

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA**

**Desenvolvimento de um Controlador Linear por Partes com Ação
Proporcional e Integral para Controlar um Processo com
Comportamento Não Linear**

Fábio Antunes

Itajubá, Dezembro de 2015

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA**

Fábio Antunes

**Desenvolvimento de um Controlador Linear por Partes com Ação
Proporcional e Integral para Controlar um Processo com
Comportamento Não Linear**

**Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica como parte dos requisitos para
obtenção do Título de Mestre em Ciências em
Engenharia Elétrica**

Área de Concentração: Automação e Sistemas Elétricos
Industriais

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Murari Pinheiro

**Dezembro de 2015
Itajubá**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA**

Fábio Antunes

**Desenvolvimento de um Controlador Linear por Partes com Ação
Proporcional e Integral para Controlar um Processo com
Comportamento Não Linear**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 10 de dezembro de 2015, conferindo ao autor o título de **Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica**

Banca examinadora:

Prof. Dr. Carlos Alberto Murari Pinheiro (Orientador)

Prof. Dr. Jocélio Souza de Sá

Prof. Dr. Jeremias Barbosa Machado

**Itajubá
2015**

*Aos meus pais, Raimunda e João e
às minhas irmãs, Flávia e Karina,
dedico este trabalho.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pelo dom da vida e pelas oportunidades.

À minha família, pelo amor e pelo constante apoio e incentivo.

À minha noiva, Priscila, pela paciência e pelo carinho.

Aos amigos, pelos momentos de descontração.

Um agradecimento especial ao prof. Pinheiro, pela confiança, dedicação, pelas valiosas contribuições e pela ajuda na realização deste trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

*"A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará
ao seu tamanho original."*

Albert Einstein

Resumo

Este trabalho apresenta o projeto, desenvolvimento, simulação computacional e a realização experimental de um controlador linear por partes (*piecewise*) com ação proporcional e integral (PI) aplicado no controle de um processo dinâmico com comportamento não linear. Os resultados obtidos serão comparados com dados oriundos de simulações numéricas e ensaios práticos que estão associados com a utilização de um controlador convencional.

Como processo será considerado um sistema de nível típico utilizado em algumas plantas industriais, cujo comportamento típico apresenta uma característica não linear. Para a parte experimental deste trabalho será utilizado um processo em escala reduzida, e neste contexto serão utilizados conceitos básicos relacionados com modelagem e identificação de sistemas dinâmicos. O objetivo será de se obter modelos adequados para os procedimentos de projeto que serão considerados neste trabalho.

É conhecido que os controladores com ações proporcionais e integrais são frequentemente utilizados em malhas de controle de processos industriais devido ao bom desempenho apresentado e simplicidade nas realizações práticas dos algoritmos de controle associados. Entretanto, controladores convencionais podem não atuar adequadamente quando se considera valores operacionais distintos. E, neste contexto, a aplicação de controladores lineares por partes constitui-se uma alternativa adequada para o controle de processos com características não lineares.

Na maioria dos artigos que abordam sistemas de controle lineares por partes, as representações matemáticas correspondentes usualmente empregam modelos em variáveis de estado, e as leis de controle associadas são expressas via técnicas de retroação de estados. Neste trabalho pretende-se utilizar leis de controle diretamente associadas com ações proporcionais e integrais relacionadas com realimentação de saída, e não necessariamente com retroação de estados.

Como resultado esperado pretende-se obter uma metodologia de projeto sistemática para controladores com ações proporcionais e integrais que utilizem informações típicas de realimentação de saída dos processos a serem controlados, e que o desempenho resultante seja melhor do que o obtido com a utilização de controladores convencionais.

Palavras-chave: sistemas dinâmicos; sistemas não lineares, controlador PI, controlador linear por partes (*piecewise*).

Abstract

This paper addresses the project, development, computational simulation and the experimental realization of a piecewise controller with proportional and integral (PI) action applied in control of a dynamic process with nonlinear behavior. The results will be compared with data obtained from numerical simulations and practical tests that are associated with the use of a conventional controller.

As process will be considered a typical level system used in some industrial plants whose typical behavior presents a nonlinear characteristic. For the experimental part of this work will be used a small-scale process, and in this context will be used basic concepts related to modeling and identification of dynamic systems. The goal is to obtain appropriate models for the design procedures that will be considered in this work.

It is known that the controllers with proportional and integral actions are often used in control loops of industrial processes due to the good performance and simplicity in practical achievements of the control algorithms associated. However, conventional controllers may not work properly when considering different operational values. And, in this context, the application of piecewise controllers constitutes a suitable alternative for process control with nonlinear characteristics.

In most articles that discuss piecewise control systems, the corresponding mathematical representations usually employ models in state variables, and associated control laws are expressed via state feedback techniques. In this work is intended to use control laws directly associated with proportional and integral actions related to output feedback, and not necessarily with state feedback.

As expected result it is intended to obtain a systematic design methodology for controllers with proportional and integral actions that use typical output feedback information of the processes that will be controlled, and that the resulting performance is better than that obtained with the use of conventional controllers.

Keywords: dynamic systems; nonlinear systems, PI controller, piecewise controller.

Sumário

Capítulo 1 Introdução	1
Capítulo 2 Revisão Bibliográfica	3
Capítulo 3 Fundamentação Teórica	7
3.1 Introdução	7
3.2 Modelagem e Identificação de Sistemas Dinâmicos	7
3.2.1 Modelo ARX	9
3.2.2 Modelo NARMAX	10
3.2.3 Estimação de Parâmetros	12
3.2.4 Modelo Linear por Partes (Piecewise).....	13
3.3 Malhas de Controle.....	16
3.3.1 Controlador com Ação Proporcional e Integral (PI)	17
3.3.2 Controlador PI Discreto	17
3.3.3 Método do Lugar das Raízes	18
3.3.4 Alocação de Polos	18
3.3.5 Leis de Controle para Modelos Lineares por Partes.....	20
3.4 Análise de Estabilidade	22
Capítulo 4 Metodologia e Desenvolvimento	26
4.1 Introdução	26
4.2 Descrição do Sistema de Nível	26
4.3 Projeto do Controlador PI Discreto	35
4.3.1 Resultados de Simulações do Controle de Nível via Controlador Discreto	37
4.4 Projeto do Controlador Linear por Partes.....	40
4.4.1 Resultados das Simulações com o Controlador Linear por Partes	41
4.5 Análise de Estabilidade	45
Capítulo 5 Resultados Experimentais.....	48

5.1 Introdução.....	48
5.2 Resultados Experimentais com o Controlador Convencional.....	48
5.3 Resultados Experimentais com o Controlador <i>Piecewise</i>	51
Capítulo 6 Conclusão.....	56
6.1 Comentários.....	56
6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros.....	57
Referências Bibliográficas.....	58
Anexo A Informações Técnicas do Sistema de Aquisição de Dados Utilizado.....	63
Anexo B Tela do Supervisório Utilizado nos Ensaios.....	64
Anexo C Programas Utilizados na Obtenção dos Modelos NARMAX e <i>Piecewise</i> via Técnica de Agrupamento de Dados <i>Fuzzy C-means</i>	65
Anexo D Programas Utilizados nas Simulações dos Controladores Convencional e <i>Piecewise</i> Utilizando o Modelo NARMAX.....	69
Anexo E Programa Utilizado para Calcular a Nova Matriz P Definida Positiva Devido aos Ajustes dos Ganhos do Modelo PW.....	73
Anexo F Diagrama de Blocos do Controle via Controlador Convencional.....	74
Anexo G Diagrama de Blocos do Controle via Controlador <i>Piecewise</i>	75

Lista de Figuras

Figura 3.1 - Diagrama de blocos com os procedimentos básicos para a obtenção de um modelo PWA	16
Figura 3.2 - Sistema de controle em malha fechada.....	17
Figura 3.3 - Representação genérica de malhas de controle por retroação de estados.....	20
Figura 3.4 - Diagrama de blocos do procedimento adotado para o chaveamento das leis de controle	22
Figura 4.1 - Estrutura típica do sistema de nível	26
Figura 4.2 - Estrutura da bancada de ensaios	28
Figura 4.3 - Conjunto de dados provenientes de um ensaio prático realizado na bancada de testes	28
Figura 4.4 - Comparação entre os dados estimados pelo modelo ARX e os medidos na bancada.....	29
Figura 4.5 - Conjunto de dados de outro ensaio prático realizado na bancada de testes.....	30
Figura 4.6 - Comparação entre os dados estimados pelo modelo NARMAX e os medidos na bancada.....	31
Figura 4.7 - Dados utilizados na obtenção do modelo linear por partes	32
Figura 4.8 - Resultado do agrupamento de dados para obtenção do modelo linear por partes	33
Figura 4.9 - Teste do modelo linear por partes obtido	35
Figura 4.10 - Simulações do controlador discreto para valores de referência variando em ordem crescente	37
Figura 4.11 - Simulações do controlador discreto para valores de referência variando em ordem decrescente	38
Figura 4.12 - Resultados normalizados do controlador discreto para valores de referência variando em ordem crescente	39
Figura 4.13 - Resultados normalizados do controlador discreto para valores de referência variando em ordem decrescente	39
Figura 4.14 - Simulações do controlador linear por partes para valores de referência variando em ordem crescente	42
Figura 4.15 - Simulações do controlador linear por partes para valores de referência variando em ordem decrescente	42

Figura 4.16 - Resultados normalizados do controlador linear por partes para valores de referência variando em ordem crescente	43
Figura 4.17 - Resultados normalizados do controlador linear por partes para valores de referência variando em ordem decrescente	43
Figura 5.1 - Ensaios com o controlador convencional para valores de referência variando crescentemente.....	49
Figura 5.2 - Ensaios com o controlador convencional para valores de referência variando decrescentemente.....	49
Figura 5.3 - Ensaios com resultados normalizados utilizando o controlador convencional para valores de referência variando crescentemente	50
Figura 5.4 - Ensaios com resultados normalizados utilizando o controlador convencional para valores de referência variando decrescentemente	50
Figura 5.5 - Ensaios com o controlador <i>piecewise</i> para valores de referência variando crescentemente.....	51
Figura 5.6 - Ensaios com o controlador <i>piecewise</i> com valores de referência variando decrescentemente.....	52
Figura 5.7 - Ensaios com o controlador <i>piecewise</i> para valores de referência variando crescentemente.....	52
Figura 5.8 - Ensaios com o controlador <i>piecewise</i> com valores de referência variando decrescentemente.....	53
Figura 5.9 - Índice ITAE em relação às variações de referência de entrada	55
Figura A.1 - Diagrama de blocos do NI USB-6008	63
Figura B.1 - Tela do supervisor desenvolvido no software LabVIEW	64
Figura F.1 - Diagrama de blocos do aplicativo desenvolvido para o controlador convencional	74
Figura G.1 - Diagrama de blocos do aplicativo desenvolvido para o controlador <i>piecewise</i> ...	75
Figura G.2 - Algoritmo de controle desenvolvido para o controlador <i>piecewise</i>	76

Lista de Tabelas

Tabela 4.1 - Valores de M_p e T_a para valores crescentes de referência de entrada	44
Tabela 4.2 - Valores de M_p e T_a para valores decrescentes de referência de entrada	44
Tabela 5.1 - Valores de M_p e T_a para valores crescentes de referência de entrada	53
Tabela 5.2 - Valores de M_p e T_a para valores decrescentes de referência de entrada	54
Tabela 5.3 - Índice de desempenho ITAE	55
Tabela A.1 - Características do sistema de aquisição de dados utilizado.....	63

Lista de Abreviaturas

AC	-	Corrente Alternada
A/D	-	Conversor Analógico-Digital
ARMAX	-	Modelo Auto-regressivo com Média Móvel e Entradas Exógenas
ARX	-	Modelo Auto-regressivo com Entradas Exógenas
D/A	-	Conversor Digital-Analógico
DC	-	Corrente Contínua
ITAE	-	Integral do Tempo Multiplicada pelo Erro Absoluto
NARMAX	-	Modelo Não Linear Auto-regressivo com Média Móvel e Variáveis Exógenas
NARX	-	Modelo Não Linear Auto-regressivo com Variáveis Exógenas
PC	-	Computador
PI	-	Controlador Proporcional-Integral
PID	-	Controlador Proporcional-Integral-Derivativo
PWA	-	Modelo Afim por Partes
PWM	-	Modulação por Largura de Pulso
SAD	-	Sistema de Aquisição de Dados
SP	-	<i>Set Point</i> (Valor de Referência)
USB	-	<i>Universal Serial Bus</i>

Lista de Símbolos

z	-	Operador no Domínio Z
T	-	Tempo de Amostragem
k	-	Amostra k de uma Grandeza
θ	-	Vetor de Parâmetros ou Coeficientes da Equação de um Modelo
$\zeta(k)$	-	Erros ou Incertezas Relacionados a Modelagem
$\psi(k-1)$	-	Vetor de Variáveis Regressoras
$u(k), y(k)$	-	Entradas e Saídas de um Sistema
K_P	-	Ganho Proporcional
K_I	-	Ganho Integral
ζ	-	Fator de Amortecimento
W_n	-	Frequência Natural de Oscilação
μ, φ	-	Módulo e Fase dos Polos Dominantes
M_p	-	Máximo Pico
T_a	-	Tempo de Acomodação

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho será realizado o projeto e desenvolvimento de um controlador linear por partes com ação proporcional e integral aplicado no controle de um processo com comportamento não linear. É conhecido que controladores com ações proporcionais e integrais são amplamente empregados na prática por apresentarem bons desempenhos e serem de realização prática não complexa (ASTROM e HAGGLUND, 1995). Como exemplo de aplicação será considerado um sistema de nível típico em processos industriais, e que apresenta características não lineares.

A metodologia proposta baseia-se na utilização de procedimentos conhecidos para o projeto de controladores típicos com ações proporcionais e integrais, mas que estejam associados com abordagens relacionadas com sistemas de controle lineares por partes ou *piecewise*.

A motivação principal deste trabalho se deve aos bons resultados originados das aplicações dos conceitos relacionados a controladores lineares por partes quando aplicados no controle de processos com comportamentos não lineares ou com parâmetros variáveis no tempo (CHUA e KANG, 1977). Esta área de sistemas de controle apresentou vários desenvolvimentos nos anos 80, onde várias abordagens na modelagem de sistemas lineares por partes foram desenvolvidas.

Nesta dissertação será proposta uma metodologia de projeto e a realização prática de um controlador linear por partes com ação proporcional e integral (PI), cuja finalidade consiste em controlar um processo com comportamento não linear. Os resultados obtidos (simulados e práticos), serão comparados com os resultantes da aplicação de um controlador PI convencional. A conclusão esperada é que, para as mesmas especificações de projeto, o controlador linear por partes apresente respostas dinâmicas melhores em relação ao controlador convencional.

A estrutura da dissertação é descrita a seguir. No próximo capítulo é apresentada uma resenha bibliográfica com os assuntos pesquisados no desenvolvimento deste trabalho. No Capítulo 3 serão abordados conceitos relacionados com a modelagem e identificação de sistemas dinâmicos, com modelos lineares por partes, associações com técnicas de

agrupamento de dados, a conceituação básica de projeto de controladores com ações PI, e metodologias de projeto de controladores lineares por partes. O Capítulo 4 apresenta a metodologia e o desenvolvimento do tema proposto nesta dissertação, além dos resultados obtidos na forma de simulações computacionais. No Capítulo 5 são apresentados os dados oriundos de ensaios experimentais. Finalmente, no Capítulo 6, encontram-se as conclusões finais do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

O objetivo principal na identificação e modelagem de um sistema dinâmico é obter um modelo matemático que reproduza as propriedades fundamentais do mesmo, cuja principal vantagem é trabalhar as características do sistema sem a necessidade de acessá-lo fisicamente. No entanto, os sistemas dinâmicos encontrados na prática apresentam, em sua maioria, comportamentos não lineares (AGUIRRE, 2004), sendo que muitos destes sistemas combinam comportamento de sistemas dinâmicos contínuos com comportamento de modelos dinâmicos discretos no tempo, conhecidos como sistemas híbridos (GOEBEL et al., 2009).

Em grande parte das aplicações práticas, a utilização de representações lineares na modelagem e identificação de sistemas não lineares apresenta bons resultados. Porém, há casos em que modelos não lineares devem ser utilizados de forma a reproduzir determinados fenômenos e comportamentos mais complexos de sistemas reais. No contexto de simplificar a representação de sistemas não lineares e, ainda assim, produzir resultados satisfatórios, a aplicação de modelos lineares por partes se mostra adequada em determinados casos. Em Kang e Chua (1978) foi proposta uma abordagem matemática para uma representação global de funções lineares por partes com o objetivo de simplificar a identificação dos coeficientes da modelagem associada, resultando em uma redução do processamento e armazenamento dos dados relacionados à modelagem correspondente. A vantagem de tal representação é a possibilidade da utilização de técnicas de análise de estabilidade e metodologias de sistemas de controle que são bem conhecidas na literatura relacionada com sistemas de controle lineares. Broughton (1992) utilizando um método geral de representação em espaço de estados, propôs uma estratégia para gerenciar a transição de estado de um subsistema linear para outro aplicado na modelagem de sistemas não lineares. Da Gupta e Sontag (1998) estudaram o problema da equivalência em espaço de estados para sistemas lineares por partes. Paoletti et al. (2007) propuseram a conversão de modelos lineares por partes representados em espaço de estados na forma de relações de informações de entradas e saídas dos sistemas considerados. Em Nasri et al. (2010) foi proposta a análise de um sistema não linear complexo particionado em sistemas lineares por partes. Ferrari-Trecate et al. (2001) mostraram resultados relacionados com a identificação de sistemas híbridos utilizando modelagens lineares por partes, onde foi proposto um algoritmo que englobava o uso combinado de

técnica de agrupamento, identificação de sistemas e métodos de classificação. Bemporad et al. (2004) propuseram um procedimento para a classificação de dados e estimação de parâmetros para a identificação de sistemas lineares por partes. Em Vasak et al. (2006) foi discutida a identificação de um modelo linear por partes para um sistema com múltiplas entradas e saídas. Uma aplicação prática da identificação de sistemas utilizando modelagens lineares por partes foi apresentada por Karer et al. (2011). Neste artigo, o processo não linear de um reator em batelada é identificado utilizando um modelo linear por partes via um algoritmo de agrupamento de dados utilizando conceitos de conjuntos difusos (*fuzzy sets*).

Em relação ao projeto de controladores lineares por partes, em Sontag (1981) foram abordados problemas de sistemas de controle com características não lineares através do uso de modelos lineares por partes, onde técnicas de retroação de estados, realimentação de saída e observadores de estados foram aplicadas neste contexto. Paul e Phillips (1994) utilizaram o conceito de particionamento do espaço de estados de dados de um determinado sistema não linear em um conjunto de células de informações associadas. O controlador resultante foi formado através da união dos controladores individuais relacionados com cada célula de informação associada. Conceitos relacionados a observabilidade e controlabilidade de sistemas lineares por partes foram tratados em Bemporad et al. (2000). Outras abordagens relacionadas com projetos de controladores lineares por partes foram desenvolvidas ao longo dos anos como, por exemplo, com a utilização de conceitos de sistemas de controle ótimo (RANTZER e JOHANSSON, 2000). Projetos baseados em observadores de estados foram abordados por Juloski et al. (2002), van de Wouw et al. (2006) e Heemels et al. (2008).

Na análise de estabilidade de sistemas de controle lineares por partes, o critério de Lyapunov é usualmente utilizado (BRANICKY, 1994; PETTERSSON e LENNARTSON, 1996; BRANICKY, 1997; YE et al., 1998; BRANICKY, 1998; YFOULIS et al., 1998; DECARLO et al., 2000; MIGNONE et al., 2000; ALMER et al., 2007).

Uma aplicação prática da utilização da modelagem linear por partes foi apresentada em Molla-Ahmadian et al. (2015), no qual o projeto de um controlador híbrido aplicado no controle de conversores ressonantes em série foi abordado. Resultados simulados e experimentais comprovaram a eficácia da abordagem proposta.

Em relação aos sistemas de controle aplicados na indústria, mais de 95% são do tipo proporcional, integral e derivativo ou PID (ASTROM e HAGGLUND, 1995). A primeira aplicação prática de um controlador com ação PID data de 1890 (BENNETI, 1993) e, desde então, vem sido amplamente utilizado em variás aplicações em sistemas de controle. Além

disso, controladores PID passaram, ao longo dos anos, por importantes mudanças tecnológicas, desde dispositivos mecânicos e pneumáticos até a utilização de microprocessadores e computadores industriais em sua realização.

Algumas abordagens associaram sistemas de controles lineares por partes com técnicas de inteligência artificial. Em Li e Chen (1999) foi demonstrada a relação entre controladores que utilizam lógica *fuzzy* e controladores convencionais com ação PID, onde os primeiros podem ser classificados como controladores lineares por partes. Ayob et al. (2007) fizeram a comparação entre um controlador linear por partes e um controlador *fuzzy* PI não linear com entrada singela, e uma abordagem similar foi usada no controle de um conversor DC-AC em Ayob et al. (2006). Ainda no contexto de controladores PI, Ayob et al. (2010) abordaram a regulação de um inversor utilizando um controlador *fuzzy* PI simplificado baseado na modelagem linear por partes. Como resposta foi mostrado que o controlador proposto produziu resultados compatíveis com os de um controlador *fuzzy* PI convencional, porém com um tempo de processamento menor. Em Dolezel et al. (2012) um controlador com ação PID associado a redes neurais artificiais e funções lineares por partes foi apresentado. Em Ayob (2013) foi proposto o projeto de um controlador digital para um inversor PWM baseado na modelagem linear por partes. O controlador proposto possui características tanto de um controlador *fuzzy* quanto de um controlador PI convencional. Outra abordagem prática para a utilização de conceitos relacionados a modelagem linear por partes foi desenvolvida em Scalzi et al. (2010). Foi proposto o projeto de um sistema de direção veicular através da modelagem do sistema dinâmico não linear utilizando funções lineares por partes. A estratégia de controle propõe o projeto de dois controladores atuando conjuntamente, sendo um baseado em retroação de estados usando técnicas de alocação de polos, e o outro utilizando um controlador com ação PI.

Dentre as várias técnicas de linearização por partes de sistemas não lineares são citadas em artigos relacionados as que utilizam conceitos baseados em classificação e agrupamento de dados como as mais utilizadas. Neste contexto, a inserção de princípios da teoria de conjuntos *fuzzy* confere às abordagens clássicas de classificação e agrupamento de dados a capacidade de lidar adequadamente com aspectos de incerteza e imprecisão, comumente encontrados em problemas reais (ROCHA et al., 2012). Um exemplo prático da aplicação de tais técnicas de maneira bem sucedida pode ser observado na modelagem do processo não linear de um reator em batelada realizada em Kareret al. (2011).

Esta dissertação propõe o projeto de um controlador PI linear por partes aplicado em um sistema de nível que apresenta comportamento não linear. A modelagem do processo utilizado será realizada via técnica de agrupamento de dados utilizando conceitos de lógica *fuzzy*. Os resultados do controlador proposto serão, então, comparados com os de um controlador PI convencional para as mesmas especificações de projeto, cujo objetivo será mostrar a aplicabilidade da metodologia e verificar a possibilidade da melhoria do desempenho resultante.

Capítulo 3

Fundamentação Teórica

3.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados os conceitos básicos necessários para a compreensão da metodologia utilizada neste trabalho. Primeiramente, conceitos relacionados à modelagem e identificação de sistemas dinâmicos serão apresentados, pois as principais abordagens para análise e projeto de sistemas de controle necessitam de modelos numéricos dos processos a serem controlados. Particularmente será considerado um procedimento para a modelagem de sistemas via modelos lineares por partes (*piecewise*) que utilizará um algoritmo de agrupamento de dados para este propósito.

Posteriormente serão revistos os principais conceitos relacionados ao projeto de controladores de processos, especificamente aqueles que apresentam ações proporcionais e integrais. Dois métodos em particular serão destacados: o método do Lugar das Raízes e a técnica de alocação de polos.

Finalizando o capítulo, um procedimento para a análise de estabilidade de sistemas de controle é revisado, em particular o método direto de Lyapunov, que consiste em uma importante ferramenta tanto para a análise de sistemas lineares quanto para processos com comportamentos não lineares ou sistemas com parâmetros variantes no tempo.

3.2 Modelagem e Identificação de Sistemas Dinâmicos

Um sistema é uma combinação de componentes que atuam conjuntamente na realização de um determinado objetivo (OGATA, 2003). Aqueles que são constituídos por variáveis dependentes do tempo são denominados sistemas dinâmicos.

Usualmente, a etapa inicial da análise de um sistema dinâmico consiste na sua modelagem matemática, o que significa obter uma representação matemática que descreva as características e propriedades principais observadas no sistema. Isso se torna útil devido ao fato de poder-se utilizar ferramentas computacionais para a realização de estudos sobre características dinâmicas, estabilidade, desempenho, estratégias de controle e outras, sem a necessidade de acessar o sistema diretamente. Há várias técnicas de se obter modelos matemáticos, sendo uma delas denominada caixa branca (também conhecida como

fenomenológica ou conceitual). Neste caso, há a necessidade de se conhecer muito bem o sistema a ser modelado, incluindo as relações matemáticas que descrevem os fenômenos envolvidos. No entanto, devido ao conhecimento e facilidade de levantar informações para modelar um sistema partindo do equacionamento dos fenômenos envolvidos, nem sempre é viável realizar a modelagem fenomenológica (AGUIRRE, 2004).

Quando a aplicação da modelagem caixa branca é inviável, torna-se necessária a utilização de técnicas alternativas de modelagem matemática, entre as quais as técnicas de identificação de sistemas. Uma das características dessas técnicas é que pouco ou nenhum conhecimento prévio do sistema é necessário e tais métodos são conhecidos como modelagem caixa preta ou empírica. Nas abordagens empíricas são utilizados dados provenientes de medidas das informações das entradas e saídas dos processos estudados e, através de processamentos apropriados, são obtidos modelos matemáticos associados. As principais etapas de um problema de identificação são (LJUNG, 1987; AGUIRRE, 2004):

1. Coleta de dados. Consiste na obtenção dos dados de entrada e saída que serão utilizados para a construção do modelo. São medidas realizadas a partir de sistemas de aquisição de dados, coletores de dados ou através da própria instrumentação do processo, tendo cuidado em relação ao tipo de sinal (contínuo ou discreto), escolha adequada dos sinais de excitação, número de amostras, tempo de amostragem e outras.

2. Escolha da representação do modelo. Nesta etapa se escolhe a representação que seja mais adequada à modelagem pretendida, como equações diferenciais, funções de transferência, modelos discretos lineares ARX, ARMAX, etc. ou modelagens não lineares via modelos NARX, NARMAX e outras (AGUIRRE, 2004).

3. Escolha da estrutura do modelo. Após a escolha da representação do modelo, determina-se como será a estrutura dessa representação. Para sistemas lineares, isso significa escolher o número de polos e de zeros da função de transferência, por exemplo. No caso de uma representação discreta, escolhe-se o número de coeficientes do modelo considerado. Quanto menor o número de coeficientes de um modelo mais rápida será a sua computação.

4. Estimação de parâmetros. Constitui-se na aplicação de processamento numérico nos dados mensurados de um sistema prático para a determinação dos coeficientes do modelo. A maioria dos procedimentos é baseada no método dos mínimos quadrados ou nos seus variantes.

5. Validação do modelo. Consiste na comparação dos dados mensurados com aqueles obtidos via simulação do modelo resultante. É comum a utilização de outro conjunto de dados para validar o modelo diferente dos utilizados na etapa de estimação de parâmetros.

3.2.1 Modelo ARX

Estas representações no domínio discreto são realizadas na forma de equações de diferenças, funções de transferência no domínio Z ou representações no espaço de estados utilizando variáveis de estado discretas. Um modelo genérico utilizado em identificação de sistemas é expresso por (AGUIRRE, 2004):

$$A(z)y(k) = \frac{B(z)}{F(z)}u(k) + \frac{C(z)}{D(z)}v(k) \quad (3.1)$$

Sendo que:

- $u(k)$ e $y(k)$ representam as entradas e saídas do sistema, respectivamente;
- z^{-1} é a notação para o atraso de transporte correspondente ao tempo de amostragem T das informações associadas às variáveis do modelo (em que $k = nT$, com n denotando a amostra corrente), de forma que $y(k)z^{-1} = y(k-1)$;
- $v(k)$ representa uma variável que modela ruídos, erros ou incertezas associados com as medições das informações na entrada e na saída de um sistema.

Os termos denotados por $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $D(z)$ e $F(z)$ são polinômios expressos em (3.2) que definem os coeficientes do modelo.

$$\begin{aligned} A(z) &= 1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_{n_y} z^{-n_y} \\ B(z) &= b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_u} z^{-n_u} \\ C(z) &= 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{n_v} z^{-n_v} \\ D(z) &= 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{n_d} z^{-n_d} \\ F(z) &= 1 + f_1 z^{-1} + \dots + f_{n_f} z^{-n_f} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Um modelo auto-regressivo com entradas exógenas (ARX – *AutoRegressive with eXogenous inputs*) é adequado para modelar sistemas com características lineares com parâmetros invariantes no tempo e pode ser obtido a partir do modelo geral (3.1), considerando-se $C(z) = D(z) = F(z) = 1$, sendo $A(z)$ e $B(z)$ polinômios arbitrários, resultando em (3.3).

$$A(z)y(k) = B(z)u(k) + v(k) \quad (3.3)$$

A representação geral de um modelo ARX em equações de diferenças possui o formato expresso em (3.4).

$$y(k) = a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + \dots + a_{n_y}y(k-n_y) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + \dots + b_{n_u}u(k-n_u) + e(k) \quad (3.4)$$

Considerando, por exemplo, a equação de diferenças para um modelo com um termo de saída e um termo de entrada das amostras anteriores e, desprezando-se erros, incertezas e ruídos nas medidas, tem-se:

$$y(k) = a_1y(k-1) + b_1u(k-1). \quad (3.5)$$

Outros modelos de representações lineares podem ser derivados do modelo geral (3.1). Por exemplo, no caso em que $D(z) = F(z) = 1$ e $A(z)$, $B(z)$ e $C(z)$ polinômios arbitrários tem-se o modelo auto-regressivo com média móvel e entradas exógenas ARMAX (*AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs*).

3.2.2 Modelo NARMAX

Os sistemas dinâmicos encontrados na prática são usualmente não lineares e, em alguns casos aproximações lineares são suficientes para aplicações práticas (SLOTINE e LI, 1991). No entanto, para determinadas aplicações, um único modelo linear pode não ser satisfatório e representações não lineares são utilizadas.

Um modelo NARMAX (*Nonlinear AutoRegressive Moving Average model with eXogenous variables*) é geralmente representado da seguinte forma:

$$y(k) = F[y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-\tau_D), \dots, u(k-n_u), e(k), e(k-1), \dots, e(k-n_e)]. \quad (3.6)$$

Sendo τ_D o atraso de tempo, $e(k)$ o ruído e n_e o maior atraso da modelagem do ruído. Considerando que nenhum termo cujo parâmetro tenha que ser estimado possa depender de $e(k)$, a equação (3.6) é representada por (3.7).

$$y(k) = F^\ell[(y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-\tau_D), \dots, u(k-\tau_D-n_u+1), e(k-1), \dots, e(k-n_e))] + e(k) \quad (3.7)$$

sendo que $e(k)$ indica todos os efeitos que não podem ser bem representados por $F^\ell[.]$ (que é uma função polinomial de $y(k)$, $u(k)$ e $e(k)$ com grau de não linearidade $\ell \in \mathbb{N}$). A parte determinística (que não envolve termos contendo o ruído $e(k)$) de (3.7) pode ser expandida como o somatório de termos com graus de não linearidade variando na faixa $1 \leq m \leq \ell$, onde cada termo de grau m contém p fatores multiplicativos em $y(k-i)$ e $m-p$ fatores multiplicativos em $u(k-i)$, que são multiplicados por um parâmetro representado por $c_{p,m-p}(n_1, \dots, n_m)$. Matematicamente tem-se (3.8).

$$y(k) = \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^m \sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} c_{p,m-p}(n_1, \dots, n_m) \prod_{i=1}^p y(k-n_i) \prod_{i=p+1}^m u(k-n_i) \quad (3.8)$$

Embora seja um modelo não linear na relação entrada-saída, o modelo NARMAX polinomial é linear nos parâmetros. Então, para um modelo em que o grau de não linearidade e o número de atrasos é igual a três ($\ell = 3$, $n_y = 3$ e $n_u = 3$), que será o modelo utilizado posteriormente nesta dissertação, tem-se a equação de diferenças correspondente expressa por (3.9) e os regressores associados dados por (3.10). Os coeficientes podem, então, ser calculados pelo método dos mínimos quadrados através da equação (3.13) (AGUIRRE, 2004).

$$\begin{aligned} y(k) = & \theta_1 y(k-1) + \theta_2 y(k-2) + \theta_3 u(k-2) + \theta_4 u(k-1) + \\ & + \theta_5 y^2(k-1)u(k-1) + \theta_6 u^2(k-1)u(k-3) + \theta_7 y^3(k-3) + \\ & + \theta_8 y(k-2)u(k-2) + \theta_9 y^2(k-3)u(k-3) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\psi = \begin{bmatrix} y(2) & y(1) & u(1) & u(2) & y^2(2)u(2) & u^2(2)u(0) & y^3(0) & y(1)u(1) & y^2(0)u(0) \\ y(3) & y(2) & u(2) & u(3) & y^2(3)u(3) & u^2(3)u(1) & y^3(1) & y(2)u(2) & y^2(1)u(1) \\ y(4) & y(3) & u(3) & u(4) & y^2(4)u(4) & u^2(4)u(2) & y^3(2) & y(3)u(3) & y^2(2)u(2) \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_9 \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}$$

3.2.3 Estimação de Parâmetros

Na identificação de sistemas, após escolhidas a representação e a estrutura do modelo é realizada a etapa de estimação de parâmetros, em que são determinados os valores adequados para os parâmetros do modelo. Nesta etapa, usualmente é empregado o método dos mínimos quadrados. A equação (3.11) representa um modelo típico de regressão em que $\psi(k-1)$ é o vetor das variáveis regressoras, ou seja, é um conjunto das amostras das informações das entradas e saídas anteriores de um sistema, $\hat{\theta}$ é o vetor de parâmetros ou coeficientes da equação do modelo e $\xi(k)$ representa erros ou incertezas relacionadas a modelagem.

$$y(k) = \psi^T(k-1)\hat{\theta} + \xi(k) \quad (3.11)$$

O método consiste em usar um critério de medida do valor do erro e avaliar o modelo de acordo com esse critério, estabelecendo-se uma função de custo expressa por (3.12). A ideia é estimar os parâmetros de modo que o erro seja o menor possível, ou seja, o objetivo é minimizar a função de custo.

$$J = \sum_{k=1}^N \xi(k)^2 = \xi^T \xi \quad (3.12)$$

A minimização da função de custo J é realizada derivando a equação em relação aos parâmetros $\hat{\theta}$ e igualando-a a zero, ou seja, $\partial J / \partial \hat{\theta} = 0$. Assim, tem-se (3.13) que é a equação que possibilita o cálculo dos coeficientes do modelo considerado.

$$\hat{\theta} = [\psi^T \psi]^{-1} \psi^T y \quad (3.13)$$

3.2.4 Modelo Linear por Partes (Piecewise)

Uma modelagem afim por partes (*piecewise affine models* – PWA) ou linear por partes constitui uma alternativa factível na representação de sistemas com características não lineares ou com incertezas paramétricas (SONTAG, 1981). O interesse por esse tipo de modelagem é principalmente motivado por uma grande variedade de situações práticas como, por exemplo, em sistemas de controle em tempo real em que atuadores e transdutores de processos físicos interagem com controladores digitais. Neste caso, as equações dinâmicas de modelagem dos processos físicos e as regras de chaveamento dos modelos associados, são funções lineares de estados denominadas sistemas PWA (BEMPORAD et al., 2000).

Alguns estudos relacionados à identificação de sistemas PWA foca em modelos relacionados com informações de entrada e saída do processo a ser modelado. Embora esses tipos de modelos possam ser usados para descrever sistemas dinâmicos complexos (com comportamento não lineares, por exemplo), eles podem apresentar restrições para determinadas análises de características dinâmicas como para o estabelecimento de condições de estabilidade em aplicações de malhas de controle, por exemplo. Entretanto, existem métodos de análises de estabilidade para sistemas lineares por partes cujos modelos são representados em espaço de estados (VERDULT e VERHAEGEN, 2004).

A identificação de modelos PWA é um problema desafiador que envolve a estimação dos parâmetros dos submodelos afins e das partições que definem o espaço de estados do sistema em estudo. A principal dificuldade encontra-se no fato que o problema de identificação se baseia em um problema de classificação, em que cada ponto do conjunto de dados deve ser associado a uma região e ao submodelo correspondente, assim como o número de submodelos a ser considerado (BEMPORAD et al., 2004).

Nos modelos afins por partes, o espaço de estados relacionado com as informações de entrada e saída de um sistema é particionado em vários subespaços e, em cada subespaço a dinâmica do sistema modelado é descrita por um sistema afim por partes. Neste sentido, modelos PWA representam modelagens simplificadas que facilitam a aplicação clássica da teoria de sistemas de controle lineares no domínio do espaço de estados (KARER et al., 2011). A representação em variáveis de estado de uma modelagem PWA é expressa por (3.14).

$$x(n + 1) = A_i x(n) + B_i u(n); \quad y(n) = Cx(n) \quad (3.14)$$

Para $[x(n); u(n)] \in \{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^s$ cada partição associada do espaço de estados constitui um subsistema definido por $\{A_i, B_i\}$, $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ determinando um componente do sistema PWA (BEMPORAD et al., 2000). Resumindo, cada modelo linear por partes é expresso pelas matrizes/vetores A_i e B_i que constituem “ i ” conjuntos de dados relacionados com as partições dos subespaços considerados na modelagem em questão.

Sistemas PWA são significativos para modelar um grande número de processos físicos, tais como sistemas com não linearidades estáticas (por exemplo, a saturação do atuador de um processo), e eles podem aproximar, com certa precisão, dinâmicas não lineares através de múltiplas linearizações em diferentes pontos de operação (BEMPORAD et al., 2000).

Apesar dos modelos PWA serem uma composição de sistemas dinâmicos lineares, suas propriedades estruturais tais como observabilidade, controlabilidade e estabilidade são preservadas (BEMPORAD et al., 2000).

Na identificação de modelos PWA, geralmente não se conhece a dinâmica do sistema bem o suficiente para se determinar adequadamente as partições do espaço de estados, sendo a base de um modelo PWA. Neste caso, algoritmos de agrupamentos de dados podem ser utilizados para esta finalidade, como por exemplo, os algoritmos baseados na lógica difusa que no caso desta dissertação será empregado o algoritmo *Fuzzy C-means*.

Esta técnica de agrupamento *fuzzy* utiliza a informação do grau de pertinência associado com a distância entre um elemento de um agrupamento em relação ao centro do grupo de dados (*cluster*) associado. Quanto mais próximo do centro de um agrupamento um determinado dado estiver, maior será seu grau de pertinência a esse agrupamento.

Um algoritmo *Fuzzy C-means* é baseado na minimização do critério dado pela equação (3.15).

$$J_M = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^C \mu_{ij}^m \|x_i - c_j\|^2 \quad (3.15)$$

Sendo que m representa um número predefinido tal que $1 \leq m \leq \infty$, N é o número de pontos do espaço de estados da entrada e saída de um determinado conjunto de amostras, C representa o número de agrupamentos, μ_{ij} representa o valor da função de pertinência do agrupamento j para o i -ésimo ponto x_i , c_j denota o centro do agrupamento j , e $\| \cdot \|$ é a norma que define o grau de dissimilaridade entre o centro do agrupamento c_j e o ponto x_i . A norma Euclidiana

(3.16) é uma das métricas utilizadas como medida dos elementos de uma agrupamento em relação ao seu centro.

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} \quad (3.16)$$

A cada passo do algoritmo os valores das funções de pertinência μ_{ij} e os centros dos agrupamentos c_j são calculados através das equações (3.17) e (3.18), respectivamente, tal que para todo $i \in \{1, \dots, N\}$ tem-se $\sum_{j=1}^C \mu_{ij} = 1$.

$$\mu_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^C \left(\frac{\|x_i - c_j\|}{\|x_i - c_k\|} \right)^{\frac{2}{m-1}}} \quad (3.17)$$

$$c_j = \frac{\sum_{i=1}^N \mu_{ij}^m \cdot x_i}{\sum_{i=1}^N \mu_{ij}^m} \quad (3.18)$$

Um algoritmo de agrupamento *Fuzzy C-means* pode ser descrito através dos seguintes passos (KARER et al., 2011; ROCHA et al., 2012):

- 1) Definir o número de agrupamentos C , o valor do parâmetro m , estabelecer a matriz de pertinências inicial $U(0) = [\mu_{ij}]$ e definir um valor pequeno e positivo para o erro máximo ϵ permitido na computação do algoritmo.
- 2) Na k -ésima iteração determinar os centros dos agrupamentos c_j para $j = 1, \dots, C$ de acordo com $U(k)$.
- 3) Calcular a nova matriz de pertinências $U(k + 1)$.
- 4) Se $\|U(k + 1) - U(k)\| < \epsilon$, parar o algoritmo, senão voltar ao passo 2.

A Figura 3.1 apresenta através de um diagrama de blocos os procedimentos básicos adotados nesta dissertação para a obtenção de um modelo PWA via os conceitos descritos anteriormente.

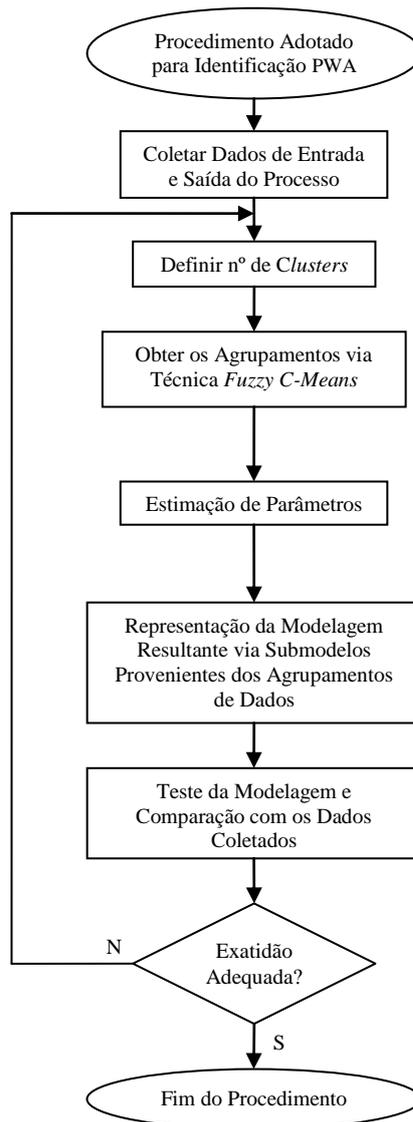


Figura 3.1 - Diagrama de blocos com os procedimentos básicos para a obtenção de um modelo PWA

3.3 Malhas de Controle

A Figura 3.2 ilustra uma malha de controle típica com o bloco G representando o processo a ser controlado, H o transdutor da grandeza “y” controlada que é realimentada negativamente no bloco de subtração que realiza a diferença desta em relação ao valor da referência de entrada “r”. O erro “e” resultante é processado pelo bloco C (o controlador da malha), fornecendo a informação de comando “u” do processo controlado.

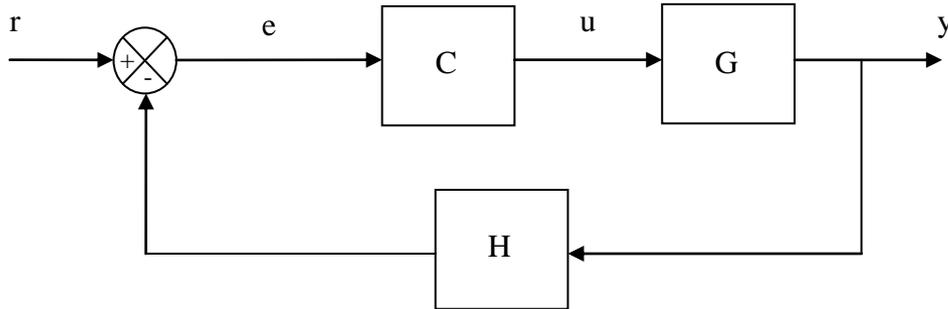


Figura 3.2 - Sistema de controle em malha fechada

A resposta de um sistema de controle em malha fechada tende a rejeitar distúrbios externos e variações de parâmetros do processo controlado, além de estabilizar sistemas instáveis em malha aberta (PHILLIPS e NAGLE, 1995). A escolha adequada da função do controlador e a sintonia dos seus ganhos/parâmetros é fundamental para impor uma determinada dinâmica especificada para a malha de controle resultante.

3.3.1 Controlador com Ação Proporcional e Integral (PI)

Um dos controladores mais utilizados na prática (ASTROM e HAGGLUND, 1995) apresenta ação de controle proporcional e integral, cuja modelagem típica é expressa por (3.19), onde K_P é conhecido como ganho proporcional e K_I o ganho integral.

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int e(t) dt \quad (3.19)$$

3.3.2 Controlador PI Discreto

A equação (3.19) define um controlador PI com ação contínua no tempo. No caso de um controlador com ação discreta no tempo, a modelagem usual é expressa por (3.20) com a utilização da aproximação retangular ou de Euler para a realização da ação integral “ $I(k)$ ” de controle (PHILLIPS e NAGLE, 1995). Sendo a função (3.21) a correspondente modelagem deste controlador digital no domínio “ z ” para um determinado tempo de amostragem “ T ”.

$$u(k) = K_P e(k) + K_I I(k); \quad I(k) = I(k-1) + e(k-1)T \quad (3.20)$$

$$C(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = K_p + K_I \frac{T}{z-1} = \frac{K_p z + K_I T - K_p}{z-1} \quad (3.21)$$

3.3.3 Método do Lugar das Raízes

O método do Lugar das Raízes tem como procedimento básico o estabelecimento de valores de polos e zeros na função de compensação $C(z)$ associada ao controlador utilizado. O objetivo consiste em deslocar as raízes da equação característica $Q(z)$ da função $y(z)/r(z)$ em malha fechada de um determinado sistema de controle (similar ao ilustrado na Figura 3.2), para locais especificados no plano z (PHILLIPS E NAGLE, 1995). Uma forma usual da aplicação do método consiste em especificar os polos dominantes ($p_{1,2} = R \pm jI = \mu \angle \pm \varphi$) que definem a dinâmica desejada (3.22) em relação a qualquer outro polo não dominante (p_n). O fator de amortecimento (ζ) e a frequência natural de oscilação (W_n), associados aos valores do módulo (μ) e fase (φ) dos polos dominantes, definem o valor do máximo pico (M_p) e do tempo de acomodação (T_a) da malha de controle resultante para uma entrada de referência em degrau. A equação (3.23) ilustra o procedimento citado para estabelecer a função de compensação (ou de sintonia) do controlador associado.

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{-\text{Ln}(\mu)}{\sqrt{(\text{Ln}(\mu))^2 + \varphi^2}}; \\ W_n &= \frac{1}{T} \sqrt{(\text{Ln}(\mu))^2 + \varphi^2}; \\ M_p &= e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}; \\ T_a &= \frac{4}{\zeta W_n}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} Q(z) &= 1 + C(z)G(z)H(z) = 0; \\ Q(z) &= (z - R - jI)(z - R + jI) \dots (z - p_n) \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.3.4 Alocação de Polos

Uma malha de controle similar à ilustrada na Figura 3.2 utiliza a retroação da grandeza controlada, também conhecida como realimentação da informação de saída do processo em questão. Nas estruturas de controle com retroação de estados todas as variáveis associadas aos

estados do sistema controlado são realimentadas, sendo que os valores destas são multiplicados por ganhos reais de modo a estabelecer a dinâmica especificada. Uma técnica conhecida para calcular estes ganhos é denominada alocação de polos, cuja conceituação básica é similar às técnicas baseadas no método do Lugar das Raízes. Entretanto, a técnica de alocação de polos permite a colocação de todas as raízes da função de transferência em malha fechada nas localizações especificadas. No entanto, é necessária a mensuração ou estimação de todas variáveis de estado do sistema (PHILLIPS e NAGLE, 1995).

Os procedimentos básicos de técnicas de alocação de polos no tempo discreto necessitam de modelos expressos em variáveis de estados discretas, como ilustrado em (3.24).

$$x(n + 1) = Ax(n) + Bu(n); \quad y(n) = Cx(n). \quad (3.24)$$

A lei de controle básica é expressa por (3.25), sendo “ x ” um vetor que representa os valores das variáveis de estado do modelo do processo e “ K ” um vetor/matriz de ganhos reais de retroação de estados.

$$u(n) = -Kx(n) \quad (3.25)$$

Assim, em malha fechada tem-se a modelagem (3.26) associada, sendo $A_{eq} = A - BK$ a matriz de estados equivalente em malha fechada e (3.27) a equação característica resultante.

$$x(n + 1) = (A - BK)x(n) \quad (3.26)$$

$$\alpha_c(z) = |zI - A_{eq}| = 0 \quad (3.27)$$

Supondo que a partir das especificações de projeto as localizações desejadas dos polos devam ser $z = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, então, o polinômio característico do sistema em malha fechada é expresso por (3.28) e desta equação matricial se calcula o vetor de ganhos de retroação.

$$\alpha_c(z) = |zI - A + BK| = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n) \quad (3.28)$$

A Figura 3.3 ilustra na forma de diagrama de blocos uma malha de controle por retroação de estados genérica que incorpora uma ação integral ($\sum e$) com um ganho K_I associado, cuja finalidade é anular o erro em regime permanente da malha de controle para

uma entrada de referência “ r ” em degrau, por exemplo, caso o modelo do processo controlado seja do tipo “0”. A lei de controle correspondente é expressa por (3.29) e o erro da malha dado por (3.30).

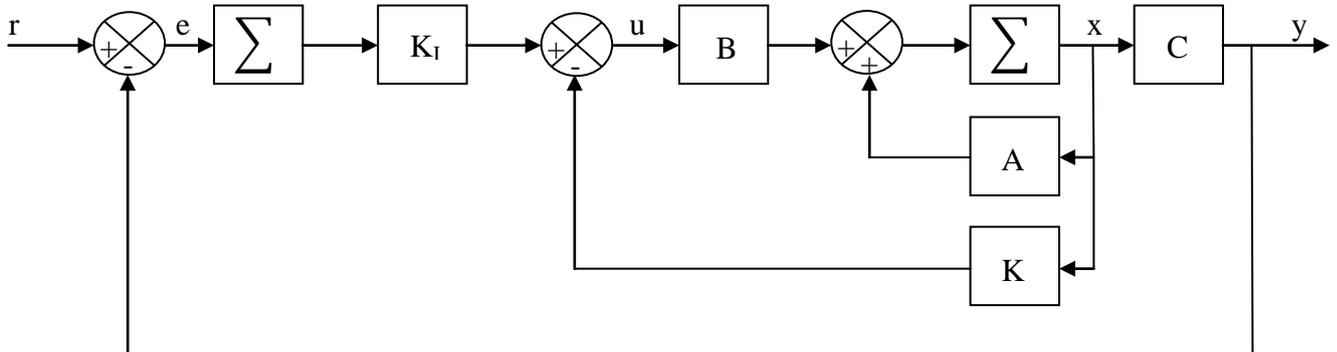


Figura 3.3 - Representação genérica de malhas de controle por retroação de estados

$$u(n) = -Kx(n) + K_I \sum e(n)T \quad (3.29)$$

$$e(n) = r(n) - y(n) \quad (3.30)$$

A inclusão do integrador na malha de controle implica na expansão das matrizes/vetores associadas para o cálculo dos ganhos de retroação de estados, conforme descrito abaixo:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -T.C & 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{K} = [K \quad -K_I]. \quad (3.31)$$

3.3.5 Leis de Controle para Modelos Lineares por Partes

Para modelos lineares por partes na forma (3.14), as leis de controle associadas são representadas por (3.25), onde o vetor/matriz de ganhos de retroação de estados é expresso por \mathbf{K}_i que representa um conjunto de valores de ganhos referentes a cada partição “ i ” do espaço de estados do modelo do processo associado.

No caso de malhas de controle semelhantes à estrutura da Figura 3.2, a modelagem do processo em questão pode ser representada por um conjunto de funções de transferência \mathbf{G}_i (ou \mathbf{A}_i e \mathbf{B}_i em variáveis de estado), e as funções de controle por \mathbf{C}_i (que no caso de um controlador PI é expresso por um conjunto de ganhos \mathbf{K}_{Pi} e \mathbf{K}_{Ii}). E a proposta desta dissertação consiste em apresentar uma metodologia de projeto para malhas de controle que possuam

controladores com ações proporcionais e integrais no contexto de sistemas de controle lineares por partes.

Conforme será descrito posteriormente, a transição entre as leis de controle associadas a cada submodelo da modelagem linear por partes de um determinado processo é estabelecida por estruturas de processamento de dados do tipo "if" em que, a cada passo, o valor da saída "y" é verificado com a finalidade de se determinar a qual submodelo ela está associada em um determinado instante. Então, baseando-se nessa informação, o algoritmo de controle faz o chaveamento das leis de controle associando cada submodelo (A_i e B_i em variáveis de estado), referente a uma determinada partição "i" do espaço de estados do sistema, ao seu respectivo conjunto de ganhos K_i (K_{Pi} e K_{Ii} para um controlador PI), executando, assim, a lei de controle estabelecida para aquela partição associada ao submodelo correspondente. A Figura 3.4 representa parte do algoritmo utilizado neste trabalho e ilustra como é feito o chaveamento entre as leis de controle através de um diagrama de blocos.

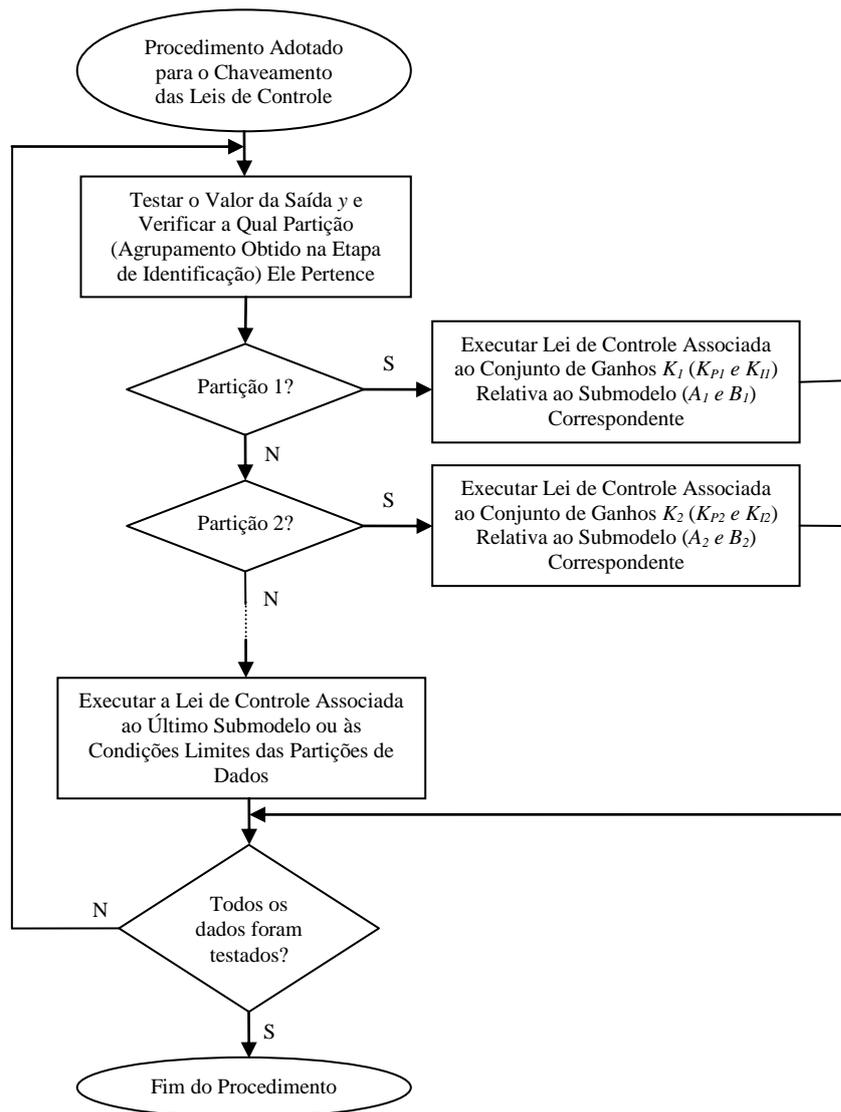


Figura 3.4 - Diagrama de blocos do procedimento adotado para o chaveamento das leis de controle

3.4 Análise de Estabilidade

É possível estabelecer uma correspondência entre uma malha de controle similar a da Figura 3.2 com aquela relacionada com a Figura 3.3. Como exemplo será considerado um modelo ARX expresso por (3.5) que no domínio “z” é representado por (3.32), se considera que o ganho de realimentação “H” já esta incorporado na função “G” do processo controlado.

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_1}{z - a_1} \quad (3.32)$$

Considerando a função (3.21) que modela um controlador discreto no tempo com ação PI, tem-se em (3.33) a função de transferência em malha fechada associada com a Figura 3.2.

$$\frac{y(z)}{r(z)} = \frac{K_P b_1(z-1) + K_I b_1 T}{z^2 + (K_P b_1 - a_1 - 1)z + a_1 + b_1(K_I T - K_P)} \quad (3.33)$$

Considerado o mesmo modelo ARX expresso por (3.5), a representação em variáveis de estados discretas correspondente é expressa por (3.34), e a lei de controle associada é dada por (3.35) que constitui um caso específico de (3.29) no domínio “z”.

$$x(n+1) = a_1 x(n) + b_1 u(n) \quad (3.34)$$

$$u(z) = K_I \frac{T}{z-1} e(z) - K x(z) \quad (3.35)$$

Assim, a função de transferência em malha fechada associada com a Figura 3.3 é dada por (3.36), onde neste caso $K = K_1$ tendo-se apenas um ganho de retroação por haver apenas uma variável de estado, ou seja, $\mathbf{x}(n) = x_1(n)$ com $y(n) = x_1(n)$.

$$\frac{y(z)}{r(z)} = \frac{K_I b_1 T}{z^2 + (K_1 b_1 - a_1 - 1)z + a_1 + b_1(K_I T - K_1)} \quad (3.36)$$

Comparando as funções (3.33) e (3.36) verifica-se que o denominador destas, ou seja, suas equações características são as mesmas com a correspondência $K_P = K_1$, lembrando que os valores dos polos (raízes) das equações características determinam a estabilidade e a dinâmica associada. Assim, pode-se dizer que há uma correspondência entre as duas funções consideradas, sendo que a diferença dos numeradores destas consiste de um zero (raiz do numerador) na função (3.33) que não afeta a estabilidade da malha associada (mas, dependendo do valor da raiz, provocando eventualmente uma modificação na resposta transitória do sistema de controle resultante).

Para uma malha de controle similar a da Figura 3.2, cuja equação característica é expressa por (3.23), a garantia de estabilidade é estabelecida para polos com valores na faixa $|z| < 1$ (círculo unitário). No procedimento de cálculo dos ganhos da função de controle esta condição é alcançada especificando os polos dominantes ($z_{1,2}$) com valor do módulo associado

dentro do círculo unitário no domínio “ z ”, e verificando se outros polos (p_n) possuem valores na faixa $|z| < 1$.

Para uma malha de controle similar a da Figura 3.3, cuja equação característica é expressa por (3.27), a garantia de estabilidade é estabelecida quando todos os autovalores (polos) tenham valores na faixa $|z| < 1$. No procedimento de cálculo dos ganhos de retroação de estados esta condição é alcançada especificando os polos dominantes ($z_{1,2}$) e os não dominantes (p_n) dentro do círculo unitário.

Para a análise de estabilidade de um modelo afim por partes é utilizado o critério de Lyapunov. Este critério também é útil para modelos de sistemas com comportamentos não lineares ou de parâmetros variantes no tempo. O critério utiliza o conceito que se um sistema é estável então seus estados convergem para uma região definida como estável, e a energia armazenada do sistema decai a medida que o tempo aumenta até finalmente assumir um valor mínimo em um estado de equilíbrio. O critério de Lyapunov é descrito por (3.37) para modelos discretos no tempo, sendo $V(x(n))$ conhecida como função de Lyapunov.

$$\begin{aligned} V(x(n)) &> 0; \\ \Delta V(x(n)) &\leq 0. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Para um modelo linear a função de Lyapunov pode ser representada por (3.38), sendo P uma matriz definida positiva e o termo “ Tr ” a notação de matriz transposta. A condição de estabilidade é garantida pelo critério de Lyapunov (3.37) se os autovalores da matriz “ P ” tiverem valores positivos, ou seja, a matriz for definida positiva.

$$V(x(n)) = x^{Tr}(n).P.x(n) \tag{3.38}$$

Um dos procedimentos de obtenção da matriz “ P ” utiliza a inequação de Lyapunov expressa por (3.39), que pode ser escrita na forma da igualdade (3.40) sendo $Aeq_i = A_i - B_i K_i$, “ I ” uma matriz identidade e “ α ” um escalar de valor a se escolher.

$$Aeq_i^{Tr}.P.Aeq_i - P < 0 \tag{3.39}$$

$$Aeq_i^{Tr}.P.Aeq_i - P = -\alpha I \tag{3.40}$$

Para um sistema de controle linear por partes a garantia de estabilidade é estabelecida com a obtenção de uma matriz “ P ” comum ao conjunto de matrizes equivalentes (A_{eq_i}) relacionado com os dados da modelagem (A_i e B_i) e os ganhos (K_i) das leis de controle associadas (MIGNONE et al., 2000).

No próximo capítulo os tópicos mostrados nesta parte do texto serão utilizados nos procedimentos da metodologia proposta nesta dissertação.

Capítulo 4

Metodologia e Desenvolvimento

4.1 Introdução

Neste capítulo será apresentada a metodologia utilizada nesta pesquisa e o desenvolvimento de um controlador com estrutura *piecewise* com ação PI para controlar um processo não linear (especificamente neste trabalho, um sistema de nível em escala reduzida). Dados reais do processo em questão serão empregados na obtenção de modelos do sistema que servirão para o desenvolvimento de um controlador discreto convencional e outro linear por partes.

4.2 Descrição do Sistema de Nível

O sistema de nível em escala reduzida utilizado neste trabalho (Figura 4.1) é composto por dois reservatórios sobrepostos e interligados, em que uma bomba motorizada transfere líquido (neste caso água) do reservatório inferior para o superior (onde se realiza o controle do nível do fluido em questão). O sistema utilizado consiste de um computador (PC) que executa os algoritmos de controle, uma interface composta de conversores A/D (análogo-digital) e D/A (digital-analógico), um transdutor de nível e um módulo eletrônico para o processamento dos sinais do transdutor e do *driver* da bomba motorizada.

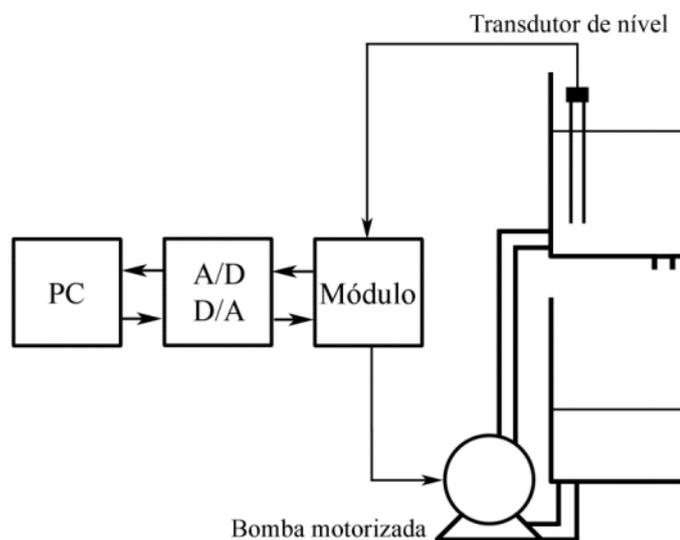


Figura 4.1 - Estrutura típica do sistema de nível

O nível do sistema é medido por um transdutor capacitivo constituído por duas hastes metálicas em contato com o líquido do processo. A alteração do nível do líquido equivale a uma variação do dielétrico do capacitor associado às hastes. O módulo eletrônico é responsável por condicionar o sinal do transdutor e transmiti-lo a interface A/D do sistema de aquisição de dados utilizado que emprega comunicação serial USB com o computador. A informação de controle processada pelo algoritmo de controle é transmitida para o *driver* de acionamento da bomba motorizada pela interface D/A do sistema de aquisição de dados (SAD) utilizado (no Anexo A encontra-se as informações técnicas do SAD em questão). A saída analógica do SAD fornece níveis de tensão de 0 a 5[V] com capacidade de corrente de até 20[mA], cujos valores são amplificados pelo *driver* contido no módulo eletrônico de forma a acionar a servo bomba que é constituída de um motor DC de ímã permanente de 12[V] e 1,5[A].

O processo pode ser modelado pela equação diferencial (4.1), em que h é o nível do líquido e A é a área da seção transversal do tanque superior (considerada constante) onde o nível é controlado. Na representação do modelo na forma (4.2), a ação de controle é exercida via tensão “ u ” do *driver* de comando da bomba motorizada que controla o fluxo de entrada do líquido no reservatório. k representa uma constante de proporcionalidade e c um parâmetro que depende da secção transversal da válvula de escape e da tubulação de saída do processo.

$$A \frac{dh(t)}{dt} = q_i(t) - q_o(t) \quad (4.1)$$

$$A \frac{dh(t)}{dt} = ku - c\sqrt{h(t)} \quad (4.2)$$

A foto na Figura 4.2 ilustra a estrutura física da bancada de ensaios utilizada neste trabalho e nos testes práticos realizados.



Figura 4.2 - Estrutura da bancada de ensaios

Todo o processo de obtenção de dados e testes realizados na bancada de ensaios foi realizado via *software LabVIEW*, onde no Anexo B desta dissertação encontra-se a tela do supervisor desenvolvido para este trabalho.

A Figura 4.3 mostra dados de um ensaio prático realizado na bancada para o ponto de operação do processo mudando de 5,5 para 6,5 unidades de nível (em [cm] na planta em escala reduzida utilizada neste trabalho).

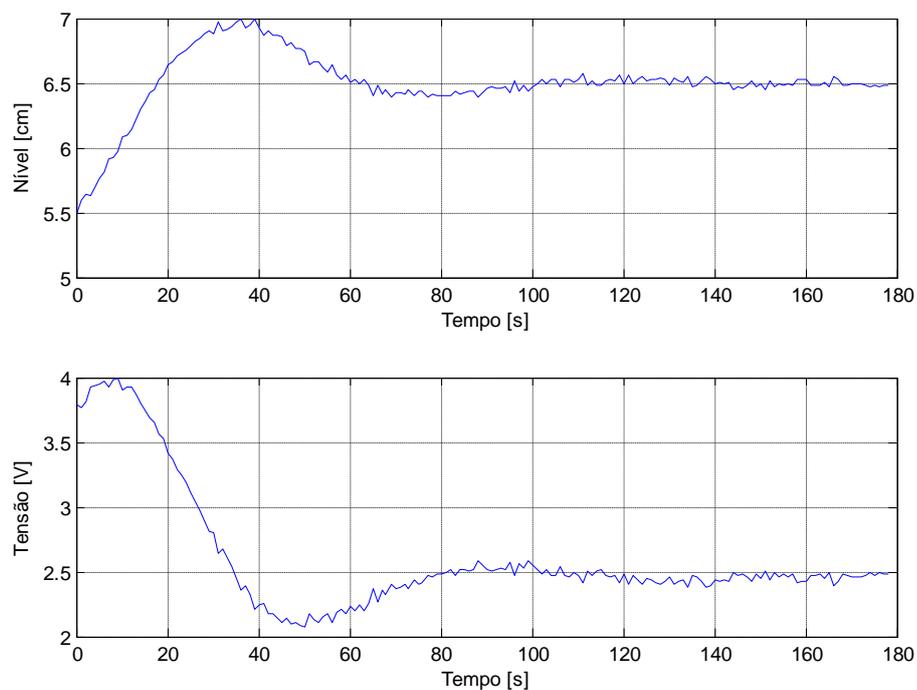


Figura 4.3 - Conjunto de dados provenientes de um ensaio prático realizado na bancada de testes

Utilizando o *toolbox "ident"* do *software* MATLAB, segue em (4.3) a função de transferência associada ao modelo linear do processo de nível em questão, que possui a mesma representação de (3.32).

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{0,041}{z - 0,9844} \quad (4.3)$$

Esta função corresponde a um modelo ARX na forma de equação de diferenças descrita por (3.5), ou seja:

$$y(n) = 0,9844y(n - 1) + 0,041u(n - 1) \quad (4.4)$$

De (3.24) tem-se que a representação (4.5) deste sistema em variáveis de estado, sendo neste caso: $\mathbf{A} = 0,9844$; $\mathbf{B} = 0,041$; $\mathbf{C} = 1$.

$$\begin{aligned} x(n + 1) &= 0,9844x(n) + 0,041u(n) \\ y(n) &= x(n) \end{aligned} \quad (4.5)$$

O resultado do teste do modelo obtido encontra-se na Figura 4.4 e a correlação entre os dados medidos e os estimados por (4.3) ficou em torno de 86%.

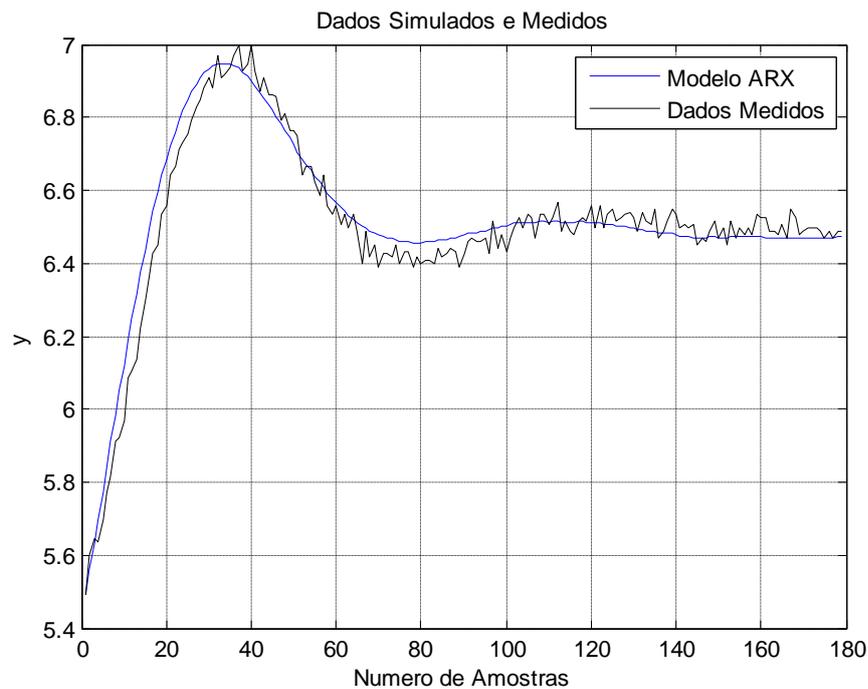


Figura 4.4 - Comparação entre os dados estimados pelo modelo ARX e os medidos na bancada

Os dados mostrados na Figura 4.5 representam um ensaio realizado no sistema de nível variando-se a informação do nível do processo de forma em ordem crescente de 3,5 até 9 unidades de nível, seguido pela variação em ordem decrescente de 9 até 4 unidades.

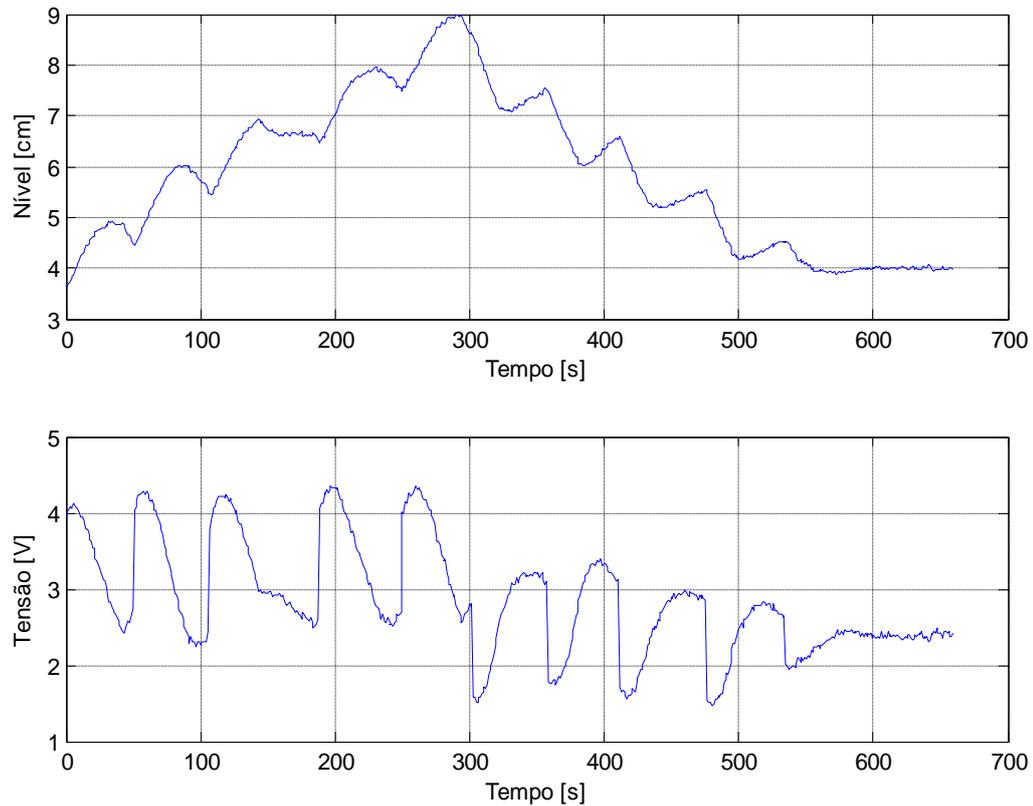


Figura 4.5 - Conjunto de dados de outro ensaio prático realizado na bancada de testes

Com os dados da figura acima e com o auxílio de um programa (Anexo C) desenvolvido no *software* MATLAB, foi utilizada a representação descrita por (3.9) e (3.10) (AGUIRRE, 2004) para a obtenção de um modelo NARMAX associado, que se mostrou adequado na modelagem do processo de nível em questão, cujos valores dos coeficientes da modelagem correspondente são:

$$\theta = \begin{bmatrix} 0,7276 \\ 0,22764 \\ -0,054398 \\ 0,091215 \\ -0,00099319 \\ -0,00075965 \\ 0,00016556 \\ 0,010889 \\ 0,00056335 \end{bmatrix}$$

A equação de diferenças correspondente ao modelo NARMAX é dada por (4.6).

$$\begin{aligned} y(k) = & 0,7276y(k-1) + 0,22764y(k-2) - 0,054398u(k-2) + \\ & + 0,091215u(k-1) - 0,00099319y^2(k-1)u(k-1) - \\ & - 0,00075965u^2(k-1)u(k-3) + 0,00016556y^3(k-3) + \\ & + 0,010889y(k-2)u(k-2) + 0,00056335y^2(k-3)u(k-3) \end{aligned} \quad (4.6)$$

A comparação entre os dados estimados pelo modelo NARMAX e as informações reais medidas do processo de nível está ilustrada na Figura 4.6. Utilizando-se o conceito de erro quadrático médio (EQM) para a avaliação da representação correspondente, obteve-se um índice igual a 0,0383. Portanto, pode-se dizer que o modelo representa adequadamente o sistema de nível em questão para a faixa considerada de dados do processo.

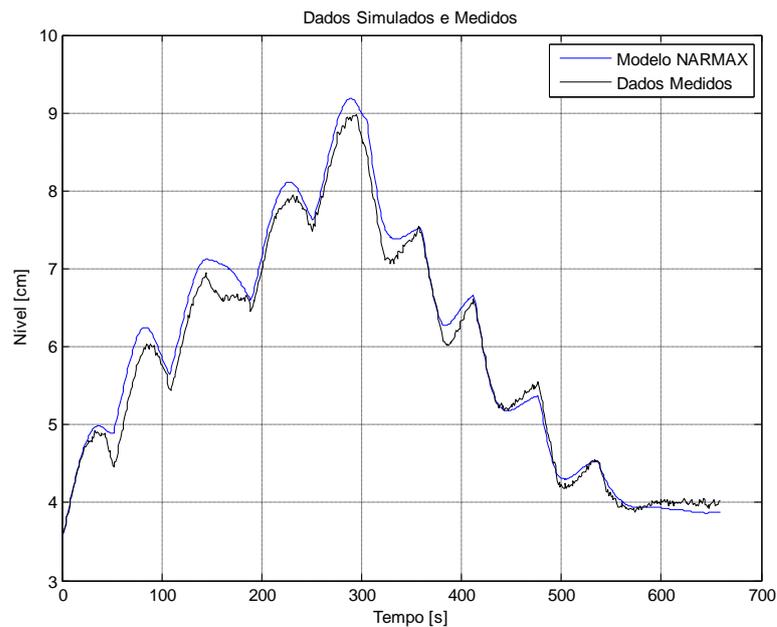


Figura 4.6 - Comparação entre os dados estimados pelo modelo NARMAX e os medidos na bancada

Nesta etapa será obtido o modelo linear por partes do sistema de nível que será utilizado no desenvolvimento do controlador linear por partes proposto. A Figura 4.7 contém dados do ensaio prático realizado no sistema de nível, onde se empregou a metade das informações da Figura 4.5.

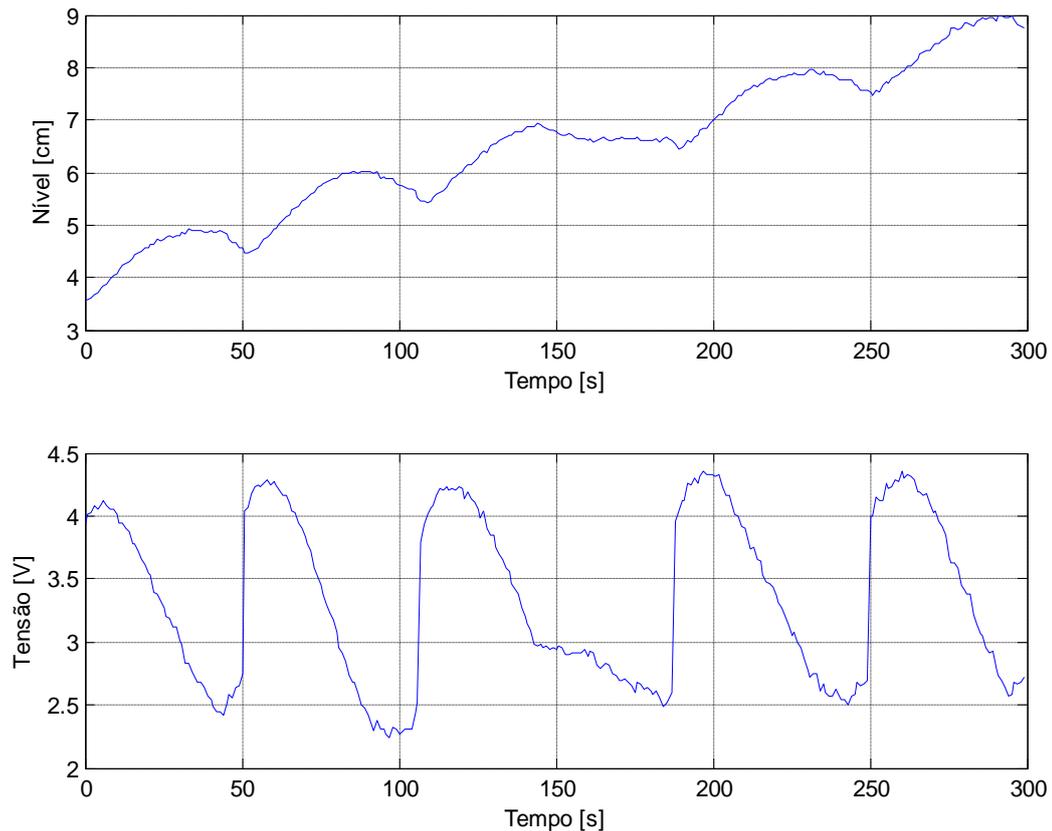


Figura 4.7 - Dados utilizados na obtenção do modelo linear por partes

Nas informações da figura acima foi utilizada a técnica de agrupamento de dados *Fuzzy C-means* abordada anteriormente, e o programa associado está ilustrado no Anexo C no final desta dissertação. Foi escolhido um número de agrupamentos igual a três, ou seja, para o conjunto de dados utilizado foram gerados três modelos lineares associados a cada agrupamento, formando assim o modelo linear por partes do sistema de nível em questão. A Figura 4.8 ilustra o resultado do agrupamento de dados resultante, onde os três *clusters* estão indicados nas cores azul, verde e vermelha, com os centros dos agrupamentos indicados por círculos em cor preta no gráfico. Os dados estão relacionados com as informações de entrada e saída do modelo linear do sistema de nível expresso na forma (3.5).

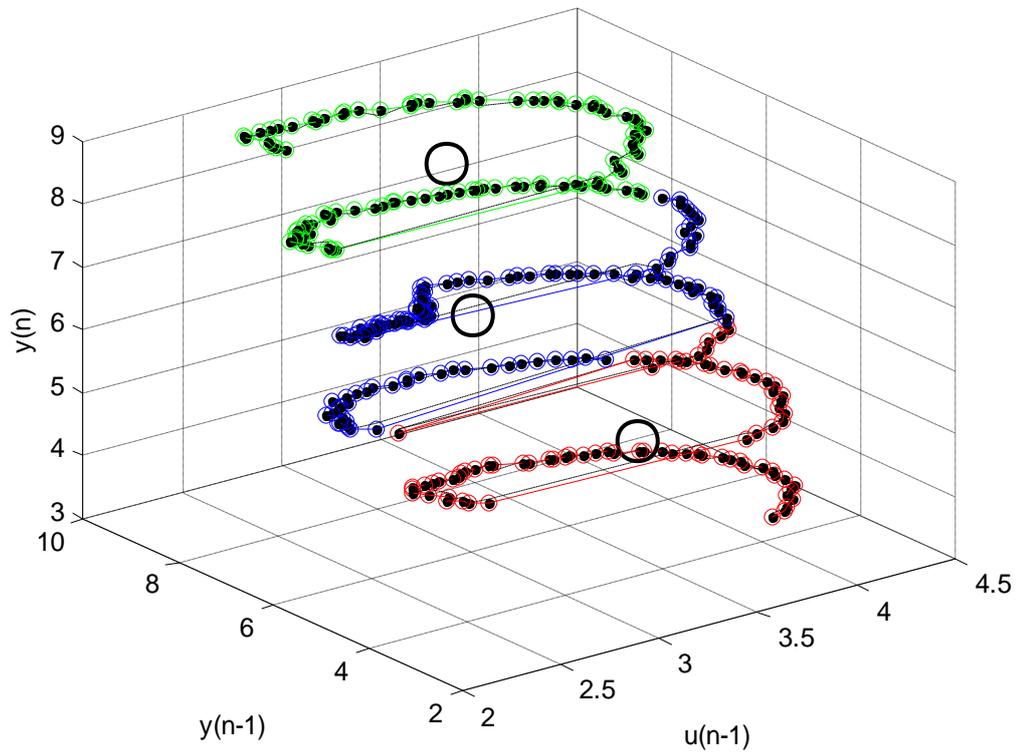


Figura 4.8 - Resultado do agrupamento de dados para obtenção do modelo linear por partes

Para o agrupamento de dados indicados pela cor vermelha tem-se a equação de diferenças (4.7) que modela este subespaço do conjunto de dados em questão.

$$y(n) = 0,9781y(n - 1) + 0,0370u(n - 1) \quad (4.7)$$

As matrizes (neste caso escalares) obtidas para este submodelo são:

$$A_1 = [0,9781]; \quad B_1 = [0,0370] \quad (4.8)$$

Para o agrupamento de dados em cor azul, vem (4.9) e (4.10).

$$y(n) = 0,9823y(n - 1) + 0,0393u(n - 1) \quad (4.9)$$

$$A_2 = [0,9823]; \quad B_2 = [0,0393] \quad (4.10)$$

Para o agrupamento de dados indicados pela cor verde, resulta em (4.11) e (4.12).

$$y(n) = 0,9872y(n - 1) + 0,0352u(n - 1) \quad (4.11)$$

$$A_3 = [0,9872]; \quad B_3 = [0,0352] \quad (4.12)$$

Abaixo, encontra-se a lei de chaveamento estabelecida para faixa de validade dos dados do modelo linear por partes obtido, em que o mesmo é utilizado na comparação com os dados reais medidos do processo. A Figura 4.9 apresenta o gráfico com os dados estimados pelo modelo linear por partes e aqueles associados com a Figura 4.5 (relacionada com o ensaio realizado no sistema de nível). Utilizando-se o conceito de erro quadrático médio (EQM) para a avaliação da representação correspondente, obteve-se um índice igual a 0,0039, em que se verifica que a modelagem resultante reproduziu bem as informações do processo real.

```

if (y(n - 1) < 5,6540)
    y(n) = 0,9781y(n - 1) + 0,0370u(n - 1)
end
if (5,6540 ≤ y(n - 1) < 7,2220)
    y(n) = 0,9823y(n - 1) + 0,0393u(n - 1)
end
if (y(n - 1) ≥ 7,2220)
    y(n) = 0,9872y(n - 1) + 0,0352u(n - 1)
end

```

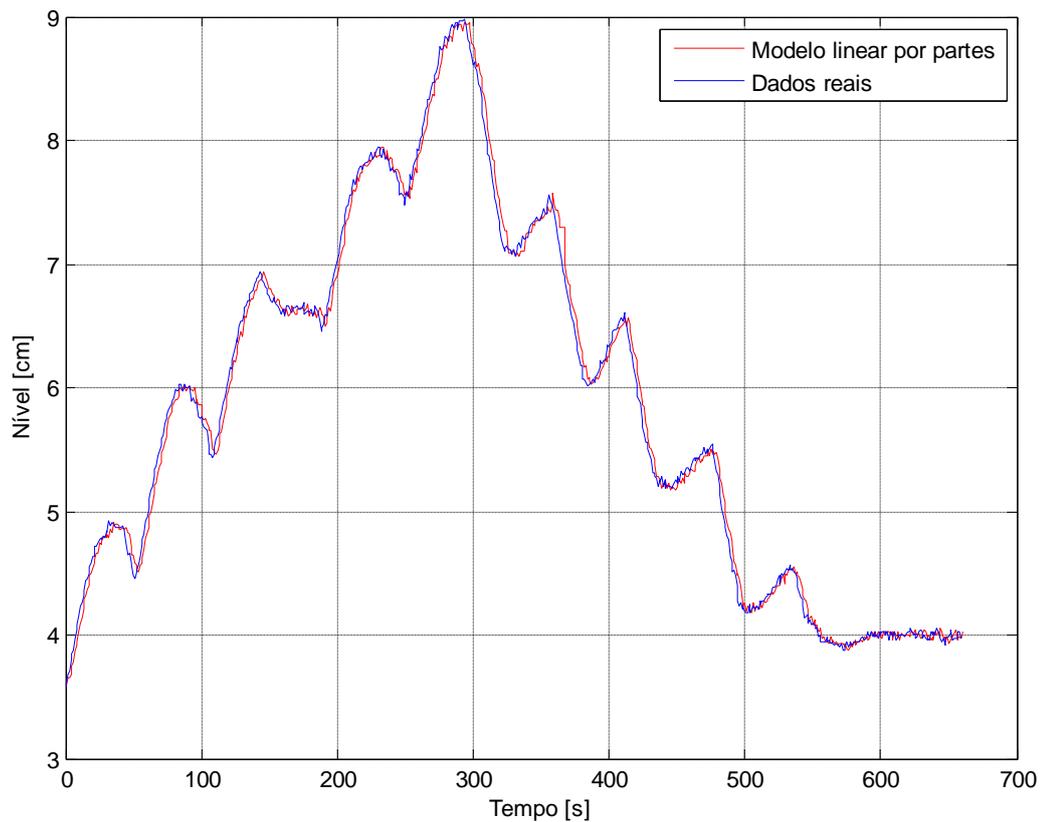


Figura 4.9 - Teste do modelo linear por partes obtido

4.3 Projeto do Controlador PI Discreto

Um controlador PI discreto possui a função de transferência descrita por (3.21), e o modelo linear do sistema de nível é dado por (4.3), que substituindo os valores na equação (3.33), para um tempo de amostragem $T= 1$ [s], obtém-se (4.13).

$$\frac{y(z)}{r(z)} = \frac{0,041K_p(z - 1) + 0,041K_I}{z^2 + (0,041K_p - 1,9844)z + (0,041K_I - 0,041K_p + 0,9844)} \quad (4.13)$$

Será utilizado para o projeto do controlador PI discreto o método do Lugar das Raízes, que consiste em especificar os polos dominantes de acordo com a dinâmica desejada para o sistema. O procedimento para o cálculo dos ganhos consiste em igualar a equação característica do sistema em malha fechada, ou seja, o denominador de (4.13) à equação que fornece os polos dominantes especificados como indicado em (3.23). Será considerada a seguinte especificação para os polos dominantes (com valores dentro do círculo unitário,

garantindo a estabilidade da malha de controle resultante e estabelecendo uma determinada dinâmica para o sistema de controle associado):

$$p_{1,2} = 0,9717 \pm j0,0574 = 0,9734\angle \pm 0,059 \text{ [rad]}$$

Aplicando o método citado acima tem-se:

$$\begin{aligned} z^2 + (0,041K_p - 1,9844)z + (0,041K_I - 0,041K_p + 0,9844) &= \\ = (z - 0,9717 - j0,0574)(z - 0,9717 + j0,0574) & \end{aligned} \quad (4.14)$$

Resolvendo (4.14) obtém-se os seguintes valores de ganhos: $K_p = 1$; $K_I = 0,1$. Com isso, a função de transferência do controlador assume a forma (4.15).

$$C(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = 1 + \frac{0,1}{z-1} = \frac{z-0,9}{z-1} \quad (4.15)$$

A função de transferência em malha fechada (similar a Figura 3.2) do sistema é dada por (4.16), cujos valores dos polos coincidem com as especificações estabelecidas.

$$\frac{y(z)}{r(z)} = \frac{0,041z + 0,0369}{z^2 - 1,9434z + 0,9475} \quad (4.16)$$

Conforme citado no capítulo anterior, a técnica de controle via alocação de polos fornece valores de ganhos de retroação de estados similares aos obtidos via técnica baseada no método do Lugar das Raízes, quando se considera as mesmas especificações de polos em malha fechada e o modelo linear do processo de nível considerado. Considerando uma malha de controle com retroação de estados (similar a Figura 3.3), que incorpora uma ação integral via ganho K_I associado, utiliza-se (3.28) para calcular os ganhos da lei de controle associada. Expandindo as matrizes/vetores (escalares neste exemplo) via (3.31), devido à inclusão do integrador na malha de controle, e utilizando (3.28) segue:

$$|zI - \hat{A} + \hat{B}\hat{K}| = (z - 0,9717 - j0,0574)(z - 0,9717 + j0,0574) \quad (4.17)$$

Resolvendo-se (4.10) calcula-se $\hat{K} = [K - K_I] = [1 \ -0,1]$, que são exatamente os mesmos valores dos ganhos obtidos via método do Lugar das Raízes. Com isso, a função de transferência em malha fechada do sistema é dada por:

$$\frac{y(z)}{r(z)} = \frac{0,0369}{z^2 - 1,9434z + 0,9475} \quad (4.18)$$

Conforme pode ser observado de (4.11) e (4.9), as funções de transferências obtidas possuem os mesmos denominadores, os mesmos polos, ou seja, possuem as mesmas características relativas a estabilidade e a dinâmica das malhas de controle associadas.

4.3.1 Resultados de Simulações do Controle de Nível via Controlador Discreto

Utilizando o modelo do controlador linear discreto modelado com os ganhos K_P e K_I calculados anteriormente, juntamente com o modelo NARMAX como representação do processo de nível em questão, simulou-se a malha de controle associada para valores de referência de entrada variando de 4 a 8 unidades de nível em degrau unitário. Em seguida foram realizadas simulações no sentido decrescente de valores de referência de entrada de 8 a 4 unidades de nível em degrau unitário. Os gráficos resultantes das simulações são apresentados nas Figuras 4.10 e 4.11.

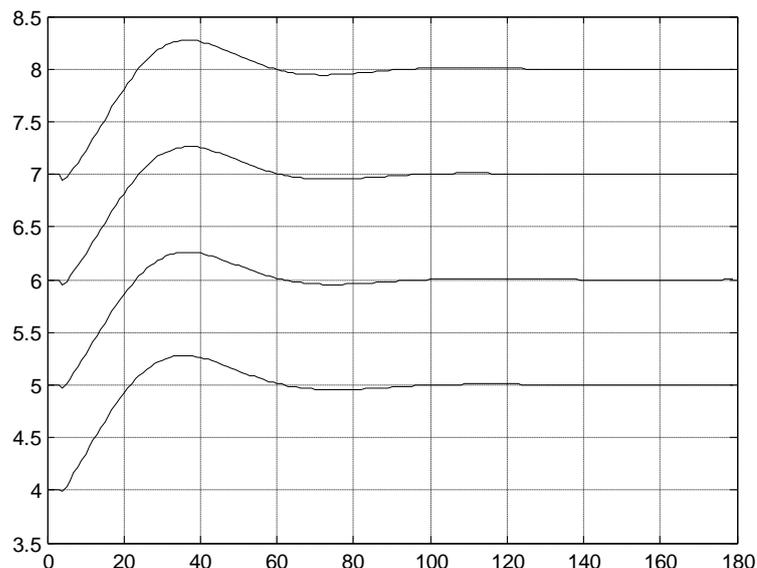


Figura 4.10 - Simulações do controlador discreto para valores de referência variando em ordem crescente

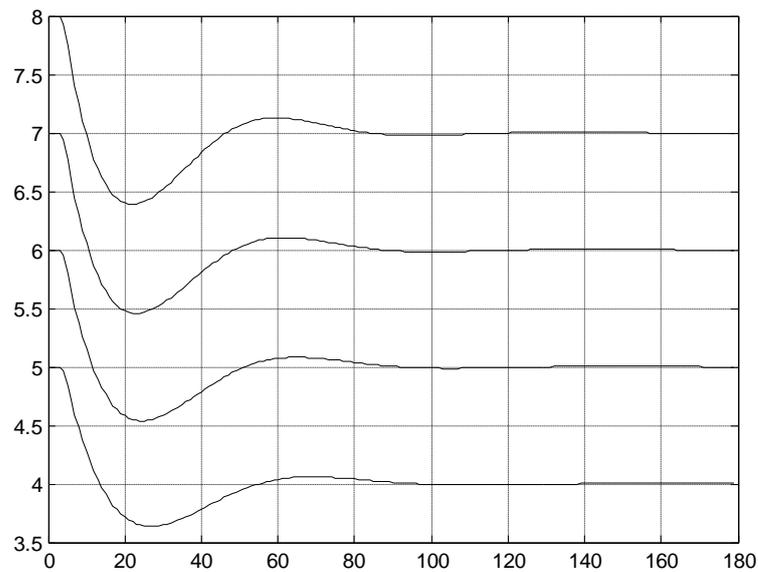


Figura 4.11 - Simulações do controlador discreto para valores de referência variando em ordem decrescente

Como forma de facilitar a comparação, foi feita uma tentativa de normalizar os resultados obtidos utilizando o procedimento abaixo:

$$y_n = \frac{y - y_{min}}{y_{max} - y_{min}}$$

No entanto, este tipo de normalização ocasionou perda de informações relacionadas com as características dinâmicas das respostas do sistema como os valores de máximo pico (M_p) e tempo de acomodação (T_a). Com isso, os resultados foram normalizados apenas dividindo os valores de nível pelas informações de referência de entrada, e, nas Figuras 4.12 e 4.13 encontram-se os dados resultantes normalizados das simulações realizadas. Nas figuras com os gráficos normalizados foram utilizadas linhas de cores diferentes, pois linhas com diversos traçados em tons de cinza não produziram uma boa visibilidade dos resultados. Estes procedimentos serão utilizados em todos os resultados posteriores que serão apresentados nesta dissertação.

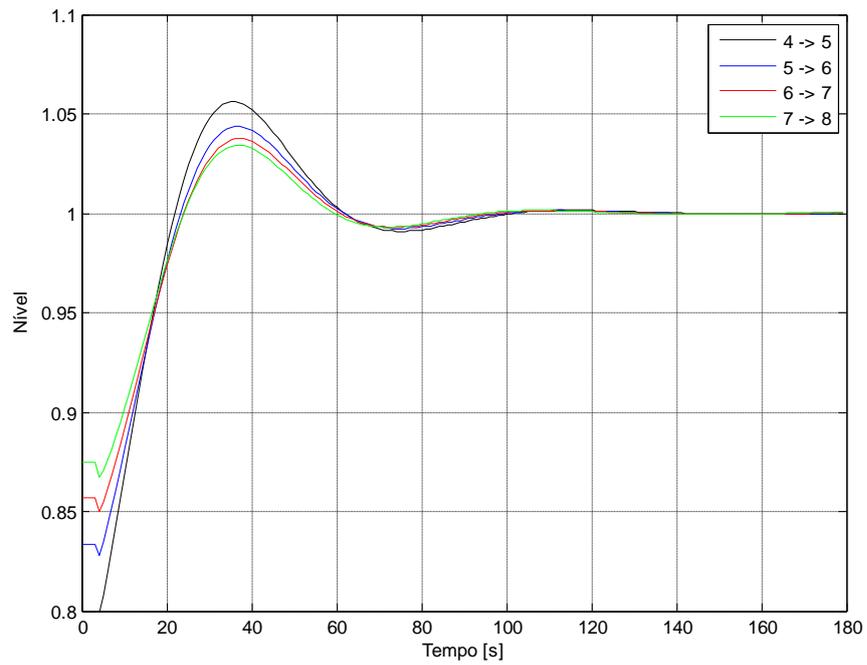


Figura 4.12 - Resultados normalizados do controlador discreto para valores de referência variando em ordem crescente

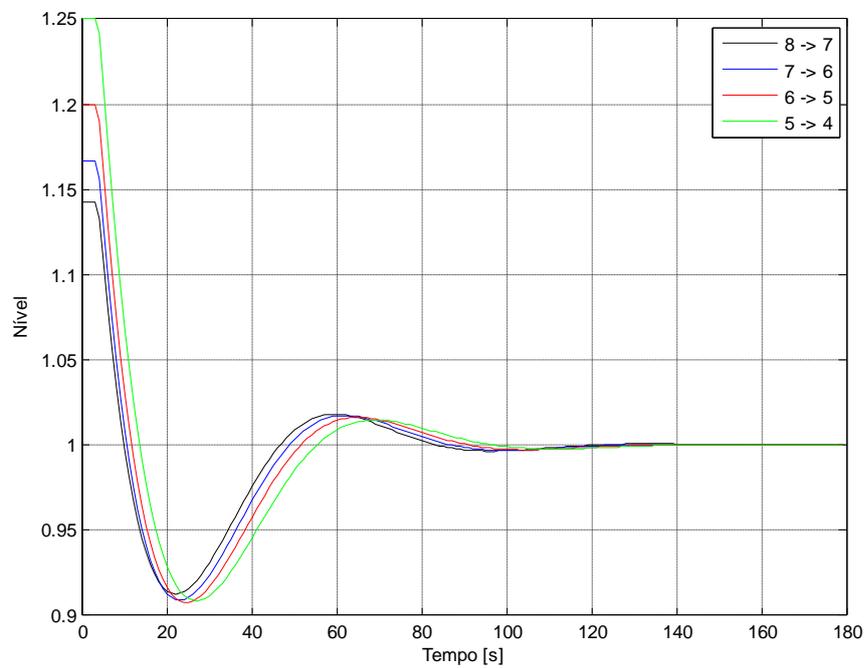


Figura 4.13 - Resultados normalizados do controlador discreto para valores de referência variando em ordem decrescente

4.4 Projeto do Controlador Linear por Partes

Para o projeto do controlador linear por partes com ação PI proposto neste trabalho, será utilizado o método abordado no Item 3.3.5, em que para cada partição i do conjunto de dados da modelagem do processo são atribuídos ganhos K_{Pi} e K_{Ii} associados aos submodelos correspondentes. Cada conjunto de valores de ganhos é calculado considerando o modelo linear por partes obtido e as especificações relacionadas com os valores dos polos desejados em malha fechada do sistema de resultante. Considerando que a malha de controle do sistema de nível associada a cada partição i seja representada pela Figura 3.2, ou pela correspondente malha de controle por retroação de estados representada pela Figura 3.3, utiliza-se (3.28) para calcular os ganhos do controlador linear por partes associado (onde se tem a correspondência $K_P = K_I$). Utilizando-se as mesmas especificações para as localizações dos polos utilizadas no método do Lugar da Raízes para o desenvolvimento do controlador PI discreto e, para cada partição, as matrizes expandidas devido à inclusão do integrador na malha de controle, vem:

$$|zI - \hat{A}_i + \hat{B}_i \hat{K}_i| = (z - 0,9717 - j0,0574)(z - 0,9717 + j0,0574). \quad (4.19)$$

Resolvendo-se (4.19) com os valores das matrizes obtidas para cada agrupamento de dados descrito anteriormente, tem-se a seguir os dados obtidos.

Para o primeiro agrupamento de dados, vem:

$$\hat{K}_1 = [0,9373 \quad -0,1107]. \quad (4.20)$$

Para o segundo agrupamento:

$$\hat{K}_2 = [0,9912 \quad -0,1043]. \quad (4.21)$$

E para o terceiro agrupamento de dados:

$$\hat{K}_3 = [1,2451 \quad -0,1163]. \quad (4.22)$$

Cada vetor de ganhos \hat{K}_i representa um conjunto de ganhos $[K_{Pi}-K_{Ii}]$ associado a função de controle com ação PI. A seleção de cada conjunto de ganhos, correspondente a cada

submodelo obtido do processo de nível em questão é dada pelas sentenças a seguir, onde cada “*if*” está associado ao subespaço de dados da modelagem *piecewise* resultante. Os fatores de escala incluídos para os valores dos ganhos proporcionais servem para melhorar a atuação do controlador resultante em relação ao comportamento não linear do processo de nível considerado.

```

if (y(n - 1) < 3,5830)
  Kp = 0,9.  $\widehat{K}_1(1)$ ;  KI = - $\widehat{K}_1(2)$ ;
end
if (3,5830 ≤ y(n - 1) < 5,6540)
  Kp = 1,4.  $\widehat{K}_1(1)$ ;  KI = - $\widehat{K}_1(2)$ ;
end
if (5,6540 ≤ y(n - 1) < 7,2220)
  Kp = 1,2.  $\widehat{K}_2(1)$ ;  KI = - $\widehat{K}_2(2)$ ;
end
if (7,2220 ≤ y(n - 1) ≤ 8,9790)
  Kp =  $\widehat{K}_3(1)$ ;  KI = - $\widehat{K}_3(2)$ ;
end
if (y(n - 1) > 8,9790)
  Kp = 1,2.  $\widehat{K}_3(1)$ ;  KI = - $\widehat{K}_3(2)$ ;
end

```

4.4.1 Resultados das Simulações com o Controlador Linear por Partes

Utilizando o modelo do controlador linear por partes modelando as sentenças acima, juntamente com o modelo NARMAX como representação do processo de nível em questão, simulou-se a malha de controle associada para valores de referência de entrada variando de 4 a 8 unidades de nível em degrau unitário. Em seguida foram realizadas simulações no sentido decrescente de valores de referência de entrada de 8 a 4 unidades de nível em degrau unitário. Os resultados obtidos estão apresentados nas Figuras 4.14 e 4.15 e nas Figuras 4.16 e 4.17 encontram-se os resultados normalizados das simulações realizadas.

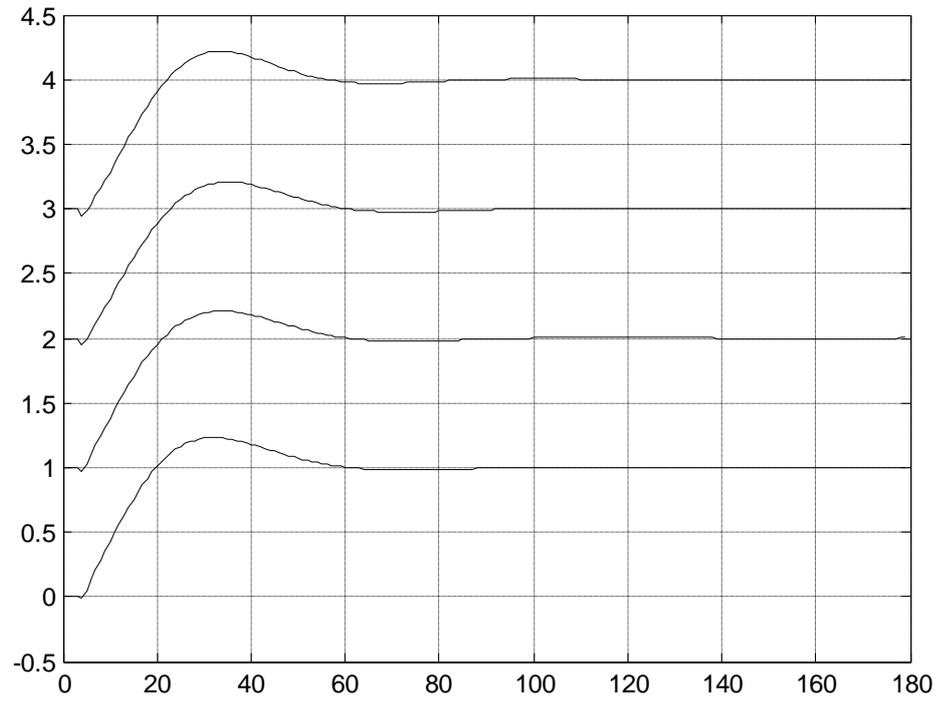


Figura 4.14 - Simulações do controlador linear por partes para valores de referência variando em ordem crescente

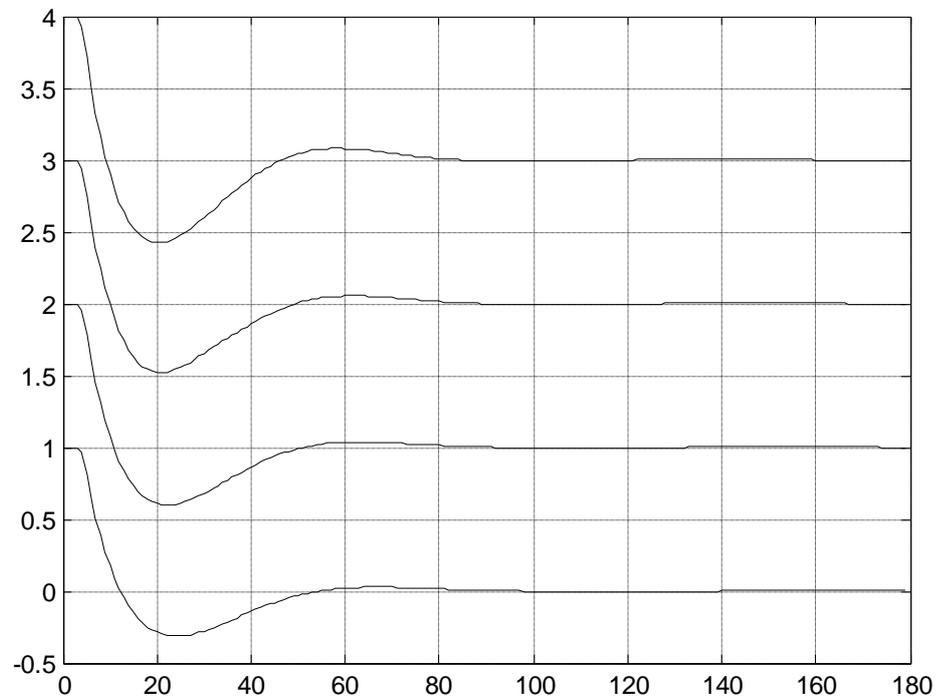


Figura 4.15 - Simulações do controlador linear por partes para valores de referência variando em ordem decrescente

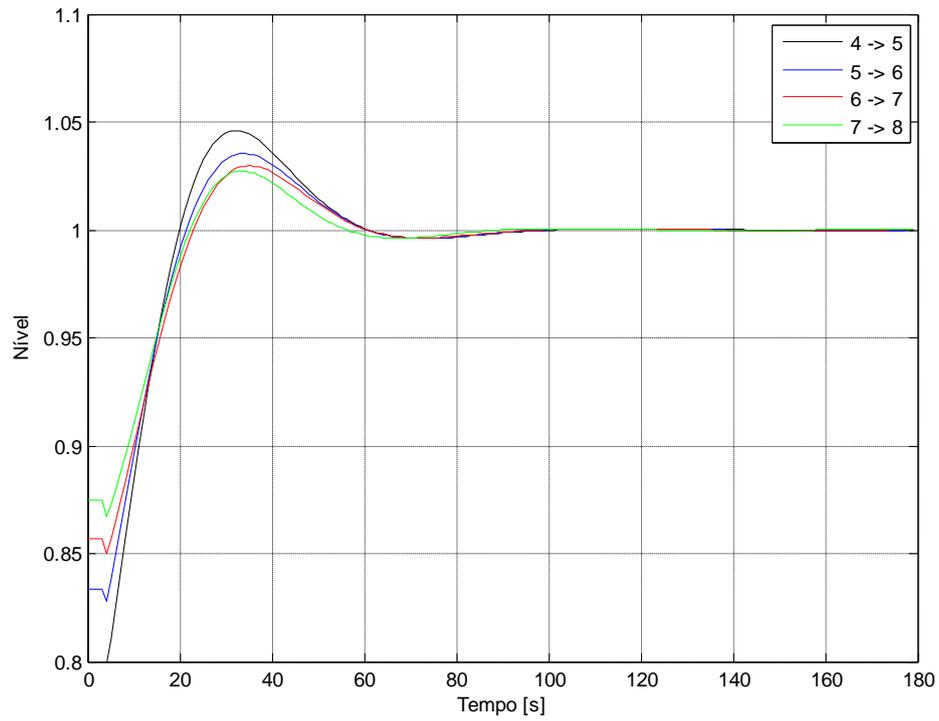


Figura 4.16 - Resultados normalizados do controlador linear por partes para valores de referência variando em ordem crescente

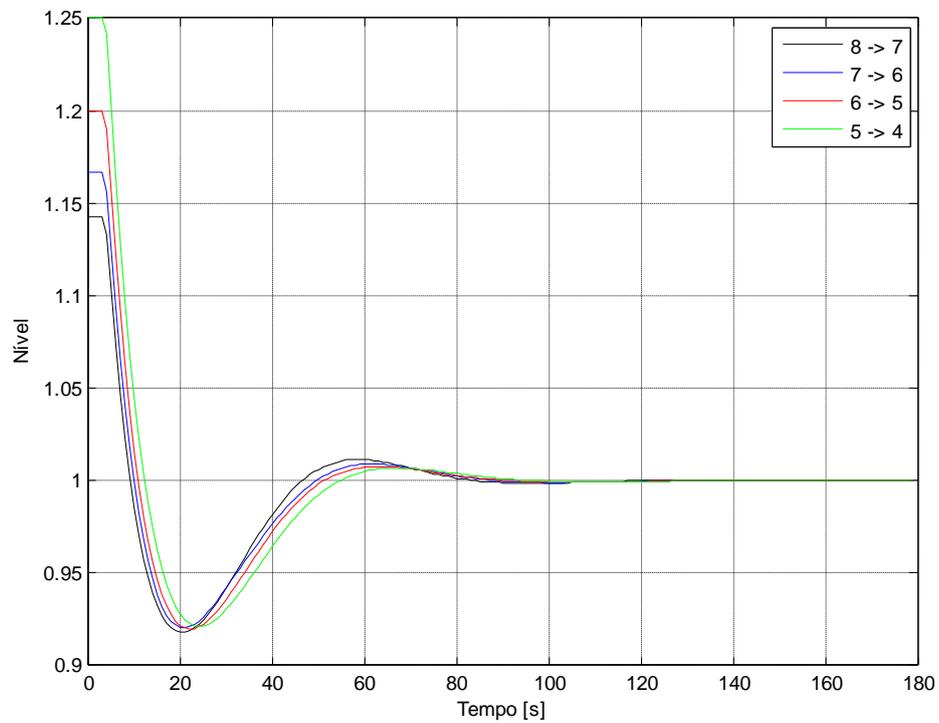


Figura 4.17 - Resultados normalizados do controlador linear por partes para valores de referência variando em ordem decrescente

As Tabelas 4.1 e 4.2 mostram os valores de máximo pico (M_p) e do tempo de acomodação (T_a) relacionados com as simulações realizadas com o controlador convencional e o linear por partes (expresso pelas sentenças acima). Os valores das tabelas indicam um melhor desempenho do controlador *piecewise* em relação ao controlador convencional com valores de ganhos fixos ($K_p=1$; $K_I=0,1$). No anexo D no final da dissertação encontram-se os programas das simulações realizadas neste item.

Tabela 4.1 - Valores de M_p e T_a para valores crescentes de referência de entrada

Valores de referência	Controlador convencional		Controlador linear por partes	
	M_p	T_a	M_p	T_a
4 [cm] → 5 [cm]	5,61%	52,4 [s]	4,61%	47,2 [s]
5 [cm] → 6 [cm]	4,38%	50,9 [s]	3,54%	46 [s]
6 [cm] → 7 [cm]	3,75%	49,3 [s]	2,98%	44,7 [s]
7 [cm] → 8 [cm]	3,41%	47,7 [s]	2,73%	41,2 [s]

Tabela 4.2 - Valores de M_p e T_a para valores decrescentes de referência de entrada

Valores de referência	Controlador convencional		Controlador linear por partes	
	M_p	T_a	M_p	T_a
8 [cm] → 7 [cm]	8,74%	41 [s]	8,21%	39,4 [s]
7 [cm] → 6 [cm]	9,09%	42,9 [s]	7,95%	41 [s]
6 [cm] → 5 [cm]	9,22%	45,3 [s]	8,02%	42,3 [s]
5 [cm] → 4 [cm]	9,13%	48,5 [s]	7,88%	44,9 [s]

No capítulo seguinte serão mostrados dados reais resultantes de ensaios práticos realizados na bancada de testes, onde se considerou as mesmas ações de controle associadas ao controlador convencional com ganhos fixos e o *piecewise* com a modificação de ganhos citada. O objetivo consiste em verificar na prática os resultados obtidos nas simulações computacionais.

No próximo item será realizada uma análise de estabilidade relacionada com o controlador linear por partes e o modelo *piecewise* do modelo de processo de nível.

4.5 Análise de Estabilidade

Conforme mencionado na seção 3.4 do capítulo anterior, o critério de Lyapunov descrito por (3.37) pode ser adequadamente aplicado na análise de modelos afins (ou lineares) por partes. A função de Lyapunov dada por (3.38) garante a estabilidade de um sistema controle ao se obter uma matriz \mathbf{P} que seja definida positiva. No caso do controlador linear por partes desenvolvido neste trabalho o sistema de nível foi modelado por três submodelos. Portanto, o critério consiste em obter uma matriz \mathbf{P} definida positiva que seja comum a modelagem associada à malha fechada do sistema de controle considerado.

Considerando as matrizes e vetores expandidos na modelagem equivalente em variáveis de estados, segue os valores associados a cada submodelo obtido e as correspondentes matrizes de estados equivalentes em malha fechada.

Para o primeiro agrupamento de dados, vem:

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} 0,9781 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} 0,0370 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{K}_1 = [0,9373 \quad -0,1107];$$

$$\hat{A}_{eq_1} = \hat{A}_1 - \hat{B}_1 \hat{K}_1 = \begin{bmatrix} 0,9434 & 0,0041 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Substituindo (4.22) em (3.40) e, por conveniência adotando $\alpha = 1$, a matriz \mathbf{P} obtida apresenta os valores abaixo e possui autovalores positivos que garantem a estabilidade da malha com os ganhos da lei de controle associada.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2337,4 & -126,9 \\ -126,9 & 16,7 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Para o segundo submodelo, tem-se:

$$\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} 0,9823 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} 0,0393 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{K}_2 = [0,9912 \quad -0,1043];$$

$$\hat{A}_{eq_2} = \hat{A}_2 - \hat{B}_2 \hat{K}_2 = \begin{bmatrix} 0,9434 & 0,0041 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (4.24)$$

$$P = \begin{bmatrix} 2337,4 & -126,9 \\ -126,9 & 16,7 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

E para o terceiro submodelo, vem:

$$\hat{A}_3 = \begin{bmatrix} 0,9872 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{B}_3 = \begin{bmatrix} 0,0352 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{K}_3 = [1,2451 \quad -0,1163];$$

$$\hat{A}_{eq_3} = \hat{A}_3 - \hat{B}_3 \hat{K}_3 = \begin{bmatrix} 0,9434 & 0,0041 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (4.26)$$

$$P = \begin{bmatrix} 2337,4 & -126,9 \\ -126,9 & 16,7 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Os autovalores correspondentes da matriz P comum aos três submodelos são expressos em (4.28):

$$\lambda = \begin{bmatrix} 9,8 \\ 2344,3 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Como os valores das matrizes (4.23), (4.25) e (4.27) são idênticos, ou seja, a matriz P obtida é uma matriz comum aos três submodelos e trata-se de uma matriz definida positiva (possui autovalores positivos), é possível dizer que o sistema de controle é estável para a modelagem *piecewise* considerada e o controlador afim por partes realizado. Considerando os valores dos fatores de escala utilizados nas sentenças que representam os ganhos da função de controle com ação PI, se obtém outros valores comuns para a matriz P definida positiva, garantindo a condição de estabilidade da malha controle em questão. Essa nova matriz P definida positiva comum a todos os submodelos é então calculada utilizando o conceito de desigualdades matriciais lineares (LMI), cujo programa associado ao cálculo em questão encontra-se no Anexo E no final desta dissertação, obtendo-se:

$$P = \begin{bmatrix} 16,0962 & -0,6950 \\ -0,6950 & 0,1044 \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Cujos autovalores associados são:

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0,0742 \\ 16,1263 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Capítulo 5

Resultados Experimentais

5.1 Introdução

Este capítulo apresenta os resultados práticos da aplicação do controlador convencional e do linear por partes (desenvolvidos no capítulo anterior), no controle do sistema de nível em escala reduzida utilizado neste trabalho. Os algoritmos de controle foram desenvolvidos no *software LabVIEW* (os programas associados estão nos Anexos F e G, respectivamente), e os resultados obtidos serão apresentados através de gráficos e tabelas que destacam as características dinâmicas resultantes.

5.2 Resultados Experimentais com o Controlador Convencional

O controlador discreto convencional com ação PI projetado no capítulo anterior possui ganhos K_P e K_I fixos com valores 1 e 0,1, respectivamente. No mesmo contexto das simulações computacionais, foram realizados ensaios práticos através da bancada ilustrada na Figura 4.2. Os valores de referência de entrada variaram no sentido crescente de 4 a 8 unidades de nível, e também no sentido decrescente de valores de referência de entrada em degrau unitário. Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 5.1 e 5.2. Estes resultados foram normalizados dividindo os valores de nível pelas informações de referência de entrada, e nas Figuras 5.3 e 5.4 encontram-se os dados resultantes.

Comparando os gráficos da Figura 5.3 (dados reais dos ensaios realizados) com as respostas simuladas (Figura 4.12) via controlador convencional e o modelo NARMAX do processo de nível, verifica-se uma correspondência entre as dinâmicas resultantes, sendo que a magnitude da informação do nível em regime permanente da malha de controle real apresentou flutuações devido a ruídos inerentes ao transdutor utilizado na bancada de teste. Uma comparação similar pode ser efetuada entre os gráficos da Figura 5.4 (com dados reais para valores crescentes de referência de entrada), e as respostas simuladas ilustradas nos gráficos da Figura 4.13.

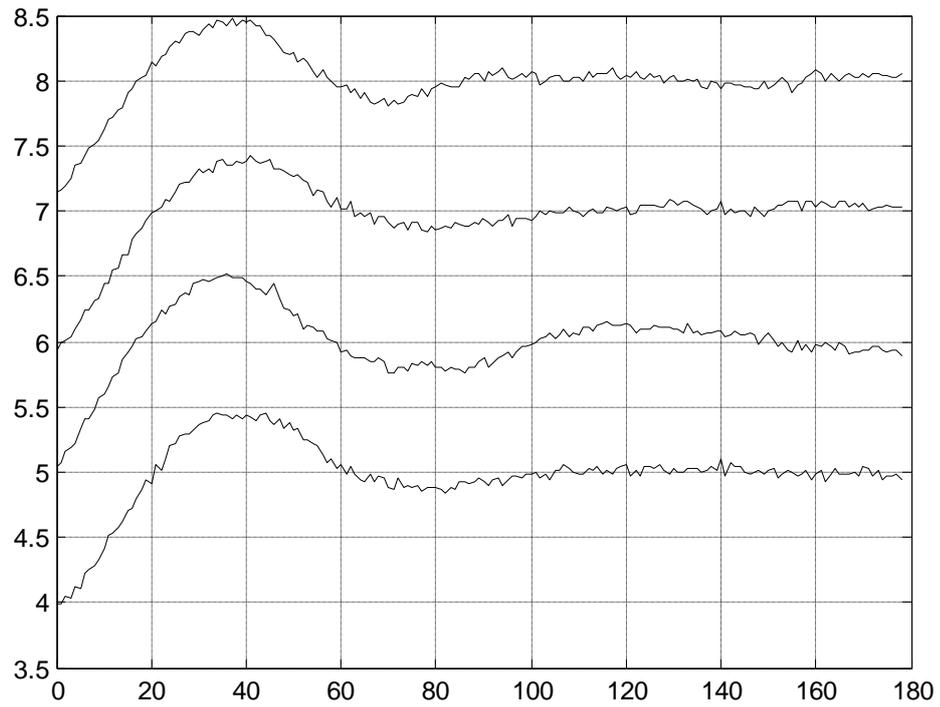


Figura 5.1 - Ensaio com o controlador convencional para valores de referência variando crescentemente

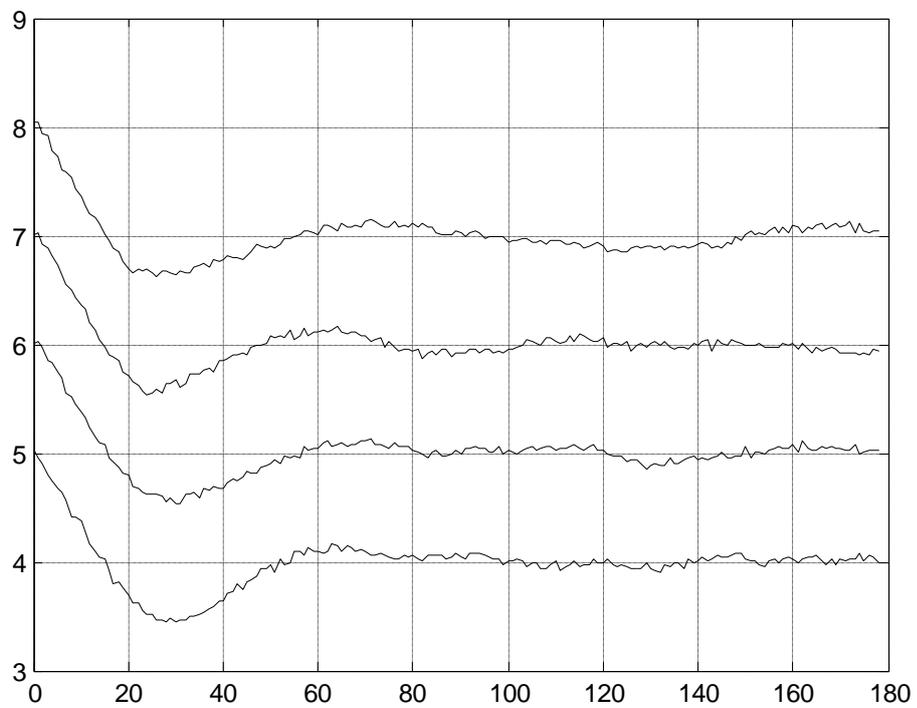


Figura 5.2 - Ensaio com o controlador convencional para valores de referência variando decrescentemente

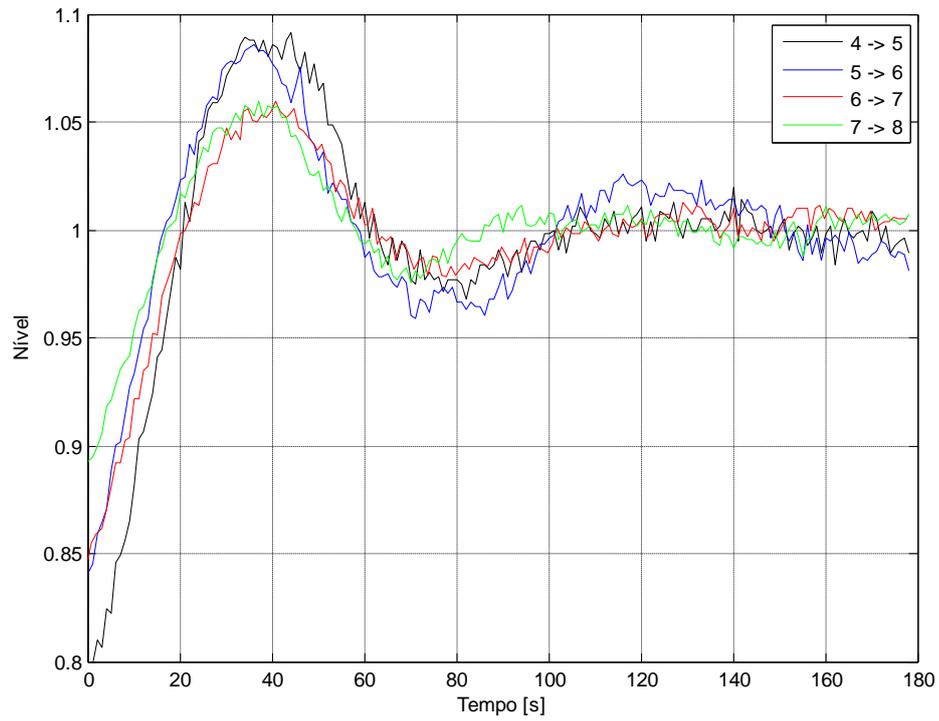


Figura 5.3 - Ensaio com resultados normalizados utilizando o controlador convencional para valores de referência variando crescentemente

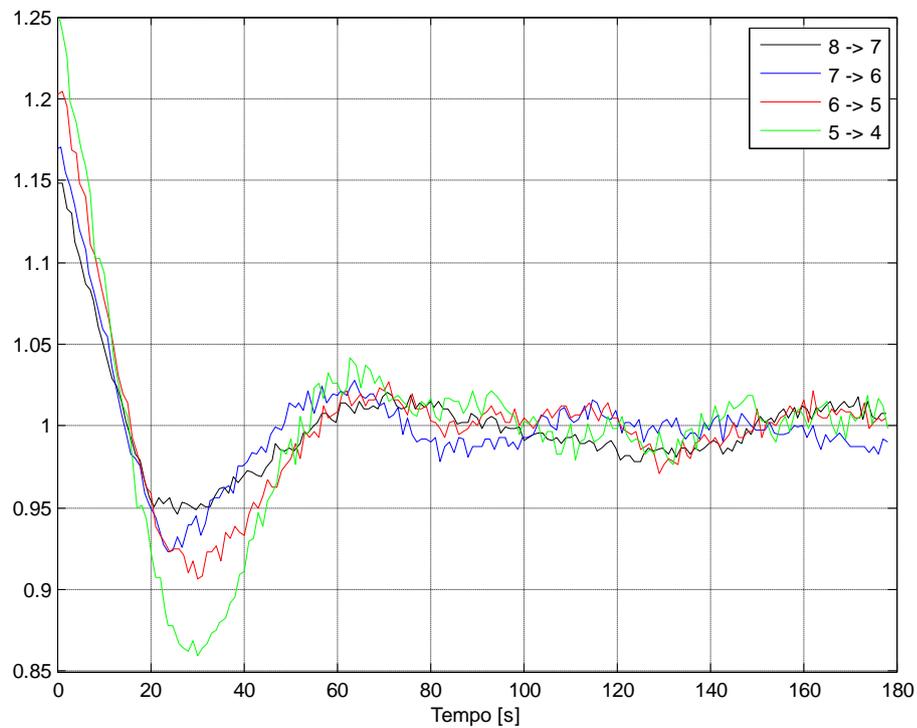


Figura 5.4 - Ensaio com resultados normalizados utilizando o controlador convencional para valores de referência variando decrescentemente

5.3 Resultados Experimentais com o Controlador *Piecewise*

O controlador linear por partes com ação PI desenvolvido no capítulo anterior possui ganhos K_{P_i} e K_{I_i} relacionados a cada um dos três submodelos obtidos na modelagem do sistema de nível. Os valores de referência de entrada variaram no sentido crescente de 4 a 8 unidades de nível, e também no sentido decrescente de valores de referência de entrada em degrau unitário. Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 5.5 e 5.6. Estes resultados foram normalizados dividindo os valores de nível pelas informações de referência de entrada, e nas Figuras 5.7 e 5.8 encontram-se os dados resultantes.

Comparando os gráficos da Figura 5.7 (dados reais dos ensaios realizados) com as respostas simuladas (Figura 4.16) via controlador linear por partes e o modelo NARMAX do processo de nível, verifica-se uma correspondência entre as dinâmicas resultantes, sendo que a magnitude da informação do nível em regime permanente da malha de controle real apresentou flutuações devido a ruídos inerentes ao transdutor utilizado na bancada de teste. Uma comparação similar pode ser efetuada entre os gráficos da Figura 5.8 (com dados reais para valores decrescentes de referência de entrada), e as respostas simuladas ilustradas na Figura 4.17.

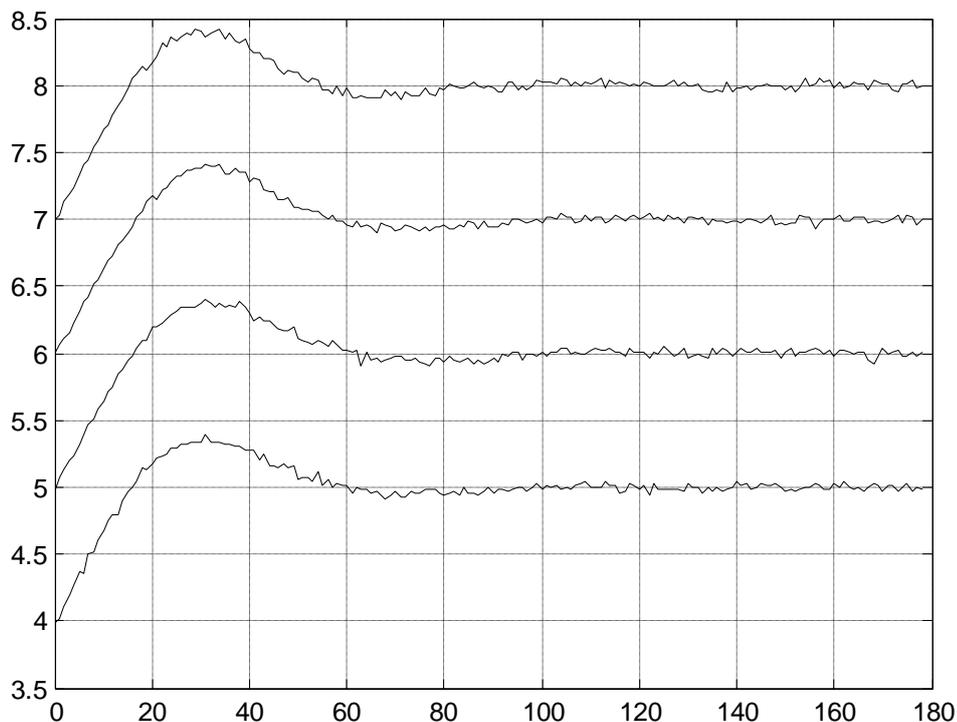


Figura 5.5 - Ensaios com o controlador *piecewise* para valores de referência variando crescentemente

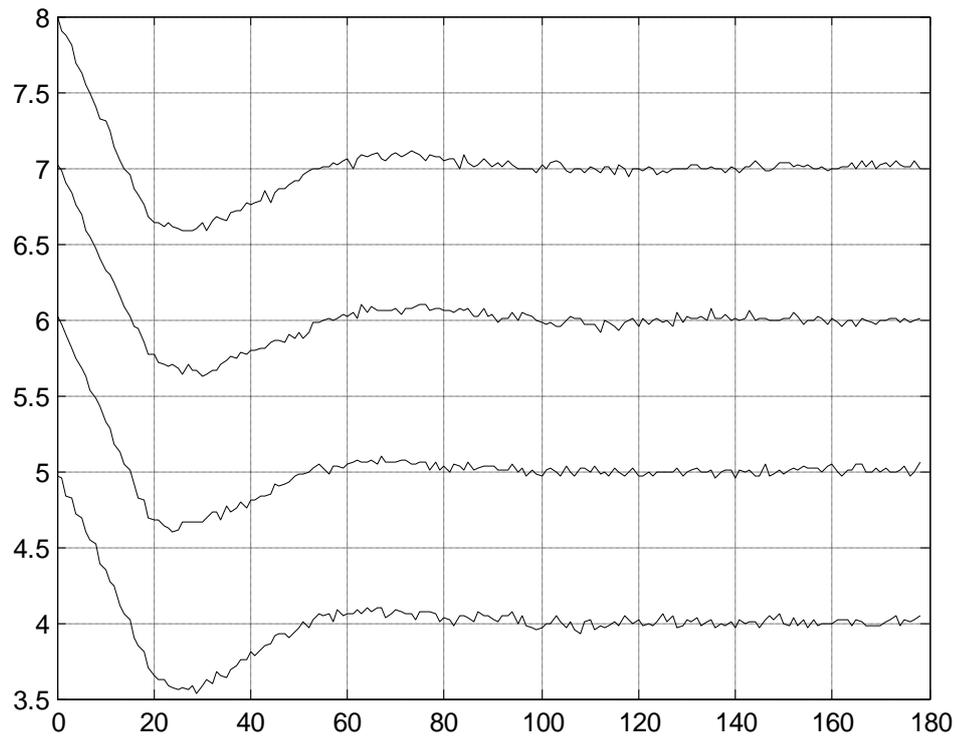


Figura 5.6 - Ensaio com o controlador *piecewise* com valores de referência variando decrescentemente

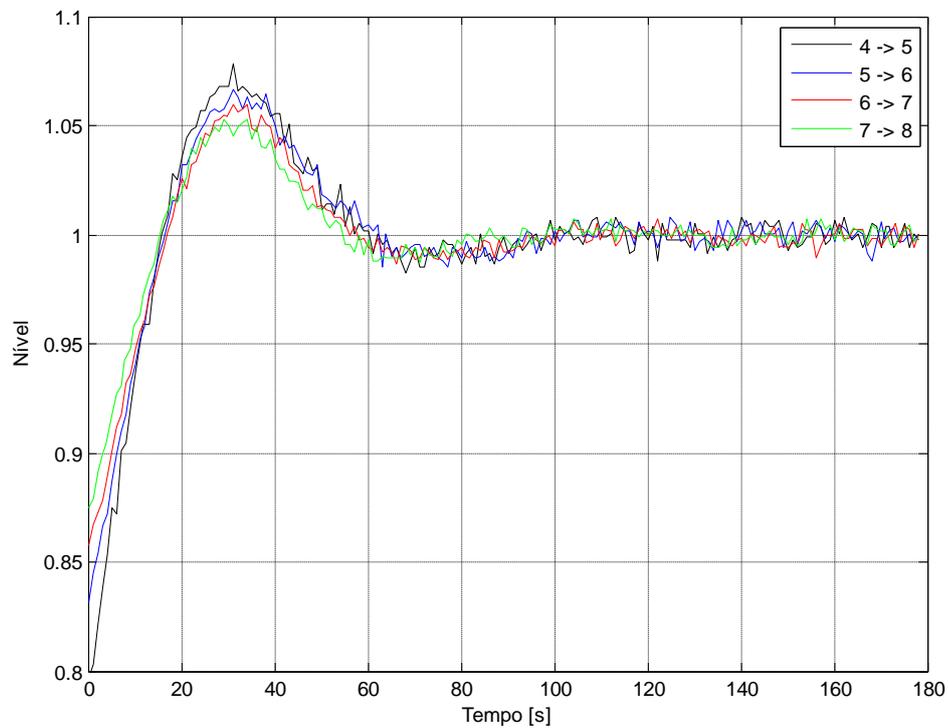


Figura 5.7 - Ensaio com o controlador *piecewise* para valores de referência variando crescentemente

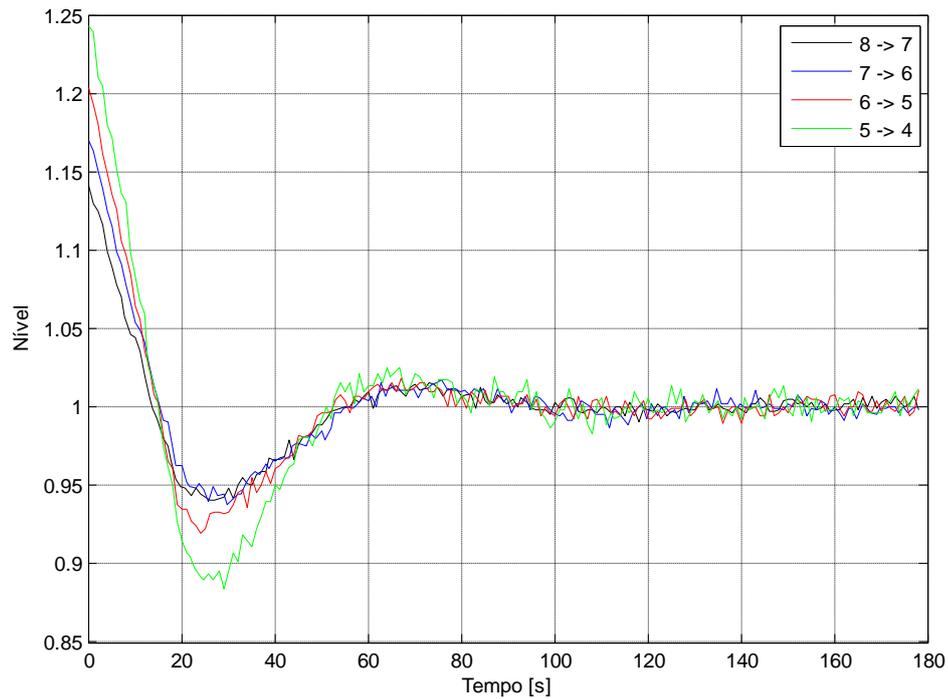


Figura 5.8 - Ensaio com o controlador *piecewise* com valores de referência variando decrescentemente

Através das informações fornecidas pelos gráficos representados nas Figuras 5.1 a 5.8, foram elaboradas tabelas (Tabela 5.1 e 5.2) contendo informações sobre os valores do máximo pico (M_p) e do tempo de acomodação (T_a) para cada um dos ensaios realizados.

Tabela 5.1 - Valores de M_p e T_a para valores crescentes de referência de entrada

Valores de referência	Controlador convencional		Controlador linear por partes	
	M_p	T_a	M_p	T_a
4 [cm] → 5 [cm]	9,14%	91,2 [s]	7,84%	54,2 [s]
5 [cm] → 6 [cm]	8,58%	133,3 [s]	6,67%	49,9 [s]
6 [cm] → 7 [cm]	6%	80,3 [s]	5,95%	48,2 [s]
7 [cm] → 8 [cm]	5,97%	72,9 [s]	5,31%	45,5 [s]

Tabela 5.2 - Valores de M_p e T_a para valores decrescentes de referência de entrada

Valores de referência	Controlador convencional		Controlador linear por partes	
	M_p	T_a	M_p	T_a
8 [cm] → 7 [cm]	5,4%	125,4 [s]	5,95%	45,8 [s]
7 [cm] → 6 [cm]	7,71%	82,2 [s]	6,19%	51,2 [s]
6 [cm] → 5 [cm]	9,33%	133,2 [s]	8,05%	44,8 [s]
5 [cm] → 4 [cm]	14%	132,2 [s]	11,61%	70,7 [s]

Comparando os dados das tabelas acima fica destacado o melhor desempenho prático do controlador linear por partes em relação à atuação do compensador convencional. Este resultado era esperado, pois o controlador *piecewise* atua modificando os valores dos ganhos da função de controle conforme o submodelo que representa o sistema de nível em questão. Uma observação pode que ser feita em relação ao desempenho do controlador *piecewise* consiste na análise do intervalo decrescente de 5 [cm] para 4 [cm] no qual houve uma discrepância de resposta em relação aos demais valores de referência de entrada. Isso se deve ao fato deste intervalo ser a menor variação de nível do ensaio e pode ser atribuído às dimensões da tubulação de saída que, caso tivesse um diâmetro maior, o escoamento seria mais rápido resultando em um menor tempo resultante.

Um modo usual de comparar o desempenho entre malhas de controle utiliza o índice ITAE – *Integral of Time multiplied by Absolute Error* (DORF E BISHOP, 2001), cujo valor é obtido por meio da computação da integral expressa por (5.1) no tempo contínuo, ou pela somatória no tempo discreto com $dt = T$. Utilizando os dados das Figuras 5.1 a 5.8 na equação (5.1) com os valores subtraídos da unidade (referência de entrada normalizada), segue na Tabela 5.3 os valores calculados do índice ITAE para cada gráfico das figuras citadas, e na Figura 5.9 estes dados estão indicados na forma gráfica. Nota-se da tabela e da figura que o controlador *piecewise* apresentou em todos os ensaios os menores índices em relação ao controlador discreto classico, lembrando que quanto menor o valor ITAE melhor é o desempenho da malha de controle associada.

$$ITAE = \int_0^{T_e} t * |e(n)| dt \quad (5.1)$$

Tabela 5.3 - Índice de desempenho ITAE

SP	PI Clássico	<i>Piecewise</i>
De 4 para 5	214	130
De 5 para 6	292	122
De 6 para 7	162	105
De 7 para 8	136	91
De 8 para 7	191	100
De 7 para 6	159	113
De 6 para 5	204	126
De 5 para 4	256	179

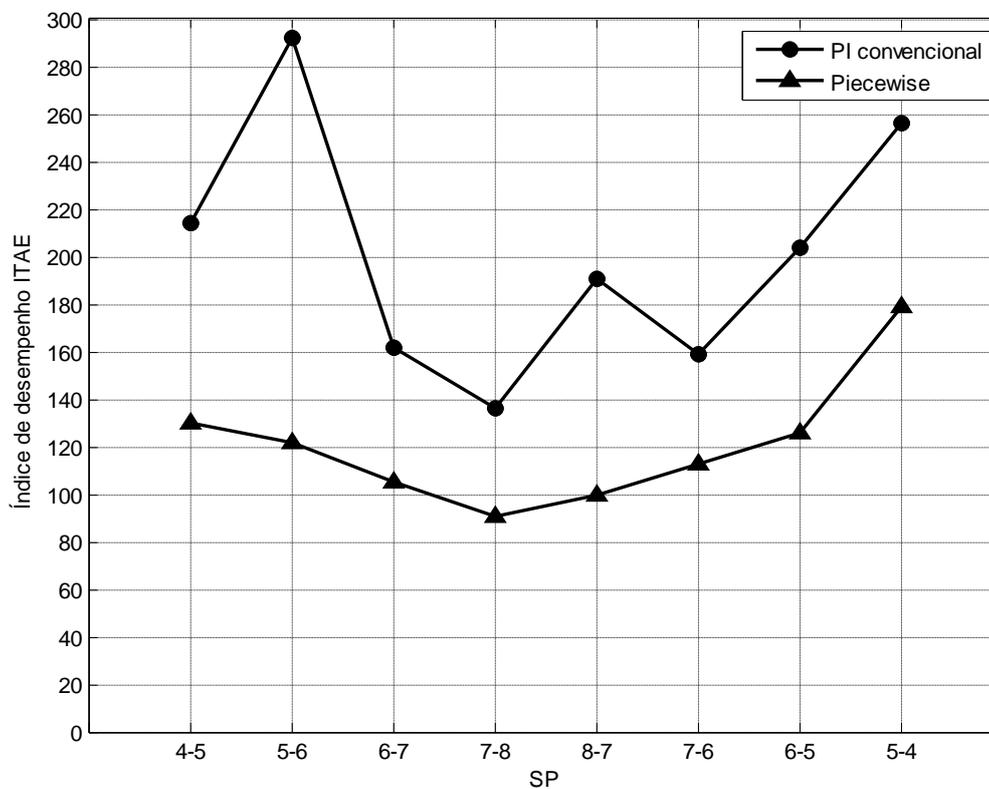


Figura 5.9 - Índice ITAE em relação às variações de referência de entrada

A finalidade principal deste trabalho consistiu em mostrar a potencialidade da aplicação de controladores *piecewise* com ações PI em aplicações práticas. Os resultados obtidos indicaram um melhor desempenho resultante em relação a um controlador PI com ganhos fixos no controle de um processo não linear.

No próximo capítulo encontra-se a conclusão desta pesquisa e as sugestões para trabalhos futuros no contexto apresentado nesta dissertação.

Capítulo 6

Conclusão

6.1 Comentários

Este trabalho apresentou uma proposta de controlador linear por partes com ação proporcional e integral para atuar no controle de um sistema com comportamento não linear, sendo utilizada uma planta de nível em escala reduzida como processo a ser controlado.

A motivação se deve ao fato que controladores convencionais podem não atuar adequadamente quando se considera valores operacionais distintos em uma planta que possui características não lineares. E neste contexto, a aplicação de controladores *piecewise* constitui uma alternativa apropriada no controle de tais processos, onde o processo não linear pode ser descrito através de uma modelagem linear por partes e a aplicação de técnicas relacionadas com a teoria clássica de controle podem ser aplicadas.

Primeiramente, foram realizados ensaios práticos na planta de nível de forma a serem obtidos dados para as modelagens consideradas neste trabalho (ARX, NARMAX e *Piecewise*). Com o modelo ARX do processo, um controlador discreto com ação PI convencional com ganhos fixos foi projetado com o objetivo de ser utilizado na comparação com o controlador *piecewise* proposto. Para a obtenção do modelo *piecewise* do processo, os dados oriundos do sistema de nível (que possui comportamento não linear) foram divididos em três agrupamentos (*clusters*) que definiram os submodelos lineares associados.

Na etapa de projeto do controlador proposto, o modelo *piecewise* obtido foi utilizado e, para cada submodelo linear, um conjunto de ganhos foi calculado. Associando os três conjuntos de ganhos com cada região do sistema modelado, obteve-se o controlador *piecewise* para o sistema de nível em questão.

Foram realizadas simulações computacionais considerando os controladores projetados (convencional e *piecewise*) utilizando o modelo NARMAX obtido do processo de nível e, através da análise dos resultados verificou-se que a aplicação de um controlador *piecewise* constitui uma alternativa apropriada no controle de um processo com comportamento não linear, em que o processo não linear pode ser descrito através de uma modelagem linear por partes e a aplicação de técnicas relacionadas com a teoria clássica de controle podem ser efetivadas. Além disso, os dados resultantes indicaram um melhor desempenho do controlador *piecewise* em relação à atuação do controlador convencional. Na sequência, os

controladores foram implementados na prática para controlar o sistema de nível em questão. Ensaios práticos foram realizados no sistema de nível em escala reduzida e, através da análise dos resultados verificou-se que os resultados obtidos nos ensaios foram similares aos simulados e, através da análise de valores de M_p , T_a e ITAE, constatou-se que o controlador *piecewise* possuiu melhor desempenho em relação a um controlador clássico de ganhos fixos. Pode-se, finalmente, afirmar que o trabalho atingiu o objetivo proposto no desenvolvimento e verificação da viabilidade da aplicação prática de um controlador *piecewise* em uma malha de controle real, utilizando um sistema dinâmico real com comportamento não linear.

6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Como proposta para trabalhos futuros na continuação da pesquisa realizada nesta dissertação, sugere-se as seguintes investigações:

- A aplicação da abordagem proposta neste trabalho no controle de sistemas dinâmicos não lineares de maior complexidade, com maior número de entradas e saídas, por exemplo.
- A realização prática do controlador afim por partes em hardwares dedicados para sistemas de controle.

Referências Bibliográficas

- AGUIRRE, L. A. (2004). *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Belo Horizonte: UFMG.
- ALMER, S., JONSSON, U., KAO, C., & MARI, J. (2007). Stability Analysis of a Class of PWM Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52 (n° 6), pp. 1072-1078.
- ASTROM, K. J., & HAGGLUND, T. (1995). *PID controllers: theory, design and tuning* (2^a ed.). Lund: ISA.
- AYOB, S. M. (2013). Digital based Piecewise Linear Controller for A Single-phase PWM Inverter. *IEEE Conference on Clean Energy and Technology (CEAT)* , pp. 198-201.
- AYOB, S. M., SALAM, Z., & AZLI, N. A. (2010). Inverter Control Using a Simplified Fuzzy PI Controller. pp. 1-6.
- AYOB, S. M., SALAM, Z., & AZLI, N. A. (2007). Piecewise Linear Control Surface for Single Input Nonlinear PI-Fuzzy Controller. *International Conference on Power Electronics and Drive Systems*, (pp. 1533-1536).
- AYOB, S. M., SALAM, Z., & AZLI, N. A. (2006). Simple PI Fuzzy Logic Controller Applied in DC-AC Converter. *First International Power and Energy Conference*, (pp. 393-398). Putrajaya.
- BEMPORAD, A., FERRARI-TRECATE, G., & MORARI, M. (2000). Observability and Controllability of Piecewise Affine and Hybrid Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45 (n° 10), pp. 1864-1876.
- BEMPORAD, A., GARULLI, A., PAOLETTI, S., & VICINO, A. (2004). Data Classification and Parameter Estimation for the Identification of Piecewise Affine Models. *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, (pp. 20-25). Atlantis.
- BENNETI, S. (1993). *A history of control engineering*. Londres: Institution of Engineering and Technology .
- BRANICKY, M. S. (1998). Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43 (n° 4), pp. 475-482.

- BRANICKY, M. S. (1997). Stability of Hybrid Systems: State of Art. *Proceedings of the 36th Conference on Decision & Control*, (pp. 120-125). San Diego.
- BRANICKY, M. S. (1994). Stability of Switched and Hybrid Systems. *Proceedings of the 33rd Conference on Decision & Control*, (pp. 3498-3503). Lake Buena Vista.
- BROUGHTON, M. B. (1992). A General State-Space Method for Modelling Piecewise Linear Systems. *Proceedings of the 34th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, (pp. 529-532). Monterey.
- CHUA, L. O., & KANG, S. M. (1977). Section-Wise Piecewise-Linear Functions: Canonical Representation, Properties and Applications. *Proceedings of the IEEE*, vol. 65 (n° 6), pp. 915-929.
- DA GUPTA, B., & SONTAG, E. D. (1998). A Polynomial-Time Algorithm for an Equivalence Problem which Arises in Hybrid Systems Theory. *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision & Control*, (pp. 1629-1634). Tampa.
- DECARLO, R. A., BRANICKY, M. S., PETTERSSON, S., & LENNARTSON, B. (2000). Perspectives and Results on the Stability and Stabilizability of Hybrid Systems. *Proceedings of the IEEE*, vol. 88 (n° 7), pp. 1069-1082.
- DOLEZEL, P., TAUFER, I., & MARES, J. (2012). Discrete PID Controller Tuning Using Piecewise-Linear Neural Network. In: R. C. PANDA, *Introduction to PID Controllers - Theory, Tuning and Application to Frontier Areas* (pp. 193-210). Rijeka: InTech.
- DORF, R. C., & BISHOP, R. H. (2001). *Sistemas de Controle Modernos* (9ª ed.). Rio de Janeiro: LTC.
- FERRARI-TRECATE, G., MUSELLI, M., LIBERATI, D., & MORARI, M. (2001). Identification of Piecewise Affine and Hybrid Systems. *Proceedings of the American Control Conference*, (pp. 3521-3526). Arlington.
- GOEBEL, R., SANFELICE, R. G., & TEEL, A. R. (2009). Hybrid Dynamical Systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 28-93.
- HEEMELS, W. P., LAZAR, M., VAN DE WOUW, N., & PAVLOV, A. (2008). Observer-based Control of Discrete-time Piecewise Affine Systems: Exploiting Continuity Twice. *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, (pp. 4675-4680). Cancun.

- JULOSKI, A. L., HEELMELS, W. P., & WEILAND, S. (2002). Observer Design for a Class of Piece-wise Affine Systems. *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, (pp. 2606-2611). Las Vegas.
- KANG, S. M., & CHUA, L. O. (1978). A Global Representation of Multidimensional Piecewise-Linear Functions with Linear Partitions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 25 (n° 11), pp. 938-940.
- KARER, G., SKRJANC, I., & ZUPANCIC, B. (2011). Identification of a PWA model of a batch reactor for model predictive control. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, pp. 281-286.
- LI, H., & CHEN, C. L. (1999). Relationship between Fuzzy Controllers and PID Controllers. *Proceedings of the 1999 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, (pp. 94-99). Kyongju.
- LJUNG, L. (1987). *System Identification: Theory for the User* (2^a ed.). Englewood Cliff, New Jersey: PTR Prentice Hall.
- MIGNONE, D., FERRARI-TRECATE, G., & MORARI, M. (2000). Stability and Stabilization of Piecewise Affine and Hybrid Systems: An LMI Approach. *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, (pp. 504-509). Sydney.
- MOLLA-AHMADIAN, H., TAHAMI, F., KARIMPOUR, A., & PARIZ, N. (2015). Hybrid Control of DC–DC Series Resonant Converters: The Direct Piecewise Affine Approach. *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 30 (n° 3), pp. 1714-1723.
- NASRI, O., GUEGUEN, H., & LEFEBVRE, M. (2010). Reachability Analysis for Nonlinear Systems by Guaranteed Piecewise Affine Approximation. *18th Mediterranean Conference on Control & Automation*, (pp. 1218-1223). Marrakech.
- OGATA, K. (2003). *Engenharia de Controle Moderno* (4^a ed.). Rio de Janeiro: Prentice-Hall.
- PAOLETTI, S., ROLL, J., GARULLI, A., & VICINO, A. (2007). Input-output realization of piecewise affine state space models. *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, (pp. 3164-3169). New Orleans.
- PAUL, P., & PHILLIPS, S. M. (1994). A Study of Numerical Nonlinear Control using Piecewise Linear System Approximation.

- PETTERSSON, S., & LENNARTSON, B. (1996). Stability and Robustness for Hybrid Systems. *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, (pp. 1202-1207). Kobe.
- PHILLIPS, C. L., & NAGLE, H. T. (1995). *Digital Control System Analysis and Design* (3^a ed.). Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.
- RANTZER, A., & JOHANSSON, M. (2000). Piecewise Linear Quadratic Optimal Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45 (n° 4), pp. 629-637.
- ROCHA, T., PERES, S. M., BÍSCARO, H. H., MADEO, R. C., & BOSCARIOLI, C. (2012). Tutorial sobre Fuzzy-c-Means e Fuzzy Learning Vector Quantization: Abordagens Híbridas para Tarefas de Agrupamento e Classificação. *Revista de Informática Teórica e Aplicada*, vol. 19 (n° 1), 120-163.
- SCALZI, S., BENINI-NETO, A., NETTO, M., PASILLAS-LEPINE, W., & MAMMAR, S. (2010). Active Steering Control Based on Piecewise Affine Regions. *2010 American Control Conference*, (pp. 5362-5367). Marriott Waterfront.
- SLOTINE, J. E., & LI, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.
- SONTAG, E. D. (1981). Nonlinear Regulation: The Piecewise Linear Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26 (n° 2), pp. 346-358.
- VAN DE WOUW, N., PAVLOV, A., PETTERSEN, K., & NIJMEIJER, H. (2006). Output Tracking Control of PWA Systems. *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control*, (pp. 2637-2642). San Diego.
- VASAK, M., KLANJCIC, D., & PERIC, N. (2006). Piecewise Affine Identification of MIMO Processes. *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Control Applications*, (pp. 1493-1498). Munich.
- VERDULT, V., & VERHAEGEN, M. (2004). Subspace Identification of Piecewise Linear System. *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, (pp. 3838-3843). Atlantis.
- YE, H., MICHEL, A. N., & HOU, L. (1998). Stability Theory for Hybrid Dynamical Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43 (n° 4), pp. 461-474.

YFOULIS, C. A., MUIR, A., PETTIT, N. B., & WELLSTEAD, P. E. (1998). Stabilization of Orthogonal Piecewise Linear systems using Piecewise Linear Lyapunov-like functions. *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision & Control*, (pp. 1476-1481). Tampa.

Anexo A

Informações Técnicas do Sistema de Aquisição de Dados Utilizado

Tabela A.1 - Características do sistema de aquisição de dados utilizado

Feature	NI USB-6008
AI resolution	12 bits differential, 11 bits single-ended
Maximum AI sample rate, single channel ¹	10 kS/s
Maximum AI sample rate, multiple channels (aggregate) ¹	10 kS/s
DIO configuration	Open collector ²

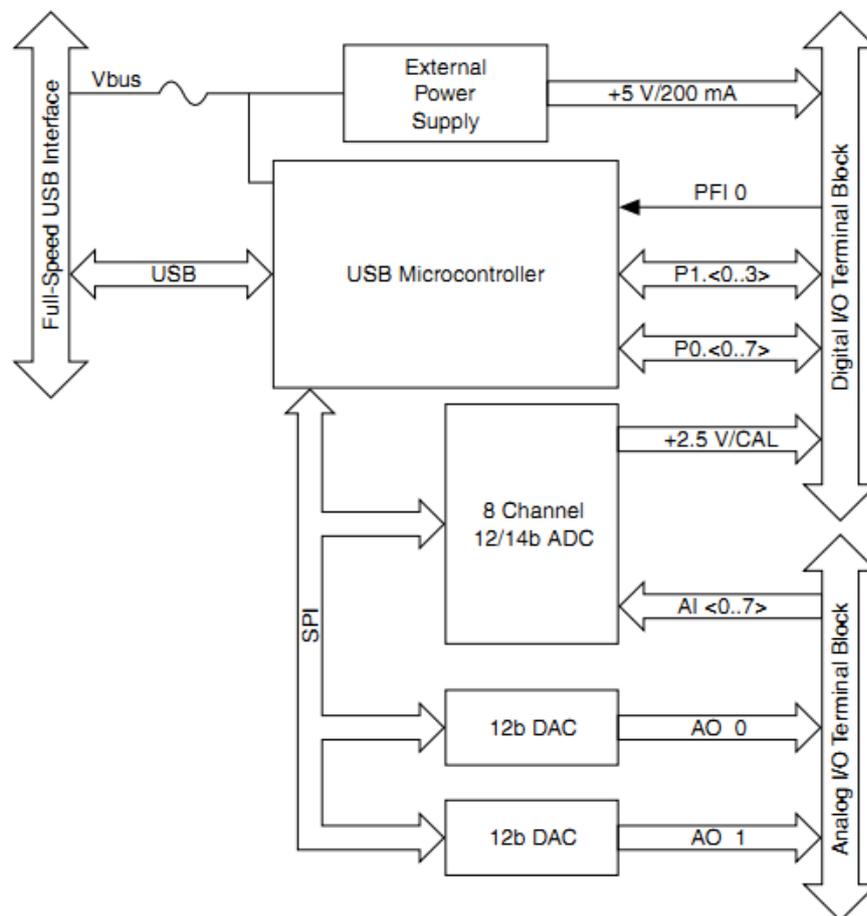


Figura A.1 - Diagrama de blocos do NI USB-6008

Anexo B

Tela do Supervisório Utilizado nos Ensaios

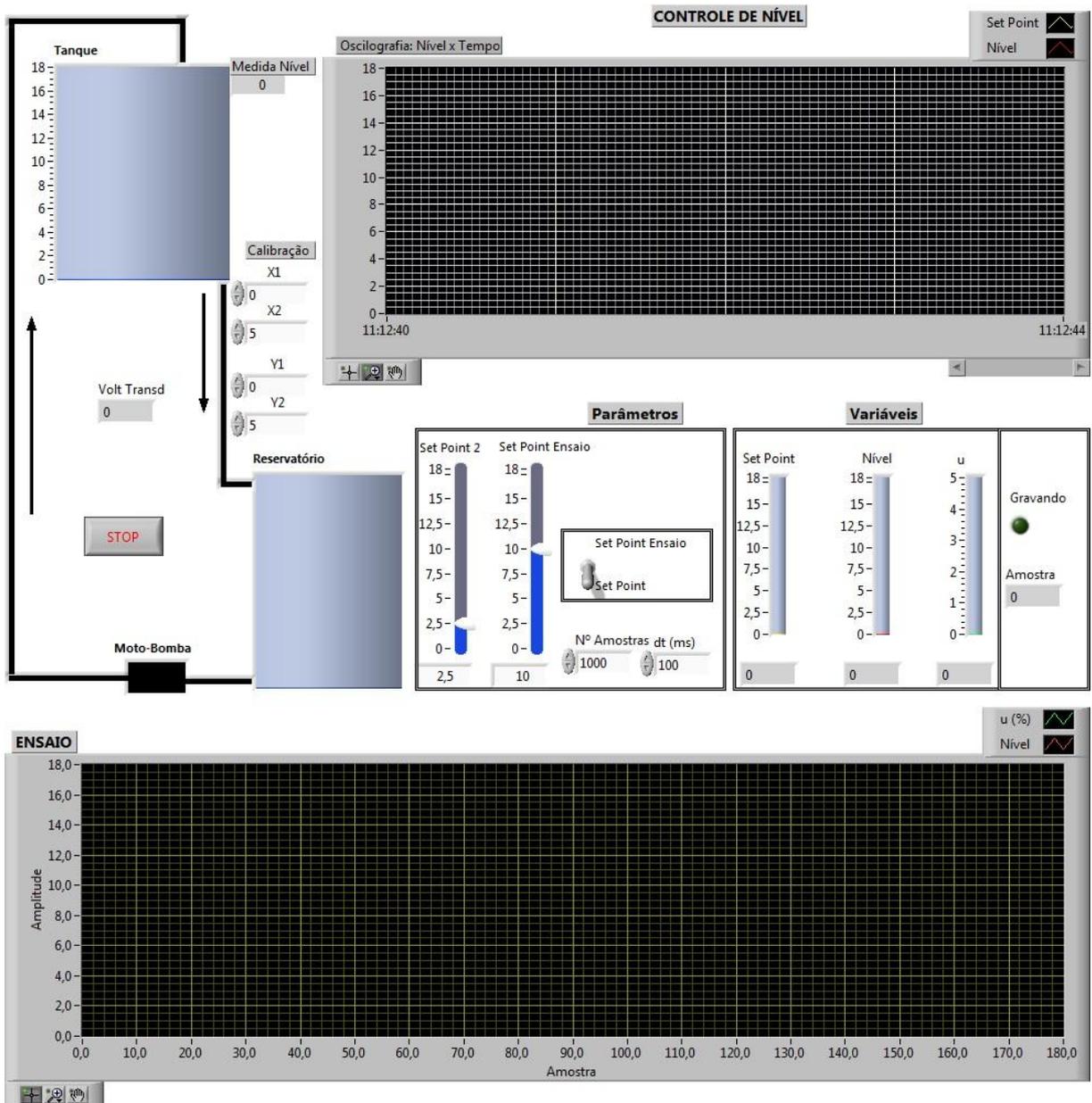


Figura B.1 - Tela do supervisório desenvolvido no software LabVIEW

Anexo C

Programas Utilizados na Obtenção dos Modelos NARMAX e *Piecewise* via Técnica de Agrupamento de Dados *Fuzzy C-means*

Modelo NARMAX:

```
%Estimação de modelo NARMAX

clear all;

n=656; %Número de amostras
m=n+3;%Indexador

%Dados para Identificação
load ensaio_crescente_decrescente.xls;
t = ensaio_crescente_decrescente(:,1); ym =
ensaio_crescente_decrescente(:,2); um = ensaio_crescente_decrescente(:,4);

in=um(1:659);    %Entrada
out=ym(1:659);   %Saida

%Regressores
F(1:n,1)=out(3:n+2);    %y(k-1)
F(1:n,2)=out(2:n+1);    %y(k-2)
F(1:n,3)=in(2:n+1);     %u(k-2)
F(1:n,4)=in(3:n+2);     %u(k-1)
fori=1:n
F(i,5)=out(i+2)^2 * in(i+2);    %y(k-1)^2*u(k-1)
F(i,6)=in(i+2)^2 * in(i);       %u(k-1)^2*u(k-3)
end
F(1:n,7)=out(1:n).^3;    %y(k-3)^3
for j=1:n
F(j,8)=out(j+1)*in(j+1);    %y(k-2)*u(k-2)
F(j,9)=out(j)^2*in(j);      %y(k-3)^2*u(k-3)
end
Y=out(4:n+3);    %y(k)

%Estimação de Parametros por MQ
P = inv(F'*F);
Q = F'*Y;
T = P*Q;         %Vetor de ParametrosEstimados
Teta = T;
'Vetor de Parametros Estimados'
format short g
Teta

%Dados para Validação

iv=[um(1:658)];    %Entrada
ov=[ym(1:658)];   %Saida
```

```

%Gráfico
ivv=um(1:659); %Entrada
ovv=ym(1:659); %Saida

%Validação
S1(1)=ov(1); S1(2)=ov(2); S1(3)=ov(3);
for k=4:m
    S1(k)=T(1)*S1(k-1) + T(2)*S1(k-2) + T(3)*iv(k-2) + T(4)*iv(k-1) +
T(5)*(S1(k-1)^2)*iv(k-1) + T(6)*(iv(k-1)^2)*iv(k-3) + T(7)*S1(k-3)^3 +
T(8)*S1(k-2)*iv(k-2) + T(9)*(S1(k-3)^2)*iv(k-3);
end
S1=S1'; %Dados de saidasimulado
plot(1:m,S1,'b',1:m,ovv,'k'); grid; xlabel('Numero de Amostras');
ylabel('y'); legend('Modelo NARMAX','Dados Medidos');
title('Dados Simulados e Medidos');

%Cálculo do EQM
er = ovv - S1;
eq = er.*er;
seqm = sum(eq);
M = seqm/659;

```

Modelo Piecewise:

```

clear all;

% Dados do Modelo
load ensaio_crescente_decrescente.xls
un_1 = ensaio_crescente_decrescente(:,4); yn_1 =
ensaio_crescente_decrescente(:,7); yn = ensaio_crescente_decrescente(:,2);

% Gráfico dos Dados
figure
plot3(un_1(1:300),yn_1(1:300),yn(1:300),'k. '); grid;
xlabel('u(n-1)'); ylabel('y(n-1)'); zlabel('y(n)');
holdon;

% Aplicação da técnica Fuzzy C-Means
data = [un_1(1:300) yn_1(1:300) yn(1:300)];
[center,U,obj_fcn] = fcm(data,3); % Definido Agrupamentos
maxU = max(U);
index1 = find(U(1,:) == maxU);
index2 = find(U(2,:) == maxU);
index3 = find(U(3,:) == maxU);

% Indicações Gráficas dos Agrupamentos Resultantes
plot3(data(index1,1),data(index1,2),data(index1,3),'marker','o','color','r'
);
plot3(data(index2,1),data(index2,2),data(index2,3),'marker','o','color','b'
);
plot3(data(index3,1),data(index3,2),data(index3,3),'marker','o','color','g'
);

plot3(center(1,1),center(1,2),center(1,3),'ko','markersize',15,'LineWidth',
2);

```

```

plot3(center(2,1),center(2,2),center(2,3),'ko','markersize',15,'LineWidth',
2);
plot3(center(3,1),center(3,2),center(3,3),'ko','markersize',15,'LineWidth',
2);

% Obtenção dos Regressores da Modelagem PW Relativa aos Agrupamentos
N1 = size(data(index1,1)); n1 = N1(1);
N2 = size(data(index2,1)); n2 = N2(1);
N3 = size(data(index3,1)); n3 = N3(1);

F1 = [data(index1,2) data(index1,1) ]; Y1 =[data(index1,3)];
F2 = [data(index2,2) data(index2,1) ]; Y2 =[data(index2,3)];
F3 = [data(index3,2) data(index3,1) ]; Y3 =[data(index3,3)];

% Obtenção dos Coeficientes da Modelagem PW Correspondente
C1 = inv(F1'*F1)*F1'*Y1;
C2 = inv(F2'*F2)*F2'*Y2;
C3 = inv(F3'*F3)*F3'*Y3;

% Teste da Modelagem PW
Ya = C1(1).*data(index1,2) + C1(2).*data(index1,1);
Yb = C2(1).*data(index2,2) + C2(2).*data(index2,1);
Yc = C3(1).*data(index3,2) + C3(2).*data(index3,1);

% Graficos
plot3(data(index1,1),data(index1,2),Ya,'k--');
plot3(data(index2,1),data(index2,2),Yb,'k--');
plot3(data(index3,1),data(index3,2),Yc,'k--');

hold off;

figure
plot3(un_1(1:300),yn_1(1:300),yn(1:300),'k. '); grid;
xlabel('u(n-1) '); ylabel('y(n-1) '); zlabel('y(n) ');
hold on;
plot3(data(index1,1),data(index1,2),Ya,'k--');
plot3(data(index2,1),data(index2,2),Yb,'k--');
plot3(data(index3,1),data(index3,2),Yc,'k--');

hold off;

u_min1 = min(data(index1,1));
u_max1 = max(data(index1,1));
y_min1 = min(data(index1,2));
y_max1 = max(data(index1,2));

u_min2 = min(data(index2,1));
u_max2 = max(data(index2,1));
y_min2 = min(data(index2,2));
y_max2 = max(data(index2,2));

u_min3 = min(data(index3,1));
u_max3 = max(data(index3,1));
y_min3 = min(data(index3,2));
y_max3 = max(data(index3,2));

save u_min1; save u_max1; save y_min1; save y_max1;
save u_min2; save u_max2; save y_min2; save y_max2;
save u_min3; save u_max3; save y_min3; save y_max3;

```

```
save C1;
save C2;
save C3;
```

Validação do Modelo *Piecewise*:

```
clear all;

load ensaio_crescente_decrescente.xls
un_1 = ensaio_crescente_decrescente(:,4); yn_1 =
ensaio_crescente_decrescente(:,7);
t = ensaio_crescente_decrescente(:,1); ye =
ensaio_crescente_decrescente(:,2);
tc = t(1:660); yc = ye(1:660);

load u_min1; load u_max1; load y_min1; load y_max1;
load u_min2; load u_max2; load y_min2; load y_max2;
load u_min3; load u_max3; load y_min3; load y_max3;

load C1; load C2; load C3;

na = 660;
Vy(1) = yn_1(1);

for n = 2:na
if (((yn_1(n-1) >= y_min1) && (yn_1(n-1) <= y_max1)))
    y = C1(1)*yn_1(n-1) + C1(2)*un_1(n-1);
end
if (((yn_1(n-1) >= y_min2) && (yn_1(n-1) <= y_max2)))
    y = C2(1)*yn_1(n-1) + C2(2)*un_1(n-1);
end
if (((yn_1(n-1) >= y_min3) && (yn_1(n-1) <= y_max3)))
    y = C3(1)*yn_1(n-1) + C3(2)*un_1(n-1);
end

Vy(n) = y;
Vn(n) = n;
end

figure;
plot(Vn,Vy,'r');
hold;
plot(tc,yc,'b');
grid;

%Cálculo do EQM
er = yc - Vy';
eq = er.*er;
seqm = sum(eq);
M = seqm/659;
```

Anexo D

Programas Utilizados nas Simulações dos Controladores Convencional e *Piecewise* Utilizando o Modelo NARMAX

Controlador Convencional:

```
% Teste Malha de Controle com Modelo NARMAX e PI convencional

clear all;

r = input('r = ');

X1 = 2.5; X2 = 5;
Y1 = 3; Y2 = 5.2;

T = 1;

%Coeficientes do modelo NARMAX
a1 = 0.7276;
b1 = 0.22764;
c1 = -0.054398;
d1 = 0.091215;
e1 = -0.00099319;
f1 = -0.00075965;
g1 = 0.00016556;
h1 = 0.010889;
i1 = 0.00056335;

% Condições Iniciais
yn_3 = r-1; yn_2 = r-1; yn_1 = r-1;
Vy(1) = r-1; Vy(2) = r-1; Vy(3) = r-1;
% yn_3 = r+1; yn_2 = r+1; yn_1 = r+1;
% Vy(1) = r+1; Vy(2) = r+1; Vy(3) = r+1;
un_3 = 2.2; un_2 = 2.2; un_1 = 2.2;
Vu(1) = 2.2; Vu(2) = 2.2; Vu(3) = 2.2;
In = 2.2;
Na = 180;

% Ganhos da Lei de Controle
Kp = 1; Ki = 0.1;

for n = 4:Na

Vn(n) = n;
Vt(n) = (n-1)*T;
Vy(n) = yn_1;
Vu(n) = un_1;

Yc = r;
Xc = (((Yc - Y1)/(Y2 - Y1))*(X2 - X1)) + X1;
SPv = Xc;
```

```

Yc = yn_1;
Xc = (((Yc - Y1)/(Y2 - Y1))*(X2 - X1)) + X1;
PVv = Xc;

e = SPv - PVv;

In = In + Ki*e*T;
if In < 0
    In = 0;
end
if In > 5
    In = 5;
end

un = Kp*e + In;
if un < 0
    un = 0;
end
if un > 5
    un = 5;
end

yn = a1*yn_1 + b1*yn_2 + c1*un_2 + d1*un_1 + e1*(yn_1^2)*un_1 +
f1*(un_1^2)*un_3 + g1*(yn_3^3) + h1*yn_2*un_2 + i1*(yn_3^2)*un_3;

    yn_1 = yn;
    yn_2 = yn_1;
    yn_3 = yn_2;
    un_1 = un;
    un_2 = un_1;
    un_3 = un_2;
end

%Gráfico
figure;
plot(Vt,Vy/r,'g');
grid;

```

Controlador *Piecewise*:

```

%Teste Malha de Controle com Modelo NARMAX e PW

clear all;

load y_min1; load y_max1;
load y_min2; load y_max2;
load y_min3; load y_max3;

load K1; load K2; load K3;

r = input('r = ');

```

```

X1 = 2.5; X2 = 5;
Y1 = 3; Y2 = 5.2;

T = 1;
Kp = 1; Ki = 0.1;

%Coeficientes do modelo NARMAX
a1 = 0.7276;
b1 = 0.22764;
c1 = -0.054398;
d1 = 0.091215;
e1 = -0.00099319;
f1 = -0.00075965;
g1 = 0.00016556;
h1 = 0.010889;
i1 = 0.00056335;

% Condições Iniciais
yn_3 = r-1; yn_2 = r-1; yn_1 = r-1;
Vy(1) = r-1; Vy(2) = r-1; Vy(3) = r-1;
% yn_3 = r+1; yn_2 = r+1; yn_1 = r+1;
% Vy(1) = r+1; Vy(2) = r+1; Vy(3) = r+1;
un_3 = 2.2; un_2 = 2.2; un_1 = 2.2;
Vu(1) = 2.2; Vu(2) = 2.2; Vu(3) = 2.2;
In = 2.2;
Na = 180;

for n = 4:Na

Vn(n) = n;
Vt(n) = (n-1)*T;
Vy(n) = yn_1;
Vu(n) = un_1;

if (yn_1 < 3.5830)
Kp = 0.9*K1(1); Ki = -K1(2);
end

if (yn_1 >= 3.5830) && (yn_1 < 5.6540)
Kp = 1.4*K1(1); Ki = -K1(2);
end
if (yn_1 >= 5.6540) && (yn_1 < 7.2220)
Kp = 1.2*K2(1); Ki = -K2(2);
end
if (yn_1 >= 7.2220) && (yn_1 <= 8.9790)
Kp = K3(1); Ki = -K3(2);
end
if (yn_1 > 8.9790)
Kp = 1.2*K3(1); Ki = -K3(2);
end

Yc = r;
Xc = (((Yc - Y1)/(Y2 - Y1))*(X2 - X1)) + X1;
SPv = Xc;

Yc = yn_1;
Xc = (((Yc - Y1)/(Y2 - Y1))*(X2 - X1)) + X1;
PVv = Xc;

```

```

e = SPv - PVv;

In = In + Ki*e*T;
if In < 0
    In = 0;
end
if In > 5
    In = 5;
end

un = Kp*e + In;
if un < 0
    un = 0;
end
if un > 5
    un = 5;
end

yn = a1*yn_1 + b1*yn_2 + c1*un_2 + d1*un_1 + e1*(yn_1^2)*un_1 +
f1*(un_1^2)*un_3 + g1*(yn_3^3) + h1*yn_2*un_2 + i1*(yn_3^2)*un_3;

    yn_1 = yn;
    yn_2 = yn_1;
    yn_3 = yn_2;
    un_1 = un;
    un_2 = un_1;
    un_3 = un_2;
end

%Gráfico
figure;
plot(Vt,Vy/r,'g');
grid;

```

Anexo E

Programa Utilizado para Calcular a Nova Matriz P Definida Positiva Devido aos Ajustes dos Ganhos do Modelo PW

```

% LMIs dos Modelos PW

clear all;

% Dados das Matrizes/Vetores expandidos relacionados com os Modelos
Lineares por Partes
A1=[0.9781 0;-1 1]; A2=[0.9823 0;-1 1]; A3=[0.9872 0;-1 1];
B1=[0.037;0]; B2=[0.0393;0]; B3=[0.0352;0];

% Dados dos Vetores dos Ganhos de Retroação dos Estados
K1a=[0.9*0.9373 -0.1107]; K1b=[1.4*0.9373 -0.1107];
K2a=[1.2*0.9912 -0.1043];
K3=[1.2451 -0.1163]; K3a=[1.2*1.2451 -0.1163];

% Matrizes Equivalentes
Ae1a=A1-B1*K1a; Ae1b=A1-B1*K1b;
Ae2a=A2-B2*K2a;
Ae3=A3-B3*K3; Ae3a=A3-B3*K3a;

% Declaração de variáveis LMI
setlmis([]);
P=lmivar(1,[2 1]);

% Equacionamentos na forma  $Aei' * P * Ae_i - P < 0$ 
lmiterm([1 1 1 P],Ae1a',Ae1a); %  $Ae1a' * P * Ae1a$ 
lmiterm([1 1 1 P],-1,1); %  $-P$ 
lmiterm([1 1 1 P],Ae1b',Ae1b); %  $Ae1b' * P * Ae1b$ 
lmiterm([1 1 1 P],-1,1); %  $-P$ 
lmiterm([1 1 1 P],Ae2a',Ae2a); %  $Ae2a' * P * Ae2a$ 
lmiterm([1 1 1 P],-1,1); %  $-P$ 
lmiterm([1 1 1 P],Ae3',Ae3); %  $Ae3' * P * Ae3$ 
lmiterm([1 1 1 P],-1,1); %  $-P$ 
lmiterm([1 1 1 P],Ae3a',Ae3a); %  $Ae3a' * P * Ae3a$ 
lmiterm([1 1 1 P],-1,1); %  $-P$ 
lmiterm([-2 1 1 P],1,1); %  $P > 0$ 

Eq_LMI=getlmis;

% Resultado
[tmin,xfeas] = feasp(Eq_LMI);
P = dec2mat(Eq_LMI,xfeas,P)

eig(P)

```

Anexo F

Diagrama de Blocos do Controle via Controlador Convencional

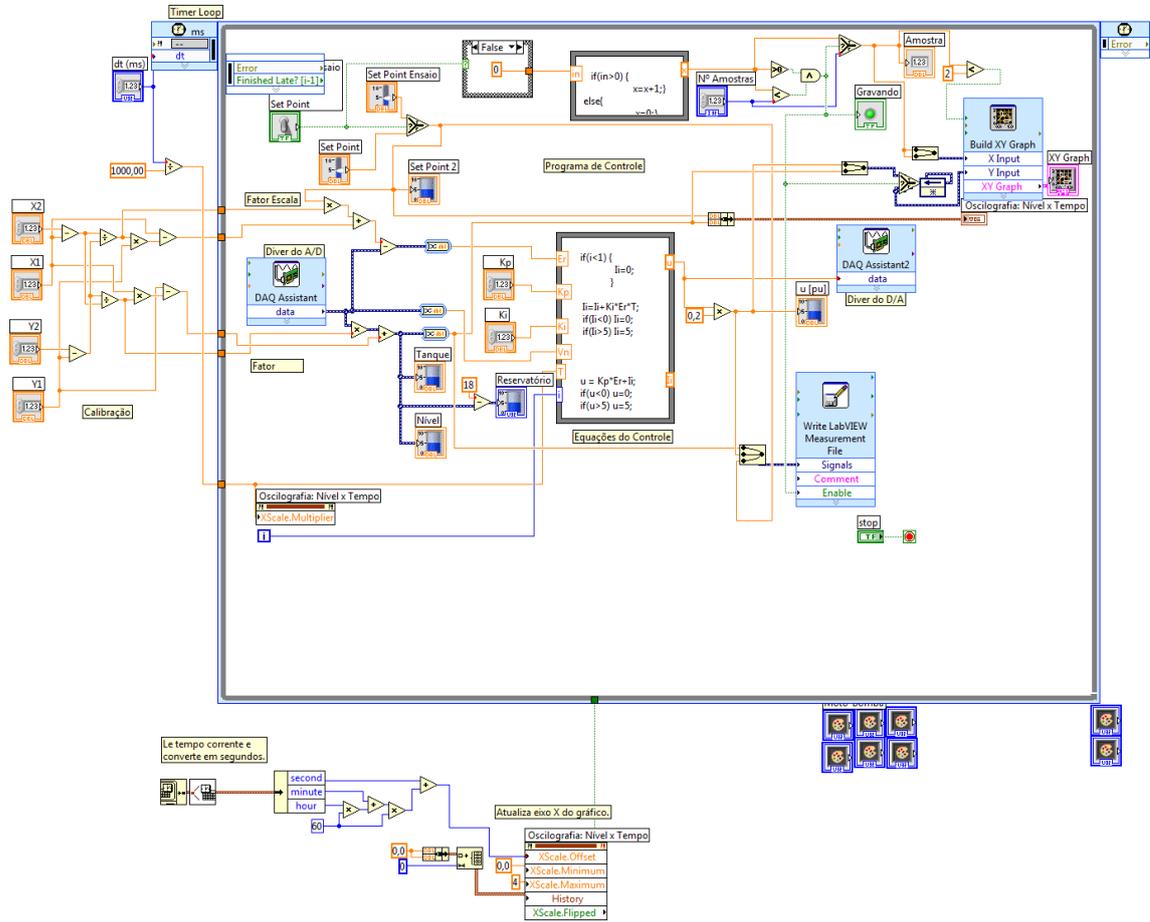


Figura F.1 - Diagrama de blocos do aplicativo desenvolvido para o controlador convencional

Anexo G

Diagrama de Blocos do Controle via Controlador *Piecewise*

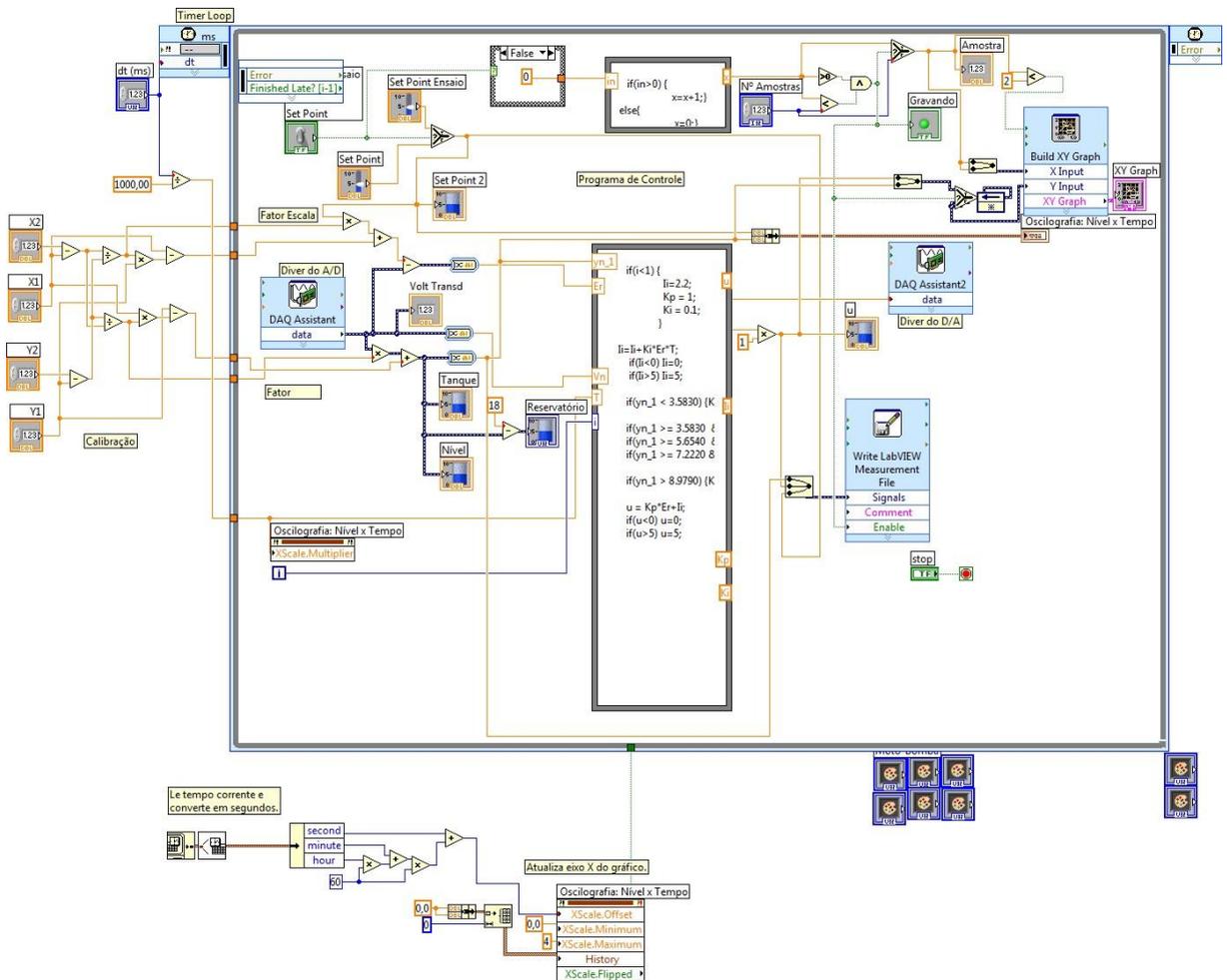


Figura G.1 - Diagrama de blocos do aplicativo desenvolvido para o controlador *piecewise*

OBS: Destaque do Algoritmo de Controle da Figura Anterior

```

yn_1
Er
Vn
T
i
u
Ii
Kp
Ki
if(i<1){
    Ii=2.2;
    Kp = 1;
    Ki = 0.1;
}

Ii=Ii+Ki*Er*T;
if(Ii<0) Ii=0;
if(Ii>5) Ii=5;

if(yn_1 < 3.5830) {Kp=0.8436; Ki=0.1107;}

if(yn_1 >= 3.5830 && yn_1 < 5.6540) {Kp=1.3122; Ki=0.1107;}
if(yn_1 >= 5.6540 && yn_1 < 7.2220) {Kp=1.1894; Ki=0.1043;}
if(yn_1 >= 7.2220 && yn_1 <= 8.9790) {Kp=1.2451; Ki=0.1163;}

if(yn_1 > 8.9790) {Kp=1.4941; Ki=0.1163;}

u = Kp*Er+Ii;
if(u<0) u=0;
if(u>5) u=5;

```

Figura G.2 - Algoritmo de controle desenvolvido para o controlador *piecewise*