UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sistemas de inclusões diferenciais parciais semi-difusivos

Paloma Elisa de Souza

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 14 DE MARÇO DE 2022

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Sistemas de inclusões diferenciais parciais semi-difusivos

Paloma Elisa de Souza

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Análise Matemática

Itajubá - MG
14 de março de 2022

Dedico este trabalho ao meu sobrinho e afilhado Ulisses.

Agradecimentos

"Tudo o que fizerem, seja em palavra seja em ação, façam-no em nome do Senhor Jesus, dando por meio dele graças a Deus Pai."(Colossenses 3:17)

Agradeço em primeiro lugar a Deus pelo auxílio e presença constante. Aos meus pais por todas as vezes que me sustentaram nas dificuldades. Nenhuma palavra será suficiente para agradecê-los. Aos meus irmãos Paulo e Pedro por serem esteio da família.

Ao meu sobrinho Ulisses por me presentear com uma alegria que não conhecia e com a inocência de um anjo.

Agradeço aos professores da Unifei pelos ensinamentos de vida e de profissão em especial à orientação do Prof. Dr. Jacson Simsen, pela paciência e perseverança em mim.

Imensa gratidão aos meus colegas de mestrado que durante dias e noites foram companhias, em especial, Carlos, Gabriel, João e Alice.

Agradeço à Universidade Federal de Itajubá pela oportunidade de me tornar mestre e me formar uma profissional melhor para a sociedade.

Por fim, agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro durante esse processo.

Resumo

Este trabalho prova a existência local e global de soluções para sistemas de inclusões parciais semi-difusivos com operadores m-acretivos vistos em [7]. Baseados nesse artigo, provamos a existência local de soluções para sistemas de inclusões diferenciais parciais semi-difusivos com operador maximal monótono da forma $div(|\nabla u|^{p(\cdot)-2}\nabla u)$ com forças externas F e G multívocas, F semicontínua superiormente, o par (F, G) positivamente sublinear e G de variáveis separáveis.

Palavras–chave: Inclusões parciais, espaços de Sobolev, operadores multívocos, expoentes variáveis, atrator global.

Abstract

This work proves the local and global existence of solutions for semi-diffusive partial inclusion systems with m-accretive operators seen in [7]. Based on this article, we prove the local existence of solutions for semi-diffusive partial differential inclusion systems with monotonous maximal operator of the form $div(|\nabla u|^{p(\cdot)-2}\nabla u)$ with external forces F and G multivalued maps, F is upper semicontinuous, the pair (F, G) is positively sublinear and G with separable variables.

Keywords: Partial inclusions, Sobolev spaces, multivalued operators, variable exponents, global attractor.

Sumário

Introdução

Neste trabalho vamos provar a existência local e global de soluções para sistemas de inclusões parciais semi-difusivos, passando por problemas da forma

$$\begin{cases} u_t - \Delta\varphi(u) = f & em\ (0,T) \times \Omega \\ \varphi(u) = 0 & em\ (0,T) \times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & em\ \Omega \end{cases} \tag{1}$$

onde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua não decrescente, $\varphi(0) = 0$, $f \in L^1(0,T; L^1(\Omega))$, e $u_0 \in L^1(\Omega)$. Por uma solução fraca de (1) estamos nos referindo a uma função $u \in C([0,T]; L^1(\Omega))$ tal que $\varphi(u) \in L^1(0,T; L^1(\Omega))$ e que satisfaça (1) no sentido das distribuições sobre $(0,T) \times \Omega$.

Baseamos nossa demonstração no artigo [7] onde podem ser encontrados alguns resultados da existência local e global de soluções fracas para sistemas de reação e difusão não lineares da forma:

$$\begin{cases} u_t - \Delta\varphi(u) \in F(u,v) & (0,T) \times \Omega \\ v_t - \Delta\psi(v) \in G(u,v) & (0,T) \times \partial\Omega \\ \varphi(u) = \psi(v) = 0 & (0,T) \times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x),\ v(0,x) = v_0(x) & em\ \Omega \end{cases} \tag{2}$$

sendo que Ω é domínio limitado de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $\partial\Omega$ uma fronteira suave, φ, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas e não decrescentes com $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, F, $G : \mathbb{R}^2 \to 2^{\mathbb{R}}$ e u_0, $v_0 \in L^\infty(\Omega)$.

O sistema (2) é dito **difusivo** se φ e ψ são ambas estritamente crescentes e dito **semi-difusivo** se φ é estritamente crescente e ψ é somente não decrescente.

Estabeleceremos um resultado de existência para o caso difusivo com F, G semicontínuas superiormente e positivamente sublineares e abordaremos o caso semi-difusivo com (F, G) positivamente sublinear, F semicontínua superiormentee e G de variáveis separáveis, ou seja, $G(u, v) = g(u)H(v)$ ou $G(u, v) = g(u) + H(v)$.

Segundo Díaz e Vrabie [7] os termos φ e ψ referem-se a substâncias que se difundem em Ω. Se uma dessas substâncias não se difunde em Ω, por exemplo, um sólido, então o termo de difusão correspondente, digamos ψ, é identicamente nulo. Sempre que a substância em questão for um líquido ou um gás então o termo de difusão correspondente não pode ser identicamente nulo.

No capítulo 1 daremos os resultados de Análise, Análise Funcional, Topologia e Análise Funcional Multívoca para nos dar suporte para demonstrar tais teoremas. No capítulo 2, faremos as demonstrações da existência local e global das soluções do sistema (2) usando as ideias do artigo [7]. No Capítulo 3, apresentaremos a demonstração da existência de solução de um sistema semi-difusivo com operador maximal monótono com expoentes variáveis e a existência do atrator global, realizada originalmente por nós no decurso deste trabalho que resultou no artigo [15].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Resultados

Aqui listaremos algumas definições e resultados de Topologia, Medida e Integração, Análise Funcional e Análise Multívoca que serão usados nos capítulos seguintes.

Definição 1. *[11] Uma sequência $\{p_n\}$ em um espaço métrico (X, d) converge para p se para todo $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $d(p_n, p) < \epsilon$ se $n \geq n_0$.*

Definição 2. *[11] Sejam X e Y espaços métricos, suponha que $E \subset X$ e $f : E \to Y$, p um ponto de acumulação em E. Escrevemos $f(x) \to q$ quando $x \to p$, ou $\lim_{x\to p} f(x) = q$ se existe um ponto $q \in Y$ com a seguinte propriedade: Para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x), q) < \epsilon$ para todos os pontos $x \in E$ para os quais $0 < d_X(x, p) < \delta$.*

Podemos reformular esta definição em termos de sequências.

Teorema 3. *[11] Sejam X, Y, E, p, q como na definição 2. Então, $\lim_{x\to p} f(x) = q$ se e somente se $\lim_{n\to\infty} f(p_n) = q$ para toda sequência $\{p_n\}$ em E tal que $p_n \neq p$ e $\lim_{n\to\infty} p_n = p$.*

1.1.1 Espaços Compactos e Relativamente Compactos

Definição 4. *[11] Um subconjunto K de um espaço métrico X é dito compacto se toda cobertura aberta de K possui uma subcobertura finita. Ou seja, se $\{G_\alpha\}$ é uma cobertura* *aberta de K, então existe uma quantidade finita de índices $\alpha_1, ..., \alpha_n$, tal que*

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \ ... \ \cup \ G_{\alpha_n}.$$

Teorema 5. *[11] Suponha $K \subset Y \subset X$. Então K é relativamente compacto em X se, e somente se, K é relativamente compacto em Y.*

Teorema 6. *[11] Seja $\{p_n\}$ uma sequência em um espaço normado X.*

a) $\{p_n\}$ converge a $p \in X$ se, e somente se, toda vizinhança de p contém p_n para todo, exceto finitos $n's$.

b) Se $p \in X$, $p' \in X$, e $\{p_n\}$ converge para p e para p', então $p = p'$.

c) Se $\{p_n\}$ converge, então $\{p_n\}$ é limitada.

d) Se $E \subset X$ e se p é um ponto de aderência de E, então existe uma sequência $\{p_n\}$ em E tal que $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.

Definição 7. *[11] Dada uma sequência p_n, considere a sequência $\{n_k\}$ de inteiros positivos, tal que $n_1 < n_2 < n_3 < ....$ Então a sequência $\{p_{n_k}\}$ é chamada uma subsequência de $\{p_n\}$. Se $\{p_{n_k}\}$ converge, seu limite é igual ao limite de $\{p_n\}$.*

Teorema 8. *[11] Se $\{p_n\}$ é uma sequência em espaço normado compacto X, então alguma subsequência de $\{p_n\}$ converge a um ponto de X.*

Proposição 9. *Seja $X \subseteq M$ relativamente compacto e $f : M \to N$ contínua, então $f(X)$ é relativamente compacto.*

Definição 10. *[6] Seja (X, Σ, μ)um espaço de medida, ou seja, X um conjunto não vazio, Σ é uma $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X, e $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ é uma medida. Se $1 \leq p < \infty$, denotaremos por $\mathscr{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ o espaço vetorial de todas as funções mensuráveis $f : X \to \mathbb{K}$ (sendo que $\mathbb{K}$ é um corpo) tais que*

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty. \tag{1.1}$$

Escrevemos $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ para cada $f \in \mathscr{L}^p(X, \Sigma, \mu)$.

Para obter uma norma vamos introduzir uma relação de equivalência em $\mathscr{L}^p(X)$. *Dadas* $f,\ g \in \mathscr{L}^p(X)$, *definimos* $f \sim g$ *se* $f(x) = g(x)$ *quase sempre. É claro que esta é uma relação de equivalência em* $\mathscr{L}^p(X)$. *Seja* $L^p(X)$ *o conjunto das classes de equivalência. Dadas* $[f],\ [g] \in L^p(X)$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$, *definimos* $[f] + [g] = [f + g]$, $\lambda[f] = [\lambda f]$. *É fácil verificar que estas operações estão bem definidas e que* $L^p(X)$, *com estas operações é um espaço vetorial. Além disso, a aplicação*

$$\mathscr{L}^p(X) \to L^p(X)$$

$$f \mapsto [f]$$

é linear. Se definirmos $\|[f]\|_p = \|f\|_p$ *para cada* $[f] \in L^p(X)$. *Esta função está bem definida e é uma norma.*

Teorema 11. *[6] Considere um espaço de medida separável. Então* $L^p(X)$ *é separável para todo* p, $1 \leq p < \infty$.

Lema 12. *[5] (Desigualdade de Gronwall-Bellman) Seja* $m \in L^1(0, T; \mathbb{R})$ *tal que* $m \geq 0$ *em* $(0, T)$ *e também* $a > 0$ *constante. Seja* $\phi : [0, T] \to \mathbb{R}$ *função satisfazendo*

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq a^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)ds \ \forall t \in [0, T]. \tag{1.2}$$

Então,

$$|\phi(t)| \leq a + \int_0^t m(s)ds \ \forall t \in [0, T]. \tag{1.3}$$

(Lema A.5, pg. 157. [5])

1.1.2 Espaços de Sobolev

Definição 13. *[10] O espaço de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *é definido por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \exists\ g_1, ..., g_n \in L^p(\Omega) \textit{ tais que } \int_\Omega u\frac{d\varphi}{dx_i} = -\int_\Omega g_i\varphi, \tag{1.4}$$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall\ i = 1, 2, ..., n\}, \tag{1.5}$$

sendo que C_c^∞ *é o conjunto das funções infinitamente diferenciais com suporte compacto.*

Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *então denotaremos* $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ *e* $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = grad\ u.$
O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ *está munido da norma*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}.$$

1.1.3 Semi Produto Interno

Proposição 14. *[7] Seja* X *um espaço de Banach real,* $x,\ y \in X$*,* $h \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} - \{0\}$ *e definimos*

$$[x,y]_h := \frac{1}{h}(\|x+hy\| - \|x\|) \tag{1.6}$$

e

$$(x,y)_h := \frac{1}{2h}(\|x+hy\|^2 - \|x\|^2). \tag{1.7}$$

Lema 15. *[7] Para* $x,\ y \in X$ *os limites*

$$[x,y]_+ := \lim_{h\downarrow 0}[x,y]_h,\ [x,y]_- := \lim_{h\uparrow 0}[x,y]_h \tag{1.8}$$

e

$$(x,y)_+ := \lim_{h\downarrow 0}(x,y)_h,\ (x,y)_- := \lim_{h\uparrow 0}(x,y)_h \tag{1.9}$$

existem e são finitos. Em adição $[.,.]_+$ *e* $(.,.)_+$ *são semicontínuas superiormente de* $X \times X$ *em* $\mathbb{R}$*. As funções* $(.,.)_+$*,* $[.,.]_+$ *são chamadas de semi-produto interno superior em* X*. As funções* $[.,.]_-$ *e* $(.,.)_-$ *são semicontínuas inferiormente de* $X \times X$ *em* $\mathbb{R}$*. Além disso, as funções* $(.,.)_-$*,* $[.,.]_-$ *são chamadas de semi-produto interno inferior em* X*.*

Lema 16. *[7] O semi produto interno tem as seguintes propriedades:*

i) $(x,y)_\pm = \|x\|[x,y]_\pm$*;*

ii) $|[x,y]_\pm| \le \|y\|$*;*

iii) $|[x,y]_\pm - [x,z]_\pm| \le \|y-z\|$*;*

iv) $[x,y]_+ = -[x,-y]_- = -[-x,y]_-$*;*

v) $[az,by]_\pm = ab[x,y]_\pm$ *para* $a,\ b > 0$*;*

vi) $[x, y+z]_+ \leq [x,y]_+ + [x,z]_+$ *e* $[x,y+z]_- \geq [x,y]_- + [x,z]_-$.

Proposição 17. *Seja* $(x,y)_+$ *o semi produto interno, vale*

$$(x,y)_+ \leq \|x\|\|y\|. \tag{1.10}$$

Demonstração. Temos do Lema 16 itens $i)$ e $ii)$ que

$$(x,y)_+ = \|x\|[x,y]_+ \leq \|x\||[x,y]_+| \leq \|x\|\|y\|. \tag{1.11}$$

□

Proposição 18. *(Desigualdade de Young) Seja* p *e* q *expoentes conjugados com* $1 < p < \infty$*, então para quaisquer elementos* a *e* b *em* X *temos*

$$\|a\|\|b\| \leq \frac{\|a\|^p}{p} + \frac{\|b\|^q}{q}. \tag{1.12}$$

Demonstração. Vamos dividir em casos. Caso $\|a\|\|b\| = 0$ é trivial. Caso $\|a\|^p = \|b\|^q$, como p e q são conjugados temos $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Logo

$$\begin{aligned} \|a\|\|b\| &= \|a\|(\|b\|^q)^{1/q} = \|a\|\|a\|^{p/q} = \|a\|^{p/p}\|a\|^{p/q} \\ &= \|a\|^{p(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} = \|a\|^p 1 = \|a\|^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{\|a\|^p}{p} + \frac{\|b\|^q}{q}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Agora se $\|a\|^p \neq \|b\|^q$, usamos a função exponencial, a qual é estritamente convexa. Então para todo $t \in (0,1)$ e $x, y \in \mathbb{R}$ com $x \neq y$, temos

$$e^{tx+(1-t)y} \leq te^x + (1-t)e^y. \tag{1.14}$$

Assim tomando $t = 1/p$ o que implica $1 - t = 1/q$ e $x = \ln \|a\|^p$ e $y = \ln \|b\|^q$ temos que

$$\|a\|\|b\| = e^{\ln \|a\|\|b\|} = e^{\left(\frac{\ln \|a\|^p}{p} + \frac{\ln \|b\|^q}{q}\right)} \leq \frac{e^{\ln \|a\|^p}}{p} + \frac{e^{\ln \|b\|^q}}{q} = \frac{\|a\|^p}{p} + \frac{\|b\|^q}{q}. \tag{1.15}$$

□

1.1.4 Topologia Fraca

Definição 19. *[3] Em um espaço normado E dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E converge fracamente se existe um $x \in E$ com $x'(x) = \lim x'(x_n)$, $\forall x' \in E'$, onde E' denota o dual de E. O ponto x é chamado de limite fraco da sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, denotamos $x_n \rightharpoonup x$.*

Definição 20. *[3] Dizemos que K é compacto na topologia fraca ou dito fracamente compacto se, e somente se, toda sequência em K tem uma subsequência que converge fracamente para um elemento de K.*

Definição 21. *[10] Um operador $T : X \to Y$ é compacto se $\overline{T(B)}$ é compacto para todo B limitado de X ou se para toda sequência (x_n) limitada, existe $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ tal que (Tx_{n_k}) é convergente.*

Definição 22. *[3] Seja E um espaço normado e seja E' seu dual topológico. A topologia fraca de E, que denotaremos por $\sigma(E, E')$, é a topologia em E que tem como base de vizinhanças de $x_0 \in E$, os conjuntos*

$$v(x_0, \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, \epsilon) = \{x \in E; |\phi_j(x_0 - x)| < \epsilon \text{ para cada } j = 1, 2, ..., n\}$$

com $\epsilon > 0$ e $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \in E'$ e $n \in \mathbb{N}$.
Quando A for compacto em $(E, \sigma(E, E'))$, $A \subset E$, A é fracamente compacto. Além disso, um espaço munido com a topologia fraca é separável.

1.2 Aplicações Multívocas

Seja X um espaço de normado. Um operador é uma aplicação de X em $P(X)$, sendo que $P(X)$ significa partes de X.

Definição 23. *[7] Seja $\mathscr{X}$ um espaço Banach real e D um subconjunto mensurável em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Uma aplicação $E : D \to 2^{\mathscr{X}}$ é chamada mensurável se para cada fechado $\mathscr{C}$ de $\mathscr{X}$ o conjunto*

$$E^{-1}(\mathscr{C}) = \{y \in D; E(y) \cap \mathscr{C} \neq \varnothing\}$$

é Lebesgue mensurável.

Além disso, por uma seleção de $E : D \to 2^{\mathscr{X}}$*, queremos dizer uma função* $f : D \to \mathscr{X}$ *tal que* $f(y) \in E(y)$ *quase em todo ponto* y *em* D*. Denotaremos por*

$$Sel\ E = \{f; f : D \to \mathscr{X},\ f \text{ é uma seleção mensurável de } E\}.$$

Definição 24. *[10] Uma aplicação* $G : U \to P(X)$ *é semicontínua superiormente (fracamente semicontínua superiormente) em* $u \in U$*, se*

i) $G(u)$ *é não vazio, limitado, fechado e convexo,*

ii) *Para cada subconjunto* D *aberto (fracamente aberto) em* X *satisfazendo* $G(u) \subset D$*, existe uma vizinhança* V *de* u*, tal que* $G(v) \subset D$*, para cada* $v \in V$*.*

Se G *é semicontínua superiormente (fracamente semicontínua superiormente) em cada* $u \in U$*, então ela é semicontínua superiormente (fracamente semicontínua superiormente) em* U*.*

Observação 25. *[7] Se* $\mathscr{X}$*,* $\mathscr{Y}$ *são dois espaços Banach reais,* D *é subconjunto Lebesgue mensurável em* $\mathbb{R}^n$*,* $n \geq 1$*,* $g : D \to \mathscr{Y} \backslash \{\varnothing\}$ *é mensurável, e* $E : \mathscr{Y} \to 2^{\mathscr{X}}$ *é semicontínua superiormente, então* $E \circ g : D \to 2^{\mathscr{X}} \backslash \{\varnothing\}$ *é mensurável.*

Teorema 26. *[10] Se* X *é separável,* M *é subconjunto Lebesgue mensurável em* $\mathbb{R}^n$*,* $n \geq 1$ *e* $G : M \to P(X)$ *é uma aplicação mensurável com valores não vazios e fechados, então* G *tem pelo menos uma seleção mensurável.*

Teorema 27. *[7] Teorema do Ponto Fixo: Seja um subconjunto* $\mathscr{K}$ *não vazio, fracamente compacto em um espaço de Banach real* $\mathscr{X}$ *e seja* $E : \mathscr{K} \to 2^{\mathscr{K}} \backslash \{\varnothing\}$ *tal que para cada* $u \in \mathscr{K}$*,* $E(u)$ *é fechado e convexo. Se o gráfico de* E *é fracamente* $\times$ *fracamente sequencialmente fechado, então* E *tem pelo menos um ponto fixo, isto é, existe pelo menos um elemento* $u \in \mathscr{K}$ *tal que* $u \in E(u)$*.*

Teorema 28. *[7] Seja* D *um subconjunto não vazio e Lebesgue mensurável de* $\mathbb{R}^n$*,* $n \geq 1$*,* $\mathscr{U}$ *um espaço topológico, e* $\mathscr{X}$ *um espaço de Banach real. Se* $E : \mathscr{U} \to 2^{\mathscr{X}} \backslash \{\varnothing\}$ *é* *fracamente semicontínua superiormente e* $u_n : D \to \mathscr{U}$, $f_n \in Sel\ E(u_n)$ *para* $n \in \mathbb{N}$ *satisfazendo*

$$f_n \rightharpoonup f \text{ (fracamente) em } L^1(D; \mathscr{X}) \text{ e } u_n \to u \text{ quase sempre em } D, \tag{1.16}$$

então $f \in Sel\ E(u)$.

1.3 Operador Monótono

Um operador A *é uma aplicação de* H *em* $P(H)$. *Se para todo* $x \in H$, Ax *contém no máximo um elemento, ele é dito unívoco, caso contrário é multívoco.*

Definição 29. *[10] Seja* $D(A) = \{x \in H; Ax \neq \varnothing\}$ *o domínio de* A. *Dizemos que um operador* A *em* H *é monótono se para todo* $x,\ y \in D(A)$,

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq 0. \tag{1.17}$$

O conjunto dos operadores monótonos é definido pela inclusão dos gráficos definidos da seguinte forma:

Definição 30. *O gráfico de* A *em* $H \times H$ *é dado por* $A = \{(x, y); y \in Ax\}$.

1.3.1 Operador Maximal Monótono

Definição 31. *O operador monótono* A *de* H *é maximal monótono se ele não está propriamente contido em qualquer outro operador monótono de* H.

Ou seja, A *é maximal monótono se e somente se* A *é monótono e, se* $(x, y) \in H \times H$ *for tal que*

$$\langle y - A\xi, x - \xi\rangle \geq 0, \tag{1.18}$$

para todo $\xi \in D(A)$, *então* $y \in Ax$.

1.3.2 Operador m-acretivo

Definição 32. *[7] O operador $A : D(A) \subset L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ é chamado acretivo se para cada $u, \overline{u} \in D(A)$ temos*

$$(u - \overline{u}, A(u) - A(\overline{u}))_+ \geq 0. \tag{1.19}$$

Onde $(.,.)_+$ é o semi produto interno em $L^1(\Omega)$. Além disso, se para cada $\lambda > 0$, $I + \lambda A$ é sobrejetiva, então A é chamado $m-$acretivo.

1.4 Definição de Semigrupo

Definição 33. *Seja X um espaço métrico completo. Um semigrupo é uma família de operadores contínuos $\{T(t) : X \to X,\ t \geq 0\}$ com as propriedades*

i) *$T(0)x = x$, para todo $x \in X$,*

ii) *$T(t)T(s) = T(t+s)$ para todo $t, s \in [0, \infty)$.*

Definição 34. *Um semigrupo $\{T(t) : X \to X,\ t \geq 0\}$ é dito compacto ou de classe $\mathscr{K}$ se para cada $t > 0$, o operador $T(t) : X \to X$ for compacto.*

Definição 35. *Seja A um operador maximal monótono em um espaço de Hilbert H. Existe um semigrupo $\{S(t); t \geq 0\}$ definido em $\overline{D(A)}$ associado ao problema*

$$\frac{du}{dt} + Au = 0,\ u(0) = u_0 \in \overline{D(A)}.$$

Dizemos que o semigrupo $\{S(t); t \geq 0\}$ é gerado por A.

1.5 Teorema de Baras

O Teorema de Baras é um resultado importante para a prova dos resultados do Capítulo 2 e 3. Tal teorema se refere às propriedades de compacidade do conjunto de soluções. Aqui vamos enunciar a versão com operador m-acretivo e com o operador maximal monótono *nas hipóteses para aplicar em diferentes tipos de sistemas de equações diferenciais do tipo*

$$\begin{cases} \frac{du^f}{dt} + Au^f \ni f \\ u^f(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.20}$$

Definição 36. *[10] Um subconjunto K em $L^1([a,b];X)$ é uniformemente integrável se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$\int_E \|f(t)\|_X dt \leq \epsilon$$

para cada subconjunto mensurável E em $[a,b]$ cuja medida de Lebesgue é menor que $\delta(\epsilon)$, e uniformemente para $f \in K$.

Teorema 37. *[10] Se $A : D(A) \subset H \to P(H)$ é um operador maximal monótono, A gera um semigrupo compacto, u_0 é um elemento fixo em $\overline{D(A)}$, e K é um subconjunto uniformemente integrável em $L^1([0,T];H)$, então o conjunto $M(K) = \{u^f; f \in K\}$ é relativamente compacto em $C([0,T];H)$.*

Teorema 38. *[7] (Teorema de Baras) Se $A : D(A) \subset X \to 2^X$ é um operador $m-$acretivo, $-A$ gera um semigrupo compacto, u_0 é um elemento fixo de $D(A)$ e K é um conjunto uniformemente integrável em $L^1([a,b];X)$, então o conjunto $M(K)$ é relativamente compacto em $C([a,b],X)$.*

1.6 Solução Forte

Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$(P) \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t), \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

onde A é um operador maximal monótono em um espaço de Hilbert H, $f \in L^1(0,T;H)$ e $u_0 \in H$. Além disso, suponha $\overline{\mathscr{D}(A)} = H$.

Definição 39. *Uma função $u : [0,T] \to H$ é chamada uma solução forte de (P) em $[0,T]$ se* *(i)* $u \in \mathscr{C}([0,T];H)$;

(ii) u *é absolutamente contínua em qualquer subconjunto compacto de* $(0,T)$;

(iii) $u(t) \in D(A)$ *para quase todo* $t \in [0,T]$, $u(0) = u_0$ *e satisfaz a equação em* (P) *para quase todo* $t \in [0,T]$.

Definição 40. *Uma função* $u : [0,T] \to H$ *é chamada uma solução fraca de* (P) *em* $[0,T]$ *se é um limite de soluções fortes na topologia de* $\mathscr{C}([0,T];H)$.

Capítulo 2

Existência de Solução de um Sistema Semi-difusivo com Operador m-acretivo

Este capítulo é baseado no artigo [7].

2.0.1 Existência Local

Vamos considerar a equação de difusão não linear

$$\begin{cases} u_t - \Delta\varphi(u) = f & em\ (0,T)\times\Omega \\ \varphi(u) = 0 & em\ (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & em\ \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ *é domínio limitado,* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua não decrescente,* $\varphi(0) = 0$, $f \in L^1(0,T;L^1(\Omega))$, *e* $u_0 \in L^1(\Omega)$. *Por uma solução fraca de (2.1) estamos nos referindo a uma função* $u \in C([0,T];L^1(\Omega))$ *tal que* $\varphi(u) \in L^1(0,T;L^1(\Omega))$ *e que satisfaça (2.1) no sentido das distribuições sobre* $(0,T)\times\Omega$.

Para cada $u_0 \in L^1(\Omega)$ *e* $f \in L^1(0,T;L^1(\Omega))$ *o problema (2.1) tem uma única solução fraca* $u = W(u_0, f)$ *(veja em [4]). Além disso, se* $u_0 \in L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^1(0,T;L^p(\Omega))$ *para* *algum* $p \in [1, \infty]$, *a única solução fraca de (2.1) satisfaz*

$$\|u(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^p(\Omega)} + \int_0^t \|f(s)\|_{L^p(\Omega)} ds \tag{2.2}$$

para cada $t \in [0, T]$ *(veja [2]). Ainda, se* u_0 *e* f *são limitadas, isto é,* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ *e* $f \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ *então*

$$u \in W^{1,2}(0, T_0; H^{-1}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T_0; L^\infty(\Omega)), \tag{2.3}$$

$$\varphi(u) \in L^2(0, T_0; {H_0}^1(\Omega)). \tag{2.4}$$

Observação 41. *[7] Seja* A *um operador acretivo,* $u \in C([0, T]; L^1(\Omega))$ *e* $f \in L^1(0, T; L^1(\Omega))$. *Então* u *é solução fraca da equação* $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ *se e somente se* u *verifica*

$$\|u(t) - x\|^2 \leq \|u(s) - x\|^2 + 2 \int_s^t (u(\tau) - x, f(\tau) - y)_+ d\tau \tag{2.5}$$

para cada $x \in D(A)$, $y \in Ax$ *e* $0 \leq s \leq t \leq T$.

Definição 42. *[7] Por uma aplicação de* $\mathbb{R}^2$ *em* $2^{\mathbb{R}}$ *semicontínua superior queremos dizer uma aplicação multívoca* $F : \mathbb{R}^2 \to 2^{\mathbb{R}}$ *tal que para cada par* $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $F(u, v)$ *é um intervalo compacto e não vazio em* $\mathbb{R}$, *e para cada conjunto fechado* $\mathscr{C}$ *em* $\mathbb{R}$ *o conjunto*

$$F^{-1}(\mathscr{C}) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; F(u, v) \cap \mathscr{C} \neq \varnothing\} \tag{2.6}$$

é fechado.

Uma aplicação $A : D(A) \to H$ *é dita* $m-$*dissipativa se*

$$\langle Ax, x \rangle \leq 0$$

para todo $x \in D(A)$ *e* $\lambda I - A$ *é sobrejetiva para todo* $\lambda > 0$.

Definição 43. *[7] Uma aplicação multívoca* $G : \mathbb{R}^2 \to 2^{\mathbb{R}}$ *é chamada com variáveis separáveis se existe* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua e uma aplicação* $m-$*dissipativa* $H : \mathbb{R}^2 \to 2^{\mathbb{R}} \backslash \{\varnothing\}$ *tal que ou* g *é não negativa e*

$$G(u, v) = g(u)H(v) \text{ para cada } (u, v) \in \mathbb{R}^2 \tag{2.7}$$

ou

$$G(u,v) = g(u) + H(v) \text{ para cada } (u,v) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.8}$$

Definição 44. *[16] O par (F,G) das aplicações $F,\ G : \mathbb{R}^2 \to 2^{\mathbb{R}}$, que leva subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^2$ em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$, é chamado positivamente sublinear se existir $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ e $m_0 > 0$, tal que para cada $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ com $|u| > m_0$ ou $|v| > m_0$ para o qual existe $f_0 \in F(u,v)$ satisfazendo $(u, f_0)_+ > 0$ ou existe $g_0 \in G(u,v)$ com $(v, g_0)_+ > 0$, temos ambos*

$$|f| \leq a|u| + b|v| + c \text{ e } |g| \leq a|u| + b|v| + c \tag{2.9}$$

para cada $f \in F(u,v)$ e cada $g \in G(u,v)$. Usamos a condição acima de sublinearidade positiva da seguinte maneira: Se $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ e

$$|u| \leq m_0 \text{ e } |v| \leq m_0 \tag{2.10}$$

não precisamos de condições em $F(u,v)$ e $G(u,v)$ pois F, G aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados, consequentemente, $(f,u)_+$ e $(g,v)_+$ são limitados para cada $f \in F(u,v)$ e $g \in G(u,v)$. Se (2.10) não se aplica a algum par (u,v), então $|u| > m_0$ ou $|v| > m_0$. Nesse caso, também não precisamos de condições em $F(u,v)$ e $G(u,v)$ se

$$(u,f)_+ \leq 0 \text{ e } (v,g)_+ \leq 0, \text{ para todos os } f \in F(u,v) \text{ e } g \in G(u,v). \tag{2.11}$$

No entanto, se ambos (2.10) e (2.11) não forem satisfeitos, ou seja, se $|u| > m_0$ ou $|v| > m_0$ e $(u, f_0)_+ > 0$ ou $(v, g_0)_+ > 0$ para algum $f_0 \in F(u,v)$ ou algum $g_0 \in G(u,v)$ então impomos a condição de que $|f| \leq a|u| + b|v| + c$ e $|g| \leq a|u| + b|v| + c$ para cada $f \in F(u,v)$ e para cada $g \in G(u,v)$.

Teorema 45. *[7] Se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, estritamente crescente e $\varphi(0) = 0$ então para cada $u_0 \in L^1(\Omega)$ fixo e cada subconjunto $\mathscr{K}$ fracamente relativamente compacto em $L^\infty(0,T; L^\infty(\Omega))$, o conjunto de todas as soluções fracas de (2.1) onde f varia em $\mathscr{K}$, $\{W(u_0, f); f \in \mathscr{K}\}$, é fortemente relativamente compacto em $C([0,T]; L^1(\Omega))$.*

Corolário 46. *[7] Se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínuo, estritamente crescente e $\varphi(0) = 0$ então para cada $u_0 \in L^\infty$ fixado e cada conjunto limitado $\mathscr{K}$ em $L^\infty(0,T; L^\infty(\Omega))$ a aplicação $f \mapsto$*

$W(u_0, f)$, a única solução fraca de (2.1) correspondente para u_0 e f, é sequencialmente contínua de $\mathscr{K}$ dotado com a topologia fraca de $L^1(0,T;L^1(\Omega))$ em $C([0,T];L^1(\Omega))$ dotado da topologia forte.

Demonstração. Seja $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ fixado e seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ tal que $f_n \rightharpoonup f$ em $L^1(0,T;L^1(\Omega))$. Pelo Teorema 45 o conjunto $\{W(u_0,f); f \in \mathscr{K}\}$ é relativamente fortemente compacto em $C([0,T];L^1(\Omega))$. Para completar a prova, notamos que o único ponto limite em $C([0,T];L^1(\Omega))$ de $(W(u_0,f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é exatamente $W(u_0,f)$, pois o único ponto limite de $(W(u_0,f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no sentido das distribuições sobre $(0,T)\times\Omega$ é $W(u_0,f)$. □

A demonstração do próximo teorema pode ser encontrada no Apêndice.

Teorema 47. *[7] Considere o sistema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta\varphi(u) \in F(u,v) & (0,T)\times\Omega \\ v_t - \Delta\psi(v) \in G(u,v) & (0,T)\times\Omega \\ \varphi(u) = \psi(v) = 0 & (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & \\ v(0,x) = v_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{2.12}$$

sendo que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ é um domínio suave e limitado.

Se o sistema for difusivo (φ e ψ são ambas estritamente crescentes) e $F,\ G : \mathbb{R}^2 \to 2^{\mathbb{R}}$ são semicontínuas superiormente, então para cada par $u_0,\ v_0 \in L^\infty(\Omega)$, existe $T_0 \in (0,T]$ tal que (2.12) tem pelo menos uma solução fraca (u,v) definida em $[0,T_0]$ e satisfazendo

$$u,\ v \in W^{1,2}(0,T_0;H^{-1}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T_0;L^\infty(\Omega)) \tag{2.13}$$

$$\varphi(u),\ \psi(v) \in L^2(0,T_0;{H_0}^1(\Omega)). \tag{2.14}$$

Se em adição o par (F,G) é sublinear positivamente, a mesma conclusão é verdade com $T_0 = T$.

Antes de estabelecer o próximo teorema, vejamos alguns resultados. Primeiro, vamos considerar os problemas

$$\begin{cases} v_t - \Delta\psi(v) \in gH(v) & (0,T)\times\Omega \\ \psi(v) = 0 & (0,T)\times\partial\Omega \\ v(0,x) = v_0(x) & em\ \Omega, \end{cases} \tag{2.15}$$

e

$$\begin{cases} v_t - \Delta\psi(v) \in g + H(v) & (0,T)\times\Omega \\ \psi(v) = 0 & (0,T)\times\partial\Omega \\ v(0,x) = v_0(x) & em\ \Omega. \end{cases} \tag{2.16}$$

Definição 48. *[5] Chamamos a aplicação $H : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}\backslash\{\varnothing\}$ de $m-$dissipativa se para cada v, $\overline{v} \in \mathbb{R}$ e $w \in H(v)$, $\overline{w} \in H(\overline{v})$, temos $(v-\overline{v})(w-\overline{w}) \leq 0$, e para $\lambda > 0$, $I - \lambda H$ é sobrejetiva. Denotamos por $J_\lambda = (I-\lambda H)^{-1}$ e $H_\lambda = (1/\lambda)(I - J_{\lambda H})$ o resolvente e a aproximação de Yosida de H, respectivamente. Temos também que para cada $\lambda > 0$, H_λ é Lipschitz em $\mathbb{R}$ com constante de Lipschitz $1/\lambda$, e que*

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} H_\lambda(v) = H^0(v) \tag{2.17}$$

para cada $v \in \mathbb{R}$, onde $H^0(v)$ é o valor mínimo absoluto em $H(v)$.

Enunciaremos dois lemas para ajudar na prova da existência local de solução do próximo teorema.

Lema 49. *[7] Se $H : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}\backslash\{\varnothing\}$ é $m-$dissipativo, então para cada $g \in L^\infty(0,T_0;L^\infty(\Omega))$ não negativa e cada $v_0 \in L^\infty(\Omega)$ o problema (2.15) tem uma única solução fraca $v = W(v_0,g)$ definida em $[0,T]$. Em adição, para cada subconjunto limitado B em $L^\infty(0,T_0;L^\infty(\Omega)) \times L^\infty(\Omega)$ existe $C = C(B) > 0$ tal que para cada (g,v_0), $(\overline{g},\overline{v}_0) \in B$ com g, $\overline{g}$ não negativas, as soluções fracas correspondentes $v = W(v_0,g)$ e $\overline{v} = W(\overline{v}_0,\overline{g})$ satisfazem*

$$\|v(t)-\overline{v}(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|v(s)-\overline{v}(s)\|_{L^1(\Omega)} + C\int_s^t \|g(\tau)-\overline{g}(\tau)\|_{L^1(\Omega)}d\tau \tag{2.18}$$

para cada $0 \leq s \leq t \leq T$.

Lema 50. *[7] Se $H : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}\backslash\{\varnothing\}$ é $m-$dissipativo, então para cada $g \in L^{\infty}(0, T_0; L^{\infty}(\Omega))$ e cada $v_0 \in L^{\infty}(\Omega)$ o problema (2.16) tem uma única solução fraca $v = W(v_0, g)$ definida em $[0, T]$. Em adição, para cada g, $\overline{g} \in L^{\infty}(0, T; L^{\infty}(\Omega))$ e cada v_0, $\overline{v}_0 \in L^{\infty}(\Omega)$ as soluções fracas correspondentes $v = W(v_0, g)$ e $\overline{v} = W(\overline{v}_0, \overline{g})$ satisfazem*

$$\|v(t) - \overline{v}(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|v(s) - \overline{v}(s)\|_{L^1(\Omega)} + \int_s^t \|g(\tau) - \overline{g}(\tau)\|_{L^1(\Omega)} d\tau \tag{2.19}$$

para cada $0 \leq s \leq t \leq T$.

Sob as hipóteses do próximo teorema somos forçados a adotar uma estratégia diferente em comparação com o Teorema 47, mesmo que seja baseado no artifício do ponto fixo oferecido pelo Teorema 27, pois ψ é não decrescente e não estritamente crescente como pedido no Corolário 46.

Teorema 51. *[7] Considere o sistema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta\varphi(u) \in F(u, v) & (0, T) \times \Omega \\ v_t - \Delta\psi(v) \in G(u, v) & (0, T) \times \Omega \\ \varphi(u) = \psi(v) = 0 & (0, T) \times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & \\ v(0, x) = v_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.20}$$

sendo que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ é um domínio suave e limitado. Considere $u_0, v_0 \in L^{\infty}(\Omega)$. Se o sistema é semi-difusivo (φ é estritamente crescente e ψ é não decrescente), $F : \mathbb{R}^2 \to 2^{\mathbb{R}}$ é semicontínua superiormente e $G : \mathbb{R}^2 \to 2^{\mathbb{R}}$ é de variáveis separáveis, então existe $T_0 \in (0, T]$ tal que (2.20) tem pelo menos uma solução fraca (u, v) definida em $[0, T_0]$ e satisfazendo

$$u,\ v \in W^{1,2}(0, T_0; H^{-1}(\Omega)) \cap L^{\infty}(0, T_0; L^{\infty}(\Omega)) \tag{2.21}$$

$$\varphi(u),\ \psi(v) \in L^2(0, T_0; {H_0}^1(\Omega)). \tag{2.22}$$

Se, em adição, o par (F, G) é positivamente sublinear, a conclusão permanece válida para $T_0 = T$.

Capítulo 3

Sistema Semi-difusivo com Expoentes Variáveis

Os resultados deste capítulo são inéditos e geraram o artigo [15].

Consideraremos neste capítulo o seguinte sistema semi-difusivo

$$(S)\begin{cases} u_t - div(|\nabla u|^{p(\cdot)-2}\nabla u) \in F(u,v) & t > 0 \\ v_t \in G(u,v) & t > 0 \\ u(t,x) = v(t,x) = 0 & t \geq 0,\ x \in \partial\Omega \\ (u(0,x), v(0,x)) = (u_0(x), v_0(x)) & em\ H \times H := L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.1}$$

com $F : H \times H \to 2^H$ *semicontínua superiormente e* $G : H \times H \to 2^H$ *de variáveis separáveis da forma* $G(u,v) = g(u) + \mathscr{H}(v)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, *um domínio suave limitado. O expoente* $p(\cdot) \in C(\overline{\Omega})$ *satisfaz*

$$p^+ := \max_{x \in \overline{\Omega}} p(x) > p^- := \min_{x \in \overline{\Omega}} p(x) \geq p > 2.$$

Considere $Y := W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ *com* $p^- > 2$. *Tem-se* $Y \subset H \subset Y^*$ *com inclusões contínuas e densas. Referimos o leitor a [8, 9] e referências lá contidas para ver propriedades dos espaços de Lebesgue e Sobolev com expoentes variáveis. Em particular, com*

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : u \ \text{é mensurável},\ \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}$$

e $L^\infty_+(\Omega) := \{q \in L^\infty(\Omega) : \text{ ess inf } q \geq 1\}$, *defina*

$$\rho(u) := \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx, \qquad \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} := \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\Big(\frac{u}{\lambda}\Big) \leq 1\right\}$$

para $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *e* $p \in L^\infty_+(\Omega)$. *Sabe-se que* Y *é um espaço de Banach com norma*

$$\|u\|_Y := \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

Considere o operador A *definido em* Y *tal que para cada* $u \in Y$ *é associado o seguinte elemento de* Y^*, $Au : Y \to \mathbb{R}$ *dado por*

$$Au(v) := \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx.$$

Os autores em [14] provaram que:

- *O operador* $A : Y \to Y^*$, *com domínio* $Y = W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, *é maximal monótono e* $A(Y) = Y^*$.

- *A realização do operador* A *em* $H = L^2(\Omega)$, *denotado por*

$$A_H u = -\Delta_{p(x)}u = -div(|\nabla u|^{p(\cdot)-2}\nabla u),$$

  com $D(A_H) = \{u \in Y;\ Au \in H\}$ *e* $A_H u = Au\ \forall\ u \in D(A_H)$, *é maximal monótono em* H.

- *O operador* A_H *é a subdiferencial* $\partial\varphi_{p(\cdot)}$ *da aplicação convexa, própria e semicontínua inferiormente* $\varphi_{p(\cdot)} : L^2(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *dado por*

$$\varphi_{p(\cdot)}(u) = \begin{cases} \left[\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right] & se\ \ u \in Y \\ +\infty,\ caso\ contrário. \end{cases} \tag{3.2}$$

Podemos obter as seguintes estimativas para o operador

$$\langle Au, u\rangle_{Y^*,Y} \geq \frac{1}{2^{p^+}}\begin{cases} \|u\|_Y^{p^+} & se\ \|u\|_Y < 1, \\ \|u\|_Y^{p^-} & se\ \|u\|_Y \geq 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - \Delta_{p(x)} u = f \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

com condições de contorno Dirichlet homogêneas, sendo Ω *um domínio suave limitado em* $\mathbb{R}^n$*,* $n \geq 1$*,* $p(x) \in C(\overline{\Omega})$ *com* $p(x) > 2$ *para quase todo* $x \in \Omega$*,* $u_0 \in H = L^2(\Omega)$ *e* $f \in L^1(0,T;H)$*. Como o operador* $-\Delta_{p(x)}$ *é maximal monótono, segue imediatamente do Teorema 3.4 em [5] o seguinte*

Proposição 52. *O problema (3.4) tem uma única solução fraca.*

Definição 53. *Uma solução forte de* (S) *é um par* (u,v) *satisfazendo:* u*,* $v \in C([0,T];H)$ *para o qual existem* f*,* $w \in L^1(0,T;H)$*,* $f(t) \in F(u(t),v(t))$*,* $w(t) \in G(u(t),v(t))$ *q.t.p. em* $(0,T)$*, e tal que* (u,v) *é uma solução forte (ver Definição 39) sobre* $(0,T)$ *para o sistema* (P_1) *abaixo:*

$$(P_1) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f \\ \dfrac{dv}{dt} = w \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0. \end{cases}$$

3.1 Existência de Solução Local

Teorema 54. *Suponha que* $F : H \times H \to 2^H$ *é semicontínua superiormente,* $G : H \times H \to 2^H$ *é de variáveis separáveis da forma* $G(u,v) = \tilde{g}(u) + \mathscr{H}(v)$ *e* F *e* $\tilde{g}$ *levam limitados em limitados. Então para cada* $(u_0, v_0) \in H \times H$ *existe* $T_0 \in (0,T]$ *tal que o sistema (S) tem pelo menos uma solução fraca* (u,v) *definida em* $[0,T_0]$*. Se em adição, o par* (F,G) *é positivamente sublinear, a mesma conclusão é válida com* $T_0 = T$*.*

Demonstração. Seja u_0, $v_0 \in L^2(\Omega)$ e escolhemos $m > 0$ satisfazendo

$$\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + 1 \leq m \ e \ \|v_0\|_{L^2(\Omega)} + 1 \leq m. \tag{3.5}$$

Como F é semicontínua superiormente, $\tilde{g}$ é contínua que leva limitados em limitados e H é definida em toda parte e maximal monótono, é sempre possível escolher $r \geq M > 0$ e

$T_0 \in (0, T]$ tal que

$$\|f(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq M \text{ } para \text{ } cada \text{ } f \in F(u, v) \tag{3.6}$$

sempre que $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq m$, $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq m$,

$$\|\tilde{g}(u(t))\|_{L^2(\Omega)} \leq M \text{ } para \text{ } u(t) \in H, \tag{3.7}$$

pois $\tilde{g}$ é contínua e leva limitados em limitados, logo limitada, e

$$T_0 r \leq 1 \text{ } e \text{ } T_0 M \leq 1. \tag{3.8}$$

Agora definimos $\mathscr{K}$ subconjunto em $L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$ por

$$\mathscr{K} = \{f;\ f \in L^2(0, T_0; L^2(\Omega)),\ \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq r \text{ para quase todo } t \in [0, T_0]\}. \tag{3.9}$$

Temos que $\mathscr{K}$ é não vazio e fracamente compacto em $L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$. De fato, seja $\{(f_n)\}$ uma sequência em $\mathscr{K}$. Queremos mostrar que existe subsequência que converge fracamente em $L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$ para algum elemento de $\mathscr{K}$. Como $\|f_n(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq r$ q.t.p. em $[0, T_0]$, então por (3.8)

$$\begin{aligned} \|f_n(t)\|^2_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} &= \int_0^{T_0} \|f_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq \int_0^{T_0} r^2 dt = r^2 T_0 \leq r. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Portanto, f_n é uma sequência limitada em $L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$. Logo, podemos extrair uma subsequência $\{f_{nk}\} \subset \{f_n\}$ tal que $f_{nk} \rightharpoonup f$ fracamente em $L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$ para algum $f \in L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$. Além disso,

$$\|f\|_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|f_{nk}\|_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} \leq \liminf r = r. \tag{3.11}$$

Logo, $\|f\|_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} \leq r$ q.t.p. em $[0, T_0]$ e portanto $f \in \mathscr{K}$. Então, existe $\{(f_{n_k})\} \subset \{(f_n)\} \in \mathscr{K}$ tal que

$$f_{n_k} \rightharpoonup f \text{ } em \text{ } L^2(0, T_0; L^2(\Omega)). \tag{3.12}$$

Agora definimos o operador $P : \mathscr{K} \to C([0,T_0], L^2(\Omega))$ por $Pf = u$, para $f \in \mathscr{K}$, onde u é solução fraca única do problema

$$\begin{cases} u_t - div(|\nabla u|^{p(\cdot)-2}\nabla u) = f & t > 0 \\ u(t,x) = 0 & t \geq 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) & em\ L^2(\Omega) \end{cases} \tag{3.13}$$

dada por [14]. De (2.2), (3.5) e (3.8) temos que $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq m$, para $t \in [0,T_0]$. De fato,

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq m - 1 + \int_0^{T_0} r ds = m - 1 + T_0 r \leq m \tag{3.14}$$

para $t \in [0,T_0]$. Além disso, definimos o operador

$$Q : \mathscr{K} \to C([0,T_0], L^2(\Omega)) \tag{3.15}$$

por $Qf = v$, para $f \in \mathscr{K}$, onde v é a solução fraca única do problema

$$\begin{cases} v_t - \mathscr{H}(v) \in \tilde{g}(Pf) & t > 0 \\ v(t,x) = 0 & t \geq 0,\ x \in \partial\Omega, \\ v(0,x) = v_0(x) & em\ L^2(\Omega). \end{cases} \tag{3.16}$$

Temos que o operador Q está bem definido em todo $\mathscr{K}$ uma vez que as soluções u e v sempre existem e são únicas pois os operadores são maximais monótonos em $L^2(\Omega)$. Em adição, de (2.2) temos

$$\|v(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v_0\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^{T_0} \|\tilde{g}(u(s))\|_{L^2(\Omega)} ds. \tag{3.17}$$

E por (3.5), (3.7) e (3.8) sabemos que $\|v_0\|_{L^2(\Omega)} + 1 \leq m$, $\|\tilde{g}(u(t))\|_{L^2(\Omega)} \leq M$ e $T_0 M \leq 1$ respectivamente. Logo

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|v_0\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^{T_0} \|\tilde{g}(u(s))\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq m - 1 + M \int_0^{T_0} ds = m - 1 + T_0 M \leq m. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Logo, temos $\|Qf(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq m$ para $t \in [0,T_0]$.

Finalmente, definimos o operador $S : \mathscr{K} \to 2^{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))}$ por

$$S(f) = Sel\ F(Pf, Qf) \tag{3.19}$$

para cada $f \in \mathscr{K}$.

Como F é semicontínua superiormente, S tem valores não vazios. Além disso, S tem valores fracamente compactos. De fato, seja f_n uma sequência de $Sel\ F(Pf, Qf)$. Queremos mostrar que existe $\{f_{n_k}\}$, subsequência $\{f_n\}$, tal que $\{f_{n_k}\}$ converge fracamente em $L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$ para algum elemento da $Sel\ F(Pf, Qf)$. Logo, como $\|f_n\|_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} \leq r$, $\{f_n\}$ é uma sequência limitada em $L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$, logo podemos extrair uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ tal que

$$f_{n_k} \rightharpoonup \overline{f}\ (fracamente)\ em\ L^2(0, T_0; L^2(\Omega)) \tag{3.20}$$

para algum $\overline{f} \in L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$. Agora, basta mostrar que $\overline{f} \in Sel\ F(Pf, Qf)$. Tomemos C um fechado em H, o conjunto $F^{-1}(C) = \{(u, v) \in H \times H; F(u, v) \cap C \neq \varnothing\}$ é mensurável pela Observação 25. Além disso, $\overline{f} \in F(u, v)$ q.t.p., $(u, v) \in H \times H$ é uma seleção mensurável de F, logo $\overline{f} \in Sel\ F(u, v)$.

Assim, para usarmos o Teorema do ponto fixo, temos que mostrar que S leva elementos de $\mathscr{K}$ para $2^{\mathscr{K}}$ e seu gráfico é fracamente $\times$ fracamente sequencialmente fechado. Começaremos a mostrar que S aplica $\mathscr{K}$ em subconjuntos de $\mathscr{K}$. Sabemos dos passos anteriores que $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq m$ e $\|\tilde{g}(u(t))\|_{L^2(\Omega)} \leq M \leq r$. Em particular, para todo $\hat{g} \in S(f)$ temos $\|\hat{g}\|_{L^2(\Omega)} \leq M \leq r$, para todo $t \in [0, T_0]$. Portanto, $\hat{g} \in \mathscr{K}$, ou seja, $S(f) = Sel\ F(Pf, Qf) \in P(\mathscr{K})$. Consequentemente $S : \mathscr{K} \to 2^{\mathscr{K}}$.

Para mostrar que o gráfico de S é fracamente $\times$ fracamente sequencialmente fechado, tome o operador S com seu gráfico como $S = \{(f, g); f \in \mathscr{K},\ g \in S(f)\}$. Seja agora $((f_n, g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência no gráfico de S tal que

$$f_n \rightharpoonup f\ e\ g_n \rightharpoonup g\ em\ L^2(0, T_0; L^2(\Omega)). \tag{3.21}$$

Claramente $f \in \mathscr{K}$ já que $\mathscr{K}$ é fracamente compacto e portanto fracamente fechado, desde que um espaço munido com a topologia fraca é separável. Logo, existe único elemento $u \in C([0, T_0]; L^2(\Omega))$ tal que $u = Pf$ e único elemento $v \in C([0, T_0]; L^2(\Omega))$ tal que $v = Qf$.

Note que como $((f_n, g_n))_{n\in\mathbb{N}} \in S$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe u_n, $v_n \in C([0,T_0]; L^2(\Omega))$ tal que $u_n = Pf_n$ e $v_n = Qf_n$ e além disso, $f_n \in \ SelF(Pf_n, Qf_n)$. Assim, pelo Teorema 28, basta mostrar que $u_n \to u = Pf$ q.t.p. em $[0, T_0]$ e $v_n \to v = Qf$ q.t.p. em $[0, T_0]$ para garantirmos que $g \in Sel\ F(Pf, Qf)$.

Como u_n é solução fraca de $\frac{du_n}{dt} - div(|\nabla u_n|^{p(\cdot)-2}\nabla u_n) = f_n$, então

$$\frac{1}{2}\|u_n(t) - \theta\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|u_n(s) - \theta\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_s^t < f_n(\tau) - y, u_n(\tau) - \theta > d\tau \qquad (3.22)$$

para todo $\theta \in D(-\Delta_{p(\cdot)})$ e $y = -div(|\nabla\theta|^{p(\cdot)-2}\nabla\theta)$, para todo $0 \leq s \leq t \leq T_0$.

Precisamos mostrar agora que $\{u_n\}$ contém ao menos uma subsequência que converge para u em $C([0,T_0]; L^2(\Omega))$. Temos que o conjunto $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ é uniformemente integrável. De fato, temos que dado $\epsilon > 0$, existe $m(E) = |E| < \delta(\epsilon) = \epsilon/r$ onde

$$\int_E \|f_n\|_{L^2(\Omega)} dt \leq \int_E r dt = m(E)r = \epsilon. \qquad (3.23)$$

Portanto, o conjunto $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ é uniformemente integrável e então pelo Teorema de Baras o conjunto das soluções $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ de

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} - div(|\nabla u_n|^{p(.)-2}\nabla u_n) = f_n & t > 0 \\ u(t,x) = 0 & t \geq 0,\ x \in\ \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & em\ L^2(\Omega), \end{cases} \qquad (3.24)$$

quando f_n percorre o conjunto $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, é relativamente compacto em $C([0,T_0]; L^2(\Omega))$.

Logo, temos que existe $\overline{u} \in C([0,T_0]; L^2(\Omega))$ e uma subsequência $\{u_{nk}\} \subset \{u_n\}$ tal que u_{nk} converge para $\overline{u}$ em $C([0,T_0]; L^2(\Omega))$.

Agora, observe que como $f_n \rightharpoonup f$ em $L^1(0,T_0; L^1(\Omega))$ e $u_{nk} \to \overline{u}$ em $C([0,T_0], L^2(\Omega))$ e consequentemente $u_{nk} \to \overline{u}$ em $L^2(0,T_0; L^2(\Omega))$ então,

$$< u_{n_k} - \theta, f_{n_k} - y > \to < \overline{u} - \theta, f - y > \qquad (3.25)$$

em $L^2(0,T_0; L^2(\Omega))$ para todo $\theta \in D(-\Delta_{p(\cdot)})$ e $y = -div(|\nabla\theta|^{p(.)-2}\nabla\theta)$. De fato, temos da Proposição 14 e do Lema 15 que, cada u_n com $n \in \mathbb{N}$ e em particular cada u_{n_k} verifica

$$\|u_{n_k}(t) - \theta\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u_{n_k}(s) - \theta\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_s^t < u_{n_k}(\tau) - \theta, f_{n_k}(\tau) - y > d\tau, \qquad (3.26)$$

logo, tomando $n_k \to \infty$ temos

$$\|\overline{u}(t) - \theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\overline{u}(s) - \theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\int_s^t < \overline{u}(\tau) - \theta, f(\tau) - y > d\tau, \tag{3.27}$$

para todo $\theta \in D(-\Delta_{p(\cdot)})$ e $y = -div(|\nabla\theta|^{p(\cdot)-2}\nabla\theta)$, e portanto por [14], página 401, $\overline{u}$ é uma solução fraca de $\frac{d\overline{u}}{dt} - div(|\nabla\overline{u}|^{p(\cdot)-2}\nabla\overline{u}) = f$ com $\overline{u}(0,x) = u_0(x)$.

Como v_n é solução fraca de $\frac{dv_n}{dt} - \mathscr{H}(v_n) = g_n$, onde $-\mathscr{H}$ é maximal monótono então

$$\frac{1}{2}\|v_n(t) - \zeta\|^2 \leq \frac{1}{2}\|v_n(s) - \zeta|^2 + \int_s^t < g_n(\tau) - y, v_n(\tau) - \zeta > d\tau, \tag{3.28}$$

para todo $0 \leq s \leq t \leq T_0$.

Precisamos mostrar agora que $\{v_n\}$ contém ao menos uma subsequência que converge para v em $C([0,T_0];L^2(\Omega))$.

Temos que dado $\epsilon > 0$, existe $m(E) < \delta(\epsilon) = \epsilon/r$ onde

$$\int_E \|g_n\|_{L^2(\Omega)}dt \leq \int_E rdt = m(E)r = \epsilon. \tag{3.29}$$

Portanto, como $-\mathscr{H}$ é um operador maximal monótono e o conjunto $\{g_n; n \in \mathbb{N}\}$ é uniformemente integrável, temos pelo Teorema de Baras que o conjunto das soluções $\{v_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ de

$$\begin{cases} \frac{dv_n}{dt} - \mathscr{H}(v_n) = g_n & t > 0 \\ v(x,t) = 0 & em\ \partial\Omega \\ v(0,x) = v_0(x) & em\ L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.30}$$

quando g_n percorre o conjunto $\{g_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, é relativamente compacto em $C([0,T_0];L^2(\Omega))$.

Logo, temos que existe $\overline{v} \in C([0,T_0];L^2(\Omega))$ e uma subsequência $\{v_{n_k}\} \subset \{v_n\}$ tal que v_{n_k} converge para $\overline{v}$ em $C([0,T_0];L^2(\Omega))$.

Agora, observe que como $g_n \rightharpoonup g$ em $L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$ e $v_{n_k} \to \overline{v}$ em $C([0,T_0],L^2(\Omega))$ e consequentemente $v_{nk} \to \overline{v}$ em $L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$ então,

$$< v_{n_k}, g_{n_k} > \to < \overline{v}, g > \tag{3.31}$$

para todo $x \in D(-\mathscr{H}(v))$ e $y = -\mathscr{H}(v)$ em $L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$. De fato, temos da Proposição 14 e do Lema 15 que cada v_n com $n \in \mathbb{N}$ e em particular cada v_{n_k} verifica

$$\|v_{n_k}(t) - \zeta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|v_{n_k}(s) - \zeta\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\int_s^t < v_{n_k}(\tau) - \zeta, g_{n_k}(\tau) - y > d\tau, \tag{3.32}$$

logo, tomando $n_k \to \infty$ temos

$$\|\overline{v}(t) - \zeta\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\overline{v}(s) - \zeta\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_s^t < \overline{v}(\tau) - \zeta, g(\tau) - y > d\tau, \tag{3.33}$$

para todo $\zeta \in D(-\mathscr{H})$ e $y = -\mathscr{H}(\zeta)$ portanto por [14], $\overline{v}$ é uma solução fraca de $\frac{d\overline{v}}{dt} = \tilde{g} + \mathscr{H}(\overline{v})$ e $\overline{v}(0,x) = v_0(x)$.

Logo, pela unicidade da solução fraca $(\overline{u}, \overline{v}) = (u, v)$ e portanto, existe $\{(u_{n_k}, v_{n_k})\} \subset \{(u_n, v_n)\}$ tal que $\{(u_{n_k}, v_{n_k})\}$ converge para (u, v), onde $u = Pf$ e $v = Qf$.

Como $g_n \rightharpoonup g$ em $L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$, aplicando o Teorema 28 podemos concluir que $g \in S(f)$, e portanto S é fracamente $\times$ fracamente sequencialmente fechado.

Então, pelo Teorema do Ponto Fixo 27, existe $f \in \mathscr{K}$ tal que $f \in S(f)$. Consequentemente, $u = Pf$ e $v = Qf$ é uma solução fraca do sistema (3.1) e isto completa a prova da existência local.

A prova da existência global é análoga ao que foi feito nos Teoremas 47 e 51 (veja Apêndice). A ideia é que dado $T > 0$ arbitrário, se pode provar que cada solução de (S) na qual está definida em $[0, T_0)$, $T_0 \leq T$ pode ser estendida para $[0, T]$ se (F, G) forem aplicações positivamente sublineares em $H \times H$. $\square$

3.1.1 Existência do Atrator Global

Para estudar o comportamento assintótico das soluções do sistema (S) trabalharemos com Semigrupos multívocos definidos por semifluxos generalizados.

Definição 55. *[1] Um* ***semifluxo generalizado*** *$\mathscr{G}$ em X é uma família de aplicações $\varphi : [0, \infty) \to X$ satisfazendo as condições:*

(H1) Para cada $z \in X$ existe pelo menos um $\varphi \in \mathscr{G}$ com $\varphi(0) = z$.

(H2) Se $\varphi \in \mathscr{G}$ e $\tau \geq 0$, então $\varphi^\tau \in \mathscr{G}$, onde $\varphi^\tau(t) := \varphi(t + \tau), \forall\, t \in [0, \infty)$.

(H3) Se $\varphi, \psi \in \mathscr{G}$, e $\psi(0) = \varphi(t)$ para algum $t \geq 0$, então $\theta \in \mathscr{G}$, onde

$$\theta(\tau) := \begin{cases} \varphi(\tau) & \textit{para } \tau \in [0, t] \\ \psi(\tau - t) & \textit{para } \tau \in (t, \infty). \end{cases} \tag{3.34}$$

(H4) Se $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{G}$ *e* $\varphi_j(0) \to z$*, então existe uma subsequência* $\{\varphi_\mu\}$ *de* $\{\varphi_j\}$ *e* $\varphi \in \mathscr{G}$ *com* $\varphi(0) = z$ *tal que* $\varphi_\mu(t) \to \varphi(t)$ *para cada* $t \geq 0$.

Definição 56. *O* ***Semigrupo Multívoco*** $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ ***definido por*** $\mathscr{G}$ *é a família de operadores multívocos* $T(t) : P(X) \to P(X)$ *tal que, para cada* $t \geq 0$,

$$T(t)E := \{\varphi(t);\ \varphi \in \mathscr{G} \text{ com } \varphi(0) \in E\}.$$

Definição 57. *Seja* $A, E \in P(X)$*. Dizemos que* A ***atrai*** E *se para algum* $\varepsilon > 0$ *existe* $\tau = \tau(\varepsilon, E) \geq 0$ *tal que* $T(t)E \subset O_\varepsilon(A)$ *para todo* $t \geq \tau$*, ou equivalentemente,* $dist(T(t)E, A) \to 0$ *quando* $t \to +\infty$*. Um subconjunto* $\mathscr{A}$ *é um* ***B-atrator global*** *se atrai todos os subconjuntos limitados de* X.

Definição 58. *a)* $\mathscr{G}$ *is* ***dissipativo limitado ou B-dissipativo*** *se existe um B-atrator global limitado para* $\mathscr{G}$.

b) Dizemos que $\mathscr{G}$ *é* φ***-dissipativo*** *se existe um conjunto limitado* B_0 *tal que, para cada* $\varphi \in \mathscr{G}$, $\varphi(t) \in B_0$ *para todo* t *suficientemente grande.*

Observação 59. *Podemos ver que dissipativo limitado* $\Rightarrow$ φ*-dissipativo.*

Definição 60. $\mathscr{G}$ *é* ***assintoticamente compacto*** *se, para alguma sequência* $\{\varphi_j\} \subset \mathscr{G}$ *com* $\{\varphi_j(0)\} \in B(X)$*, e para alguma sequência* $\{t_j\}$, $t_j \to +\infty$*, a sequência* $\{\varphi_j(t_j)\}$ *tem uma subsequência convergente.* $B(X)$ *denota os subconjuntos não-vazios e limitados de* X.

Teorema 61. *Seja* $\mathscr{G}$ *um semifluxo generalizado. Se* $\mathscr{G}$ *é* φ*-dissipativo e assintoticamente compacto, então* $\mathscr{G}$ *tem um B-atrator global compacto e invariante* $\mathscr{A}$*. Além disso,* $\mathscr{A}$ *é o conjunto maximal compacto invariante em* X*, e* $\mathscr{A}$ *é o minimal entre todos os B-atratores globais fechados.*

Recomendamos ao leitor [13] para ver mais caracterizações do atrator.

Seja $D(u_{01}, u_{02})$ *o conjunto de todas as soluções de* (S) *com dados iniciais* (u_{01}, u_{02}) *e considere* $\mathbb{G} := \bigcup_{(u_{01},u_{02})\in H\times H} D(u_{01}, u_{02})$*. Afirmamos que* $\mathbb{G}$ *é um semifluxo generalizado* *em $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. As hipóteses $(H1)$, $(H2)$ e $(H3)$ na Definição 55 são imediatamente verificadas. A condição de semicontinuidade superior $(H4)$ pode ser obtida usando uma versão ligeiramente diferente do Teorema 2.3.3 em [18].*

Seguindo as ideias do Teorema 2.7 em [12] obtemos

Teorema 62. *Se o semifluxo generalizado $\mathbb{G}$ associado com (S) é eventualmente limitado então $\mathbb{G}$ é assintoticamente compacto.*

Podemos estimar as soluções nos espaços $H \times H$ e $Y \times H$. O próximo lema garante que o semifluxo generalizado $\mathbb{G}$ definido por (S) é B-dissipativo.

Lema 63. *Seja (u_1, u_2) uma solução do problema (S). Se existem constantes $\kappa > 0$ e $q > 2$ tal que $\langle -\mathscr{H}(v), v\rangle \geq \kappa \|v\|_H^q$ para todo $v \in H$, então existe um número positivo r_0 e uma constante T_0 que não depende das condições iniciais, tal que*

$$\|(u_1(t), u_2(t))\|_{H \times H} \leq r_0 \quad \forall\, t \geq T_0.$$

Demonstração. Seja $\varphi = (u_1, u_2)$ uma solução de (S). Então

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt}(t) + A(u_1(t)) = f(t) & \text{em } (0,T) \times \Omega, \\ \dfrac{du_2}{dt}(t) - \mathscr{H}(u_2(t)) \ni g(u_1(t)) & \text{em } (0,T) \times \Omega, \\ u_1(0,x) = u_{01}(x),\ u_2(0,x) = u_{02}(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{3.35}$$

Seja $\alpha := 4(|\Omega| + 1)^2$ e $\sigma := \frac{1}{2^{\max\{p^+, q\}}}$. Multiplicando a primeira equação por u_1, a segunda equação em (3.35) por u_2 e usando (3.3) obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_1(t)\|_H^2 \leq \begin{cases} -\frac{\sigma}{\alpha^{p^+}}\|u_1(t)\|_H^{p^+} + \langle f(t), u_1(t)\rangle_H \text{ se } t \in I_1, \\ -\frac{\sigma}{\alpha^{p^-}}\|u_1(t)\|_H^{p^-} + \langle f(t), u_1(t)\rangle_H \text{ se } t \in I_2 \end{cases} \tag{3.36}$$

onde

$$I_1 := \{t \in (0,T) : \|u_1(t)\|_Y < 1\}, \quad I_2 := \{t \in (0,T) : \|u_1(t)\|_Y \geq 1\}$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_2(t)\|_H^2 \leq -\kappa\|u_2(t)\|_H^q + \langle g(u_1(t)), u_2(t)\rangle_H,\ t \in (0,T).$$

Agora, defina $r := \frac{p^+}{p^-} > 1$ e seja r' tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Então, pela desigualdade de Young,

$$-\frac{\sigma}{\alpha^{p^+}}\|u_1(t)\|_H^{p^+} \leq r\Big(-\frac{\sigma}{\alpha^{p^+}}\|u_1(t)\|_H^{p^-} + \frac{\sigma}{\alpha^{p^+}r'}\Big). \tag{3.37}$$

Usando (3.37) em (3.36) obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_1(t)\|_H^2 \leq -C_2\|u_1(t)\|_H^{p^-} + \langle f(t), u_1(t)\rangle_H + C_1 \quad \forall\, t \in I := (0,T), \tag{3.38}$$

onde $C_1 := \frac{L\sigma}{p^-\alpha^{p^-}}$ e $C_2 := \frac{1}{(2\alpha)^L}$ com $L := \max\{p^+, q\}$.

Podemos supor, sem perda de generalidade que, $p^- \geq q$. Se $p^- = q$ obtemos uma expressão similar a (3.38) com q no lugar de p^-. Se $p^- > q$, considerando $\theta := \frac{p^-}{q} > 1$, θ' tal que $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$ e $\epsilon > 0$ temos

$$\|u_1(t)\|_H^q = \frac{\epsilon}{\epsilon}\|u_1(t)\|_H^q \leq \frac{1}{\theta'\epsilon^{\theta'}} + \frac{1}{\theta}\epsilon^{\theta}\|u_1(t)\|_H^{p^-}$$

e então

$$-C_2\|u_1(t)\|_H^{p^-} \leq \frac{\theta}{\epsilon^\theta}\Big[\frac{C_2}{\theta'\epsilon^{\theta'}} - C_2\|u_1(t)\|_H^q\Big].$$

Portanto obtemos

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_1(t)\|_H^2 \leq -\frac{C_2\theta}{\epsilon^\theta}\|u_1(t)\|_H^q + \langle f(t), u_1(t)\rangle_H + C_1 + \frac{\theta C_2}{\theta'\epsilon^\theta\epsilon^{\theta'}} \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_2(t)\|_H^2 \leq -\kappa\|u_2(t)\|_H^q + \langle g(u_1(t)), u_2(t)\rangle_H. \end{cases} \tag{3.39}$$

Estimamos $\langle f(t), u_1(t)\rangle_H$ e $\langle g(u_1(t)), u_2(t)\rangle_H$ usando a desigualdade de Young. Escolhendo um ϵ conveniente, suficientemente pequeno, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u_1(t)\|_H^2 + \|u_2(t)\|_H^2\Big) &\leq -C_5\Big(\|u_1(t)\|_H^q + \|u_2(t)\|_H^q\Big) + C_6 \\ &\leq -\frac{C_5}{2^{\frac{q}{2}}}\Big(\|u_1(t)\|_H^2 + \|u_2(t)\|_H^2\Big)^{\frac{q}{2}} + C_6, \end{aligned}$$

onde C_5, $C_6 > 0$ são constantes que dependem dos números $|\Omega|$, p^-, p^+, q.

Portanto, a função $y(t) := \|u_1(t)\|_H^2 + \|u_2(t)\|_H^2$ satisfaz a desigualdade

$$y'(t) \leq -\frac{2C_5}{2^{\frac{q}{2}}}y(t)^{\frac{q}{2}} + 2C_6, \qquad t > 0.$$

Do Lema 5.1 em [17] obtemos

$$y(t) \leq \left(\frac{C_6}{\frac{C_5}{2^{q/2}}}\right)^{2/q} + \left[\frac{2C_5}{2^{q/2}}\,(q/2-1)\,t\right]^{-1/(q/2-1)}.$$

Seja $T_0 > 0$ tal que $\left[\frac{2C_5}{2^{q/2}}\left(\frac{q}{2}-1\right)T_0\right]^{-1/(q/2-1)} \leq 1$. Então,
$\|u_1(t)\|_H^2 + \|u_2(t)\|_H^2 \leq \kappa_0 := \left(C_6 2^{q/2}/C_5\right)^{2/q} + 1$ para todo $t \geq T_0$. □

Agora estamos prontos para estabelecer o seguinte teorema, que é o principal resultado do trabalho.

Teorema 64. *O sistema (S) possui um atrator global compacto sempre que F e G são aplicações multívocas semicontínuas superiormente e (F,G) positivamente sublinear e $G : H \times H \to 2^H$ é de variáveis separáveis da forma $G(u,v) = g(u) + \mathscr{H}(v)$, onde g é uma função contínua e $-\mathscr{H}$ é um operador maximal monótono satisfazendo $\langle -\mathscr{H}(v), v\rangle \geq \kappa\|v\|_H^q$, para todo $v \in H$, para algumas constantes $q > 2$ e $\kappa > 0$.*

Demonstração. Como uma consequência do Lema 63 temos que o semifluxo generalizado $\mathbb{G}$ definido por (S) é B-dissipativo e então, eventualmente limitado e $\varphi-$dissipativo. Logo, do Teorema 62, o semifluxo generalizado $\mathbb{G}$ é assintoticamente compacto. Portanto, o Teorema 61 assegura a existência de um B-atrator global compacto invariante para (S). □

Também é possível obter estimativas para as soluções em um espaço mais regular, como podemos ver a seguir:

Proposição 65. *Seja (u_1, u_2) uma solução do problema (S). Então existem constantes positivas r_1 e $T_1 > T_0$, que não dependem dos dados iniciais, tal que*

$$\|(u_1(t), u_2(t))\|_{Y\times H} \leq r_1, \quad \forall\, t \geq T_1.$$

Demonstração. Tome $T_1 > T_0$. Como (u_1, u_2) é uma solução de (S), temos

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} + A(u_1) = f \text{ em } (0,T)\times\Omega \\ \dfrac{du_2}{dt} = w \text{ em } (0,T)\times\Omega, \end{cases} \tag{3.40}$$

sendo que f e w são seleções de F e G, respectivamente. Considere $\varphi_{p(\cdot)}$ como em (3.2). Temos,

$$\frac{d}{dt}\varphi_{p(\cdot)}(u_1(t)) \leq \left\langle \partial\varphi_{p(\cdot)}(u_1(t)), \frac{du_1}{dt}(t)\right\rangle$$

e então obtemos

$$\frac{d}{dt}\varphi_{p(\cdot)}(u_1(t)) + \frac{1}{2}\left\|f(t) - \frac{du_1}{dt}(t)\right\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|f(t)\|_H^2.$$

Agora usando o Lema 63 e o fato que F leva conjuntos limitados em conjuntos limitados, existe uma constante positiva C_0 tal que $\|f(t)\|_H \leq C_0$ para todo $t \geq T_0$. Então, pela definição de subdiferencial e o Lema Uniforme de Gronwall (ver [17]), existe uma constante positiva C_1 tal que $\varphi_{p(\cdot)}(u_1(t)) \leq C_1$ para todo $t \geq T_1$. Consequentemente, existe uma constante positiva K_1 tal que $\|u_1(t)\|_Y \leq K_1$ para todo $t \geq T_1$.

De forma direta, concluímos que $\|u_2(t)\|_H \leq K_2$ para todo $t \geq T_1$ para uma constante positiva K_2. A afirmação da proposição segue então. $\square$

Capítulo 4

Apêndice

4.1 Demonstração da Existência Local do Teorema 47

Teorema 47: *Se o sistema (2.12) for difusivo e* $F,\ G : \mathbb{R}^2 \to 2^{\mathbb{R}}$ *são semicontínuas superiormente que levam limitados em limitados, então para cada par* $u_0,\ v_0 \in L^\infty(\Omega)$, *existe* $T_0 \in (0, T]$ *tal que (2.12) tem pelo menos uma solução fraca* (u, v) *definida em* $[0, T_0]$ *e satisfazendo*

$$u,\ v \in W^{1,2}(0, T_0; H^{-1}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T_0; L^\infty(\Omega)) \tag{4.1}$$

$$\varphi(u),\ \psi(v) \in L^2(0, T_0; {H_0}^1(\Omega)). \tag{4.2}$$

Se em adição o par (F, G) *é sublinear positivamente, a mesma conclusão é verdade com* $T_0 = T$.

Demonstração. Seja $u_0,\ v_0 \in L^\infty(\Omega)$ e escolhemos $m > 0$ tal que

$$\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + 1 \leq m,\ \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)} + 1 \leq m. \tag{4.3}$$

Além disso, desde que ambas F e G são semicontínuas superiormente, é sempre possível encontrar $M > 0$, $r \geq M$ e $T_0 \in (0, T)$ tal que temos

$$|f| \leq M \text{ e } |g| \leq M \text{ para cada } f \in F(u, v),\ g \in G(u, v) \text{ desde que} \tag{4.4}$$

$$|u| \leq m, \ |v| \leq m \ e \ T_0 r \leq 1. \tag{4.5}$$

Definimos o conjunto

$$\mathscr{K} = \left\{(f,g); \ f, \ g \in L^1(0,T_0;L^1(\Omega)), \ \|f(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq r, \ \|g(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq r\right\} \tag{4.6}$$

para s q.t.p. em $[0,T_0]$.

Podemos notar que $\mathscr{K}$ é não vazio, basta notar que $(0,0) \in \mathscr{K}$, onde 0 é a função nula. O conjunto $\mathscr{K}$ é fracamente compacto em $L^1(0,T_0;L^1(\Omega)) \times L^1(0,T_0;L^1(\Omega))$. De fato, seja $\{(f_n,g_n)\}$ uma sequência em $\mathscr{K}$. Queremos mostrar que existe uma subsequência que converge fracamente em $L^1(0,T_0;L^1(\Omega)) \times L^1(0,T_0;L^1(\Omega))$ para algum elemento de $\mathscr{K}$. Para f_n temos $\|f_n(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq r$ quase em todo ponto em $[0,T_0]$, então

$$\|f_n\|_{L^1(0,T_0;L^1(\Omega))} = \int_0^{T_0} \|f_n\|_{L^1(\Omega)} dt = \int_0^{T_0}\int_\Omega f_n dm \ dt \leq \int_0^{T_0}\int_\Omega \sup|f_n| dm \ dt$$

$$= \int_0^{T_0}\int_\Omega \|f_n\|_{L^\infty(\Omega)} dm \ dt = \|f_n\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^{T_0}\int_\Omega dm \ dt \leq T_0 r m(\Omega) \leq m(\Omega). \tag{4.7}$$

onde $m(\Omega) < \infty$ pois Ω é um domínio limitado.

Portanto, f_n é uma sequência limitada em $L^1(0,T_0;L^1(\Omega))$, logo podemos extrair uma subsequência $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ tal que $f_{n_k}(t) \rightharpoonup f(t)$ fracamente em $L^\infty(\Omega)$ para algum f com $f(t) \in L^\infty(\Omega)$ t-q.t.p. em $[0,T_0]$. Além disso,

$$\|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \liminf \|f_{n_k}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \liminf r = r. \tag{4.8}$$

Logo, $\|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq r$ t-q.t.p. em $[0,T_0]$ e portanto $f \in \mathscr{K}$. Com o mesmo raciocínio pode ser aplicado $\{g_n\}$, então podemos concluir que existe uma subsequência $\{(f_{n_k}, g_{n_k})\} \subset \{(f_n,g_n)\}$ e $(f,g) \in \mathscr{K}$ tal que

$$(f_{n_k}, g_{n_k}) \rightharpoonup (f,g) \ em \ L^1(0,T_0;L^1(\Omega)) \times L^1(0,T_0;L^1(\Omega)). \tag{4.9}$$

Portanto $\mathscr{K}$ é fracamente compacto em $L^1(0,T_0;L^1(\Omega)) \times L^1(0,T_0;L^1(\Omega))$.

Agora, vamos definir o operador

$$P : \mathscr{K} \to C([0,T_0],L^1(\Omega)) \times C([0,T_0],L^1(\Omega)), \tag{4.10}$$

$$P(f,g) = (u,v), \tag{4.11}$$

onde (u,v) é a única solução fraca em $[0,T_0]$ do sistema (2.12). Note que por [8] este operador está bem definido, uma vez que as soluções u, v sempre existem e são únicas. Além disso, vale (2.2). Logo, por (2.2), (4.3) e (4.5) concluímos que

$$\|u(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq m,\ \|v(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq m \ para\ t \in [0,T_0]. \tag{4.12}$$

De fato, por (2.2) sabemos que

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t \|f(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \tag{4.13}$$

para todo $t \in [0,T_0]$. Logo,

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq m - 1 + \int_0^{T_0} r\ ds = m - 1 + rT_0 \leq m \tag{4.14}$$

para todo $t \in [0,T_0]$.

Analogamente para v temos que $\|v(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq m\ para\ t \in [0,T_0]$.

Agora, com a intenção de usarmos o Teorema do Ponto Fixo, definiremos o operador

$$\Phi : \mathscr{K} \to C([0,T_0],L^1(\Omega)) \times C([0,T_0],L^1(\Omega)) \tag{4.15}$$

$$\Phi(f,g) = (Sel\ F(u,v), Sel\ G(u,v)), \tag{4.16}$$

onde $(u,v) = P(f,g)$. A existência da seleção é mostrada no Teorema 26. Além disso, sabemos que Φ está bem definida, pois sejam $(f,g) \in \mathscr{K}$ e $(u,v) = P(f,g)$. Note que $u \in C([0,T_0],L^1(\Omega))$, logo para todo aberto $A \subset L^1(\Omega)$, $u^{-1}(A)$ é aberto em $[0,T_0]$ e portanto $u^{-1}(A)$ é Lebesgue mensurável, o que mostra que u é mensurável. O mesmo vale para v. Por outro lado, F e G são semicontínuas superiormente, então pela Observação 25

$$F(u,v) : [0,T_0] \to P(L^1(\Omega))\ e\ G(u,v) : [0,T_0] \to P(L^1(\Omega)) \tag{4.17}$$

são mensuráveis. Pelo Teorema 11, $L^1(\Omega)$ é separável, então $Sel\ F(u,v) \neq \varnothing$ e $Sel\ G(u,v) \neq \varnothing$. Portanto, o operador Φ está bem definido.

Verifiquemos agora que Φ leva elementos de $\mathscr{K}$ em subconjuntos de $\mathscr{K}$. Tome $(f,g) \in \mathscr{K}$ e seja $(u,v) = P(f,g)$. Temos que $\|u(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq m$, $\|v(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq m$ para $t \in [0,T_0]$, assim $|f(t,x)| \leq M$ e $|g(t,x)| \leq M$, sempre que $f \in F(u,v)$ e $g \in G(u,v)$.

Em particular, para todo $\tilde{f} \in Sel\ F(u,v)$ e para todo $\tilde{g} \in Sel\ G(u,v)$, $|\tilde{f}(t,x)| \leq M \leq r$ e $|\tilde{g}(t,x)| \leq M \leq r$ para todo $t \in [0,T_0]$. Portanto, $(\tilde{f},\tilde{g}) \in \mathscr{K}$, ou seja,

$$\Phi(f,g) = (Sel\ F(u,v), Sel\ G(u,v)) \in P(\mathscr{K}). \tag{4.18}$$

O próximo passo será mostrar que Φ tem valores convexos e fechados, ou seja, que para cada $(f,g) \in \mathscr{K}$, $\Phi(f,g) = (Sel\ F(u,v), Sel\ G(u,v))$ é fechado e convexo em $L^1(0,T_0;L^1(\Omega)) \times L^1(0,T_0;L^1(\Omega))$. Sejam $f_1,\ f_2 \in Sel\ F(u,v)$ e $\alpha \in (0,1)$. Então, $\alpha f_1 + (1-\alpha)f_2$ é mensurável pois f_1 e f_2 são mensuráveis.

Além disso, $\alpha f_1(t)+(1-\alpha)f_2(t) \in F(u(t),v(t))$ q.t.p. em $[0,T_0]$, pois F é semicontínua superiormente, logo $Sel(F)$ é convexa pela Definição 24. Como o mesmo procedimento se aplica a G temos que $Sel\ F(u,v)$ e $Sel\ G(u,v)$ são convexos. Considere agora a sequência $\{f_n\} \subset Sel\ F(u,v)$ com $f_n \to \overline{f}$ em $L^1(0,T_0;L^1)$. Sabemos que $\overline{f}$ é mensurável pois é limite de funções mensuráveis. Além disso, existe uma subsequência $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ tal que

$$f_{n_k}(t) \xrightarrow{L^1(\Omega)} \overline{f}(t)\ q.t.p.\ em\ [0,T_0].$$

Logo $\overline{f}(t) \in \overline{F(u(t),v(t))}$ q.t.p. em $[0,T_0]$, mas $F(u(t),v(t)) = \overline{F(u(t),v(t))}$ pois F é semicontínua superiormente. Assim, $\overline{f}(t) \in F(u(t),v(t))$ q.t.p. em $[0,T_0]$. Portanto, $Sel\ F(u(t),v(t))$ é fechado.

Como o mesmo raciocínio vale para G, podemos concluir que Φ assume valores convexos e fechados.

Agora, precisamos mostrar que o gráfico de Φ é fracamente $\times$ fracamente sequencialmente fechado em $\mathscr{K}$. Identificando o operador Φ com seu gráfico podemos escrever

$$\Phi = \{(f,g),\ (\overline{f},\overline{g}); (f,g) \in \mathscr{K}\ e\ (\overline{f},\overline{g}) \in \Phi(f,g)\}. \tag{4.19}$$

Seja $\{(f_n,g_n),(\overline{f_n},\overline{g_n})\}$ uma sequência em Φ tal que $(f_n,g_n) \rightharpoonup (f,g)$ em $L^1(0,T_0;L^1(\Omega)) \times L^1(0,T_0;L^1(\Omega))$ e $(\overline{f_n},\overline{g_n}) \rightharpoonup (\overline{f},\overline{g})$ em $L^1(0,T_0;L^1(\Omega)) \times L^1(0,T_0;L^1(\Omega))$. Queremos mostrar que $((f,g),(\overline{f},\overline{g})) \in \Phi$. Claramente $(f,g) \in \mathscr{K}$, já que $\mathscr{K}$ é fracamente compacto e portanto fracamente fechado, visto que um espaço munido da topologia fraca é separável, veja pela Definição 22.

Logo, existe um único elemento $(u,v) \in C([0,T_0],L^1(\Omega)) \times C([0,T_0],L^1(\Omega))$ tal que $(u,v) = P(f,g)$. Note que como $((f_n,g_n),(\overline{f_n},\overline{g_n})) \in \Phi$ então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $(u_n,v_n) \in C([0,T_0],L^1(\Omega)) \times C([0,T_0],L^1(\Omega))$ tal que $(u_n,v_n) = P(f_n,g_n)$ e além disso, $(\overline{f_n},\overline{g_n}) \in (Sel\ F(u_n,v_n), Sel\ G(u_n,v_n))$. Assim, pelo Teorema 28, basta mostrarmos que $P(f_n,g_n) = (u_n,v_n) \to (u,v) = P(f,g)$ q.t.p. em $[0,T_0]$ para garantirmos que

$$(\overline{f},\overline{g}) \in (Sel\ F(u,v), Sel\ G(u,v)). \tag{4.20}$$

Como u_n é solução fraca de $\frac{du_n}{dt} - \Delta\varphi(u_n) = f_n$, então pela Observação 41 vale

$$\|u_n(t)-\zeta\|^2 \leq \|u_n(s)-\zeta\|^2 + 2\int_s^t (u_n(\tau)-\zeta, f_n(\tau)-y)_+ d\tau \tag{4.21}$$

para todo $\zeta \in D(-\Delta\varphi)$ e $y \in -\Delta\varphi(\zeta)$, $\forall\ 0 \leq s \leq t \leq T_0$.

Mostraremos agora que $\{u_n\}$ contém ao menos uma subsequência que converge para u, em $C([0,T_0],L^1(\Omega))$. O mesmo procedimento pode ser usado para mostrar que existe $\{v_{n_k}\} \subset \{v_n\}$ com $v_{n_k} \to v$ em $C([0,T_0],L^1(\Omega))$.

Com a intenção de usar o Teorema de Baras 38, mostremos que o conjunto $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ é uniformemente integrável, pela Definição 36, seja $\epsilon > 0$ dado, existe $m(E) < \delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{m(\Omega)}$ onde por (4.7)

$$\int_E \|f_n(t)\|_{L^1(\Omega)} dt \leq \int_E m(\Omega) dt = m(E)m(\Omega) = \epsilon. \tag{4.22}$$

Então, pelo Teorema de Baras, o conjunto das soluções $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ de

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} - \Delta\varphi(u_n) = f_n & q.t.p.\ em\ [0,T_0] \\ u(0,x) = u_0(x) & em\ \Omega, \end{cases} \tag{4.23}$$

quando f_n percorre o conjunto $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$, é relativamente compacto em $C([0,T_0],L^1(\Omega))$.

Logo, existe $\overline{u} \in C([0,T_0],L^1(\Omega))$ e uma subsequência $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ tal que u_{n_k} converge para $\overline{u}$ em $C([0,T_0],L^1(\Omega))$.

Agora, observe que como $f_n \rightharpoonup f$ em $L^1(0,T_0;L^1(\Omega))$ e $u_{n_k} \to \overline{u}$ em $C([0,T_0],L^1(\Omega))$ e consequentemente $u_{n_k} \to \overline{u}$ em $L^1(0,T_0;L^1(\Omega))$ então,

$$(u_{n_k}-\zeta, f_{n_k}-y)_+ \to (\overline{u}-\zeta, f-y)_+ \tag{4.24}$$

em $L^1(0,T_0;L^1(\Omega))$, para todo $\zeta \in D(-\Delta\varphi)$ e $y = -\Delta\varphi(\zeta)$. De fato, temos da Proposição 14 e do Lema 15 que

$$(u_{n_k} - \zeta, f_{n_k} - y)_+ = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{2h}\left(\|u_{n_k} - \zeta + h(f_{n_k} - y)\|^2 - \|u_{n_k} - \zeta\|^2\right). \tag{4.25}$$

Além disso, como $\|.\|$ é contínua e pelo Teorema 3 concluímos que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}(u_{n_k} - \zeta, f_{n_k} - y)_+ &= \lim_{k\to\infty}\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{2h}\left(\|u_{n_k} - \zeta + h(f_{n_k} - y)\|^2 - \|u_{n_k} - \zeta\|^2\right)\\ &= (\overline{u} - \zeta, f - y)_+.\end{aligned} \tag{4.26}$$

Porém, cada u_n com $n \in \mathbb{N}$ e em particular cada u_{n_k} verifica

$$\|u_{n_k}(t) - \zeta\|^2 \leq \|u_{n_k}(s) - \zeta\|^2 + 2\int_s^t (u_{n_k}(\tau) - \zeta, f_{n_k}(\tau) - y)_+ d\tau, \tag{4.27}$$

logo, tomando $n_k \to \infty$ temos

$$\|\overline{u}(t) - \zeta\|^2 \leq \|\overline{u}(s) - \zeta\|^2 + 2\int_s^t (\overline{u}(\tau) - \zeta, f(\tau) - y)_+ d\tau, \tag{4.28}$$

para todo $\zeta \in D(-\Delta\varphi)$ e $y = -\Delta\varphi(\zeta)$ e portanto por [5], página 24 obs. 1.7.1, $\overline{u}$ é uma solução fraca de $\frac{d\overline{u}}{dt} - \Delta\varphi(\overline{u}) = f$ com $\overline{u}(0,x) = u_0(x)$. De modo análogo, existe $\overline{v} \in C([0,T_0], L^1(\Omega))$ tal que $\overline{v}$ é solução fraca de $\frac{d\overline{v}}{dt} - \Delta\psi(\overline{v}) = g$ com $\overline{v}(0,x) = v_0(x)$.

Logo, pela unicidade da solução fraca $(\overline{u},\overline{v}) = (u,v)$ e portanto, existe $\{(u_{n_k}, v_{n_k})\} \subset \{(u_n, v_n)\}$ tal que $\{(u_{n_k}, v_{n_k})\}$ converge para (u,v), onde $(u,v) = P(f,g)$.

Como $(\overline{f}_n, \overline{g}_n) \rightharpoonup (\overline{f}, \overline{g})$ em $L^1(0,T_0;L^1(\Omega)) \times L^1(0,T_0;L^1(\Omega))$, aplicando o Teorema 28 podemos concluir que $(\overline{f}, \overline{g}) \in \Phi(f,g)$, e portanto Φ é fracamente$\times$ fracamente sequencialmente fechado.

Então, pelo Teorema do Ponto Fixo 27, existe $(f,g) \in \mathscr{K}$ tal que $(f,g) \in \Phi(f,g)$. Consequentemente, $(u,v) = P(f,g)$ é uma solução fraca do sistema (2.12) e isto completa a prova da existência local. $\square$

4.2 Demonstração da Existência Local do Teorema 51

Teorema 51: *Se o sistema (2.20) é semi difusivo, $F : \mathbb{R}^2 \to 2^{\mathbb{R}}$ é semicontínua superiormente, $G : \mathbb{R}^2 \to 2^{\mathbb{R}}$ é de variáveis separáveis e F e g levam limitados em limitados,* *então existe $T_0 \in (0,T]$ tal que (2.20) tem pelo menos uma solução fraca (u,v) definida em $[0,T_0]$ e satisfazendo*

$$u,\ v \in W^{1,2}(0,T_0;H^{-1}(\Omega)) \cap L^{\infty}(0,T_0;L^{\infty}(\Omega)) \tag{4.29}$$

$$\varphi(u),\ \psi(v) \in L^2(0,T_0;{H_0}^1(\Omega)). \tag{4.30}$$

Se, em adição, o par (F,G) é positivamente sublinear, a conclusão permanece válida para $T_0 = T$.

Demonstração. Para a demonstração deste teorema vamos separá-lo em dois casos:
Caso 1: $G(u,v) = g(u)H(v)$ e
Caso 2: $G(u,v) = g(u) + H(v)$.
Prova do *Caso 1*: Seja u_0, $v_0 \in L^{\infty}$ e escolhemos $m > 0$ satisfazendo

$$\|u_0\|_{L^{\infty}(\Omega)} + 1 \leq m \ e \ \|v_0\|_{L^{\infty}(\Omega)} + 1 \leq m. \tag{4.31}$$

Como F é semicontínua superiormente, g é contínua e H é definida em toda parte e $m-$dissipativo em $\mathbb{R}$, é sempre possível escolher $M > 0$, $r \geq M$, e $T_0 \in (0,T]$ tal que

$$|f(x,t)| \leq M \ para \ cada \ f \in F(u,v) \tag{4.32}$$

fornecido de $|u| \leq m$, $|v| \leq m$,

$$|g(u(t))| \leq M, \tag{4.33}$$

pois g leva limitados em limitados, e

$$T_0 r \leq 1 \ e \ T_0 M|h| \leq 1 \tag{4.34}$$

para todo $h \in H(v)$. Agora definimos $\mathscr{K}$, subconjunto em $L^1(0,T_0;L^1(\Omega))$, por

$$\mathscr{K} = \{f;\ f \in L^1(0,T_0;L^1(\Omega)),\ \|f(t)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq r\ t \text{ q.t.p. em } [0,T_0]\}. \tag{4.35}$$

Claramente $\mathscr{K}$ é não vazio e fracamente compacto em $L^1(0,T_0;L^1(\Omega))$ como mostrado no Teorema 47. Definimos o operador $P : \mathscr{K} \to C([0,T_0],L^1(\Omega))$ por $Pf = u$, para

$f \in \mathscr{K}$, onde u é solução fraca única do problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta\varphi(u) = f & (0,T)\times\Omega \\ \varphi(u) = 0 & (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & em\ \Omega. \end{cases} \tag{4.36}$$

De (2.2), (4.31) e (4.34) temos que $\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq m$, para $t \in [0,T_0]$. Então, P leva elementos de $\mathscr{K}$ em $L^\infty(0,T_0;L^\infty(\Omega))$. Além disso, definimos o operador

$$Q : \mathscr{K} \to L^\infty(0,T_0;L^\infty(\Omega)) \tag{4.37}$$

por $Qf = v$, para $f \in \mathscr{K}$, onde v é a solução fraca única do problema

$$\begin{cases} v_t - \Delta\psi(v) = w \in g(Pf)H(v) & (0,T)\times\Omega \\ \psi(v) = 0 & (0,T)\times\partial\Omega \\ v(0,x) = v_0(x) & em\ \Omega. \end{cases} \tag{4.38}$$

Pelo Lema 49 (4.13) e por [4] temos que o operador Q está bem definido em todo $\mathscr{K}$. Por outro lado, do Corolário 46 com (2.18) no Lema 49, concluímos que Q é fracamente fortemente contínuo de $\mathscr{K}$ em $C([0,T_0];L^1(\Omega))$. Em adição, de (2.2) temos

$$\|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^{T_0} \|g(u(s))h\|_{L^\infty(\Omega)}ds. \tag{4.39}$$

E por (4.32), (4.33) e (4.34) sabemos que $\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)} + 1 \leq m$, $|g(u(t))| \leq M$ e $T_0M|h| \leq 1$ respectivamente. Logo

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^{T_0} \|g(u(s))h\|_{L^\infty(\Omega)}ds \\ &= \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^{T_0} sup\ |g(u(s))h|ds \\ &\leq m - 1 + sup\ M|h| \int_0^{T_0} ds = m - 1 + T_0M|h| \leq m, \end{aligned} \tag{4.40}$$

para cada $h \in H(v)$. Logo, temos $\|Qf(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq m$ para $t \in [0,T_0]$.

Finalmente, definimos o operador $S : \mathscr{K} \to 2^{L^1(0,T_0;L^1(\Omega))}$ por

$$S(f) = Sel\ F(Pf,Qf) \tag{4.41}$$

para cada $f \in \mathscr{K}$.

Como F é semicontínua superiormente, pela Definição 42 temos que S tem valores não vazios. Além disso, S tem valores fracamente compactos.

Assim, para usarmos o Teorema do Ponto Fixo 27, temos que mostrar que S leva elementos de $\mathscr{K}$ para $2^{\mathscr{K}}$ e seu gráfico é fracamente $\times$ fracamente sequencialmente fechado. Começaremos a mostrar que S aplica $\mathscr{K}$ em subconjuntos de $\mathscr{K}$. Sabemos dos passos anteriores que $\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq m$ e $|g(u(t))| \leq M \leq r$. Em particular, para todo $\hat{g} \in S(f)$ temos $|\hat{g}| \leq M \leq r$, para todo $t \in [0, T_0]$. Portanto, $\hat{g} \in \mathscr{K}$, ou seja, $S(f) = Sel\ F(Pf, Qf) \in P(\mathscr{K})$. Consequentemente $S : \mathscr{K} \to 2^{\mathscr{K}}$.

Para mostrar que o gráfico de S é fracamente $\times$ fracamente sequencialmente fechado, tome o operador S com seu gráfico como $S = \{(f, g); f \in \mathscr{K},\ g \in S(f)\}$. Seja agora $((f_n, g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência no gráfico de S tal que

$$f_n \rightharpoonup f \ e \ g_n \rightharpoonup g \ fracamente \ em \ L^1(0, T_0; L^1(\Omega)). \tag{4.42}$$

Claramente $f \in \mathscr{K}$ já que $\mathscr{K}$ é fracamente compacto e portanto fracamente fechado, desde que um espaço munido com a topologia fraca é separável. Logo, existe único elemento $u \in C([0, T_0]; L^1(\Omega))$ tal que $u = Pf$ e único elemento $v \in C([0, T_0]; L^1(\Omega))$ tal que $v = Qf$. Note que como $((f_n, g_n))_{n\in\mathbb{N}} \in S$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe u_n, $v_n \in C([0, T_0]; L^1(\Omega))$ tal que $u_n = Pf_n$ e $v_n = Qf_n$ e além disso, $f_n \in \ SelF(Pf_n, Qf_n)$. Assim, pelo Teorema 28, basta mostrar que $u_n \to u = Pf$ q.t.p. em $[0, T_0]$ e $v_n \to v = Qf$ q.t.p. em $[0, T_0]$ para garantirmos que $g \in Sel\ F(Pf, Qf)$.

Como v_n é solução fraca de $\frac{dv_n}{dt} - \Delta\psi(v_n) = w_n = g_n h_n(t)$ onde $h_n(t) \in H(v_n)$, então

$$\|v_n(t) - \zeta\|^2 \leq \|v_n(s) - \zeta\|^2 + 2\int_s^t (v_n(\tau) - \zeta, w_n(\tau) - y)_+ d\tau \tag{4.43}$$

para todo $\zeta \in D(-\Delta\psi)$ e $y = -\Delta\psi(\zeta)$, para todo $0 \leq s \leq t \leq T_0$.

Precisamos mostrar agora que $\{v_n\}$ contém ao menos uma subsequência que converge para v em $C([0, T_0]; L^1(\Omega))$. O mesmo procedimento pode ser usado para mostrar que existe $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ com $u_{n_k} \to u$ em $C([0, T_0]; L^1(\Omega))$, assim como mostrado no Teorema 47.

Temos que o conjunto $\{g_nH(v_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ é uniformemente integrável. De fato, temos de (4.33) e de (4.12)

$$\begin{aligned}\|g_nH(v_n)\|_{L^1(0,T_0;L^1(\Omega))} &= \int_0^{T_0}\int_\Omega |g_nh_n(t)|dm\ dt \leq \int_0^{T_0}\int_\Omega sup|g_nh_n(t)|dm\ dt \\ &= sup|g_n||h_n(t)|\int_0^{T_0}\int_\Omega dm\ dt \\ &\leq M|h|T_0m(\Omega) \leq m(\Omega). \end{aligned} \tag{4.44}$$

Onde $h_n(t) \in H(v_n)$. Logo, seja $\epsilon > 0$ dado, existe $m(E) < \delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{m(\Omega)} > 0$ tal que

$$\int_E \|g_nH(v_n)\|_{L^1(\Omega)} \leq m(\Omega)m(E) = \epsilon. \tag{4.45}$$

Portanto, o conjunto $\{g_nH(v_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ é uniformemente integrável e então pelo Teorema de Baras 38 o conjunto das soluções $\{v_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ de

$$\begin{cases} \frac{dv_n}{dt} - \Delta\psi(v_n) = w_n = g_nH(v_n) & (0,T)\times\Omega \\ \psi(v) = 0 & (0,T)\times\partial\Omega \\ v(0,x) = v_0(x) & em\ \Omega, \end{cases} \tag{4.46}$$

quando $g_nH(v_n)$ percorre o conjunto $\{g_nH(v_n);\ n \in \mathbb{N}\}$, é relativamente compacto em $C([0,T_0];L^1(\Omega))$.

Logo, temos que existe $\overline{v} \in C([0,T_0];L^1(\Omega))$ e uma subsequência $\{v_{n_k}\} \subset \{v_n\}$ tal que v_{n_k} converge para $\overline{v}$ em $C([0,T_0];L^1(\Omega))$.

Agora, observe que como $w_n \rightharpoonup w$ em $L^1(0,T_0;L^1(\Omega))$ e $v_{n_k} \to \overline{v}$ em $C([0,T_0],L^1(\Omega))$ e consequentemente $v_{n_k} \to \overline{v}$ em $L^1(0,T_0;L^1(\Omega))$ então,

$$(v_{n_k} - \zeta, w_{n_k} - y)_+ \to (\overline{v} - \zeta, w - y)_+ \tag{4.47}$$

em $L^1(0,T_0;L^1(\Omega))$, para todo $\zeta \in D(-\Delta\psi)$ e $y = -\Delta\psi(\zeta)$. De fato, temos da Proposição 14 e do Lema 15 que

$$(v_{n_k} - \zeta, w_{n_k} - y)_+ = \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{2h}\left(\|v_{n_k} - \zeta + h(w_{n_k} - y)\|^2 - \|v_{n_k} - \zeta\|^2\right). \tag{4.48}$$

Além disso, como $\|.\|$ é contínua e pelo Teorema 3 concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}(v_{n_k} - \zeta, w_{n_k} - y)_+ = \lim_{n\to\infty}\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{2h}\left(\|v_{n_k} - \zeta + h(w_{n_k} - y)\|^2 - \|v_{n_k} - \zeta\|^2\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (v_{n_k} - \zeta, w_{n_k} - y)_+ = (\overline{v} - \zeta, w - y)_+. \tag{4.49}$$

Assim, cada v_n com $n \in \mathbb{N}$ e em particular cada v_{n_k} verifica

$$\|v_{n_k}(t) - \zeta\|^2 \le \|v_{n_k}(s) - \zeta\|^2 + 2\int_s^t (v_{n_k}(\tau) - \zeta, w_{n_k}(\tau) - y)_+ d\tau, \tag{4.50}$$

logo, tomando $n_k \to \infty$ temos

$$\|\overline{v}(t) - \zeta\|^2 \le \|\overline{v}(s) - \zeta\|^2 + 2\int_s^t (\overline{v}(\tau) - \zeta, w(\tau) - y)_+ d\tau, \tag{4.51}$$

para todo $\zeta \in D(-\Delta\psi)$ e $y = -\Delta\psi(\zeta)$ e portanto por [7], página 24 obs. 1.7.1, $\overline{v}$ é uma solução fraca de $\frac{d\overline{v}}{dt} - \Delta\psi(\overline{v}) = w$ com $\overline{v}(0,x) = v_0(x)$. De modo análogo, existe $\overline{u} \in C([0,T_0], L^1(\Omega))$ tal que $\overline{u}$ é solução fraca de $\frac{d\overline{u}}{dt} - \Delta\varphi(\overline{u}) = f$ com $\overline{u}(0,x) = u_0(x)$ como no Teorema 47.

Logo, pela unicidade da solução fraca $(\overline{u}, \overline{v}) = (u, v)$ e portanto, existe $\{(u_{n_k}, v_{n_k})\} \subset \{(u_n, v_n)\}$ tal que $\{(u_{n_k}, v_{n_k})\}$ converge para (u, v), onde $u = Pf$ e $v = Qf$.

Como $g_n \rightharpoonup g$ em $L^1(0, T_0; L^1(\Omega))$, aplicando o Teorema 28 podemos concluir que $g \in S(f)$, e portanto S é fracamente $\times$ fracamente sequencialmente fechado.

Então, pelo Teorema do Ponto Fixo 27, existe $f \in \mathscr{K}$ tal que $f \in S(f)$. Consequentemente, $u = Pf$ e $v = Qf$ é uma solução fraca do sistema (2.12) e isto completa a prova da existência local no *Caso 1.*

O *Caso 2* onde $G(u,v) = g(u) + H(v)$ é completamente análogo ao caso anterior, porém somente com alguns ajustes e o uso do Lema 50 ao invés do Lema 49. Neste caso também podemos impor que $T_0(M + |h|) \le 1$ ao invés de $T_0 M|h| \le 1$ em (4.34). □

4.3 Demonstração da Existência Global de ambos os Teoremas 47 e 51

Demonstração. Primeiro, observamos que sob as hipóteses ou do Teorema 47 ou do Teorma 51, cada solução fraca local do sistema 2.12 pode ser continuada até uma solução fraca não continuada (u, v) definida em $[0, T]$ ou em $[0, T_m)$ para algum $T_m \le T$. Para completar a prova, basta mostrar que a última situação não pode acontecer. Para isso, vamos assumir por contradição que (u,v) é definida em $[0,T_m)$ onde $T_m \leq T$. Tomando um $p \in [1,\infty)$ arbitrário, multiplicando ambos os lados da equação $u_t - \Delta\varphi(u) = f$ por $\|u(t)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} u(t,x)$ temos

$$(u_t, \|u(t)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} u(t,x))_+ + (-\Delta\varphi(u), \|u(t)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} u(t,x))_+$$

$$= (f, \|u(t)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} u(t,x))_+. \tag{4.52}$$

Como $-\Delta\varphi(u)$ é um operador acretivo, o produto $(-\Delta\varphi(u), \|u(t)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} u(t,x))_+$ é maior ou igual a zero, portanto

$$(u_t, \|u(t)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} u(t,x))_+ \leq (f, \|u(t)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} u(t,x))_+.$$

Usando a Proposição 17 e Proposição 18 temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \frac{1}{2}(\|u(t)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} u(t,x))^2 \leq f(s,x)\|u(t)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} |u(s,x)|^{p-2} u(s,x) \tag{4.53}$$

e integrando sobre Ω e sobre $[0,t] \subset [0,T_m)$

$$\|u(t)\|^2_{L^p(\Omega)} \leq \|u_0\|^2_{L^p(\Omega)} + 2\int_0^t \int_\Omega f(s,x)\|u(s)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} |u(s,x)|^{p-2} u(s,x)dxds \tag{4.54}$$

para cada $p \in [1,\infty)$ e $t \in [0,T_m)$. Como o par (F,G) é sublinear positivamente e $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, da inequação acima deduzimos que existe $k > 0$ que não depende de $p \in [1,\infty)$ e $t \in [0,T_m)$ tal que

$$\|u(t)\|^2_{L^p(\Omega)} \leq k^2 + 2\int_0^t \int_\Omega f(s,x)\|u(s)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} |u(s,x)|^{p-2} u(s,x)dxds. \tag{4.55}$$

Da sublinearidade positiva de (F,G) temos que em D

$$\|u(t)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} |u(s,x)|^{p-2} u(t,x) f(s,x) \tag{4.56}$$

$$\leq [a|u(s,x)| + b|v(s,x)| + c]\|u(t)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} |u(s,x)|^{p-2} u(t,x), \tag{4.57}$$

onde D é um subconjunto de todos os $(s,x) \in [0,T_m) \times \Omega$ de tal forma que $|u(s,x)| > m$ ou $|v(s,x)| > m$ e também $u(s,x)f_0(s,x) > 0$ ou $v(s,x)g_0(s,x) > 0$ para algum $f_0(s,x) \in$

$F(u(s,x),v(s,x))$ e algum $g_0(s,x) \in G(u(s,x),v(s,x))$. Definimos $\tilde{D} = D \cap ((0,t) \times \Omega)$ e $\tilde{\tilde{D}} = D^C \cap ((0,t) \times \Omega)$.

Como o complemento de D está em $[0, T_m) \times \Omega$ temos ou

$$|u(s,x)| \leq m \ e \ |v(s,x)| \leq m \ ou \tag{4.58}$$

$$u(s,x)f(s,x) \leq 0 \ e \ v(s,x)g(s,x) \leq 0 \tag{4.59}$$

para cada $f(s,x) \in F(u(s,x),v(s,x))$ e $g(s,x) \in G(u(s,x),v(s,x))$. Como F aplica conjuntos limitados de $\mathbb{R}^2$ em limitados de $\mathbb{R}$, existe $M_0 > 0$ tal que

$$\int_0^t \int_\Omega \|u(t)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} |u(s,x)|^{p-2} u(s,x) f(s,x) dx ds \leq M_0. \tag{4.60}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|^2_{L^p(\Omega)} &\leq k^2 + 2\int_0^t \int_{\tilde{D}\cup\tilde{\tilde{D}}} f(s,x)\|u(s)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} |u(s,x)|^{p-2}u(s,x)dxds \\
&\leq k^2 + 2\int_0^t \int_{\tilde{D}} f(s,x)\|u(s)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} |u(s,x)|^{p-2}u(s,x)dxds \\
&\quad + 2\int_0^t \int_{\tilde{\tilde{D}}} f(s,x)\|u(s)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} |u(s,x)|^{p-2}u(s,x)dxds \\
&\leq k^2 + 2\int_0^t \int_{\tilde{D}} f(s,x)\|u(s)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} |u(s,x)|^{p-2}u(s,x)dxds \\
&\quad + 2\int_0^t \int_{\tilde{\tilde{D}}} [a|u(s,x)| + b|v(s,x)| + c]\|u(s)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} |u(s,x)|^{p-2}u(s,x)dxds \\
&\leq k^2 + 2M_0 + 2a\int_0^t \int_\Omega \|u(s)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} |u(s,x)|^{p-1}u(s,x)dxds \\
&\quad + 2b\int_0^t \int_\Omega |v(s,x)|\|u(s)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} |u(s,x)|^{p-2}u(s,x)dxds \\
&\quad + 2c\int_0^t \int_\Omega \|u(s)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} |u(s,x)|^{p-2}u(s,x)dxds \\
&\leq k^2 + 2M_0 + 2a\int_0^t \|u(s,x)\|^{p}_{L^p(\Omega)}\|u(s)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)}ds \\
&\quad + 2b\int_0^t \|v(s,x)\|_{L^p(\Omega)}\|u(s)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)}\|u(s,x)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}ds \\
&\quad + 2c\int_0^t \|u(s,x)\|_{L^p(\Omega)}ds \\
&= k^2 + 2M_0 + 2a\int_0^t \|u(s,x)\|^{2}_{L^p(\Omega)}ds \\
&\quad + 2b\int_0^t \|v(s,x)\|_{L^p(\Omega)}\|u(s,x)\|_{L^p(\Omega)}ds + 2c\int_0^t \|u(s,x)\|_{L^p(\Omega)}ds.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Assim, existem constantes positivas α, β e γ tal que

$$\|u(t)\|^2_{L^p(\Omega)} \leq k^2 + 2\int_0^t [\alpha\|u(s)\|_{L^p(\Omega)} + \beta\|v(s)\|_{L^p(\Omega)} + \gamma]\|u(s)\|_{L^p(\Omega)} ds. \tag{4.62}$$

Usando a desigualdade de Gronwall-Bellman obtemos

$$\|u(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq k + \gamma T + \int_0^t \alpha\|u(s)\|_{L^p(\Omega)} + \beta\|v(s)\|_{L^p(\Omega)} ds. \tag{4.63}$$

Ou seja, existe M independente de t tal que

$$\|u(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq M + \int_0^t \alpha\|u(s)\|_{L^p(\Omega)} + \beta\|v(s)\|_{L^p(\Omega)} ds. \tag{4.64}$$

Analogamente, existe $\tilde{M}$ independente de t tal que

$$\|v(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \tilde{M} + \int_0^t \beta\|u(s)\|_{L^p(\Omega)} + \alpha\|v(s)\|_{L^p(\Omega)} ds. \tag{4.65}$$

Somando (4.64) e (4.65) e denotando por $C = M + \tilde{M}$ e $\rho = \alpha + \beta$ temos

$$\|u(t)\|_{L^p(\Omega)} + \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C + \rho\int_0^t \|u(s)\|_{L^p(\Omega)} + \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} ds \tag{4.66}$$

para cada $p \in [1, \infty)$ e $t \in [0, T_m)$ onde C e ρ não dependem de $p \in [1, \infty)$ e $t \in [0, T_m)$. Da Desiguladade de Gronwall temos

$$\|u(t)\|_{L^p(\Omega)} + \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C + \int_0^t C\rho e^{\int_s^t \rho\ dr}\ ds \leq C + C\rho\int_0^t e^{\rho t - \rho s} ds \tag{4.67}$$

$$= C + C\rho e^{\rho t}\int_0^t \frac{1}{e^{\rho s}} ds = C + C\rho e^{\rho t}\left(-\frac{1}{\rho e^{\rho s}}\right)_{s=0}^{t} \tag{4.68}$$

$$= C + C\rho e^{\rho t}\left(-\frac{1}{e^{\rho t}} + \frac{1}{\rho e^{0t}}\right) = C - C\frac{\rho e^{\rho t}}{\rho e^{\rho t}} + C\frac{\rho e^{\rho t}}{\rho} \tag{4.69}$$

$$= C - C + Ce^{\rho t} = Ce^{\rho t}. \tag{4.70}$$

Logo, $\|u(t)\|_{L^p(\Omega)} + \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq Ce^{\rho t}$ para todo $t \in [0, T_m)$.

Como F e G aplicam subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^2$ em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$, existe $L > 0$ tal que

$$|f(s,x)| \leq L \ e \ |g(s,x)| \leq L \tag{4.71}$$

para cada $(s,x) \in (0, T_m) \times \Omega$, cada $f(s,x) \in F(u(s,x), v(s,x))$ e cada $g(s,x) \in G(u(s,x), v(s,x))$.

Assim, seja (f,g) com $f(t) \in F(u(t),v(t))$ e $g(t) \in G(u(t),v(t))$ q.t.p. em $[0,T_m)$ tais que u e v são soluções de

$$\begin{cases} u_t - \Delta\varphi(u) = f \\ v_t - \Delta\psi(v) = g \end{cases}$$

respectivamente em $[0,T_m)$, tanto f quanto g pertencem a $L^1(0,T;L^1(\Omega))$. Logo o problema

$$\begin{cases} \frac{du^*}{dt} - \Delta\varphi(u^*) = f \\ \frac{dv^*}{dt} - \Delta\psi(v^*) = g \\ u^*(t,x) = v^*(t,x) = 0 \\ u^*(0,x) = u_0, \;\; v^*(0,x) = v_0 \end{cases} \tag{4.72}$$

tem uma única solução $(u^*,v^*) : [0,T_m] \to L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ que deve coincidir com (u,v) em $[0,T_m)$ e portanto

$$\lim_{t \to T_m} u(t) = \lim_{t \to T_m} u^*(t) = u^*(T_m). \tag{4.73}$$

Analogamente,

$$\lim_{t \to T_m} v(t) = \lim_{t \to T_m} v^*(t) = v^*(T_m). \tag{4.74}$$

Como $u^*(T_m)$ e $v^*(T_m)$ pertencem a $L^\infty(\Omega)$ podemos concluir que as soluções u e v podem ser continuadas à direita de T_m se $T_m < T$, ou pelo menos para T_m se $T_m = T$ e consequentemente (u,v) é não continuada. Essa contradição mostra que a suposição inicial é falsa, e portanto (u,v) é definida em $[0,T]$, como queríamos. $\square$

Considerações Finais

Baseado em [7] o trabalho provou a existência local e global de soluções para sistemas de inclusões parciais semi-difusivas passando por problemas da forma

$$\begin{cases} u_t - \Delta\varphi(u) = f & em\ (0,T)\times\Omega \\ \varphi(u) = 0 & em\ (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & em\ \Omega \end{cases} \tag{4.75}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua não decrescente,* $\varphi(0) = 0$, $f \in L^1(0,T;L^1(\Omega))$, *e* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. *A solução fraca que estamos nos referindo é uma função* $u \in C([0,T];L^1(\Omega))$ *tal que* $\varphi(u) \in L^1(0,T;L^1(\Omega))$ *e que satisfaça o sistema acima no sentido das distribuições sobre* $(0,T)\times\Omega$.

Além disso, gerando o artigo [15], provamos para o caso em que o operador é maximal monótono da forma $div(|\nabla u|^{p(\cdot)-2}\nabla u)$ *com forças externas* F *e* G *multívocas,* F *semi-contínua superiormente, onde o par* (F,G) *é positivamente sublinear e* G *de variáveis separáveis. O descrito sistema* (S) *tem a seguinte forma:*

$$(S)\begin{cases} u_t - div(|\nabla u|^{p(\cdot)-2}\nabla u) \in F(u,v) & t > 0 \\ v_t \in G(u,v) & t > 0 \\ u(t,x) = v(t,x) = 0 & t \geq 0,\ x \in \partial\Omega \\ (u(0,x),v(0,x)) = (u_0(x),v_0(x)) & em\ H\times H := L^2(\Omega)\times L^2(\Omega), \end{cases} \tag{4.76}$$

com $F : H\times H \to 2^H$ *semicontínua superiormente e* $G : H\times H \to 2^H$ *de variáveis separáveis da forma* $G(u,v) = g(u) + \mathscr{H}(v)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, *um domínio suave limitado.*

Em [7] é comentado que o caso em que G *é Lipschitz na segunda variável também poderia ser feito porém não discutimos este caso aqui.*

Por fim, provamos que o sistema (S) *possui um atrator global compacto sempre que* F *e* G *são aplicações multívocas semicontínuas superiormente e* (F,G) *positivamente sublinear e* $G : H \times H \to 2^H$ *é de variáveis separáveis da forma* $G(u,v) = g(u) + \mathscr{H}(v)$, *onde* g *é uma função contínua e* $-\mathscr{H}$ *é um operador maximal monótono satisfazendo* $\langle -\mathscr{H}(v), v\rangle \geq \kappa \|v\|_H^q$, *para todo* $v \in H$, *para algumas constantes* $q > 2$ *e* $\kappa > 0$.

Referências Bibliográficas

[1] Ball J. M., Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier-Stokes equations, J. Nonlinear Sci. ***7*** *(5) 475-502 (1997).*

[2] Benilan P., Equations d'Evolution dans un Espace de Banach Quelconque et Applications, Thése, Orsay, (1972).

[3] Botelho G., Pellegrino D., Teixeira E.,Fundamentos de Análise Funcional, SBM, Coleção Textos Universitários, Rio de Janeiro, (2014).

[4] Brezis H., Crandall M. G., Uniqueness of solution of the initial value problem for $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 153-163, (1979).*

[5] Brezis H., Operateus Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland, Amsterdam, (1973).

[6] Brezis H.,Functional Analysis, Sobolev Space and Partial Differential Equations, Springer New York, 1043-1054, (1993).

[7] Díaz J. I., Vrabie I. I., Existence for Reaction Diffusion Systems. A Compactness Method Approach, Journal of Mathematical Analysis and Applications ***188*** *(2) 521-540 (1994).*

[8] Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Ružička M., Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (2011).

[9] Fan X. L., Zhang Q. H, Existence of solutions for $p(x)-$*laplacian Dirichlet problems, Nonlinear Anal.* ***52*** *1843-1852 (2003).*

[10] Pereira A. C., Sistemas de Inclusões Diferenciais Governadas pelo p-Laplaciano, Universidade Federal de São Carlos-Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, São Carlos, (2004).

[11] Rudin W., Principles of Mathematical Analysis, New York-Auckland-Düsseldorf, International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill Book Co, Thrid Edition, (1976).

*[12] Simsen J., Gentile C., On p-Laplacian differential inclusions - Global existence, compactness properties and asymptotic behavior, Nonlinear Analysis **71** 3488-3500 (2009).*

*[13] Simsen J., Gentile C., On attractors for multivalued semigroups defined by generalized semiflows, Set-Valued Anal. **16** (1) 105-124 (2008).*

[14] Simsen J., Simsen M.S., On $p(x)-$*Laplacian parabolic problems, Nonlinear Studies **18** 393-403 (2011).*

[15] Simsen J., Souza P.E., Semi-diffusive coupled inclusions with variable exponents, Mathematics in Engineering, Science and Aerospace - MESA. Vol 12, No. 4, pp. 1091-1101, Florida, USA, (2021).

*[16] Simsen J., Wittbold P., Compactness results with applications for nonautonomous coupled inclusions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **479** 426-449 (2019).*

[17] Temam R., Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics, Springer-Verlag, New York, (1988).

[18] Vrabie I. I., Compactness Methods for Nonlinear Evolutions, Second Editon, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, New York, (1995).