente trabalho estudaremos a radiação de corpo negro do campo escalar com massa em dimensões arbitrárias, onde inicialmente desenvolveremos toda a dinâmica relacionada a este campo mediante um princípio de mínima ação, obtendo a equação de movimento, o tensor energia-momento, e ainda, apresentando uma possível gravitação relativística descrita em termos do campo escalar. Em seguida consideraremos o campo confinado a uma cavidade em um espaço  $(N-1)$ -dimensional, o que nos permitirá quantizá-lo. Calcularemos, pela aplicação do *ensemble* canônico, as quantidades termodinâmicas relacionadas ao sistema em questão para massa e dimensões arbitrárias, sendo esta nossa principal contribuição. As referidas quantidades termodinâmicas serão comparadas, no limite de massa nula, com os resultados correspondentes no eletromagnetismo.

Visando explorar de forma mais detalhada os efeitos da massa na radiação de cavidade do campo escalar, tomaremos o caso particular quadridimensional, apresentando as primeiras correções de massa nas quantidades termodinâmicas. Assim, o comportamento de nosso sistema pode ser facilmente comparado com o previsto por Planck para a radiação de corpo negro do campo de Maxwell. Finalmente, investigaremos a distribuição espectral da densidade de energia no interior da cavidade, obtendo as leis de Planck, Rayleigh-Jeans e Wien para o caso com massa. Inclusive, apresentamos o comportamento espectral da intensidade de energia emitida através de um furo em uma das paredes da cavidade, assim como a lei de Stefan-Boltzmann para massa não nula.

**Palavras-chave:** Campo escalar, radiação de corpo negro, bóson, eletromagnetismo.



# Abstract

In the present work we study the black-body radiation of a massive scalar field in arbitrary number of dimensions. Initially we develop the whole dynamics related to this field through the principle of least action, obtaining its equation of motion, its energy-momentum tensor, and further, presenting a possible relativistic theory for gravity described in terms of the scalar field. Then we consider the scalar field confined in a cavity of volume  $V$ , in a  $(N - 1)$ -dimensional space, which allows us to quantize the field. We calculate using the canonical ensemble the thermodynamic quantities related to the system, which is our main contribution. Such thermodynamic quantities are compared, in the limit of zero mass, with the corresponding results for the electromagnetic field.

Aiming to investigate in more detail the effects of an arbitrary mass to the scalar radiation in the cavity, we take the particular case of  $N = 4$ , presenting the first mass corrections to the thermodynamic quantities. Thus, the behavior of our system can be easily compared with that predicted by Planck to the black-body radiation of the Maxwell field. Finally, we investigate the spectral distribution of energy density in the interior of the cavity, obtaining the Planck, the Rayleigh-Jeans and the Wien laws for the case with mass. We also present the spectral behavior of the radiance, as well as Stefan-Boltzmann's law for small masses.

**Keywords:** Scalar field, black-body radiation, bosons, electromagnetism.

# Conteúdo

Agradecimentos	iv
Resumo	vi
Abstract	vii
Índice	viii
Lista de Figuras	x
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 O campo escalar</b>	<b>5</b>
2.1 A ação e o tensor energia-momento do campo escalar . . . . .	7
2.2 Uma gravitação escalar . . . . .	9
<b>3 Mecânica estatística da radiação escalar</b>	<b>18</b>
3.1 Quantidades termodinâmicas . . . . .	23
3.2 Termodinâmica da radiação escalar sem massa . . . . .	28
3.3 A pressão por considerações cinéticas . . . . .	31
<b>4 Termodinâmica da radiação escalar em <math>N = 4</math></b>	<b>34</b>
4.1 Comportamento em primeiras correções de massa . . . . .	37
<b>5 Espectro de corpo negro da radiação escalar</b>	<b>43</b>
5.1 As leis de Rayleigh-Jeans e Wien com massa . . . . .	46
5.2 Intensidade . . . . .	51

<b>6</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>63</b>
<b>A</b>	<b>A energia total em termos das funções modificadas de Bessel</b>	<b>66</b>
<b>B</b>	<b>Valor médio quadrático do campo escalar <math>\langle \phi^2 \rangle</math></b>	<b>68</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>70</b>

# Lista de Figuras

2.1	Em (a) comparamos as predições das órbitas planetárias feitas por Newton e pela gravitação escalar desenvolvida neste capítulo, mostrando o retrocesso do periélio ( $\varphi = 0$ ) previsto por esta última. Já em (b), mostramos o real comportamento do periélio em relação ao resultado de Newton, sendo um avanço, como previsto corretamente pela relatividade geral. Confeccionamos as figuras (a) e (b) a partir de (2.67) e do resultado einsteniano na literatura [1, 13], respectivamente. . . . .	17
4.1	Comportamento da pressão $P$ como função da temperatura $T$ , em quatro dimensões e valores diferentes para a massa dos bósons. As constantes $\hbar$ , $c$ e $k_B$ foram feitas iguais a um. . . . .	35
5.1	A distribuição espectral para a densidade de energia no interior da cavidade, a temperatura constante e diferentes valores de massa para os bósons. . . . .	45
5.2	Comportamento da distribuição espectral da densidade de energia no interior da cavidade a baixas frequências, temperatura constante e diferentes valores para a massa dos bósons. As curvas sólidas representam o comportamento exato previsto pela teoria, que nas frequências consideradas se aproximam da lei de Raleigh-Jeans generalizada para massa não nula, dada pelas curvas de mesma cor em pontilhado. . . . .	48
5.3	Limite de altas frequências para a distribuição espectral da densidade de energia no interior da cavidade à temperatura constante e diversos valores de massa para os bósons. As curvas sólidas são as previsões exatas da teoria com massa e são bem descritas, no limite de frequências considerado, pela lei de Wien generalizada para massa não nula (curvas pontilhadas com mesma cor). . . . .	49
5.4	Velocidade dos bósons na cavidade para massas diferentes de zero. As constantes $\hbar$ , $k_B$ e $c$ foram tomadas iguais a 1. . . . .	57

5.5	Distribuição espectral da densidade de energia na cavidade e da intensidade de energia emitida por unidade de área na unidade de tempo para seu exterior, a uma temperatura fixa, e para bósons de massas diferentes. As curvas pontilhadas mostram a intensidade de energia emitida pela cavidade em relação à densidade de energia no seu interior, curvas sólidas de mesma cor. . . . .	58
5.6	Distribuição da intensidade para o espectro de corpo negro do Sol. A curva em negrito representa a situação real, em uma escala onde a temperatura do Sol é 1. Enquanto a curva em azul representa o comportamento espectral da intensidade em uma temperatura na qual o Sol possuiria a frequência de máxima emissão igual a de uma estrela similar, mas em uma situação onde os bósons possuísem uma massa não nula, curva em verde. As constantes $\hbar$ , $c$ e $k_B$ foram feitas iguais a unidade. . . . .	62

# Capítulo 1

## Introdução

O campo escalar foi encarado durante muito tempo como um modelo, matematicamente mais simples, conveniente à introdução de formalismos teóricos característicos das teorias de campo da física relativística, sejam estas, teorias quânticas ou clássicas. Essa restrição do campo escalar a “toy model” foi justificada, até pouco tempo, pela sua ausência de manifestação na natureza. Assim, até então, os fenômenos observados e seus correspondentes modelos teóricos se limitavam a outros campos, em particular o campo vetorial descrevendo o eletromagnetismo e o campo tensorial descrevendo a gravitação [1]. No entanto, dados recentes apontam para um imediato abandono do campo escalar apenas como recurso didático, resultando sua direta inclusão na lista de campos fisicamente observados [2, 3].

A primeira evidência experimental que comprova uma teoria baseada no campo escalar ocorreu em meados do ano de 2012, quando experimentos realizados no LHC (Large Hadron Collider) detectaram uma partícula com características similares às esperadas para um bóson de Higgs [2]. As expectativas foram comprovadas, e em 2013, François Englert e Peter W. Higgs receberam o Nobel de Física por seus modelos teóricos que previam o bóson.

O bóson de Higgs é uma partícula elementar de spin zero associada a um campo escalar, o campo de Higgs [4]. Este campo foi proposto inicialmente para dar consistência ao modelo eletrofraco, no qual as partículas mediadoras das interações eletromagnética e fraca deveriam ter massa nula. No entanto, como a interação fraca é de curto alcance, os

bósons vetoriais, que a mediam, deveriam possuir uma massa diferente de zero adquirida por meio da interação com o campo de Higgs. Neste contexto, a comprovação experimental do bóson de Higgs se tornou importante por sua incorporação ao modelo padrão da física de partículas elementares. Neste modelo, o campo de Higgs que permeia todo o universo seria responsável por conferir massa a todas as partículas elementares, em especial, aos bósons vetoriais da interação fraca, sendo que o valor da massa de uma partícula é determinado pela intensidade da sua interação com o campo de Higgs [4].

O anúncio mais recente de resultados experimentais, que podem comprovar outro modelo teórico que leva em conta o campo escalar, foi feito em março deste ano pela equipe de pesquisadores do experimento BICEP2. No artigo que relata o experimento, é confirmada a detecção dos modos B de polarização da radiação cósmica de fundo em microondas (CMB) [3]. Esse tipo de radiação eletromagnética é proveniente do *big bang* e chega até nós trazendo consigo informações dos instantes iniciais do nosso universo.

Na cosmologia atual acredita-se que o universo, em um instante inicial logo após o *big bang*, tenha passado por um período, conhecido na literatura como período de inflação, no qual ele se expandiu exponencialmente. A cosmologia que se atém ao estudo deste período é conhecida como cosmologia inflacionária, e foi proposta inicialmente por Alan Harvey Guth para sanar algumas deficiências da velha cosmologia [5]. Nos modelos inflacionários propostos, em especial o de inflação caótica por Andrei Linde, o rápido crescimento do universo é associado a um campo escalar com massa, o *inflaton*. É o estado inicial deste campo que determina o quanto, e como, o universo primordial se expandiu. Em particular, se o *inflaton* foi inicialmente muito grande, o modelo de Linde prevê um crescimento exponencial do universo logo após o *big bang* [6].

O modelo inflacionário também sugere uma geração de ondas gravitacionais durante o crescimento exponencial do universo. A presença dessas ondas produziria um padrão único na polarização da radiação cósmica de fundo, sendo o modo B, uma das polarizações a exibir tal padrão. Portanto, além de validarem o modelo cosmológico inflacionário, os dados do BICEP2, representam a primeira imagem do que podemos chamar de uma assinatura das ondas gravitacionais na história do universo.

Levando em conta os resultados apresentados acima, é de se esperar que as especulações sobre teorias que levem em conta o campo escalar atraiam os olhares da comunidade

científica como um todo, buscando não apenas a comprovação dos modelos existentes, mas o avanço e melhoramento dos dados já obtidos, como também, novos modelos teóricos de campos escalares. Por exemplo, uma conexão entre o *higgs* e o *inflaton*, o que poderia levar a um campo de essencial importância, ou talvez fundamental, para o universo observável de hoje.

Neste trabalho, motivados pelo novo horizonte que se abre à física do campo escalar, estenderemos a este último alguns estudos já realizados para outros campos. Em especial, estudaremos a radiação de corpo negro, comumente tratada para o campo eletromagnético. Consideraremos um campo escalar com massa em dimensões arbitrárias, e a todo momento estaremos interessados em confrontar nossos resultados com os já existentes para o eletromagnetismo, mostrando assim, como os trabalhos de Planck para a radiação eletromagnética podem ser desenvolvidos em nosso contexto, e como o caráter escalar e a massa afetam os resultados obtidos. Neste intuito, generalizaremos em primeira correção de massa e em quatro dimensões, as quantidades termodinâmicas associadas ao sistema, assim como obteremos as leis de Wien, Rayleigh-Jeans e a própria lei da radiação de Planck.

Para esse objetivo, no Capítulo 2 deste trabalho, apresentaremos uma abordagem geral do campo escalar no contexto relativístico que inclui o comportamento frente às transformações de Lorentz, um princípio de mínima ação que leve à equação dinâmica satisfeita pelo campo (equação de Klein-Gordon), assim como o tensor energia-momento e as quantidades relacionadas a este tensor. Veremos que a partir da sua dinâmica somos levados, à primeira vista, a indicar o campo escalar como o mais evidente para a inserção da gravitação universal no contexto relativístico. No entanto, mostraremos que tal expectativa não é confirmada.

De posse do formalismo acerca do campo escalar, no Capítulo 3 nos ateremos à mecânica estatística da radiação escalar confinada em uma cavidade  $(N - 1)$ -dimensional de volume  $V$ , onde primeiramente quantizaremos o campo e em seguida aplicaremos o formalismo do *ensemble* canônico ao sistema. Tal formalismo nos permitirá calcular todas as quantidades termodinâmicas de uma forma geral, para massa e dimensões arbitrárias, inclusive a identificar o que chamaremos de bóson associado ao campo. Essas quantidades serão sempre discutidas em paralelo com suas análogas para o caso eletromagnético



desenvolvido por Planck, como também, com resultados da termodinâmica da radiação desenvolvida por Boltzmann anteriormente aos trabalhos planckianos. Calcularemos, ainda, a pressão nas paredes da cavidade por considerações puramente cinéticas.

No quarto capítulo apresentaremos a termodinâmica da radiação escalar, agora, em quatro dimensões e primeira correção de massa. Para isso, adequaremos a estas condições as quantidades termodinâmicas como energia interna, pressão, capacidade térmica, a própria equação de estado, entre outras, já calculadas no capítulo anterior. Partindo desse ponto, exploraremos o comportamento de tais quantidades, assim como, as transformações termodinâmicas, focando em especial nas modificações impostas pela massa. Apresentaremos, sempre que possível, um esboço gráfico do que está sendo analisado, como também o confronto com os resultados para o eletromagnetismo.

Com os estudos desenvolvidos anteriormente, no Capítulo 5, que é o foco deste trabalho, estaremos interessados no espectro de corpo negro da radiação escalar com massa. Esboçaremos a densidade de energia na cavidade, número total de bósons e a intensidade de energia irradiada, em função da frequência, da temperatura e da massa. Generalizaremos assim as leis da radiação de corpo negro de Planck, Wien, Rayleigh-Jean e Stefan-Boltzmann, inclusive a lei de deslocamento de Wien. Como em todo o trabalho, essas leis generalizadas serão discutidas em paralelo com as originais para a radiação eletromagnética. Em especial, estaremos preocupados em extrair novas interpretações do espectro de corpo negro devido à massa, o que fazemos comparando nossos resultados para a radiação de corpo negro do campo escalar com massa (bósons de spin zero e massa não nula) aos resultados conhecidos na literatura para a radiação de corpo negro do campo eletromagnético (bósons de spin um e massa nula).

Por fim, no último capítulo, apresentaremos as conclusões gerais de todo o estudo desenvolvido, juntamente à perspectiva de trabalhos futuros e possíveis aplicações práticas dos resultados aqui dispostos.

Concluindo esta introdução, gostaríamos de salientar que nossa contribuição ao estudo da mecânica estatística do campo escalar reside essencialmente em considerarmos massa arbitrária  $M$  e um espaço-tempo com número arbitrário de dimensões  $N$ . Nossos resultados serão oportunamente submetidos à publicação.

# Capítulo 2

## O campo escalar

O princípio da relatividade especial de Einstein afirma que as leis da natureza são as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais, e que a velocidade de propagação das interações é uma constante universal igual à velocidade da luz no espaço vazio:  $c$  [7]. Este princípio está em pleno desacordo com o princípio da relatividade de Galileu, que assume uma velocidade de propagação das interações infinita, e sobre o qual repousa toda a mecânica newtoniana. Em virtude desta contradição, a mecânica relativística traz um novo conteúdo de interpretações físicas antes omitidas na mecânica clássica. Em especial, na relatividade de Einstein o tempo não apresenta um caráter absoluto como para Newton e Galileu, e sim, tempo e espaço aparecem mesclados dentro de uma estrutura mais geral: o espaço-tempo. A simetria que governa esta estrutura é a simetria do grupo de Lorentz, ou de forma mais ampla, o grupo de Poincaré, e a conexão entre os sistemas de referência inerciais é dada pelas transformações de Lorentz.

Se as leis da natureza são regidas por outra simetria, que não a de Galileu, um campo escalar não transmite mais a ideia de uma grandeza física que a cada instante de tempo  $t$ , associa a todo ponto no espaço dado por<sup>1</sup>  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , uma quantidade  $\phi(\mathbf{x}, t)$  invariante sob transformações de Galileu. Mas agora, uma quantidade similar, porém invariante por transformações de Lorentz. Assim,  $\phi$  se comporta da seguinte maneira<sup>2</sup> [8, 9, 10],

$$\phi'(x'^{\mu}) = \phi(x^{\mu}), \quad (2.1)$$

---

<sup>1</sup>As quantidades em negrito representam vetores.

<sup>2</sup>Adotamos em todo este trabalho o espaço quadridimensional de Minkowski e sua notação de quadri-vetores.

onde  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$  é um ponto no referencial inercial  $K$  e  $x'^\mu = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = (ct', x', y', z')$  um ponto no referencial inercial  $K'$ , sendo  $x'^\mu$  dado pela transformação de Lorentz,<sup>3</sup>

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (2.2)$$

com  $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu$ , onde  $\eta^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$  é a métrica de Minkowski.

Na física clássica, os campos escalares mais conhecidos aparecem na teoria da gravitação universal newtoniana e na teoria eletrostática de Coulomb. Em ambos os contextos  $\phi(\mathbf{x})$  é um campo invariante de Galileo que representa, respectivamente, os potenciais gravitacional e elétrico, cujo o gradiente leva à expressão para a força nos dois casos. A equação satisfeita por  $\phi(\mathbf{x})$  na ausência de fontes, tanto na eletrostática como na gravitação, é a equação de Laplace [7, 11, 12]

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.3)$$

onde  $\nabla^2$  é o operador de Laplace dando o “divergente do gradiente”.

No contexto da relatividade especial, a equação satisfeita por um campo escalar será uma generalização da equação (2.3) para um campo que satisfaz (2.1). A forma mais simples dessa equação é dada por<sup>4</sup>

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x) = \square \phi(x) = 0, \quad (2.4)$$

em que

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right), \quad (2.5)$$

sendo  $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu$  e  $\square$  é o operador de d'Alembert definido como

$$\square = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \nabla^2. \quad (2.6)$$

Pela regra de transformação (2.2), vemos que o operador (2.6) é invariante por transformações de Lorentz, e que tomando  $\phi(x)$  no limite newtoniano de campo estático e baixas velocidades ( $c \rightarrow \infty$ ), a equação (2.4) recupera (2.3).

<sup>3</sup>Estamos considerando aqui a convenção da soma de Einstein.

<sup>4</sup>Daqui por diante omitiremos, por simplicidade, o índice em  $x^\mu$  nas expressões para  $\phi$ , explicitando-o quando necessário.

Como dito acima, a forma mais simples de generalizar a equação (2.3) para a relatividade especial é através de (2.4). Podemos adicionar qualquer outra quantidade escalar ao lado esquerdo desta equação, tal que, sob transformações de Lorentz, a covariância seja preservada. Podemos, por exemplo, tomar

$$(\square + \alpha^2)\phi(x) = 0, \quad (2.7)$$

onde  $\alpha$  é uma constante. A equação acima é conhecida na literatura como equação de Klein-Gordon. No entanto, a proposta original dos trabalhos de Klein, Gordon e outros físicos da época era formular uma versão relativística da equação de Schrödinger [10].

Na teoria quântica de campos (2.7) descreve partículas de spin nulo (bósons) e massa  $M$ , como por exemplo, o bóson de Higgs e os mésons escalares [8, 13]. A informação sobre a massa do bóson está presente na constante  $\alpha$ , que a identificamos como sendo  $\alpha = \frac{Mc}{\hbar}$ ,  $\hbar$  a constante de Planck dividida por  $2\pi$ .  $\phi(x)$  neste contexto é um campo escalar (real) geralmente nomeado segundo a partícula associada. Assim, nos exemplos anteriores,  $\phi(x)$  é o campo de Higgs e de mésons, respectivamente. Nos capítulos posteriores deste trabalho, estaremos interessados em descrever a radiação de corpo negro do campo escalar, tendo como ponto de partida a equação (2.7).

## 2.1 A ação e o tensor energia-momento do campo escalar

A equação (2.7) pode ser obtida a partir do princípio de mínima ação de Hamilton, por uma ação da forma<sup>5</sup>

$$S_{field} = \int \mathcal{L}(\phi, \phi_{,\mu}) d^4x = \frac{1}{2} \int (\eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \alpha^2 \phi^2) d^4x, \quad (2.8)$$

onde  $d^4x = c dt dx dy dz$  e  $\mathcal{L}(\phi, \phi_{,\mu})$  é a densidade lagrangiana que depende de  $\phi$  e sua derivada em relação a  $x^\mu$ . Variando (2.8) com respeito a  $\phi$  e seguindo passos semelhantes aos que nos levam às equações de Euler-Lagrange na mecânica clássica, obtemos a equação satisfeita por  $\phi$  [1, 8],

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (2.9)$$

---

<sup>5</sup>Para simplificar a notação adotamos  $\partial_\mu \phi = \phi_{,\mu}$ .

Também podemos definir uma densidade hamiltoniana, descrevendo a densidade de energia do campo, da forma

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,0}} \phi_{,0} - \mathcal{L} = \pi^0 \phi_{,0} - \mathcal{L}, \quad (2.10)$$

sendo

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \quad (2.11)$$

uma quantidade similar ao momento canônico na mecânica.

Da segunda igualdade de (2.8) temos que

$$\mathcal{L}(\phi, \phi_{,\mu}) = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \alpha^2 \phi^2). \quad (2.12)$$

Considerando este valor de  $\mathcal{L}$  em (2.9) e usando o resultado de

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} = \eta^{\mu\nu} \phi_{,\nu}, \quad (2.13)$$

somos levados a

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \alpha^2 \phi = 0, \quad (2.14)$$

que é exatamente (2.7).

Seguimos agora, com um processo similar ao de derivação da conservação da energia na mecânica clássica. Primeiramente, derivando  $\mathcal{L}$  com respeito a  $x^\mu$ , temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \phi_{,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} \frac{\partial \phi_{,\nu}}{\partial x^\mu}. \quad (2.15)$$

Reescrevendo o primeiro termo no lado direito desta igualdade com a ajuda de (2.9) e fazendo uso de  $\phi_{,\nu\mu} = \phi_{,\mu\nu}$ , somos levados a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} \right) \phi_{,\mu} + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} \right) \frac{\partial \phi_{,\mu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} \phi_{,\mu} \right). \quad (2.16)$$

Podemos escrever portanto,

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( -\delta^\nu_\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} \phi_{,\mu} \right) = 0. \quad (2.17)$$

Definimos o tensor energia-momento como [1, 7, 8]

$$T^\nu_\mu = -\delta^\nu_\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} \phi_{,\mu}, \quad (2.18)$$

que em virtude de (2.17), atende a

$$T^\nu_{\mu,\nu} = 0. \quad (2.19)$$

Esta última igualdade nos diz que a integral de  $T^{\mu\nu}$  na hipersuperfície que contém o volume  $V$  do espaço tridimensional é um quadrivetor conservado [7], o qual definimos como o quadrimomento do sistema

$$p^\mu = A \int_S T^{\mu\nu} dS_\nu = A \int_V T^{\mu 0} d^3x, \quad (2.20)$$

onde  $A$  é uma constante e  $T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\sigma} T^\nu_\sigma$ .

Em particular,  $T^{00}$  é identificado como sendo a densidade de energia (2.10), o que é facilmente visto a partir de (2.18). Assim,  $P^0$  é a energia total vezes a constante  $A$ , que é reconhecida como o inverso de  $c$  por comparação com o quadrimomento definido na relatividade especial [7].

Para nosso caso em estudo, observando a densidade lagrangiana dada por (2.12) e usando (2.13),  $T^\nu_\mu$  é dado por

$$T^\nu_\mu = \left( \eta^{\nu\sigma} \delta^\rho_\mu - \frac{\eta^{\sigma\rho}}{2} \delta^\nu_\mu \right) \phi_{,\sigma} \phi_{,\rho} + \frac{\alpha^2 \phi^2}{2} \delta^\nu_\mu, \quad (2.21)$$

ou de forma mais usual,

$$T^{\mu\nu} = \left( \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} - \frac{\eta^{\sigma\rho} \eta^{\mu\nu}}{2} \right) \phi_{,\sigma} \phi_{,\rho} + \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} \alpha^2 \phi^2. \quad (2.22)$$

Em especial, a densidade hamiltoniana do campo escalar será [1, 8]

$$\mathcal{H} := T^{00} = \frac{1}{2} [(\phi_{,0})^2 + (\nabla\phi)^2 + \alpha^2 \phi^2], \quad (2.23)$$

de onde vemos que  $\mathcal{H}$  é positiva definida.

## 2.2 Uma gravitação escalar

Se (2.4) é uma imediata generalização da equação de campo no caso newtoniano, podemos considerar  $\phi(x)$  como um forte candidato a descrever a gravitação dentro do arcabouço da relatividade especial [1, 13]. A referida equação de campo para  $\phi$  é obtida por meio do princípio de mínima ação para uma densidade lagrangiana (2.12) com  $\alpha = 0$ . Isso implica que, se a gravitação for bem descrita por um campo escalar, os bósons associados a este campo escalar terão massa nula e velocidade igual a da luz.

A dinâmica de uma partícula livre relativística é dada por uma ação da forma [1, 7, 13]

$$S = -mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} ds, \quad (2.24)$$

com  $m$  a massa da partícula e  $ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = c d\tau$ , sendo  $\tau$  o tempo próprio. Variando esta ação em relação a  $x^\mu$ , somos levados às equações de movimento

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = 0, \quad (2.25)$$

onde  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (c, \mathbf{v})$  é a quadrivelocidade da partícula.

Podemos ainda tomar a variação da ação  $S$  como uma função das coordenadas  $x^\mu$  para uma trajetória que satisfaz (2.25). Assim, pelo formalismo de Hamilton, chegamos a uma expressão para o quadrimomento do sistema [1, 7]

$$p^\mu := -\frac{\partial S}{\partial x_\mu} = mu^\mu. \quad (2.26)$$

Como pode ser mostrado  $u^\mu u_\mu = c^2$ , tal que

$$p^\mu p_\mu = \left(-\frac{\partial S}{\partial x_\mu}\right) \left(-\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\right) = m^2 c^2, \quad (2.27)$$

ou de forma mais usual,

$$\eta^{\mu\nu} S_{,\mu} S_{,\nu} = m^2 c^2. \quad (2.28)$$

Sendo esta última, a equação de Hamilton-Jacobi neste contexto.

Consideremos agora a ação que descreve o movimento de uma partícula relativística na presença de um campo escalar  $\phi(x^\mu)$ . Tal ação é da forma

$$S = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( mc + \frac{\lambda}{c} \phi \right) ds, \quad (2.29)$$

em que  $\lambda$  é uma constante que contém informação sobre a “carga” da partícula. Variando esta nova ação com respeito a  $x^\mu$ , temos as equações de movimento no caso de partícula no campo:

$$\frac{d}{d\tau} \left( m + \frac{\lambda\phi}{c^2} \right) u^\mu - \lambda \phi_{,\nu} \eta^{\mu\nu} = 0, \quad (2.30)$$

que no limite de campo estático e baixas velocidades dado por  $\phi_{,0} \ll \phi_{,j}$ , reduzem-se a

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\lambda \nabla \phi. \quad (2.31)$$

Vemos que neste limite a dinâmica torna-se semelhante à de Newton, levando, inclusive, a uma interação atrativa para o caso de  $\lambda > 0$ .

A completa ação para uma gravitação escalar, é então

$$S = -mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} ds - \frac{\lambda}{c} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \phi ds + \frac{1}{2} \int \eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} d^4x. \quad (2.32)$$

Onde o primeiro termo descreve apenas a partícula, o segundo descreve o acoplamento entre a partícula e o campo, e o terceiro somente o campo. O último termo é uma integral em toda uma região do espaço quadridimensional, enquanto os dois primeiros são integrais em um intervalo de tempo próprio.

A partir de uma função delta de Dirac em quatro dimensões, podemos escrever o segundo termo de (2.32) como uma integral em  $d^4x$ , o que pode ser feito levando-se em conta que a “densidade de partícula” para uma partícula pontual seguindo a trajetória  $z = z^\mu(\tau)$  é dada por:

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(4)}[x^\mu - z^\mu(\tau)] ds, \quad (2.33)$$

onde  $\delta^{(4)}[x^\mu - z^\mu(\tau)] = \delta[x^0 - z^0] \delta[\mathbf{x} - \mathbf{z}]$  é a função delta de Dirac em quatro dimensões. Variando a ação completa com respeito a  $\phi$  e lembrando que o primeiro termo é nulo para essa variação, somos levados à equação de campo na presença de fonte,

$$\square \phi = -\frac{\lambda}{c} \rho, \quad (2.34)$$

que no limite newtoniano de  $\phi_{,0} \ll \phi_{,j}$  torna-se

$$\nabla^2 \phi = \frac{\lambda}{c} \rho. \quad (2.35)$$

Como  $\phi$  descreve o campo gravitacional no contexto da relatividade especial, no limite de baixas velocidades e campo estático, que representa o limite newtoniano, (2.34) deve recuperar a equação de Poisson para a gravitação de Newton [11]

$$\nabla^2 \phi_N = 4\pi G \rho_m, \quad (2.36)$$

onde  $\rho_m$  é a densidade de massa,  $G$  a constante gravitacional e  $\phi_N$  o potencial newtoniano.

Uma vez que o campo  $\phi$  interage com a matéria onde “carga” é a massa, a constante  $\lambda$  deve ser proporcional à massa  $m$  da partícula. Então, vamos definir novas variáveis de estudo,  $\gamma m = \lambda$  e  $\Phi = \gamma \phi$ , tal que em termos destas, a ação (2.29) toma a forma

$$S = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( 1 + \frac{\Phi}{c^2} \right) d\tau. \quad (2.37)$$



A ação anterior apresenta algumas características que são de suma importância para a descrição da gravitação por um campo escalar:

- é um invariante de Lorentz;
- levará sempre a uma força atrativa [1];
- como a ação tem dimensão de energia vezes tempo,  $\Phi$  deve ter dimensão de velocidade quadrada, exatamente como o potencial gravitacional de Newton  $\phi_N$ ;
- a massa aparece como uma constante multiplicativa, levando a equações de movimento que não dependem explicitamente da mesma, respeitando, portanto, o princípio da equivalência.

Além do mais, multiplicando ambos os lados de (2.35) por  $\gamma$ , e definindo

$$\rho_m = m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \delta_4(x - z) d\tau = m \frac{\rho}{c}, \quad (2.38)$$

somos levados a

$$\nabla^2 \Phi = \gamma^2 \rho_m, \quad (2.39)$$

que comparada com (2.36) implica em  $\gamma = \sqrt{4\pi G}$ , garantindo que a equação de Poisson para o caso newtoniano é recuperada no devido limite.

Reescrevendo a equação (2.34) em termos das novas variáveis temos

$$\square \Phi = -\gamma^2 \rho_m, \quad (2.40)$$

onde substituindo o valor de  $\gamma$  chegamos a

$$\square \Phi = -4\pi G \rho_m. \quad (2.41)$$

Esta é a “Equação de Einstein” para a gravitação descrita por um campo escalar.

Até aqui, nossa descrição recupera os resultados newtonianos, tendo a densidade de massa  $\rho_m$  como única e exclusiva fonte do campo. No entanto, desde que na relatividade especial massa e energia se equivalem, necessitamos de uma generalização que leve qualquer sistema físico, com conteúdo de energia, a ser fonte do campo gravitacional.

Tal generalização, deve ser feita por meio de uma quantidade que contenha as informações sobre a energia do sistema e seja um escalar de Lorentz. Em nosso caso, isso é

possível a partir do traço do tensor energia-momento  $T^{\mu\nu}$ . É sabido que todo sistema físico tem um tensor energia-momento associado e que em particular, para um sistema de partículas pontuais à pressão nula, o traço de  $T^{\mu\nu}$  é dado por [1, 7, 14]

$$T = \rho_m c^2, \quad (2.42)$$

onde  $\rho_m$  é a densidade de massa, que já apareceu em todo nosso estudo anterior. Assim, podemos reescrever nossos cálculos fazendo  $T$  como a fonte do campo gravitacional no contexto relativístico.

A ação completa para o campo (2.32) em termos de  $T$  fica na forma

$$S = -mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} ds - \int \left( \frac{\Phi T}{c^2} - \frac{1}{8\pi G} \eta^{\mu\nu} \Phi_{,\nu} \Phi_{,\mu} \right) d^4x, \quad (2.43)$$

na qual dividindo os dois últimos termos por  $c$  para cancelar com o  $c$  em  $d^4x = c dt dx dy dz$  recuperamos o resultado apresentado em [1], sendo que aqui adotamos  $\eta^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ . Temos também a partir de (2.41) a equação de campo

$$\square \Phi = -\frac{4\pi G}{c^2} T. \quad (2.44)$$

Depois de generalizada a fonte, é possível apontar dois problemas existentes em nossa tentativa de descrever a gravitação com um campo escalar. Em primeiro lugar, já que o campo eletromagnético possui um tensor energia-momento com traço nulo, nossa teoria não prevê um acoplamento deste campo com o gravitacional. Este fato viola a comprovada curvatura dos raios de luz (radiação eletromagnética) ao se propagarem em uma região de campo gravitacional [1, 13, 14]. Em segundo, uma falha de âmbito conceitual em nossa descrição, é que o traço do tensor energia-momento em (2.42) não leva em conta o próprio campo gravitacional, que possui um  $T^{\mu\nu}$  com traço não nulo, a contribuir para a fonte. Embora isso possa ser sanado introduzindo a contribuição do próprio campo como fonte nas equações, o traço do tensor energia-momento total ficaria dividido em duas partes, uma devido ao campo gravitacional e outra que levaria em conta todos os campos excetuando a gravitação, o que não é conceitualmente oportuno, pois essas partes seriam tratadas diferentemente [1].

Apesar dos problemas apresentados, a teoria até aqui desenvolvida nos dá um ensaio de como a inclusão da gravitação no contexto relativístico pode estar intimamente ligada

à geometria do espaço-tempo. A ação (2.37) pode ser vista como uma generalização da ação para a partícula livre, onde substituímos o intervalo de linha  $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  por  $ds_\Phi^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ , sendo

$$g_{\mu\nu} = \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)^2 \eta_{\mu\nu}. \quad (2.45)$$

Neste modelo, o campo  $\Phi$  é visto como o responsável por uma modificação na geometria do espaço-tempo, levando  $\eta_{\mu\nu}$  ao novo tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . A ação para uma partícula na presença do campo  $\Phi$  torna-se:

$$S = -mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} ds_\Phi = -mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}, \quad (2.46)$$

com a equação de Hamilton-Jacobi (2.28) dada agora por [1, 7]

$$g^{\mu\nu} S_{,\mu} S_{,\nu} = m^2 c^2, \quad (2.47)$$

onde  $g^{\mu\nu}$  é a inversa de (2.45),

$$g^{\mu\nu} = \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)^{-2} \eta^{\mu\nu}. \quad (2.48)$$

É interessante notarmos que a substituição de  $\eta^{\mu\nu}$  por  $g^{\mu\nu}$  só é possível porque a massa aparece como um fator multiplicativo na ação. Este fato resultou de impormos que o princípio de equivalência newtoniano seja ainda válido.

Estudando a nova equação de Hamilton-Jacobi (2.47) no limite newtoniano de campo estático e baixas velocidades, podemos submeter nossa teoria a outro teste de verificação (vide exercício 3.1 na Ref. [1]). Para isso consideremos  $\rho_m$  devido a uma partícula de massa  $M$  fixa na origem do sistema de coordenadas. Assim, no limite considerado, temos a equação de Poisson para o campo,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi GM \delta(\mathbf{r}), \quad (2.49)$$

com  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . A solução desta equação nos leva a

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}, \quad (2.50)$$

em que  $r = \|\mathbf{r}\|$ .

Escrevendo (2.47) explicitamente, teremos

$$\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)^{-2} \left[ \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - (\nabla S)^2 \right] - m^2 c^2 = 0. \quad (2.51)$$

Passando para coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ , podemos restringir o movimento ao plano  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , tal que a última equação torna-se:

$$\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)^{-2} \left[ \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 \right] - m^2 c^2 = 0. \quad (2.52)$$

Como o sistema conserva energia e momento angular, supomos uma solução para (2.52) da forma

$$S = S_t + S_\varphi + S_r = -Et + L\varphi + S_r, \quad (2.53)$$

com  $E$  e  $L$ , energia e momento angular, respectivamente, e  $S_r$  a parte da solução que depende da trajetória. Substituindo esta solução em (2.52) ficamos com

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 = \frac{E^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2} - m^2 c^2 \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} + \frac{\Phi^2}{c^4}\right). \quad (2.54)$$

Que reescrita na forma integral, com  $\Phi$  dado por (2.50), nos leva a

$$S_r = \int dr \left[ \frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 + \frac{2GMm^2}{r} - \frac{1}{r^2} \left( L^2 + \frac{G^2 M^2 m^2}{c^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.55)$$

Interessados em estudar a trajetória  $r$  como função do ângulo  $\varphi$ , tomamos

$$\frac{\partial S}{\partial L} = \varphi_0 = \text{constante}. \quad (2.56)$$

Mas pela solução proposta (2.53), juntamente com a condição anterior, temos

$$\frac{\partial S}{\partial L} = \varphi + \frac{\partial S_r}{\partial L} = \varphi_0. \quad (2.57)$$

Calculando a derivada de  $S_r$  com respeito a  $L$  somos levados pela última igualdade a

$$\varphi - \varphi_0 = \int dr \left[ \frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 + \frac{2GMm^2}{r} - \frac{1}{r^2} \left( L^2 + \frac{G^2 M^2 m^2}{c^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{L}{r^2}, \quad (2.58)$$

derivando este resultado com respeito a  $r$  temos

$$\frac{d\varphi}{dr} = \left[ \frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 + \frac{2GMm^2}{r} - \frac{1}{r^2} \left( L^2 + \frac{G^2 M^2 m^2}{c^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{L}{r^2}, \quad (2.59)$$

de onde somos levados à equação que determina a trajetória  $r = r(\varphi)$ , dada por

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^4}{L^2} \left[ \frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 + \frac{2GMm^2}{r} - \frac{1}{r^2} \left( L^2 + \frac{G^2 M^2 m^2}{c^2} \right) \right]. \quad (2.60)$$

Para estudar esta última equação, definimos uma nova variável  $u = \frac{1}{r}$ , tal que

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \implies \frac{dr}{d\varphi} = -r^2 \frac{du}{d\varphi}. \quad (2.61)$$

Escrevendo (2.60) em termos da nova variável, com a ajuda da última igualdade, e derivando o resultado em relação a  $\varphi$ , ficamos com

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right) \frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{1}{L^2} \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \left[GMm^2 - u \left(L^2 + \frac{G^2M^2m^2}{c^2}\right)\right]. \quad (2.62)$$

Que para  $u' \neq 0$ , nos dá

$$u'' + u \left(1 + \frac{G^2M^2m^2}{L^2c^2}\right) = \frac{GMm^2}{L^2}, \quad (2.63)$$

onde a linha representa derivada com respeito a  $\varphi$ .

A equação diferencial (2.63) traz uma correção em relação a sua análoga no caso puramente newtoniano, que seria [15]

$$u'' + u = \frac{GMm^2}{L^2}, \quad (2.64)$$

cuja a solução é uma elipse de excentricidade  $e$ , dada em coordenadas polares por [13, 14, 15]

$$u = \frac{GMm^2}{L^2} (1 + e \cos(\varphi)). \quad (2.65)$$

Em nosso caso, podemos escrever (2.63) como

$$u'' + \omega^2 u = \frac{GMm^2}{L^2}, \quad \text{onde} \quad \omega^2 := \left(1 + \frac{G^2M^2m^2}{L^2c^2}\right), \quad (2.66)$$

e a solução desta equação é

$$u = \frac{GMm^2}{L^2} (1 + e' \cos(\omega\varphi)), \quad (2.67)$$

que também é uma elipse, mas com excentricidade  $e'$ , a qual no limite de  $c \rightarrow \infty$  recupera (2.65).

O que muda em nosso contexto é o fato de  $\omega \neq 1$ . Isso significa que  $\varphi = 0$  e  $\varphi = 2\pi$  não correspondem ao mesmo ponto; a elipse não tem fim no mesmo ponto onde se iniciou. Em particular, como  $\omega > 1$ , o ponto equivalente a  $\varphi = 0$  é atingido antes mesmo de se ter  $\varphi = 2\pi$ . Dizemos, então, que a trajetória sofre um retrocesso. O qual pode ser calculado impondo

$$(2\pi + \Delta\varphi)\omega = 2\pi, \quad (2.68)$$

que leva a

$$\Delta\varphi = 2\pi(\omega^{-1} - 1). \quad (2.69)$$

Expandindo  $\omega^{-1}$  em termos de  $\frac{G^2 M^2 m^2}{L^2 c^2} \ll 1$ , chegamos ao resultado

$$\Delta\varphi \simeq -\frac{G^2 M^2 m^2}{L^2 c^2} \pi. \quad (2.70)$$

Uma vez que  $\varphi = 0$ , nos padrões das soluções newtonianas, é o ponto da órbita com maior proximidade entre as massas [15], nossa teoria prevê um retrocesso do periélio. Tal previsão, revela outra incoerência entre a gravitação descrita por um campo escalar e os dados experimentais. O que realmente ocorre é um avanço do periélio, que a relatividade geral de Einstein calcula em grande precisão como sendo [1, 13]

$$\Delta\varphi = 6\pi \frac{G^2 M^2 m^2}{L^2 c^2}. \quad (2.71)$$

Note a Fig. (2.1).

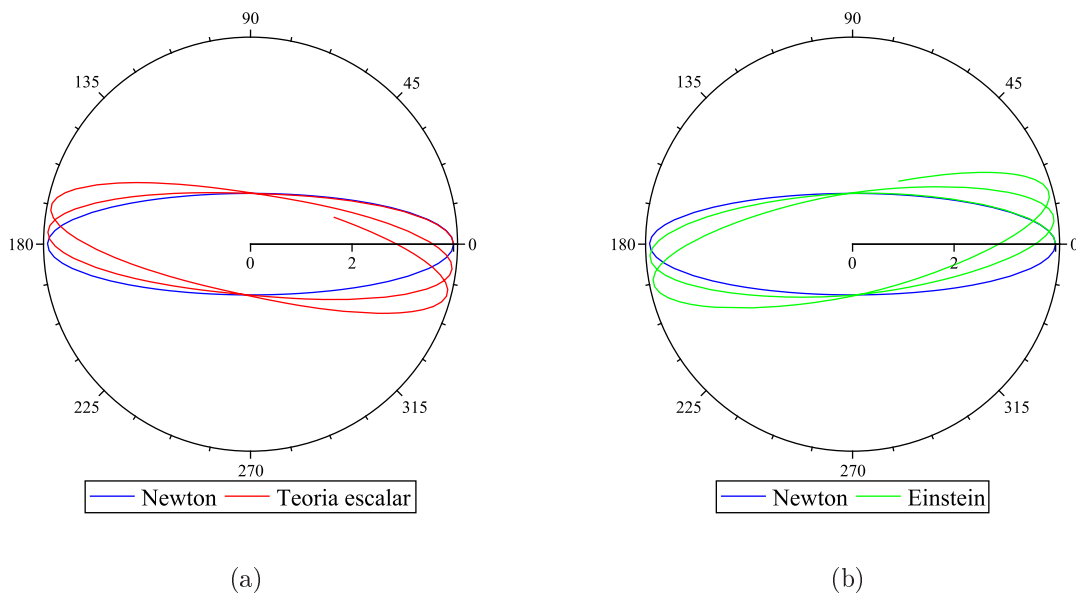


Figura 2.1: Em (a) comparamos as previsões das órbitas planetárias feitas por Newton e pela gravitação escalar desenvolvida neste capítulo, mostrando o retrocesso do periélio ( $\varphi = 0$ ) previsto por esta última. Já em (b), mostramos o real comportamento do periélio em relação ao resultado de Newton, sendo um avanço, como previsto corretamente pela relatividade geral. Confeccionamos as figuras (a) e (b) a partir de (2.67) e do resultado einsteniano na literatura [1, 13], respectivamente.

## Capítulo 3

# Mecânica estatística da radiação escalar

Neste capítulo aplicamos o formalismo do *ensemble* canônico da mecânica estatística quântica ao campo escalar com massa, confinado a uma cavidade e em  $N$  dimensões espaço-temporais. Para este fim, procedemos com uma quantização do campo nessas condições de forma similar ao que é feito no complemento  $K_{\nabla}$  de [16], a qual nos permitirá a adoção do referido formalismo.

Consideremos  $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$ , onde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ , satisfazendo (2.7) para um espaço-tempo  $N$ -dimensional, em que agora explicitamos o valor da constante  $\alpha$ :

$$\left( \square + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (3.1)$$

onde

$$\square = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_{N-1}^2} \quad (3.2)$$

é o operador de d'Alambert em  $N$  dimensões. Seja  $\phi$  confinado a uma cavidade cúbica, tal que  $\phi$  seja nulo em todas as paredes da cavidade  $(N - 1)$ -dimensional, de volume  $V$  e vértice na origem do sistema de coordenadas. Enfatizamos aqui, que não se faz necessário especificar as dimensões da cavidade, pois não estamos interessados em estudar o comportamento do campo como função destas dimensões.

As considerações anteriores nos levam às seguintes condições de contorno espaciais (de Dirichlet)

$$\begin{aligned} \phi(x_1 = 0, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}, t) &= \phi(x_1 = V^{\frac{1}{N-1}}, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}, t) = \phi(x_1, x_2 = 0, x_3, \dots, x_{N-1}, t) = \\ \phi(x_1, x_2 = V^{\frac{1}{N-1}}, x_3, \dots, x_{N-1}, t) &= \dots = \phi(x_1, x_2, \dots, x_{N-1} = V^{\frac{1}{N-1}}, t) = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sob tais condições, aplicando o método da separação de variáveis em (3.1) chegamos à solução para  $\phi$  independente de  $t$ , dada pelo produto das soluções para cada uma das  $N - 1$  dimensões espaciais, na forma

$$f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{N-1} \sqrt{\frac{2}{V^{\frac{1}{N-1}}}} \sin\left(\frac{k_i \pi x_i}{V^{\frac{1}{N-1}}}\right) = \left(\frac{2}{V^{\frac{1}{N-1}}}\right)^{\frac{N-1}{2}} \prod_{i=1}^{N-1} \sin\left(\frac{k_i \pi x_i}{V^{\frac{1}{N-1}}}\right), \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_{N-1})$ , sendo  $k_1, k_2, \dots, k_{N-1} = 1, 2, 3, \dots$ . Esta solução satisfaz às mesmas condições de contorno (3.3) para  $\phi$ . Temos também a relação de ortonormalização das  $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$

$$\int_0^{V^{\frac{1}{N-1}}} dx_1 \int_0^{V^{\frac{1}{N-1}}} dx_2 \cdots \int_0^{V^{\frac{1}{N-1}}} dx_{N-1} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (3.5)$$

com  $\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \delta_{k_1 k'_1} \delta_{k_2 k'_2} \cdots \delta_{k_{N-1} k'_{N-1}}$  a delta de Kronecker em  $N - 1$  dimensões, e a equação satisfeita por elas

$$\left(\nabla^2 + \frac{k^2 \pi^2}{V^{\frac{2}{N-1}}}\right) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.6)$$

sendo  $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ .

Em termos das  $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ , propomos uma solução para  $\phi$  na forma de uma expansão, dada por

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_{N-1}=1}^{\infty} q_{\mathbf{k}}(t) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}}(t) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \quad (3.7)$$

onde o somatório sobre o vetor representa a soma sobre todas as componentes de  $\mathbf{k}$ , que correm de 1 a  $\infty$ . A ortonormalidade das soluções espaciais expressa em (3.5), supondo ainda que  $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$  é um conjunto completo, garante que a expansão nos  $q_{\mathbf{k}}(t)$  é única e que estes podem ser determinados a partir de  $\phi$  como

$$q_{\mathbf{k}}(t) = \int_0^{V^{\frac{1}{N-1}}} dx_1 \int_0^{V^{\frac{1}{N-1}}} dx_2 \cdots \int_0^{V^{\frac{1}{N-1}}} dx_{N-1} \phi(\mathbf{x}, t) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}). \quad (3.8)$$

Substituindo a solução (3.7) na equação (3.1) satisfeita por  $\phi$ , vem<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} & \left(\square + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2}\right) \sum_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}}(t) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \\ & \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{c^2} \ddot{q}_{\mathbf{k}}(t) - q_{\mathbf{k}}(t) \nabla^2 f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} q_{\mathbf{k}}(t) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\right) = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

<sup>1</sup>O ponto sobre a letra indica derivada no tempo.



O segundo termo do lado direito da primeira igualdade pode ser reescrito a partir de (3.6) e ficamos com<sup>2</sup>

$$\sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{c^2} \ddot{q}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2 \pi^2}{V^{\frac{1}{N-1}}} q_{\mathbf{k}} + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} q_{\mathbf{k}} \right) f_{\mathbf{k}} = 0. \quad (3.10)$$

Pela ortogonalidade das  $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ , vemos que (3.10) só é satisfeita se a expressão entre colchetes for nula para todo  $\mathbf{k}$ . Somos assim levados à equação satisfeita pelos  $q_{\mathbf{k}}(t)$ , dada por

$$\ddot{q}_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}} = 0, \quad (3.11)$$

onde

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = \left( \frac{k^2 \pi^2}{V^{\frac{1}{N-1}}} + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \right) c^2 \quad (3.12)$$

tem dimensão de frequência ao quadrado.

O que (3.11) nos diz é que os  $q_{\mathbf{k}}(t)$  são coordenadas desacopladas satisfazendo à equação de um oscilador harmônico com frequência  $\omega_{\mathbf{k}}$ , tendo por solução

$$q_{\mathbf{k}}(t) = A_{\mathbf{k}} \cos(\omega_{\mathbf{k}} t - \varphi_{\mathbf{k}}), \quad (3.13)$$

sendo  $A_{\mathbf{k}}$  uma amplitude e  $\varphi_{\mathbf{k}}$  uma fase inicial. Comumente essas coordenadas são referidas como coordenadas normais. Esta nomenclatura é advinda do fato que cada termo na expansão (3.7) representa um modo normal de vibração do campo, ou mais especificamente, uma onda estacionária para cada particular conjunto de valores das componentes do vetor  $\mathbf{k}$ , isto é, para cada oscilador harmônico.

Podemos agora nos perguntar como fica a energia na cavidade expressa por essas coordenadas. Para responder a isso devemos recorrer a (2.23) generalizada para um espaço-tempo de  $N$  dimensões. Substituindo  $\phi$  dado por (3.7) na densidade hamiltoniana  $\mathcal{H}$  e integrando em todo o espaço, somos levados com a ajuda de (3.5) a

$$H = \int_0^{V^{\frac{1}{N-1}}} dx_1 \int_0^{V^{\frac{1}{N-1}}} dx_2 \cdots \int_0^{V^{\frac{1}{N-1}}} dx_{N-1} \mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{c^2} (\dot{q}_{\mathbf{k}}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}}^2), \quad (3.14)$$

onde  $H$  é a energia total do sistema.

Escrevendo a densidade lagrangiana (2.12) para um espaço-temporal  $N$ -dimensional em termos de (3.7), similarmente a  $H$ , podemos obter a lagrangiana  $L$ :

$$L = \int_0^{V^{\frac{1}{N-1}}} dx_1 \int_0^{V^{\frac{1}{N-1}}} dx_2 \cdots \int_0^{V^{\frac{1}{N-1}}} dx_{N-1} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{c^2} (\dot{q}_{\mathbf{k}}^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}}^2). \quad (3.15)$$

---

<sup>2</sup>Doravante omitiremos  $\mathbf{x}$  e  $t$ , quando se fizer oportuno, ao expressarmos  $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$  e  $q_{\mathbf{k}}(t)$  nas equações.

A partir desta lagrangiana obtemos o momento conjugado [8]

$$p_{\mathbf{k}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{c^2} \dot{q}_{\mathbf{k}}, \quad (3.16)$$

em termos do qual  $H$  é escrita na forma

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \left[ c^2 p_{\mathbf{k}}^2 + \frac{1}{c^2} \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}}^2 \right] := \sum_{\mathbf{k}} h_{\mathbf{k}}. \quad (3.17)$$

A hamiltoniana  $h_{\mathbf{k}}$  definida acima, se levada nas equações de Hamilton [8]

$$\dot{p}_{\mathbf{k}} = -\frac{\partial h_{\mathbf{k}}}{\partial q_{\mathbf{k}}} \quad \text{e} \quad \dot{q}_{\mathbf{k}} = \frac{\partial h_{\mathbf{k}}}{\partial p_{\mathbf{k}}}, \quad (3.18)$$

recupera exatamente (3.11), como esperado.

De (3.17) e da recuperação de (3.11), somos levados à conclusão de que a cada particular  $\mathbf{k}$  está associada uma hamiltoniana  $h_{\mathbf{k}}$  e, conseqüentemente, um oscilador harmônico de frequência  $\omega_{\mathbf{k}}$ . E o mais importante, a hamiltoniana total do campo é dada pela soma de todas as  $h_{\mathbf{k}}$ . Ou seja, para todo  $\mathbf{k}$ , dado pela especificação do conjunto  $\{k_1, k_2, \dots, k_{N-1}\}$ , fazemos corresponder um oscilador harmônico de frequência  $\omega_{\mathbf{k}}$  e energia  $h_{\mathbf{k}}$ , sendo que a energia do campo fica determinada pela soma das energias dos infinitos osciladores presentes na cavidade. Logo, quantizado cada um desses osciladores, o campo  $\phi$  é conseqüentemente quantizado.

O processo de quantização do oscilador harmônico é muito conhecido na literatura (veja, por exemplo, [16, 17]). Partindo da hamiltoniana  $h_{\mathbf{k}}$  para o  $\mathbf{k}$ -ésimo oscilador, somos levados por sua quantização ao espectro de energia do referido oscilador, dado por

$$E_{n_{\mathbf{k}}} = \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{2} + n_{\mathbf{k}} \right), \quad (3.19)$$

onde  $n_{\mathbf{k}} = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Assim, de (3.17), vemos que a energia total do sistema fica na forma

$$E = \sum_{\mathbf{k}} E_{n_{\mathbf{k}}} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{2} + n_{\mathbf{k}} \right). \quad (3.20)$$

É conveniente fazermos uma renormalização em (3.20) tomando a origem da escala de energia como sendo o valor da “energia do vácuo”,

$$E_{\text{vácuo}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\mathbf{k}}. \quad (3.21)$$

A energia total torna-se então,

$$E = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}}. \quad (3.22)$$

Interpretamos os  $n_{\mathbf{k}}$  como o número de bósons com frequência  $\omega_{\mathbf{k}}$  e energia  $\hbar \omega_{\mathbf{k}}$ , correspondendo ao estado de energia do  $\mathbf{k}$ -ésimo oscilador. De forma que (3.22) é a energia de um único estado do sistema, que é dado pelo produto tensorial dos estados de energia de cada um dos  $\mathbf{k}$  osciladores. Sendo assim, a cada estado do sistema está associado um conjunto  $\{n_{\mathbf{k}}\}$ , cuja a energia é

$$E = E\{n_{\mathbf{k}}\} = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}}, \quad (3.23)$$

lembrando que  $\omega_{\mathbf{k}}$  depende da massa  $M$  do bóson como estabelece (3.12). A interpretação de  $n_{\mathbf{k}}$  como número de bósons ficará mais evidente adiante.

Quantizado o sistema, estamos agora em condições de analisá-lo segundo o formalismo de um *ensemble* canônico quântico. Lembremo-nos que na mecânica estatística quântica um sistema físico, descrito por este *ensemble*, é caracterizado por uma função partição  $Q(T, V)$  dada pelo traço do operador densidade,  $\rho = \exp(-\beta H)$  [18, 19, 20], onde  $H$  é o operador hamiltoniano,  $T$  a temperatura,  $V$  o volume,  $\beta = (k_B T)^{-1}$  e  $k_B$  a constante de Boltzmann.

Aplicamos este formalismo ao campo escalar anteriormente quantizado, com a energia total de cada conjunto  $\{n_{\mathbf{k}}\}$  dada por (3.23). Desde que um único estado do sistema é inteiramente especificado contabilizando o número  $n_{\mathbf{k}}$  associado a cada  $\mathbf{k}$ -ésimo oscilador, ou se quisermos, o número de bósons em cada frequência; a soma sobre todos os estados do sistema (isto é, o traço) é, na verdade, dada por uma soma sobre todos os possíveis conjuntos  $\{n_{\mathbf{k}}\}$ . Como não existe restrição sobre os valores de  $n_{\mathbf{k}}$  (cada  $n_{\mathbf{k}}$  corre de 0 a  $\infty$ ), a função partição será então, dada por

$$Q(T, V) = \sum_{\{n_{\mathbf{k}}\}} \exp[-\beta E\{n_{\mathbf{k}}\}] = \sum_{\{n_{\mathbf{k}}\}} e^{-\beta \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}}}. \quad (3.24)$$

Abrindo a soma na exponencial, esta poderá ser escrita como um produto de exponenciais, e lembrando que a soma sobre  $\{n_{\mathbf{k}}\}$  é uma soma sobre  $\{n_1, n_2, \dots, n_{\mathbf{k}}\}$ , podemos mostrar que

$$\sum_{\{n_{\mathbf{k}}\}} \prod_{\mathbf{k}} e^{-\beta n_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}}} = \prod_{\mathbf{k}} \sum_{n_{\mathbf{k}}=0}^{\infty} e^{-\beta n_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}}}. \quad (3.25)$$

Como o somatório pode ser avaliado com a ajuda de uma série geométrica, chegamos ao resultado para a função partição

$$Q(T, V) = \prod_{\mathbf{k}} \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}}}}. \quad (3.26)$$

As quantidades termodinâmicas podem ser derivadas a partir do  $\log Q(T, V)$ , que de (3.26) nos dá

$$\log Q(T, V) = \log \prod_{\mathbf{k}} \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}}}} = - \sum_{\mathbf{k}} \log (1 - e^{-\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}}}). \quad (3.27)$$

### 3.1 Quantidades termodinâmicas

Partindo de (3.27) podemos derivar todas as quantidades termodinâmicas relacionadas ao nosso sistema, nos moldes do *ensemble* canônico [18, 19, 20]. Iniciemos, pois, com a energia total do sistema dada por

$$U = - \frac{\partial}{\partial \beta} \log Q(T, V), \quad (3.28)$$

que de (3.27) nos leva a

$$U = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{e^{\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}}} - 1} := \sum_{\mathbf{k}} \bar{n}_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}}. \quad (3.29)$$

Esta expressão é similar à expressão para a energia total de um gás ideal de Bose-Einstein com fugacidade igual a 1, ou potencial químico nulo [18, 19, 20], onde

$$\bar{n}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}}} - 1}, \quad (3.30)$$

analogamente ao sistema Bose-Einstein, é interpretado como o número médio de bósons com energia  $\hbar \omega_{\mathbf{k}}$ . De fato, não há diferença entre falarmos de um campo confinado a uma cavidade de volume  $V$  à temperatura  $T$  ou de um gás de bósons com potencial químico nulo, nas mesmas condições.

É conveniente agora, definirmos o momento  $\mathbf{p}$  associado a cada  $\mathbf{k}$  como

$$\mathbf{p} = \frac{\hbar \pi \mathbf{k}}{V^{\frac{1}{N-1}}}, \quad \text{tal que} \quad p^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \frac{\hbar^2 \pi^2 k^2}{V^{\frac{2}{N-1}}}. \quad (3.31)$$

Substituindo  $p^2$  em (3.12), chegamos a uma expressão para a energia do bóson de momento  $\mathbf{p}$  associado ao oscilador harmônico de frequência  $\omega_{\mathbf{k}}$ , como sendo

$$\hbar \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4}. \quad (3.32)$$

Identificamos (3.32) como a expressão da energia relativística para uma partícula de momento  $\mathbf{p}$  e massa  $M$  (vide Ref. [7]). Este fato justifica assumirmos  $\alpha = \frac{M^2 c^2}{\hbar^2}$  na equação (3.1), e fortalece nossa interpretação da radiação escalar como sendo um gás de bósons com massa  $M$  e potencial químico nulo.

Para calcularmos a energia total do sistema, em (3.29) tomamos o limite de  $V \rightarrow \infty$ , o que é feito no sentido de considerarmos  $V$  grande o suficiente para que a seguinte substituição seja válida: <sup>3</sup>

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int_0^\infty dk^{N-1}. \quad (3.33)$$

Escrevendo (3.29) em termos do momento com a ajuda de (3.31) e (3.32), chegamos a

$$U = \frac{V}{(\hbar\pi)^{N-1}} \int_0^\infty dp^{N-1} \frac{\sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4}}{e^{\beta\sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4}} - 1}, \quad (3.34)$$

onde  $dp^{N-1} = dp_1 dp_2 \dots dp_{N-1}$ . Esta integral pode ser avaliada com a ajuda das funções modificadas de Bessel  $K_\nu(z)$ , como feito no apêndice (A). E chegamos assim à expressão da energia total do sistema para  $N$  dimensões e massa  $M$ , arbitrária:

$$U = \frac{V(N-1)M^N c^{N+1}}{\hbar^{N-1} \pi^{\frac{N}{2}} 2^{\frac{N}{2}-1} \Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{(\beta n M c^2)^{\frac{N}{2}}} K_{\frac{N}{2}}(\beta n M c^2) + \frac{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}{2(\beta n M c^2)^{\frac{N}{2}-1}} K_{\frac{N}{2}-1}(\beta n M c^2) \right], \quad (3.35)$$

onde  $\Gamma(z)$  é a função gamma de Euler [21].

Na equação acima, se tomarmos  $N = 4$  e fizermos  $c = \hbar = k_B = 1$ , chegamos a uma expressão para a densidade de energia em quatro dimensões, como sendo

$$\frac{U}{V} = \frac{M^3 T}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ K_1(\beta n M) + \frac{3}{(\beta n M)} K_2(\beta n M) \right]. \quad (3.36)$$

Salientamos que este resultado não concorda com a última expressão em (A1.39), dada no apêndice (A1.4) em [22]. Lá, tomado o caso de spin e potencial químico nulos, a segunda função modificada de Bessel em  $\frac{U}{V}$  tem índice 3, e não 2 como em nosso caso. Essa contradição, apesar de simples, impede que no limite de massa nula os correspondentes resultados para a radiação eletromagnética sejam recuperados a partir de [22], como veremos mais adiante.

<sup>3</sup>Vale notar que  $dk^{N-1} = dk_1 dk_2 \dots dk_{N-1}$ .

A partir da interpretação de (3.30), definimos o número total de bósons na cavidade como sendo

$$\mathcal{N} = \sum_{\mathbf{k}} \bar{n}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}}} - 1}. \quad (3.37)$$

Passando para uma integração nos momentos no limite de  $V \rightarrow \infty$  obtemos, por cálculos similares aos que nos levaram a energia  $U$ ,

$$\mathcal{N} = \frac{VM^{\frac{N}{2}}c}{\hbar^{N-1}\pi^{\frac{N}{2}}2^{\frac{N}{2}-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta n)^{\frac{N}{2}-1}} K_{\frac{N}{2}}(\beta n M c^2). \quad (3.38)$$

Que agora sim, para  $N = 4$ , recupera a densidade  $\frac{\mathcal{N}}{V}$  dada em [22], no apêndice já referido anteriormente e para o nosso caso em estudo.

A pressão  $P$  nas paredes da cavidade à temperatura constante é dada por

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \log Q(T, V), \quad (3.39)$$

lembrando que a dependência em  $V$  está contida em  $\omega_{\mathbf{k}}$ , como pode ser visto em (3.12). Efetuando a derivada, ficamos com

$$PV = \frac{1}{(N-1)} \left[ \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{e^{\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}}} - 1} - M^2 c^4 \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\hbar \omega_{\mathbf{k}}} \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}}} - 1} \right]. \quad (3.40)$$

O primeiro termo entre colchetes nesta igualdade é a energia  $U$  dada em (3.29), enquanto o segundo pode ser reescrito a partir de (B.8), nos levando à equação de estado do sistema em termos do valor médio quadrático do campo escalar  $\langle \phi^2 \rangle$ ,

$$PV = \frac{1}{(N-1)} \left[ U - \frac{VM^2c^2}{\hbar^2} \langle \phi^2 \rangle \right], \quad (3.41)$$

onde  $\langle \phi^2 \rangle$  dá o quanto  $\phi$  flutua em torno do seu valor médio  $\langle \phi \rangle = 0$ .

A partir de (B.7) vemos que o segundo termo de  $U$  em (3.35) é igual ao último na equação acima com sinal trocado. Logo, a pressão é dada por apenas uma função modificada de Bessel advinda do primeiro termo na energia total:

$$P = \frac{M^{\frac{N}{2}}c}{\hbar^{N-1}\pi^{\frac{N}{2}}2^{\frac{N}{2}-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta n)^{\frac{N}{2}}} K_{\frac{N}{2}}(\beta n M c^2), \quad (3.42)$$

que é uma generalização de (A1.38) do apêndice (A1.4) em [22], para  $N$  dimensões, com potencial químico e spin nulos.

Podemos também obter a energia livre de Helmholtz para o nosso sistema, definida por

$$A(T, V) = -k_B T \log Q(T, V). \quad (3.43)$$

Esta quantidade pode ser calculada a partir de (3.27), nos moldes do apêndice (A), resultando em

$$A(T, V) = -\frac{VM^{\frac{N}{2}}c}{\hbar^{N-1}\pi^{\frac{N}{2}}2^{\frac{N}{2}-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta n)^{\frac{N}{2}}} K_{\frac{N}{2}}(\beta n M c^2), \quad (3.44)$$

que por (3.42), nos leva a

$$A(T, V) = -PV. \quad (3.45)$$

Outra quantidade importante para nós é a entropia  $S(T, V)$ , dada a partir da energia livre de Helmholtz  $A(T, V)$ , na forma

$$S(T, V) = -\left(\frac{\partial A(T, V)}{\partial T}\right)_V, \quad (3.46)$$

onde o subíndice  $V$  indica que a derivada é tomada a volume constante. Como é bem sabido, partindo de (3.43) chegamos, antes mesmo de qualquer integração, a

$$S(T, V) = \frac{1}{T}(U - A), \quad (3.47)$$

que por (3.45), nos dá

$$S = \frac{1}{T}(U + PV). \quad (3.48)$$

Esta expressão é idêntica a (14.62) em [19], para o gás de Bose-Einstein com potencial químico nulo.

Dos resultados (3.35) e (3.42), podemos, finalmente, escrever a entropia em termos das funções de Bessel,

$$S = \frac{V(N-1)M^N c^{N+1}}{T\hbar^{N-1}\pi^{\frac{N}{2}}2^{\frac{N}{2}-1}\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{N}{(N-1)} \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{(\beta n M c^2)^{\frac{N}{2}}} K_{\frac{N}{2}}(\beta n M c^2) + \frac{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}{2(\beta n M c^2)^{\frac{N}{2}-1}} K_{\frac{N}{2}-1}(\beta n M c^2) \right], \quad (3.49)$$

em que o segundo termo entre colchetes pode ser reescrito com a ajuda de (B.7), levando a uma expressão para  $S$  envolvendo  $\langle \phi^2 \rangle$ . Analogamente a  $U$ , tomamos as constantes  $c$ ,  $\hbar$  e  $k_B$  iguais a unidade e  $N = 4$  em (3.49), para obtermos a densidade de entropia

$$\frac{S}{V} = \frac{M^2 T}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[ 2K_2(\beta n M) + \frac{\beta n M}{2} K_1(\beta n M) \right]. \quad (3.50)$$

Este resultado é completamente diferente da densidade de entropia em [22], para fugacidade igual a unidade e spin nulo, apresentada junto a  $\frac{U}{V}$ . A expressão fornecida lá, a segunda em (A1.39), não difere de (3.50) por um simples “erro de digitação”, como é possível no caso da densidade de energia  $\frac{U}{V}$ . Além do mais, ela não recupera o resultado esperado para o caso de massa nula, tão pouco, a dimensão de entropia, o que nos leva a duvidar de sua exatidão.

Como última quantidade termodinâmica, apresentamos a capacidade térmica a volume constante, dada por

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V. \quad (3.51)$$

Que obtemos a partir de (3.35) como sendo

$$C_V = \frac{V(N-1)M^N c^{N+1}}{T \hbar^{N-1} \pi^{\frac{N}{2}} 2^{\frac{N}{2}-1} \Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{(\beta n M c^2)^{\frac{N}{2}-1}} K_{\frac{N}{2}+1}(\beta n M c^2) + \frac{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}{2(\beta n M c^2)^{\frac{N}{2}-2}} K_{\frac{N}{2}}(\beta n M c^2) \right], \quad (3.52)$$

onde fizemos uso das identidades para a derivada das funções modificadas de Bessel, dadas em [21, 23].

É interessante notarmos que o argumento das funções modificadas de Bessel aparecendo em todas as quantidades termodinâmicas é uma razão entre a energia de repouso, devido a massa, e a energia térmica:

$$n\beta M c^2 = n \frac{M c^2}{k_B T}. \quad (3.53)$$

Isso nos permite investigar o comportamento termodinâmico do sistema quando  $k_B T \ll M c^2$ , como também  $k_B T \gg M c^2$ , inclusive o caso ultrarrelativístico de massa nula, como faremos adiante.

Em especial para  $M c^2 \gg k_B T$ , o argumento das funções modificadas de Bessel pode ser tomado infinito. Neste limite, o comportamento de tais funções é dado por [23, 24]

$$\lim_{z \rightarrow \infty} K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp(-z). \quad (3.54)$$

Isso nos diz que as quantidades termodinâmicas decrescem exponencialmente para massas progressivamente maiores. Discutiremos tal ocorrência com mais detalhes no próximo capítulo, para quatro dimensões.



Outro ponto a ser investigado, o qual não abordaremos em detalhes neste trabalho, são os efeitos da dimensão do espaço na termodinâmica do sistema. Veja, por exemplo, [25, 26, 27].

### 3.2 Termodinâmica da radiação escalar sem massa

De posse das quantidades termodinâmicas calculadas anteriormente, podemos analisar o caso ultrarrelativístico de nosso sistema, obtendo assim a termodinâmica de uma radiação escalar sem massa em  $N$  dimensões. Nesse contexto, as novas quantidades poderão ser comparadas com os resultados existentes na literatura para a termodinâmica da radiação eletromagnética em dimensões arbitrárias. Devemos lembrar que esta radiação, apesar da massa nula, é não escalar, tal que nossos resultados recuperarão os já obtidos para este caso a menos de um fator, devido às possíveis polarizações dos bósons (fótons), que agora possuem spin um.

No limite ultrarrelativístico, o argumento das funções modificadas de Bessel nas quantidades termodinâmicas da secção anterior vai a zero (vide equação (3.53)). Neste limite tais funções se comportam, em primeira aproximação, na forma [24]

$$K_\nu(z) \simeq \frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{z^\nu}, \quad \text{para } \nu \geq 0. \quad (3.55)$$

Usando esta aproximação em (3.35), somos levados a

$$U = \frac{V(N-1)M^N c^{N+1}}{\hbar^{N-1} \pi^{\frac{N}{2}} 2^{\frac{N}{2}-1} \Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2^{\frac{N}{2}-1} \Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{(\beta n M c^2)^N} + \frac{2^{\frac{N}{2}-3} \Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{N}{2}-1\right)}{(\beta n M c^2)^{N-2}} \right], \quad (3.56)$$

onde vemos que apenas o segundo termo aparecerá multiplicado por um fator de massa. Assim, tomando  $M = 0$  na última expressão, ficamos com

$$U = \frac{V(N-1) \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \zeta(N)}{\pi^{\frac{N}{2}} (\hbar c)^{N-1}} (k_B T)^N, \quad (3.57)$$

podendo ainda ser escrita, pelas propriedades da função gamma [23, 24], como

$$U = \frac{V \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \Gamma(N) \zeta(N)}{\pi^{\frac{N}{2}} (\hbar c)^{N-1} \Gamma(N-1)} (k_B T)^N \quad (3.58)$$

sendo  $\zeta(N)$  a função zeta de Riemann, dada por [24]

$$\zeta(N) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^N}, \quad \text{para } N > 1. \quad (3.59)$$

Nas quantidades dadas por apenas uma função modificada de Bessel é ainda mais fácil obtermos o caso de massa nula, como, por exemplo, o número total de bósons (3.38)

$$\mathcal{N} = \frac{V \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \zeta(N-1)}{\pi^{\frac{N}{2}} (\hbar c)^{N-1}} (k_B T)^{N-1}, \quad (3.60)$$

a pressão (3.42), que recupera o resultado em [28],

$$P = \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \zeta(N)}{\pi^{\frac{N}{2}} (\hbar c)^{N-1}} (k_B T)^N, \quad (3.61)$$

e a energia livre de Helmholtz (3.44)

$$A = -\frac{V \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \zeta(N)}{\pi^{\frac{N}{2}} (\hbar c)^{N-1}} (k_B T)^N. \quad (3.62)$$

Já a entropia e a capacidade térmica podem ser encontradas similarmente a  $U$ , onde o termo com a função modificada de Bessel de menor índice fica multiplicado por um fator de massa, que nesse caso vai a zero, nos levando a partir de (3.49) e (3.52) a

$$S = \frac{VN \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \zeta(N)}{\pi^{\frac{N}{2}} (\hbar c)^{N-1}} k_B^N T^{N-1} \quad (3.63)$$

e

$$C_V = \frac{VN(N-1) \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \zeta(N)}{\pi^{\frac{N}{2}} (\hbar c)^{N-1}} k_B^N T^{N-1}, \quad (3.64)$$

respectivamente.

A partir de (3.57), a densidade de energia na cavidade é dada por [28]

$$\frac{U}{V} = \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \Gamma(N) \zeta(N)}{\pi^{\frac{N}{2}} \Gamma(N-1)} \frac{(k_B T)^N}{(\hbar c)^{N-1}} = a_N T^N. \quad (3.65)$$

Comparando o resultado (3.65) para a radiação escalar com o análogo no eletromagnetismo [25, 29], vemos que  $a_N$  deve ser multiplicado por  $N-2$ , que é o fator de degenerescência de spin, dando as possíveis polarizações do fóton em  $N$  dimensões espaço-temporais [26, 27, 29].

Uma vez que recuperamos o resultado eletromagnético a partir da radiação escalar com massa, podemos nos questionar sobre a possibilidade de uma massa extremamente pequena para o fóton. Essa questão pode ser abordada pelo fator de degenerescência de spin. Se o fóton possuísse uma massa, não importando o quão pequena fosse, ele ganharia um grau de polarização longitudinal, tal que o fator corrigindo a nossa proporcionalidade em (3.65)

seria  $N - 1$ , em vez de  $N - 2$ . Sabemos, pelos experimentos para a radiação de cavidade eletromagnética em quatro dimensões, que tal fator é de fato  $N - 2$ . No entanto, este resultado experimental não é o suficiente para postularmos uma massa nula para o fóton, pois os fótons longitudinalmente polarizados podem possuir um acoplamento tão fraco com a matéria, tal que sejam irrelevantes para o equilíbrio termodinâmico na cavidade e, conseqüentemente, invisíveis aos nossos aparatos de medida. Para mais detalhes sobre esta discussão, veja [18, 29].

A partir de (3.57) e (3.61) a pressão pode ser dada em termos de  $\frac{U}{V}$  como [28, 29]

$$P = \frac{1}{(N - 1)} \frac{U}{V}. \quad (3.66)$$

Chamamos a atenção aqui, para o fato que (3.65) e (3.66) representam uma generalização de dois resultados bem conhecidos para radiação eletromagnética de cavidade em  $N = 4$ . Nos referimos a proporcionalidade  $\frac{U}{V} \propto T^4$  e a relação entre pressão e densidade de energia,  $P = \frac{1}{3} \frac{U}{V}$  [18, 19, 20].

Para massa nula, energia e entropia podem ser relacionadas a partir de (3.57) e (3.63) da seguinte forma

$$S = \frac{N}{N - 1} \frac{U}{T} = \frac{VN a_N T^{N-1}}{(N - 1)}, \quad (3.67)$$

como também de (3.57) e (3.64), obtemos

$$C_V = \frac{N}{T} U. \quad (3.68)$$

Usando essas relações, somos levados a

$$C_V = (N - 1)S, \quad (3.69)$$

que generaliza a relação entre essas quantidades em quatro dimensões, dada por  $C_V = 3S$  [20].

Em uma transformação adiabática a entropia do sistema permanece constante, tal que pela última igualdade em (3.67), temos

$$VT^{N-1} = \text{constante}. \quad (3.70)$$

E escrevendo  $T$  em termos de  $P$  com a ajuda de (3.65) e (3.66), chegamos à segunda equação no caso adiabático

$$PV^{\frac{N}{N-1}} = \text{constante}. \quad (3.71)$$

Essas duas últimas igualdades são também uma generalização dos resultados eletromagnéticos em quatro dimensões apresentados em [20].

### 3.3 A pressão por considerações cinéticas

Anteriormente fomos conduzidos à interpretação de que o campo escalar confinado, inicialmente descrito por ondas estacionárias, após quantizado, se comporta identicamente a um gás de partículas relativísticas com potencial químico nulo no *ensemble* canônico. Então, esperamos que a pressão para este sistema possa ser calculada considerando-a como devida à colisão de tais partículas com as paredes da cavidade. Para este propósito, partimos do número total de bósons na cavidade (3.37), que para  $V \rightarrow \infty$  pode ser dado em termos do momento como

$$\mathcal{N} = \frac{V}{(\hbar\pi)^{N-1}} \int_0^\infty dp^{N-1} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}, \quad (3.72)$$

onde  $\varepsilon(p) = \sqrt{p^2c^2 + M^2c^4}$ , é a energia relativística de cada bóson.

Definimos agora

$$\frac{\mathcal{N}}{V} = \int_{-\infty}^\infty \frac{dp^{N-1}}{h^{N-1}} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1} = \int_{-\infty}^\infty \frac{dp^{N-1}}{h^{N-1}} f(\mathbf{p}), \quad (3.73)$$

sendo

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}, \quad (3.74)$$

interpretada como uma função distribuição [18, 19].

A partir de  $f(\mathbf{p})$ , podemos calcular a média das quantidades relacionadas ao gás, em particular, a energia média de cada bóson será dada por

$$\langle \varepsilon \rangle := \frac{V \int_{-\infty}^\infty \frac{dp^{N-1}}{h^{N-1}} \varepsilon f(\mathbf{p})}{V \int_{-\infty}^\infty \frac{dp^{N-1}}{h^{N-1}} f(\mathbf{p})} = \frac{V}{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp^{N-1}}{h^{N-1}} \varepsilon f(\mathbf{p}), \quad (3.75)$$

onde o volume é advindo de uma integração em todo o espaço de fase. Multiplicando ambos os lados desta equação por  $\frac{\mathcal{N}}{V}$  com  $f(\mathbf{p})$  e  $\varepsilon(p)$  dados explicitamente, chegamos a

$$\frac{\mathcal{N}}{V} \langle \varepsilon \rangle = \int_{-\infty}^\infty \frac{dp^{N-1}}{h^{N-1}} \varepsilon f(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^\infty \frac{dp^{N-1}}{h^{N-1}} \frac{\sqrt{p^2c^2 + M^2c^4}}{e^{\beta\sqrt{p^2c^2 + M^2c^4}} - 1}, \quad (3.76)$$

e pela equação (A.1) temos

$$\frac{\mathcal{N}}{V} \langle \varepsilon \rangle = \frac{U}{V}. \quad (3.77)$$

Calculemos a pressão exercida pelos bósons nas paredes da cavidade, considerando estas perfeitamente refletoras. Assim, seja uma parede normal ao semi eixo  $x_1$  positivo, tal que qualquer bóson com momento  $p_1 > 0$  e velocidade  $v_1 > 0$  que colide com ela, sofre uma variação de seu momento dada por  $\Delta p_1 = 2p_1$ . A pressão na parede é então, dada por

$$P = 2 \int_{v_1 > 0}^{\infty} \frac{dp^{N-1}}{h^{N-1}} p_1 v_1 f(\mathbf{p}). \quad (3.78)$$

Pela relação entre momento, energia e velocidade para um sistema relativístico [7],

$$\mathbf{p} = \frac{\varepsilon}{c^2} \mathbf{v}, \quad (3.79)$$

temos

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^{N-1}}{h^{N-1}} \frac{p_1^2 c^2}{\varepsilon} f(\mathbf{p}). \quad (3.80)$$

Como cada uma das integrações tem o mesmo valor, a pressão pode ser escrita como

$$P = \frac{1}{(N-1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^{N-1}}{h^{N-1}} \frac{p^2 c^2}{\varepsilon} f(\mathbf{p}). \quad (3.81)$$

Reescrevendo (3.81) com a ajuda de  $p^2 c^2 = \varepsilon^2 - M^2 c^4$ , ficamos com

$$P = \frac{1}{h^{N-1}(N-1)} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dp^{N-1} \varepsilon f(\mathbf{p}) - \int_{-\infty}^{\infty} dp^{N-1} \frac{M^2 c^4}{\varepsilon} f(\mathbf{p}) \right], \quad (3.82)$$

onde explicitando  $f(\mathbf{p})$  e  $\varepsilon$  somos levados a

$$P = \frac{1}{h^{N-1}(N-1)} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dp^{N-1} \frac{\sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4}}{e^{\beta \sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4}} - 1} - M^2 c^4 \int_{-\infty}^{\infty} dp^{N-1} \frac{(\sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4})^{-1}}{e^{\beta \sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4}} - 1} \right]. \quad (3.83)$$

Multiplicando ambos os lados desta equação por  $V$ , identificamos de (A.1) o primeiro termo como proporcional à energia  $U$ , enquanto o segundo termo pode ser identificado de (B.3) como envolvendo  $\langle \phi^2 \rangle$ . Assim chegamos novamente a (3.41), como devia acontecer.

O resultado anterior confirma nossa expectativa de que a pressão calculada através do ensemble canônico para o campo escalar quantizado dentro da cavidade é igualmente obtida por considerando a cavidade preenchida com um gás de partículas relativísticas de massa  $M$ .

Podemos também a partir de (3.60) e (3.61), escrever a equação de estado para massa nula na forma

$$PV = \frac{\zeta(N)}{\zeta(N-1)} \mathcal{N} k_B T. \quad (3.84)$$

Desde que a razão entre as funções zetas tende à unidade quão maior for  $N$ , vemos que (3.84) toma a mesma forma da equação de estado para o gás relativístico clássico com  $\bar{N}$  moléculas [13]. Contudo, as semelhanças ficam apenas na forma, porque  $\mathcal{N}$  aqui não é uma quantidade fixa, mas dependente de  $T$  e  $V$ .

## Capítulo 4

# Termodinâmica da radiação escalar em

$$N = 4$$

Calculadas as quantidades termodinâmicas no capítulo anterior para massa e dimensões arbitrárias, tomamos agora o caso particular de  $N = 4$  e primeiras correções de massa. O que se faz conveniente, porque em tais condições nossos resultados podem ser facilmente comparados com os bem conhecidos e comprovados para o eletromagnetismo, devido aos trabalhos de Planck. E é tal comparação, que nos permitirá extrair o novo conteúdo de informações acerca do comportamento do sistema na presença de massa, mesmo considerando esta muito pequena.

Tomando  $N = 4$  nas expressões para as quantidades termodinâmicas do Capítulo 3, somos levados a partir de (3.35) a

$$U = \frac{VM^4c^5}{2\pi^2\hbar^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{3}{(\beta n M c^2)^2} K_2(\beta n M c^2) + \frac{1}{(\beta n M c^2)} K_1(\beta n M c^2) \right], \quad (4.1)$$

enquanto o número de bósons em (3.38) e a pressão em (3.42), são dados respectivamente por

$$\mathcal{N} = \frac{VM^2c}{2\pi^2\hbar^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta n)} K_2(\beta n M c^2) \quad (4.2)$$

e

$$P = \frac{M^2c}{2\pi^2\hbar^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta n)^2} K_2(\beta n M c^2). \quad (4.3)$$

Do apêndice (B), podemos obter  $\langle \phi^2 \rangle$  em quatro dimensões através de (B.7),

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{Mc}{2\pi^2\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta n)} K_1(\beta n M c^2). \quad (4.4)$$

Temos também a partir de (3.41) a equação de estado do sistema para quatro dimensões, dada por

$$PV = \frac{1}{3} \left[ U - \frac{VM^2c^4}{\hbar^2c^2} \langle \phi^2 \rangle \right]. \quad (4.5)$$

Um “gráfico desta equação”, que é similar a (4.3), pode nos dar uma primeira perspectiva de como a massa afetará os resultados para nosso sistema.

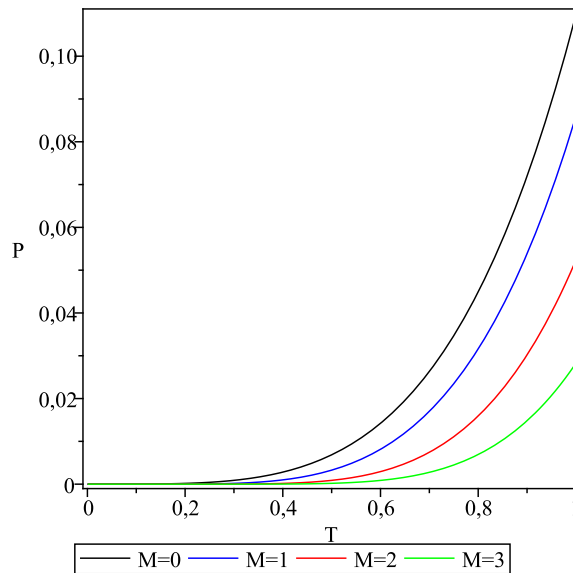


Figura 4.1: Comportamento da pressão  $P$  como função da temperatura  $T$ , em quatro dimensões e valores diferentes para a massa dos bósons. As constantes  $\hbar$ ,  $c$  e  $k_B$  foram feitas iguais a um.

Como podemos notar na Fig. (4.1), a existência de massa provoca uma diminuição no crescimento da pressão em função da temperatura. Em particular, para baixos valores de  $T$  o argumento das funções modificadas de Bessel é grande e o comportamento da curva é dado através de (3.54). Enquanto que, para valores de  $T$  cada vez maiores, a massa torna-se desprezível e a pressão se comporta aproximadamente como  $P \propto T^4$ , similarmente ao caso sem massa. Isso nos diz que, em primeiras correções de massa, devemos esperar por um pequeno retardo no valor das quantidades termodinâmicas. Exploraremos este fato em mais detalhes na próxima secção, inclusive, justificando o porquê de tal comportamento.



Retornando às quantidades termodinâmicas em quatro dimensões, temos também de (3.44) a energia livre de Helmholtz

$$A = -\frac{VM^2c}{2\pi^2\hbar^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta n)^2} K_2(\beta n M c^2), \quad (4.6)$$

a entropia a partir de (3.49)

$$S = \frac{VM^4c^5}{T\pi^2\hbar^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{(\beta n M c^2)^2} K_2(\beta n M c^2) + \frac{1}{2(\beta n M c^2)} K_1(\beta n M c^2) \right], \quad (4.7)$$

e por (3.52) a capacidade térmica

$$C_V = \frac{VM^4c^5}{T^2\pi^2\hbar^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{3}{(\beta n M c^2)} K_3(\beta n M c^2) + K_2(\beta n M c^2) \right]. \quad (4.8)$$

Estudamos a primeira correção de massa nas quantidades anteriores tomando o limite de  $k_B T \gg M c^2$  e usando a seguinte aproximação para as funções modificadas de Bessel com argumento pequeno [23],

$$K_\nu(z) \simeq \frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{z^\nu} \left( 1 - \frac{z^2}{4\nu-4} \right) \quad \text{para } \nu > 1 \quad (4.9)$$

e

$$K_\nu(z) \simeq \frac{1}{z} + \frac{z}{2} \log\left(\frac{z}{2}\right) \quad \text{para } \nu = 1. \quad (4.10)$$

Com essas aproximações, em (4.1) teremos

$$\frac{U}{V} = \frac{(k_B T)^4}{2\pi^2(\hbar c)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{6}{n^4} - \frac{6(\beta M c^2)^2}{4n^2} + \frac{(\beta M c^2)^2}{n^2} + \frac{(\beta M c^2)^4}{2} \log\left(\frac{\beta n M c^2}{2}\right) \right], \quad (4.11)$$

onde considerando apenas os termos de ordem mais baixa em  $M$ , chegamos a

$$\frac{U}{V} = \frac{\pi^2(k_B T)^4}{30(\hbar c)^3} - \frac{M^2 c(k_B T)^2}{24\hbar^3}. \quad (4.12)$$

Procedendo da mesma forma para a pressão (4.3), que também pode ser obtida de (4.5), somos levados a

$$P = \frac{\pi^2(k_B T)^4}{90(\hbar c)^3} - \frac{M^2 c(k_B T)^2}{24\hbar^3}, \quad (4.13)$$

o qual é recuperado no caso de potencial químico nulo pelo resultado para  $P$  em quatro dimensões e primeira correção de massa apresentado em [22, 30]. Sendo que  $P$  obtida em [30] difere de (4.13) por um fator 2 devido à degenerescência de spin no espaço quadridimensional, pois é calculada para bósons de spin 1 (fótons).

De maneira similar para as demais quantidades, temos

$$\frac{\mathcal{N}}{V} = \frac{\zeta(3)(k_B T)^3}{\pi^2(\hbar c)^3} - \frac{M^2 c k_B T}{24\hbar^3}, \quad (4.14)$$

$$\frac{A}{V} = -\frac{\pi^2(k_B T)^4}{90(\hbar c)^3} + \frac{M^2 c (k_B T)^2}{24\hbar^3}, \quad (4.15)$$

$$\frac{C_V}{V} = \frac{2\pi^2 k_B^4 T^3}{15(\hbar c)^3} - \frac{M^2 c k_B^2 T}{12\hbar^3} \quad (4.16)$$

e finalmente

$$\frac{S}{V} = \frac{2\pi^2 k_B^4 T^3}{45(\hbar c)^3} - \frac{M^2 c k_B^2 T}{12\hbar^3}, \quad (4.17)$$

sendo este resultado recuperado a partir do apresentado em [30] para potencial químico nulo, a menos do fator 2 de degenerescência de spin no espaço-tempo quadridimensional.

Agora é fácil ver, que a menos do fator de degenerescência de spin, tomado  $M = 0$  nas expressões de (4.12) a (4.17), recuperamos imediatamente os resultados planckianos em [18, 19, 20].

Outra análise interessante aqui pode ser feita calculando  $\langle \phi^2 \rangle$  para  $M = 0$  através de (4.4), nos levando a [31]

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{(k_B T)^2}{12\hbar c}. \quad (4.18)$$

Este resultado nos diz que as primeiras correções de massa nas quantidades termodinâmicas em (4.12), (4.13) e (4.15) são proporcionais ao produto do quadrado da energia de repouso dos bósons ( $M^2 c^4$ ) pelo valor médio quadrático do campo  $\phi$  para massa nula.

## 4.1 Comportamento em primeiras correções de massa

Como apresentado no início deste capítulo, a consideração de que os bósons na cavidade possuem uma massa, mesmo que muito pequena em relação à temperatura, leva a correções nas quantidades termodinâmicas, em primeira ordem, proporcionais a  $M^2$ . Este fato nos leva a questionar sobre o novo comportamento do sistema frente a tais correções, em relação ao caso sem massa. Inclusive, nos leva a perguntar como se desenvolvem as transformações termodinâmicas na presença da massa.

Em primeiro lugar, vemos de (4.12) que a densidade de energia na cavidade é afetada pela massa por um termo negativo. Isso implica que dada duas cavidades idênticas e

à mesma temperatura, a densidade de energia será menor na que possui bósons com massa. Este comportamento pode ser melhor entendido a partir da energia média para uma particular frequência  $\omega_{\mathbf{k}}$ , dada por

$$\mathcal{E}(\omega_{\mathbf{k}}) := \bar{n}_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{e^{\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}}} - 1}. \quad (4.19)$$

Como pode ser visto através de (3.12), considerar o sistema com massa leva a um aumento de  $\omega_{\mathbf{k}}$ , tal que dada uma massa  $M$  o argumento da exponencial em (4.19), para uma temperatura fixa, é maior que no caso de massa nula, ocasionando assim uma diminuição da energia média para um particular  $\mathbf{k}$  especificado e, conseqüentemente, da energia total na cavidade, em relação ao sistema com massa nula à mesma temperatura.

De um outro ponto de vista, podemos dizer que a presença da massa aumenta a frequência do oscilador e, portanto, seu quantum de energia. Assim, a temperatura necessária para “ativá-lo” torna-se maior, quão maior for  $M$ . Mas, ativar um oscilador nada mais é do que lançar um bóson na cavidade, tal que, pelo fato anterior, devemos esperar por um decréscimo do número  $\mathcal{N}$  de bósons na cavidade para valores crescentes da massa, o que é confirmado em (4.14). Da mesma forma, o aumento da frequência de cada um dos osciladores em função do crescimento da massa leva a uma diminuição da capacidade térmica  $C_V$  como pode ser visto em (4.16). Isto é justificado pelo fato que a “ativação” de algum dos osciladores ocorrerá em temperaturas cada vez maiores quão maior for a elevação da frequência devido ao aumento da massa. Assim, em temperaturas cada vez maiores a maioria dos osciladores ainda se encontrarão no seu estado fundamental, e a energia na cavidade não varia até que a temperatura seja aumentada suficientemente para retirar alguns desses osciladores do estado fundamental (“ativá-los”).

Uma questão que também podemos abordar com respeito à energia nas duas cavidades, uma de bósons com massa e outra com bósons de massa nula, é que em ambas a energia cresce proporcionalmente a  $V$  para uma temperatura fixa, como é visto em (4.12). No entanto, fazendo  $M = 0$  nesta equação vemos que proporcionalidade para o sistema com bósons de massa nula é estabelecida por

$$U = \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{30 (\hbar c)^3} V, \quad (4.20)$$

enquanto para massa não nula temos

$$U = \left[ \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{30 (\hbar c)^3} - \frac{M^2 c (k_B T)^2}{24 \hbar^3} \right] V, \quad (4.21)$$

de onde vemos que a proporcionalidade entre  $U$  e  $V$  no caso de massa não nula é menor. Logo, tanto para volume fixo ou para temperatura fixa, o que a massa proporciona é uma diminuição da energia total na cavidade em relação ao caso de massa nula. Contudo, para o caso de temperatura constante surge em ambos os sistemas uma questão interessante, o aumento da energia em função do volume.

Se pensarmos em um gás relativístico clássico composto por um número  $\bar{N}$  de moléculas de massa  $M^{(0)}$  tomado fixo, temos que no limite de  $M^{(0)} c^2 \ll k_B T$  a energia total do gás é dada por [13]

$$U = 3\bar{N}k_B T, \quad (4.22)$$

e vemos que mantida a temperatura constante não há como variar a energia interna do gás. Por outro lado, a energia de um gás de bósons escalares com massa nula escrita a partir de (3.57) e (3.60) como

$$U = \frac{(N-1)\zeta(N)}{\zeta(N-1)} \mathcal{N} k_B T, \quad (4.23)$$

que em quatro dimensões nos leva a

$$U = \frac{\zeta(4)}{\zeta(3)} 3\mathcal{N} k_B T, \quad (4.24)$$

varia com o volume. A razão para isso é que em nosso caso o número  $\mathcal{N}$  de partículas, diferentemente de  $\bar{N}$ , não é fixo. Pelo contrário,  $\mathcal{N}$  varia proporcionalmente a  $V$ , como pode ser visto em (4.14).

Outro ponto a ser discutido com respeito à comparação entre os bósons na cavidade e o gás relativístico clássico com número de moléculas fixo é a correção de massa sofrida pela energia total de ambos os sistemas. Como já apresentamos no início desta seção em (4.12), a consideração de uma massa para os bósons, mesmo que muito pequena em relação à temperatura, leva a uma diminuição da energia dentro da cavidade, sendo que, no limite de  $M c^2 \rightarrow \infty$ , a energia vai a zero pelo comportamento das funções modificadas de Bessel em (3.54), mantendo a temperatura fixa. Em contradição a este fato, se considerada a

massa  $M^{(0)}$  das moléculas de um gás relativístico clássico muito maior que a temperatura ( $M^{(0)} \gg k_B T$ ), a energia total se comporta da seguinte forma [13]

$$U = \bar{N}M^{(0)} + \frac{3}{2}\bar{N}k_B T, \quad (4.25)$$

que não tem nenhuma semelhança com o comportamento dos bósons de massa não nula na cavidade. A diferença crucial aqui, é que dar uma massa às partículas no caso relativístico clássico significa que a energia inicial, devida apenas ao momento, ganha um termo aditivo de energia de repouso, o que não ocorre no caso dos bósons, pois estes são advindos da quantização de ondas estacionárias, e considerar uma massa não nula significa aumentar a frequência de cada oscilador quântico dentro da cavidade.

Outros efeitos da massa na radiação escalar em primeira correção podem ser extraídos a partir da equação de estado (4.13), a qual nos mostra imediatamente que a pressão nas paredes da cavidade é independente de  $V$  para qualquer valor de  $M$ , inclusive,  $M = 0$ , e que a correção de massa na pressão é idêntica à correção para a densidade de energia (4.12). Por esta correção na equação de estado, podemos analisar o comportamento do sistema frente às transformações termodinâmicas em relação ao caso de massa nula. Em primeiro lugar, para uma transformação isotérmica tomamos  $T = \text{constante}$  em (4.13) e vemos que a pressão para o caso de bósons com massa é sempre menor que no caso de massa nula. Assim, em uma representação gráfica de  $P$  em função de  $V$  para os dois sistemas, o de bósons com massa não nula assumirá valores de pressão sempre menores que aqueles do sistema com bósons de massa nula para quaisquer valores de  $V$ . Da mesma forma, este comportamento é similar para uma transformação isovolumétrica ( $V = \text{constante}$ ), na qual em um gráfico de  $P$  contra  $T$  a partir de (4.13) a pressão para o sistema de bósons com massa é sempre menor que aquela para o caso de massa nula independente do valor de  $T$ .

Para estudarmos o comportamento do sistema por uma transformação isobárica tomamos  $P = \text{constante}$  em (4.13), e vemos que no caso de bósons com massa não nula o sistema necessita de uma temperatura superior àquela para o caso de bósons sem massa para se manter à mesma pressão. Logo, em um gráfico da variação de  $T$  com respeito a  $V$ , o sistema de bósons com massa possuirá valores de temperatura superiores aos do sistema de bósons sem massa para qualquer valor de  $V$ .

O comportamento do sistema sob transformações adiabáticas é obtido escrevendo a entropia em (4.17), na forma

$$S = \frac{2\pi^2 k_B^4 V T_{eff}^3}{45(\hbar c)^3}, \quad (4.26)$$

onde

$$T_{eff} := T \left[ 1 - \frac{15}{8\pi^2} \left( \frac{Mc^2}{k_B T} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (4.27)$$

Para uma transformação adiabática  $S = \text{constante}$ , e temos então a partir de (4.26) a equação que relaciona  $V$  e  $T_{eff}$ , dada por

$$V T_{eff}^3 = \text{constante}. \quad (4.28)$$

Esta relação entre  $V$  e  $T_{eff}$ , governando a transformação adiabática, tem a mesma forma funcional que no caso de massa nula, dado em (3.70) para  $N = 4$ . Como  $T_{eff} < T$ , para um mesmo valor da constante em (4.28) o sistema com bósons de massa não nula possui valores maiores de volume em relação ao sistema de bósons sem massa à mesma temperatura. Ou seja, fixado um mesmo valor de entropia para ambos os sistemas, na representação gráfica de  $V$  contra  $T$  o sistema de bósons com massa terá valores de volume superiores àqueles para o sistema de bósons sem massa, independente do valor de  $T$ .

Recorrendo a (3.47) e usando as quantidades em primeira correção de massa, podemos expressar a pressão em termos de  $T_{eff}$ , obtendo assim, a dependência entre  $P$  e  $V$  que governa uma transformação adiabática,

$$\frac{P V^{4/3}}{b^2} = \text{constante}, \quad (4.29)$$

onde

$$b^2 = \left[ 1 - \frac{15}{8\pi^2} \left( \frac{Mc^2}{k_B T} \right)^2 \right]^{\frac{2}{3}}. \quad (4.30)$$

Da expressão definindo  $b$ , vemos que o caso de massa nula em quatro dimensões, obtido de (3.71), é recuperado a partir de (4.29). Vemos também a partir de (4.30) que para uma temperatura fixa  $b^2 < 1$ , assim dado um mesmo valor da constante em (4.29) para os dois sistemas o produto  $P V^{4/3}$  para o caso de bósons com massa é menor que aquele para o caso de massa nula. Logo, em um gráfico da variação de  $P$  com respeito a  $V$  para uma temperatura fixa, os valores da pressão no sistema de bósons com massa são menores que

os correspondentes valores para  $P$  no caso de bósons sem massa, dado qualquer valor de  $V$ .

Uma aspecto interessante que a equação (4.29) nos permitiria abordar, juntamente com a equação de estado (4.5), seria o ciclo de Carnot efetuado pela radiação escalar com massa. No entanto, este aspecto não será abordado aqui.

## Capítulo 5

# Espectro de corpo negro da radiação escalar

O estudo desenvolvido no capítulo precedente nos permitiu explorar o comportamento termodinâmico da cavidade preenchida com bósons de massa  $M$  e potencial químico nulo, em relação ao sistema com massa nula. Isso foi feito partindo das quantidades termodinâmicas previamente calculadas e tomando o caso particular de quatro dimensões e primeiras correções de massa, o que nos levou a perceber as modificações na termodinâmica do sistema impostas pela consideração de bósons com massa.

Realizados os estudos anteriores, estamos agora interessados em reconhecer as correções de massa do ponto de vista espectral do sistema, o que pode ser feito a partir das expressões para as quantidades termodinâmicas antes mesmo de suas integrações, expressando-as como funções de  $\omega$ ,  $T$  e  $M$ . Isso nos permitirá obter, para o caso com massa e em quatro dimensões, uma distribuição espectral similar à lei da radiação de Planck para a radiação de cavidade eletromagnética [18, 19, 20], sendo esta recuperada por nossos resultados a menos do fator de degenerescência de spin quando tomarmos o limite de  $M = 0$ . Obteremos também, as leis de Wien e Rayleigh-Jeans para massas não nulas.

Consideremos em primeiro lugar a energia total na cavidade dada em (3.29). No limite de  $V \rightarrow \infty$  a soma nesta equação pode ser passada para uma integral, que a partir de (3.31) e (3.32) nos permite expressar a densidade de energia na cavidade em termos de



uma integração no momento, da forma

$$\frac{U}{V} = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{\sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4}}{e^{\beta \sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4}} - 1}, \quad (5.1)$$

onde usamos o sistema de coordenadas esféricas.

Queremos agora expressar  $\frac{U}{V}$  como uma integral em  $\omega$ , obtendo assim, a densidade de energia por unidade de frequência das ondas estacionárias na cavidade. Isso pode ser alcançado a partir de (3.32) onde, para um dado valor de  $M$ , temos<sup>1</sup>

$$\hbar^2 \omega^2 = p^2 c^2 + M^2 c^4. \quad (5.2)$$

Diferenciando ambos os lados da última igualdade, somos levados a

$$dp = \frac{\hbar^2 \omega}{c \sqrt{\hbar^2 \omega^2 - M^2 c^4}} d\omega. \quad (5.3)$$

Logo, podemos escrever a densidade de energia como sendo

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{2\pi^2 c^3} \int_{\frac{Mc^2}{\hbar}}^\infty d\omega \omega^2 \frac{\sqrt{\hbar^2 \omega^2 - M^2 c^4}}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}, \quad (5.4)$$

onde os limites de integração são dados através de (5.1) e (5.2).

Reescrevendo (5.4) de uma forma mais conveniente, temos

$$\frac{U}{V} = \int_{\frac{Mc^2}{\hbar}}^\infty d\omega \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \left[ 1 - \left( \frac{Mc^2}{\hbar \omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} := \int_{\frac{Mc^2}{\hbar}}^\infty d\omega u(\omega, T, M), \quad (5.5)$$

onde

$$u(\omega, T, M) = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \left[ 1 - \left( \frac{Mc^2}{\hbar \omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.6)$$

Esta é a generalização da lei da radiação de Planck do eletromagnetismo, para o caso de bósons com massa  $M$  e spin zero.  $u(\omega, T, M)$  é a distribuição espectral da densidade de energia  $\frac{U}{V}$  no interior da cavidade, dando a densidade de energia por unidade de frequência, para uma temperatura  $T$  e massa  $M$ , a qual, no limite de massa nula recupera a menos do fator de degenerescência de spin a lei de Planck usual para o campo de Maxwell [18, 19, 20].

Para analisarmos os efeitos da massa na distribuição espectral da radiação escalar no interior da cavidade, é conveniente definirmos novas variáveis adimensionais,

$$x := \frac{\hbar \omega}{k_B T} \quad \text{e} \quad \alpha := \frac{Mc^2}{k_B T}, \quad (5.7)$$

---

<sup>1</sup>Omitimos aqui o sub índice  $\mathbf{k}$  em  $\omega$ , pois na forma integral isso não se faz necessário.

em termos das quais  $u(\omega, T, M)$  é escrito na forma <sup>2</sup>

$$u(\omega, T, M) = \frac{(k_B T)^4}{2\pi^2(\hbar c)^3} \frac{x^3}{e^x - 1} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.8)$$

A partir desta expressão, fixado um valor de  $T$ , podemos definir para fins de análise,

$$u'(\omega, T, M) := \frac{2\pi^2(\hbar c)^3}{(k_B T)^4} u(\omega, T, M) = \frac{x^3}{e^x - 1} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.9)$$

de onde obtemos facilmente a curva “planckiana” para diferentes valores da massa dos bósons (vide Fig.(5.1)).

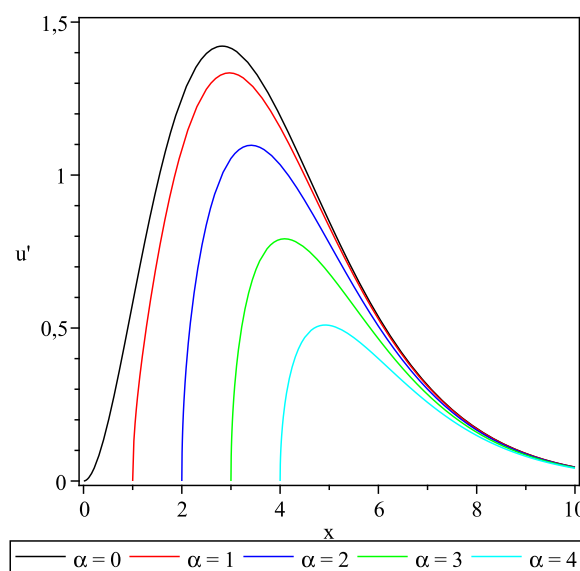


Figura 5.1: A distribuição espectral para a densidade de energia no interior da cavidade, a temperatura constante e diferentes valores de massa para os bósons.

Como pode ser visto em (5.6), a correção de massa ao caso plackiano (i.e., para  $M = 0$ ) é dada em termos da razão entre a energia de repouso ( $Mc^2$ ) e a energia total ( $\hbar\omega$ ) dos bósons, e ocasiona um decréscimo de  $u(\omega, T, M)$  que, conseqüentemente, provoca uma diminuição da densidade de energia dentro da cavidade. Isto pode ser visto observando que a área sob as curvas na Fig. (5.1) diminui para valores de  $M$  crescentes. Este fato já foi notado nas primeiras correções de massa do capítulo anterior, porém agora, podemos explorá-lo com maiores detalhes e com valores de massa arbitrários. Devemos também notar em (5.6) que o menor valor possível de frequência é  $\omega = \frac{Mc^2}{\hbar}$ , o qual é obtido fazendo  $p = 0$  na equação (5.2), sendo que neste valor temos  $u(\omega, T, M) = 0$ .

<sup>2</sup>Notemos, na substituição das variáveis, que em (5.5) a integração é feita sobre  $\omega$ .

O número total de bósons na cavidade por unidade de frequência, à temperatura  $T$  e massa  $M$ , pode ser calculado através de (3.37), de forma análoga ao que fizemos para a densidade de energia. Primeiramente tomamos

$$\frac{\mathcal{N}}{V} = \int_{\frac{Mc^2}{\hbar}}^{\infty} d\omega \frac{1}{2\pi^2 c^3} \frac{\omega^2}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \left[ 1 - \left( \frac{Mc^2}{\hbar\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} := \int_{\frac{Mc^2}{\hbar}}^{\infty} d\omega n(\omega, T, M), \quad (5.10)$$

e por esta definição chegamos a

$$n(\omega, T, M) = \frac{1}{2\pi^2 c^3} \frac{\omega^2}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \left[ 1 - \left( \frac{Mc^2}{\hbar\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.11)$$

Este resultado nos possibilita escrever (5.6) na forma

$$u(\omega, T, M) = n(\omega, T, M)\hbar\omega, \quad (5.12)$$

a partir da qual, podemos interpretar o porquê da massa provocar uma diminuição da densidade de energia. Vemos de (5.11) e (5.12) que fixado os valores de temperatura e frequência a energia dos bósons permanece constante e igual a  $\hbar\omega$  para quaisquer valores da massa  $M$ , enquanto o número desses bósons na particular frequência  $\omega$  diminui para valores crescentes de suas massas. Isso nos diz que o decréscimo de  $u(\omega, T, M)$  em função do aumento da massa dos bósons para  $\omega$  e  $T$  fixos, é devido à diminuição do número de bósons que se encontrarão com frequência  $\omega$  e energia  $\hbar\omega$  para a temperatura  $T$ , o que é facilmente visto em (5.12).

## 5.1 As leis de Rayleigh-Jeans e Wien com massa

Para uma análise mais profunda de (5.6), como também, uma melhor compreensão das novas características do sistema estimuladas pela consideração de uma massa não nula para os bósons, se faz necessária a obtenção das leis de Rayleigh-Jeans e Wien, neste contexto. Essas leis nos darão informações sobre a forma de  $u(\omega, T, M)$  no limite de baixas e altas frequências, respectivamente. Além do mais, neste último caso, poderemos derivar o que chamaremos de uma lei de deslocamento de Wien para o caso com massa, a qual nos dirá como a frequência de máxima emissão do sistema se modifica perante bósons de massa não nula.

Iniciemos a partir da distribuição espectral da densidade de energia na cavidade para uma temperatura constante dada por (5.9), onde devemos lembrar que (vide (5.7))

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{Mc^2}{\hbar\omega}. \quad (5.13)$$

Tomando o limite de baixas frequências  $x \ll 1$  em (5.9), e notando que

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{Mc^2}{\hbar\omega} \leq 1, \quad (5.14)$$

devemos ter, também,  $\alpha \ll 1$ . No entanto, a exponencial no denominador de (5.9) pode ser expandida, e ficamos com

$$u' \simeq x^2 \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.15)$$

Esta é a lei da radiação de Rayleigh-Jeans para o caso com massa, na qual, fazendo  $M = 0$  teremos  $u' \simeq x^2$ , que recupera o resultado usual do eletromagnetismo (fótons) [20].

A raiz quadrada em (5.15) é uma correção ao coeficiente angular da curva  $u' = x^2$ , que como veremos a seguir, vai a 1 quando a razão entre  $\alpha$  e  $x$  é muito pequena ( $M \rightarrow 0$ ), fazendo com que  $u'$  se comporte rapidamente como uma função quadrática. Por outro lado, quando esta razão tende à unidade, o radicando em (5.15) aproxima-se de zero e  $u'$  demorará mais a exibir um comportamento quadrático.

Desde que o valor mínimo de  $x$  é  $x = \alpha$ , podemos fazer  $x = \alpha + \epsilon$  com  $\epsilon \geq 0$ . Assim, (5.15) torna-se

$$u' = (\alpha + \epsilon)(2\alpha\epsilon + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.16)$$

Se  $\alpha$  é tão pequeno tal que  $\frac{\alpha}{\epsilon} \ll 1$ , a última igualdade pode ser expandida em termos desta razão, nos levando a

$$u' \simeq \epsilon^2 \left( 1 + 2\frac{\alpha}{\epsilon} + \frac{\alpha^2}{\epsilon^2} \right), \quad (5.17)$$

de onde podemos tomar, para  $\alpha \rightarrow 0$ ,

$$u' \simeq \epsilon^2. \quad (5.18)$$

Logo, como já havíamos comentado anteriormente,  $u'$  se comportará como uma função quadrática de  $\epsilon$  no limite em que a massa torna-se nula.

No entanto, se  $\alpha$  é tal que  $\frac{\epsilon}{\alpha} \ll 1$ , (5.16) pode ser agora expandida em termos desta nova razão, nos dando

$$u' \simeq \alpha \sqrt{2\alpha\epsilon} \left( 1 + \frac{5}{4} \frac{\epsilon}{\alpha} + \frac{1}{4} \frac{\epsilon^2}{\alpha^2} \right), \quad (5.19)$$

que em boa aproximação pode ser dada como

$$u' \simeq \alpha \sqrt{2\alpha\epsilon}. \quad (5.20)$$

Vemos então que, para massas não nulas, a curva não exibirá forma quadrática, mas sim uma raiz quadrada. Este comportamento pode ser observado na Fig. (5.2), que mostra como o gráfico de  $u'$  se desvia de uma curva quadrática em função da massa.

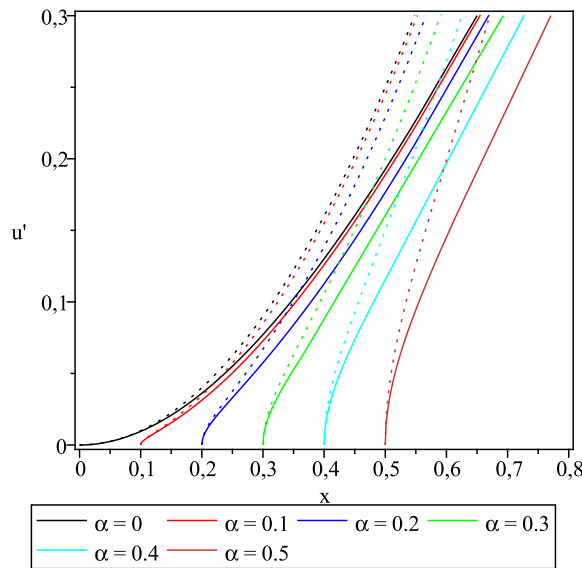


Figura 5.2: Comportamento da distribuição espectral da densidade de energia no interior da cavidade a baixas frequências, temperatura constante e diferentes valores para a massa dos bósons. As curvas sólidas representam o comportamento exato previsto pela teoria, que nas frequências consideradas se aproximam da lei de Rayleigh-Jeans generalizada para massa não nula, dada pelas curvas de mesma cor em pontilhado.

Tomemos agora, o limite de  $x \gg 1$  e  $\frac{\alpha}{x} \ll 1$ , ou seja, altas frequências e massas pequenas. Neste limite a exponencial no denominador de (5.9) pode ser feita muito maior que a unidade, enquanto os demais termos podem ser expandidos em ordens da razão entre  $\alpha$  e  $x$ , nos levando a

$$u' \simeq x^3 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{x} \right)^2 \right] e^{-x}. \quad (5.21)$$

Esta é a lei da radiação de Wien para bósons com massa, que nos dá uma generalização da fórmula proposta por Wien em 1896 descrevendo a radiação de cavidade para o campo de Maxwell [20], a qual recuperamos a partir de (5.21) fazendo  $M = 0$ , i.e.,  $\alpha = 0$ .

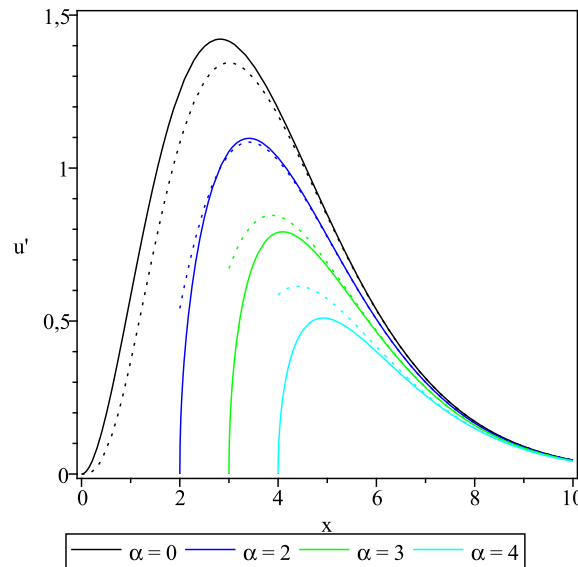


Figura 5.3: Limite de altas frequências para a distribuição espectral da densidade de energia no interior da cavidade à temperatura constante e diversos valores de massa para os bósons. As curvas sólidas são as previsões exatas da teoria com massa e são bem descritas, no limite de frequências considerado, pela lei de Wien generalizada para massa não nula (curvas pontilhadas com mesma cor).

Como pode ser visto na Fig. (5.3), a lei de Wien (5.21) descreve em boa aproximação não apenas a distribuição espectral da radiação dentro da cavidade para altas frequências, mas também os pontos em que esta distribuição atinge um máximo. Estes pontos são de particular importância, porque eles indicam para um dado valor de massa e temperatura, a frequência de máxima emissão do sistema ( $\omega_{max}$ ). Logo, conhecendo como esses pontos se comportam, podemos determinar o que as mudanças na temperatura e na massa causarão na frequência de máxima emissão, inclusive obter qualquer uma dessas três quantidades a partir da medida das outras duas.

Para obtermos a descrição dos pontos de máximo a partir de lei de Wien, tomamos em (5.21)

$$\frac{du'}{dx} = 0. \quad (5.22)$$

Desta igualdade somos levados a

$$x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 x \left( \frac{1}{x} - 1 \right) = 0, \quad (5.23)$$

mas desde que  $x \gg 1$ , podemos fazer

$$x^2 - 3x - \frac{1}{2}\alpha^2 = 0. \quad (5.24)$$

Das duas soluções da última equação, apenas uma representa a lei de deslocamento de Wien para o caso de massa, a saber

$$x = \frac{3 + \sqrt{9 + 2\alpha^2}}{2}. \quad (5.25)$$

Fazendo  $\alpha = 0$  nesta solução obtemos

$$x = 3, \quad (5.26)$$

que recupera a lei de deslocamento de Wien para o eletromagnetismo [29, 32], o que não ocorre para a outra solução.

Para uma melhor comparação entre os dois casos da lei de deslocamento de Wien, massa nula e massa não nula, reescrevemos (5.25) na forma

$$x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{2\alpha^2}{9}}, \quad (5.27)$$

e tomamos  $M$  tão pequeno, tal que  $\alpha^2 \ll 1$ . Assim, por uma expansão, temos

$$x = 3 + \frac{\alpha^2}{6}, \quad (5.28)$$

que nos permite interpretar o comportamento de  $\omega_{max}$  na presença de massa.

Como sabemos do eletromagnetismo, a lei de deslocamento de Wien nos diz que a frequência de máxima emissão do sistema cresce proporcionalmente à temperatura [32]. Isso pode ser visto substituindo  $x$  a partir de (5.7) em (5.26) para obtermos

$$\hbar\omega_{max}^{(0)} = 3k_B T, \quad (5.29)$$

onde  $\omega_{max}^{(0)}$  é assim nomeada para evidenciar que esta é a frequência de máxima emissão para o sistema sem massa. O resultado similar a (5.29) para o caso com massa é obtido escrevendo (5.28) em termos de  $x$  e  $\alpha$  dados por (5.7), o que nos leva a

$$\hbar\omega_{max} = \left[ 3 + \frac{1}{6} \left( \frac{Mc^2}{k_B T} \right)^2 \right] k_B T. \quad (5.30)$$

Vemos desta equação que a frequência de máxima emissão do sistema com massa não nula cresce mais rapidamente que no caso de massa nula, considerando um mesmo aumento de temperatura. A razão para isto pode ser observada a partir de (5.11) e (5.12), onde vemos pela primeira equação que fixado os valores de frequência e temperatura o sistema com massa não nula possuirá um número de bósons  $n(\omega, T, M)$  inferior a  $n(\omega, T)$  para o sistema com massa nula. No entanto, tomando o mesmo valor de  $u(\omega, T, M)$  e de  $T$  para ambos os sistemas, (5.12) nos diz que a frequência  $\omega$  dos bósons de massa  $M$  é superior à frequência dos bósons de massa nula, pois  $n(\omega, T, M)$  é menor para o caso com massa.

As conclusões anteriores podem ser facilmente observadas na Fig. (5.3), onde vemos que a curva descrevendo a distribuição espectral da radiação dentro da cavidade desloca-se, juntamente a seu ponto de máximo, no sentido positivo de  $x$  para valores crescentes da massa. Assim, a frequência de máxima emissão cresce, enquanto  $T$  é mantida constante. Por outro lado, ao se deslocar para a direita a curva reduz a área compreendida entre ela e o eixo  $x$ , levando à diminuição da densidade de energia. Exploraremos ainda mais esses comportamentos na próxima seção, quando calcularmos o fluxo de energia que emana da cavidade por um furo em sua superfície.

## 5.2 Intensidade

Até aqui, desenvolvemos o estudo do campo escalar com massa confinado a uma cavidade de volume  $V$  e temperatura  $T$  finita. Sabemos que, dada esta temperatura, a cavidade é preenchida com bósons de momento  $\mathbf{p}$ , massa  $M$  e energia  $\varepsilon(p) = \sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4}$ , os quais exercem uma pressão  $P$  sobre as paredes da mesma, devido ao fluxo de energia que transportam em todas as direções. Sabemos também descrever toda a termodinâmica dessa radiação escalar dentro da cavidade, inclusive, como se dá a distribuição espectral de sua energia.

Conhecido o comportamento da radiação escalar no interior da cavidade, podemos agora nos perguntar como essa radiação escaparia através de um furo em uma das paredes. Este questionamento se faz de grande importância, pois ao respondê-lo saberemos como uma medida experimental detectaria nossas previsões para a radiação no interior da cavidade. Além do mais, por meio dessa resposta poderemos obter o que seria uma lei de



Stefan-Boltzmann para o campo escalar com massa e compará-la com sua similar, e bem conhecida, para o campo eletromagnético [18, 19, 20].

Pelas mesmas considerações cinéticas feitas na última seção do Capítulo 3, as quais nos permitiram calcular a pressão nas paredes da cavidade, podemos calcular a intensidade da radiação emitida através de um furo em uma delas. No cálculo da pressão, o que fazíamos era considerar as paredes perfeitamente refletoras de forma que, ao se colidirem com elas, os bósons viajando com momento  $p_1$  e velocidade  $v_1$  perpendiculares a uma parede retornavam e sofriam uma variação do momento  $p_1$  igual ao dobro do valor que possuíam antes da colisão. Todavia, para o cálculo da intensidade, o que fazemos é considerar que os bósons viajando com momento  $\mathbf{p}$  e energia  $\varepsilon$ , atravessam uma área  $A$  da cavidade transportando energia para seu exterior. Este fluxo de energia tem uma distribuição angular, de forma que integrando-o em um certo ângulo sólido, encontramos a intensidade total de energia emitida através da área  $A$  na unidade de tempo.

Consideremos em primeiro lugar, uma parede perpendicular à direção  $z$  de forma que apenas bósons com velocidade  $v_z > 0$  cheguem até ela. Estamos interessados em saber a quantidade de energia irradiada por segundo, e por unidade de área de um furo nesta parede, o que pode ser visto como sendo o número de bósons que atravessam a área  $A$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , vezes a energia que cada bóson transporta, dividido por  $\Delta t.A$  para obtermos energia por unidade de tempo por unidade de área.

A densidade do número de bósons dentro da cavidade é descrita pela função distribuição dada em (3.74), que vezes o volume compreendido pelo prisma de área da base  $A$  e altura  $v_z.\Delta t$ , nos dá o número de bósons que atravessarão a parede no intervalo de tempo  $\Delta t$ . Multiplicando este resultado pela energia  $\varepsilon(p) = \sqrt{p^2c^2 + M^2c^4}$  que cada bóson transporta, somos levados a

$$dI = \frac{dp^3 f(\mathbf{p}) \varepsilon.v_z \Delta t.A}{h^3 \Delta t.A} \quad \text{com } v_z > 0, \quad (5.31)$$

que dá a energia irradiada por unidade de tempo, na unidade de área do furo.

Pela relação relativística (3.79), escrevemos

$$v_z = v \cos \theta = \frac{pc^2 \cos \theta}{\varepsilon}, \quad (5.32)$$

lembrando que

$$v_z > 0 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (5.33)$$

Isso nos permite integrar (5.31) nos momentos,

$$I(T, M) = \int_{p_z > 0}^{\infty} \frac{dp^3}{h^3} f(\mathbf{p}) p c^2 \cos \theta, \quad (5.34)$$

que em coordenadas esféricas nos leva a

$$I(T, M) = \int_0^{\infty} \frac{dp}{h^3} p^3 c^2 f(\mathbf{p}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos \theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi, \quad (5.35)$$

onde a variação de  $\theta$  é dada segundo (5.33).

No caso de massa nula, a integral em  $p$  na expressão anterior, pode ser diretamente escrita em termos da densidade de energia [18], porém em nosso contexto isso não se faz possível. Para realizarmos tal integração de uma forma que possibilite sua comparação com o caso sem massa, é interessante calcularmos a quantidade  $\langle \varepsilon v \rangle$ , nos moldes de (3.75). Temos então

$$\langle \varepsilon v \rangle = \frac{V}{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^3}{h^3} \varepsilon v f(\mathbf{p}) = \frac{V}{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^3}{h^3} p c^2 f(\mathbf{p}), \quad (5.36)$$

onde usamos (3.79). Passando para coordenadas esféricas e multiplicando ambos os lados da última equação por  $\frac{\mathcal{N}}{V}$ , ficamos com

$$\frac{\mathcal{N}}{V} \langle \varepsilon v \rangle = \int_0^{\infty} \frac{dp^3}{h^3} p^3 c^2 f(\mathbf{p}) \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi. \quad (5.37)$$

Comparando esta expressão com (5.35), vemos que

$$I(T, M) = \frac{\mathcal{N}}{V} \langle \varepsilon v \rangle \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos \theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi}{\int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi} \quad (5.38)$$

e, finalmente, chegamos ao resultado

$$I(T, M) = \frac{1}{4} \frac{\mathcal{N}}{V} \langle \varepsilon v \rangle. \quad (5.39)$$

Para verificarmos a validade de (5.39), tomamos o regime de  $M = 0$  e assim,  $v = c$ . Logo, neste regime,

$$I(T, M) = I(T) = \frac{1}{4} \frac{\mathcal{N}}{V} \langle \varepsilon c \rangle = \frac{c}{4} \frac{\mathcal{N}}{V} \langle \varepsilon \rangle, \quad (5.40)$$

que por (3.77) para quatro dimensões nos dá

$$I(T) = \frac{1}{4} \frac{U}{V} c, \quad (5.41)$$

recuperando o resultado de Planck para bósons de massa nula (fótons) [20].

A partir de (5.36) escrevemos (5.39) na forma

$$I(T, M) = \frac{c^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^3}{h^3} \frac{p}{e^{\beta\varepsilon} - 1}. \quad (5.42)$$

Passando esta integração para coordenadas esféricas, podemos resolvê-la nos moldes do apêndice (A), escrevendo-a como a derivada parcial de uma integral identificável com as funções modificadas de Bessel e, então, usando as propriedades das derivadas da  $K_\nu(z)$  em [21, 23], chegando a

$$I(T, M) = \frac{M^{\frac{5}{2}} c^3}{2^{\frac{3}{2}} \pi^{\frac{5}{2}} h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta n)^{\frac{3}{2}}} K_{\frac{5}{2}}(\beta n M c^2). \quad (5.43)$$

O resultado acima pode ser verificado no limite de massa nula por, primeiramente, tomando a aproximação (4.9) em (5.43), o que nos leva à primeira correção de massa na intensidade, dada por

$$I(T, M) = \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{120 h^3 c^2} - \frac{M^2 c^2 (k_B T)^2}{48 h^3}. \quad (5.44)$$

Esta é a generalização da lei de Stefan-Boltzmann em primeira correção de massa, que como pode ser facilmente visto recupera, no caso de massa nula, a lei de Stefan-Boltzmann para a intensidade da radiação eletromagnética emitida através de um furo na cavidade, a menos do fator 2 devido ao spin <sup>3</sup> [18, 20].

Como vemos na expressão (5.44), a presença da massa diminui a intensidade da radiação emitida pela cavidade. Em termos de (4.12), esta expressão pode ser escrita como

$$I(T, M) = \frac{c}{4} \left[ \frac{U}{V} - \frac{M^2 c (k_B T)^2}{24 h^3} \right], \quad (5.45)$$

que é uma generalização ao caso de Planck (5.41), citado anteriormente. Este resultado nos diz que, como a densidade de energia decresce com a massa,  $I(T, M)$  decresce de forma mais acentuada. Isso se deve ao fato que a massa além de diminuir  $\frac{U}{V}$  também diminui a velocidade dos bósons, pois para massas diferentes de zero, estes não podem mais se mover à velocidade da luz, segundo a relatividade especial. Exploraremos mais sobre isso adiante, quando encontrarmos a distribuição espectral da intensidade.

Escrevendo (5.42) em coordenadas esféricas, temos

$$I(T, M) = \frac{\pi c^2}{h^3} \int_0^{\infty} dp \frac{p^3}{e^{\beta \sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4}} - 1}, \quad (5.46)$$

---

<sup>3</sup>Na primeira referência citada há um possível erro de digitação no resultado, pois  $c$  aparece elevado ao cubo no denominador.

que a partir de (5.2) e (5.3) pode ser dada em termos de uma integração na frequência  $\omega$  da forma

$$I(T, M) = \int_{\frac{Mc^2}{\hbar}}^{\infty} d\omega \frac{\hbar}{8\pi^2 c^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \left[ 1 - \left( \frac{Mc^2}{\hbar\omega} \right)^2 \right] := \int_{\frac{Mc^2}{\hbar}}^{\infty} d\omega I(\omega, T, M), \quad (5.47)$$

onde definimos

$$I(\omega, T, M) = \frac{\hbar}{8\pi^2 c^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \left[ 1 - \left( \frac{Mc^2}{\hbar\omega} \right)^2 \right], \quad (5.48)$$

como a potência irradiada por unidade de frequência, na unidade de área do furo, para bósons de massa  $M$  à temperatura  $T$ .

Podemos ainda, escrever  $I(\omega, T, M)$  na forma

$$I(\omega, T, M) = \frac{c}{4} \left\{ \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \left[ 1 - \left( \frac{Mc^2}{\hbar\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \left[ 1 - \left( \frac{Mc^2}{\hbar\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.49)$$

onde a partir de (5.6), identificamos a expressão entre chaves como sendo  $u(\omega, T, M)$ . Por outro lado, fazendo uso de (5.2), podemos escrever

$$v = c \left( 1 - \frac{M^2 c^4}{\hbar^2 \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\hbar\omega} (\hbar^2 \omega^2 - M^2 c^4)^{\frac{1}{2}} = \frac{pc^2}{\hbar\omega} = \frac{pc^2}{\varepsilon}, \quad (5.50)$$

que de (3.79) nada mais é que a expressão da velocidade  $v$  para o bóson de massa  $M$  associado à onda estacionária de frequência  $\omega$ . E chegamos assim a

$$I(\omega, T, M) = \frac{v}{4} u, \quad (5.51)$$

análoga à forma funcional de  $I(\omega, T)$  para o campo eletromagnético [18], porém aqui a velocidade não é  $c$ , mas  $v \leq c$ .

Levantamos aqui uma discussão a respeito da velocidade  $v$  em (5.50), a qual pode ser obtida a partir da solução da equação de Klein-Gordon (3.1) em termos de um pacote de ondas, que é uma superposição de ondas planas na forma

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\kappa) e^{i(\kappa x - \omega(\kappa)t)} d\kappa, \quad (5.52)$$

onde por simplicidade consideramos um espaço-tempo 2-dimensional. Por esta solução temos que  $\omega(\kappa)$  e  $\kappa$  satisfazem à seguinte equação,

$$\omega^2(\kappa) = \kappa^2 c^2 + \frac{M^2 c^4}{\hbar^2}, \quad (5.53)$$

da qual, considerando apenas os valores positivos de  $\omega(\kappa)$  para exemplificar (sendo que valores negativos de  $\omega(\kappa)$  são também possíveis na solução da equação de Klein-Gordon [10]), deriva-se as expressões para a velocidade de fase  $v_f$  e de grupo  $v_g$  relacionadas à solução (5.52), dadas por [16]

$$v_f = \frac{\omega(\kappa)}{\kappa} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{M^2 c^4}{\hbar^2 \omega^2}}} \quad (5.54)$$

e

$$v_g = \frac{d\omega(\kappa)}{d\kappa} = c \sqrt{1 - \frac{M^2 c^4}{\hbar^2 \omega^2}}. \quad (5.55)$$

Como vemos por esta última expressão, a velocidade  $v$  em (5.50) é igual a  $v_g$  em (5.55), dando a velocidade na qual o pacote de ondas (5.52) se move (vide Problema 8.13 da Ref. [13]). Por outro lado,  $v_f$  descreve a velocidade na qual cada onda plana que compõe o pacote de ondas (5.52) se move, e como podemos notar em (5.54)  $v_f > c$  para massas diferentes de zero. Enquanto no eletromagnetismo o fóton é o quantum do campo que viaja com velocidade  $c$ , sendo esta a velocidade das ondas eletromagnéticas planas soluções das equações de Maxwell [16], no campo escalar com massa o quantum do campo é um bóson que viaja com velocidade  $v_g$ , que é a velocidade do pacote de ondas composto pela superposição de ondas planas (soluções da equação de Klein-Gordon), as quais viajam com velocidade  $v_f \neq v_g$ .

Como visto pela relação relativística (5.50), os bósons com massa diferente de zero possuem uma velocidade menor que a velocidade da luz. Diante deste fato, podemos nos perguntar como se comporta a velocidade desses bósons no interior da cavidade. Para responder a isso, calculemos a partir da função distribuição definida em (3.74), a média do módulo da velocidade dos bósons, o que pode ser feito similarmente a (3.75), nos levando a

$$\langle v \rangle = \frac{V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^{N-1}}{h^{N-1}} v f(\mathbf{p})}{V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^{N-1}}{h^{N-1}} f(\mathbf{p})} = \frac{V}{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^{N-1}}{h^{N-1}} v f(\mathbf{p}). \quad (5.56)$$

De fato  $\langle v \rangle$  é uma média sobre a velocidade de grupo dos pacotes de onda no interior da cavidade. Passando esta integração para coordenadas esféricas com a ajuda de (3.79) e explicitando  $f(\mathbf{p})$  dada em (3.74), ficamos com a seguinte integral no caso particular de  $N = 4$ ,

$$\langle v \rangle = \frac{4\pi c^2 V}{h^3 \mathcal{N}} \int_0^{\infty} dp p^3 \frac{\left( \sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4} \right)^{-1}}{e^{\beta \sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4}} - 1}, \quad (5.57)$$

que pode ser resolvida nos moldes do apêndice (A), resultando em

$$\langle v \rangle = \frac{2^{\frac{7}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} M^{\frac{3}{2}} c V}{h^3 \mathcal{N}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta j)^{\frac{3}{2}}} K_{\frac{3}{2}}(\beta j M c^2). \quad (5.58)$$

Em quatro dimensões, o valor de  $\frac{\mathcal{N}}{V}$  é dado por (4.2) e , finalmente, temos

$$\langle v \rangle = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi \beta M}} \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\frac{3}{2}}} K_{\frac{3}{2}}(\beta j M c^2)}{\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} K_2(\beta l M c^2)}. \quad (5.59)$$

A expressão (5.59), nos diz de forma geral como se comporta, em módulo, a velocidade média dos bósons na cavidade em função da temperatura e da massa. Antes mesmo de analisarmos os limites assintóticos desta expressão pelas aproximações das funções modificadas de Bessel, podemos extrair parte de seu conteúdo físico por meio de sua representação gráfica, dada na Fig. (5.4). Vemos facilmente nesta figura, que para massas grandes, os bósons atingirão uma velocidade próxima de  $c$  apenas em altas temperaturas, enquanto que para massa nula, à qualquer temperatura, eles se movem com a velocidade da luz. Isto pode ser percebido tomando a aproximação (3.55) em (5.59), que nos levará a  $\langle v \rangle = c$  no limite de massa nula.

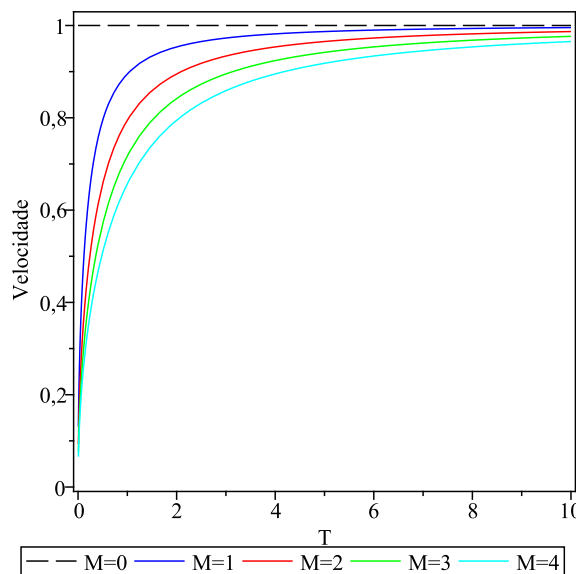


Figura 5.4: Velocidade dos bósons na cavidade para massas diferentes de zero. As constantes  $\hbar$ ,  $k_B$  e  $c$  foram tomadas iguais a 1.

Para observarmos as implicações impostas pelo fato da massa afetar a velocidade dos bósons, escrevemos (5.48) em termos das variáveis (5.7),

$$I(\omega, T, M) = \frac{(k_B T)^4}{8\pi^2 c^2 \hbar^3} \frac{x^3}{e^x - 1} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{x} \right)^2 \right], \quad (5.60)$$

tal que para uma temperatura constante, podemos definir

$$I' := \frac{x^3}{e^x - 1} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{x} \right)^2 \right]. \quad (5.61)$$

Sendo o comportamento gráfico desta quantidade em relação a  $u'$  definido em (5.9), dado na Fig. (5.5) abaixo.

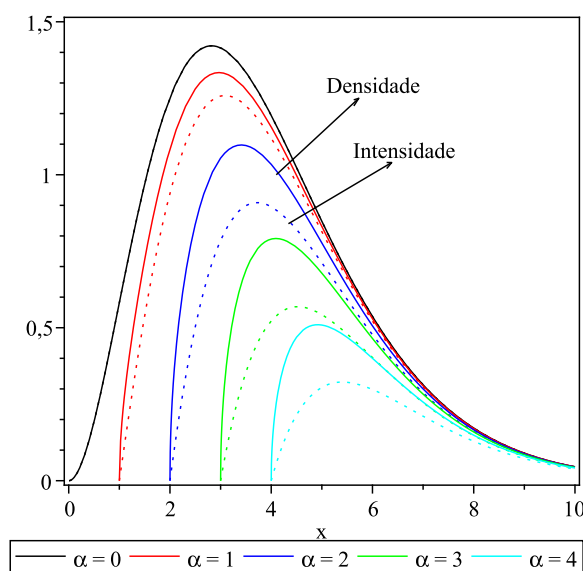


Figura 5.5: Distribuição espectral da densidade de energia na cavidade e da intensidade de energia emitida por unidade de área na unidade de tempo para seu exterior, a uma temperatura fixa, e para bósons de massas diferentes. As curvas pontilhadas mostram a intensidade de energia emitida pela cavidade em relação à densidade de energia no seu interior, curvas sólidas de mesma cor.

É importante observarmos na Fig. (5.5) que, enquanto no caso de massa nula os gráficos da distribuição espectral de  $I(\omega, T)$  e  $u(\omega, T)$  possuem a mesma forma, porque essas quantidades diferem apenas por uma constante como pode ser visto fazendo  $v = c$  em (5.51), no caso de massa não nula isso não ocorrerá. Pois para um valor fixo de frequência e temperatura  $I(\omega, T, M)$  decresce mais rapidamente que  $u(\omega, T, M)$  para valores crescentes da massa em função da diminuição da velocidade do bósons, que agora, como pode ser visto em (5.50), não é mais a velocidade da luz. Isso nos diz que, em uma medida experimental

da intensidade de energia emitida por um corpo negro de bósons com massa, a curva de distribuição espectral obtida para a intensidade não será a mesma da distribuição espectral da densidade de energia no interior da cavidade a menos de uma constante, como é para o eletromagnetismo.

Chamamos a atenção aqui, para um erro cometido na Ref. [33]. No artigo intitulado “Photon mass and blackbody radiation” o autor afirma que a radiância  $\mathcal{R}$ , que aqui chamamos de intensidade  $I$ , é dada por

$$\mathcal{R} = \frac{c}{4}u, \quad (5.62)$$

onde, para o autor,  $u$  é a densidade de energia  $u = \frac{U}{V}$ . Em seguida, ele define a distribuição espectral a partir da radiância de maneira similar à que definimos  $I(\omega, T, M)$  em (5.47), da forma

$$\rho(\nu, m, T) = \rho_P(\nu, T) \left[ 1 - \left( \frac{mc^2}{h\nu} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.63)$$

que deve então corresponder a (5.49) com  $\rho_P(\nu, T)$  sendo a distribuição espectral da radiância no caso de Planck. O resultado dele (em [33]) em termos das nossas variáveis nos leva a

$$\rho(\nu, m, T) = \frac{c}{4} \left[ \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \right] \left[ 1 - \left( \frac{mc^2}{\hbar\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.64)$$

onde  $\omega = 2\pi\nu$  e  $h = 2\pi\hbar$ , sendo  $h\nu$  definido igualmente a  $\hbar\omega$  em (3.12).

Como o resultado acima no referido artigo é calculado para o campo eletromagnético, devemos recuperá-lo multiplicando o nosso em (5.49) por um fator 2, que como já sabemos corresponde à degenerescência de spin. Fica então claro que ao multiplicarmos (5.49) por dois não recuperamos  $\rho(\nu, m, T)$  dado em [33], o que é facilmente visto por comparando (5.49) e (5.64). A incoerência entre nosso resultado e o apresentado na equação (2) de [33] pelo autor, se deve à incorreta consideração deste em tomar a radiância como apresentada em (5.62). Assim procedendo, o que o autor afirma é que a velocidade dos fótons, agora com massa, ainda é  $c$ . Além de estar em desacordo com o nosso resultado (5.51), entra em contradição com a teoria da relatividade especial, como pode ser visto em (5.50).

Além do mais, definindo a radiância na forma (5.62), o autor em [33] considera que os fótons com massa transportarão energia à velocidade da luz em todas as direções. Assim, em um cálculo da pressão por considerações cinéticas, como fizemos na seção final do



Capítulo 3, deveríamos levar em conta uma velocidade  $c$  para os bósons, e fica então evidente que o resultado que obteríamos para a pressão dessa forma não seria o mesmo que obtemos calculando-a através de sua definição no ensemble canônico. E ainda mais, ao considerar a radiância na forma (5.62), o autor está a afirmar que, similarmente ao caso de massa nula, a distribuição espectral da densidade de energia e da radiância diferem-se por uma constante igual a  $\frac{c}{4}$ , como visto em (5.62). Logo, pelas considerações do autor em [33], as curvas para a distribuição espectral da densidade de energia e da radiância se comportariam de forma idêntica a menos de uma constante, para quaisquer valores de massa. Comportamento este que não se verifica na Fig. (5.5).

O autor ainda apresenta na equação (3) de seu artigo, a lei de Stefan-Boltzmann generalizada em primeira correção de massa, a qual pode ser escrita na forma

$$\mathcal{R} = \frac{\pi^2(k_B T)^4}{60\hbar^3 c^2} - \frac{m^2 c^2 (k_B T)^2}{48\hbar^3}. \quad (5.65)$$

Este resultado não é recuperado multiplicando por 2 (o fator de degenerescência de spin) nosso resultado para  $I(T, M)$  em (5.44), dado por

$$I(T, M) = \frac{\pi^2(k_B T)^4}{120\hbar^3 c^2} - \frac{M^2 c^2 (k_B T)^2}{48\hbar^3}. \quad (5.66)$$

Ou seja, ao considerar a velocidade dos bósons com massa igual a velocidade da luz, o autor de [33] obtém de forma incorreta a primeira correção de massa para a lei de Stefan-Boltzmann.

Retornemos à nossa discussão sobre a intensidade de energia emitida pela cavidade e procuremos por um exemplo, pelo menos de âmbito esquemático, que nos possibilite melhor compreender o que a massa causaria a um objeto físico real descrito pelos trabalhos de Planck para a radiação de corpo negro eletromagnética. Está claro que, para este fim, faremos uma analogia entre luz (radiação eletromagnética) e radiação escalar. Notamos contudo que a radiação escalar não nos proporciona um estímulo visual de cor e nem possuímos informações acerca de sua interação com a matéria.

Como podemos ver pela Fig. (5.5), a intensidade de energia emitida por um corpo negro decresce para massas progressivamente maiores, enquanto sua frequência de máxima emissão, que caracteriza sua cor, se desloca para valores mais altos. Este comportamento se dá de forma similar à densidade de energia no interior da cavidade, porém, de forma

mais acentuada devido à diminuição da velocidade dos bósons ao ganharem uma massa  $M$ . Isso nos diz que dados dois corpos negros com mesma temperatura, o que possui bósons com massa será detectado, experimentalmente, emitindo energia em uma frequência de máxima emissão superior àquela que se encontra o corpo negro de bósons sem massa. No entanto este, emite maior quantidade de energia na unidade de tempo, o que pode ser visto pela diminuição da área sob as curvas descrevendo a intensidade na Fig. (5.5) para valores crescentes da massa.

Dizer que o corpo negro de bósons com massa emite energia com uma intensidade mais baixa, significa que, visualmente, o corpo brilha menos. Tomemos então, um objeto físico descrito em boa aproximação como um corpo negro, por exemplo, o Sol. Como verificado experimentalmente, o Sol é um corpo negro real, ou seja, não perfeito, que possui uma frequência de máxima emissão na faixa do visível. Como podemos notar em um dia de céu aberto, a alta intensidade de energia emitida por ele em direção à Terra (brilho), quase não nos permiti olhá-lo diretamente por muito tempo. Agora, imaginemos que por um certo mecanismo os fótons adquirissem massa. O que aconteceria é que a intensidade da radiação emitida pelo Sol, à mesma temperatura, se comportaria segundo a Fig. (5.5). Ele teria sua frequência de máxima emissão elevada, possuindo assim uma cor, digamos, meio azulada, contudo, em um dia de céu aberto, nós poderíamos olhá-lo sem nenhum ofuscamento de nossa visão, porque agora ele emitiria uma intensidade de energia menor em nossa direção.

Com essa abordagem sobre o Sol, podemos inclusive nos perguntar qual deveria ser a temperatura deste para possuir a mesma frequência de máxima emissão (coloração), que possuiria um Sol no caso de bósons com massa. A resposta a este questionamento é dada através da Fig. (5.6), onde vemos que no caso de bósons sem massa a temperatura deve ser cerca de 32% maior, para que os dois sóis possuam a mesma frequência de máxima emissão. Contudo, o Sol que emite bósons sem massa ejeta uma intensidade de energia para suas vizinhanças muito superior do que aquele de bósons com massa. Este fato nos remete à conclusão que, se o fóton possuísse massa, as estrelas seriam mais difíceis de serem detectadas em função da baixa intensidade na qual emitiriam, apesar de a fazerem em frequências cada vez mais altas, quão maior fosse a massa do fóton.

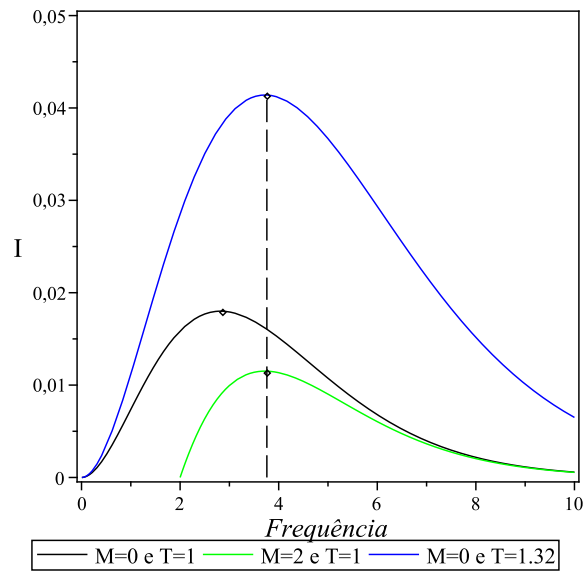


Figura 5.6: Distribuição da intensidade para o espectro de corpo negro do Sol. A curva em negrito representa a situação real, em uma escala onde a temperatura do Sol é 1. Enquanto a curva em azul representa o comportamento espectral da intensidade em uma temperatura na qual o Sol possuiria a frequência de máxima emissão igual a de uma estrela similar, mas em uma situação onde os bósons possuísem uma massa não nula, curva em verde. As constantes  $\hbar$ ,  $c$  e  $k_B$  foram feitas iguais a unidade.

# Capítulo 6

## Conclusões e perspectivas

O presente trabalho investigou a radiação de corpo negro de um campo escalar com massa em dimensões arbitrárias, confinado a uma cavidade de volume  $V$ . Tal investigação teve por objetivo apresentar as quantidades termodinâmicas em dimensões e massas arbitrárias, e no caso particular de quatro dimensões, promover a comparação entre os nossos resultados e os de Planck para a radiação de corpo negro do campo eletromagnético (bósons de massa nula). Esta comparação é feita levando-se em conta que estes resultados devem ser recuperados no limite de massa nula, a menos do fator de degenerescência de spin.

Inicialmente nos ocupamos da dinâmica do campo escalar, onde a partir da equação de movimento para uma partícula se movendo sujeita a este campo, cogitamos a possibilidade de descrever por esta dinâmica escalar, a gravitação no contexto da relatividade especial, tendo como carga a massa, responsável pelo acoplamento entre as partículas com o campo em questão [1]. Tal perspectiva não se confirmou, e concluímos, por mais de um teste, que a gravitação não pode ser descrita no contexto da relatividade especial pela dinâmica de um campo escalar [1, 13]. No entanto, a tentativa de inserirmos a gravitação no contexto relativístico por um campo escalar nos mostrou o quão intimamente ligadas podem estar a atração gravitacional e a geometria do espaço-tempo [1].

Estudamos o campo dentro da cavidade em termos de infinitos osciladores, que quantizados, nos deram uma descrição quântica do campo. Esta descrição nos permitiu o uso do *ensemble* canônico da mecânica estatística, a partir do qual concluímos que nosso

sistema se comporta como um gás de partículas relativísticas sujeitas a um potencial químico nulo. Neste contexto, cada oscilador passou a corresponder a um quantum do campo, que identificamos como sendo um bóson escalar de momento  $\mathbf{p}$ , massa  $M$  e energia  $\varepsilon(p) = \sqrt{p^2c^2 + M^2c^4}$ .

A partir da aplicação do ensemble canônico ao nosso sistema, calculamos todas as quantidades termodinâmicas de interesse em  $N$  dimensões e massa  $M$ . Estas quantidades puderam ser verificadas no limite de massa nula com os resultados na literatura para o caso eletromagnético em dimensões arbitrárias. Evidenciamos por essa comparação que os nossos resultados recuperam aqueles para o eletromagnetismo a menos de um fator de degenerescência devido ao spin, o qual é dependente da dimensão do espaço. Inclusive, por este fator, pudemos explorar o que ocorreria com a correspondência entre os resultados escalares e eletromagnéticos se o fóton, bóson do campo de Maxwell, tivesse uma massa não nula.

A equação de estado relacionada ao nosso sistema pôde ser obtida por duas maneiras diferentes. Primeiramente pela sua derivação padrão a partir do *ensemble* canônico. Em seguida, lançando mão da interpretação do campo no interior da cavidade como um gás de partículas relativísticas (bósons), que transportam energia em todas as direções e ao colidirem com as paredes transferem momento a estas. Ambos os resultados foram escritos em termos do valor médio quadrático do campo  $\phi$ ,  $\langle\phi^2\rangle$ , o que nos permitiu concluir que a correção na forma funcional da equação de estado, comparada ao caso eletromagnético, é dada pelo produto da energia de repouso ao quadrado ( $M^2c^4$ ) por  $\langle\phi^2\rangle$ .

Interessados em estudar de forma mais clara as correções impostas pela massa nos resultados similares ao caso planckiano, tomamos  $N = 4$  e primeiras correções de massa nas quantidades termodinâmicas. Neste limite pudemos notar que a massa ocasiona uma diminuição dessas quantidades, e que esta correção é proporcional ao produto de  $M^2$  por  $\langle\phi^2\rangle$ . Pudemos também, tirar conclusões acerca do comportamento do sistema mediante às transformações termodinâmicas, inclusive as adiabáticas. Além do mais, calculamos a capacidade térmica  $C_V$  e analisamos como se comporta uma cavidade de bósons com massa, em relação a uma de bósons sem massa.

No último capítulo, exploramos o comportamento da distribuição espectral da densidade de energia no interior da cavidade, onde obtivemos a lei da radiação de Planck

generalizada para o caso de um campo escalar com massa, como também, as leis de Rayleigh-Jeans e Wien, inclusive a lei de deslocamento de Wien. O estudo desta última nos levou a concluir que para valores crescentes da massa, a maioria dos bósons na cavidade correspondem a frequências também crescentes, enquanto a densidade de energia cai. Analisamos também a distribuição espectral da intensidade de energia irradiada por um furo em uma das paredes da cavidade, e concluimos que esta quantidade, assim como a densidade de energia, decresce pela elevação da massa dos bósons. No entanto, este decréscimo se dá de forma mais acentuada, porque para massas diferentes de zero os bósons são ejetados da cavidade com velocidade  $v \leq c$ . E por fim, integrada a distribuição espectral da intensidade, obtivemos em primeira correção, a lei de Stefan-Boltzmann para o caso com massa.

Ao longo deste trabalho ficaram alguns pontos a serem estudados, como por exemplo, analisar de forma mais detalhada os efeitos da dimensão do espaço sobre o sistema, de forma similar ao que é feito em [25], obtendo assim generalizações tanto de massa quanto de dimensão para as leis de Planck, Rayleigh-Jeans e Wien, como também, a lei de deslocamento de Wien e a lei de Stefan-Boltzmann.

Este trabalho nos coloca também diante de alguns questionamentos, como por exemplo, a possibilidade de verificação experimental dos resultados aqui obtidos a partir dos campos escalares existentes hoje na física de partículas, ou pelos fenômenos físicos observacionais descritos por estes campos. Como se estabelece a interação entre matéria e campo escalar, de forma que se possa realizar experimentos similares aos de verificação da lei de Planck, por exemplo, como o que é feito em [34]?

# Apêndice A

## A energia total em termos das funções modificadas de Bessel

As quantidades termodinâmicas associadas ao sistema discutido neste trabalho são dadas em termos das funções modificadas de Bessel. Por este motivo, apresentamos a seguir o cálculo de uma dessas quantidades, a energia total  $U$ , o que será suficiente, pois as demais quantidades são obtidas por cálculos similares.

A energia total é dada em (3.34) como uma integração no momentos, que pode ser escrita como

$$U = \frac{V}{h^{N-1}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 dp_2 \dots dp_{N-1} \frac{\sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4}}{e^{\beta \sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4}} - 1}. \quad (\text{A.1})$$

Passando esta integração para coordenadas esféricas, temos

$$U = \frac{V}{h^{N-1}} \int_0^{\infty} dp S_{N-1}(p) \frac{\sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4}}{e^{\beta \sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4}} - 1}, \quad (\text{A.2})$$

onde  $S_{N-1}(p)$  é a superfície da hipersfera de raio  $p$ , dada por [18]

$$S_{N-1}(p) = \frac{\pi^{\frac{N-1}{2}} (N-1) p^{N-2}}{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}, \quad (\text{A.3})$$

sendo  $\Gamma(z)$  a função gamma de Euler. Substituindo  $S_{N-1}(p)$  em (A.2), ficamos com

$$U = \frac{V \pi^{\frac{N-1}{2}} (N-1)}{h^{N-1} \Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)} \int_0^{\infty} dp p^{N-2} \frac{\sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4}}{e^{\beta \sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4}} - 1}. \quad (\text{A.4})$$

Fazendo uma troca de variáveis da forma

$$p = Mc \sinh(t) \quad \implies \quad dp = Mc \cosh(t) dt, \quad (\text{A.5})$$

que leva a

$$\sqrt{p^2c^2 + M^2c^4} = Mc^2 \cosh(t), \quad (\text{A.6})$$

e lembrando que pela imagem da função  $\sinh(t)$ ,  $t$  e  $p$  têm o mesmo intervalo de variação, obtemos

$$U = \frac{V\pi^{\frac{N-1}{2}}(N-1)M^N c^{N+1}}{h^{N-1}\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{(\sinh(t))^{N-2} \cosh^2(t) dt}{e^{\beta Mc^2 \cosh(t)} - 1}. \quad (\text{A.7})$$

Com a ajuda da série geométrica,

$$\frac{1}{e^{\beta Mc^2 \cosh(t)} - 1} = \frac{e^{-\beta Mc^2 \cosh(t)}}{1 - e^{-\beta Mc^2 \cosh(t)}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta n Mc^2 \cosh(t)}. \quad (\text{A.8})$$

Esta igualdade, juntamente com a propriedade das funções hiperbólicas,

$$\cosh^2(t) = \sinh^2(t) + 1, \quad (\text{A.9})$$

nos permite escrever (A.7) como

$$U = \frac{V\pi^{\frac{N-1}{2}}(N-1)M^N c^{N+1}}{h^{N-1}\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^\infty e^{-\beta n Mc^2 \cosh(t)} (\sinh(t))^N dt + \int_0^\infty e^{-\beta n Mc^2 \cosh(t)} (\sinh(t))^{N-2} dt \right]. \quad (\text{A.10})$$

Usando a definição integral das funções modificadas de Bessel [21]

$$\frac{K_\nu(z)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \int_0^\infty e^{-z \cosh(t)} \sinh^{2\nu}(t) dt, \quad (\text{A.11})$$

vemos que (A.10) pode ser escrita em termos destas, levando-nos ao resultado final para a energia total,

$$U = \frac{V(N-1)M^N c^{N+1}}{\hbar^{N-1}\pi^{\frac{N}{2}} 2^{\frac{N}{2}-1}\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{(\beta n Mc^2)^{\frac{N}{2}}} K_{\frac{N}{2}}(\beta n Mc^2) + \frac{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}{2(\beta n Mc^2)^{\frac{N}{2}-1}} K_{\frac{N}{2}-1}(\beta n Mc^2) \right]. \quad (\text{A.12})$$



# Apêndice B

## Valor médio quadrático do campo escalar $\langle \phi^2 \rangle$

Neste apêndice detalhamos a identificação da soma no segundo termo da equação de estado (3.40) com o valor médio quadrático do campo escalar  $\langle \phi^2 \rangle$ . Na referida equação, a soma aparecendo no segundo termo é dada por

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\hbar\omega_{\mathbf{k}}} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}} - 1}, \quad (\text{B.1})$$

que multiplicada por  $\frac{c^2\hbar^2}{V}$  nos dá a dimensão de energia por comprimento a  $N - 3$ , i.e., a dimensão de  $\phi^2$ . Procuremos então por uma identificação da soma anterior com uma quantidade relacionada a  $\phi^2$ .

No limite de  $V \rightarrow \infty$  podemos passar a soma em (B.1) para uma integração,

$$\mathcal{I} := \frac{c^2\hbar^2}{V} \int_0^\infty dk^{N-1} \frac{(\hbar\omega_{\mathbf{k}})^{-1}}{e^{\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}} - 1}, \quad (\text{B.2})$$

onde estamos levando em conta o fator  $\frac{c^2\hbar^2}{V}$ . De (3.31) e (3.32)  $\mathcal{I}$  pode ser dada em termos do momento na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{c^2}{\pi^{N-1}\hbar^{N-3}} \int_0^\infty dp^{N-1} \frac{(\sqrt{p^2c^2 + M^2c^4})^{-1}}{e^{\beta\sqrt{p^2c^2 + M^2c^4}} - 1} \\ &= \frac{c^2}{(2\pi)^{N-1}\hbar^{N-3}} \int_{-\infty}^\infty dp^{N-1} \frac{(\sqrt{p^2c^2 + M^2c^4})^{-1}}{e^{\beta\sqrt{p^2c^2 + M^2c^4}} - 1}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

que nos moldes do apêndice anterior pode ser escrita em coordenadas esféricas com a ajuda

da superfície da hipersfera de raio  $p$  no espaço-tempo  $N$ -dimensional  $S_{N-1}(p)$ , temos assim

$$\mathcal{I} = \frac{c^2(N-1)}{2^{N-1}\hbar^{N-3}\pi^{\frac{N-1}{2}}\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)} \int_0^\infty dp p^{N-2} \frac{(\sqrt{p^2c^2 + M^2c^4})^{-1}}{e^{\beta\sqrt{p^2c^2 + M^2c^4}} - 1}. \quad (\text{B.4})$$

Tomamos agora o caso particular de (B.4) em quatro dimensões dado por

$$\mathcal{I} = \frac{c^2}{2\pi^2\hbar} \int_0^\infty dp p^2 \frac{(\sqrt{p^2c^2 + M^2c^4})^{-1}}{e^{\beta\sqrt{p^2c^2 + M^2c^4}} - 1}. \quad (\text{B.5})$$

Esta integral pode ser escrita como uma integral na frequência  $\omega$  com a ajuda de (5.2) e (5.3), de onde, por uma renormalização da forma  $\bar{\omega} = \omega - \frac{Mc^2}{\hbar}$ , somos levados a

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2\pi^2c} \int_0^\infty \frac{(\hbar^2\bar{\omega}^2 + 2\hbar\bar{\omega}Mc^2)^{\frac{1}{2}}}{e^{\beta(\hbar\bar{\omega} + Mc^2)} - 1} d\bar{\omega}. \quad (\text{B.6})$$

A expressão acima é exatamente a apresentada na equação (3) de [31], para o valor médio de  $\phi^2$  calculado a partir do propagador de Feynman para o campo escalar com massa à temperatura finita. Logo, a integral  $\mathcal{I}$  definida em (B.2) a partir da soma (B.1) é o valor médio quadrático do campo escalar  $\langle \phi^2 \rangle$  para  $N$  dimensões espaço-temporais, dando a flutuação do campo  $\phi$  em torno de seu valor médio  $\langle \phi \rangle = 0$  (vide [16]).

A integral em (B.4) pode ser resolvida em termos das funções modificadas de Bessel de maneira similar ao que é feito no apêndice (A) deste trabalho, nos levando ao resultado final para  $\langle \phi^2 \rangle$  com massa e dimensões arbitrárias,

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{cM^{\frac{N}{2}-1}(N-1)\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}{\hbar^{N-3}(2\pi)^{\frac{N}{2}}\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta n)^{\frac{N}{2}-1}} K_{\frac{N}{2}-1}(\beta n M c^2). \quad (\text{B.7})$$

Além do mais, pela identificação de  $\mathcal{I}$  como sendo  $\langle \phi^2 \rangle$ , podemos escrever a soma (B.1) na forma

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\hbar\omega_{\mathbf{k}}} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}} - 1} = \frac{V}{c^2\hbar^2} \langle \phi^2 \rangle, \quad (\text{B.8})$$

a qual nos permite escrever a equação de estado (3.40) em termos do valor médio quadrático do campo escalar.

# Bibliografia

- [1] T. Padmanabhan, *Gravitation: Foundations and Frontiers*, Nova Iorque: Cambridge University Press, 2010.
- [2] C. Serguei, *et al*, *Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC*, Phys. Lett. B, v. 716, n. 1, p. 30-61, 2012.
- [3] P. A. Ade, *et al*, *BICEP2 I: detection of B-mode polarization at degree angular scales*, arXiv preprint, arXiv:1403.3985, 2014.
- [4] J. J. M. Pimenta, *et al*, *O bóson de Higgs*, Rev. Bras. de Ens. de Fís., v. 35, n. 2, p. 1-14, 2013.
- [5] I. Waga, *Cem anos de descobertas em cosmologia e novos desafios para o Século XXI*, Rev. Bras. de Ens. de Fís., v. 27, n. 1, p. 157 - 173, 2005.
- [6] A. Linde, *Inflation, quantum cosmology and the anthropic principle*, Science and ultimate reality, p. 426-458, 2003.
- [7] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Vol.2, Moscou: Elsevier, 1975.
- [8] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*, 2<sup>a</sup>.ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.
- [9] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, 2nd.ed. Nova Iorque: Addison-Wesley Publishing Company, 1992.
- [10] S. S. Schweber, *An introduction to relativistic quantum field theory*, Dover Publications, 2005.

- 
- [11] S. T. Thornton, J. B. Marion, *Dinâmica clássica de partículas e sistemas*, São Paulo: Cengage Learning, 2011.
- [12] D. J. Griffiths, *Eletrodinâmica*, 3<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2011.
- [13] J. L. Anderson, *Principles of Relativity Physics*, Nova Iorque: Academic Press Inc, 1967.
- [14] J. Foster, J. D. Nightingale, *A short course in General Relativity*, Londres: Longman, 1979.
- [15] K. Watari, *Mecânica Clássica*, Vol. 2, São Paulo: Editora Livraria da Física.
- [16] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Vol. 1, Paris: Hermann, 1977.
- [17] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Nova Iorque: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [18] K. Huang, *Statistical Mechanics*, Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1987.
- [19] K. Huang, *Introduction to Statistical Physics*, 2nd. ed. Nova Iorque: CRC Press, 2010.
- [20] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*, 2nd. ed. Elsevier, 1996.
- [21] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, 7th. ed. Burlington: Academic Press, 2007.
- [22] J. I. Kapusta, C. Gale, *Finite-Temperature Field Theory Principles and Applications*, 2nd. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- [23] K. Oldham, J. Myland, J. Spanier, *An Atlas of Functions*, 2nd. ed. Nova Iorque: Springer, 2009.
- [24] G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical methods for physicists*, 6th. ed. Burlington: Elsevier, 2005.
- [25] T. R. Cardoso, A. S. Castro, *The blackbody radiation in a D-dimensional universes*, Rev. Bras. de Ens. de Fís., v. 27, n. 4, p. 559-563, 2005.

- 
- [26] P. T. Landsberg, A. De Vos, *The Stefan-Boltzmann constant in  $n$ -dimensional space*, J. Phys. A: Math. Gen., v. 22, p. 1073-1084, 1989.
- [27] V. J. Menon, D. C. Agrawal, *Comment on "The Stefan-Boltzmann constant in  $n$ -dimensional space"*, J. Phys. A: Math. Gen., v. 31, p. 1109-1110, 1989.
- [28] H. Alnes, F. Ravndal, I. K. Wehus, *Black-body radiation with extra dimensions*, J. Phys. A: Math. Theor., v. 40, p. 14309-14316, 2007.
- [29] R. Lehoucq, *Illuminating the blackbody*, Eur. J. Phys., v. 32, p. 1495-1514, 2011.
- [30] H. E. Haber, H. A. Weldon, *Thermodynamics of an Ultrarelativistic Ideal Bose Gas*, Phys. Rev. Lett., v. 46, n. 23, p. 1497-1500, 1981.
- [31] R. Medina, E. S. Moreira Jr., *Thermal fluctuations of a quantized massive scalar field in a Rindler background*, Phys. Rev. D, v. 63, n. 12, p. 124022, 2001.
- [32] R. Eisberg, R. Resnick, *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 2nd.ed. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1985.
- [33] J. Torres-Hernández, *Photon mass and blackbody radiation*, Phys. Rev. A, v. 32, n. 1, p. 623-624, 1985.
- [34] M. A. Cavalcante, R. Haag, *Corpo negro e determinação experimental da constante de Planck*, Rev. Bras. de Ens. de Fís., v. 27, n. 3, p. 343-348, 2005.