

## Capítulo 3

# PARAMETRIZAÇÃO GEOMÉTRICA DE AEROFÓLIOS

## 3.1 – INTRODUÇÃO

O objetivo principal desta dissertação consiste no desenvolvimento de uma metodologia para projeto inverso de aerofólios em grades de turbomáquinas axiais, utilizando algoritmos de otimização. A escolha de uma adequada parametrização geométrica de aerofólios é de suma importância para a aplicação desses algoritmos. Uma parametrização é considerada adequada quando o número de parâmetros introduzidos é suficiente para gerar um espaço de soluções representativo do universo em questão, sem, contudo, ser excessivo, de modo a manter um custo computacional aceitável para o processo de otimização.

Neste capítulo, descreve-se uma parametrização que foi considerada adequada para os propósitos do presente trabalho e, portanto, adotada no desenvolvimento da metodologia. Essa parametrização baseia-se no uso de polinômios de Bernstein (curvas Bezier), e foi proposta inicialmente por Venkataraman (1995) e posteriormente adaptada por Rogalsky *et al.* (1999). O presente trabalho introduz ainda um tratamento especial dos parâmetros a fim de se obter aerofólios viáveis durante todo o processo de otimização.

## 3.2 – PARAMETRIZAÇÃO PARA A GERAÇÃO DOS PERFIS

A parametrização de aerofólios empregada neste trabalho está baseada no emprego de polinômios desenvolvidos pelo matemático russo Sergei N. Bernstein, em 1912. Os polinômios de Bernstein ganharam notoriedade na década 70, quando o engenheiro francês Pierre Bezier utilizou-os para produzir curvas concordantes e suaves em programas de desenho por computador, resolvendo problemas na indústria automobilística. Assim, as curvas geradas pelos polinômios de Bernstein passaram ser chamadas de curvas Bezier ou curvas de Bernstein-Bezier.

Uma curva Bezier paramétrica de grau  $n$  no plano é determinada de maneira única pelos  $n+1$  vértices de um polígono, chamados de pontos de controle  $\mathbf{P}_i$ , através do seguinte polinômio de Bernstein  $\mathbf{P}(u)$ :

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \quad (3.1)$$

onde  $u$  é um parâmetro real no intervalo  $[0, 1]$ , tal que os pontos extremos são dados por  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0$  e  $\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}_n$ . Note-se que  $\mathbf{P}$  representa aqui um vetor no plano  $(x, y)$ .

As curvas Bezier possuem muitas propriedades interessantes para um projeto aerodinâmico. Os pontos extremos de uma curva Bezier são fixados automaticamente nos dois vértices extremos. Em um ponto extremo, a curva é tangente ao vetor que une aquele ponto extremo e o ponto de controle mais próximo, facilitando a união suave de duas curvas de Bezier. A curva sempre permanece dentro da figura convexa definida pelos vértices do polígono. Finalmente, a curva tem continuidade de ordem  $n$  em todos os pontos e jamais oscila fortemente para longe dos seus pontos de controle definidores.

Uma curva de Bezier cúbica é definida por um polinômio de Bernstein de grau  $n = 3$  na Eq. (3.1), usando quatro pontos de controle  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  e  $\mathbf{P}_3$ , com  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0$  e  $\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}_3$ :

$$\mathbf{P}(u) = \mathbf{P}_0 (1-u)^3 + \mathbf{P}_1 3u(1-u)^2 + \mathbf{P}_2 3(1-u)u^2 + \mathbf{P}_3 u^3 \quad (3.2)$$

Note-se que, enquanto os pontos extremos  $\mathbf{P}_0$  e  $\mathbf{P}_3$  situam-se sobre a curva de Bézier, o mesmo não ocorre, em geral, com os pontos intermediários  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ .

Venkataraman (1995) introduziu a idéia de se usar quatro curvas de Bezier cúbicas para definir um aerofólio, duas para o intradorso e duas para o extradorso. Rogalsky *et al.* (1999) preferiram utilizar duas curvas cúbicas de Bezier para representar a distribuição de semi-espessura (curvas dianteira e traseira, conectadas na abscissa de espessura máxima, Fig. 3.1) e

outras duas para representar a distribuição de arqueamento (curvas dianteira e traseira, conectadas na abscissa de arqueamento máximo, Fig. 3.2). A partir daí, o aerofólio é construído da maneira usual nos perfis NACA, superpondo as distribuições de espessura e arqueamento perpendicularmente à curva de arqueamento.

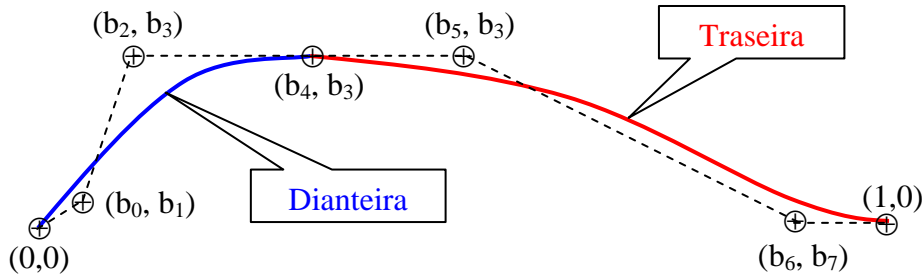


Figura 3.1 – Curvas Bezier para o arqueamento do perfil

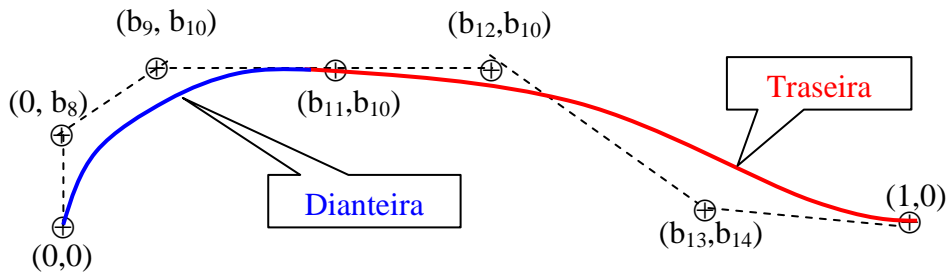


Figura 3.2 – Curvas Bezier para a espessura do perfil

Tabelas 3.1: Coordenadas dos pontos de controle das curvas Bezier para o arqueamento

Curva	Variáveis	Observações
Dianteira	(0,0)	Este ponto é comum para unir as curvas de arqueamento e espessura no início da corda
	(b <sub>0</sub> , b <sub>1</sub> )	
	(b <sub>2</sub> , b <sub>3</sub> )	O ponto (b <sub>4</sub> , b <sub>3</sub> ) une as curvas do arqueamento. Nota-se ainda que b <sub>3</sub> define o alinhamento superior e sua repetição define o arqueamento máximo do perfil.
	(b <sub>4</sub> , b <sub>3</sub> )	
Traseira	(b <sub>4</sub> , b <sub>3</sub> )	O ponto (b <sub>4</sub> , b <sub>3</sub> ) une as curvas do arqueamento. Nota-se ainda que b <sub>3</sub> define o alinhamento superior e sua repetição define o arqueamento máximo do perfil.
	(b <sub>5</sub> , b <sub>3</sub> )	
	(b <sub>6</sub> , b <sub>7</sub> )	Este ponto é comum para unir as curvas, definindo o bordo de fuga.
	(1,0)	

Tabelas 3.2 – Coordenadas dos pontos de controle das curvas Bezier para a espessura

Curva	Variáveis	Observações
Dianteira	(0,0)	Este ponto é comum para unir as curvas de arqueamento e espessura no bordo de ataque
	(0,b <sub>8</sub> )	Manter a abscissa deste ponto igual à do anterior (igual a 0), produz o arredondamento do bordo de ataque.
	(b <sub>9</sub> ,b <sub>10</sub> )	O ponto (b <sub>11</sub> , b <sub>10</sub> ) une as curvas de espessura. Nota-se ainda que o alinhamento superior produzido pela repetição de b <sub>10</sub> define a espessura máxima do perfil.
	(b <sub>11</sub> ,b <sub>10</sub> )	
Traseira	(b <sub>11</sub> ,b <sub>10</sub> )	
	(b <sub>12</sub> ,b <sub>10</sub> )	
	(b <sub>13</sub> , b <sub>14</sub> )	
	(1,0)	Este ponto é comum para unir as curvas, definindo o bordo de fuga.

As coordenadas dos pontos de controle das curvas Bezier utilizadas na parametrização proposta por Rogalsky *et al.* (1999) estão indicadas nas Figs. 3.1, 3.2 e nas Tabelas 3.1 e 3.2. Em princípio, com 4 curvas Bezier cúbicas no plano, sendo 4 pontos de controle para cada uma, resultaria 16 pontos de controle e, portanto, 32 coordenadas ao todo. Todavia, na parametrização em questão restarão apenas 15 coordenadas independentes ( $b_0, \dots, b_{14}$ ), devido às seguintes propriedades: (i) os pontos iniciais das curvas dianteiras estão fixos no bordo de ataque (0,0); (ii) os pontos finais das curvas traseiras estão fixos no bordo de fuga (1,0); (iii) o ponto de controle final de cada curva dianteira coincide com o ponto de controle inicial da curva traseira correspondente; (iv) o ponto de intersecção das curvas de espessura (arqueamento) corresponde a um máximo de espessura (arqueamento); (v) a abscissa do 2º ponto de controle da curva dianteira de espessura deve ser igual à do 1º ponto (igual a 0), de modo a garantir que os perfis gerados tenham sempre um bordo de ataque arredondado.

No presente trabalho, a parametrização acima descrita será empregada com uma ligeira modificação: as distribuições de espessura e arqueamento serão superpostas ao longo da perpendicular ao eixo das abscissas. Isso é feito para evitar incongruências geométricas no caso de perfis fortemente arqueados.

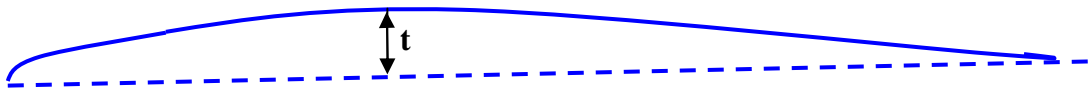


Figura 3.3 – Curva de espessura (t representa a semi-espessura)

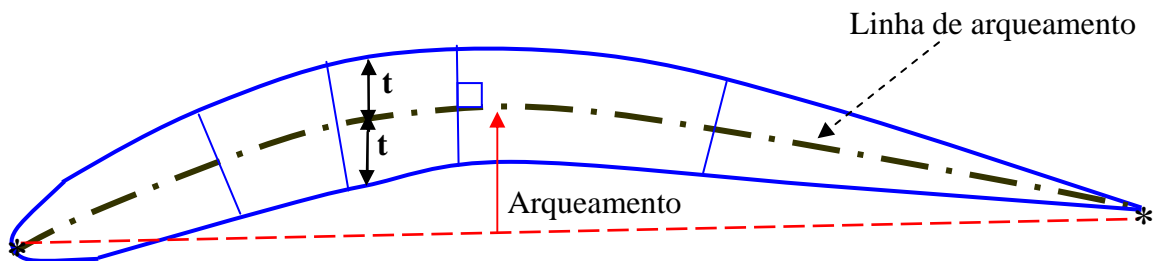


Figura 3.4 – Curva de espessura superposta à curva de arqueamento

### 3.3 – PROCEDIMENTO PARA GERAÇÃO DE PERFIS VIÁVEIS

Normalmente, as parametrizações geométricas comumente utilizadas na literatura não garantem que a geometria dos aerofólios gerados seja viável para um projeto aerodinâmico. Sem controle adicional, podem ocorrer cruzamentos nas linhas que definem o intradorso e extradorso dos perfis ou, ainda, arqueamentos e espessuras fora das faixas desejadas (Fig. 3.5).

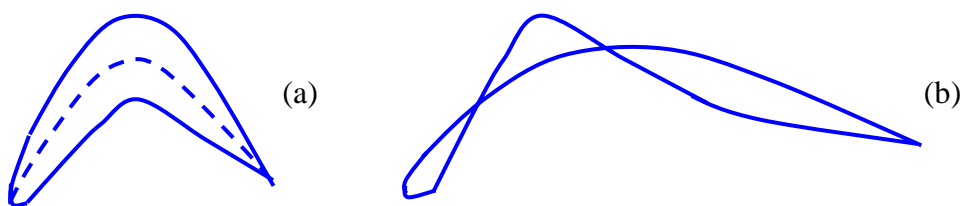


Figura 3.5 – Perfis inviáveis: (a) em função de arqueamento excessivo (b) em função do cruzamento da linha de espessura

A parametrização geométrica descrita no item anterior facilita o controle do arqueamento e da espessura através dos parâmetros  $b_3$  e  $b_{10}$ . Todavia, é necessário ainda atender a diversas restrições de ordem para as coordenadas:  $0 < b_0$ ,  $b_0 < b_2$ , ...,  $0 < b_9$ ,  $b_9 < b_{11}$ ,

etc. Para que um algoritmo de otimização não perca tempo testando perfis inviáveis, torna-se desejável um processo que garanta sempre a geração de perfis viáveis. No presente trabalho é utilizado um algoritmo populacional, em que uma população inicialmente gerada vai sendo aprimorada iterativamente (conforme descrito no Capítulo 4).

O processo proposto neste trabalho consiste em substituir os 15 parâmetros  $b_i$ ,  $i = 0, \dots, 14$  por 17 novos parâmetros  $\Delta_i$ ,  $i = 1, \dots, 17$ , definidos na Fig. 3.6 e na Tabela 3.6. São estipulados limites superiores  $\Delta_i^U > 0$  e inferiores  $\Delta_i^L > 0$  (positivos) para esses novos parâmetros. O algoritmo de otimização gera a população inicial e testa novos aerofólios utilizando diretamente valores de  $\Delta_i$  entre os limites estipulados,  $\Delta_i^L \leq \Delta_i \leq \Delta_i^U$ . Na geração de novos aerofólios, caso  $\Delta_i < \Delta_i^L$  ou  $\Delta_i > \Delta_i^U$ , é feita uma viabilização forçada, fazendo  $\Delta_i = \Delta_i^L$  ou  $\Delta_i = \Delta_i^U$ , respectivamente. Com isso, evita-se descartar perfis gerados com uma ou poucas coordenadas inviáveis, ao contrário do que é feito em diversos algoritmos de otimização.

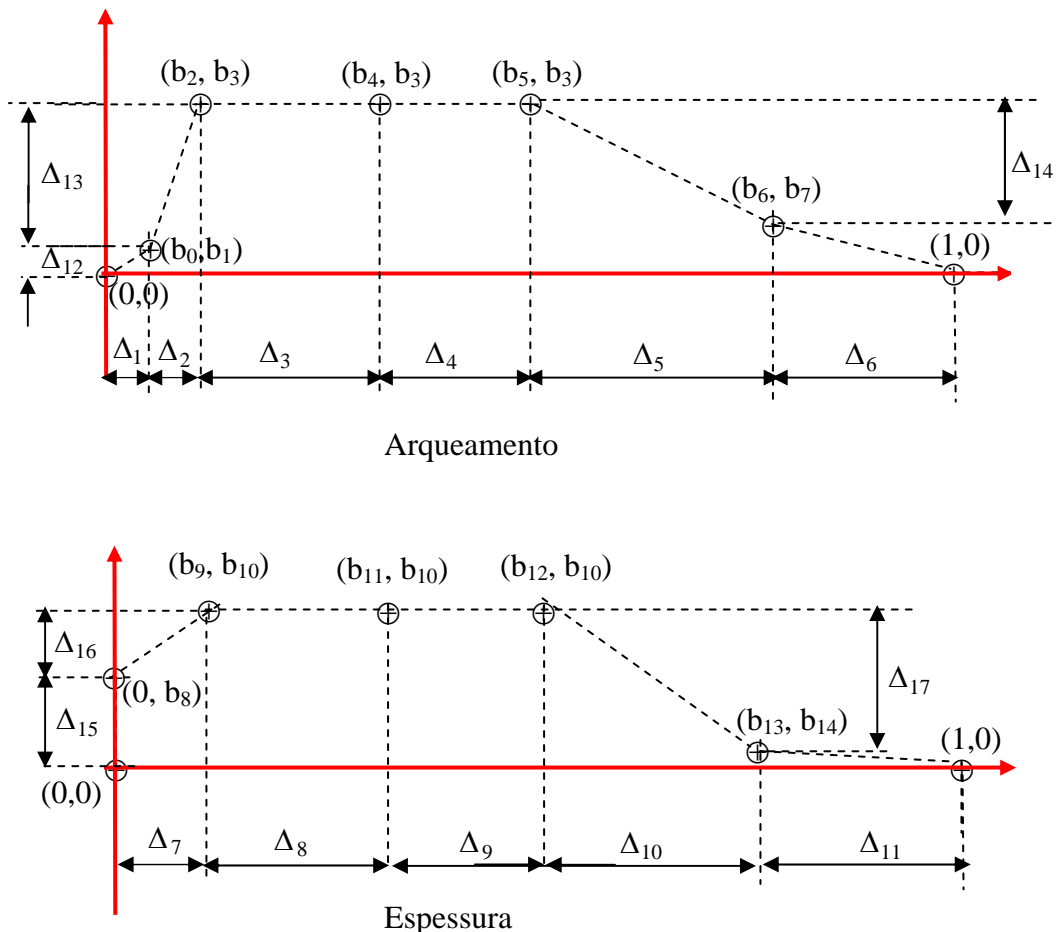


Figura 3.6 – Definição dos intervalos para a viabilização dos perfis

Tabela 3.3 – Definição da nova parametrização ( $\Delta_i$ ) em função da parametrização antiga ( $b_i$ )

Para as abscissas da linha de arqueamento						
$\Delta_i$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$	$\Delta_5$	$\Delta_6$
$b_i$	$b_0$	$b_2 - b_0$	$b_4 - b_2$	$b_5 - b_4$	$b_6 - b_5$	$1 - b_6$
Para as abscissas da linha de espessura						
$\Delta_i$	$\Delta_7$	$\Delta_8$	$\Delta_9$	$\Delta_{10}$	$\Delta_{11}$	
$b_i$	$b_9$	$b_{11} - b_9$	$b_{12} - b_{11}$	$b_{13} - b_{12}$	$1 - b_{13}$	
Para as ordenadas da linha de arqueamento						
$\Delta_i$	$\Delta_{12}$	$\Delta_{13}$	$\Delta_{14}$			
$b_i$	$b_1$	$b_3 - b_1$	$b_3 - b_7$			
Para as ordenadas da linha de espessura						
$\Delta_i$	$\Delta_{15}$	$\Delta_{16}$	$\Delta_{17}$			
$b_i$	$b_8$	$b_{10} - b_8$	$b_{10} - b_{14}$			

As coordenadas dos aerofólios assim gerados são renormalizadas proporcionalmente de modo a fazer com que as cordas das linhas de arqueamento e de espessura fiquem unitárias. Assim, todos os parâmetros  $\Delta_i$  da linha de arqueamento, calculados pelo algoritmo,  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13, 14$ , são divididos pela soma  $\sum_{i=1}^6 \Delta_i$ , enquanto que todos os parâmetros  $\Delta_i$  da linha de arqueamento,  $i = 7, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17$ , são divididos pela soma  $\sum_{i=7}^{11} \Delta_i$ .

A discretização em painéis de cada aerofólio gerado durante o processo de otimização é feita com base na parametrização antiga ( $b_i$ ). Portanto, é necessário recuperá-la a partir da nova parametrização  $\Delta_i$ . Isso é facilmente realizado de forma recursiva para cada grupo de abscissas e ordenadas de interesse, conforme indicado na Tabela 3.4. Após a recuperação das coordenadas  $b_i$  e a discretização do aerofólio gerado, o programa de cálculo de escoamento potencial (Capítulo 2) é chamado para avaliar o desempenho da grade com aquele aerofólio e verificar se ele pode ser usado para aprimorar a população atual de aerofólios (conforme descrito no Capítulo 4).

Tabela 3.4 – Recuperação recursiva da parametrização antiga ( $b_i$ ) em função da nova parametrização ( $\Delta_i$ )

Para as abscissas da linha de arqueamento
$b_0 = \Delta_1$
$b_2 = b_0 + \Delta_2$
$b_4 = b_2 + \Delta_3$
$b_5 = b_4 + \Delta_4$
$b_6 = b_5 + \Delta_5$
Para as abscissas da linha de espessura
$b_9 = \Delta_7$
$b_{11} = b_9 + \Delta_8$
$b_{12} = b_{11} + \Delta_9$
$b_{13} = b_{12} + \Delta_{10}$
Para as ordenadas da linha de arqueamento
$b_1 = \Delta_{12}$
$b_3 = b_1 + \Delta_{13}$
$b_7 = b_3 - \Delta_{14}$
Para as ordenadas da linha de espessura
$b_8 = \Delta_{15}$
$b_{10} = b_8 + \Delta_{16}$
$b_{14} = b_{10} - \Delta_{17}$

Alguns comentários finais merecem ser feitos. Embora seja discutível a vantagem ou desvantagem de estipular limites para os parâmetros  $\Delta_i$  em vez de limites para os  $b_i$ , é inegável que a nova parametrização apresenta pelo menos três vantagens: 1) produz automaticamente aerofólios viáveis e, portanto, não descartáveis *a priori*, contribuindo para acelerar o processo de convergência dos algoritmos de otimização; 2) evita o uso de funções



de penalidade na função objetivo para atender às restrições de ordem das abscissas dos pontos de controle das curvas Bezier; 3) evita o cálculo do escoamento em torno de aerofólios inviáveis, com efeitos numéricos eventualmente descontroláveis.