

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Configurações Centrais do tipo Coroa

Rafaela Ferreira Emerick Valentim

Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da
FAPEMIG

ITAJUBÁ, 10 DE AGOSTO DE 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Configurações Centrais do tipo Coroa

Rafaela Ferreira Emerick Valentim

Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

ITAJUBÁ – MG

10 DE AGOSTO DE 2022

Agradecimentos

Um agradecimento cortês ao professor Antonio pela oportunidade, paciência e apoio. Aos professores que passaram pela minha trajetória acadêmica. Aos amigos e familiares pelo suporte. A todos os que carinhosamente me estenderam a mão durante esta jornada, dedico a minha mais saudosa e profunda gratidão. E a FAPEMIG pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho apresentam-se configurações centrais do problema de N -corpos empilhados e empilhados rodados sob o plano localizados nos vértices de n -ágonos. Usando as equações de Andoyer e as raízes da unidade mostram-se exemplos e a prova da existência do caso geral. Serão estudados casos de configurações centrais com subconjuntos de corpos que formam uma configuração central, estas chamadas de empilhadas. Em particular será visto o caso das configurações centrais do tipo coroa, onde os subconjuntos são polígonos.

Palavras-chave: Configurações centrais, Problema de N -corpos, n -ágonos alinhados e rodados.

Abstract

This work presents the central configurations of the N -body problem nested and twisted in the plane located at the vertices of n -agons. Using Andoyer's equations and the roots of unity, shown are examples and the proof of the existence of the general case. Cases of central configurations with subsets of bodies that form a central configuration, these called stacked, will be studied. In particular, the case of central configurations of the crown type will be seen, where the subsets are polygons.

Keywords: Central Configurations, N -bodies problem, n -agons nested and twisted.

Sumário

Resumo	2
Abstract	3
Lista de Figuras	6
Introdução	7
1 Casos de configurações empilhadas de seis e oito corpos	14
1.1 Problema de três corpos	14
1.2 Problema de seis corpos empilhados	15
1.3 Problema de seis corpos rodados 60°	18
1.4 Problema de quatro corpos	20
1.5 Problema de oito corpos empilhados	21
1.6 Problema de oito corpos empilhados rodados 90°	25
2 Estudo completo do caso de dois anéis	28
2.1 Coroas rodadas de dois anéis	32
2.1.1 Dois anéis rodados com três corpos	37
2.1.2 Dois anéis rodados com quatro corpos	43
2.1.3 Dois anéis rodados com $n \geq 5$ corpos	45
3 Existência do caso geral de Configurações Centrais do tipo Coroa	48
3.1 Equações para as configurações centrais dos n -ágonos empilhados	48

3.2 p n -ágonos empilhados, para todo $p > 2$	51
Conclusão	58
Bibliografia	61

Lista de Figuras

1.1	Seis corpos sobre os vértices de dois triângulos equiláteros empilhados . . .	15
1.2	Seis corpos sobre os vértices de dois triângulos equiláteros e uma circunferência circunscrita de raio a	17
1.3	Gráfico de $B(a)$ e Gráfico de $C(a)$, respectivamente.	18
1.4	Seis corpos sobre os vértices de dois triângulos equiláteros	18
1.5	Gráfico de $g(a)$	20
1.6	Quatro corpos sobre os vértices de um quadrado.	21
1.7	Oito corpos sobre os vértices de dois quadrados empilhados.	22
1.8	Gráfico de $B(a)$ e Gráfico de $C(a)$, respectivamente.	24
1.9	Oito corpos sobre os vértices de dois quadrados empilhados rodados.	25
1.10	Oito corpos sobre os vértices de dois quadrados empilhados rodados com uma circunferência de raio a circunscrita ao quadrado de lado b	26
1.11	Gráfico de $B(a)$ e Gráfico de $C(a)$, respectivamente.	27
2.1	Gráfico da função H com $n = 3$ e $m > 1$. As linhas pontilhadas na horizontal correspondem aos valores de $m = \bar{M}$ e $m = \bar{m}$ (como no próximo Teorema).	42
2.2	Exemplos do caso $(2, 3)$ -coroas.	44
3.1	Configuração central com 3 anéis de 4 corpos empilhados e Configuração central com 3 anéis de 4 corpos rodados	60
3.2	Configuração central com 3 anéis de 4 corpos não simétrico	60

Introdução

O Problema Newtoniano de N -Corpos consiste em descrever o movimento de N massas pontuais positivas (chamadas usualmente de corpos) sobre as quais agem exclusivamente as forças de atração gravitacional mútuas.

Suponha um corpo de massa m_1 localizado na posição q_1 e outro corpo com massa m_2 localização q_2 . Segundo a Lei da Gravitação Universal de Newton, o corpo de massa m_1 exerce uma força sobre o corpo de massa m_2 , cuja intensidade é dada por

$$\frac{Gm_1m_2}{|q_1 - q_2|^2},$$

na qual G representa a constante gravitacional e $|q_1 - q_2|$ é a distância Euclidiana entre os centros de gravidade dos corpos analisados.

Assim, juntamente com a Segunda Lei de Newton, temos que as equações de movimentos são dadas por:

$$m_1\ddot{q}_1 = \frac{Gm_1m_2}{|q_2 - q_1|^2} \frac{(q_2 - q_1)}{|q_2 - q_1|} \Leftrightarrow \ddot{q}_1 = \frac{Gm_2}{|q_2 - q_1|^3}(q_2 - q_1)$$

$$m_2\ddot{q}_2 = \frac{Gm_1m_2}{|q_1 - q_2|^2} \frac{(q_1 - q_2)}{|q_1 - q_2|} \Leftrightarrow \ddot{q}_2 = \frac{Gm_1}{|q_1 - q_2|^3}(q_1 - q_2),$$

onde \ddot{q}_1 e \ddot{q}_2 se referem a derivada com respeito à variável independente $t \in \mathbb{R}$, que aqui chamaremos de tempo.

Estendendo a análise para N corpos, temos que as equações diferenciais de movimento

que regem o Problema de N -corpos, são dadas por:

$$\ddot{q}_i = - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{q_{ij}^3} (q_i - q_j), \quad (1)$$

onde $i = 1, 2, \dots, n$ e $q_{ij} = |q_i - q_j|$, distância Euclidiana entre os corpos localizados em q_i e q_j .

Observe que em (1) foi adotado um referencial no qual a constante gravitacional universal G é igual a 1 (basta utilizar uma reparametrização do tempo, onde $t \rightarrow \sqrt{G}t$), e assim continuaremos.

Agora, diz-se que os N corpos formam uma *configuração central* se os vetores aceleração de cada um dos corpos é proporcional ao seu vetor posição relativo ao centro de massa, usualmente chamado *referencial baricêntrico*, dado por $\sum_{j=1}^n \frac{m_j q_j}{M_0}$, onde $M_0 = m_1 + \dots + m_n$ é a massa total. Ou seja, quando existe $\lambda < 0$ de modo que

$$\ddot{q}_i = \lambda q_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

De (2), temos que as equações que regem o problema de N corpos numa configuração central são dadas por

$$\lambda q_i = - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{q_{ij}^3} (q_i - q_j), \quad (3)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Por um produto interno e somas convenientes, podemos mostrar que $\lambda = -\frac{U}{I}$, onde

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{q_{ij}}, \quad I = \sum_{i=1}^n m_i |q_i|^2.$$

Da expressão, U representa a função potencial de Newton e I o momento de inércia dos n corpos.

Essas configurações centrais permitem obter as chamadas *soluções homográficas*, que

são as únicas soluções explícitas do problema de n corpos conhecidas, onde as razões das distâncias mútuas entre os corpos se mantêm constantes. No caso planar ($d = 2$), as configurações centrais também são chamadas de *equilíbrios relativos*, referindo-se à possibilidade de solução onde os corpos giram em torno do centro de massa com velocidade angular constante.

Existe uma vasta literatura a respeito do estudo das configurações centrais, mas nem todas as questões foram respondidas. O sexto problema da lista proposta por Smale [2] como desafios matemáticos para o século *XXI* é um exemplo. Nele, a questão levantada por Wintner [3] sobre as configurações centrais planares é sugerida: para um dado conjunto de n corpos com massas positivas, o número de configurações centrais planares não equivalentes (módulo rotações, translações e dilatações) é finito?

Para $n = 3$ existem cinco classes de equivalência de configurações centrais, onde três são de Euler e as outras duas de Lagrange. Para o caso $n = 4$, Hampton [4] e Moeckel [14] mostraram que o número está entre 32 e 8472. No caso de cinco corpos, em 2012 Albouy e Kaloshin [5] mostraram ser finitos para quase todos os valores de massa positiva. Mas a questão permanece aberta para $n > 5$. Iniciamos o estudo das configurações planares definindo $\frac{n(n-1)}{2}$ equações de "Laura-Andoyer-Dziobek", ou apenas Andoyer, como

$$f_{i,j} = \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq i,j}}^n m_k (R_{i,k} - R_{j,k}) \Delta_{i,j,k} = 0, \quad (4)$$

para $1 \leq i < j \leq n$, $R_{i,j} = \frac{1}{q_{ij}^3}$ e $\Delta_{i,j,k} = (q_i - q_j) \wedge (q_i - q_k)$, que representa o dobro da área orientada do triângulo com vértices q_i , q_j e q_k nessa ordem. Então, $\Delta_{i,j,k} = \Delta_{k,i,j}$ e $\Delta_{i,j,k} = -\Delta_{i,k,j}$, para todo i, j, k , e ainda $R_{i,j} = R_{j,i}$, para todo i, j .

Definição 0.0.1 *O momento linear total é dado pela soma dos produtos entre a massa e a velocidade dos corpos, ou seja, $\sum_{i=1}^n m_i \dot{q}_i$ e determina a capacidade de potencial de mudar sua vizinhança. O momento angular total é a soma dos produtos vetoriais entre o vetor posição e o momento linear dos corpos, ou seja, $\sum_{i=1}^n q_i \wedge m_i \dot{q}_i$.*

Lema 0.0.1 *Considere n corpos com massas m_1, \dots, m_n num mesmo plano e não coli-*

neares, localizados, respectivamente, em q_1, \dots, q_n . Então, o sistema (3) é equivalente ao sistema (1.1).

Prova: Suponha uma configuração central planar de n corpos. Assim, existe $\lambda \neq 0$, onde $q_i = \lambda q_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Usando a Eq.(3) para $i = 1, 2, \dots, n$, temos

$$\lambda q_i = - \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq i}}^n m_k R_{ik} (q_i - q_k) = 0.$$

Retirando um termo da soma, para $j \neq i$, obtemos

$$\lambda q_i = - \sum_{k \neq i, j}^n m_k R_{ik} (q_i - q_k) - m_j R_{ij} (q_i - q_j). \quad (5)$$

Da mesma forma, para $q_j, j \neq i$, segue que

$$\lambda q_j = - \sum_{k \neq j, i}^n m_k R_{jk} (q_j - q_k) - m_j R_{ji} (q_j - q_i). \quad (6)$$

Subtraindo (5) e (6), temos como resultado, para $i \neq j$

$$\lambda (q_i - q_j) = - \sum_{k \neq i, j}^n m_k [R_{ik} (q_j - q_k) - R_{jk} (q_j - q_k)] - [m_j R_{ij} - m_i R_{ji}] (q_i - q_j). \quad (7)$$

Tomando o produto vetorial por $q_i - q_j$ em ambos os lados da equação (7), tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &= - \sum_{k \neq i, j}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} = -f_{ij} \\ &\implies f_{ij} = 0, \quad \forall 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos considerar as equações de Andoyer,

$$f_{ij} = \sum_{k \neq i, j}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) (q_i - q_k) \wedge (q_i - q_k) = 0,$$

para $1 \leq i < j \leq n$, que ainda podem ser escritas como

$$\sum_{k \neq i, j}^n m_k R_{ik}(q_i - q_j) \wedge (q_i - q_k) = \sum_{k \neq i, j}^n m_k R_{jk}(q_i - q_j) \wedge (q_i - q_k).$$

Note que, sem alterar a igualdade, podemos incluir o termo j no lado esquerdo e o termo i no membro direito, obtendo

$$\sum_{k \neq i}^n m_k R_{ik}(q_i - q_j) \wedge (q_i - q_k) = \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk}(q_i - q_j) \wedge (q_i - q_k).$$

Isto é,

$$(q_i - q_j) \wedge \sum_{k \neq i}^n m_k R_{ik}(q_i - q_k) = \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk}[q_i \wedge (q_j - q_k) + (q_j \wedge q_k)].$$

Assim,

$$(q_i - q_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} = \sum_{k \neq j} m_k R_{jk}[q_i \wedge (q_j - q_k) + (q_j \wedge q_k)].$$

Sem alterar a igualdade, adicionaremos o termo $-q_j$ à direita, e desse modo obtemos

$$(q_i - q_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} = \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk}[q_i \wedge (q_j - q_k) + q_j \wedge (-q_j + q_k)].$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} (q_i - q_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} &= \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk}[q_i \wedge (q_j - q_k) + q_j \wedge (-q_j + q_k)] \\ &= \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk}[(q_i - q_j) \wedge (q_j - q_k)] \\ &= (q_i - q_j) \wedge \frac{F_j}{m_j}, \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que

$$(q_i - q_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} = (q_i - q_j) \wedge \frac{F_j}{m_j}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} (q_i - q_j) \wedge (m_j F_i - m_i F_j) = 0 &\Rightarrow q_i \wedge m_j F_i - q_i \wedge m_i F_j \wedge m_j F_i + q_j \wedge m_i F_j = 0 \\ &\Rightarrow m_j q_i \wedge F_i - m_i q_i \wedge F_j - m_j q_j \wedge F_i + m_i q_j \wedge F_j = 0. \end{aligned}$$

Ao somarmos em j , com $j \neq i$, obtemos

$$(M - m_i)q_i \wedge F_i - m_i q_i \wedge \sum_{j \neq i}^n F_j - \left(\sum_{j \neq k}^n m_j q_j \right) \wedge F_i + m_i \sum_{j \neq i}^n q_j \wedge F_j = 0,$$

sendo M a massa total. Sabemos que o centro de massa está na origem do referencial, então

$$\sum_{j=1}^n m_j q_j = 0 \implies \sum_{j \neq i}^n m_j q_j = -m_i q_i.$$

Além disso, temos que o espaço é homogêneo e isotrópico, e o sistema é isolado, logo as quantidades de momento linear total, que representa o produto entre a massa e a velocidade do corpo, e momento angular total, que se refere ao produto vetorial entre o vetor posição e o momento linear do corpo, são conservadas. Assim, respectivamente, temos

$$\sum_{j=1}^n F_j = 0 \implies \sum_{j \neq i}^n F_j = -F_i \quad (8)$$

e

$$\sum_{j=1}^n (q_j \wedge F_j) = 0 \implies \sum_{j \neq i}^n (q_j \wedge F_j) = (-q_i \wedge F_i). \quad (9)$$

Agora, ao substituírmos as equações (8) e (9) em (7), obtemos

$$M q_i \wedge F_i - m_i q_i \wedge F_i + m_i q_i \wedge F_i + m_i q_i \wedge F_i - m_i q_i \wedge F_i = 0.$$

Desse modo, $M q_i \wedge F_i = 0$, ou seja, q_i e F_i são paralela, implicando em $F_i = \lambda_i q_i$, ou ainda $\ddot{q}_i = (\lambda_i/m_i)q_i$. E de (6), segue que

$$\left(\frac{\lambda_i}{m_i} q_i - \frac{\lambda_j}{m_j} q_j \right) \wedge (q_i - q_j) = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_i}{m_i} q_i \wedge q_j - \frac{\lambda_j}{m_j} q_j \wedge q_i &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{\lambda_i}{m_i} - \frac{\lambda_j}{m_j} \right) (q_j \wedge q_i) &= 0. \end{aligned}$$

Quando q_j e q_i são paralelos, a igualdade é facilmente verificada. Quando q_i e q_j são não colineares, temos

$$\frac{\lambda_i}{m_i} = \frac{\lambda_j}{m_j} = \lambda,$$

para quaisquer i e j . E por consequência

$$\ddot{q}_i = \lambda q_i,$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$. ■

Definição 0.0.2 *Chamamos de configurações centrais empilhadas as configurações centrais que possuem um subconjunto próprio das massas que também está em configuração central.*

Neste trabalho estudaremos o caso particular das Configurações Centrais do tipo Coroa. No próximo capítulo manteremos o nome Configuração Central Empilhada para acompanhar a referência usada como base para o estudo.

Capítulo 1

Casos de configurações empilhadas de seis e oito corpos

Neste capítulo analisaremos os casos de configurações centrais com três e quatro corpos, seis e oito corpos empilhados, seis e oito corpos empilhados rodados.

Iniciaremos o estudo pelas $\frac{n(n-1)}{2}$ Equações Andoyer

$$f_{i,j} = \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq i,j}}^n m_k (R_{i,k} - R_{j,k}) \Delta_{i,j,k} = 0, \quad (1.1)$$

para $1 \leq i < j \leq n$, $R_{i,j} = \frac{1}{q_{ij}^3}$ e $\Delta_{i,j,k} = (q_i - q_j) \wedge (q_i - q_k)$, que representa o dobro da área orientada do triângulo com vértices q_i , q_j e q_k nessa ordem. Então, $\Delta_{i,j,k} = \Delta_{k,i,j}$ e $\Delta_{i,j,k} = -\Delta_{i,k,j}$, para todo i, j, k , e ainda $R_{i,j} = R_{j,i}$, para todo i, j .

1.1 Problema de três corpos

Teorema 1.1.1 *Considere três corpos não colineares com massas positivas. Esses corpos formam uma configuração central se, e somente se, estão localizados nos vértices de um triângulo equilátero.*

Prova: Das equações de Andoyer (1.1), temos que

$$\begin{aligned} f_{1,2} &= m_3(R_{1,3} - R_{2,3})\Delta_{1,2,3} = 0, \\ f_{1,3} &= m_2(R_{1,2} - R_{2,3})\Delta_{1,3,2} = 0, \\ f_{2,3} &= m_1(R_{1,2} - R_{1,3})\Delta_{1,2,3} = 0. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, as massas são positivas, $\Delta_{i,j,k} \neq 0$ e os corpos não são colineares, as equações acima serão satisfeitas se, e somente se,

$$R_{1,2} = R_{1,3} = R_{2,3} \iff q_{1,2} = q_{1,3} = q_{2,3},$$

ou seja, os corpos estão sobre os vértices de um triângulo equilátero. ■

1.2 Problema de seis corpos empilhados

Aqui, os corpos estão dispostos como na Fig.1.1 Assim, vale as igualdades:

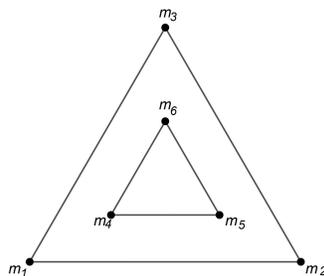


Figura 1.1: Seis corpos sobre os vértices de dois triângulos equiláteros empilhados

$$\begin{aligned}
R_{1,2} &= R_{1,3} = R_{2,3} & R_{4,5} &= R_{4,6} = R_{5,6}, \\
R_{1,5} &= R_{1,6} = R_{2,4} = R_{2,6} = R_{3,4} = R_{3,5}, \\
R_{1,4} &= R_{2,5} = R_{3,6}, \\
\Delta_{1,2,4} &= \Delta_{1,2,5} = \Delta_{2,3,5} = \Delta_{2,3,6}, \\
\Delta_{1,4,5} &= \Delta_{2,4,5} = \Delta_{2,5,6} = \Delta_{3,5,6} \\
\Delta_{1,2,6} &= \Delta_{2,3,4} & \Delta_{1,3,4} &= \Delta_{1,3,6} \\
\Delta_{1,4,6} &= \Delta_{3,4,6}, & \Delta_{1,5,6} &= \Delta_{3,4,5}.
\end{aligned}$$

Dadas essas hipóteses, das Equações de Andoyer desse caso, as equações $f_{1,2} = 0, f_{1,3} = 0, f_{1,4} = 0, f_{2,3} = 0, f_{2,5} = 0, f_{3,6} = 0, f_{4,5} = 0, f_{4,6} = 0$ e $f_{5,6} = 0$ são imediatamente satisfeitas. E como $m_1 = m_2 = m_3 = M, m_4 = m_5 = m_6 = m$, temos que $f_{1,6} = 0, f_{2,4} = 0, f_{3,5} = 0, f_{1,5} = 0, f_{2,6} = 0$ e $f_{3,4} = 0$ são equivalentes. Desse modo escrevendo $f_{1,6} = 0$ de forma conveniente, ficamos com a seguinte igualdade:

$$M[(R_{1,2} - R_{2,6})\Delta_{1,6,2} + (R_{1,3} - R_{3,6})\Delta_{1,6,3}] + m[(R_{1,4} - R_{4,6})\Delta_{1,6,4} + (R_{1,5} - R_{5,6})\Delta_{1,6,5}] = 0,$$

que pode ser escrita como

$$\frac{M}{m} = \frac{(R_{1,4} - R_{4,6})\Delta_{1,6,4} + (R_{1,5} - R_{5,6})\Delta_{1,6,5}}{(R_{1,2} - R_{2,6})\Delta_{1,6,2} + (R_{1,3} - R_{3,6})\Delta_{1,6,3}}. \quad (1.2)$$

Como $(R_{1,2} - R_{2,6})\Delta_{1,6,2} + (R_{1,3} - R_{3,6})\Delta_{1,6,3} < 0$, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.2.1 *Seja a o raio da circunferência circunscrita no triângulo menor, como na seguinte imagem:*

Para cada a que satisfaz

$$0 < a < 0.489281 \dots \quad (1.3)$$

existem massas positivas M e m , onde $M = m_1 = m_2 = m_3$ e $m_4 = m_5 = m_6 = m$, então os seis corpos estão numa configuração central empilhada, como na Fig.1.1.

Prova: De acordo com as análises anteriores, basta mostrar que quando a satisfaz (1.3) existem massas positivas M e m , de modo que $M = m_1 = m_2 = m_3$ e $m_4 = m_5 = m_6 =$

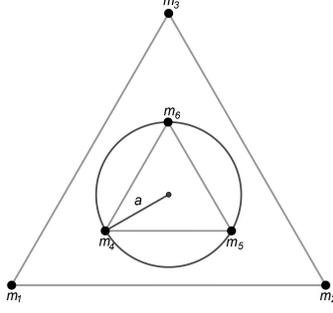


Figura 1.2: Seis corpos sobre os vértices de dois triângulos equiláteros e uma circunferência circunscrita de raio a .

m , então os seis corpos estão numa configuração central encaixante. Tomemos $B(a)$ o numerador de (1.2) e $C(a)$ o denominador de (1.2), ou seja,

$$B(a) = (R_{1,4} - R_{4,6})\Delta_{1,6,4} + (R_{1,5} - R_{5,6})\Delta_{1,6,5},$$

$$C(a) = (R_{1,2} - R_{2,6})\Delta_{1,6,2} + (R_{1,3} - R_{3,6})\Delta_{1,6,3}.$$

Temos que

$$B(a) = a^2 \left(\left(\sqrt{3}\sqrt{a^2 + a + 1}a^4 - 6a^2 + \left(3 - \sqrt{3}\sqrt{a^2 + a + 1} \right) a + 3 \right) |a - 1| - 3(a^2 + a + 1)^{3/2} \right),$$

$$C(a) = \left(-3a^5 - 3a^4 + \left(\sqrt{3}\sqrt{a^2 + a + 1} + 6 \right) a^3 - \sqrt{3}\sqrt{a^2 + a + 1} \right) |a - 1| + 3a^3(a^2 + a + 1)^{3/2}.$$

Vamos obter valores de a onde $B(a)$ e $C(a)$ possuirão sinais opostos, para que a razão M/m seja positiva. Consideremos um sistema de coordenadas no qual $q_1 = (\sqrt{3}/2, -1/2)$, $q_2 = (-\sqrt{3}/2, -1/2)$, $q_3 = (0, 1)$, $q_4 = (a\sqrt{3}/2, -a/2)$, $q_5 = (-a\sqrt{3}/2, -a/2)$ e $q_6 = (0, a)$.

A partir dessas posições dos corpos, encontramos as distâncias e as áreas orientadas que aparecem em $B(a)$ e $C(a)$. E ao estudarmos essas funções temos que $B(a)$ é decrescente e negativa, e $C(a)$ é decrescente e muda de sinal. As funções estão representadas nas figuras 1.3.

Desse modo, temos que quando a satisfaz (1.3), $B(a) < 0$ e $C(a) < 0$. ■

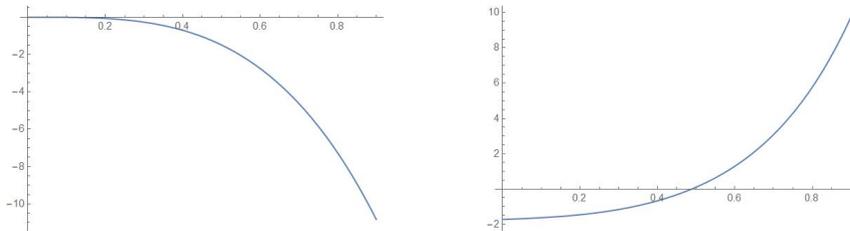


Figura 1.3: Gráfico de $B(a)$ e Gráfico de $C(a)$, respectivamente.

1.3 Problema de seis corpos rodados 60°

Nesse caso, onde os corpos estão dispostos como na Fig.1.4

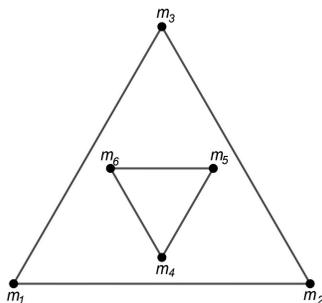


Figura 1.4: Seis corpos sobre os vértices de dois triângulos equiláteros

valem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
 R_{1,2} = R_{1,3} = R_{2,3} = 1, \quad R_{4,5} = R_{4,6} = R_{5,6} = l^{-3}, \\
 R_{3,4} = R_{1,5} = R_{2,6}, \\
 R_{1,4} = R_{1,6} = R_{2,4} = R_{2,5} = R_{3,5} = R_{3,6}, \\
 \Delta_{1,2,4} = \Delta_{1,6,3} = \Delta_{2,3,5}, \quad \Delta_{1,4,6} = \Delta_{2,5,4} = \Delta_{3,6,5}, \\
 \Delta_{1,2,5} = \Delta_{2,3,6} = \Delta_{2,3,4} = \Delta_{1,2,6} = \Delta_{1,4,3} = \Delta_{1,5,3}, \\
 \Delta_{1,4,5} = \Delta_{1,5,6} = \Delta_{3,6,4} = \Delta_{3,4,5} = \Delta_{2,6,4} = \Delta_{2,5,6}.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Procuraremos massas positivas m_i , $i = 1, \dots, 6$, de modo que satisfaçam as equações Andoyer sob das hipóteses descritas em (1.4). Note que estamos assumindo que os triângulos são equiláteros, com o mesmo baricentro e que o triângulo com lado l se encontra no interior da região limitada pelo triângulo de lado 1. Assim, $0 < l < 1/2$. Da Equação

de Andoyer e da Eq.(1.4), segue que

$$\begin{aligned}
f_{1,2} = 0 &\iff (R_{1,5} - R_{2,5})\Delta_{1,2,5}(m_5 - m_6) = 0 \iff m_5 = m_6; \\
f_{1,3} = 0 &\iff (R_{3,5} - R_{1,5})\Delta_{1,3,4}(m_4 - m_5) = 0 \iff m_4 = m_5; \\
f_{2,3} = 0 &\iff (R_{2,5} - R_{1,5})\Delta_{2,3,4}(m_4 - m_6) = 0 \iff m_4 = m_6; \\
f_{4,5} = 0 &\iff (R_{2,5} - R_{1,5})\Delta_{1,4,5}(m_1 - m_3) = 0 \iff m_1 = m_3; \\
f_{4,6} = 0 &\iff (R_{2,5} - R_{1,5})\Delta_{2,4,6}(m_2 - m_3) = 0 \iff m_2 = m_3; \\
f_{5,6} = 0 &\iff (R_{1,5} - R_{2,4})\Delta_{1,5,6}(m_1 - m_2) = 0 \iff m_1 = m_2.
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos que

$$m_1 = m_2 = m_3 = M, \quad m_4 = m_5 = m_6 = m. \quad (1.5)$$

Quando substituimos as eqs. (1.4) e (1.5) nas nove Equações de Andoyer desse caso, obtemos igualdades do tipo $0 = 0$ ou a equação

$$M[(1 - R_{2,5})\Delta_{1,4,2} + (1 - R_{1,5})\Delta_{1,4,3}] + m[(R_{1,5} - R_{4,5})\Delta_{1,4,5} + (R_{2,5} - R_{4,5})\Delta_{1,4,6}] = 0, \quad (1.6)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{m}{M} = \frac{(1 - R_{2,5})\Delta_{1,4,2} + (1 - R_{1,5})\Delta_{1,4,3}}{(R_{4,5} - R_{1,5})\Delta_{1,4,5} + (R_{4,5} - R_{2,5})\Delta_{1,4,6}}, \quad (1.7)$$

já que $(R_{4,5} - R_{1,5})\Delta_{1,4,5} + (R_{4,5} - R_{2,5})\Delta_{1,4,6} > 0$. Daí, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.3.1 *Seja a o raio da circunferência circunscrita ao triângulo de vértices m_4, m_5 e m_6 , conforme a Fig.1.4. Para cada*

$$0 < a < 0.23895\dots \quad (1.8)$$

existem massas positivas M e m , onde $m_1 = m_2 = m_3 = M$ e $m_4 = m_5 = m_6 = m$ estão em uma configuração central planar encaixante, como na Fig.1.4

Prova: Observe que, para que a satisfaça (1.8), basta que $(1 - R_{2,5})\Delta_{1,4,2} + (1 - R_{1,5})\Delta_{1,4,3}$, o numerador de (1.7), seja positivo. Considerando, sem perda de generalidade, um sistema ortogonal de coordenadas com o vértice m_1 localizado na origem, onde o vértice m_2 está sobre o eixo horizontal e o vértice m_3 no primeiro quadrante.

Dessa forma, $q_1 = (0, 0)$, $q_2 = (1, 0)$, $q_3 = (1/2, \sqrt{3}/2)$, $q_4 = (1/2, -a + \sqrt{3}/6)$, $q_5 = ((1 + a\sqrt{3})/2, (3a + \sqrt{3})/6)$ e $q_6 = ((1 - a\sqrt{3})/2, (3a + \sqrt{3})/6)$. Em função de a , as distâncias $q_{1,5}$ e $q_{2,5}$ são obtidas a partir das coordenadas acima. E as áreas $\Delta_{1,4,2}$ e $\Delta_{1,4,3}$, também em função de a , são dadas por

$$\Delta_{1,4,2} = \frac{6a - \sqrt{3}}{12}, \quad \Delta_{1,4,3} = \frac{3a + \sqrt{3}}{12}.$$

Agora, note que para $0 < a < \sqrt{3}/6$, $\Delta_{1,4,2} < 0$ e $\Delta_{1,4,3} > 0$. E ainda, quando a satisfaz 1.8, $g(a) = (1 - R_{2,5})\Delta_{1,4,2} + (1 - R_{1,5})\Delta_{1,4,3}$ é positiva. Na Fig. 1.5, temos o esboço do gráfico da função $g(a)$ em termos de a .

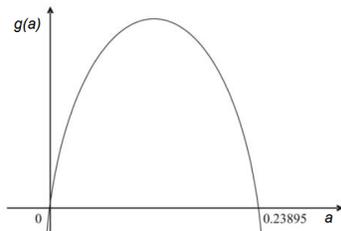


Figura 1.5: Gráfico de $g(a)$.

Assim, para cada a que satisfaz a hipótese (1.8) a razão m/M é positiva. ■

1.4 Problema de quatro corpos

Teorema 1.4.1 *Quatro corpos de massas iguais, localizados nos vértices de um quadrado constitui uma configuração central.*

Prova: Mostraremos que as seis equações Andoyer (1.1) são satisfeitas. Considere a seguinte figura: É fácil ver que as equações $f_{1,3} = 0$ e $f_{2,4} = 0$ são satisfeitas. Agora, as equações $f_{1,2} = 0$, $f_{1,4} = 0$, $f_{2,3} = 0$ e $f_{3,4} = 0$ são, respectivamente, equivalentes às

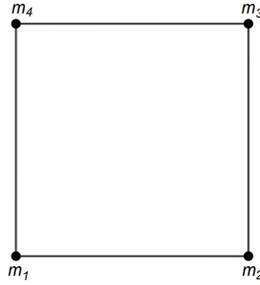


Figura 1.6: Quatro corpos sobre os vértices de um quadrado.

equações:

$$(R_{1,3} - R_{1,2})\Delta_{1,2,3}(m_3 - m_4) = 0,$$

$$(R_{1,2} - R_{1,3})\Delta_{1,3,2}(m_2 - m_3) = 0,$$

$$(R_{1,2} - R_{1,3})\Delta_{1,2,3}(m_1 - m_4) = 0,$$

$$(R_{1,3} - R_{1,2})\Delta_{1,2,3}(m_1 - m_2) = 0.$$

Por hipótese temos que $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$. Assim, as equações são satisfeitas, como queríamos. ■

1.5 Problema de oito corpos empilhados

Nesse caso, considere quatro corpos com massas positivas m_1, m_2, m_3 e m_4 nos vértices de um quadrado de lado 1. Tome um outro quadrado de lado b no interior do primeiro, de modo que os centros coincidam, e nos seus vértices encontram-se quatro corpos de massas positivas m_5, m_6, m_7 e m_8 , como na Fig.1.7 a seguir

Como consequência das simetrias do problema, verificamos que as seguintes igualdades

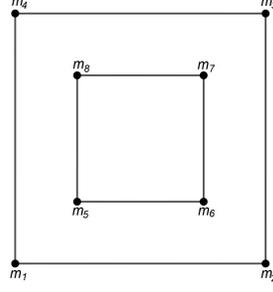


Figura 1.7: Oito corpos sobre os vértices de dois quadrados empilhados.

são satisfeitas:

$$\begin{aligned}
R_{1,2} = R_{2,3} = R_{3,4} = R_{1,4}, \quad R_{5,6} = R_{6,7} = R_{7,8} = R_{5,8}, \quad R_{1,5} = R_{2,6} = R_{3,7} = R_{4,8}, \\
R_{1,6} = R_{1,8} = R_{2,5} = R_{2,7} = R_{3,6} = R_{3,8} = R_{4,5} = R_{4,7}, \\
R_{1,7} = R_{2,8} = R_{3,5} = R_{4,6}, \quad R_{1,3} = R_{2,4}, \quad R_{5,7} = R_{6,8}, \\
\Delta_{1,2,3} = \Delta_{1,2,4} = \Delta_{1,3,4} = \Delta_{2,3,4}, \quad \Delta_{5,6,7} = \Delta_{1,7,8} = \Delta_{6,7,8}, \\
\Delta_{1,2,5} = \Delta_{1,2,6} = \Delta_{1,5,4} = \Delta_{1,8,4} = \Delta_{2,3,7} = \Delta_{2,3,6} = \Delta_{3,4,7} = \Delta_{3,4,8}, \\
\Delta_{1,2,7} = \Delta_{1,2,8} = \Delta_{2,3,8} = \Delta_{2,3,5} = \Delta_{3,4,6} = \Delta_{3,4,5} = \Delta_{1,6,4} = \Delta_{1,7,4} \\
\Delta_{1,6,8} = \Delta_{2,7,5} = \Delta_{3,8,6} = \Delta_{4,5,7} = \Delta_{1,6,3} = \Delta_{1,3,8} = \Delta_{2,7,4} = \Delta_{2,4,5} \\
\Delta_{1,6,5} = \Delta_{2,6,5} = \Delta_{2,7,6} = \Delta_{6,3,7} = \Delta_{3,8,7} = \Delta_{4,8,7} = \Delta_{4,5,8} = \Delta_{1,5,8} \\
\Delta_{1,6,7} = \Delta_{1,7,8} = \Delta_{2,7,8} = \Delta_{2,8,5} = \Delta_{5,6,3} = \Delta_{8,5,3} = \Delta_{4,6,7} = \Delta_{4,5,6} \\
\Delta_{1,3,5} = \Delta_{1,3,7} = \Delta_{2,4,6} = \Delta_{2,4,8} = \Delta_{5,7,1} = \Delta_{5,7,3} = \Delta_{6,8,2} = \Delta_{6,8,4}
\end{aligned}$$

Também é imediato que as equações de $f_{1,3} = 0$, $f_{2,4} = 0$, $f_{5,7} = 0$ e $f_{6,8} = 0$ são satisfeitas. As equações $f_{2,6} = 0$ e $f_{4,8} = 0$, $f_{4,6} = 0$ e $f_{2,8} = 0$, $f_{1,5} = 0$ e $f_{3,7} = 0$, $f_{1,7} = 0$ e $f_{3,5} = 0$, são equivalentes duas a duas, podendo ser escritas, respectivamente como

$$\begin{aligned}
(m_1 - m_3)(R_{1,2} - R_{1,6})\Delta_{1,5,2} + (m_5 - m_7)(R_{1,6} - R_{5,6})\Delta_{1,5,6} &= 0, \\
(m_1 - m_3)(R_{1,2} - R_{1,6})\Delta_{1,7,2} + (m_5 - m_7)(R_{1,6} - R_{5,6})\Delta_{1,7,6} &= 0, \\
(m_2 - m_4)(R_{1,2} - R_{1,6})\Delta_{1,5,2} + (m_6 - m_8)(R_{1,6} - R_{5,6})\Delta_{1,5,6} &= 0, \\
(m_2 - m_4)(R_{1,2} - R_{1,6})\Delta_{1,7,2} + (m_6 - m_8)(R_{1,6} - R_{5,6})\Delta_{1,7,6} &= 0.
\end{aligned}$$

Das simetrias, também temos que as oito equações $f_{1,2} = 0$, $f_{1,4} = 0$, $f_{2,3} = 0$, $f_{3,4} =$

$0, f_{5,6} = 0, f_{5,8} = 0, f_{6,7} = 0$ e $f_{7,8} = 0$ assumem as respectivas formas:

$$\begin{aligned}
(m_3 - m_4)(R_{1,3} - R_{1,2})\Delta_{1,2,3} + (m_6 - m_5)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,2} + (m_8 - m_7)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{1,7,2} &= 0, \\
(m_2 - m_3)(R_{1,3} - R_{1,2})\Delta_{1,2,3} + (m_5 - m_8)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,2} + (m_7 - m_6)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{1,7,2} &= 0, \\
(m_4 - m_1)(R_{1,3} - R_{1,2})\Delta_{1,2,3} + (m_7 - m_6)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,2} + (m_5 - m_8)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{1,7,2} &= 0, \\
(m_1 - m_2)(R_{1,3} - R_{1,2})\Delta_{1,2,3} + (m_8 - m_7)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,2} + (m_6 - m_5)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{1,7,2} &= 0, \\
(m_1 - m_2)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,6} + (m_3 - m_4)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{5,6,3} + (m_7 - m_8)(R_{5,7} - R_{6,7})\Delta_{5,6,7} &= 0, \\
(m_4 - m_1)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,6} + (m_2 - m_3)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{5,6,3} + (m_6 - m_7)(R_{5,7} - R_{6,7})\Delta_{5,6,7} &= 0, \\
(m_2 - m_3)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,6} + (m_4 - m_1)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{5,6,3} + (m_8 - m_5)(R_{5,7} - R_{6,7})\Delta_{5,6,7} &= 0, \\
(m_3 - m_4)(R_{1,5} - R_{1,6})\Delta_{1,5,6} + (m_1 - m_2)(R_{1,7} - R_{1,6})\Delta_{5,6,3} + (m_5 - m_6)(R_{5,7} - R_{6,7})\Delta_{5,6,7} &= 0.
\end{aligned}$$

Como, por hipótese, temos que $M = m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ e $m = m_5 = m_6 = m_7 = m_8$, as dezesseis equações citadas são satisfeitas, e as oito ainda restantes $f_{1,6} = 0, f_{2,5} = 0, f_{2,7} = 0, f_{1,8} = 0, f_{3,6} = 0, f_{3,8} = 0, f_{4,5} = 0$ e $f_{4,7} = 0$, são equivalentes devido as simetrias, podendo ser escritas como a equação

$$\begin{aligned}
M[(R_{1,2} - R_{1,5})\Delta_{1,5,2} + (R_{1,3} - R_{1,6})\Delta_{1,6,3} + (R_{1,7} - R_{1,2})\Delta_{1,7,2}] + m[(R_{6,7} - R_{1,5})\Delta_{1,5,6} + \\
(R_{1,7} - R_{6,7})\Delta_{5,6,3} + (R_{1,6} - R_{5,7})\Delta_{1,6,8}] = 0. \quad (1.9)
\end{aligned}$$

E assim, segue o teorema:

Teorema 1.5.1 *Seja a o raio da circunferência circunscrita no quadrado de lado b da Fig.1.7. Se a satisfaz*

$$0 < a < 0,37602\dots, \quad (1.10)$$

existem massas positivas $M = M_b$ e $m = m_b$, de modo que se $M = m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ e $m = m_5 = m_6 = m_7 = m_8$, então os oito corpos estão em uma configuração central encaixante, como na Fig.1.7.

Prova: Seja $B(a)$ o coeficiente de M e $C(a)$ o de m na Eq.(1.9), então

$$\begin{aligned}
B(a) &= (R_{1,2} - R_{1,5})\Delta_{1,5,2} + (R_{1,3} - R_{1,6})\Delta_{1,6,3} + (R_{1,7} - R_{1,2})\Delta_{1,7,2}, \\
C(a) &= (R_{6,7} - R_{1,5})\Delta_{1,5,6} + (R_{1,7} - R_{6,7})\Delta_{5,6,3} + (R_{1,6} - R_{5,7})\Delta_{1,6,8},
\end{aligned}$$

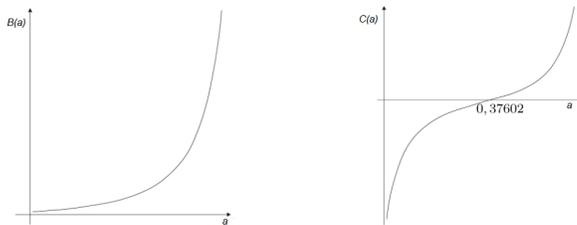


Figura 1.8: Gráfico de $B(a)$ e Gráfico de $C(a)$, respectivamente.

ou ainda,

$$B(a) = - \left(\frac{a-1}{|a-1|^3} + a \left(\frac{2}{(a^2+1)^{3/2}} + \frac{1}{(a+1)^3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{(a+1)^3} \right),$$

$$C(a) = a \left(\frac{1-a}{|a-1|^3} - \frac{2\sqrt{2}+1}{4a^3} + \frac{2}{(a^2+1)^{3/2}} + \frac{a}{(a+1)^3} + \frac{1}{(a+1)^3} \right).$$

Procuramos valores de a de modo que $B(a)$ e $C(a)$ tenham sinais opostos, assim a razão $\frac{M}{m}$ será positiva. Tomando $q_1 = (0, 0)$, $q_2 = (1, 0)$, $q_3 = (1, 1)$ e $q_4 = (0, 1)$, temos que as coordenadas dos demais corpos em função de a são:

$$q_5 = \left(\frac{1 - \sqrt{2}a}{2}, \frac{1 - \sqrt{2}a}{2} \right),$$

$$q_6 = \left(\frac{1 + \sqrt{2}a}{2}, \frac{1 - \sqrt{2}a}{2} \right),$$

$$q_7 = \left(\frac{1 + \sqrt{2}a}{2}, \frac{1 + \sqrt{2}a}{2} \right),$$

$$q_8 = \left(\frac{1 - \sqrt{2}a}{2}, \frac{1 + \sqrt{2}a}{2} \right).$$

Agora, conhecendo a posição dos corpos podemos encontrar as distâncias e áreas orientadas que aparecem em $B(a)$ e $C(a)$.

Analisando as funções, observamos que $B(a)$ é crescente e positiva, enquanto que $C(a)$ é crescente, começa negativo e muda de sinal quando $a = 0,37602\dots$, como mostra a Fig.1.8.

Desse modo, temos que para a em (1.10), $B(a) > 0$ e $C(a) < 0$. ■

Enquanto que as equações $f_{1,5} = 0, f_{1,6} = 0, f_{2,6} = 0, f_{4,5} = 0, f_{4,8} = 0, f_{1,7} = 0, f_{4,6} = 0, f_{4,7} = 0, f_{1,8} = 0, f_{2,5} = 0, f_{2,8} = 0, f_{3,5} = 0, f_{3,6} = 0, f_{2,7} = 0, f_{3,7} = 0$ e $f_{3,8} = 0$ são equivalentes. Obtemos assim a seguinte equação $f_{1,7} = 0$

$$M[(R_{1,2} - R_{2,7})\Delta_{1,7,2} + (R_{1,3} - R_{3,7})\Delta_{1,7,3} + (R_{1,4} - R_{4,7})\Delta_{1,7,4}] + m[(R_{1,6} - R_{5,7})\Delta_{1,7,6} + (R_{1,6} - R_{6,7})\Delta_{1,7,6} + (R_{1,8} - R_{7,8})\Delta_{1,7,8}] = 0. \quad (1.11)$$

Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.6.1 *Seja a o raio da circunferência circunscrita ao quadrado de lado b , como na seguinte imagem Para cada a que satisfaz*

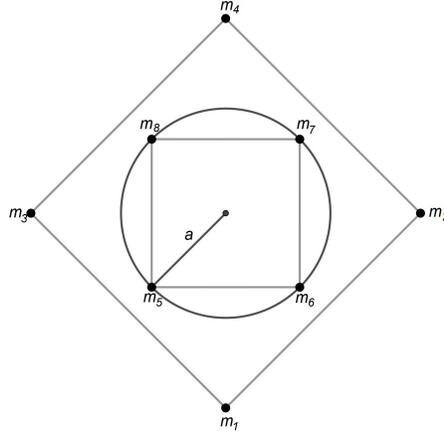


Figura 1.10: Oito corpos sobre os vértices de dois quadrados empilhados rodados com uma circunferência de raio a circunscrita ao quadrado de lado b

$$0 < a < 0.531786\dots, \quad (1.12)$$

existem massas positivas M e m , tais que $M = m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ e $m = m_5 = m_6 = m_7 = m_8$, então os oito corpos estão numa configuração central empilhada rodada, como na Fig.1.9.

Prova: Sejam $B(a)$ o coeficiente de M e $C(a)$ o coeficiente de m referentes a Eq.(1.11),

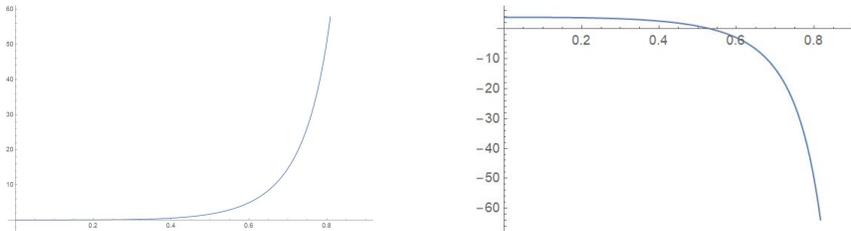


Figura 1.11: Gráfico de $B(a)$ e Gráfico de $C(a)$, respectivamente.

ou seja

$$B(a) = (R_{1,2} - R_{2,7})\Delta_{1,7,2} + (R_{1,3} - R_{3,7})\Delta_{1,7,3} + (R_{1,4} - R_{4,7})\Delta_{1,7,4},$$

$$C(a) = (R_{1,5} - R_{5,7})\Delta_{1,7,6} + (R_{1,6} - R_{6,7})\Delta_{1,7,6} + (R_{1,8} - R_{7,8})\Delta_{1,7,8}.$$

Temos que

$$B(a) = a \left(-4a^2 \left(a \left(\frac{2}{(a^2 + 1)^{3/2}} + \frac{1}{(a + 1)^3} - \frac{1}{(a - 1)^3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{(a - 1)^3} + \frac{1}{(a + 1)^3} \right) \right),$$

$$C(a) = -\frac{8(a^2 + 3)a^5}{(a^2 - 1)^3} + \left(-\frac{8}{(a^2 + 1)^{3/2}} - \frac{4}{(a + 1)^3} + \frac{4}{(a - 1)^3} \right) a^3 + 2\sqrt{2} + 1.$$

Buscamos os valores de a pra que $B(a)$ e $C(a)$ tenham sinais opostos, de modo que $\frac{M}{m}$ é positivo. Tomando $q_1 = (0, -1)$, $q_2 = (1, 0)$, $q_3 = (0, 1)$, $q_4 = (-1, 0)$, $q_5 = (-a, -a)$, $q_6 = (a, -a)$, $q_7 = (a, a)$ e $q_8 = (-a, a)$.

Agora, encontramos as distâncias e as áreas orientadas que aparecem em $B(a)$ e $C(a)$. E ao estudarmos essas funções, temos que $B(a)$ é crescente positiva, e $C(a)$ é decrescente e muda de sinal, como na 1.11.

Desse modo, temos que quando a satisfaz (1.12), $B(a) > 0$ e $C(a) > 0$. ■

O estudo do caso geral usando as coordenadas cartesianas é complexo. Assim, no próximo capítulo usaremos coordenadas das raízes da unidade, que são mais convenientes para descrever polígonos regulares.

Capítulo 2

Estudo completo do caso de dois anéis

Nesse capítulo trataremos das configurações centrais planares dos problemas de N -corpos, com $N = kn$, onde são k grupos de n corpos localizados nos vértices de n -ágonos regulares, usando como referência o artigo [9]. Apresentaremos algumas definições e equações para o caso geral, mas focaremos no caso com dois anéis rodados. Mostraremos que para qualquer conjunto de massas existe, pelo menos, uma $(2, n)$ -coroa. Além disso, contaremos o número de $(2, n)$ -coroas, $n = 3, 4$, para determinado conjunto de massas. Também citaremos uma conjectura a respeito do caso $n \geq 5$.

Definições e equações para o caso geral

Considere o problema newtoniano planar de N -corpos, com $N = kn$, ou seja k grupos de n corpos, onde todos os n corpos que estão no j -ésimo anel tem a mesma massa m_j , $j = 1, \dots, k$. Seja $q_{ji} \in \mathbb{R}^2$, $j = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, n$, a posição de cada corpo. Uma configuração central do problema de kn -corpos é uma configuração $q = (q_{11}, q_{12}, \dots, q_{kn}) \in \mathbb{R}^{2kn}$ de modo que, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, a seguinte equação é satisfeita

$$\nabla U(q) + \lambda Mq = 0 \tag{2.1}$$

onde U representa a função potencial de Newton

$$U(q) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=i+1}^n \frac{m_j^2}{\|q_{ji} - q_{jl}\|} + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=j+1}^k \sum_{i=1}^n \sum_{\nu=1}^n \frac{m_j m_l}{\|q_{ji} - q_{l\nu}\|},$$

e \mathbb{M} é uma matriz diagonal, com diagonal $m_1, \dots, m_1, \dots, m_k, \dots, m_k$, onde cada massa m_j é repetida n vezes.

Definição 2.0.1 *Uma configuração central formada por k grupos de n corpos dispostos em n -ângonos regulares, onde todas as massas do mesmo grupo são iguais, é chamada de coroa de k anéis e n -corpos, ou apenas (k, n) -coroa.*

Chamaremos de $q_j = q_{j1}$ a posição do líder de cada grupo, pois sua posição é conhecida, e assim os outros corpos que estão no mesmo anel são fixos. Usando as coordenadas polares, escrevemos

$$q_j = a_j e^{i\varpi_j}, q_{ji} = q_j e^{i2\pi(i-1)/n}, \quad j = 1, \dots, k, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

onde $\varpi_j \in (-\pi/n, \pi/n]$ é o ângulo polar do líder e $a_j > 0$ o raio do j -ésimo anel, $j = 1, \dots, k$. Dessa forma, uma (k, n) -coroa é determinada por três sequências (m_1, \dots, m_k) , $(\varpi_1, \dots, \varpi_k)$ e (a_1, \dots, a_k) , com k elementos, $m_j > 0$ e $a_j > 0$.

Proposição 2.0.1 *Considere uma (k, n) -coroa com corpos cujas massas são m_j , localizados em q_{ji} , $j = 1, \dots, k, i = 1, \dots, n$, assim como na Eq.(2.2). Então, existe uma constante λ de modo que os raios $a_j > 0$ e os ângulos $\varpi_j, j = 1, \dots, k$, devem satisfazer o seguinte conjunto de equações*

$$\sum_{\substack{l=1, \\ l \neq j}}^k m_l \sum_{k=1}^n \frac{a_l e^{i(\varpi_l - \varpi_j + 2\pi k/n)} - a_j}{(a_j^2 + a_l^2 - 2a_l a_j \cos(\varpi_j - \varpi_j + 2\pi k/n))^{3/2}} + \lambda a_j + \frac{m_j}{a_j^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{i2\pi k/n-1}}{(2 - 2\cos(2\pi k/n))^{3/2}} = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (2.3)$$

Prova: Das simetrias, temos que da Eq.(2.1) apenas $2k$ equações são independentes que precisam ser satisfeitas:

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} + \lambda m_j q_j = 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Substituindo a Eq.(2.2), obtemos o conjunto de equações (2.3). ■

A partir disso, surge a questão: quantas sequências distintas de raios e ângulos, satisfazem o conjunto de equações descritas em (2.3)? Note que o conjunto de (k, n) -coroas é invariante em relação as rotações ao redor da origem.

Assim, para encontrarmos esse número, fixaremos $\varpi_1 = 0$ e $a_1 = 1$.

Definição 2.0.2 *Para quaisquer k e n , considere a configuração central de k anéis de n corpos. Dizemos que $(1, a_2, \dots, a_k)$ e $(0, \varpi_2, \dots, \varpi_k)$, para a_j e $\varpi_j \in (-\pi/n, \pi/n]$, $j = 1, \dots, k$, são admissíveis se existem uma constante λ e uma sequência de massas positivas (m_1, \dots, m_k) que satisfazem as Eqs.(2.3). A sequência de raios não necessita de ordem estabelecida previamente.*

Lema 2.0.1 *Para quaisquer k e n fixos, considere uma sequência de $(\varpi_j)_{j=1}^n$ de modo que $|\varpi_l - \varpi_j| = 0, \pi/n$, para todo l, j . Então*

$$\sum_{\substack{l=1, \\ l \neq j}}^k m_l \sum_{k=1}^n \frac{a_l \text{sen}(\varpi_l - \varpi_j + 2\pi k/n)}{(a_l^2 + a_j^2 - 2a_l a_j \cos(\varpi_l - \varpi_j + 2\pi k/n))^{3/2}} = 0, \quad j = 1, \dots, k \quad (2.4)$$

para todo m_j e $a_j > 0$, $j = 1, \dots, k$.

Escrevemos a parte imaginária do sistema (2.3) como

$$\sum_{\substack{l=1, \\ l \neq j}}^k m_l \sum_{k=1}^n \frac{\frac{m_j}{a_j^2} \sum_{k=1}^n \frac{\text{sen}(2\pi k/n)}{(2 - 2\cos(2\pi k/n))_{3/2}} + a_l \text{sen}(\varpi_l - \varpi_j + 2\pi k/n)}{(a_l^2 + a_j^2 - 2a_l a_j \cos(\varpi_l - \varpi_j + 2\pi k/n))^{3/2}} = 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

O primeiro somatório é sempre zero, e quando aplicamos o Lema, ou seja, $|\varpi_l - \varpi_j| = 0, \pi/n$, para todos l, j o segundo somatório também zera, assim o sistema de equações (2.3) é reduzido em k equações com k graus de liberdade. Para quando $|\varpi_l - \varpi_j|$ for

diferente de 0 ou π/n , as equações (2.4) são satisfeitas quaisquer que sejam os valores de m_j e a_j , $j = 1, \dots, k$. Quando a sequência dos ângulos respeitar alguma relação ou proporção, algumas das k equações de (2.4) somem, e por consequência o número de equações de (2.3) também é reduzido.

Proposição 2.0.2 *Tome uma (k, n) -coroa com os $m_j, j = 1, \dots, k$, corpos localizados em $q_{ij}, j = 1, \dots, k, i = 1, \dots, n$, de modo que $|\varpi_l - \varpi_j| = 0, \pi/n$ para todos j, l . Então, existe alguma constante λ tal que os $a_j > 0$ satisfazem o seguinte sistemas de equações*

$$\frac{-m_j}{a_j^2} S_n - \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq j}}^k m_l C_{jl}(a_j, a_l) + \lambda a_j = 0, \quad j = 1, \dots, k \quad (2.5)$$

onde

$$S_n = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\text{sen}(k\pi/n)} \quad (2.6)$$

e

$$C_{jl} = C_{jl}(a_j, a_l) = \sum_{k=1}^n \frac{a_j - a_l \cos(\varpi_j - \varpi_l + 2k\pi/n)}{(a_j^2 + a_l^2 - 2a_j a_l \cos(\varpi_j - \varpi_l + 2\pi k/n))^{3/2}}, \quad (2.7)$$

com $j, l = 1, \dots, k$.

Prova: Como $|\varpi_l - \varpi_j| = 0, \pi/n$ para todos j, l , então todas as k equações de (2.4) são satisfeitas. E ainda, a parte real do sistema (2.3) resulta em (2.5). ■

Sob a condição da Proposição 2, o sistema de equações (2.5) possui k equações e $2k$ incógnitas: λ, m_j , para $j = 1, \dots, k$ e a_j , para $j = 2, \dots, k$. Podemos eliminar λ , basta usar a equação do primeiro anel $j = 1$, assim temos as seguintes $k - 1$ equações:

$$\left(C_{j1} - S_n \frac{a_j}{a_1^3} \right) m_1 + \left(\frac{S_n}{a_j^2} - \frac{a_j}{a_1} C_{1j} \right) m_j + \sum_{\substack{l=2, \\ l \neq j}}^k \left(C_{jl} - \frac{a_j}{a_l} C_{1l} \right) m_l = 0, \quad j = 2, \dots, k. \quad (2.8)$$

Além disso, tomando $m_1 = 1$, escrevemos as $k - 1$ equações com $2k - 2$ incógnitas como

$$(C_{j1} - S_n a_j) + \left(\frac{S_n}{a_j^2} - a_j C_{1j} \right) m_j + \sum_{\substack{l=2, \\ l \neq j}}^k (C_{jl} - a_j C_{1l}) m_l = 0, \quad j = 2, \dots, k. \quad (2.9)$$

Definição 2.0.3 *Seja uma (k, n) -coroa, onde $q_j = a_j e^{i\varpi_j}$, $a_j > 0$, $j = 1, \dots, k$, representada a posição dos líderes de cada anel. Dizemos que o j -ésimo e o k -ésimo anéis são empilhados se $\varpi_j - \varpi_k = 0$, e são rodados se $|\varpi_j - \varpi_k| \neq 0$. Uma (k, n) -coroa com pelo menos dois anéis rodados é chamada coroa rodada, e quando todos os anéis estão empilhados, é dita coroa empilhada.*

2.1 Coroas rodadas de dois anéis

Consideraremos o caso de $(2, n)$ -coroas rodadas, e assim como em Yu e Zhang [10], os únicos ângulos possíveis serão $\varpi_1 = 0$ e $\varpi_2 = \pi/n$, como descrito no seguinte Teorema:

Teorema 2.1.1 *Se uma configuração central é formada por dois n -ângonos regulares rodados, então $\varpi = 0$ ou $\varpi = \pi/n$. Especificamente, quando $a = 1$, ou seja, os n -ângonos regulares estão no mesmo círculo, então $\varpi = \pi/n$.*

Prova: Quando $a = 1$, assumimos $\varpi \neq 0, 2\pi/n$. Então, $\varpi \in (0, 2\pi/n)$.

Primeiro vamos mostrar que para $v(\varpi) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\text{sen}(\varpi_j + \varpi)}{|1 + a^2 - 2a \cos(\varpi_j + \varpi)|^{3/2}}$, temos $v(\pi/n) = 0$, $v(-\varpi) = -v(\varpi)$ e $v(\varpi + 2\pi/n) = v(\varpi)$.

$$\begin{aligned}
 v\left(\frac{\pi}{n}\right) &= \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\text{sen}((2j+1)\pi/n)}{|1 + a^2 - 2a \cos((2j+1)\pi/n)|^{3/2}} \\
 &= -\sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\text{sen}((2n-2j-1)\pi/n)}{|1 + a^2 - 2a \cos((2n-2j-1)\pi/n)|^{3/2}} \\
 &= -\sum_{-1 \leq k \leq n-2} \frac{\text{sen}((2k+1)\pi/n)}{|1 + a^2 - 2a \cos((2k+1)\pi/n)|^{3/2}} \\
 &= -\sum_{-1 \leq k \leq n} \frac{\text{sen}((2k+1)\pi/n)}{|1 + a^2 - 2a \cos((2k+1)\pi/n)|^{3/2}} \\
 &= -v\left(\frac{\pi}{n}\right)
 \end{aligned}$$

Então, $v(\pi/n) = 0$. Sabemos que para $n \geq 3$, $m_1 = \dots = m_n$, se m_1, \dots, m_n estão localizados nos vértices de um polígono regular, então eles formam uma configuração

central, assim segue que $v(-\varpi) = -v(\varpi)$, e da definição de $v(\varpi)$ que $v(\varpi + 2\pi/n) = v(\varpi)$.

Disso, agora basta mostrar que $v(\varpi) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\text{sen}(\varpi_j + \varpi)}{|1 + a^2 - 2a \cos(\varpi_j + \varpi)|^{3/2}} > 0$ para todo $a > 0$ e $\varpi \in (0, \pi/n)$. Para isso provaremos que

$$g_0(x) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\text{sen}(\varpi_j + \varpi)}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varpi_j + \varpi) + x)^{3/2}} > 0 \quad \text{em } \{x : x \geq 0\}$$

para qualquer $\varpi \in (0, \pi/n)$ e $a > 0$. Defina

$$g_N(x) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\text{sen}(\varpi_j + \varpi)}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varpi_j + \varpi) + x)^{(2N+3)/2}},$$

onde $\varpi \in (0, \pi/n)$, $a > 0$, $N \in \mathbb{N}$ e $x \geq 0$. Note que

$$\begin{aligned} g_N(x) &= \sum_{0 \leq j \leq n-1} \frac{\text{sen}(\varpi_j + \varpi)}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varpi_j + \varpi) + x)^{(2N+3)/2}} \\ &= \sum_{0 \leq j \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{\text{sen}(\varpi_j + \varpi)}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varpi_j + \varpi) + x)^{(2N+2)/2}} \\ &\quad + \sum_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 \leq j \leq n-1} \frac{\text{sen}(\varpi_j + \varpi)}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varpi_j + \varpi) + x)^{(2N+3)/2}} \\ &= \sum_{0 \leq j \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{\text{sen}(\varpi_k + \varpi)}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varpi_k + \varpi) + x)^{(2N+3)/2}} \\ &\quad + \sum_{0 \leq k \leq n-1 - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{\text{sen}(\varpi_{n-k} + \varpi)}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varpi_{n-k} + \varpi) + x)^{(2N+3)/2}} \\ &= \sum_{0 \leq j \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{\text{sen}(\varpi_j + \varpi)}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varpi_j + \varpi) + x)^{(2N+3)/2}} \\ &\quad - \sum_{1 \leq k \leq n-1 - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{\text{sen}(\varpi_k - \varpi)}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varpi_k - \varpi) + x)^{(2N+3)/2}} \\ &= \sum_{0 \leq j \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{\text{sen}(\varpi_j + \varpi)}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varpi_j + \varpi) + x)^{(2N+3)/2}} \\ &\quad - \sum_{1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\text{sen}(\varpi_k - \varpi)}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varpi_k - \varpi) + x)^{(2N+3)/2}}. \end{aligned}$$

Sejam

$$d_N = \left[\sum_{0 \leq j \leq [\frac{n-1}{2}] } \frac{\text{sen}(\varpi_j + \varpi)}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varpi_j + \varpi) + x)^{(2N+3)/2}} \right]^{\frac{1}{N}} - \left[\sum_{1 \leq k \leq [\frac{n}{2}] } \frac{\text{sen}(\varpi_k - \varpi)}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varpi_k - \varpi) + x)^{(2N+3)/2}} \right]^{\frac{1}{N}} > 0$$

em $\{x : 1 \geq x \geq 0\}$ e $e_N = x^2 d_N > 0$ em $\{x : x \geq 1\}$ para algum $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Seja $A = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq j \leq k} \csc(\frac{\pi j}{n}) > 0$, com $A_1 \geq \dots \geq A_k \geq 0$ e $a_j > 0$, então para algum $B, b > 0$ com $B \geq a_j \geq b \geq 0$, $1 \leq j \leq k$, temos que

$$b^{\frac{1}{N}} A_1 \leq \left(\sum_{1 \leq j \leq k} a_j A_j^N \right)^{\frac{1}{N}} \leq (kB)^{\frac{1}{N}} A_1.$$

Então $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{1 \leq j \leq k} a_j A_j^N \right)^{\frac{1}{N}} = A_1$. Assim tomando

$$d_N = \left[\sum_{0 \leq j \leq \frac{n-1}{2}} (\varpi_j + \varpi) \frac{1}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varpi_j + \varpi) + x)^{(2N+3)/2}} \right]^{\frac{1}{N}} - \left[\sum_{1 \leq k \leq [\frac{n}{2}]} \text{sen}(\varpi_k - \varpi) \frac{1}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varpi_k - \varpi) + x)^{(2N+3)/2}} \right]^{\frac{1}{N}},$$

temos que

$$d_N \rightarrow \frac{1}{1 + a^2 - 2a \cos(\varpi) + x} - \frac{1}{1 + a^2 - 2a \cos(\frac{2\pi}{n} - \varpi) + x}, \quad \text{quando } N \rightarrow \infty.$$

Mas,

$$\frac{1}{1 + a^2 - 2a \cos(\varpi) + x} - \frac{1}{1 + a^2 - 2a \cos(\frac{2\pi}{n} - \varpi) + x} > 0,$$

onde $\varpi \in (0, \pi/n)$ em $\{x : 1 \geq x \geq 0\}$. Então, $d_N > 0$ em $\{x : x \geq 0\}$ para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Da mesma forma, temos que

$$e_N \rightarrow \frac{x^2}{1 + a^2 - 2a \cos(\varpi) + x} - \frac{x^2}{1 + a^2 - 2a \cos(\frac{2\pi}{n} - \varpi) + x},$$

quando $N \rightarrow \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{1 + a^2 - 2a \cos(\varpi) + x} - \frac{x^2}{1 + a^2 - 2a \cos(\frac{2\pi}{n} - \varpi) + x} \\ &= \frac{2ax^2(\cos(\varpi) - \cos(\frac{2\pi}{n} - \varpi))}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varpi) + x)(1 + a^2 - 2a \cos(\frac{2\pi}{n} - \varpi) + x)} > 0, \end{aligned}$$

onde $\varpi \in (0, \pi/n)$ em $\{x : x \geq 0\}$. Então $e_N > 0$ em $\{x : x \geq 0\}$ para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Portanto,

$$g_N(x) = \sum_{0 \leq j \leq n-1} \frac{\text{sen}(\varpi_j + \varpi)}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varpi_j + \varpi) + x)^{(2N+3)/2}} > 0,$$

para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande e para $\varpi \in (0, \pi/n)$ em $\{x : x \geq 0\}$.

Note que $g_M(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$, para qualquer $M \in \mathbb{N}$.

Como $g_N > 0$, temos

$$g'_{N-1}(x) = \left(-\frac{2N+1}{2}\right) \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\text{sen}(\varpi_j + \varpi)}{(1 + a^2 - 2a \cos(\varpi_j + \varpi) + x)^{(2N+3)/2}} = \left(-\frac{2N+1}{2}\right) g_N(x) < 0.$$

Assim, $g_{N-1}(x) > 0$ em $\{x : x \geq 0\}$. Da mesma forma, temos que $g_{N-2} > 0$ em $\{x : x \geq 0\}, \dots, g_0(x) > 0$ em $\{x : x \geq 0\}$. Como queríamos. \blacksquare

Dessa forma, reduzimos o conjunto de equações (2.9) em

$$C_2(a) - aS_n + \left(\frac{S_n}{a^2} - aC_1(a)\right) m = 0 \quad (2.10)$$

onde

$$\begin{aligned} C_1(a) &= C_{12}(1, a) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - a \cos((2k-1)\pi/n)}{(1 + a^2 - 2a \cos((2k-1)\pi/n))^{3/2}}, \\ C_2(a) &= C_{21}(a, 1) = \sum_{k=1}^n \frac{a - \cos((2k-1)\pi/n)}{(1 + a^2 - 2a \cos((2k-1)\pi/n))^{3/2}}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

e $a = a_2, m = m_2$. Analisando a Eq.(2.10) em relação a massa e colocando em função do raio $a > 0$, temos que

$$m = H(a) = a \frac{F(a)}{F(1/a)}, \quad (2.12)$$

onde

$$F(a) = S_n a - C_2(a). \quad (2.13)$$

Para derivar a expressão (2.12), usamos que $C_1(a) = a^{-2}C_2(1/a)$. Veja que $H(1) = 1$, ou seja, o segundo anel está localizado na mesma circunferência que o primeiro, então as massas de todos os corpos são iguais, e assim a configuração central de um $2n$ -ágono é obtida. Assim, o próximo Lema segue direto.

Lema 2.1.1 *Seja H a função definida em (2.12) para $a \in (0, \infty)$. Então $H(1/a) = 1/H(a)$, para todo $a > 0$.*

Da Definição 2.2, sabemos que a sequência de raios é dada por $(1, a)$, assim, para $(2, n)$ -coroa definimos

$$\mathcal{A}_2(n) = \{a > 0; (1, a) \text{ é uma sequência admissível para } (2, n)\text{-coroa}\}. \quad (2.14)$$

E do Lema anterior temos que quando $a \in \mathcal{A}_2(n)$, então $1/a \in \mathcal{A}_2(n)$. Isto é, as $(2, n)$ -coroas determinadas pelas sequências $(1, m), (1, a)$ e as sequências $(1, 1/m), (1, 1/a)$, são qualitativamente iguais, pois um é apenas o outro dimensionalmente ajustado de maneira conveniente.

O próximo resultado é encontrado em Roberts [16] e Bang e Elmabsout [15]. Esses trabalhos discutem o estudo de equilíbrios relativos no problema do anel de Maxwell mais uma massa central, onde a mesma função F aparece. A demonstração usa o fato de que $F(1) = S_n - C_2(1) < 0$, $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{F(a)}{a} = S_n + \frac{n}{2} > 0$ e $\lim_{a \rightarrow \infty} F(a) = \lim_{a \rightarrow 0^+} F(1/a) = +\infty$.

Lema 2.1.2 *Seja F a função definida em (2.13), para $n \geq 3$. Então, F é uma função analítica para $a \in (0, +\infty)$, e a equação $F(a) = 0$ tem pelo menos dois zeros $z_1 < 1 < z_2$.*

O teorema a seguir mostra que existe pelo menos uma $(2, n)$ -coroa para qualquer sequência de massas $(1, m)$.

Teorema 2.1.2 *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $m > 0$ existe uma $(2, n)$ -coroa rodada com massas $m_1 = 1$ e $m_2 = m$.*

Prova: É suficiente mostrar que a função H , como em (2.12), está definida de 0 à $+\infty$. Sejam $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ as raízes de $F(a) = 0$. Dessa forma, essas também são os zeros de $H(a)$ e $1/z_n < \dots < 1/z_1$ são os polos, lembrando que $H(1) = 1$.

Sejam $k \in \mathbb{N}$ de modo que $z_k < 1 < z_{k+1}$. Suponha que $1/z_k < z_{k+1}$. Então, H é contínua no intervalo $[z_k, 1/z_k)$ e varia de 0 à $+\infty$. Agora tome $z_{k+1} < 1/z_k$. Então, H é contínuo e não some no intervalo $(1/z_{k+1}, z_k]$, então varia de 0 à $+\infty$. ■

2.1.1 Dois anéis rodados com três corpos

Analisaremos aqui o caso $(2, 3)$ -coroas de dois triângulos rodados. Então, temos nesse caso

$$C_2(a) = \frac{2a - 1}{(1 + a^2 - a)^{3/2}} + \frac{1}{(1 + a)^2},$$

$$S_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

assim, temos que $F(a)$, definida em (2.13), é escrita da forma

$$F(a) = \frac{\sqrt{3}}{3}a - \frac{2a - 1}{(1 + a^2 - a)^{3/2}} - \frac{1}{(1 + a)^2}. \quad (2.15)$$

O próximo resultado permite que possamos encontrar o conjunto de valores possíveis para $n = 3$. Para a prova do Lema, usaremos o seguinte teorema de Voorhoeve e Van Der Poorten:

Teorema 2.1.3 *Seja $P(a) = \sum_{k=1}^m p_k(a)$, onde p_k são funções analíticas reais em algum intervalo $I = [a_0, a_1] \subset \mathbb{R}$. Então, o número de zeros de P no intervalo I contado de acordo com a multiplicidade, $N_I(P)$, satisfaz:*

$$N_I(P) \leq m - 1 + \sum_{k=1}^m N_I(W(p_1, \dots, p_k)) + \sum_{k=1}^{m-2} N_I(W(p_1, \dots, p_k)), \quad (2.16)$$

onde $W(p_1, \dots, p_k)$ é o Wronskiano das funções envolvidas.

Lema 2.1.3 *Seja a função $F(a)$ dada em (2.15). Então a equação $F(a) = 0$ possui exatamente duas soluções positivas $z_1 < 1/2$ e $z_2 > 1$, que satisfazem $z_1 z_2 < 1$.*

Prova: Note que $F(1/2) \neq 0$. Assim, escrevemos $F(a)$ da seguinte forma

$$F(a) = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3}a - \frac{1}{(1+a^2)}}_{f_1} - \underbrace{\frac{2a-1}{(1+a^2-a)^{3/2}}}_{f_2} = f_1(a) + f_2(a).$$

As funções f_1 e f_2 são analíticas reais nos intervalos $I_1 = [\epsilon, 1/2 - \epsilon]$ e $I_2 = [1/2 + \epsilon, K]$, para qualquer $\epsilon > 0$ e $K > 1/2 + \epsilon$.

Dos seguintes limites

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \frac{1}{4}} F(a) &> 0 & \lim_{a \rightarrow \frac{1}{2}^+} F(a) &< 0 \\ \lim_{a \rightarrow \frac{1}{2}^-} F(a) &< 0 & \lim_{a \rightarrow +\infty} F(a) &= +\infty \end{aligned}$$

percebemos que cada intervalo $I_j, j = 1, 2$, tem pelo menos uma raiz de $F(a) = 0$, para algum ϵ suficientemente pequeno e K suficientemente grande, além disso o número de zeros deve ser ímpar.

Aplicando o Teorema de Voorhere e Van der Poorten, temos

$$1 \leq N_{I_j}(F(a)) \leq 1 + N_{I_j}(W(f_1, f_2)), \quad j = 1, 2, \quad (2.17)$$

onde

$$W(f_1, f_2) = \frac{\Delta(a)}{2\sqrt{3}(a+1)^3(a^2-a+1)^{5/2}},$$

e

$$\Delta(a) = 2 + 3\sqrt{3} + a - 21\sqrt{3}a + (5 + 12)\sqrt{3}a^2 + 17a^3 + a^4 - 22a^5 - 12a^6.$$

Primeiro vamos analisar o número de raízes de $\Delta(a)$ no intervalo $I_2 = [1/2 + \epsilon, K]$. Então para $b > 0$,

$$\Delta(b+1/2) = \frac{9}{16}(9-8\sqrt{3}) + \left(\frac{81}{8} - 9\sqrt{3}\right)b + \frac{3}{4}(-9+16\sqrt{3})b^2 - 66b^3 - 99b^4 - 58b^5 - 12b^6.$$

Derivando $\Delta(b+1/2)$, temos que

$$\Delta'(b+1/2) = \frac{81}{8} - 9\sqrt{3} + \frac{3}{2}(-9+16\sqrt{3})b - 198b^2 - 396b^3 - 290b^4 - 72b^5.$$

Note que, $\lim_{b \rightarrow 0} < 0$ não possui raiz positiva, ou seja, $\Delta(a)$ não tem zeros no intervalo I_2 . Portanto, usando (2.17), $N_{I_j}(F(a)) = 1$.

Agora, vamos estudar as raízes de $\Delta(a)$ no intervalo I_1 . Sabemos que $\Delta(1/4) \cdot \Delta(1/2) < 0$, então existe pelo menos uma raiz. Observe que quando $a \in I_1 [\epsilon, 1/2 - \epsilon]$

$$\Delta'(a) = 10 + 24\sqrt{3} + 102a + 12a^2 - 440a^3 - 360a^4 > 0.$$

Dessa forma, $\Delta(a) = 0$ tem exatamente uma raiz nesse intervalo, de modo que

$$1 \leq N_{I_j}(F(a)) \leq 2.$$

Mas o número total de raízes de $F(a) = 0$ deve ser ímpar, por conta da mudança de sinal da função no intervalo I_1 . Então $N_{I_j}(F(a)) = 1$.

Enfim temos que $z_1 < 1/2$, e é fácil ver que $F(1) < 0$ e $F(2) > 0$, assim $1 < z_2 < 2$.

Portanto, $z_1 z_2 < 1$. ■

Proposição 2.1.1 *O conjunto de raios possível para o caso (2, 3)- coroa rodada é*

$$\mathcal{A}_2 = (0, z_1) \cup (1/z_2, z_2) \cup (1/z_1, \infty),$$

onde z_1 e z_2 são dados no Lema anterior.

Prova: Pela definição de H em (2.12), z_1 e z_2 são os zeros e $1/z_1$ e $1/z_2$ são os polos. Do Lema anterior temos que $z_1 z_2 < 1$, assim $0 < z_1 < 1/z_2 < z_2 < 1/z_1$. Além disso, $F(0) = 0$ e $F(1) < 0$, assim $F(a) < 0$ se $a \in (z_1, z_2)$. Quando os sinais de $F(a)$ e $F(1/a)$ são iguais, os raios admissíveis $a > 0$ sempre que $m = H(a) > 0$ são

$$(0, z_1) \cup (1/z_2, z_2) \cup (1/z_1, \infty).$$

■

Analisaremos agora o comportamento da função H .

Lema 2.1.4 *Seja H a função dada em (2.12) com $n = 3$ e $a > 1$. Então*

1. *H tem apenas 2 pontos críticos: um máximo em $1 < a < z_2$, e um mínimo em $1/z_1 < a < +\infty$, onde z_1 e z_2 são dadas conforme o Lema 4;*
2. *a única solução da equação $H(a) = a$ é $a = 1$.*

Prova: Sejam a função F dada em (2.15), e H definida em (2.12). Vamos procurar os pontos críticos de H . Derivando H temos,

$$H'(a) = \frac{aF(a)F(1/a) + a^2F'(a)F(1/a) + F(a)F'(1/a)}{aF(1/a)^2}. \quad (2.18)$$

Multiplicando $H'(a)$ por $2\sqrt{3}(1+a^2-a)^{5/2}(1+a)^4$ e substituindo a F da (2.15), temos que os pontos críticos de H também são soluções dessa nova equação:

$$E(a) = p_1(a) + p_2(a)\sqrt{1+a^2-a} = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} p_1(a) &= 4a^{10} - a^9 - 23a^8 + (-23 - 2\sqrt{3})a^7 + (-1 - 17\sqrt{3})a^6 \\ &\quad + (8 + 42\sqrt{3})a^5 + (-1 - 17\sqrt{3})a^4 + (-23 - 2\sqrt{3})a^3 - 23a^2 - a + 4, \\ p_2(a) &= -4a^{10} + (4 + 2\sqrt{3})a^9 + (-4 + 4\sqrt{3})a^8 + (-4 + 4\sqrt{3})a^7(24\sqrt{3} + 4)a^6 \\ &\quad + (26\sqrt{3} - 8)a^5 + (24\sqrt{3} + 4)a^4 + (4\sqrt{3} - 4)a^3 + (4\sqrt{3} - 4)a^2 + (4 + 2\sqrt{3})a - 4. \end{aligned}$$

Note que $E(1) > 0$, $E(2) < 0$ e $E(4) > 0$, então existem pelo menos duas raízes de $H' = 0$, no intervalo $I_1 = [1, 2]$ e $I_2 = [2, 4]$.

Assim, $N_{I_j}(H') \geq 1, j = 1, 2$. Também consideraremos o intervalo $I_3 = (4, \infty)$. Aplicando (2.16), o número de raízes, contando o multiplicidade de $H = 0$ em cada intervalo é limitado por

$$N_{I_j}(H') \leq 1 + N_{I_j}(p_1) + N_{I_j}(W(p_1, f_2)), \quad j = 1, 2, 3,$$

com $f_2(a) = p_2(a)\sqrt{1+a^2-a}$.

Percebemos que p_1 , dentre os intervalos, possui apenas um zero localizado em I_2 . Além disso, $\sqrt{1+a^2-a}W(p_1, f_2) = (a-1)p_3(a)$, onde p_3 é um polinômio de grau 20 com apenas um zero para $a > 0$ localizado em I_1 .

Dessa forma, $N_{I_j}(H') = 1$, para $j = 1, 2$. E assim, para o intervalo $I_3 = (4, \infty)$, é suficiente para ver que $p_1^2(a) - (1+a^2-a)p_2^2(a) > 0$, ou seja não possui zeros nesse intervalo. Então existe um ponto crítico em $I_1 = [1, 2]$ e outro em $I_2 = [2, 4]$.

Agora, note que $H(1) = 0, H(z_2) = 0$ e z_1 é polo de H . Assim, o primeiro ponto

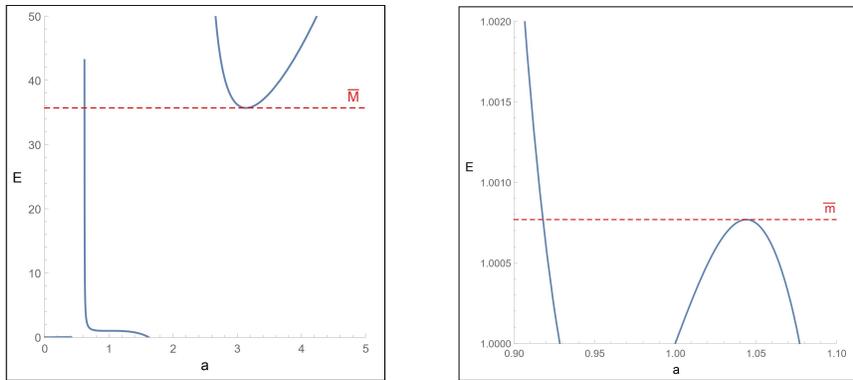


Figura 2.1: Gráfico da função H com $n = 3$ e $m > 1$. As linhas pontilhadas na horizontal correspondem aos valores de $m = \bar{M}$ e $m = \bar{m}$ (como no próximo Teorema).

crítico deve ser um máximo local em $((1, z_2))$ e o segundo deve ser um mínimo local em $(1/z_2, \infty)$. Como nas imagens 2.1:

Agora, vamos mostrar que a única solução positiva de $H(a) = a$ é quando $a = 1$. A equação pode ser escrita como

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(a^2 - 1) = \frac{a(a-1)(a^2 - a + 1)}{(a^2 - a + 1)^{3/2}} + \frac{a(1 - a^2)}{(1 + a)^2}.$$

Observe que $a = 1$ é solução da equação. Dividindo ambos os lados por $(a - 1)$ e reorganizando, temos

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(a + 1) + \frac{a}{(1 + a)} = \frac{a}{(a^2 - a + a)^{1/2}}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, a equação resultante:

$$\frac{1}{3} + \frac{2a}{3} + \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{(a+1)^2} + \frac{2a\sqrt{3}}{3(a+1)} + \frac{2a^2\sqrt{3}}{3(a+1)} - \frac{a^2}{a^2 - a + 1} = 0,$$

não possui soluções positivas. Assim, $a = 1$ é a única solução positiva de $H(a) = 0$. ■

Agora, vamos buscar o número exato de $(2, 3)$ -coroas com qualquer massa positiva m .

Teorema 2.1.4 *Seja uma configuração central do problema de 6-corpos, correspondendo a uma $(2, 3)$ -coroa com massas $m_1 = 1, m_2 = m$ e raios $a_1 = 1, a_2 = a$. E sejam z_1 e z_2*

dados pelo Lema 4. Assim, existem $\bar{m}, \bar{M} > 1$, tais que

1. para qualquer $1 < m < \bar{m}$, existem exatamente três $(2, 3)$ -coroas rodadas, todas com raio $1/z_2 < a < z_2$;
2. para qualquer $\bar{m} < m < \bar{M}$, existe apenas uma $(2, 3)$ -coroa rodada com raio $1/z_2 < a < 1$;
3. para qualquer $m > \bar{M}$, existem apenas três $(2, 3)$ -coroas rodadas. Uma delas satisfaz $1/z_2 < a < 1$ e as outras duas $a > 1/z_1$;
4. quando $m = 1, \bar{m}, \bar{M}$, existem apenas duas $(2, 3)$ -coroas rodadas.

Prova: Sejam \bar{m} e \bar{M} os valores de máximo e mínimo local de H respectivamente, para $a > 1$, dados pelos Lema 5. Da segunda parte do mesmo Lema, temos que $\bar{m} < \bar{M}$. Para essa demonstração usaremos também o Lema 2.1.4 e as propriedades de H :

1. $H(0) = H(z_1) = H(z_2)$ e $H(1) = 1$;
2. $1/z_1$ e $1/z_2$ são polos de H .

■

Tomando $m_1 = 1$, $m_2 = 40$, e $a_1 = 1$ no caso de $(2, 3)$ -coroas, obtemos as seguintes configurações com os respectivos raios: $a_2 = 0.6190856888$, $a_2 = 2.810336016$ e $a_2 = 3.665961553$, mostradas na Imagem 2.2.

2.1.2 Dois anéis rodados com quatro corpos

Analisaremos o caso $(2, 4)$ -coroa de dois quadrados rodados. Nesse caso, temos que

$$C_2(a) = \frac{2a - \sqrt{2}}{(1 + a^2 - \sqrt{2}a)^{3/2}} + \frac{2a + \sqrt{2}}{(1 + a^2 + \sqrt{2}a)^2},$$

$$S_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}$$

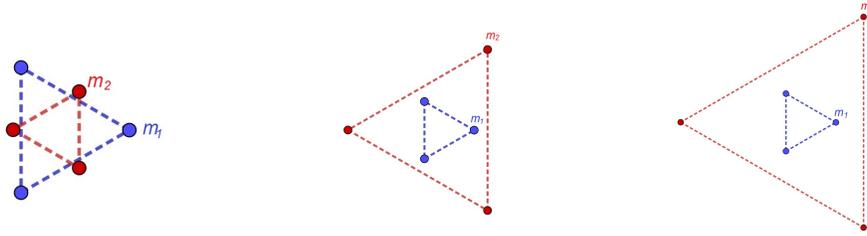


Figura 2.2: Exemplos do caso (2,3)-coroas.

assim, temos que $F(a)$, definida em (2.13), é escrita da forma

$$F(a) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \right) a - \frac{2a - \sqrt{2}}{(1 + a^2 - \sqrt{2}a)^{3/2}} - \frac{2a + \sqrt{2}}{(1 + a^2 + \sqrt{2}a)^2}. \quad (2.19)$$

Assim como na subseção anterior, agora estudaremos os zeros de $F(a)$.

Lema 2.1.5 *Considere a função $F(a)$ dada em (2.19). Então $F(a) = 0$ tem exatamente duas soluções positivas $z_1 < 1 < z_2$, que satisfazem $z_1 z_2 > 1$.*

Prova: A prova desse Lema 2.1.5 é análoga ao caso de $n = 3$. ■

O número de zeros de F é o mesmo que no caso de $n = 3$, mas agora o produto das soluções é maior que um. Essa propriedade é importante para determinar os valores possíveis para uma (2,4)-coroa.

Proposição 2.1.2 *O conjunto de raios admissíveis para (2,4)-coroas rodadas é*

$$\mathcal{A}_2(4) = (0, 1/z_2) \cup (z_1, 1/z_1) \cup (z_2, \infty),$$

onde z_1 e z_2 são dados no Lema anterior.

Prova: Da definição de H em (2.12), temos que z_1 e z_2 são zeros de H , e $1/z_2$ e $1/z_1$ são seus polos. Pelo Lema anterior, $0 < 1/z_2 < z_1 < 1 < z_1 < z_2$. Além disso, $F(0) = 0$ e $F(1) < 0$. Então $F(a) < 0$ quando $a \in (z_1, z_2)$. Combinando os sinais de $F(a)$ e $F(1/a)$,

os valores admissíveis $a > 0$ de modo que $H(a) > 0$ são

$$(0, 1/z_2) \cup (z_1, 1/z_1) \cup (z_2, \infty).$$

■

Lema 2.1.6 *Seja H como em (2.12) para $n = 4$. Então H é monótona crescente.*

Dessa forma podemos estabelecer o número de configurações centrais de $(2, 4)$ -coroas rodadas.

Teorema 2.1.5 *Seja uma configuração central do problema de 8-corpos que correspondem a uma $(2, 4)$ -coroas rodadas, com massas $m_1 = 1, m_2 = m$ e raios $a_1 = 1$ e $a_2 = a$. Sejam z_1 e z_2 dados no Lema 2.1.5*

1. *Para qualquer $m > 1$, existem exatamente três $(2, 4)$ -coroas rodadas. Uma com raio $a < 1/z_2$, uma com $z_1 < a < 1/z_1$ e a última com $a > z_2$.*
2. *Para $m = 1$ existem exatamente duas configurações centrais de $(2, 4)$ -coroas rodadas, com raios $a = 1$ e $a > z_2$.*

Prova: Como z_1 e z_2 são zeros de H , $1/z_1, 1/z_2$ seus polos, e H é monótona e crescente, então qualquer equação $m = H(a)$ tem três soluções, cada uma em um dos intervalos admissíveis em $\mathcal{A}_2(4)$. Para $m = 1$, se $a \neq 1$, as coroas com raios a e $1/a$ representam a mesma coroa torcida redimensionada. ■

2.1.3 Dois anéis rodados com $n \geq 5$ corpos

Conjectura 2.1.1 *Para $n \geq 5$:*

1. *A função F definida em (2.13) tem apenas duas soluções positivas, denotadas por z_1 e z_2 ;*

2. O conjunto dos valores admissíveis para uma $(2, n)$ -coroa é

$$\mathcal{A}_2(n) = (0, 1/z_2) \cup (z_1, 1/z_1) \cup (z_2, \infty);$$

3. Para qualquer razão de massa $m > 1$, existem exatamente três $(2, n)$ -coroas rodadas;

4. Para $m = 1$, existem exatamente duas $(2, n)$ -coroas torcidas.

Na tabela 2.1.3 listamos os valores numéricos aproximados de z_1 e z_2 para alguns valores de n :

n	z_1	z_2
3	0.413887932417	1.619789608802
4	0.697380509876	1.602408486212
5	0.822182869908	1.597921728909
6	0.884321138125	1.592235355387
7	0.918990363772	1.584120901279
8	0.940138179122	1.574515176634
9	0.953949939513	1.564321826382
10	0.963459881269	1.554123467683
\vdots	\vdots	\vdots
100	0.999674025507	1.352557858581
500	0.999986989988	1.279569044474
1000	0.999996754292	1.256683821749
5000	0.99999869916	1.215703126473

Tabela 2.1: Valores de z_1 e z_2 para os valores de n respectivos

O próximo Lema é uma prova diferente da existência, mostra que sempre é possível começar com um raio suficientemente pequeno. Esta prova também vale para raios suficientemente grandes.

Lema 2.1.7 *Quando $n \geq 5$, para valores suficiente pequenos de $a > 0$, existe uma coroa rodada formada por dois anéis como configuração central.*

Prova: Considere as funções F e H definidas em (2.13) e (2.12) respectivamente

É claro que $F(0) = 0$, queremos ver que a função F chega em zero por valores positivos.

Para isso vamos calcular a derivada de cada termo da função F .

$$F'(a) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \csc\left(\frac{\pi k}{n}\right) - \frac{-2a^2 + 4a \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{n}\right) - 3 \cos^2\left(\frac{\pi(2k-1)}{n}\right) + 1}{\left(a^2 - 2a \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{n}\right) + 1\right)^{5/2}}$$

Note que a soma destas cossecantes é positiva, pois cada parcela é positiva, e cada parcela da soma presente na derivada fica dada por

$$\frac{1}{4} \left(2 + 6 \cos\left(\frac{(2-4k)\pi}{n}\right) + \csc\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right)$$

O primeiro fator é positivo, o terceiro também e o segundo quando somarmos em n dará zero. Logo F chega em zero por valores positivos. Agora, vamos analisar o que ocorre com $F(1/a)$:

$$F(1/a) = \frac{\frac{1}{a} - \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{n}\right)}{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2 \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{n}\right)}{a} + 1\right)^{3/2}}$$

assim, $\lim_{a \rightarrow 0} F(1/a) = 0$. Dessa forma o fator negativo da expressão abaixo vai a zero e o outro positivo vai para $+\infty$

$$F(a) = \frac{S_n}{a} - C_2 \left(\frac{1}{a}\right).$$

Portanto $H(a)$ é positivo quando a é suficientemente pequeno. ■

Capítulo 3

Existência do caso geral de Configurações Centrais do tipo Coroa

Neste capítulo mostraremos a existência de configurações centrais do problema de pn -corpos, onde as massas estão localizadas nos vértices de p n -ângonos regulares empilhados concêntricos, com $p \geq 2$ e $n \geq 2$ como em [12]. Nessas configurações todas as massas do mesmo n -ângono são iguais, mas em n -ângonos diferentes as massas podem ser diferentes.

3.1 Equações para as configurações centrais dos n -ângonos empilhados

Sejam $p, n \in \mathbb{N}$ com $p \geq 2$, pn massas nos vértices de p n -ângonos regulares empilhados homotéticos com mesmo centro e $q_k \in \mathbb{R}^2$ as posições dos vértices dos n -ângonos escritos como pontos do plano complexo. Considere $m_{(l-1)n+k} = \mu_l$ e $q_{(l-1)n+k} = r_l e^{i\alpha_k}$, com $\alpha_k = 2\pi(k-1)/n$ para todo $l = 1, \dots, p$ e $k = 1, \dots, n$. Assim, temos que as massas do l -ésimo n -ângono empilhado são iguais a μ_l e os vértices do l -ésimo n -ângono são $q_k = r_l e^{i\alpha_k}$, para todo $k = 1, \dots, n$, com $r_l < r_{l+1}$ para todos $l = 1, \dots, p-1$. Usando essa notação,

temos:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n \mu_1 \frac{r_1 e^{i\alpha_k} - r_1 e^{i\alpha_j}}{|r_1 e^{i\alpha_k} - r_1 e^{i\alpha_j}|^3} + \sum_{j=1}^n \mu_2 \frac{r_1 e^{i\alpha_k} - r_2 e^{i\alpha_j}}{|r_1 e^{i\alpha_k} - r_2 e^{i\alpha_j}|^3} \\
& \quad + \cdots + \sum_{j=1}^n \mu_p \frac{r_1 e^{i\alpha_k} - r_p e^{i\alpha_j}}{|r_1 e^{i\alpha_k} - r_p e^{i\alpha_j}|^3} = \lambda r_1 e^{i\alpha_k}, \\
& \sum_{j=1}^n \mu_1 \frac{r_2 e^{i\alpha_k} - r_1 e^{i\alpha_j}}{|r_2 e^{i\alpha_k} - r_1 e^{i\alpha_j}|^3} + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n \mu_2 \frac{r_2 e^{i\alpha_k} - r_2 e^{i\alpha_j}}{|r_2 e^{i\alpha_k} - r_2 e^{i\alpha_j}|^3} \\
& \quad + \cdots + \sum_{j=1}^n \mu_p \frac{r_2 e^{i\alpha_k} - r_p e^{i\alpha_j}}{|r_2 e^{i\alpha_k} - r_p e^{i\alpha_j}|^3} = \lambda r_2 e^{i\alpha_k}, \\
& \hspace{20em} \vdots \\
& \sum_{j=1}^n \mu_1 \frac{r_p e^{i\alpha_k} - r_1 e^{i\alpha_j}}{|r_p e^{i\alpha_k} - r_1 e^{i\alpha_j}|^3} + \sum_{j=1}^n \mu_2 \frac{r_p e^{i\alpha_k} - r_2 e^{i\alpha_j}}{|r_p e^{i\alpha_k} - r_2 e^{i\alpha_j}|^3} \\
& \quad + \cdots + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n \mu_p \frac{r_p e^{i\alpha_k} - r_p e^{i\alpha_j}}{|r_p e^{i\alpha_k} - r_p e^{i\alpha_j}|^3} = \lambda r_p e^{i\alpha_k},
\end{aligned}$$

para $k = 1, \dots, n$. Pela simetria da configuração, o sistema de pn equações pode ser reduzida para um sistema equivalente com p equações independentes. E dividindo cada equação por $e^{i\alpha_k}$, temos

$$E_1 = 0, E_2 = 0, \dots, E_p = 0, \quad (3.1)$$

onde

$$\begin{aligned}
E_1 &= \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n \frac{\mu_1}{r_1^2} \frac{1 - e^{i(\alpha_j - \alpha_k)}}{|e^{i\alpha_k} - e^{i\alpha_j}|^3} + \sum_{j=1}^n \mu_2 \frac{r_1 - r_2 e^{i(\alpha_j - \alpha_k)}}{|r_1 e^{i\alpha_k} - r_2 e^{i\alpha_j}|^3} \\
& \quad + \cdots + \sum_{j=1}^n \mu_p \frac{r_1 - r_p e^{i(\alpha_j - \alpha_k)}}{|r_1 e^{i\alpha_k} - r_p e^{i\alpha_j}|^3} - \lambda r_1, \\
E_2 &= \sum_{j=1}^n \mu_1 \frac{r_2 - r_1 e^{i(\alpha_j - \alpha_k)}}{|r_2 e^{i\alpha_k} - r_1 e^{i\alpha_j}|^3} + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n \frac{\mu_2}{r_2^2} \frac{1 - e^{i(\alpha_j - \alpha_k)}}{|e^{i\alpha_k} - e^{i\alpha_j}|^3} \\
& \quad + \cdots + \sum_{j=1}^n \mu_p \frac{r_2 - r_p e^{i(\alpha_j - \alpha_k)}}{|r_2 e^{i\alpha_k} - r_p e^{i\alpha_j}|^3} - \lambda r_2, \\
& \hspace{20em} \vdots
\end{aligned}$$

$$E_p = \sum_{j=1}^n \mu_1 \frac{r_p - r_1 e^{i(\alpha_j - \alpha_k)}}{|r_p e^{i\alpha_k} - r_1 e^{i\alpha_j}|^3} + \sum_{j=1}^n \mu_2 \frac{r_p - r_2 e^{i(\alpha_j - \alpha_k)}}{|r_p e^{i\alpha_k} - r_2 e^{i\alpha_j}|^3} \\ + \cdots + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n \frac{\mu_p}{r_p^2} \frac{1 - e^{i(\alpha_j - \alpha_k)}}{|e^{i\alpha_k} - e^{i\alpha_j}|^3} - \lambda r_p,$$

para $k = 1, \dots, n$. Simplificando obtemos

$$\beta = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n \frac{1 - e^{i(\alpha_j - \alpha_k)}}{|e^{i\alpha_k} - e^{i\alpha_j}|^3} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \csc(\pi j/n)$$

e

$$c_{m,l} = \sum_{j=1}^n \frac{r_m - r_l e^{i(\alpha_j - \alpha_k)}}{|r_m e^{i\alpha_k} - r_l e^{i\alpha_j}|^3} = \sum_{j=1}^n \frac{r_m - r_l \cos(2\pi j/n)}{(r_m^2 + r_l^2 - 2r_m r_l \cos(2\pi j/n))^{3/2}},$$

com $m \neq l$. Note que quando $m > l$, $r_m > r_l$ e conseqüentemente $c_{m,l} > 0$ para todo $m > l$. Além disso,

$$\lim_{r_m \rightarrow r_{m-1}^+} c_{m,m-1} = \frac{\beta}{r_{m-1}^2} + \lim_{r_m \rightarrow r_{m-1}^+} \frac{1}{(r_m - r_{m-1})^2} = +\infty, \quad (3.2)$$

e

$$\lim_{r_m \rightarrow +\infty} c_{m,l} = 0 \quad (3.3)$$

para todo $m > l$. Sem perda de generalidade, tomaremos a unidade de massa e comprimento de modo que $\mu_1 = 1$ e $r_1 = 1$, respectivamente. Assim reescrevemos o sistema (3.1) como um sistema de equações nas variáveis λ e μ_i , para $i = 2, \dots, p$, da forma $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} -1 & c_{1,2} & c_{1,3} & \cdots & c_{1,p} \\ -r_2 & \beta/r_2^2 & c_{2,3} & \cdots & c_{2,p} \\ -r_3 & c_{3,2} & \beta/r_3^2 & \cdots & c_{3,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -r_p & c_{p,2} & c_{p,3} & \cdots & \beta/r_p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ -c_{2,1} \\ -c_{3,1} \\ \vdots \\ -c_{p,1} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

3.2 p n -ágonos empilhados, para todo $p > 2$

Para $p = 2$, sabemos que para cada μ_2 existe um único r_2 , para o qual a configuração dos dois n -ágonos alinhados seja central. Ou seja, do sistema (3.4) quando $p = 2$, temos

$$\begin{aligned} -\lambda + c_{1,2}\mu_2 &= -\beta \\ -r_2\lambda + \beta/r_2^2\mu_2 &= -c_{2,1}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Isolando λ na primeira equação e substituindo na segunda, obtemos

$$\tilde{h}(\mu_2, r_2) = (\beta/r_2^2 - r_2c_{1,2})\mu_2 - r_2\beta - c_{2,1} = 0.$$

Tomando $\mu = 1/\mu_2$ e $x = 1/r_2$, essa equação fica equivalente a $h(x) = 0$, onde

$$h(x) = \left(x - \frac{\mu}{x^2}\right)\beta + \mu x\phi(x) + (1 + \mu x^2)\frac{\partial\phi}{\partial x},$$

e

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{d_j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1 + x^2 - 2x \cos(2\pi j/n))^{1/2}}.$$

Note que $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = +\infty$, e ainda, $h(x)$ é estritamente crescente segue do seguinte Lema (Moeckel):

Lema 3.2.1 (Moeckel) *Seja $\phi(x) = \sum_{j=1}^n 1/d_j$. Então, para $0 < x < 1$, $\phi(x)$ e suas derivadas são positivas.*

Prova: Seguindo Euler, podemos escrever $1/d_j$ como

$$\frac{1}{d_j} = \frac{1}{(1 - xe^{+i2\pi j/N})^{3/2}} \frac{1}{(1 - xe^{-i2\pi j/N})^{3/2}}.$$

Usando a série de potências na igualdade, temos que

$$\frac{1}{d_j} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,j} x^n,$$

onde

$$c_{n,j} = \sum_{k+l=n} \alpha_k \alpha_l e^{i2\pi j/N}$$

é sempre positivo. Note que a soma sobre as raízes da unidade é N quando $k \equiv l \pmod{N}$ e 0 para o outro caso. Assim,

$$\phi(x) = N \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k+l=n, \\ k \equiv l \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \right) x^n.$$

Como todos os coeficientes são não negativos, sendo muitos positivos, segue que $\phi(x)$ e todas as suas derivadas são positivas. ■

Nas variáveis iniciais μ_2 e r_2 temos que para cada $\mu_2 > 0$ existe um único $r_2(\mu_2) > 1$ tal que $\tilde{h}(\mu_2, r_2(\mu_2)) = 0$. Como $c_{2,1} > 0$ e $\mu_2 > 0$, da segunda equação de (3.5) temos que $\lambda > 0$. Assim temos uma configuração central de dois n -ágonos empilhados. No entanto, podemos verificar que $r_2(\mu_2)$ é uma função injetiva, então fixando $r_2 > 1$, (3.5) possui única solução com $\lambda > 0$ e $\mu_2 > 0$. Agora, suponha que para $p-1$ n -ágonos, $1 < \tilde{r}_2 < \dots < \tilde{r}_{p-1}$ tais que (3.4) para $p-1$ tem solução única $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_{p-1})$, $\tilde{\mu}_k = \tilde{\mu}_k(\tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_{p-1})$, $k = 2, \dots, p-1$ satisfazendo $\tilde{\lambda} > 0$ e $\tilde{\mu}_k > 0$.

Lema 3.2.2 *Existe $\tilde{r}_p > \tilde{r}_{p-1}$ tal que $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_{p-1})$, $\tilde{\mu}_k = \tilde{\mu}_k(\tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_{p-1})$, $k = 2, \dots, p-1$ e $\tilde{\mu}_p = 0$ é solução de (3.4).*

Prova: Como $\tilde{\mu}_p = 0$, temos que os primeiros $p-1$ de (3.4) são satisfeitos quando $\lambda = \tilde{\lambda}$, $\mu_k = \tilde{\mu}_k$, para $k = 2, \dots, p-1$ e $\mu_p = \tilde{\mu}_p = 0$. Além disso, substituindo essa equação na

Eq.(3.4) temos:

$$f(r_p) = -r_p\tilde{\lambda} + c_{p,2}\tilde{\mu}_2 + \cdots + c_{p,p-1}\tilde{\mu}_{p-1} + c_{p,1} = 0.$$

Usando (3.2) e (3.3) com $m = p$, temos que:

$$\lim_{r_p \rightarrow \tilde{r}_{p-1}^+} f(r_p) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{r_p \rightarrow +\infty} f(r_p) = -\infty,$$

respectivamente. E ainda $f(r_p)$ é contínuo em $r_p \in (\tilde{r}_{p-1}, +\infty)$. Portanto existe pelo menos um valor $r_p = \tilde{r}_p > \tilde{r}_{p-1}$ que satisfaz $f(r_p) = 0$. ■

Agora, usando o Teorema da Função Implícita vamos mostrar que a solução de (3.4) dada no Lema pode ser continuado para uma solução com $\tilde{\mu}_p > 0$, no seguinte Teorema:

Teorema 3.2.1 *Para todos $p \geq 2$ e $n \geq 2$ existem configurações centrais planares do problema de pn -corpos onde as massas estão localizadas nos vértices de p n -ângulos regulares homotéticos empilhados com mesmo centro. Nessas configurações as massas do mesmo n -ângulo são iguais, mas as massas em n -ângulos diferentes podem ser diferentes.*

Prova: Seja $s = (\lambda, \mu_2, \dots, \mu_p, r_2, \dots, r_p)$, definimos:

$$\begin{aligned} g_1(s) &= -\lambda + c_{1,2}\mu_2 + c_{1,3}\mu_3 + \cdots + c_{1,p}\mu_p + \beta, \\ g_2(s) &= -r_2\lambda + \beta/r_2^2\lambda_2 + c_{2,3}\mu_3 + \cdots + c_{2,p}\mu_p + c_{2,1}, \\ &\vdots \\ g_p(s) &= -r_p\lambda + c_{p,2}\mu_2 + c_{p,3}\mu_3 + \cdots + \beta/r_p^2\mu_p + c_{p,1}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Usando (3.4), o sistema $g_i(s) = 0$, para $i = 1, \dots, p$. Seja $\tilde{s} = (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}_2, \dots, \tilde{\mu}_p, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_p)$ a solução do sistema (3.4) dada no Lema anterior

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial g_1}{\partial \mu_2} & \frac{\partial g_1}{\partial \mu_3} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial \mu_{p-1}} & \frac{\partial g_1}{\partial r_p} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial g_2}{\partial \mu_2} & \frac{\partial g_2}{\partial \mu_3} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial \mu_{p-1}} & \frac{\partial g_2}{\partial r_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial \lambda} & \frac{\partial g_p}{\partial \mu_2} & \frac{\partial g_p}{\partial \mu_3} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial \mu_{p-1}} & \frac{\partial g_p}{\partial r_p} \end{vmatrix}$$

avaliado quando $s = \tilde{s}$ é diferente de zero, então para todo $t = (\mu_p, r_2, r_3, \dots, r_{p-1})$ em uma vizinhança U não vazia suficientemente pequena de $\tilde{t} = (\tilde{\mu}_p, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3, \dots, \tilde{r}_{p-1})$ encontramos únicas funções analíticas $\lambda(t)$, $\mu_k(t)$, $k = 2, \dots, p-1$ e $r_p(t)$ tais que são soluções do sistema (3.4). É claro que $\lambda(\tilde{t}) = \tilde{\lambda}$, $\mu_k(\tilde{t}) = \tilde{\mu}_k$ para $k = 2, \dots, p-1$ e $r_p(\tilde{t}) = \tilde{r}_p$. Seja $V = \{t \in U : \mu_p > 0\}$. Como $\tilde{\lambda} > 0$, $\tilde{\mu}_k > 0$ para $k = 2, \dots, p-1$ e $\tilde{r}_p > \tilde{r}_{p-1}$, então tomando (se necessário) U menor, temos que para todo $t \in V$, $\lambda(t) > 0$, $\mu_k(t) > 0$ para $k = 2, \dots, p-1$, $r_p(t) > \tilde{r}_{p-1}$ e $\mu_p > 0$. Mostraremos que $D \neq 0$. Seguindo os cálculos, temos que

$$D = \begin{vmatrix} -1 & c_{1,2} & c_{1,3} & \cdots & c_{1,p-1} & \frac{\partial c_{1,p}}{\partial r_p} \mu_p \\ -r_2 & \beta/r_2^2 & c_{2,3} & \cdots & c_{2,p-1} & \frac{\partial c_{2,p}}{\partial r_p} \mu_p \\ -r_3 & c_{3,2} & \beta/r_2^2 & \cdots & c_{3,p-1} & \frac{\partial c_{3,p}}{\partial r_p} \mu_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -r_{p-1} & c_{p-1,2} & c_{p-1,3} & \cdots & \beta/r_{p-1}^2 & \frac{\partial c_{p-1,p}}{\partial r_p} \mu_p \\ -r_p & c_{p,2} & c_{p,3} & \cdots & c_{p,p-1} & \frac{\partial g_p(s)}{\partial r_p} \end{vmatrix}_{s=\tilde{s}},$$

onde

$$\frac{\partial g_p(s)}{\partial r_p} = -\lambda + \frac{\partial c_{p,2}}{\partial r_p} \mu_2 + \frac{\partial c_{p,3}}{\partial r_p} \mu_3 + \cdots + \frac{\partial c_{p,p-1}}{\partial r_p} \mu_{p-1} - \frac{2\beta}{r_p^3} \mu_p + \frac{\partial c_{p,1}}{\partial r_p}.$$

Avaliando D quando $\mu_p = 0$, temos

$$D = \begin{vmatrix} -1 & c_{1,2} & c_{1,3} & \cdots & c_{1,p-1} & 0 \\ -r_2 & \beta/r_2^2 & c_{2,3} & \cdots & c_{2,p-1} & 0 \\ -r_3 & c_{3,2} & \beta/r_2^2 & \cdots & c_{3,p-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -r_{p-1} & c_{p-1,2} & c_{p-1,3} & \cdots & \beta/r_{p-1}^2 & 0 \\ -r_p & c_{p,2} & c_{p,3} & \cdots & c_{p,p-1} & \frac{\partial g_p(s)}{\partial r_p} \end{vmatrix}_{s=\tilde{s}}.$$

Observe que

$$A = \begin{vmatrix} -1 & c_{1,2} & \cdots & c_{1,p-1} \\ -r_2 & \beta/r_2^2 & \cdots & c_{2,p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -r_{p-1} & c_{p-1,2} & \cdots & \beta/r_{p-1}^2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

já que pela hipótese de indução $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}_2, \dots, \tilde{\mu}_{p-1}, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_{p-1})$ é a única solução de (3.4) com $p-1$ ao invés de p . Ou seja, $D \neq 0$ se e somente se

$$\frac{\partial g_p(s)}{\partial r_p} \Big|_{s=\tilde{s}} \neq 0.$$

Fazendo $x = r_l/r_p$, obtemos

$$c_{p,l} = \frac{x^2}{r_l^2} \sum_{j=1}^n \frac{1 - x \cos(2\pi j/n)}{(x^2 + 1 - 2x \cos(2\pi j/n))^{3/2}} = \frac{x^2}{r_l^2} (\phi(x) + x\phi'(x)).$$

Aplicando o Lema anterior, e derivando usando a regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial c_{p,l}}{\partial x} = \frac{1}{r_l^2} (2x\phi(x) + 4x^2\phi'(x) + x^3\phi''(x)) > 0$$

para $0 < x < 1$. Portanto

$$\frac{\partial c_{p,l}}{\partial r_l} = \frac{\partial c_{p,l}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r_p} = \frac{\partial c_{p,l}}{\partial x} \left(-\frac{r_l}{r_p^2} \right) < 0,$$

para todo $r_p > r_l$. Como $\tilde{r}_p > \tilde{r}_l$ para todo $l = 1, \dots, p-1$, temos que $\partial c_{p,l}/\partial r_p < 0$. Além disso, $\tilde{\lambda} > 0$, $\tilde{\mu}_k > 0$, com $k = 2, \dots, p-1$ e $\tilde{\mu}_p = 0$, portanto $\partial g_p(s)/\partial r_p < 0$ e por consequência $D \neq 0$. Provamos que para todo $t = (\mu, r_2, \dots, r_{p-1}) \in V$, o sistema (3.4) tem solução $\lambda = \lambda(t)$, $\mu_k = \mu_k(t)$, com $k = 2, \dots, p-1$, $\lambda > 0$ e $\mu_k > 0$, com $k = 2, \dots, p$ e tal que $\lambda(\tilde{t}) = \tilde{\lambda}$, $\mu_k(\tilde{t}) = \tilde{\mu}_k$, para $k = 2, \dots, p-1$ e $r_p(\tilde{t}) = \tilde{r}_p$ com $\tilde{t} = (0, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_{p-1})$. Agora, basta provar que essa é a única solução de (3.4) para $1 < r_2 < \dots < r_{p-1} < r_p(t)$. Derivando em relação as massas, observamos que se

$$C|_{r=\tilde{r}} = \begin{vmatrix} -1 & c_{1,2} & \cdots & c_{1,p-1} & c_{1,p} \\ -r_2 & \beta/r_2^2 & \cdots & c_{2,p-1} & c_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -r_p & c_{p,2} & \cdots & c_{p,p-1} & \beta/r_p^2 \end{vmatrix}_{r=\tilde{r}} \neq 0,$$

com $r = (r_2, \dots, r_p)$ e $\tilde{r} = (\tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_p)$ e V suficientemente pequeno, então a solução de (3.4) obtida pelo Teorema da Função Implícita, é única. Então se $C|_{r=\tilde{r}} \neq 0$ então a afirmação é verdadeira. Agora mostraremos quando $C|_{r=\tilde{r}} = 0$. Fixando as variáveis $(r_2, \dots, r_{p-1}) = (\tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_{p-1})$ e considerando C uma função de r_p , perto o ponto \tilde{r}_p , as funções $c_{p,k}$ e $c_{k,p}$ são analíticas em relação a r_p então também são analíticas em relação a $1/r_p$. Em particular,

$$\begin{aligned} c_{p,k} &= \frac{n}{r_p^2} + 2 \sum_{j=1}^n \cos(2\pi j/n) \frac{r_k}{r_p^3} + \sum_{j=1}^n \frac{3}{4} (1 + 3 \cos(4\pi j/n)) \frac{r_k^2}{r_p^4} + \mathbf{O} \left(\frac{1}{r_p^5} \right) \\ c_{k,p} &= - \sum_{j=1}^n \cos(2\pi j/n) \frac{1}{r_p^2} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} (1 + 3 \cos(4\pi j/n)) \frac{r_k}{r_p^3} \\ &\quad - \frac{3}{8} \sum_{j=1}^n (3 \cos(2\pi j/n) + 5 \cos(6\pi j/n)) \frac{r_k^2}{r_p^4} + \mathbf{O} \left(\frac{1}{r_p^5} \right). \end{aligned}$$

Como $\sum_{j=1}^n \cos(2\pi jl/n) = 0$ para todo $l \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned} c_{p,k} &= \frac{n}{r_p^2} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{r_p^4}\right) \\ c_{k,p} &= -\frac{n r_k}{2 r_p^3} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{r_p^5}\right). \end{aligned}$$

Expandindo C em série de potência, obtemos

$$\begin{aligned} C &= \frac{(-1)^p n}{2r_p^2} \begin{vmatrix} c_{1,2} & \cdots & c_{1,p-1} & -1 \\ \beta/r_2^2 & \cdots & c_{2,p-1} & -r_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{p-1,2} & \cdots & \beta/r_{p-1}^2 & -r_{p-1} \end{vmatrix} \\ &+ \frac{\beta}{r_p^2} \begin{vmatrix} -1 & c_{1,2} & \cdots & c_{1,p-1} \\ -r_2 & \beta/r_2^2 & \cdots & c_{2,p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -r_{p-1} & c_{p-1,2} & \cdots & \beta/r_{p-1}^2 \end{vmatrix} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{r_p^4}\right) \\ &= \frac{1}{r_p^2} \left(\frac{n}{2} + \beta\right) \begin{vmatrix} -1 & c_{1,2} & \cdots & c_{1,p-1} \\ -r_2 & \beta/r_2^2 & \cdots & c_{2,p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -r_{p-1} & c_{p-1,2} & \cdots & \beta/r_{p-1}^2 \end{vmatrix} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{r_p^4}\right) \\ &= \frac{1}{r_p^2} \left(\frac{n}{2} + \beta\right) A + \mathbf{O}\left(\frac{1}{r_p^4}\right). \end{aligned}$$

Como $A \neq 0$ e $\beta > 0$, C não é uma função constante. Então se $C_{r=\bar{r}} = 0$, podemos encontrar $\bar{r}_p \neq \tilde{r}_p$ o mais próximo quanto quisermos de \tilde{r}_p tal que $C_{r=\bar{r}}$, onde $\bar{r} = (\tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_{p-1}, \bar{r}_p)$. Ou seja, podemos encontrar $1 < \tilde{r}_2 < \cdots < \tilde{r}_{p-1} < \bar{r}_p$ com \bar{r}_p suficientemente próximo de \tilde{r}_p de modo que o sistema (3.4) tenha solução única $\bar{\lambda}, \bar{\mu}_k$, para $k = 2, \dots, p$. Uma vez que \bar{r}_p é suficientemente próximo de \tilde{r}_p , essa solução está próxima da solução $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}_k$, para $k = 2, \dots, p$. Agora mostraremos que essa solução pode ser

encontrada para $\bar{\mu}_p > 0$. Se $\bar{\mu}_p = 0$, basta repetir os argumentos e tomar \bar{r} ao invés de \tilde{r} . Se $\tilde{\mu}_p \neq 0$, então podemos mostrar por contradição. Assumindo que $C|_{r=\tilde{r}} = 0$, temos que o sistema linear (3.4) tem infinitas soluções $\lambda = \lambda(\mu)$, $\mu_k = \mu_k(\mu)$, para $k = 2, \dots, p-1$ e $\mu_p = \mu$ quando $r = \tilde{r}$. Por outro lado, pelo Teorema da Função Implícita, encontramos funções analíticas $\lambda = \lambda(\mu)$, $\mu_k = \mu_k(\mu)$, para $k = 2, \dots, p-1$, $\mu_p = \mu$ e $r_p(\mu)$ para μ suficientemente pequeno que satisfazem o sistema (3.4), já que $(r_2, \dots, r_{p-1}) = (\tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_{p-1})$. Assim $r_p(\mu) = \tilde{r}_p$ para todo μ suficientemente próximo de $\mathbf{0}$. Mas vimos que quando

$\mu = \bar{\mu}$ o sistema (3.4) tem solução única com $r_p = \bar{r}_p \neq \tilde{r}_p$, o que é uma contradição. ■

Conclusão

Neste trabalho vimos as configurações centrais de 3, 4, 6 e 8 corpos, onde o problema de 6 corpos representa dois triângulos regulares concêntricos e com 8 corpos temos dois quadrados regulares concêntricos, tudo isso usando coordenadas cartesianas nas equações de Andoyer.

Analisando [9], notamos que essas coordenadas não são tão adequadas, como mostrado no caso com 2 coroas rodadas, visto que o ângulo de rotação de uma das coroas deve ser 0 ou π/n .

Já no caso empilhados, usando o Teorema da Função Implícita, se tivermos uma configuração de k coroas com n corpos de mesma massa, conseguimos obter uma configuração com $k + 1$ coroas com n corpos. No caso das coroas rodadas o argumento não funciona, já que podemos obter uma matriz singular, e assim não podendo usar o Teorema da Função Implícita.

Explorando essa classificação com 3 coroas, vimos que o estudo muda completamente. Pensando em 3 quadrados temos dois raios e dois ângulos, ou seja obtemos 4 parâmetros onde as massas dependem deles. O sistema em si sempre possui solução não trivial, mas não necessariamente são soluções positivas.

Usando as Equações de Andoyer calculamos as possíveis configurações centrais de 3 coroas de 4 corpos e concluímos que as soluções possíveis são representadas pelas seguintes imagens:

No primeiro caso, obtivemos os raios $a_2 = 4.3$ e $a_3 = 1.2$ e as massas $m_1 = 0.0040354$,

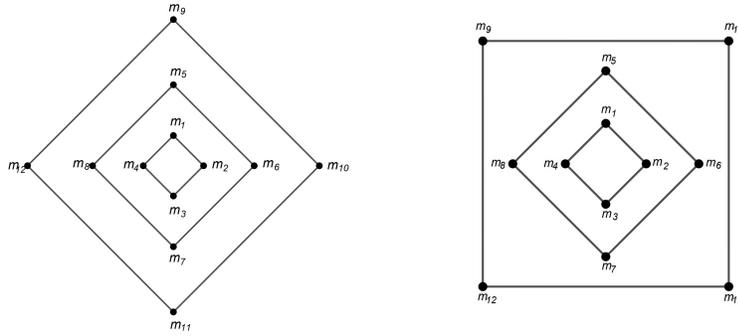


Figura 3.1: Configuração central com 3 anéis de 4 corpos empilhados e Configuração central com 3 anéis de 4 corpos rodados

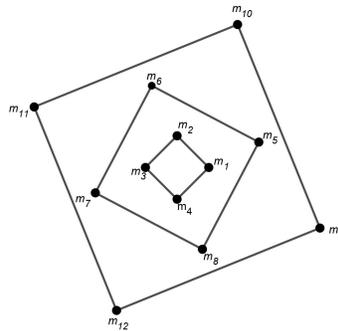


Figura 3.2: Configuração central com 3 anéis de 4 corpos não simétrico

$m_5 = 0.998836$ e $m_9 = 0.0480566$. No segundo, encontramos os raios $a_2 = 1.7$ e $a_3 = 2.3$ e as massas $m_1 = 0.838326$, $m_5 = 0.0683654$ e $m_9 = 0.540866$. E no último encontramos que os ângulos devem ser de $\varpi_2 = 0.384808$ e $\varpi_3 = -0.404675$, os raios $a_2 = 2.68572$ e $a_3 = 4.84389$ e as massas $m_1 = 0.0375571$, $m_5 = 0.0497876$ e $m_9 = 0.998053$.

Referências Bibliográficas

- [1] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Royal Society, London, 1687).
- [2] S. Smale, *Invent. Math* 11, 45, (1970).
- [3] A. Witner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics* (Princeton University Press, 1941).
- [4] M. Hampton, R. Moeckel, *Invent. Math.* **163**, 289 (2006).
- [5] A. Albouy, V. Kaloshin, *Ann. of Math.* **176**, 535 (2012).
- [6] A.C. Fernandes, L.F. Mello. *Estudo das Configurações Centrais como uma Introdução à Mecânica Celeste*. Revista da Olimpíada- IME- UFG. Vol.**11**, 24 (2016).
- [7] A.C. Fernandes, L.F. Mello, M.M. da Silva. *Exemplo de Configurações Centrais Planares Encaixantes*. Revista Brasileira de Ensino de Física. Vol. **35**, n.2, 2305 (2013).
- [8] L.F. Mello, A.C. Fernandes. *Configurações Centrais Planares Encaixantes*. Revista Brasileira de Ensino de Física. Vol. **29**, n. 3, 385 (2007).
- [9] E. Barrabés, J.M. Cors. *On Central Configurations of the kn -body Problem*. *Math. Anal. Appl.*, **476**, 720 (2019).
- [10] X. Yu, S. Zhang. *Twisted angles for central configurations formed by two twisted regular polygons*. *Journal of Differential Equations*, **253**, 2106 (2012).

- [11] M. Voorhoeve, A.J. Van Der Poorten. *Wronskian determinants and the zeros of certain functions*. Indagationes Mathematicae. 78 (5), 417 (1975).
- [12] M. Corbera, J. Delgado, J. Llibre. *On the Existence of Central Configurations of p Nested*. Qualitative Theory of Dynamical Systems, Vol.8, 255 (2009).
- [13] M. Spivak. *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Approach Calculus*. Benjamin/Cummings, New York (1965).
- [14] R. Moeckel, C. Simó. *Bifurcation of Spatial Central Configurations from Planar Ones*. SIAM J. Math. Anal. Vol. **26**, 978 (1995).
- [15] D. Bang and B. Elmabsout. *Restricted $n+1$ -body problem: existence and stability of relative equilibria*. Celestial Mech. Dynam. Astronom., 89(4):305–318, 2004.
- [16] G.E. Roberts. *Existence and Stability of Relative Equilibria in the N-Body Problem*. PhD thesis, Boston University, 1999.