

ESTABILIDADE DE SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA NO HORIZONTE DE CURTO E LONGO PRAZOS

B. Isafas de Lima Lopes

Tese submetida ao corpo docente da coordenação dos programas de pós-graduação em Engenharia da Universidade Federal de Itajubá como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Ciências em Engenharia Elétrica

Itajubá, Minas Gerais
Dezembro de 2004

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –
Bibliotecária Cristiane N. C. Carpinteiro- CRB_6/1702

L864e	Lopes, Benedito Isaías Lima
curto e	Estabilidade de sistemas elétricos de potência no horizonte de
[s.n.],	longo prazos / por Benedito Isaías Lima Lopes. -- Itajubá (MG) :
	2004.
	222 p. : il.
	Orientador : Prof. Dr. Antônio Carlos Zambroni de Souza
	Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Itajubá
orient.	1. Estabilidade de sistemas elétricos . 2. Análise dinâmica e Quase-
	dinâmica. 3. Simulações. I. Souza, Antônio Carlos Zambroni de,
	II. Universidade Federal de Itajubá - Departamento de Engenharia
	Elétrica. III. Título.
	CDU 621.3.016.35 (043.2)

Aos queridos Claudinha, José e Lourdes

Agradecimientos

A todos indistintamente.

Ad infinitum!...

Resumo

Esta tese discute o problema de estabilidade em sistemas elétricos de potência. Aspectos relacionados à dinâmica de sistemas de potência são brevemente descritos, o que inclui apêndices associados a fundamentos de máquinas elétricas e métodos numéricos. A teoria das bifurcações é também abordada, já que a mesma desempenha importante papel na identificação dos pontos de operações críticas. O modelo utilizado permite que as bifurcações sela-nó e Hopf sejam identificadas.

Um programa computacional que aborda o problema da estabilidade transitória e de longo termo é desenvolvido. A metodologia proposta permite capturar a trajetória transitória, migrando para o cálculo de longo termo quando o transitório se esgota.

A metodologia aplicada permite que ações de controle possam ser tomadas na tentativa de se evitar o colapso de tensão, tais como bloqueio de tapas de transformadores, controle secundário de tensão e corte de carga. Cada uma destas ações está associada a uma estratégia proposta neste trabalho e seus resultados são bastante promissores.

Finalmente, aspectos teóricos são também discutidos. Assim, a fusão das metodologias transitória e de longo termo em uma única ferramenta é bastante importante. Estudos para sensibilidade das variáveis dinâmicas e para determinação dos autovalores críticos ao longo do processo de colapso de tensão foram também desenvolvidos.

Abstract

This thesis discusses the problem of stability in power systems. Some aspects related to power systems dynamics are briefly described, including appendices associated with electric machines theory and numerical methods.

The bifurcation theory is also mentioned, since it plays an important role on the operating critical points identification. The model employed enables one to identify saddle-node and Hopf bifurcations.

A computational program aiming the transient and long term stability is developed. The presented methodology captures the transient trajectory, migrating to long term period when the transient is over.

The methodology developed allows one to take control actions to avoid voltage collapse, such that tap blocking, AVR set points adjustments and load shedding. For each control action, a particular strategy is proposed, and the results obtained are promising.

Finally, theoretical aspects are also discussed. The combination of the transient and long term methodologies into a unified approach is very important. Studies devoted to sensitivity of the dynamic variables and to the critical eigenvalues identification are also addressed.

Sumário

1	Introdução	15
1.1	Dinâmica dos Sistemas Elétricos	15
1.2	Estabilidade dos Sistemas Elétricos	15
1.2.1	Estabilidade Angular	16
1.2.2	Estabilidade de Tensão	16
1.3	Elementos de Influência na Estabilidade de Tensão	17
1.3.1	Geradores	17
1.3.2	Linhas de Transmissão	18
1.3.3	Compensadores de Potência Reativa	18
1.3.4	Cargas	19
1.4	Conceito Básico de Estabilidade de Tensão	23
1.5	Processo de Instabilidade de Longo Prazo	24
1.6	Estabilidade de Tensão – Escolha do Método	25
1.6.1	Análise Dinâmica	25
1.6.2	Análise Quase-Dinâmica	25
1.7	Organização do Trabalho	27
2	Revisão Teórica do Colapso de Tensão	29
2.1	Introdução	29
2.2	Contribuições para o Colapso de Tensão	30
2.3	Característica Não Linear	33
2.4	Bifurcações	33
2.5	Regiões de Estabilidade	34
2.6	Modelos de Sistemas Elétricos de Potência	35
2.7	Bifurcação Sela-Nó e Colapso de Tensão	36
2.8	Um Modelo de Sistema de Potência	37
2.9	Autovalores e Bifurcação Sela-Nó	41
2.10	Condições para uma Bifurcação Sela-Nó	41
2.11	Bifurcação de Hopf e Oscilações	45
2.11.1	Introdução	45
2.11.2	Bifurcação de Hopf Supercrítica	46
2.12	Bifurcação de Hopf Subcrítica	49
2.12.1	Bifurcação de Hopf em mais de uma Dimensão	51
2.12.2	Teoria Linear e Bifurcação de Hopf	51
2.12.3	Condições para a Bifurcação de Hopf	52
2.12.4	Modelos e a Bifurcação de Hopf	52
2.12.5	Aplicações em Sistemas de Potência	53
2.13	Bifurcação Induzida por Singularidade	54
2.13.1	Introdução	54

2.13.2	Modelo Algébrico-Diferencial	54
3	Análise da Instabilidade de Tensão	57
3.1	Bifurcação Sela-Nó	57
3.1.1	Exemplo Geral [7]	57
3.2	Implicação Matemática	57
3.3	Autovalores, Valores Singulares e Vetor Tangente	60
3.3.1	Autovalores	61
3.3.2	Valores Singulares	63
3.3.3	Vetor Tangente	64
4	Escalas Temporais em Sistemas Elétricos	66
4.1	Introdução	66
4.2	Simulação Quase-Dinâmica	68
4.3	Regime Permanente e Transitório	69
4.4	Métodos de Integração Numérica	70
4.4.1	Método de Integração Numérica de Runge-Kutta de 2 ^a Ordem	72
4.4.2	Método de Integração Numérica Trapezoidal	72
4.4.3	Método de Integração Numérica de Runge-Kutta de 4 ^a Ordem	73
4.4.4	Exemplo de Aplicação	74
4.5	Exemplo de Aplicação de Integração Numérica em Sistemas Elétricos de Potência	76
4.5.1	Considerações Iniciais	76
4.5.2	Conversão da Carga	77
4.5.3	Considerações para o Estudo Transitório	79
4.5.4	Redução das Matrizes \dot{Y}_{BUS} às Barras dos Geradores	80
4.5.5	Matrizes Y_{BUS}	81
5	Possíveis Contribuições	87
5.1	Ações de Controle e Estabilidade de Tensão	87
5.2	Estabilidade e Dinâmica de Longo Prazo	88
5.3	Vetor Tangente Como Identificador de Instante de Bloqueio	90
5.4	Ajuste do “set point” do AVR (Automatic Voltage Regulator)	92
5.5	Metodologia para o Corte de Carga por Subtensão	93
5.6	Uma Proposta de Solução por Newton-Raphson	94
5.7	Proposta de Determinação de Autovalores Críticos	97

6	Simulação	101
6.1	Exemplo de Aplicação	101
6.2	Simulação de Curto e Longo Prazos	107
6.2.1	Sistema Modelo	107
6.2.2	Sistema de 9 Barras [48]	115
6.3	Descrição do Sistema CEMIG	119
6.3.1	Simulação	121
6.4	Manutenção da Estabilidade	123
6.5	Autovalores Críticos	130
6.5.1	Sistema de 9 barras [48]	130
7	Conclusões e Perspectivas	136
8	Referências	140
 Apêndices		
A	Sistema de 2 Barras	144
A.1	Equacionamento	144
B	Autovalores de Autovetores	146
B.1	Introdução	146
B.2	Interpretação Física do Problema	147
B.3	Formas Quadráticas	150
C	Resolução Numérica de Equações Diferenciais	155
C.1	Introdução	155
C.2	Método de Euler	158
C.3	Métodos Baseados na Série de Taylor	161
C.4	Métodos Baseados em Regras de Quadratura	164
C.5	Métodos de Runge-Kutta	166
C.6	Método de Passo Múltiplo	171
C.6.1	Métodos Explícitos de Passo Múltiplo	172
C.6.2	Métodos Implícitos de Passo Múltiplo	174
C.7	Método Previsor-Corretor	175
C.8	Método das Diferenças Finitas	177

D	A Máquina Síncrona	183
D.1	Introdução	183
D.2	Considerações Iniciais	183
D.3	Interpretação Física das Correntes I_d , I_q e I_o	191
D.4	Equações de Tensão:	191
D.5	Sistema PU	194
D.6	Modelos Matemáticos de Geradores	198
D.7	Considerações Iniciais	199
D.7.1	Modelo E'_q	199
D.7.2	Modelo Clássico	207
D.7.3	Modelo de Quatro Enrolamentos	208
D.8	Modelos Linearizados	211
D.8.1	Modelo E'_q	211
D.8.2	Modelo de Quatro Enrolamentos	212
D.8.3	Potência Fornecida pelas Máquinas Síncronas	215
E	Sistema de Excitação da Máquina Síncrona	217

Lista de Figuras

1.1	Dinâmica Exponencial da Carga	21
1.2	Sistema Modelo	23
1.3	Curva PV	24
2.1	Curva PV	38
2.2	Curvas PV e $P\delta$	38
2.3	Espaço de Estado e Pontos de Equilíbrio	39
2.4	Espaço de Estado e Bifurcação Sela-Nó	40
2.5	Espaço de Estado Após a Bifurcação Sela-Nó	44
2.6	Característica do Colapso de Tensão	44
2.7	Evolução Temporal	45
2.8	Espaço de Estado	45
2.9	Espaço de Estado - Transitório e Ponto de Equilíbrio	46
2.10	Evolução Temporal - Transitório e Equilíbrio	46
2.11	Espaço de Estado Pós Bifurcação de Hopf Supercrítica	47
2.12	Evolução Temporal Pós Bifurcação de Hopf Supercrítica	47
2.13	Espaço de Estado - Órbita Periódica Estável	48
2.14	Evolução Temporal - Transitório Estável	48
2.15	Espaço de Estado - Órbita Periódica Instável e Ponto de Equilíbrio	49
2.16	Evolução Temporal - Transitório Estável	49

2.17	Espaço de Estado - Órbita Instável e Estado Instável	50
2.18	Evolução Temporal - Transitório Instável	50
2.19	Espaço de Estado Pós Bifurcação de Hopf Subcrítica	50
2.20	Evolução Temporal Pós Bifurcação de Hopf Subcrítica	51
3.1	Curvas $V \times \theta$	58
4.1	Circuito RL	70
4.2	Soluções para o Circuito RL	71
4.3	Método de Integração Numérica ($h = 0.1$)	75
4.4	Método de Integração Numérica ($h = 0.01$)	76
4.5	Sistema para Análise Transitória	77
4.6	Conversão da Carga	78
4.7	Ângulo Delta dos Geradores	85
4.8	Sincronismo dos Geradores	85
5.1	Recuperação da carga pelo LTC	89
5.2	Carga Recuperada pelo LTC	91
5.3	Mudança de Sinal do Vetor Tangente	91
5.4	Regulador Automático de Tensão	92
5.5	Solução do PVI : Processo Dinâmico e Quase-Dinâmico	96
6.1	Sistema de 3 Barras	101
6.2	Perfil de Tensão na Barra 3 - Sistema de 3 Barras	108
6.3	Saída do Bloco Regulador - Sistema de 3 Barras	109
6.4	Tensão de Campo - Sistema de 3 Barras	110
6.5	Variação Angular - Sistema de 3 Barras	111
6.6	Tensão E_q dos Geradores - Sistema de 3 Barras	112
6.7	Corrente I_q dos Geradores - Sistema de 3 Barras	113
6.8	Potência Ativa Suprida - Sistema de 3 Barras	114
6.9	Perfil de Tensões - Sistema 9 Barras	115
6.10	Tensão de Campo dos Geradores - Sistema de 9 Barras	116
6.11	Sincronismo dos Geradores - Sistema 9 Barras	117
6.12	Potência Ativa Suprida - Sistema 9 Barras	118
6.13	Regiões Sistema CEMIG	119
6.14	Sistema Elétrico Região Norte	120
6.15	Perfil de Tensão - Sistema CEMIG	121
6.16	Perfil de Tensão em Algumas Barras de Interesse	122
6.17	Instabilidade de Tensão - Sistema CEMIG	123
6.18	Atuação do LTC - Sistema CEMIG	124
6.19	Sinal do Vetor Tangente	127
6.20	Tensão nas Barras 14 e 29	128
6.21	Recuperação do Nível de Tensão da Barra 31	129
6.22	Autovalor Valor Crítico e Bifurcação Sela-Nó	131
6.23	Autovalor Crítico e Índice	132

6.24	Autovalor Crítico e Índice para a Bifurcação de Hopf	133
6.25	Autovalores Críticos - 9 Barras	134
A.1	Sistema de 2 Barras	144
B.1	Transformação Vetorial	148
B.2	Curva de Nível (K=12)	152
C.1	Família de Curvas	156
C.2	Método de Euler	159
D.1	Tensão Induzida na Bobina	183
D.2	Representação da Máquina Síncrona	184
D.3	Deslocamento do eixo d	185
D.4	Permeância Magnética e Posição Relativa do Rotor	186
D.5	Tensões na Máquina Síncrona	192
D.6	Relação entre Grandezas Reais e Fasoriais	205
D.7	Modelo E'_q	206
D.8	Modelo Clássico de Máquina Síncrona	208
D.9	Disposição dos Enrolamentos	209
D.10	Circuito Elétrico Equivalente	209
E.1	Gerador e Sistema de Excitação	217
E.2	Diagrama de Blocos do Regulador de Tensão	218

Lista de Tabelas

4.1	Valores do Processo Numérico e Valores Exatos	75
4.2	Dados do Fluxo de Carga	77
6.1	Dados do Sistema de 3 Barras	102
6.2	Dados dos Geradores	102
6.3	Dados dos Reguladores de Tensão	102
6.4	Dados do Fluxo de Potência	103
B.1	Vetores e Vetores Gradiente	153

CAPÍTULO I

1 Introdução

1.1 Dinâmica dos Sistemas Elétricos

Um sistema elétrico de potência deve fornecer de forma ininterrupta e confiável energia às cargas (os consumidores). Além de garantir a confiabilidade na continuidade do serviço, o sistema elétrico deve operar em condições adequadas, ou de variações mínimas de tensão e frequência [1]. O desenvolvimento tecnológico dos últimos anos tem levado o sistema elétrico a uma situação onde as variações aceitáveis, tanto de frequência quanto de tensão, são cada vez menores.

Nos sistemas interligados, as variações normais diárias das cargas, os distúrbios de pequeno porte e distúrbios maiores causados por curto-circuitos em linhas de transmissão, saída de geradores e de transformadores de grande porte, afetam de maneira global o sistema elétrico. Obviamente as áreas próximas ao impacto são mais sensíveis que aquelas mais distantes, mas nem por isso são menos susceptíveis a desligamentos devido à atuação do sistema de proteção frente a uma excursão rápida, porém suficiente para que a proteção atue. Essas são situações muitas vezes inesperadas, mas inerentes aos grandes sistemas interligados.

Na tentativa de avaliar o comportamento dos sistemas elétricos de potência frente aos diversos impactos que podem vir a ocorrer, muitos estudos e ferramentas de análises foram desenvolvidos com o intuito de permitir a aplicação imediata em determinados casos, em planejamentos de novos sistemas e expansões futuras.

1.2 Estabilidade dos Sistemas Elétricos

A estabilidade de um sistema elétrico está intimamente ligada à capacidade do sistema em manter-se em um determinado estado de operação e de alcançar um novo estado operativo sob condições de impacto [1], seja uma variação de carga, um curto-circuito em uma linha de transmissão, um desligamento repentino pela má atuação da proteção em elementos do sistema, saída de unidades geradoras, etc. A instabilidade de um sistema elétrico de potência é uma situação singular, onde os elementos do sistema e seus efeitos devem ser considerados. É fácil perceber a complexidade de

um estudo abrangente e definitivo do sistema elétrico. Porém, a separação ou a inclusão de determinadas características, como os impactos de pequeno ou grande porte, a instabilidade envolvida, as influências dos elementos e o tempo de avaliação permitem uma divisão do estudo de estabilidade – ainda que não definitiva. Esta divisão apresenta algumas particularidades, e dentro da natureza e da análise a que se propõe, são satisfatórias [1,2].

1.2.1 Estabilidade Angular

A estabilidade angular permite avaliar o sincronismo das unidades geradoras em determinadas condições operativas do sistema. Aqui, as oscilações eletromecânicas são consideradas juntamente com o comportamento dos geradores frente a estas oscilações. A natureza dos impactos neste tipo de estudo também é relevante, permitindo dividir a estabilidade angular em duas situações distintas. Nestes estudos são avaliados os sincronismos das unidades geradoras do sistema para situações de pequenos impactos, como as variações naturais das cargas. A resposta do sistema frente a esses impactos deve levar em conta as condições operativas pré-impacto e as características dos elementos de influência na manutenção do sincronismo das unidades geradoras. Os impactos são suficientemente pequenos para esse tipo de análise, de maneira que equações linearizadas podem ser utilizadas. Diferentemente, para estudos de estabilidade angular frente a grandes impactos, como curtos-circuitos, perdas de geração, etc., as equações não podem mais ser linearizadas, e as soluções do sistema são obtidas por métodos de resolução de equações diferenciais não-lineares.

1.2.2 Estabilidade de Tensão

A estabilidade de tensão é a capacidade do sistema de manter níveis adequados de tensão em todos os barramentos do sistema elétrico, tanto em condições normais quanto em condições de perturbação [2]. A instabilidade de tensão surge quando uma ocorrência qualquer leva o sistema a um declínio incontrolável da tensão [3]. A indisponibilidade de potência reativa está intimamente ligada à redução progressiva da tensão nos barramentos, iniciando de forma localizada e se espalhando pelo sistema até causar o colapso operativo do sistema elétrico. A instabilidade de tensão pode se manifestar de várias formas, dependendo das características das cargas e dos elementos de controle de tensão. Da mesma forma que o caso da estabilidade angular, para efeito de análise, a estabilidade de tensão pode ser dividida em estabilidade

de tensão para pequenos impactos e estabilidade de tensão para grandes impactos [1,2]. Como na estabilidade angular, se o sistema é avaliado frente a um pequeno impacto, estuda-se a capacidade do sistema elétrico de manter-se estável quanto ao nível de tensão em seus barramentos frente a uma variação normal de carga, por exemplo. Neste tipo de estudo, os impactos são admitidos como suficientemente pequenos, de maneira que as equações podem ser linearizadas em um determinado ponto de operação. Assim como no estudo da estabilidade angular frente a grandes impactos, neste caso, a estabilidade de tensão determina a capacidade do sistema em manter as tensões nos barramentos do sistema elétrico em condições adequadas após um grande impacto [4,5,6], como um curto-circuito em um elemento do sistema elétrico, a perda de unidades geradoras ou de linhas de transmissão, etc. Este tipo de estudo exige uma análise não-linear do sistema elétrico de potência em um período de tempo suficiente para que os elementos mais lentos (resposta mais lenta) do sistema elétrico sejam considerados. A estabilidade aqui é avaliada de forma que os elementos mais lentos são determinantes da condição operativa do sistema. A fase transitória atingiu uma situação de estabilidade capaz de não mais ser necessário avaliar esta fase do sistema elétrico. Assim, os estudos e análises podem ser feitos através de equações linearizadas em torno de um ponto de operação do sistema elétrico. Dentro deste contexto, elementos com constantes de tempo da ordem de vários segundos a muitos minutos são considerados: cargas termostáticas, transformadores com tapes comutados sob carga (LTC's¹), limitadores de corrente de excitação dos geradores (OXL's²), controle e ajustes de geração, etc.

1.3 Elementos de Influência na Estabilidade de Tensão

Dentre os principais elementos diretamente relacionados à manutenção da estabilidade de tensão em um sistema elétrico de potência, destacam-se [3,7,10-15]:

1.3.1 Geradores

Os geradores devem ser capazes de atender à demanda tanto de potência ativa quanto de potência reativa do sistema elétrico. Obviamente, os geradores apresentam limitações que influem nesse equilíbrio. Em determinadas

¹Load Tap Changer

²Overexcitation Limiter

condições operativas, o sistema elétrico exige uma configuração de carregamento onde os limites são violados. Esta é uma situação indesejável, pois o sistema deve se manter em condições operativas estáveis. Com isto, outras unidades geradoras devem ser redirecionadas para suprir a perda e atender à demanda ou o sistema entra num processo de colapso com os geradores sendo retirados progressivamente pelos sistemas de proteção.

A potência reativa de um gerador é limitada pela corrente de campo da máquina e pela ação da corrente de armadura sobre os enrolamentos de campo. Numa situação rápida o gerador pode fornecer potência reativa além de sua limitação, até que a atuação do regulador de tensão traga a potência reativa novamente dentro de seus limites. Em estudos de fluxo de potência os geradores podem ser representados com suas tensões terminais controladas, simulando o efeito de limitação de sua potência reativa pelos reguladores de tensão.

1.3.2 Linhas de Transmissão

A transmissão por corrente e tensão alternadas possibilita uma característica diferenciada da linha de transmissão em relação ao seu ciclo de carga. Em condições de carga pesada a corrente na linha é elevada e as energias ativa e reativa indutiva são diretamente proporcionais ao quadrado da corrente ($RI^2 + \frac{1}{2}LI^2$), enquanto que a energia reativa capacitiva fornecida é diretamente proporcional ao quadrado da tensão ($\frac{1}{2}CV^2$). Esta é uma situação crítica em se tratando de estabilidade de tensão, pois as perdas elétricas e as quedas de tensão podem atingir níveis altos. Situação inversa ocorre durante condições de carga leve, onde o nível de tensão na barra deve ser controlado por indutores “shunt” que absorvem o excesso de potência reativa, controlando o nível de tensão terminal da barra.

1.3.3 Compensadores de Potência Reativa

Apesar de características diferenciadas, os capacitores “shunt” e os compensadores estáticos, que apresentam uma maior flexibilidade, apresentam um suporte local de potência reativa. Os capacitores “shunt” fornecem energia reativa diretamente proporcional ao quadrado da tensão, ou seja, em condições de baixo nível de tensão não apresentam resultados satisfatórios – situação esta que necessitaria de maior nível de fornecimento de potência reativa. Os compensadores estáticos, por sua vez, ao atingirem seus limites de fornecimento de potência reativa tornam-se semelhantes aos capacitores

“shunt”, ou seja, apesar de uma faixa mais ampla de fornecimento de energia reativa que os capacitores “shunt”, também não se apresentam satisfatórios em condições de baixo nível de tensão.

Já os capacitores série permitem encurtar as distâncias elétricas em linhas longas, beneficiando o sistema quando se trata de estabilidade angular, apesar do risco intrínseco com a frequência subsíncrona e da necessidade de proteção especial contra sobretensões decorrentes de curto-circuito no sistema [16]. Uma maior flexibilidade pode ser obtida através do uso de compensação série controlável [17,18]. Atualmente tem sido usado em linhas curtas para melhorar o nível de tensão, já que fornece potência reativa proporcional ao quadrado da corrente, independente do nível de tensão nos terminais. De outra forma, diminuem a impedância final da linha de transmissão, diminuindo a queda de tensão final da linha.

Além desses elementos, há os compensadores síncronos e geradores síncronos com excitação controlada que apresentam uma característica tipo potência constante: dentro dos limites operativos a potência reativa fornecida independe do nível de tensão. Quando da violação dos limites, os compensadores e geradores síncronos passam a apresentar uma característica de fonte de tensão constante, com a potência reativa fornecida fixada nos limites. Isto proporciona uma vantagem de tais elementos no fornecimento de potência reativa e são mais efetivos na melhoria do nível de tensão.

1.3.4 Cargas

As cargas apresentam uma complexidade relativa em sua representação, uma mistura de variação temporal com a presença de muitos dispositivos diferentes acoplados ao sistema. Não é então sensato, e provavelmente nem mesmo possível, modelar todo dispositivo conectado ao sistema. Dependendo do nível de tensão para o qual as cargas estão definidas, elas também podem conter vários níveis de tapes de transformadores atuando, capacitores “shunts” e controle de cargas por corte de carga por subtensão. Cargas pesadas, como na fundição de alumínio ou algum motor de potência elevada, devem ser modelados com maior nível de detalhamento. Mas em geral, devem ser usados modelos agregados de carga, modelos mais genéricos. Como exemplo, as cargas quase sempre foram modeladas como do tipo impedância constante. Entretanto, mais recentemente, elas passaram a ser modeladas como combinações dos tipos impedância constante, corrente constante e potência constante, ou em uma forma exponencial da tensão, $P = P_o V^\alpha$, onde α é um parâmetro que representa a dependência da carga com a tensão. Porém, estes modelos estáticos ignoram o comportamento dinâmico exibido

por muitas cargas. Em estabilidade de tensão, este comportamento dinâmico é de suma importância: quando sujeitas a uma mudança de tensão elas sofrem um transitório inicial. Isto será seguido frequentemente por um período onde a carga se recupera até um valor de regime. Esta recuperação pode ser monotônica ou pode envolver algum comportamento oscilatório. Uma resposta típica da carga é ilustrada na Figura 1.1. Os tipos de carga específicos a seguir prevêm exemplos desta forma de resposta.

Motor de indução: quando a tensão em um motor de indução sofre uma diminuição, a carga do motor de indução cai rapidamente. Isto acontece porque o escorregamento da máquina não pode mudar instantaneamente. Porém, isto cria uma diferença entre as potências elétrica e mecânica que força uma mudança, restabelecendo o escorregamento da máquina. A carga se recupera então depressa.

Carga com LTC : uma carga pode incluir vários níveis de tensão com a ação de transformadores como os LTC's. Estes transformadores agem para restabelecer tensões das barras de carga, e assim conduzem a uma recuperação da tensão das cargas. Então, quando os níveis de tensão caem, as tensões das cargas que são dependentes do LTC têm suas tensões reguladas. Transformadores com LTC's então agem para restabelecer as tensões nas barras de carga e, conseqüentemente, as próprias cargas.

Cargas de aquecimento: um termostato controla a resistência de tais dispositivos, como aquele usado no aquecimento residencial. Quando a tensão cai, a resistência da carga permanece inalterada inicialmente, então as potências das cargas caem. Com o passar do tempo, isto reduz o aquecimento elétrico e a temperatura também cai. Os termostatos individuais compensam a queda de temperatura aumentando a resistência da carga. A carga recuperará seu estado inicial com um equilíbrio entre a energia que é perdida para o ambiente e a potência elétrica entregue ao aquecedor.

Um exemplo de um modelo de carga que captura esta forma geral de comportamento é o modelo de carga de recuperação exponencial. Este modelo pode ser matematicamente representado pela equação.

$$\dot{x} = -\frac{1}{T_P}x_p + P_s - P_t \quad (1.1)$$

onde \dot{x} é um estado interno (tensão, por exemplo), $-\frac{1}{T_P}x_p - P_t$ é a demanda de potência, e T_P é a constante de tempo que descreve a taxa de recuperação da carga. Quando a tensão sofre uma mudança, o estado interno não muda

instantaneamente (há um intervalo de tempo envolvido na resposta do estado interno), então há um transitório inicial, e finalmente atinge-se um valor final de carga descrito pela equação acima. Para um modelo de carga deste tipo, os parâmetros da carga T_p , P_s e P_t devem previamente ser determinados. O modelo de recuperação exponencial foi ilustrado para uma carga real. Uma equação para carga reativa semelhante a esta poderia ser usada. Alternativamente, e mais realisticamente, alguma junção entre as cargas ativa e reativa deveriam ser incorporadas no modelo. Modelos de carga genéricos capturam o comportamento suave da carga. Porém, as não linearidades presentes, como por exemplo os limites por ações de proteção, produzem um comportamento de carga que não é mais suave, i.e., há uma descontinuidade ou há mudanças descontínuas. Tais efeitos são difíceis de se incorporar em modelos genéricos; então, uma estrutura específica deve ser usada. Finalmente as cargas agregadas são freqüentemente representadas pela resposta coletiva de vários modelos de carga.

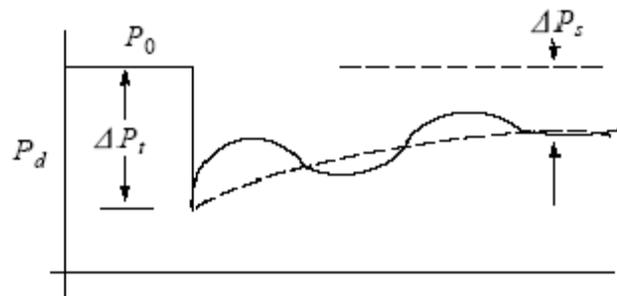


Figura 1.1: Dinâmica Exponencial da Carga

Pelo exposto anteriormente, uma a carga pode ser modelada pela representação matemática da relação entre a tensão em um barramento (amplitude e freqüência) e a potência (ativa e reativa) ou corrente fluindo para a mesma [19]. Existem dois tipos básicos de modelo de carga: o dinâmico e o estático. Os modelos dinâmicos são representados por equações diferenciais e podem reproduzir o comportamento da carga em regime permanente e em transitórios elétricos. Um modelo dinâmico genérico para as cargas de potência constante, aplicável aos estudos de estabilidade de tensão, foi proposto em [20]. Outros trabalhos apresentam diferentes modelos dinâmicos para as cargas de um sistema elétrico [21].

Os modelos estáticos são expressões algébricas que determinam a potência consumida pela carga a partir da barra que a alimenta naquele instante em função da tensão, desprezando a variação da frequência, por ser muito reduzida [22]. Em muitas situações, as cargas são modeladas como do tipo potência constante, como os motores que não variam significativamente sua potência com a tensão; tipo corrente constante e impedância constante. Como exemplo desta última, pode-se citar as cargas de aquecimento e iluminação incandescente.

Na verdade a carga total em um barramento é mais bem representada por uma composição destes três modelos – modelo polinomial ou modelo ZIP (equações 1.2 e 1.3), apresentados com diferentes parcelas de contribuição para cada caso. Obviamente, para determinados estudos pode-se considerar um modelo apenas, conforme a análise exige.

$$P = P_o \left[a_1 \left(\frac{V}{V_o} \right)^2 + a_2 \left(\frac{V}{V_o} \right) + a_3 \right] \quad (1.2)$$

$$Q = Q_o \left[a_4 \left(\frac{V}{V_o} \right)^2 + a_5 \left(\frac{V}{V_o} \right) + a_6 \right] \quad (1.3)$$

No modelo polinomial ou ZIP (Z de impedância constante, I de corrente constante e P de potência constante), P e Q são potências ativas e reativas consumidas quando a tensão é V ; V_o é a tensão inicial e os parâmetros $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ são as parcelas de carga com impedância constante (a_1, a_4), corrente constante (a_2, a_5) e potência constante (a_3, a_6) respectivamente. Lembrando que $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ e $a_4 + a_5 + a_6 = 1$.

A influência das cargas sobre a estabilidade de tensão reside no fato de, em muitos casos, manterem a potência quando a tensão se reduz (modelo potência constante). Isso ocasiona um aumento de corrente e conseqüentemente, perdas ativas e reativas nas linhas e, dessa forma, quedas de tensões que levam o sistema para uma situação crítica de tensão.

É importante também citar determinadas cargas que, em um primeiro momento, apresentam redução de potência com a tensão (modelo impedância constante), porém logo em seguida, devido à presença de tapes comutáveis, tendem a elevar a potência da carga. Esta situação também leva o sistema a um processo de instabilidade de tensão da mesma maneira que uma carga do tipo potência constante. É importante frisar aqui que não é a carga a responsável por levar o sistema elétrico à instabilidade de tensão, como modelo de carga tipo potência constante, mas sim a atuação dos tapes na tentativa de restabelecer o nível de tensão.

Em suma, o comportamento da carga tem grande influência no estudo da estabilidade de tensão, e por isso a modelagem é fundamental na análise a que se destina [22,23]. Pode-se ter resultados absurdos, por conseguinte conclusões errôneas, como consequência do uso de modelos inadequados. Portanto, é necessário avaliar as condições do sistema e a análise a ser desenvolvida sobre tais condições, visando sempre obter respostas satisfatórias dentro de uma faixa em que determinadas influências podem ser desprezadas ou minimizadas sem prejuízo do resultado final a ser alcançado.

1.4 Conceito Básico de Estabilidade de Tensão

O sistema de duas barras (Figura 1.2) é um exemplo simples de como a instabilidade de tensão se processa em um sistema de potência [3,7,10]. Trata-se de um gerador alimentando uma carga com um capacitor “shunt” dando o suporte de potência reativa à barra da carga. A carga varia gradativamente a partir de zero até seu valor máximo, como mostrado na Figura 1.3.¹

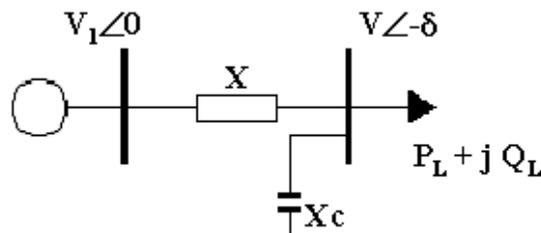


Figura 1.2: Sistema Modelo

Note que a linha de carga ($P_L = K$) intercepta a curva em dois pontos, ou seja, há dois valores de tensão para a mesma potência fornecida à carga. Estes dois pontos são compreensíveis, pois desde que a potência sendo constante, V e I são inversamente proporcionais. O limite para o carregamento do sistema (ou a potência transmitida pela linha) é justamente onde a curva PV apresenta uma única solução – ponto C da curva (Figura 1.3). A parte de baixo da curva, a partir do ponto C, é uma região operativa instável do sistema; os níveis de tensão são extremamente baixos, enquanto as correntes são muito altas nessa região.

O ponto C é extremamente importante na análise de colapso de tensão, pois se trata de um ponto onde a matriz Jacobiana do fluxo de carga é singu-

¹No Apêndice A há o desenvolvimento das equações para esse modelo.

lar [7]. Neste ponto a matriz Jacobiana tem determinante nulo, identificando, portanto por um autovalor nulo [7]. De outra maneira, pode-se dizer que as equações representativas do sistema naquele ponto passam a descrever um novo sistema, e o ponto C coincide com o ponto de colapso de tensão do sistema. Identificar este ponto antecipadamente é uma proposta interessante, pois se pode operar o sistema com relativa segurança. Os capítulos posteriores são dedicados, de alguma forma, a identificar este ponto de colapso.

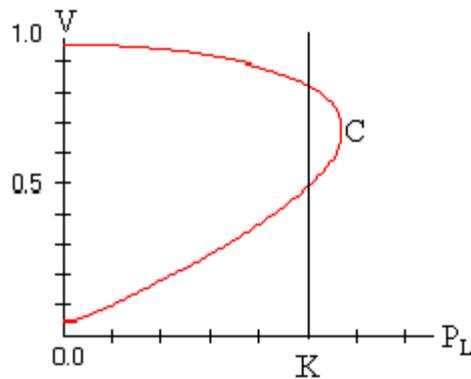


Figura 1.3: Curva PV

1.5 Processo de Instabilidade de Longo Prazo

Um exemplo simples será discutido. Assuma que seguindo um distúrbio ou perturbação qualquer, os tapes dos transformadores sob carga (LTC's) tentam restabelecer as tensões secundárias junto às cargas. Uma consequência possível é que as tensões e a potência consumida sejam reduzidas ainda mais, até que se torna impossível para a geração e a transmissão atender à demanda. Parte desta impossibilidade origina-se das limitações impostas pelos reguladores de tensão das máquinas, limitando a atuação dos LTC's. Por outro lado, a restauração parcial da carga pode ser resultado de uma tendência espontânea da própria carga – cargas termostáticas. As unidades geradoras próximas não podem fornecer potência reativa além de suas capacidades. Geradores afastados não são eficientes para suprir a perda de potência reativa. Bancos de capacitores “shunt” têm sua potência reativa reduzidas com as sucessivas quedas de tensão, o mesmo ocorrendo com as linhas de transmissão que aumentam as perdas de potências ativa e reativa.

O sistema não podendo suportar esta situação totalmente instável entra em colapso.

Quando um sistema elétrico de potência se aproxima ou entra na região de instabilidade de tensão, uma combinação de ações corretivas deve ser implantada para tentar parar o processo de instabilidade ou ganhar tempo para uma ação posterior mais lenta [24]. Em situações como esta, pode-se citar algumas ações, que combinadas, podem ser satisfatórias na reversão da instabilidade: chaveamento de capacitores "shunt", bloqueio dos LTC's e uma ação drástica de corte de carga. Por exemplo, o bloqueio do tape do LTC diminui a degradação do sistema e permite algum tempo para uma ação posterior, como o corte de carga. Aqui não se pretende aprofundar na análise de ações de controle relativo à manutenção da estabilidade do sistema, e sim identificar no processo de instabilidade de tensão elementos que influenciam a estabilidade do sistema, quando atuam ou deixam de atuar. Assim sendo, alguns elementos desempenham papel importante no sistema elétrico para a manutenção e continuidade do fluxo de energia e são particularmente influentes na estabilidade do sistema.

1.6 Estabilidade de Tensão – Escolha do Método

A escolha do método está intimamente ligada à análise a ser efetuada. A seguir alguns tipos de modelos são discutidos.

1.6.1 Análise Dinâmica

Este tipo de análise leva em conta a característica dinâmica [11] de todos os componentes que fazem parte do sistema. Uma representação mais geral do sistema é, então, considerada e o sistema é modelado por um conjunto de equações diferenciais. Este tipo de análise também será estudado aqui, dado que a resposta transitória do sistema é bastante importante nos estudos de colapso de tensão.

1.6.2 Análise Quase-Dinâmica

As simulações no tempo de um grande sistema são extremamente pesadas em termos computacionais, apesar dos computadores atuais darem suporte e rapidez para o volume de informações a serem processadas. Como os componentes do sistema têm constantes de tempos diferenciadas (uns respondem

mais lentamente que outros), pode-se obter os mesmos resultados com considerações adequadas sobre os mecanismos de resposta de cada elemento, fazendo aproximações em relação à análise dinâmica [24,25]. Com isto as simulações ganham em tempo e em volume computacional, sem prejuízo dos resultados apresentados.

Neste caso é comum supor que as dinâmicas rápidas do sistema (constante de tempo rápidas) sejam aproximadas por pontos de equilíbrios [24,25]. Com essa metodologia os resultados oferecidos são satisfatórios em relação ao modelo dinâmico global do sistema, em se tratando de tempos superiores aos tempos dos transitórios envolvidos. A vantagem desta abordagem está no fato de as equações serem puramente algébricas e, portanto, solucionadas através de um método iterativo qualquer, como o método de Newton-Raphson. Assim, obtém-se uma sucessão de pontos de equilíbrio em função do tempo dos elementos discretos do sistema. Na verdade, estes pontos são instantâneos do sistema, em que os elementos de dinâmica mais lenta (tempo discreto) determinam as novas condições das variáveis de estado em cada instante de atuação. Em resumo, tem-se um modelo quase-dinâmico do sistema de potência, ou um modelo “quase-estático”, onde o intervalo de tempo entre um estado e outro é determinado pelos elementos de respostas mais lentas (tempo discreto) do sistema elétrico.

No fluxo de carga convencional, as equações de potências são linearizadas, já que se têm instantâneos do sistema de potência, e a preocupação é a convergência ou não do sistema de equações em torno desse ponto. Da mesma maneira, todas as equações agregadas na análise quase-dinâmica também são linearizadas, pois também se têm as mesmas características de análise em torno do instante de tempo em questão.

Observa-se a partir do que foi exposto, que as equações do fluxo de carga convencional são mantidas, e apenas agrega-se a elas as equações de interesse do modelo dinâmico. Como, a partir das considerações levantadas o sistema passa a ser resolvido por um método iterativo, a matriz Jacobiana em relação ao fluxo de carga convencional também é aumentada. Aplicando-se algumas ferramentas muito comuns em análises de fluxo de carga a essa nova abordagem, tem-se uma nova visão do fenômeno da instabilidade de tensão e novos resultados podem surgir, já que elementos fundamentais na estabilidade de tensão são levados em conta nessa modelagem quase-dinâmica. Isto é extremamente considerável, pois a estabilidade de tensão é um fenômeno dinâmico do sistema e a aproximação do fluxo de carga convencional pode omitir ou deixar de produzir informações adicionais para o entendimento da instabilidade de tensão.

1.7 Organização do Trabalho

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia capaz de analisar o processo de instabilidade de tensão em condições transitórias e de regime permanente. Para isso, utiliza-se um processo rápido de simulação que consiste na aproximação da trajetória do sistema elétrico de potência por sucessivos pontos de equilíbrios transitórios – método de simulação quase-dinâmica. A metodologia prevê a permuta entre este método e um método de simulação numérica iterativo com o mínimo custo computacional, preservando a estrutura do modelo de simulação rápida.

Uma vez que a evolução temporal do sistema elétrico seguindo uma perturbação ou distúrbio é vista como resposta das dinâmicas transitórias para as mudanças nos elementos discretos do sistema, o programa seleciona o método a ser executado: dinâmico ou quase-dinâmico. A seleção pode ser interna, caso em que o programa ajusta o intercâmbio entre os dois processos, ou selecionado a priori como opção de simulação. O programa desenvolvido contempla também algumas metodologias de análise de sistemas dinâmicos já fundamentadas na literatura, e outras propostas que serão apresentadas nos capítulos posteriores, com resultados extremamente interessantes. Contempla também um fluxo de carga convencional, que de qualquer forma seria necessário para a obtenção das condições iniciais dos processos dinâmicos, mas independente da estrutura principal do conjunto do programa.

O capítulo I apresentou uma introdução ao conceito básico de estabilidade de tensão e aspectos relevantes no estudo e na análise da estabilidade de tensão em sistemas elétricos de potência. O capítulo II apresenta uma revisão do fenômeno colapso de tensão aplicada a um sistema elétrico de potência, as condições de análise para o estudo da estabilidade de tensão, bem como a fundamentação matemática para a proposta de índices de avaliação da estabilidade de tensão nesses sistemas. O capítulo III apresenta a implicação matemática e análise de pequeno sinal no estudo da estabilidade de tensão. No capítulo IV é apresentado o conjunto de equações que compõem o sistema elétrico de potência dentro de uma escala temporal de interesse e algumas metodologias de resolução numérica de equações algébrico-diferenciais, a resolução por um processo iterativo que preserva a estrutura da matriz já formada no processo quase-dinâmico e exemplos de aplicações. O Capítulo V apresenta as possíveis contribuições deste trabalho. O Capítulo VI é dedicado aos resultados de simulações em sistemas elétricos de potência obtida com o pacote computacional desenvolvido, uma proposta de manutenção da estabilidade do sistema a partir do bloqueio de elemento discreto, algumas ações de controle e uma proposta de corte de carga dentro de uma hierarquia

aplicada a um sistema modelo de 57 barras. E a proposta de um índice limitador para o autovalor crítico. Finalizando, o Capítulo VII fecha o trabalho com algumas conclusões a respeito da tese.

CAPÍTULO II

2 Revisão Teórica do Colapso de Tensão

2.1 Introdução

Este capítulo apresenta algumas características básicas relacionadas ao colapso de tensão. Há na literatura um vasto material sobre o assunto [26-30]. O estudo de colapso de tensão está intimamente relacionado ao modelo dinâmico não linear do sistema elétrico de potência. Portanto, antes de iniciar propriamente o assunto, faz-se necessário uma apresentação das características temporais de atuação dos elementos que compõem o sistema elétrico de potência.

(i) transitórios eletromecânicos (por exemplo geradores, reguladores de tensão, máquinas de indução) e a eletrônica de potência presente em alguns sistemas (por exemplo SVC³, HVDC⁴) que atuam na faixa de tempo de alguns segundos, chamada de escala de tempo transitória.

(ii) dispositivos de atuação discreta, como transformadores com taps comutados sob carga, LTC's, e limitadores de excitação que agem em intervalos de dezenas de segundos.

(iii) recuperação da carga que se processa em até vários minutos.

Estas duas últimas faixas temporais se enquadram na escala de tempo de longo-termo ou longo-prazo. Já os transitórios eletromagnéticos em linhas de transmissão e transitórios rápidos de frequência, como as componentes contínuas das correntes de curto-circuito, ocorrem muito rapidamente para serem consideradas num estudo de colapso de tensão. Assim, é assumido que tais ocorrências (transitórios eletromagnéticos) não influem significativamente na abordagem e no tratamento do conjunto de equações a serem consideradas para o colapso de tensão.

O declínio da tensão pode ser classificado como acontecendo numa escala de longo-prazo, com a tensão finalmente se afundando num transitório rápido. O colapso de tensão acontece tipicamente em sistemas de potência que estão fortemente carregados e sujeito a faltas e baixa reserva de potência reativa. O colapso de tensão é um processo de instabilidade do sistema que envolve

³Static Voltage Compensator

⁴High Voltage Direct Current

muitos componentes do sistema, e muito freqüentemente envolve o sistema de potência inteiro, embora normalmente tenha um envolvimento relativamente maior em uma área particular.

Embora muitas outras variáveis estejam envolvidas, a natureza física do colapso de tensão pode ser analisada examinando a produção, a transmissão e o consumo de potência reativa do sistema. O colapso de tensão está associado com a demanda de potência reativa pelas cargas, que não é conhecida devido às limitações na produção e transmissão de potência reativa pelo sistema elétrico. Limitações na produção de potência reativa incluem o gerador e a reserva reativa para as ações de controle e a baixa potência reativa fornecida pelos compensadores em baixo nível de tensão. As limitações iniciais na transmissão de potência reativa se devem às altas perdas em linhas fortemente carregadas e às saídas de linhas de transmissão, aos aumentos de carga do sistema e às próprias mudanças na composição da carga ao longo de um período de tempo.

2.2 Contribuições para o Colapso de Tensão

Há várias mudanças conhecidas no sistema que contribuem para o colapso de tensão. Pode-se enumerar algumas:

- (i) o aumento do carregamento do sistema;
- (ii) geradores ou ações de controle que levam à limitação de potência reativa;
- (iii) ação de transformadores com taps comutados sob carga, LTC's;
- (iv) a recuperação dinâmica da carga;
- (v) faltas em linhas de transmissão e saída de geradores.

A maioria destas mudanças tem um grande efeito na produção ou transmissão de potência reativa. Ações de controle, como chaveamento de banco de capacitores, bloqueio de LTC's, redespacho de geração, realocação de geradores para atender à tensão de uma determinada barra, como no controle secundário de tensão, e o corte de carga aumentam a reserva de potência reativa do sistema e são contra-medidas para se evitar a instabilidade de tensão e o colapso de tensão.

Analisar o colapso de tensão requer alguma noção de estabilidade de sistemas dinâmicos. Há uma centena de definições diferentes de estabilidade, e várias destas podem ser apresentadas. Uma das definições mais úteis é a estabilidade de pequeno sinal: um ponto de operação do sistema de potência sujeito a uma pequena perturbação é estável se o sistema retorna ou

se aproxima da condição operativa pré-distúrbio. Esta definição descreve o comportamento dinâmico do sistema de potência quando uma pequena perturbação acontece. Um sistema de potência deve ser estável neste sentido para ser sustentável na prática.

Suponha que um sistema de potência esteja em um ponto de operação estável. É comum ocorrer uma das alterações já apresentadas e, então, o sistema de potência passa por um transitório e se estabiliza em um novo ponto operativo. Se a mudança é gradual, como no caso de um aumento lento do carregamento do sistema, o sistema de potência pode caminhar lentamente com a mudança até atingir esse novo ponto operativo. Isto é o que se espera e se deseja na operação do sistema elétrico de potência. Porém, excepcionalmente, o sistema de potência pode perder a estabilidade quando uma mudança qualquer acontece. Uma maneira comum disto acontecer, na qual a estabilidade é perdida num colapso de tensão, é o desaparecimento do ponto operativo seguindo uma variação qualquer. Uma situação estável do sistema não implica numa situação transitória estável. Quando um transitório ocorre, uma queda brusca da tensão é identificada como um colapso de tensão, com um declínio inicialmente lento da tensão; com outras possíveis mudanças no sistema, seguido por um declínio ainda mais rápido no nível de tensão. Ações de controle na tentativa de restabelecer o ponto de equilíbrio estável são possíveis em alguns casos.

O colapso de tensão também pode ser causado por uma série de alterações no sistema, como por exemplo, quando um conjunto de motores de grande porte são retirados pela proteção num efeito cascata ou quando um conjunto de geradores atingem sucessivamente os seus limites de geração de potência reativa. Saídas em cascata têm um efeito significativo no colapso de tensão, porém poucas técnicas matemáticas abordam este efeito. Um tratamento possível neste caso é o uso de simulações computacionais que permitem reproduzir tal efeito individualmente no tempo. Há também métodos da continuação que permitem calcular os eventos discretos da cascata de forma a produzir informações a respeito da margem de segurança para um sistema operar. Porém, tais métodos não apresentam uma cronologia de eventos como a sucessão de limites de potência reativa dos geradores sendo atingidos.

Embora o colapso de tensão seja definido corretamente como um declínio dinâmico do nível da tensão, tal fenômeno envolve todas as outras variáveis do sistema de potência. Em particular, os ângulos das máquinas são tipicamente envolvidos no colapso. Assim, não há uma distinção clara entre colapso de tensão e estabilidade angular ou estabilidade clássica, e a maioria dos colapsos práticos contém alguma proporção de instabilidade de tensão e instabilidade angular.

As diferenças entre colapso de tensão e instabilidade angular são meras especulações: o colapso de tensão foca as cargas e as magnitudes de tensão, enquanto a estabilidade clássica foca os geradores e ângulos. Também o colapso de tensão inclui freqüentemente uma dinâmica mais lenta e inclui os efeitos de mudanças contínuas como aumentos de carga, além de eventos discretos como saídas de linha de transmissão, atuação de tapas de transformadores e limitadores de corrente de excitação.

Um problema importante relacionado ao colapso de tensão é o de manter níveis de tensão aceitáveis nas barras do sistema. Tais níveis obedecem um valor tolerável sobre o valor nominal [31]. Na transmissão, os desvios de tensão aceitáveis são tipicamente de até 5% dos valores nominais. É necessário manter essa faixa aceitável da tensão como condições normais operativas do sistema. Uma vez que a característica indutiva das linhas de transmissão inviabiliza a transferência de grandes quantidades de potência reativa, principalmente em linhas longas, um suprimento de potência reativa local deve ser viabilizado para atender a demanda das cargas. Além disso os geradores são limitados no fornecimento de potência reativa para o sistema e isto pode ter uma forte influência no nível de tensão, como também no problema de colapso de tensão.

Alguns dispositivos para manter o nível de tensão adequado incluem bancos de capacitores chaveados, bem com os compensadores estáticos, os LTC's e os próprios geradores. Um problema de baixo nível de tensão ocorre quando algumas tensões do sistema estão abaixo dos limites aceitáveis, mas o sistema de potência se encontra num ponto operativo estável. Desde que há um ponto de operação estável e não há nenhum problema de instabilidade, a situação de baixo nível de tensão pode ser considerada distinta do problema de colapso de tensão. Um nível de tensão alto geralmente proporciona uma melhor margem de potência reativa para o colapso de tensão. Em particular, capacitores "shunts" se tornam mais efetivos no fornecimento de potência reativa em níveis de tensão mais altos. Porém, níveis baixos de tensão são fracos indicadores de uma margem segura para o colapso de tensão. A ação de um LTC pode diminuir ainda mais a margem de potência reativa, uma vez que há um aumento na demanda pela ação do transformador. Há algumas relações entre o problema de se manter o nível de tensão e o colapso de tensão, mas eles são considerados como problemas distintos, já que a análise é diferente e há apenas uma sobreposição de ações de controle para resolver o mesmo problema.

As seções a seguir apresentam uma abordagem do fenômeno colapso de tensão e as características básicas envolvidas em sua ocorrência. Há publicações [26-30] que tratam exaustivamente do assunto, e neste trabalho há uma seleção de interesse aplicada aos sistemas elétricos de potência e a seus

elementos constituintes.

2.3 Característica Não Linear

O colapso de tensão é um fenômeno caracteristicamente não linear, e é usual abordá-lo a partir de métodos não lineares, como a teoria da bifurcação. O objetivo da abordagem teórica apresentada aqui é esclarecer algumas dúvidas relacionadas ao fenômeno e aplicá-las no próprio entendimento do que venha ser o colapso de tensão e meios de como evitá-lo.

O embasamento teórico permitirá explicar e classificar o fenômeno, ou seja, implicará num aprendizado dos conceitos envolvidos em eventos como este e no tratamento matemático diante de tal acontecimento. Embora as soluções para os problemas enfrentados no sistema elétrico de potência tenha muitas das vezes características não lineares, os conceitos abordados quase sempre são desconhecidos ou superficialmente aprendidos, sem um razoável embasamento teórico que permitiria ao engenheiro um envolvimento maior no assunto. A teoria da bifurcação e as demais teorias não lineares não necessariamente são um conjunto de informações difíceis de serem entendidas e aplicadas. No restante deste capítulo e nas seções seguintes há uma razoável simplicidade na apresentação e aplicação das idéias por trás das teorias não lineares, sem um aprofundamento matemático desnecessário para apresentar e provar os resultados precisamente. Para um entendimento mais profundo de sistemas dinâmicos não lineares e teoria da bifurcação, há bons textos em [32-34].

2.4 Bifurcações

A teoria da bifurcação admite que parâmetros de um sistema dinâmico variem e prediz tipicamente como o sistema se torna instável. O principal objetivo é estudar o sistema no limite de instabilidade. Desconsiderando o tamanho ou a complexidade do modelo do sistema, há somente alguns modos em que um sistema de potência pode se tornar instável e a teoria da bifurcação descreve estes modos e conclusões associadas.

- (i) as bifurcações admitem parâmetros variando e descrevem mudanças qualitativas como a perda da estabilidade do sistema;
- (ii) numa bifurcação sela-nó, o ponto de operação estável (equilíbrio estável) desaparece e a consequência é o colapso dinâmico dos estados do sis-

tema. Isto explica a queda monotônica da magnitude da tensão no colapso de tensão.

(*iii*) numa bifurcação de Hopf, o equilíbrio estável se torna oscilatório instável e a consequência pode ser um regime permanentemente oscilatório ou um transitório oscilatório crescente.

O colapso de tensão freqüentemente tem um período inicialmente lento de declínio da tensão. Uma idéia interessante é dividir a dinâmica do sistema em dinâmica rápida e dinâmica lenta. Assim o declínio lento pode ser estudado admitindo a dinâmica rápida como praticamente instantânea e, posteriormente, propriamente no colapso de tensão, a dinâmica rápida perde a estabilidade num ponto de bifurcação e, então, ocorre o declínio rápido da tensão. Esta teoria sugere algumas ações de controle, que se tomadas rapidamente, asseguram a estabilidade do sistema durante o declínio inicialmente lento da tensão.

2.5 Regiões de Estabilidade

Uma maneira de se analisar o fenômeno do colapso de tensão é examinar a interação entre a atuação de um transformador com tapes comutados sob carga (LTC), o carregamento do sistema e os limites de potência reativa dos geradores [35,36]. Se a freqüência do sistema é considerada imutável, de maneira que as equações de balanço (freqüência e ângulo) dos geradores não são envolvidas na dinâmica do sistema, então os eventos podem ser analisados satisfatoriamente em termos das regiões de estabilidade. Uma região de estabilidade é a região próxima ou em torno de um ponto de equilíbrio estável (um ponto operativo do sistema), para onde o sistema sempre retornará para pequenas mudanças no estado do sistema ao redor deste ponto. Uma região suficientemente grande em torno deste ponto estável de operação é sempre desejável e o sistema torna-se instável se essa região desaparece. À medida que o carregamento do sistema aumenta e os limites de potência reativa das máquinas são atingidos, o LTC atua e a região de estabilidade diminui ou mesmo desaparece, levando o sistema ao colapso de tensão. Esta abordagem permite observar como a dinâmica do LTC, juntamente com o carregamento do sistema e a limitação de potência reativa dos geradores causam o colapso de tensão, e mostra como o bloqueio efetivo do LTC pode prevenir o fenômeno de ocorrer.

2.6 Modelos de Sistemas Elétricos de Potência

Na análise da bifurcação em sistemas elétricos de potência, faz-se necessário um modelo de sistema elétrico de potência que contenha dois tipos de variáveis: as variáveis de estado e as variáveis paramétricas. As variáveis de estado variam dinamicamente durante um evento transitório. Exemplos de tais variáveis são os ângulos internos das máquinas síncronas, as magnitudes de tensão e ângulo das barras. Há uma conveniência entre a escolha de um modelo para o sistema elétrico de potência e as variáveis de estado relacionadas, ou seja, modelos diferentes pressupõem variáveis de estado específicas. Um exemplo de parâmetro é a demanda lenta de carga das barras do sistema. Porém, é conveniente considerar os controles externos como parâmetros do sistema, de forma que o efeito de suas ações lentas possam ser estudadas. A escolha de quais variáveis são parâmetros e quais são variáveis de estado é uma parte importante da modelagem do sistema e deve claramente ser apresentada no modelo proposto.

A consideração da variação lenta do parâmetro é o que comumente se chama de suposição quase estática. Os parâmetros variam quase estaticamente para análise da teoria da bifurcação. Na aproximação quase estática considera-se que os parâmetros são variáveis de entrada do sistema cuja dinâmica é, então, negligenciada. Assim, embora os parâmetros possam variar e passar por um determinado valor, as variáveis de estado do sistema são determinadas admitindo que o parâmetro é fixo naquele valor. A metodologia quase estática se mantém quando a variação paramétrica é lenta o suficiente quando comparada com a dinâmica do resto do sistema, por isso os parâmetros podem ser considerados como constantes na escala temporal do restante do sistema. A análise da bifurcação torna-se útil com a suposição quase estática do parâmetro, uma vez que se pode estudar uma ampla faixa de parâmetros com a dinâmica negligenciada.

Tanto as variáveis de estado como as variáveis paramétricas têm características vetoriais, ou seja, o vetor das variáveis de estado é geometricamente imaginado como um ponto no espaço das variáveis de estado e o vetor paramétrico como um vetor no espaço das variáveis paramétricas. Se há n variáveis de estado e m parâmetros, tem-se um espaço de estado n -dimensional e um espaço paramétrico m -dimensional. Os espaços de estado ou paramétrico em 1, 2 ou 3 dimensões são extremamente úteis na visualização da análise da bifurcação em sistemas dinâmicos não lineares. Porém, cabe ressaltar que para um sistema elétrico de potência, tais modelos envolvem muitos estados e parâmetros. O objetivo na análise da bifurcação é mostrar como tratar com os problemas dos sistemas elétricos de potência que

envolvem muitas variáveis e parâmetros de uma só vez.

Nos estudos de sistemas elétricos de potência, as equações representadas são criticamente dependentes do fenômeno da bifurcação. Nas análises das bifurcações utilizam-se os modelos de sistemas elétricos de potência a partir de um conjunto de equações diferenciais, algébrico-diferenciais e estáticas (ou puramente algébricas). Em princípio, pode-se modelar o sistema como um conjunto de equações puramente diferenciais. Porém, se algumas ações dinâmicas agem rapidamente para restabelecer as relações algébricas entre as variáveis de estado do sistema, então uma boa aproximação seria usar as relações algébricas junto com as equações diferenciais do sistema num modelo algébrico-diferencial. Tais modelos serão discutidos e apresentados em capítulos e seções posteriores. Em alguns casos, na análise da bifurcação não é necessário um conjunto completo de equações diferenciais e, portanto, apenas um conjunto estático ou algébrico de equações é suficiente para o estudo.

Até aqui considerou-se um conjunto de equações para o sistema fixo na forma e com equações bem comportadas, sem descontinuidades, com um conjunto também fixo no tempo, exceto os parâmetros que variam quase estaticamente. Tais restrições são normalmente necessárias para a análise convencional da teoria da bifurcação. Entretanto, como quase sempre a estabilidade dos sistemas elétricos de potência é influenciada por eventos discretos como a retirada de um linha de transmissão pela proteção, equipamentos discretos de controle e a ação de limitadores das máquinas síncronas, tem-se um novo conjunto de equações quando tais eventos ocorrem, introduzindo também uma certa dependência temporal em alguns casos. Por exemplo, a equação de um gerador se altera no instante que o seu limite de potência reativa é atingido. De maneira geral tais eventos não são facilmente explicáveis em um análise convencional da teoria da bifurcação. Entretanto, pode-se ainda avaliar dentro da mesma teoria, a perda de estabilidade do sistema quando tais limites são atingidos.

2.7 Bifurcação Sela-Nó e Colapso de Tensão

Uma bifurcação sela-nó ocorre quando um ponto de equilíbrio desaparece à medida que um parâmetro varia. Em sistemas elétricos de potência, uma bifurcação sela-nó ocorre quando um ponto de equilíbrio estável desaparece. A consequência da perda deste ponto de equilíbrio é a mudança dinâmica no estado do sistema. Particularmente, o efeito dinâmico pode ser tal que ocorre uma queda de tensão finalizando num colapso de tensão. Desde que

uma bifurcação sela-nó pode modelar um colapso de tensão desta maneira, é interessante estudar tal bifurcação para modelos de sistemas elétricos de potência a fim de entender e evitar estes possíveis colapsos de tensão.

A bifurcação sela-nó é um fenômeno tipicamente não linear e não pode ocorrer em um sistema linear. Entretanto o fenômeno é facilmente apresentado a partir de um modelo não linear de uma equação quadrática simples. Suponha que uma equação quadrática tenha duas raízes reais (soluções de equilíbrio) e um coeficiente (parâmetro) que se altera lentamente, equação (2.1). À medida que o parâmetro se altera, as duas soluções reais se movem e, possivelmente, as raízes reais se juntam e finalmente desaparecem. Seja, por exemplo, a equação a seguir:

$$-x^2 - p = 0 \quad (2.1)$$

Na equação (2.1), x representa a variável de estado e p o parâmetro do sistema. Quando p é negativo, existem duas soluções de equilíbrio para o sistema $x_0 = \sqrt{-p}$ e $x_1 = -\sqrt{-p}$. Se p aumenta se aproximando de zero, ambos os pontos de equilíbrio se tornam um só, $x = 0$. E se p aumenta ainda mais e passa a ser positivo, nenhum ponto de equilíbrio ocorre, não havendo solução para a equação. A bifurcação ocorre em $p = 0$ junto ao ponto crítico que separa os casos de dupla solução e nenhuma solução. Este caso reflete uma bifurcação do tipo sela-nó, que será melhor estudado adiante.

2.8 Um Modelo de Sistema de Potência

Considere uma máquina síncrona alimentando uma carga com fator de potência constante através de uma linha de transmissão, modelo pi. Seja a potência ativa da carga p , parâmetro que descreverá o carregamento do sistema, variando lentamente. O vetor de estado $x = (V, \delta)$ representa a tensão e o ângulo da barra de carga. A variação da magnitude da tensão V com o carregamento p é apresentado na Figura 2.1. Para um baixo carregamento há dois pontos de equilíbrio: um associado a um nível de tensão alto e outro associado a um nível de tensão baixo. A solução com nível de tensão alto exige da linha de transmissão uma corrente baixa para suprir a carga e a solução de baixa tensão, uma corrente alta. À medida que o carregamento aumenta lentamente, estas soluções se aproximam uma da outra e finalmente se juntam no ponto crítico p^* . Se a carga do sistema é aumentada além de p^* , nenhum ponto de equilíbrio é encontrado. As soluções desaparecem numa bifurcação sela-nó em p^* . A Figura 2.2 mostra as variáveis de estado em função

do parâmetro carregamento. Este é um diagrama de bifurcação, e a bifurcação ocorre no nariz da curva. O sistema de potência só pode operar nos pontos de equilíbrio estáveis, de forma que a dinâmica do sistema atua de maneira a restaurar esse estado de equilíbrio quando o sistema é afastado dessa situação, ou seja, quando o sistema é perturbado. Na prática, o nível alto de tensão é o ponto de equilíbrio estável e o nível baixo de tensão o equilíbrio instável. A estabilidade da alta tensão garante que à medida que o carregamento é lentamente aumentado a partir de 0, o estado do sistema percorrerá os pontos de equilíbrios estáveis até que a bifurcação ocorra.

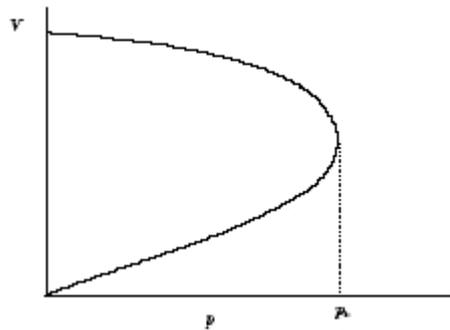


Figura 2.1: Curva PV

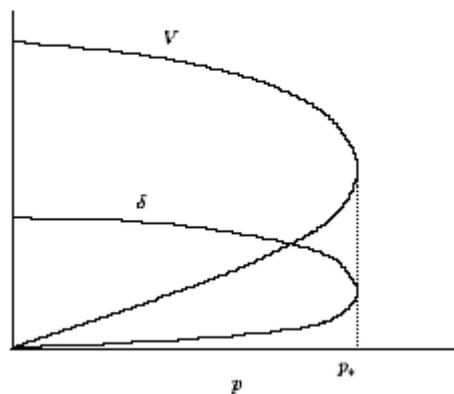


Figura 2.2: Curvas PV e $P\delta$

Como o sistema tem duas variáveis de estado V e δ , a Figura 2.2 apresenta as soluções de equilíbrio para estas variáveis em função do aumento do parâmetro p . Note que a solução de menor nível para δ corresponde à solução estável, enquanto que a solução de maior nível para δ corresponde à solução instável. Os narizes das duas curvas apresentam o mesmo evento, os pontos de equilíbrio estável e instável se juntando para o mesmo carregamento crítico p^* . Note também que, evidentemente, os pontos de máximo carregamento são iguais para ambas as curvas.

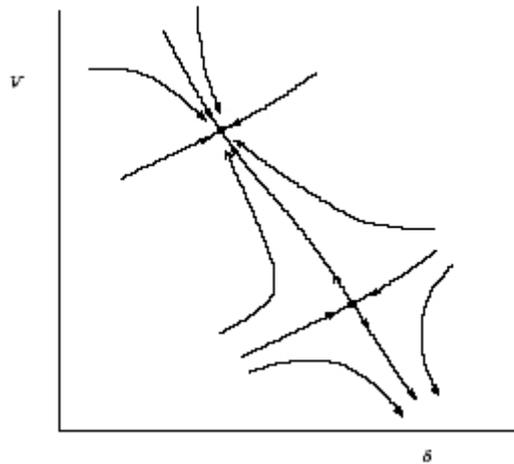


Figura 2.3: Espaço de Estado e Pontos de Equilíbrio

A Figura 2.3 permite visualizar o espaço de estado para carregamentos moderados, onde as setas indicam a dinâmica do sistema. Por exemplo, se há uma pequena perturbação em qualquer direção as setas mostram que o estado do sistema voltará para o ponto de equilíbrio - ponto de nó. Por outro lado, qualquer perturbação a partir do ponto de equilíbrio instável acarretará um afastamento deste ponto de equilíbrio - ponto de sela. A Figura 2.4 mostra os pontos de equilíbrio se juntando em um único ponto para o carregamento crítico p^* na bifurcação. As setas mostram que este ponto de equilíbrio é instável, ou seja, algumas setas se afastam deste ponto para pequenas perturbações, levando inevitavelmente o sistema à instabilidade. Essa dinâmica instável tende a mover as variáveis de estado ao longo da linha mais grossa. O movimento ao longo desta linha na Figura 2.4 implica que a magnitude da tensão V declina monotonicamente e o ângulo δ aumenta. Este movimento dinâmico é uma explicação para a queda monotônica das tensões no colapso de tensão [18]. A literatura descreve com detalhes que o ponto de sela-nó apresenta características bastante peculiares. Estas características

são inteiramente determinadas pelas condições de transversalidade. Para o caso unidimensional, tais condições são: $\frac{\partial f}{\partial \lambda} \Big|_{x=x_0} \neq 0$, que garante que f cruza o plano (x, λ) em (x_0, λ_0) sem tangenciá-lo; e $\frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x=x_0} \neq 0$, que garante que essa curva tangente seja quadrática em relação à $\lambda = \lambda_0$.

Assim, antes da bifurcação o estado do sistema percorre os equilíbrios estáveis à medida que carregamento do sistema varia lentamente. Portanto, as equações estáticas do sistema podem ser usadas para acompanhar esses pontos de operação, admitindo que a solução das equações estáticas são esses pontos de equilíbrio. Na bifurcação o equilíbrio se torna instável, exigindo um modelo dinâmico do sistema para acompanhar o colapso de tensão.

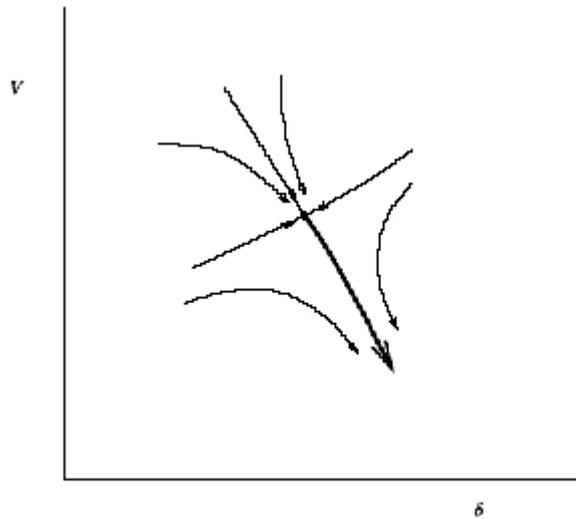


Figura 2.4: Espaço de Estado e Bifurcação Sela-Nó

Em algumas situações o sistema de potência pode ter um carregamento maior que o carregamento crítico p^* . Neste caso, nenhum ponto operativo ocorre e o nível de tensão dinamicamente entraria em colapso. A consideração de variação lenta do parâmetro p significa que o parâmetro varia mais lentamente que as variáveis dinâmicas do sistema. Por exemplo, antes da bifurcação quando o sistema caminha ao longo dos pontos de equilíbrio estáveis, a dinâmica do sistema age mais rapidamente para restabelecer o equilíbrio operativo do que o parâmetro em mudar o ponto de operação.

2.9 Autovalores e Bifurcação Sela-Nó

Considere a matriz Jacobiana formada a partir do conjunto de equações do sistema em torno de um ponto de equilíbrio. Naturalmente a matriz Jacobiana de um fluxo de potência convencional difere da matriz Jacobiana de um modelo dinâmico do sistema. Porém, para análise de colapso de tensão é suficiente a matriz Jacobiana das equações do fluxo de potência, como será mostrado posteriormente. Se a matriz Jacobiana é assintoticamente estável (caso habitual), todos os autovalores terão parte real positiva. À medida que o sistema é carregado lentamente, para um determinado valor crítico, os autovalores da matriz Jacobiana aproximam-se de zero pela esquerda. Quando um destes autovalores se torna nulo a bifurcação ocorre. A principal característica da matriz Jacobiana é que ela determina em torno de um ponto de equilíbrio a estabilidade do sistema. Para que isso faça sentido, tal ponto de equilíbrio deve existir. Se o carregamento é aumentado passando pelo carregamento crítico, então não há nenhum ponto de equilíbrio, e o uso da matriz Jacobiana não faz mais nenhum sentido.

2.10 Condições para uma Bifurcação Sela-Nó

Há várias indicações úteis de uma bifurcação sela-nó. Todas as situações a seguir são condições para uma bifurcação sela-nó e podem ser usadas para identificar ou caracterizar uma bifurcação sela-nó:

- (i) Dois pontos de equilíbrio se juntam em um só. Um destes equilíbrios deve ser instável.
- (ii) A sensibilidade de uma variável de estado com relação ao parâmetro carregamento tende ao infinito. Isto é facilmente observado pela inclinação rápida nas proximidades da curva nariz.
- (iii) A matriz Jacobiana do sistema tem um autovalor nulo.
- (iv) A matriz Jacobiana tem um valor singular nulo.
- (v) A dinâmica do colapso na bifurcação é tal que o estado do sistema muda monotonicamente e há inicialmente um declínio lento da tensão, finalizando com um declínio rápido.

O entendimento da bifurcação sela-nó exige um modelo dinâmico para explicar por que as tensões caem dinamicamente. Porém, alguns resultados relativos a bifurcações sela-nó exigem apenas um modelo estático. Se um modelo dinâmico é necessário, o sistema de potência é então modelado por

um conjunto de equações diferenciais com um parâmetro variável. Equações algébrico-diferenciais são uma substituição válida para as equações diferenciais se se admite que as equações algébricas são restrições à dinâmica do sistema, porém estáveis. Se um modelo estático é usado, o equilíbrio do sistema de potência é modelado por um conjunto de equações algébricas com um parâmetro variável. É válido, mas não essencial, obter as equações puramente algébricas, tornando o lado direito das equações diferenciais ou equações algébrico-diferenciais nulo. Cálculos que só exigem modelos estáticos são vantajosos, porque os resultados não implicam em se conhecer a dinâmica da carga ou outra dinâmica qualquer. Ao usar modelos estáticos para a obtenção de resultados práticos, deve haver uma maneira de identificar o equilíbrio estável do sistema de potência. Em princípio, isto requer um modelo dinâmico, mas o ponto de operação estável é freqüentemente reconhecido observando o sistema na prática, localizando este equilíbrio com um aumento gradual do carregamento.

Os tópicos a seguir estão associados com as bifurcações sela-nó em modelos dinâmicos:

- (i) previsão do colapso dinâmico;
- (ii) quaisquer problemas que envolvem mudanças significativas em estados ou parâmetros;
- (iii) cálculos que envolvem autovalores ou valores singulares longe da bifurcação.

Os tópicos a seguir estão associados com as bifurcações sela-nó em modelos estáticos [37,38]:

- (i) encontrar a bifurcação;
- (ii) cálculos que envolvem a distância à bifurcação no espaço paramétrico;
- (iii) previsão da direção inicial do colapso dinâmico e os estados que participam inicialmente no colapso dinâmico;
- (iv) previsão de quais barras apresentam as mais baixas tensões antes do colapso.

Devem ser feitas duas observações sobre o modelo de colapso dinâmico: primeiro, os resultados são tão bons quanto o modelo admitido para o sistema de potência. Por exemplo, o modelo dinâmico anteriormente apresentado exigiria um modelo de carga mais elaborado e um modelo de gerador mais realístico. Felizmente, as características qualitativas de uma bifurcação sela-nó não dependem do modelo específico, de forma que em num sentido prático, todas as bifurcações sela-nó que acontecem, até mesmo em modelos

diferentes, são semelhantes. Porém, as características quantitativas de uma bifurcação sela-nó, como os valores das variáveis de estado e dos parâmetros para os quais ela acontece, são de interesse vital, e estes resultados dependem fortemente do modelo do sistema. A segunda observação é a validade dos modelos. Por exemplo, se as magnitudes de tensão caem, então a proteção do sistema pode operar para mudar o sistema, e isto deve ser considerado como uma mudança no modelo do sistema. Modelos de carga só podem ser válidos próximos aos níveis de tensão nominais, e é freqüentemente questionável em tensões mais baixas.

Considere um sistema de potência com uma carga levemente crescente, mas que aumenta indefinidamente. Eventualmente, a geração e a transmissão não poderão suprir a carga e o equilíbrio operacional será perdido. Sob estas suposições, a teoria da bifurcação explica como o equilíbrio operacional desaparece, começando inicialmente lento mas finalizando num decaimento monotônico do estado do sistema. Porém, alguns colapsos de tensão envolvem cargas altamente variáveis, grandes perturbações e eventos discretos. Ainda assim pode ser possível analisar parte da sucessão de eventos em que tais bifurcações sela-nó ocorrem, como, por exemplo, quando uma grande perturbação estressa o sistema, e então um aumento na carga faz o equilíbrio operacional desaparecer. Por outro lado, uma grande perturbação pode causar um desaparecimento repentino do equilíbrio sem passar por uma bifurcação sela-nó gradualmente. Isto é, se a perturbação ocorresse lentamente (artificialmente), o sistema teria experimentado uma bifurcação sela-nó.

Os efeitos na mudança dinâmica repentina estão mostrados nas Figuras 2.5 e 2.6. Um fenômeno como este é descrito com muito mais detalhe nas seções e capítulos posteriores. Neste caso, uma vez que o sistema se encontra próximo de uma bifurcação e que a seguir já não há mais ponto de equilíbrio, há com certeza, uma perspectiva de uma bifurcação tipo sela-nó. Com um início lento e posteriormente um decaimento abrupto. Casos de incidentes de colapso de tensão contêm tipicamente um início lento com um decaimento monotônico do estado do sistema. Realmente uma forma de colapso é mostrada na Figura 2.6 e é freqüente em incidentes que apresentaram colapso de tensão. Outros eventos são freqüentemente sobrepostos a este declínio. A bifurcação sela-nó é uma idealização útil que ajuda a explicar a perda do equilíbrio operacional. Um modo útil de se confirmar ou de se testar a teoria da bifurcação sela-nó num contexto prático é observar alguns eventos de colapso de tensão como em [26].

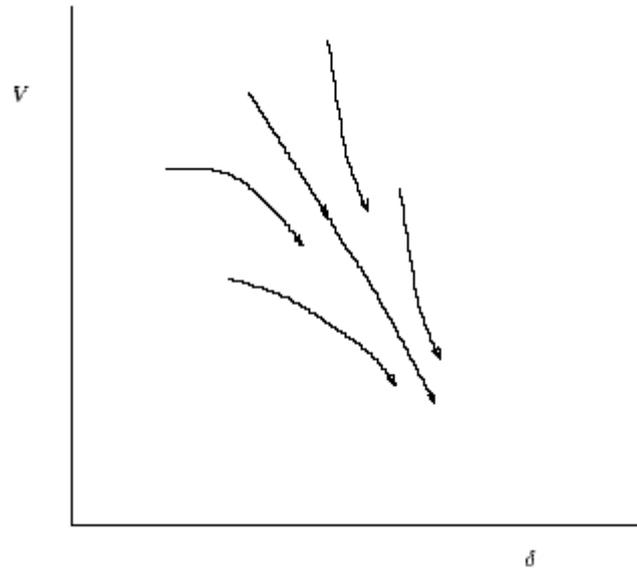


Figura 2.5: Espaço de Estado Após a Bifurcação Sela-Nó

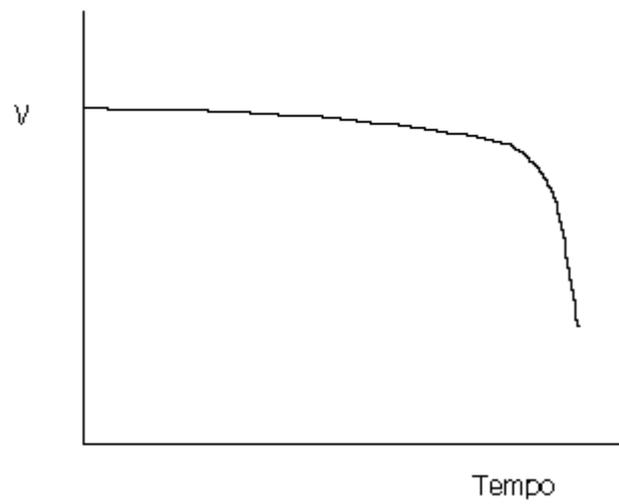


Figura 2.6: Característica do Colapso de Tensão

2.11 Bifurcação de Hopf e Oscilações

2.11.1 Introdução

Uma bifurcação de Hopf é o surgimento de um comportamento oscilatório em um sistema não linear [32-34,39]. Um sistema de potência que opera inicialmente em um equilíbrio estável pode oscilar quando um parâmetro muda lentamente, de forma que uma bifurcação de Hopf acontece. Há dois modos de se visualizar uma órbita periódica. O primeiro modo é com relação ao tempo, e cada um destes gráficos é uma forma de onda periódica de mesmo período, como mostrado na Figura 2.7. O segundo modo é imaginar o vetor de estado que cruza a órbita fechada no espaço de estado, como mostrado na Figura 2.8. O vetor de estado cruza a órbita fechada uma vez no período. Em uma bifurcação de Hopf um equilíbrio estável torna-se instável interagindo com uma órbita periódica. Há dois tipos de bifurcação, as chamadas bifurcação de Hopf supercrítica e subcrítica, e o que acontece nestas bifurcações é melhor explicado a seguir.

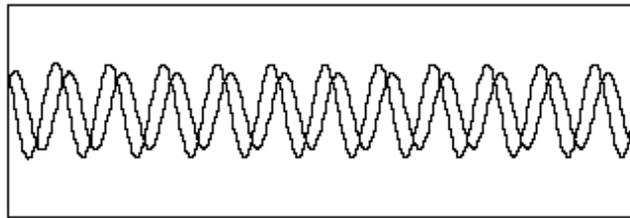


Figura 2.7: Evolução Temporal

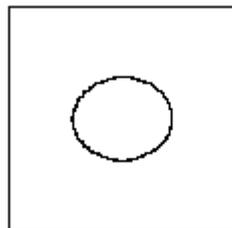


Figura 2.8: Espaço de Estado

2.11.2 Bifurcação de Hopf Supercrítica

A Figura 2.9 apresenta o espaço de estado de um modelo dinâmico de dois estados; as setas mostram a direção e a magnitude do movimento das variáveis de estado. Ao centro da Figura 2.9 há um ponto de equilíbrio (indicando um lugar onde o estado tem velocidade nula e não muda). O equilíbrio ao centro da Figura 2.9 é estável; uma perturbação qualquer, por exemplo, a partir do canto superior direito, conduz a um transitório que retorna ao centro em um modo oscilatório. A Figura 2.9 mostra a posição dos dois estados à medida que o transitório evolui. O mesmo transitório é mostrado na Figura 2.10 em função do tempo

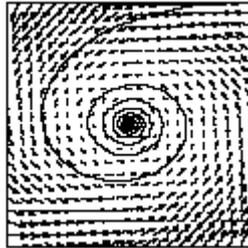


Figura 2.9: Espaço de Estado - Transitório e Ponto de Equilíbrio

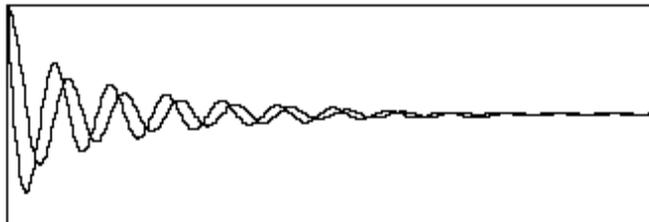


Figura 2.10: Evolução Temporal - Transitório e Equilíbrio

A Figura 2.11 apresenta o espaço de estado depois que a bifurcação de Hopf acontece. O equilíbrio é agora instável e há uma órbita periódica estável próxima ao equilíbrio. Para uma órbita periódica estável, pequenas perturbações conduzem a um transitório que sempre retorna à órbita periódica. Se o estado do sistema se encontra inicialmente próximo ao equilíbrio instável,

ocorrerão oscilações crescentes como mostrado na Figura 2.12. Se o estado estiver inicialmente fora da órbita periódica, haverá oscilações decrescentes que tendem para a órbita periódica como mostrado nas Figuras 2.13 e 2.14.

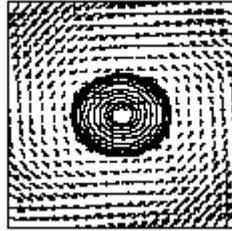


Figura 2.11: Espaço de Estado Pós Bifurcação de Hopf Supercrítica

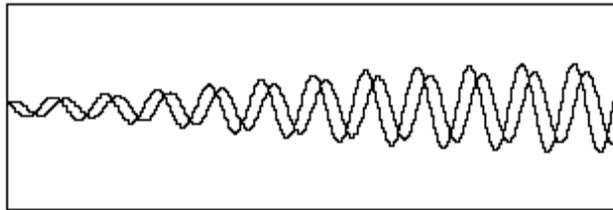


Figura 2.12: Evolução Temporal Pós Bifurcação de Hopf Supercrítica

A bifurcação de Hopf é o caso crítico entre Figuras 2.9-10 e 2.13-14. Neste caso, o equilíbrio é relativamente estável e pode-se imaginar como uma órbita periódica de amplitude nula. Transitórios decaem muito lentamente para o equilíbrio em um modo oscilatório. Assim, na bifurcação de Hopf supercrítica, o equilíbrio estável torna-se instável em uma órbita periódica estável. Antes da bifurcação, o estado se encontra no equilíbrio estável, e depois da bifurcação o estado passa a oscilar de acordo com a órbita periódica estável. A órbita periódica se forma quando a bifurcação de Hopf acontece, e cresce a partir de zero à medida que o parâmetro muda lentamente: uma oscilação aparece e cresce.

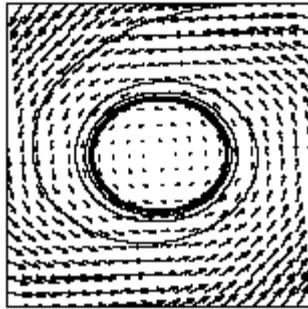


Figura 2.13: Espaço de Estado - Órbita Periódica Estável

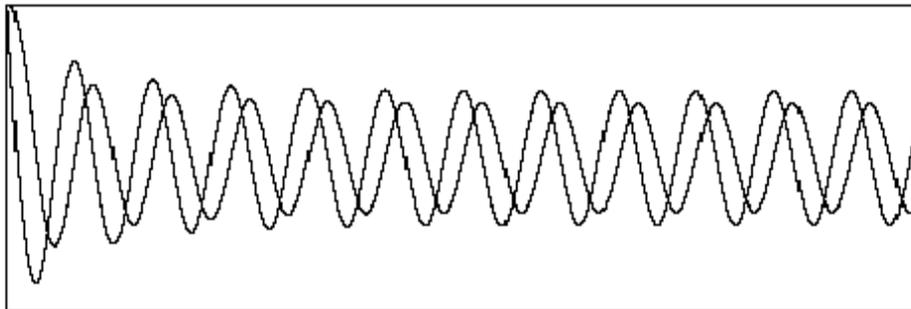


Figura 2.14: Evolução Temporal - Transitório Estável

2.12 Bifurcação de Hopf Subcrítica

A Figura 2.15 mostra o diagrama de fases de um modelo dinâmico de dois estados. Antes da bifurcação, há um equilíbrio estável ao centro da Figura 2.15. Note que um transitório decai para o equilíbrio em um modo oscilatório, Figura 2.16. Há também uma órbita periódica instável próxima ao equilíbrio. Para uma órbita periódica instável, uma pequena perturbação leva a um transitório que se afasta da órbita periódica.

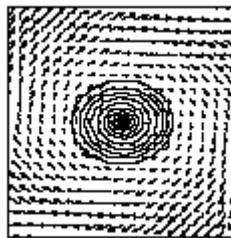


Figura 2.15: Espaço de Estado - Órbita Periódica Instável e Ponto de Equilíbrio

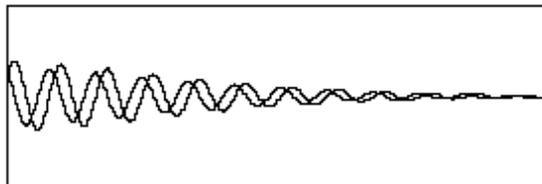


Figura 2.16: Evolução Temporal - Transitório Estável

As Figuras 2.17-18 dão exemplos desses transitórios. Depois da bifurcação, a órbita periódica desaparece e o equilíbrio torna-se instável como mostrado nas Figuras 2.18 e 2.20. Qualquer perturbação no equilíbrio resulta em um transitório oscilatório. A bifurcação de Hopf é o caso crítico entre as Figuras 2.15-16 e 2.19-20 quando uma órbita periódica instável torna o equilíbrio instável.

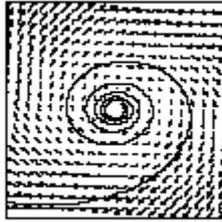


Figura 2.17: Espaço de Estado - Órbita Instável e Estado Instável



Figura 2.18: Evolução Temporal - Transitório Instável

Assim, para uma bifurcação de Hopf subcrítica, a interação do equilíbrio estável com uma órbita periódica instável torna o equilíbrio instável. Antes da bifurcação o estado é estável e depois da bifurcação o estado sofre um transitório oscilatório. O efeito global ao se mudar o parâmetro do sistema e passar por uma bifurcação de Hopf é que o equilíbrio torna-se instável e uma oscilação instável cresce, então, em amplitude.

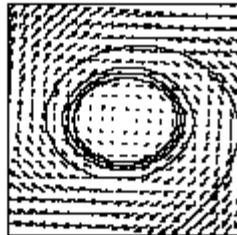


Figura 2.19: Espaço de Estado Pós Bifurcação de Hopf Subcrítica

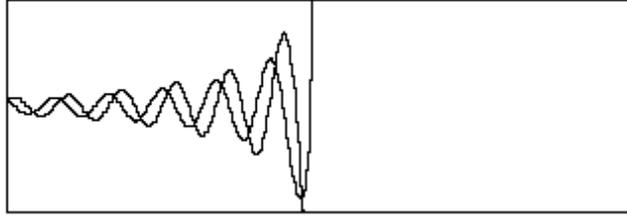


Figura 2.20: Evolução Temporal Pós Bifurcação de Hopf Subcrítica

2.12.1 Bifurcação de Hopf em mais de uma Dimensão

A bifurcação de Hopf como apresentada, dois estados e um único parâmetro, captura a essência da bifurcação de Hopf e também serve para modelos de grandes sistemas de potência. Embora em um grande sistema todas as variáveis de estado estejam até certo ponto envolvidas na bifurcação de Hopf e na oscilação, poder-se-ia alterar as variáveis de tal modo que apenas duas variáveis estariam envolvidas na bifurcação, e todas as demais apresentariam um decaimento estável. As duas variáveis sofreriam a bifurcação de Hopf de um certo modo qualitativamente idêntico a um dos exemplos citados. A extensão para muitos parâmetros é análoga ao caso da bifurcação sela-nó: o conjunto de parâmetros aos quais a bifurcação de Hopf acontece é chamado de arranjo de bifurcação e é tipicamente composta de hipersuperfícies no espaço paramétrico.

2.12.2 Teoria Linear e Bifurcação de Hopf

A matriz Jacobiana é obtida através da linearização do sistema sobre um ponto de equilíbrio. O equilíbrio envolvido na bifurcação de Hopf muda (estabilidade do sistema) quando a bifurcação acontece e está diretamente relacionado ao Jacobiano. Em particular, um par de autovalores complexos cruza o eixo imaginário quando o parâmetro varia lentamente. A bifurcação de Hopf acontece quando este par de autovalores se encontra exatamente sobre o eixo imaginário.

Assim, a teoria da estabilidade linear prediz uma instabilidade oscilatória do ponto de equilíbrio quando uma bifurcação de Hopf ocorre. Os resultados dão informações adicionais porque também levam em conta os efeitos de não linearidades (presentes nos sistemas de potência) Em particular, a presença

e o papel das órbitas periódicas e os dois tipos de bifurcações de Hopf não podem ser entendidos a partir da teoria linear. Os dois tipos de bifurcação de Hopf de um equilíbrio estável levam a resultados completamente diferentes: a bifurcação supercrítica conduz a uma oscilação limitada e a bifurcação subcrítica conduz, pelo menos inicialmente, para uma instabilidade oscilatória crescente. Assim a bifurcação de Hopf apresenta um quadro mais completo do que a teoria linear para o que acontece no sistema de potência quando a instabilidade é encontrada.

2.12.3 Condições para a Bifurcação de Hopf

Há várias indicações úteis para qualquer bifurcação de Hopf. Todas as condições a seguir acontecem para uma bifurcação de Hopf em um equilíbrio estável, e podem ser usadas para caracterizar ou descobrir tais bifurcações:

(i) um sistema que previamente se encontra em um estado de equilíbrio estável começa, então, uma oscilação permanente em uma órbita periódica ou apresenta um transitório oscilatório crescente quando um parâmetro varia.

(ii) o equilíbrio do sistema persiste quando um parâmetro varia, mas muda de estável para oscilatório instável.

(iii) o Jacobiano do sistema tem um par de autovalores no eixo imaginário com frequência não nula; ou seja, para o sistema linearizado o equilíbrio estável fica instável em uma bifurcação de Hopf à medida que um par de autovalores cruza o eixo imaginário.

2.12.4 Modelos e a Bifurcação de Hopf

Estudar a bifurcação de Hopf em um modelo de sistema de potência exige um conjunto de equações diferenciais com um parâmetro variável. Frequentemente o parâmetro escolhido é o carregamento do sistema. Alternativamente, o modelo do sistema pode ser algébrico-diferencial, se se admite que as equações algébricas são restrições dinâmicas estáveis. E em alguns estudos se pode exigir a representação dinâmica das cargas.

2.12.5 Aplicações em Sistemas de Potência

O estudo de oscilações em sistemas de potência têm uma longa história, e as características adicionais da bifurcação de Hopf se tornam apropriadas em muitos contextos (por exemplo [40-42]). Aqui há um breve resumo da teoria das bifurcações de Hopf encontradas em alguns modelos de sistemas para o estudo de colapso de tensão. Sistemas de potência carregados são mais susceptíveis a experimentar uma bifurcação de Hopf e oscilar. Há alguns comentários de que as oscilações instáveis sejam fenômenos adicionais associados a alguns colapsos de tensão, mas esta possibilidade permanece ainda sem ser confirmada. Isto implicaria em o sistema de potência experimentar uma combinação de bifurcação sela-nó e bifurcação de Hopf ao mesmo tempo. Enquanto isto é teoricamente possível e pode ser observado em alguns modelos de sistemas [43-45], a evidência de problemas com oscilações instáveis e incidentes de colapso de tensão ainda não são conclusivos. Claro que qualquer perturbação do sistema envolve oscilações estáveis com uma resposta dinâmica. Porém oscilações instáveis do sistema são de importância considerável mesmo se elas não estão diretamente relacionadas ao colapso de tensão.

2.13 Bifurcação Induzida por Singularidade

2.13.1 Introdução

As bifurcações locais do tipo sela-nó (relacionado a um autovalor nulo) e bifurcações de Hopf (relacionadas a autovalores puramente imaginários) foram apresentadas anteriormente. Em sistemas que são modelados por equações puramente diferenciais, as bifurcações sela-nó e de Hopf são na verdade os únicos dois tipos de bifurcações que são significativas para o entendimento das propriedades da estabilidade de pequeno sinal.

Por outro lado, os modelos de grandes sistemas geralmente consistem em dois tipos de equações, as equações diferenciais (modelando o comportamento dinâmico dos elementos) e as equações algébricas (modelando o comportamento da rede de transmissão). Em tal modelo algébrico-diferencial, um tipo adicional de fenômeno relacionado à teoria da bifurcação (diferente das bifurcações sela-nó e Hopf) surge quando as equações algébricas apresentam problemas de singularidade no ponto de operação. As implicações práticas destas bifurcações (associada com a singularidade das equações da rede) demandam uma cuidadosa observação ao se modelar as restrições para tais equações.

2.13.2 Modelo Algébrico-Diferencial

A dinâmica de longo prazo do sistema de potência pode ser representada pelo conjunto de equações algébrico-diferencial:

$$\dot{x} = f(x, y) \quad (2.2)$$

$$0 = g(x, y) \quad (2.3)$$

As equações diferenciais (2.2) representam a dinâmica dos elementos (inclusive geradores e controles) e as cargas das barras, se for o caso. As equações algébricas (2.3) representam as relações de transferência de potência entre as barras pela rede de transmissão. As variáveis de estado x (ângulos de geradores, frequências, controle das variáveis de estado e variáveis de carga dinâmicas) representam as variáveis de estado dinâmicas. As variáveis y das equações algébricas são tipicamente as variáveis do sistema de potência como as tensões e ângulos das barras.

Note que a dinâmica da rede de transmissão (os transitórios de rede) é muito mais rápida que a dinâmica de longo-prazo dos elementos e da carga.

Então a rede pode ser modelada como equações puramente algébricas (2.3) no modelo algébrico-diferencial, assumindo que tais variáveis y respondem quase instantaneamente a mudanças nas variáveis de estado dinâmicas x .

A dinâmica real da rede de transmissão é bastante complicada, uma vez que para cada linha de transmissão há um conjunto de parâmetros distribuídos de difícil análise de seu comportamento no domínio do tempo. Porém, como a dinâmica de interesse no modelo é a dinâmica de longo-prazo, pode-se simplificar a representação da rede como circuitos a parâmetros concentrados.

Em implementações numéricas e em estudos, as equações algébricas (2.3) normalmente podem ser resolvidas a partir de $y = h(x)$, determinado para qualquer valor de x , reduzindo as equações dinâmicas $\dot{x} = f(x, y)$ em um conjunto de equações diferenciais do tipo $\dot{x} = f(x, h(x))$, simplesmente em termos de x . Em alguns cálculos, não é necessário ou desejável executar esta redução às equações diferenciais, as informações necessárias podem ser deduzidas diretamente do conjunto de equações algébrico-diferenciais. Se as restrições algébricas são estáveis e suficientemente rápidas, então estas equações diferenciais corretamente descrevem a dinâmica de longo-prazo do sistema.

O sistema elétrico normalmente opera em um ponto de equilíbrio estável. Este equilíbrio no modelo algébrico-diferencial são as soluções das equações $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$. Em análise de estabilidade de pequeno sinal, o primeiro passo é determinar a condição de equilíbrio para as variáveis x e y . Tipicamente, as equações $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$ possuem um grande número de soluções, isto é, o modelo puramente algébrico do sistema tem vários pontos de equilíbrio. No entanto, um destes pontos de equilíbrio é estável e esta solução estável (quando existe) de $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$ corresponde a um ponto de operação do sistema.

A estabilidade de um ponto de equilíbrio (x_o, y_o) pode ser verificada através do comportamento dos autovalores do Jacobiano associado ou da matriz J_{red} através da linearização das equações (2.2) e (2.3) em (x_o, y_o) , onde:

$$J_{red} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x} \right) \Big|_{x_o, y_o} \quad (2.4)$$

Note que a definição da matriz J_{red} requer a inversão da matriz $G_y = \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{x_o, y_o}$, que representa as variáveis da rede y nas equações de fluxo de potência $g(x, y) = 0$. Quando esta matriz G_y é singular no ponto (x_o, y_o) a inversão de G_y não é definida e, conseqüentemente, a matriz J_{red} também não é.

Esta condição de singularidade da matriz G_y é definida como bifurcação induzida pela singularidade [46]. Matematicamente pode ser provado que a matriz J_{red} tem autovalores tendendo ao infinito (autovalores ilimitados)

na bifurcação induzida por singularidade quando a matriz G_y é singular. Isto implica que o sistema encontra algum tipo de problema de instabilidade como resultado das interações rápidas das variáveis da rede. Porém, não é possível prever a natureza da instabilidade devido às limitações no modelo da própria rede. A singularidade da matriz G_y demonstra que o ponto de operação permanece próximo de uma singularidade algébrica para as equações $g(x, y) = 0$ no modelo algébrico-diferencial.

Se o sistema de potência está operando em um equilíbrio estável e os parâmetros mudam lentamente, de forma que as equações algébricas se tornem singulares, uma bifurcação induzida por singularidade, então, acontece. Em outras palavras, a bifurcação induzida por singularidade surge quando a matriz G_y torna-se singular no ponto de operação quando ocorre alguma variação de parâmetro.

Há algumas condições que estabelecem a bifurcação induzida por singularidade:

(i) as equações algébricas tornam-se singulares no sentido de que o Jacobiano das equações algébricas com relação a y torna-se singular.

(ii) um autovalor do Jacobiano do sistema passa do semi-plano esquerdo para o semi-plano direito por meio de um descontinuidade tendendo ao infinito.

O autovalor infinito (ilimitado) nesta bifurcação, implica que alguma dinâmica lenta de x do modelo algébrico-diferencial tornou-se muito rápida próximo da bifurcação induzida por singularidade. A presença do autovalor no semi-plano direito depois da bifurcação induzida por singularidade no modelo algébrico-diferencial demonstra que o sistema é instável após a bifurcação.

Como explicado a priori, a ocorrência da singularidade induzida em um modelo algébrico-diferencial traz algumas dificuldades intrínsecas sobre o próprio modelo. Estas dificuldades sugerem que o modelo algébrico-diferencial é incompleto para descrever o comportamento do sistema próximo à bifurcação induzida por singularidade.

Considerando que a bifurcação induzida acontece em alguns modelos de sistemas, estas dificuldades ainda se encontram em discussão. Realmente, a bifurcação induzida por singularidade é uma ocorrência típica em qualquer modelo algébrico-diferencial quando há uma variação paramétrica. A resolução destas dificuldades pode redirecionar a modelos dinâmicos válidos em exemplos específicos, onde tais singularidades ocorram, e determinar com mais segurança as conseqüências deste fenômeno.

CAPÍTULO III

3 Análise da Instabilidade de Tensão

3.1 Bifurcação Sela-Nó

3.1.1 Exemplo Geral [7]

Seja o sistema de equações diferenciais em \mathfrak{R}^2 , com x e y variáveis de estado e α um parâmetro real:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x^2 - y + \alpha \end{aligned} \quad (3.1)$$

Para os pontos de equilíbrio ($\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = 0$) claramente:

$$x = \pm\sqrt{-\alpha} \quad (3.2)$$

O sistema linearizado em torno deste ponto (matriz Jacobiana do sistema) é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2x & -1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

E o determinante de A :

$$\det(A) = -2x = \pm(2\sqrt{-\alpha}) \quad (3.4)$$

Assim, quando $\alpha = 0$, tem-se $\det(A) = 0$, identificando uma bifurcação sela-nó. No entanto, outras bifurcações estão associadas à existência de um autovalor nulo, de forma que a identificação do tipo de bifurcação requer o emprego das condições inerentes ao tipo de bifurcação. Para esse conjunto de equações acima as condições para uma bifurcação do tipo sela-nó são satisfeitas.

3.2 Implicação Matemática

A instabilidade de tensão surge porque a demanda da carga não pode ser atendida pela geração e/ou transmissão [2,3,7,13]. Isto correspondente a uma situação onde o sistema caminha pelos pontos de equilíbrio na curva PV em direção ao ponto de máximo de carregamento do sistema. Por essa razão,

a determinação deste ponto (máximo carregamento) é fundamental para a operação segura do sistema elétrico. Vários métodos de obtenção deste ponto de máximo carregamento têm sido sugeridos na literatura. Dentre eles pode-se destacar o método da continuação [26-28], que se utiliza do vetor tangente como passo previsor.

Para um sistema simples de duas barras, pode-se traçar as curvas $V(\delta)$ [7] e, então, verificar as implicações matemáticas deste ponto crítico – nariz da curva PV . Seja a Figura 3.1 a seguir, onde as curvas $V(\theta)$ foram obtidas para três valores de P e Q . As equações para o fluxo de potência entre as duas barras são da seguinte forma:

$$P = V_k^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos \theta_{km} - V_k V_m b_{km} \text{sen} \theta_{km} \quad (3.5)$$

$$Q = -V_k^2 (b_{km} + b_{sh}) + V_k V_m b_{km} \cos \theta_{km} - V_k V_m g_{km} \text{sen} \theta_{km} \quad (3.6)$$

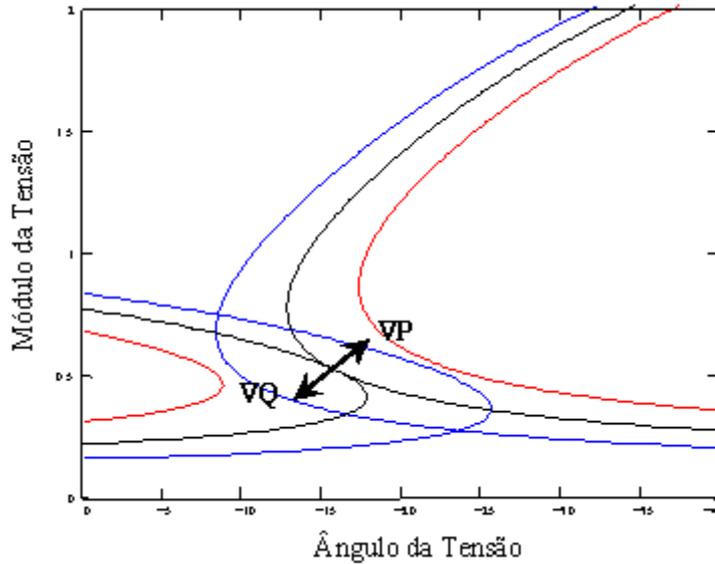


Figura 3.1: Curvas V x θ

A partir dessas equações de fluxo de potência entre as duas barras têm-se as curvas representadas na Figura 3.1. As interseções das curvas de P e Q definem os pontos de operação do sistema, que são soluções para o sistema

⁵Fluxo de potência ativa entre as barras k e m

⁶Fluxo de potência reativa entre as barras k e m

de equações 3.5 e 3.6. Pode-se observar, na Figura 3.1, que para uma carga qualquer (P, Q) , com fator de potência constante, ocorre:

- (i) dupla intersecção – duas soluções;
- (ii) único ponto de intersecção – uma solução;
- (iii) não há intersecção – nenhuma solução.

Como mencionado, na curva PV há um carregamento para o qual apenas uma solução existe e, carregamentos superiores a este não apresentam solução para as equações de fluxo de potência das barras, caracterizando a ausência de um ponto de equilíbrio na curva PV .

Portanto, o carregamento onde existe apenas uma solução representa a máxima carga possível de ser atendida pelo sistema, para um dado fator de potência; e o fato das curvas de P e Q se tocarem em um único ponto garante que os vetores gradiente ∇P e ∇Q estão alinhados [7] e, dessa forma, a relação a seguir pode ser escrita.

$$\nabla P = \alpha \nabla Q \quad (3.7)$$

$$\nabla P - \alpha \nabla Q = 0 \quad (3.8)$$

onde α é um escalar.

Definindo-se as variações incrementais de P e Q como:

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial P}{\partial V} \Delta V \quad (3.9)$$

$$\Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial Q}{\partial V} \Delta V \quad (3.10)$$

Então, os vetores gradiente de P e Q são:

$$\nabla P = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ \frac{\partial P}{\partial V} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\nabla Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Q}{\partial V} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

A partir das equações 3.7 e 3.8, tem-se:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} - \alpha \frac{\partial Q}{\partial \theta} = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial P}{\partial V} - \alpha \frac{\partial Q}{\partial V} = 0 \quad (3.14)$$

Como a matriz Jacobiana das equações de fluxo de potência é :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \theta} & \frac{\partial P}{\partial V} \\ \frac{\partial Q}{\partial \theta} & \frac{\partial Q}{\partial V} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Assim, a solução das equações 3.13 e 3.14 requer que o determinante da matriz Jacobiana do fluxo de potência seja igual a zero, isto é:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial Q}{\partial V} - \frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial Q}{\partial \theta} = 0 \quad (3.16)$$

Significando que no ponto de máximo carregamento a matriz Jacobiana tem determinante nulo. O fato da matriz Jacobiana das equações de fluxo de potência ser singular no limite de carregamento do sistema fornece informações relevantes para o estudo e aplicação de índices de avaliação da estabilidade de tensão. A aplicação desta informação na determinação de índices que avaliem a estabilidade do sistema elétrico prevêem a identificação deste ponto, portanto, algumas ferramentas serão apresentadas e desenvolvimentos a posteriori farão menção desta característica juntamente com a utilização destas ferramentas.

3.3 Autovalores, Valores Singulares e Vetor Tangente

A decomposição da matriz Jacobiana em valores singulares e autovalores tem demonstrado que o ponto de colapso de tensão pode ser identificado monitorando o menor autovalor e o menor valor singular da matriz Jacobiana com o aumento progressivo do carregamento do sistema [7,30].

A técnica do vetor tangente [7,30,31] fornece um índice de avaliação da proximidade do ponto de colapso, onde a barra associada ao maior valor em módulo é identificada como a barra crítica do sistema [32,33]. Alguns casos têm comprovado a identificação precoce da barra crítica pelo vetor tangente, embora não se possa afirmar com segurança que a barra crítica é antecipadamente identificada pelo vetor tangente [32,33]. Uma grande vantagem no uso deste índice refere-se à simplicidade de cálculo.

3.3.1 Autovalores

Seja uma matriz quadrada A , de dimensão $n \times n$. A decomposição da matriz A em autovalores⁷ à direita e à esquerda obedece às seguintes relações:

$$Ax = \lambda x \quad (3.17)$$

$$A^T y = \lambda y \quad (3.18)$$

onde A^T é a matriz transposta de A e x, y são, respectivamente, autovetores à direita e à esquerda de A , associados ao autovalor λ .

Assim a matriz A pode ser obtida pela relação a seguir:

$$A = X\Lambda Y^T = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i y_i^T \quad (3.19)$$

onde X e Y representam as matrizes dos autovetores à direita x_i e dos autovetores à esquerda y_i , respectivamente, e Λ é uma matriz diagonal com os autovalores da matriz A .

Aplicando-se a decomposição em autovalores à matriz Jacobiana das equações de fluxo de potência, tem-se:

$$J = X\Lambda Y^T \quad (3.20)$$

$$J^{-1} = Y\Lambda^{-1}X^T \quad (3.21)$$

Pode-se escrever então:

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} = Y\Lambda^{-1}X^T \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

É extremamente interessante avaliar a sensibilidade das variáveis de estado associadas ao autovetor nas proximidades do ponto de colapso. Para isso, admita que a última coluna de Y (associada ao autovalor nulo) seja dada por:

$$y_n = x_n \lambda_n y_n^T \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

⁷No Apêndice B há um detalhamento sobre autovalores e autovetores

ou reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} = (x_n \lambda_n y_n^T)^{-1} y_n \quad (3.24)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} = (x_n \lambda_n^{-1}) (y_n^T y_n) \quad (3.25)$$

Como $y_n^T y_n = 1$, estes autovetores são ortonormais, chega-se:

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} = x_n \lambda_n^{-1} \quad (3.26)$$

Portanto o autovetor x_n está associado à sensibilidade da tensão (módulo e ângulo). Assim, o maior componente neste autovetor indica a variável mais sensível, isto é, a componente que mais fortemente direciona o sistema à singularidade.

O menor autovalor, assim como o menor valor singular (apresentado em seguida), depende do ponto de equilíbrio considerado e da matriz Jacobiana neste ponto. O sistema elétrico de potência é modelado por um conjunto de equações não lineares e sujeito a não linearidades, como limitações características de seus elementos constituintes. Monitorar o menor autovalor ao longo dos pontos de equilíbrio durante a variação de um parâmetro, ou seja, até o ponto de máximo carregamento, onde se tem necessariamente um autovalor nulo, não fornece resultado tão previsível como se pode pensar a princípio. Nem mesmo se pode inferir se o menor autovalor (ou menor valor singular) num ponto anterior corresponda ao mesmo autovetor (vetor singular) associado ao ponto seguinte. Com isto, a proposta de monitoramento do menor autovalor (menor valor singular) como índice de identificação do ponto de colapso apresenta um comportamento ruim para um índice identificador das variáveis envolvidas na bifurcação e na previsão do ponto de máximo carregamento.

Uma proposta alternativa é apresentada no Capítulo IV, onde é abordado um índice limitador para os autovalores críticos, um conjunto de possíveis autovalores dentre os quais está o autovalor que se anula no ponto de colapso, ou seja, apresenta algum tipo de bifurcação.

3.3.2 Valores Singulares

Considerando-se uma matriz A real, de dimensão $n \times n$, sua decomposição em valores singulares é obtida como:

$$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^n u_i \sigma_i v_i^T \quad (3.27)$$

onde U e V são matrizes ortonormais de ordem $n \times n$, u_i e v_i são vetores singulares correspondentes à i -ésima coluna de U e V , respectivamente, e Σ é uma matriz diagonal com os valores singulares de A , tal que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \dots = \sigma_n$, com $\sigma_i = 0$ para todo i .

Aplicando a decomposição em valores singulares à matriz Jacobiana das equações de fluxo de potência, tem-se:

$$J = U\Sigma V^T \quad (3.28)$$

$$J^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T \quad (3.29)$$

Pode-se escrever então:

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} = V\Sigma^{-1}U^T \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n v_i \sigma_i^{-1} u_i^T \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

A aplicação de valores singulares à análise de instabilidade de tensão visa monitorar o menor valor singular até o ponto em que ele se torna nulo, ou seja, ponto em que J é singular. Deste modo, perto do limite de estabilidade de tensão σ_n , se aproxima de zero.

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \cong v_n \sigma_n^{-1} u_n^T \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Assim, o inverso do menor valor singular, σ_n^{-1} , será, do ponto de vista de um distúrbio qualquer no sistema, o indicador da maior sensibilidade das variáveis de estado do sistema.

Admitindo que:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = u_n \quad (3.32)$$

Chega-se a:

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \cong \sigma_n^{-1} v_n \quad (3.33)$$

A interpretação pode ser resumida [7]:

(i) o menor valor singular, σ_n , é um indicador da proximidade do limite de estabilidade de tensão;

(ii) o vetor singular, v_n , correspondente à σ_n , indica a sensibilidade das tensões (módulos e ângulos) – barra crítica;

(iii) o vetor singular, u_n , correspondente à σ_n , indica a direção mais sensível para variações de injeções de potência ativa e reativa.

3.3.3 Vetor Tangente

O vetor tangente mostra como as variáveis de estado se modificam quando um determinado parâmetro (o carregamento do sistema, por exemplo) leva o sistema de um ponto de equilíbrio a outro. Seja o sistema representado por:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

onde J é a matriz Jacobiana das equações de fluxo de potência. Assim, tem-se que:

$$VT = \frac{\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix}}{\Delta\lambda} = \frac{J^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix}}{\Delta\lambda} \quad (3.35)$$

Uma vez que:

$$\Delta P = P_o \Delta\lambda \quad (3.36)$$

$$\Delta Q = Q_o \Delta\lambda \quad (3.37)$$

onde P_o e Q_o são as potências ativas e reativas iniciais e $\Delta\lambda$ é o parâmetro que leva o sistema de um estado de equilíbrio a outro. Substituindo ΔP e ΔQ na equação 3.34, obtém-se:

$$VT = J^{-1} \begin{bmatrix} P_o \\ Q_o \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

A partir da equação 3.38, o vetor tangente é facilmente obtido para um caso de fluxo de potência, pois depende apenas da matriz Jacobiana no ponto de equilíbrio e do carregamento inicial do sistema.

O vetor tangente tem um comportamento extremamente interessante, uma vez que para pontos afastados do ponto de colapso, o vetor tangente praticamente não sofre qualquer variação significativa com a alteração do parâmetro do sistema. Porém, à medida que o sistema caminha em direção ao ponto de colapso, a sensibilidade das variáveis de estado aumentam, e o vetor tangente passa a incorporar essa sensibilidade, sofrendo grandes variações para alterações paramétricas mínimas. Esta sensibilidade e a facilidade de obtenção ou cálculo do vetor tangente como mostrado pela equação 3.34, tem sugerido o vetor tangente como um bom índice para o monitoramento da estabilidade do sistema. Além de ser facilmente obtido para um estudo de fluxo de potência, o vetor tangente, em muitos trabalhos apresentados na literatura, identifica prematuramente a barra crítica do sistema em se tratando de colapso de tensão. E por extensão a área crítica, conjunto de barras críticas, associada a um grande sistema.

Dentre as ferramentas apresentadas fica claro que a aplicação da teoria linear ao conjunto não-linear de equações do sistema elétrico têm suas limitações e implicações, principalmente quando o sistema se encontra nas proximidades de uma mudança estrutural, ou seja, de um ponto de bifurcação propriamente dito. Isto, no entanto, não impossibilita o uso de tais ferramentas no estudo de colapso de tensão, apenas fica como uma ressalva ao uso com cautela. Mesmo o vetor tangente que está intimamente ligado à sensibilidade das variáveis de estado com as alterações paramétricas e, em muitos casos, identifica antecipadamente a barra crítica ou área crítica do sistema, pode falhar fornecendo informações contraditórias à medida que o ponto de equilíbrio se aproxima o mais possível do ponto de bifurcação. Finalizando, a teoria linear é extremamente útil e indispensável, mas deve se ter em mente que o comportamento pode ser completamente imprevisível quando uma mudança estrutural no conjunto de equações representativas do sistema está para acontecer, e somente no ponto de bifurcação é que definitivamente se tem as informações exatas sobre o fenômeno.

CAPÍTULO IV

4 Escalas Temporais em Sistemas Elétricos

4.1 Introdução

Um sistema interligado com suas inúmeras unidades geradoras, linhas de transmissão, transformadores, cargas, etc., apresenta uma enorme complexidade que justificaria o pensamento de impossibilidade de qualquer estudo ou análise. Diante da complexidade do sistema e de seus elementos constituintes fica também clara a faixa temporal em que cada elemento atua. Isto permite, dependendo do estudo a ser feito, privilegiar alguns elementos que influenciariam o estudo e dispensar aqueles menos ou pouco influentes. Essa abordagem é vantajosa, já que a escala temporal passa a ser significativa, e a complexidade pode ser então reduzida sem perda das informações a serem obtidas.

Cabe ressaltar que vários fenômenos, justificando uma determinada representação do sistema, podem ser vantajosamente explorados, já que determinados elementos respondem em diferentes escalas de tempo, ou seja, apresentam diferentes constantes de tempo em sua resposta frente a uma perturbação qualquer. Portanto, pode-se concentrar em elementos específicos que afetam o período transitório, poucos segundos; período de médio-prazo, alguns segundos a dezenas de segundos e período de longo-prazo, de minutos a horas.

Dentro da faixa temporal de interesse, o primeiro passo seria a determinação do modelo matemático. Em análises de longo prazo, algumas considerações e simplificações podem ser obtidas. Isto diminui a complexidade de representação do sistema, diminuindo também o tempo de simulação, sem prejuízo da qualidade da informação obtida.

O comportamento dinâmico do sistema elétrico, seus elementos (respostas dependentes do tempo) e a rede (linhas de transmissão, transformadores, compensadores, etc.) podem ser representados em quaisquer estudos por um conjunto de equações algébrico-diferencial. As soluções no tempo dessas equações não lineares são obtidas por métodos numéricos que merecerão uma seção à parte.

Mesmo para uma resposta dinâmica do sistema, uma divisão pode ser feita a partir das considerações sobre a resposta temporal dos elementos envolvidos. Para análise transitória há necessidade de resolução do conjunto algébrico-diferencial, da mesma forma que haveria a necessidade, em análise

dinâmica de longo-prazo, das restrições e considerações sobre os elementos que influem numa e noutra escala de tempo.

Porém, na escala de longo prazo, de segundos a vários minutos, uma simplificação no conjunto algébrico-diferencial pode ser feita, alterando o método de resolução, que passaria a ser um processo iterativo muito mais rápido que qualquer processo de integração numérica. Tal simplificação é resultado da condição de o sistema ter atingido uma situação de regime permanente, onde a fase transitória já teria ocorrido. Esta análise caberia somente em um estudo transitório, porém admitindo esta fase suportada pelo sistema, diante de uma perturbação qualquer, representada pelas derivadas das variáveis de estado envolvidas. Assim, tais derivadas podem ser consideradas nulas para um tempo maior que o tempo transitório considerado. Esta simplificação melhora a rapidez do método de simulação a ser empregado, pois agora tem-se um conjunto de equações puramente algébricas, sem prejuízo da resposta de longo-prazo.

Este método, por apresentar os elementos de características dinâmicas e representar a dinâmica de longo-prazo (transitório suportado pelo sistema), recebe o nome de método de simulação quase-dinâmica ou quase-estática. O método iterativo quase-dinâmico incorporaria ao conjunto básico de equações da rede o conjunto de equações dinâmicas do sistema.

As equações representativas das escalas de tempo para o sistema elétrico são um conjunto de equações algébrico-diferencial [21,22], como abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, z, w) \\ 0 &= g(x, y, z, w) \end{aligned} \quad (4.1)$$

O vetor x é o vetor das variáveis dinâmicas relacionadas com a escala transitória, y é o vetor das variáveis algébricas relacionadas com a rede, z o vetor das variáveis discretas e w é o vetor que representa o carregamento do sistema em função do tempo.

As equações de longo-prazo representativas de um sistema elétrico de potência podem ser expressas pelo seguinte conjunto de equações:

$$z(k+1) = h(x, y, z(k), w) \quad (4.2)$$

$$w = \phi(t) \quad (4.3)$$

onde as equações de natureza discreta, cuja a transição de $z(k)$ para $z(k+1)$ é dada em função dos tempos bem conhecidos dos elementos que atuam nessa escala temporal, estão associadas a elementos como LTC's e OXL's.

As equações de longo-prazo estão relacionadas principalmente às variações lentas de carga e aos elementos de resposta mais lenta, como a atuação do

controle secundário de tensão na manutenção do nível de tensão em uma barra distante.

Considerando uma situação de regime permanente, as equações associadas à escala de tempo transitória (equações diferenciais) são substituídas por equações de equilíbrio da seguinte forma:

$$0 = f(x, y, z, w) \quad (4.4)$$

Desse modo, a evolução das variáveis discretas determina a evolução temporal do sistema elétrico, já que as mudanças temporais nas cargas (w) podem ser consideradas constantes também (muito lentas) na escala de tempo de longo-prazo.

4.2 Simulação Quase-Dinâmica

A introdução apresentou as escalas temporais de interesse em sistemas elétricos de potência. Algumas simplificações permitiram tratar a complexidade do sistema elétrico melhorando a rapidez do processo de simulação sem perda de informação de longo-prazo. Esta seção trata exclusivamente do método de simulação de longo-prazo, ou método quase-dinâmico, pois a consideração neste caso é aquela da equação 4.4.

Este método de simulação apresenta algumas vantagens e características próprias que podem ser resumidas a seguir [22] :

(i) a evolução do sistema que se segue após um distúrbio é vista como uma resposta da dinâmica transitória frente a mudanças discretas, como aquelas descritas pelas equações $z(k+1) = h(x, y, z(k), w)$;

(ii) as dinâmicas transitórias na estabilidade de tensão de longo-prazo têm pouca influência nesta escala temporal e, portanto, são colocadas como equações de equilíbrio, implicando em $\dot{x} = 0$;

(iii) a dinâmica de longo-prazo é determinada pelos últimos pontos de equilíbrio, até que uma nova transição ocorra. Os tempos da transição são determinados pelas dinâmicas discretas regidas pela equação $z(k+1) = h(x, y, z(k), w)$;

(iv) a simulação quase-dinâmica é consideravelmente mais rápida, já que se utiliza de um processo iterativo para resolução do sistema de equações, dispensando, portanto, o pesado processo de integração numérica;

(v) a eficiência computacional vem justamente da utilização do processo iterativo, cujas equações são resolvidas para sucessivos valores de z .

O método iterativo utiliza a matriz Jacobiana aumentada, que também é consideravelmente esparsa, como no caso do fluxo de potência. Além disso, essa matriz Jacobiana é alterada durante o processo iterativo somente junto às barras que possuem elementos discretos, que alteram localmente as características da rede.

A matriz Jacobiana aumentada representativa do sistema tem a seguinte forma geral:

$$\begin{bmatrix} -f(x, y) \\ -g(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

A cada iteração os novos valores de x_i e y_i são adicionados aos valores iniciais x_o e y_o , e se o erro absoluto estiver dentro de uma tolerância especificada, os novos valores de x_i e y_i convergiram para a solução. Caso contrário, o processo se repete até que a convergência seja obtida.

4.3 Regime Permanente e Transitório

O circuito RL da Figura 4.1, é um exemplo simples que permite esclarecer todo processo envolvido, transitório e de regime permanente, e as considerações em relação a situação quase-dinâmica explicitada anteriormente. Ao circuito RL está associado a equação diferencial de 1^a ordem:

$$L \frac{di}{dt} = E - Ri \quad (4.6)$$

A equação 4.6 pode ser resolvida considerando a teoria das equações diferenciais lineares. A solução final pode ser decomposta em solução homogênea (solução excitação nula) e solução particular (solução estado nulo):

$$i = i_h + i_p \quad (4.7)$$

A solução de regime permanente ou solução estado nulo, considera $\frac{di}{dt} = 0$, ou seja, $i_p = \frac{E}{R}$.

A solução transitória ou solução excitação nula, considera $E = 0$, portanto, $L \frac{di}{dt} = -Ri$. Assim, a solução final é dada por:

$$i(t) = \frac{E}{R} + C e^{-\frac{Rt}{L}} \quad (4.8)$$

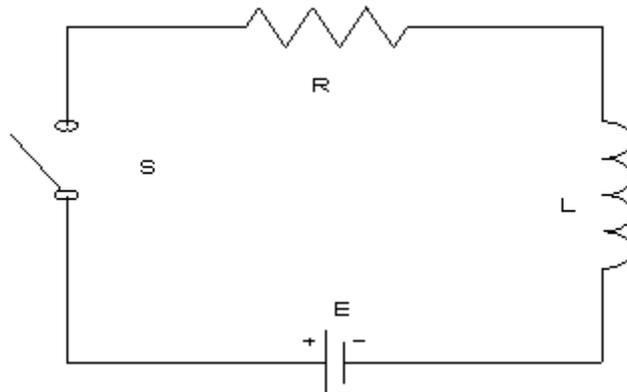


Figura 4.1: Circuito RL

Onde a constante de integração C é determinada a partir da condição inicial antes do fechamento da chave S , $i(0^-) = 0$. E finalmente:

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}) \quad (4.9)$$

Portanto, pode-se dividir a solução final em duas fases: a fase transitória e a fase de regime permanente. Caso haja interesse na fase de regime permanente, tem-se a solução quase-dinâmica, ou seja, a solução estado nulo da equação diferencial para o circuito RL. A Figura 4.2 apresenta a solução completa para o circuito, mostrando as soluções i_h e i_p .

4.4 Métodos de Integração Numérica

A grande maioria das equações diferenciais não lineares não apresentam solução analítica, ou seja, não podem ser obtidas através de funções algébricas elementares. Nesses casos, considera-se no estudo de tais equações, para uma dada condição inicial, o valor numérico da resolução da equação diferencial para aquela condição. Este valor, obtido por um processo de integração numérica, agrega para aquela equação e condição inicial a informação necessária do comportamento do sistema no ponto dado. Uma sucessão de pontos obtidos dessa forma constitui no espaço a trajetória da solução, embora não seja possível obtê-la analiticamente.

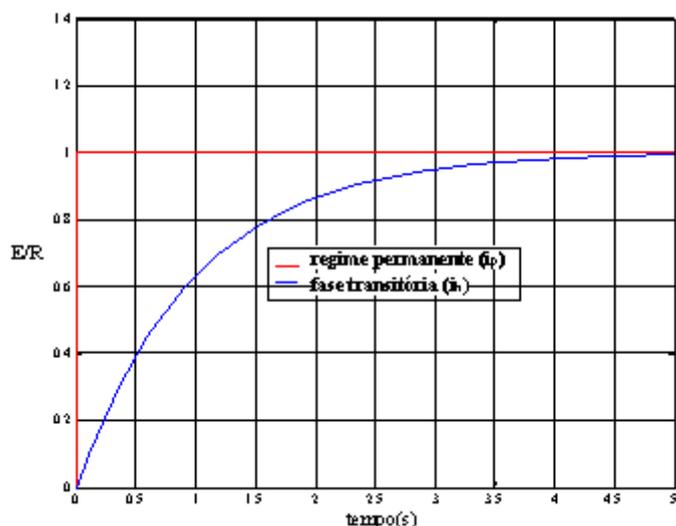


Figura 4.2: Soluções para o Circuito RL

Nesta seção são apresentados três métodos de integração numérica⁸ empregados na resolução numérica de sistemas elétricos de potência: o primeiro método é o de Runge-Kutta de 2^a Ordem; o segundo, o método trapezoidal, e o terceiro método é o de Runge-Kutta de 4^a Ordem.

Obviamente, há outros métodos empregados em integração numérica, porém estes são uma sugestão devido ao erro no processo numérico de integração nos três casos serem extremamente pequenos. O erro no primeiro e no segundo métodos é da ordem de h^3 , onde h é o passo de integração. No terceiro método o erro já é da ordem de h^5 . Os dois métodos de Runge-Kutta são denominados métodos explícitos de integração, uma vez que o valor atual é usado para se determinar o valor seguinte. O método trapezoidal já é um método implícito de integração, uma vez que faz parte do próprio método estimar o valor seguinte da variável de interesse.

Os métodos, portanto, apresentam dentro da precisão necessária, valores satisfatórios dentro de uma margem de erro satisfatória em simulação numérica. Por exemplo, para um passo de integração de 0,1 (que seria um intervalo grande em simulação numérica), o erro cometido seria de 0,001 nos métodos de Runge-Kutta de 2^a Ordem e trapezoidal, e de 0,00001 no método de Runge-Kutta de 4^a Ordem. Para um passo razoável de integração de 0,001, os erros no processo seriam então de $1,0 \times 10^{-9}$ e $1,0 \times 10^{-15}$, obedecendo a mesma ordem já citada. Para aplicação em estudos de sistemas elétricos

⁸No Apêndice C há uma apresentação de vários métodos de integração numérica

de potência seriam valores extremamente precisos, com erros desprezíveis.

4.4.1 Método de Integração Numérica de Runge-Kutta de 2ª Ordem

Seja o problema de valor inicial a seguir:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (4.10)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (4.11)$$

Para um passo de integração $h = \Delta t$, a fórmula geral do método é dada pelas expressões abaixo:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (4.12)$$

com:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, t_n) \cdot h \\ k_2 &= f(x_n + k_1, t_n + h) \cdot h \end{aligned} \quad (4.13)$$

O primeiro valor (primeiro passo) calculado em $t_1 = t_0 + \Delta t = t_0 + h$, por exemplo, seria:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \frac{k_1 + k_2}{2} \\ k_1 &= f(x_0, t_0) \cdot h \\ k_2 &= f(x_0 + k_1, t_0 + h) \cdot h \end{aligned} \quad (4.14)$$

Os passos restantes até o valor final de integração T , lembrando que $h = \Delta t = \frac{T}{n}$, onde T é o intervalo de integração e n é o número de passos de integração, é calculado recursivamente usando a mesma fórmula com os novos valores de x e t .

4.4.2 Método de Integração Numérica Trapezoidal

Seja o mesmo problema de valor inicial apresentado nas equações 4.10 e 4.11. Para um passo de integração $h = \Delta t$, a fórmula geral do método é dada pela expressão a seguir:

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot [f(x_n, t_n)] \quad (4.15)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} [f(x_n, t_n) + f(x_{n+1}, t_{n+1})] \quad (4.16)$$

Nota-se que $f(x_{n+1}, t_{n+1})$ precisa ser estimado, já que x_{n+1} é o valor procurado em 4.16. Na estimativa de $f(x_{n+1}, t_{n+1})$ usa-se a fórmula de recorrência 4.15 (fórmula de Euler). Este primeiro passo, estimativa de $f(x_{n+1}, t_{n+1})$, é tido como passo previsor do método trapezoidal, enquanto o segundo passo equação 4.16 é o passo corretor do método.

Portanto, o método trapezoidal resume-se a esses dois passos: o passo previsor, equação 4.15, e o passo corretor, equação 4.16. Os passos são, então, calculados até o valor final de integração T , lembrando que $h = \Delta t = \frac{T}{n}$, onde T é o intervalo de integração e n é o número de passos de integração. Note que o método trapezoidal é considerado um método de integração implícita, já que $f(x_{n+1}, t_{n+1})$ deve ser estimado a partir de 4.15, enquanto os métodos de Runge-Kutta são considerados métodos de integração explícita, obtendo-se de imediato x_{n+1} .

4.4.3 Método de Integração Numérica de Runge-Kutta de 4ª Ordem

Este método tem a mesma estrutura geral do método anterior de Runge-Kutta, com o acréscimo de dois parâmetros k 's que tendem a diminuir o erro do método de Runge-Kutta de 2ª Ordem de h^3 para h^5 .

Para um intervalo de integração $h = \Delta t$, a fórmula geral do método de Runge-Kutta de 4ª Ordem é dada pelas expressões a seguir:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4.17)$$

Com:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, t_n) \cdot h \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right) \cdot h \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{k_2}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right) \cdot h \\ k_4 &= f(x_n + k_3, t_n + h) \cdot h \end{aligned} \quad (4.18)$$

O primeiro valor (primeiro passo) para $t_1 = t_0 + \Delta t = t_0 + h$, por exemplo, seria:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
 k_1 &= f(x_0, t_0) \cdot h \\
 k_2 &= f\left(x_0 + \frac{k_1}{2}, t_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot h \\
 k_3 &= f\left(x_0 + \frac{k_2}{2}, t_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot h \\
 k_4 &= f(x_0 + k_3, t_0 + h) \cdot h
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

Os passos restantes são calculados recursivamente usando a mesma fórmula, porém com os novos valores de x e t .

4.4.4 Exemplo de Aplicação

Na resolução da equação diferencial não linear (problema de valor inicial) a seguir, empregou-se o método de Runge-Kutta de 2^a. Ordem.

Para o seguinte problema de valor inicial :

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dt} &= \text{sen}(x) + x^2 \\
 y(0) &= -1
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

A fórmula recursiva para o método é:

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1 + k_2}{2} \\
 k_1 &= (\text{sen}(x_n) + x_n^2) \cdot h \\
 k_2 &= (\text{sen}(x_n + k_1) + (x_n + k_1)^2) \cdot h
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

A Tabela 4.1 apresenta os valores calculados para um intervalo de tempo, $0 \leq T \leq 1$, e $h = 0.1$, ou seja, 10 passos de integração. A equação diferencial 4.20 tem solução analítica, sendo que o valor exato é então calculado na última coluna da Tabela 4.1. A idéia é permitir a comparação entre o valor numérico calculado iterativamente e o valor exato. Observe que, devido ao passo de integração ser razoavelmente grande $h = 0.1$, o erro é cumulativo e proporcional a h^3 .

As Figuras 4.3 e 4.4 mostram as curvas para o caso onde $h = 0.1$ e $h = 0.01$. É evidente a tendência à superposição das curvas para valores cada vez menores do passo de integração h . A idéia aqui é apresentar um método simples de integração numérica (Runge-Kutta de 2^a. Ordem) e comparar os

resultados com os valores exatos da solução analítica obtida da resolução do problema de valor inicial; e apresentar a influência do tamanho do passo no processo numérico de integração na solução numérica obtida.

Tabela 4.1: Valores do Processo Numérico e Valores Exatos

x_n	x_n^2	$\text{sen}(x_n)$	k_1	k_2	y_n	y_{exato}
0	0	0	0	0	-1	-1
0.1	0.01	0.09983342	0.01098334	0.01230729	-0.9883547	-0.9946708
0.2	0.04	0.19866933	0.02386693	0.02721181	-0.9628153	-0.9773999
0.3	0.09	0.29552021	0.03855202	0.04467391	-0.9212023	-0.9463365
0.4	0.16	0.38941834	0.05494183	0.06463821	-0.8614123	-0.8997277
0.5	0.25	0.47942554	0.07294255	0.08703702	-0.7814225	-0.8359159
0.6	0.36	0.56464247	0.09246425	0.11179425	-0.6792933	-0.7533356
0.7	0.49	0.64421769	0.11342177	0.13882972	-0.5531675	-0.6505089
0.8	0.64	0.71735609	0.13573561	0.16806368	-0.4012679	-0.52604
0.9	0.81	0.78332691	0.15933269	0.19942148	-0.2218908	-0.37861
1	1	0.84147098	0.1841471	0.23283821	-0.0133981	-0.206969

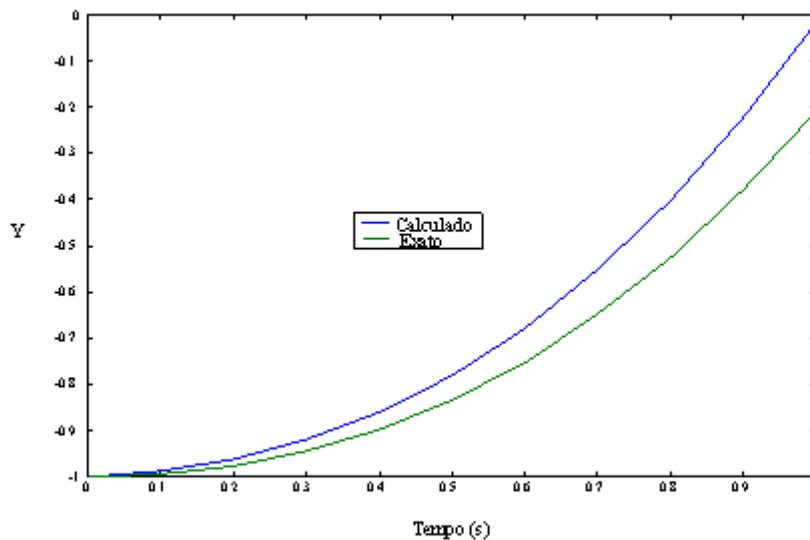


Figura 4.3: Método de Integração Numérica ($h = 0.1$)

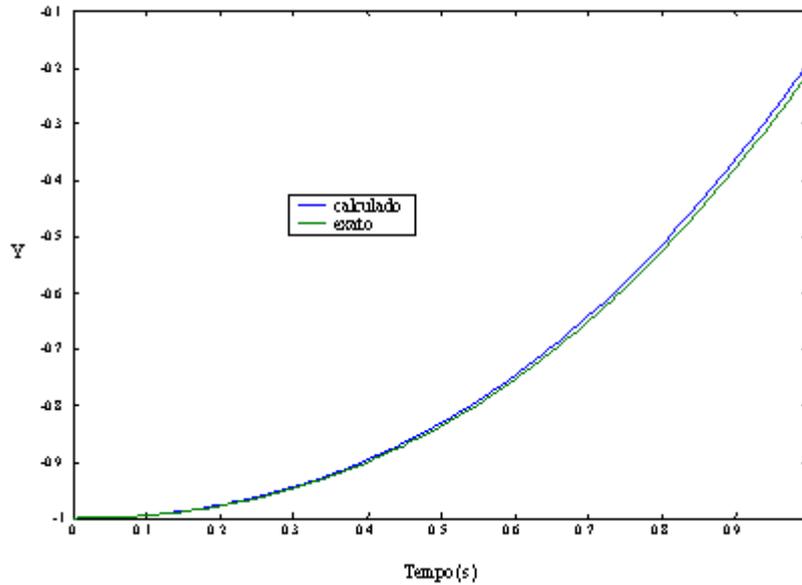


Figura 4.4: Método de Integração Numérica ($h = 0.01$)

4.5 Exemplo de Aplicação de Integração Numérica em Sistemas Elétricos de Potência

No estudo da estabilidade angular transitória, avalia-se o sincronismo das máquinas síncronas (MS) após um curto-circuito ou uma perturbação qualquer. Durante a fase transitória as unidades geradoras podem ou não manter o sincronismo. Para o exemplo de aplicação deste tipo de análise transitória, considera-se o sistema mostrado na Figura 4.5. Inicialmente um curto-circuito ocorre nas proximidades da barra 3 (linha 3-4), com posterior abertura dos disjuntores eliminando o defeito em 100 ms, ou seja, retirada da linha 3-4.

4.5.1 Considerações Iniciais

Para o presente estudo, o modelo clássico de geradores⁹ é utilizado, a

⁹Nos Apêndices D e E há uma descrição de alguns modelos de geradores e de um regulador de tensão

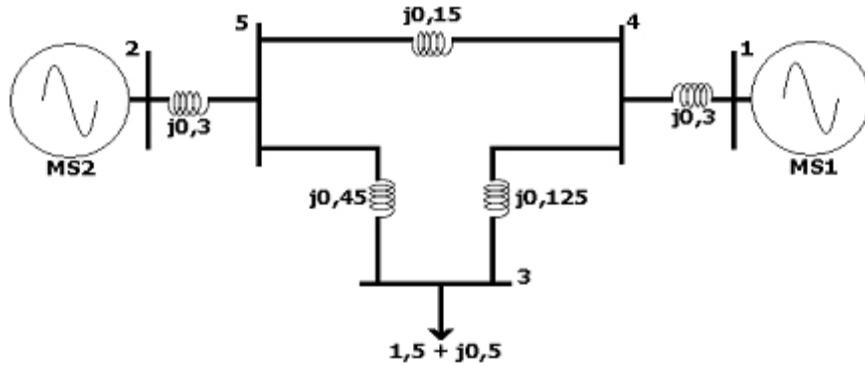


Figura 4.5: Sistema para Análise Transitória

tensão E'_q constante atrás da reatância transitória de eixo direto, representando uma simplificação do modelo E'_q . Isto é bastante satisfatório em análise transitória e simplifica sobremaneira os cálculos. Para as máquinas síncronas (MS), assumiu-se: $X'_d = j0,3$ e $H_1 = 6 s$ e $H_2 = 4 s$ (constante de tempo de inércia das máquinas 1 e 2, respectivamente). Inicialmente, a partir de um estudo de fluxo de potência, obtém-se as tensões e potências nas barras do sistema. Os dados a seguir, Tabela 4.2, são resultados para o modelo apresentado na Figura 4.5 – as reatâncias transitórias das MS aparecem na Figura 4.5 com as respectivas barras de geração 1 e 2.

Tabela 4.2: Dados do Fluxo de Carga

Barra	Tensão	Ângulo	Pot.Ativa	Pot.Reativa
1	1,0000	0,0000	0,500	0,2917
2	0,9867	-0,0209	1,000	0,5000
3	0,9238	-0,1775	-1,500	-0,5000

4.5.2 Conversão da Carga

Um conjunto de equações algébrico-diferencial representa um modelo para o sistema elétrico. Pode-se resolver o conjunto de equações considerando as restrições algébricas impostas às equações diferenciais. Uma outra maneira de contornar esse problema é obter um novo conjunto de equações, apenas equações diferenciais, incorporando as restrições. Isto é feito a seguir.

No estudo transitório, a carga passa a ser representada como uma impedância (a impedância não varia durante o transitório e dessa forma passa a fazer parte da matriz de admitância nodal sem maiores complicações). A conversão é extremamente simples e o esquema a seguir permite acompanhar a conversão, Figura 4.6. Toda carga do sistema deve ser convertida para o modelo impedância constante, já que se pretende obter um conjunto de equações diferenciais a partir do conjunto inicial, algébrico-diferencial. Isto é válido, porém pode-se resolver sem nenhum problema o conjunto de equações algébrico-diferencial inicial.

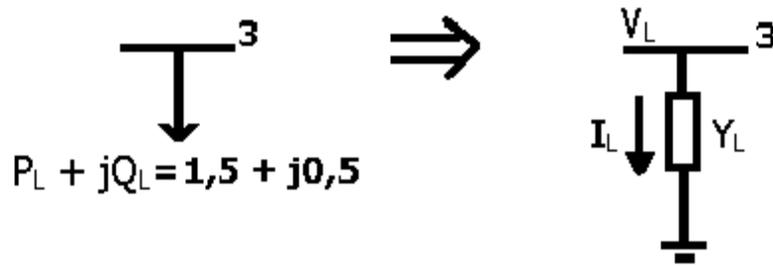


Figura 4.6: Conversão da Carga

Seja:

$$S_L = P_L + jQ_L = \dot{V}_L \dot{I}_L^* \text{ e } \dot{I}_L^* = \dot{Y}_L^* \dot{V}_L^* \quad (4.22)$$

Assim:

$$P_L + jQ_L = \dot{V}_L \dot{V}_L^* \dot{Y}_L^* = V_L^2 \dot{Y}_L^* \quad (4.23)$$

Finalmente:

$$\dot{Y}_L = \frac{P_L}{(V_L)^2} - j \frac{Q}{(V_L)^2} = G_B + jB_L \quad (4.24)$$

A partir dos dados do fluxo de potência para o sistema, tem-se:

$$\dot{Y}_L = 1,7577 + j.0,5859 \quad (4.25)$$

4.5.3 Considerações para o Estudo Transitório

Costuma-se dividir o estudo em 3 fases distintas como segue:

(i) pré-falta: situação dada pelo fluxo de potência, ou seja, a situação de regime permanente ou inicial do problema;

(ii) durante a falta: aplicação da falta, no caso o curto-circuito trifásico. Nesta condição o sistema se apresenta com uma configuração diferente da condição de pré-falta;

(iii) pós-falta: eliminação do defeito, abertura dos disjuntores da linha em curto (3-4) pela proteção. Aqui também o sistema se apresenta com uma configuração diferente das anteriores.

Para a análise em questão, topologicamente o sistema se apresenta de 3 maneiras distintas, refletindo na matriz de admitância nodal do sistema Y_{BUS} , representativa das três situações: $\dot{Y}_{BUS-PRÉ}$, $\dot{Y}_{BUS-DUR}$, $\dot{Y}_{BUS-PÓS}$. Onde:

$\dot{Y}_{BUS-PRÉ}$: é a matriz de admitância nodal obtida a partir da condição inicial do sistema, obtida a partir dos dados da rede;

$\dot{Y}_{BUS-DUR}$: curto-circuito na barra 3 (pela proximidade do defeito, considera-se o curto-circuito ocorrendo na própria barra 3), isto significa conectar a barra 3 ao nó de referência, nó terra – impedância de curto-circuito desprezível. Com isto, a linha que interliga a barra 3 à barra 4 tem sua extremidade aterrada. Portanto, a mudança que ocorre na matriz $\dot{Y}_{BUS-PRÉ}$ em relação à matriz $\dot{Y}_{BUS-DUR}$ é a eliminação da linha e coluna referentes à barra 3 na matriz $\dot{Y}_{BUS-PRÉ}$, o restante permanece inalterado;

$\dot{Y}_{BUS-PÓS}$: a eliminação do defeito nesta fase pela proteção implica na retirada da impedância representativa da linha 3-4 na matriz $\dot{Y}_{BUS-PRÉ}$, ou seja, $\dot{Y}_{34} = 0$.

Outra observação é a redução das matrizes $\dot{Y}_{BUS-DUR}$ e $\dot{Y}_{BUS-PÓS}$ às barras dos geradores, com a potência entregue pelos geradores nas duas situações para o sistema reduzido às barras dos mesmos. Nota-se que na condição inicial não há necessidade de redução, pois os dados foram obtidos a partir do caso base para o fluxo de potência e, portanto, tem-se uma situação inicial de regime permanente. Assim, considera-se o sistema numa situação de equilíbrio, ou numa situação operativa normal.

Das condições iniciais do fluxo de potência, obtém-se a inicialização das variáveis de estado das máquinas a partir das equações 4.26 a 4.28.

$$P_m = P_e = \frac{E_q \cdot V \cdot \text{sen}(\delta - \theta)}{X'_d} \quad (4.26)$$

$$E_q = \sqrt{\left(V + \frac{X'_d \cdot Q}{V}\right)^2 + \left(\frac{X'_d \cdot P}{V}\right)^2} \quad (4.27)$$

$$\delta = \theta + \text{tg}^{-1}\left(\frac{X'_d \cdot P}{V^2 + X'_d \cdot Q}\right) \quad (4.28)$$

$$\omega = \omega_S = 1 = 377(\text{rad/s}) \quad (4.29)$$

As equações de estado para as máquinas síncronas são (onde D é o amortecimento da máquina em p.u.):

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2H} (P_m - P_e - D \cdot \Delta\omega) \quad (4.30)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = 377\Delta\omega \quad (4.31)$$

Com as condições iniciais dos geradores obtidas a partir dos dados iniciais:

$$\begin{aligned} P_{m1} &= 0,500; \\ P_{m2} &= 1,000; \\ E_{q1} &= 1,0978; \\ E_{q2} &= 1,1786; \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0,13706 \text{ rad} = 7,8530^\circ \\ \delta_2 &= 0,24002 \text{ rad} = 13,7521^\circ \end{aligned}$$

4.5.4 Redução das Matrizes \dot{Y}_{BUS} às Barras dos Geradores

Durante o período transitório, as injeções de corrente (potência) são exclusivamente efetuadas pelos geradores em suas barras. Por isso, as injeções de potência nas demais barras devem ser iguais a zero. Essa consideração será aplicada a seguir na obtenção da matriz reduzida genérica representativa de um sistema qualquer.¹⁰

Sabe-se que:

$$I = YE \quad (4.33)$$

Onde:

¹⁰A partir daqui, a notação fasorial \dot{Y} será omitida, valendo-se a notação Y

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Considerando $I_2 = 0$ nesta representação genérica, pois se supõe que a Barra 2 seja uma barra de carga e efetivamente não contribui para a injeção de corrente no sistema, obtendo-se facilmente as seguintes relações:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_1 E_1 + Y_2 E_2 \\ 0 &= Y_3 E_1 + Y_4 E_2 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Assim, chega-se a seguinte redução, também conhecida como redução de Kron:

$$I_1 = (Y_1 - Y_2 Y_4^{-1} Y_3)_1 E_1 \quad (4.36)$$

$$I_1 = Y_{RED} E_1$$

Ou seja:

$$Y_{RED} = Y_1 - Y_2 Y_4^{-1} Y_3 \quad (4.37)$$

Esta redução pode ser aplicada a qualquer matriz, considerando as condições impostas acima e independentemente da dimensão da mesma, uma vez que Y_1, Y_2, Y_3 e Y_4 podem representar matrizes de quaisquer dimensões compatíveis com a equação de Y_{RED} .

4.5.5 Matrizes Y_{BUS}

$$Y_{PRE} = \begin{bmatrix} 3,333 & 0 & 0 & -3,333 & 0 \\ 0 & 3,333 & 0 & 0 & -3,333 \\ 0 & 0 & 1,7577 - j9,6363 & -8,000 & -2,222 \\ -3,333 & 0 & -8,000 & 18,000 & -6,666 \\ 0 & -3,333 & -2,222 & -6,666 & 12,222 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$Y_{DUR} = \begin{bmatrix} 3,333 & 0 & -3,333 & 0 \\ 0 & 3,333 & 0 & -3,333 \\ -3,333 & 0 & 18,000 & -6,666 \\ 0 & -3,333 & -6,666 & 12,222 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$Y_{POS} = \begin{bmatrix} 3,333 & 0 & 0 & -3,333 & 0 \\ 0 & 3,333 & 0 & 0 & -3,333 \\ 0 & 0 & 1,7577 - j1,6363 & 0 & -2,222 \\ -3,333 & 0 & 0 & 10,000 & -6,666 \\ 0 & -3,333 & -2,222 & -6,666 & 12,222 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Aplicando a redução de matrizes às matrizes Y_{DUR} e Y_{POS} , tem-se:

$$Y_{DUR_RED} = \begin{bmatrix} j2,5598 & -j0,4219 \\ -j0,4219 & j2,1941 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$Y_{POS_RED} = \begin{bmatrix} 1,4724 - j0,1675 & -1,1248 - j0,2512 \\ -1,1248 - j0,2512 & 1,6461 - j0,3769 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

A partir das matrizes reduzidas, obtém-se as potências elétricas injetadas por cada gerador nas respectivas barras. As expressões para as potências ativas injetadas têm a seguintes forma geral:

$$P_{e1} = E_{q1}^2 G_{11} + E_{q1} E_{q2} |Y_{12}| \cos(\delta_1 - \angle Y_{12}) \quad (4.43)$$

$$P_{e2} = E_{q2}^2 G_{22} + E_{q1} E_{q2} |Y_{21}| \cos(\delta_2 - \angle Y_{21}) \quad (4.44)$$

Assim, para as duas condições (durante e depois):

$$\begin{aligned} P_{e1_DUR} &= 0,54592 \cos(\delta_1 + 90^\circ) \\ P_{e2_DUR} &= 0,54592 \cos(\delta_2 + 90^\circ) \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} P_{e1_POS} &= 1,7745 + 1,4912 \cos(\delta_1 - 13,6^\circ) \\ P_{e2_POS} &= 2,2866 + 1,4912 \cos(\delta_1 - 13,6^\circ) \end{aligned} \quad (4.46)$$

As equações de estado durante o curto-circuito na barra 3 são:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= \frac{1}{12} (0,5000 - 0,54592 \cos(\delta_1 + 90^\circ) - 6,0\Delta\omega_1) \\ \frac{d\delta_1}{dt} &= 377\Delta\omega_1 \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= \frac{1}{8} (1,000 - 0,54592 \cos(\delta_2 + 90^\circ) - 6,0\Delta\omega_2) \\ \frac{d\delta_2}{dt} &= 377\Delta\omega_2 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Após a retirada da linha 3-4 pela proteção:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\omega_1}{dt} &= \frac{1}{12} (0,5000 - 1,7745 - 1,4912 \cos(\delta_1 - 13,6^\circ) - 6,0\Delta\omega_1) \\
 \frac{d\delta_1}{dt} &= 377\Delta\omega_1 \\
 \frac{d\omega_2}{dt} &= \frac{1}{8} (1,000 - 2,2866 - 1,4912 \cos(\delta_2 - 13,6^\circ) - 6,0\Delta\omega_2) \\
 \frac{d\delta_2}{dt} &= 377\Delta\omega_2
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Os valores de P_{m1} e P_{m2} não variam instaneamente, pois a mudança de velocidade das turbinas não são tão rápidas quanto ao tempo envolvido no curto-circuito, de modo que esses valores se mantêm constantes nas equações relativas às três situações. Após a eliminação do curto-circuito, há um desbalanço de potências mecânicas e elétricas, e o sistema age no sentido de corrigir esse desequilíbrio.

A partir do conjunto de equações 4.47 e 4.48 para as máquinas síncronas, aplica-se o método de Runge-Kutta de 2^a. Ordem no processo de integração numérica, com $h = 0,001$. As fórmulas recursivas são apresentadas a seguir e as Figuras 4.7 e 4.8 mostram os possíveis resultados para um curto-circuito de duração 100 ms.

Durante o curto-circuito na barra 3:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{1}{12} (0,5000 - 0,54592 \cos(\delta_{1n} + 90^\circ) - 6,0 \Delta\omega_{1n}) h \\
k_3 &= 377 \Delta\omega_{1n} h \\
k_2 &= \frac{1}{12} (0,5000 - 0,54592 \cos(\delta_{1n} + k_3 + 90^\circ) - 6,0 \cdot (\Delta\omega_{1n} + k_1)) h \\
k_4 &= 377 (\Delta\omega_{1n} + k_2) h \\
\omega_{1n+1} &= \omega_{1n} + \frac{k_1 + k_2}{2} \\
\delta_{1n+1} &= \delta_{1n} + \frac{k_3 + k_4}{2} \\
k_5 &= \frac{1}{8} (1,000 - 0,54592 \cos(\delta_{2n} + 90^\circ) - 6,0 \Delta\omega_{2n}) h \\
k_7 &= 377 \Delta\omega_{2n} h \\
k_6 &= \frac{1}{8} (1,000 - 0,54592 \cos(\delta_{2n} + k_7 + 90^\circ) - 6,0 (\Delta\omega_{2n} + k_5)) h \\
k_8 &= 377 (\Delta\omega_{2n} + k_6) h \\
\omega_{2n+1} &= \omega_{2n} + \frac{k_5 + k_6}{2} \\
\delta_{2n+1} &= \delta_{2n} + \frac{k_7 + k_8}{2}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Após a retirada da linha 3-4 pela proteção:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{1}{12} (0,5000 - 1,7745 - 1,4912 \cos(\delta_{1n} - 13,6^\circ) - 6,0 \Delta\omega_{1n}) h \\
k_3 &= 377 \Delta\omega_{1n} h \\
k_2 &= \frac{1}{12} (0,5000 - 1,7745 - 1,4912 \cos(\delta_{1n} + k_3 - 13,6^\circ) - 6,0 (\Delta\omega_{1n} + k_1)) h \\
k_4 &= 377 (\Delta\omega_{1n} + k_2) h \\
\omega_{1n+1} &= \omega_{1n} + \frac{k_1 + k_2}{2} \\
\delta_{1n+1} &= \delta_{1n} + \frac{k_3 + k_4}{2} \\
k_5 &= \frac{1}{8} (1,000 - 2,2866 - 1,4912 \cos(\delta_{2n} - 13,6^\circ) - 6,0 \Delta\omega_{2n}) h \\
k_7 &= 377 \Delta\omega_{2n} h \\
k_6 &= \frac{1}{8} (1,000 - 2,2866 - 1,4912 \cos(\delta_{2n} + k_7 - 13,6^\circ) - 6,0 \cdot (\Delta\omega_{2n} + k_5)) h \\
k_8 &= 377 (\Delta\omega_{2n} + k_6) h \\
\omega_{2n+1} &= \omega_{2n} + \frac{k_5 + k_6}{2} \\
\delta_{2n+1} &= \delta_{2n} + \frac{k_7 + k_8}{2}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

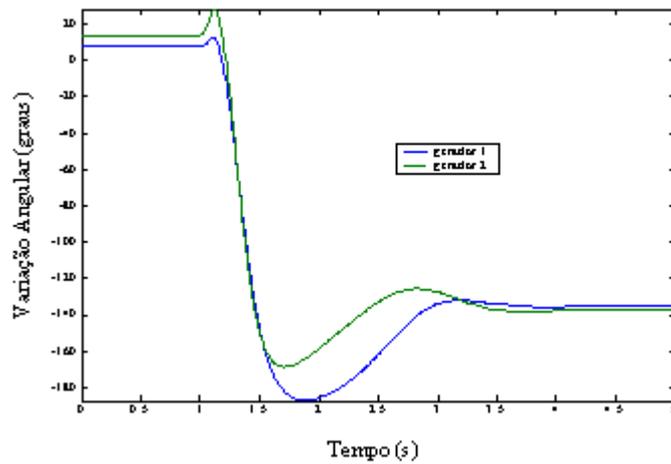


Figura 4.7: Ângulo Delta dos Geradores

Para a duração do curto-circuito na barra 3 e posterior eliminação com a retirada da linha 3-4 pela proteção, as máquinas mantêm o sincronismo, pós-transitório (Figura 4.8), em um novo ponto operativo, como mostrado na Figura 4.7.

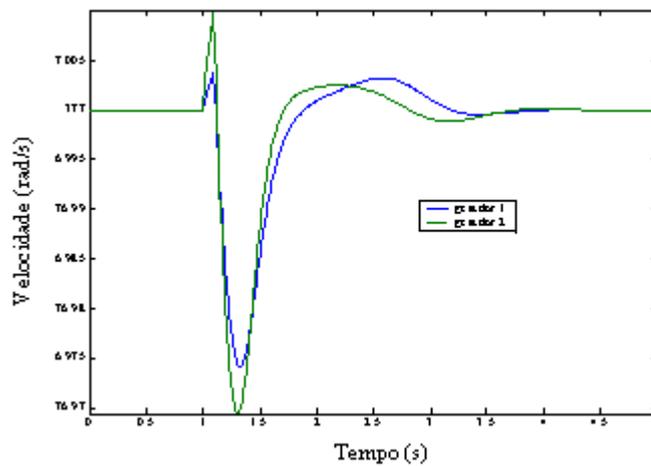


Figura 4.8: Sincronismo dos Geradores

Este capítulo foi dedicado à abordagem e apresentação de alguns métodos de simulação dinâmica aplicadas ao sistema elétrico de potência. Em estudos de curto prazo, como a ocorrência de curto-circuitos em linhas de transmissão, o conjunto de equações sofre alterações antes, durante e depois,

significando um oneroso trabalho em tempo e simplificações que devem aplicadas para tornar eficiente o uso de qualquer um dos métodos de simulação numérica apresentados. A separação do conjunto de equações em escalas temporais de interesse tem por objetivo reduzir este trabalho, permitindo uma abordagem inicial mais eficiente no tratamento das simulações de curto e longo prazos. As considerações e implicações justificam agora, como por exemplo, na simulação de longo prazo um conjunto puramente algébrico, com reduzido esforço computacional e tempo de simulação (como se verá), sem perda de informação. Com isto, a associação de um método de solução que contemple os dois processos em um único processo de simulação agrega a redução de esforços, eficiência computacional e ganho temporal, extremamente importante. Nos próximos capítulos serão apresentadas algumas simulações que permitem inferir rapidamente sobre a proposta mencionada e no uso de qualquer simulação de curto e longo prazos com mínimas alterações nas equações envolvidas num e noutro processo.

Capítulo V

5 Possíveis Contribuições

5.1 Ações de Controle e Estabilidade de Tensão

O estudo da estabilidade em sistemas elétricos de potência permite o emprego das abordagens dinâmica e quase-dinâmica propostas e a análise dos efeitos das possíveis ações de controle a serem tomadas. Estas ações visam à melhoria do nível de tensão e, conseqüentemente, estão diretamente relacionadas à estabilidade do sistema elétrico. Tais ações de controle podem ser implementadas obedecendo, por exemplo, a seguinte hierarquia sugerida pelo operador nacional do sistema elétrico (ONS): chaveamento de banco de capacitores na tentativa de elevar o nível de tensão localmente e suprir a demanda reativa; a atuação de transformadores com taps comutados sob carga (LTC's) tentando corrigir ou controlar o nível de tensão em uma barra; e, finalmente, o ajuste do "set-point" do AVR (Automatic Voltage Regulator), ou seja, mudança na referência da tensão para uma barra a ser controlada por um ou mais geradores.

A insuficiência de tais ações na tentativa de se melhorar o nível de tensão e manter o sistema estável permite ainda a ação drástica de se eliminar parte ou um montante suficiente da carga, em uma ou mais barras, para uma condição operativa de emergência. A estabilidade de tensão do sistema elétrico é o principal objetivo de tais ações de controle a serem empregadas e, posteriormente, com a estabilidade assegurada, a melhoria da condição pós-contingência. A necessidade de um ponto operativo, ou a existência de estabilidade do sistema, está intimamente relacionada ao fenômeno colapso de tensão, e a literatura é rica em assuntos que envolvem tais problemas em sistemas elétricos de potência. Em muitos casos o uso de um modelo estático é satisfatório e suficiente. Como exemplo, se um sistema atinge a condição de colapso a partir de um aumento sucessivo do carregamento, um fluxo de potência convencional é suficiente pra analisar o comportamento do sistema ao longo da trajetória de carregamento [23,25]. Em um caso como este, a perda do ponto de equilíbrio sugere uma perda de estabilidade global e não mais pontual, relacionada a uma bifurcação do tipo sela-nó [29].

Porém, se o estudo envolve um curto intervalo de tempo, é interessante a determinação da existência ou não de um ponto de equilíbrio pós-transitório. Se o período pós-transitório é relevante, então um conjunto de equações algébrico-diferencial ou puramente diferencial deve ser empregado. Por outro

lado, se o interesse for uma análise de longo prazo e se tem um ponto de equilíbrio pós-transitório, um modelo quase-dinâmico para o sistema elétrico de potência pode ser usado [4,5,22,31,30,32].

Dentro deste contexto, a seqüência de eventos e ações de controle pode ser enumerada:

(i) uma contingência ocorre e o sistema suporta, atingindo um ponto de equilíbrio pós-transitório;

(ii) um baixo perfil de tensões é detectado em algumas barras do sistema e ações de controle são então efetuadas na tentativa restaurar as condições operativas aceitáveis;

(iii) as ações obedecem a seguinte seqüência de atuações: compensação shunt local, atuação de transformadores com tapes comutados sob carga (LTC's) , ajuste de "set-point" do AVR;

(iv) se o nível de tensão ainda se encontra abaixo do mínimo operativo para uma barra ou barras de interesse um corte de carga é executado;

(v) o corte de carga a ser executado está relacionado ao baixo nível de tensão e qualquer desvio de freqüência neste caso não é considerado.

5.2 Estabilidade e Dinâmica de Longo Prazo

Suponha que um grande distúrbio tenha ocasionado uma queda de tensão significativa no sistema, e a dinâmica lenta do LTC atue na tentativa de recuperar o nível de tensão e a carga. Como o processo de instabilidade de longo-prazo é inicialmente lento, o ponto de colapso ainda não ocorreu. Logo, determinadas ações de controle, como por exemplo o bloqueio do LTC, podem ser viabilizadas na tentativa de restaurar a estabilidade do sistema.

No caso de recuperação da carga do tipo potência constante, a dinâmica lenta do LTC acaba por reduzir o nível de tensão da mesma, enquanto que momentaneamente a potência da carga tende a se recuperar.

É importante mostrar como se processa a recuperação da carga em um gráfico que relaciona a recuperação instantânea da carga com a recuperação lenta proporcionada pelo LTC [5], Figura 5.1.

As situações antes e após a ocorrência do distúrbio são apresentadas na Figura 5.1. P^o é a característica da carga pré-distúrbio e P é a característica transitória inicial da carga. P e P^o são iguais em regime permanente, e distintas somente durante a recuperação de carga.

Imediatamente após o distúrbio, a carga é reduzida para P . No momento seguinte, o LTC tenta restabelecer a potência P^o da carga; ou seja, inicialmente P aumenta tendendo à P^o , como mostrado pela trajetória seguida de

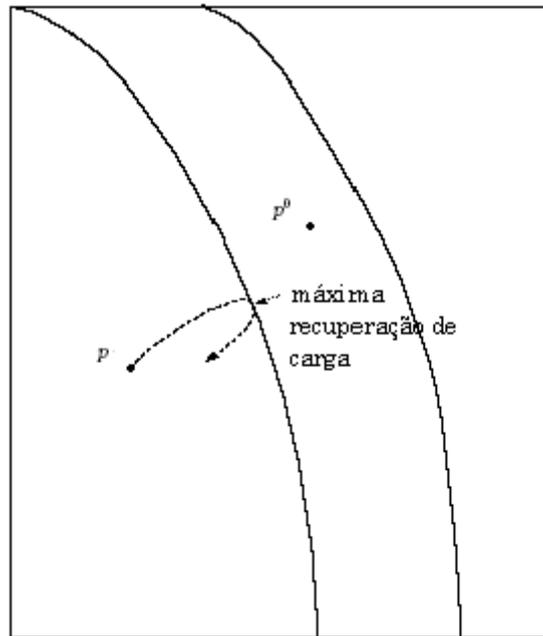


Figura 5.1: Recuperação da carga pelo LTC

P a P^o na Figura 5.1. Como a característica da carga de longo prazo é constante, a ação do LTC na tentativa de restabelecer a carga diminui o nível de tensão da mesma. À medida que o nível de tensão cai, a característica transitória da carga passa por um máximo na região pós-distúrbio. Esse máximo é a máxima carga que o LTC pode suprir após o distúrbio. Esse ponto não pode ser confundido com uma bifurcação sela-nó, já que é uma característica própria do LTC na tentativa de recuperar a carga. Esse ponto corresponderia a uma bifurcação sela-nó se a condição de máximo carregamento fosse a carga P^o - na Figura 5.1 isso não ocorre.

Esse ponto máximo seria a condição ideal de bloqueio do LTC, pois a partir daí, tensão e carga se reduzem e o sistema é levado ao colapso se essa ação de bloqueio do LTC não for tomada a tempo.

Algumas ferramentas de análise de colapso de tensão podem ser úteis na obtenção desse ponto ótimo, sem recorrer a qualquer ferramenta de otimização. Uma alternativa é apresentada a seguir.

5.3 Vetor Tangente Como Identificador de Instante de Bloqueio

Considere a equação representativa do sistema elétrico no modelo quase-dinâmico, com o parâmetro λ sendo o tape do LTC (equação 5.1), ou seja, o tape é o parâmetro que conduz o sistema de um ponto de equilíbrio a outro, e x são as variáveis de estado do sistema.

$$f(x, \lambda) = 0 \quad (5.1)$$

O vetor tangente em um ponto de equilíbrio qualquer (j) pode ser obtido a partir da equação 5.2, derivando-se ambos os membros da equação em relação à λ no ponto (j), assim tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}|^j \frac{dx}{d\lambda}|^j + \frac{\partial f}{\partial \lambda}|^j = 0 \quad (5.2)$$

Manipulando essa equação, obtém-se o vetor tangente:

$$\frac{dx}{d\lambda}|^j = - \left(\frac{\partial f}{\partial x}|^j \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \lambda}|^j \quad (5.3)$$

onde:

$\frac{\partial f}{\partial x}|^j \Rightarrow$ matriz Jacobiana no ponto de equilíbrio j ;
 $\frac{\partial f}{\partial \lambda}|^j \Rightarrow$ derivadas parciais das equações do sistema em relação ao parâmetro tape. Só existem nas barras do LTC, de forma que $\frac{dx}{d\lambda}$ é um vetor esparso.

Ao passar pelo ponto de máxima recuperação de carga, o vetor tangente deve apresentar uma inversão de sentido, ou seja, mudar de sinal. Isso ocorre quando:

$$\text{ sinal}\left(\frac{dx}{d\lambda}|^k\right) \neq \text{ sinal}\left(\frac{dx}{d\lambda}|^{k+1}\right) \quad (5.4)$$

A equação 5.4 pode ser entendida como segue. Dados dois pontos de operação sucessivos do sistema (k) e ($k + 1$), se a direção do vetor tangente nesses dois pontos altera (muda de sinal), tem-se um ponto de máxima recuperação da carga permitido pelo LTC, ou de outra forma, o vetor tangente deve obrigatoriamente passar por um valor nulo, como apresentado pelas Figuras 5.2 e 5.3. Este instante é o momento ideal para se bloquear o LTC, uma vez que a partir desse ponto, o LTC começa a deteriorar o nível de tensão e conseqüentemente a carga recuperada.

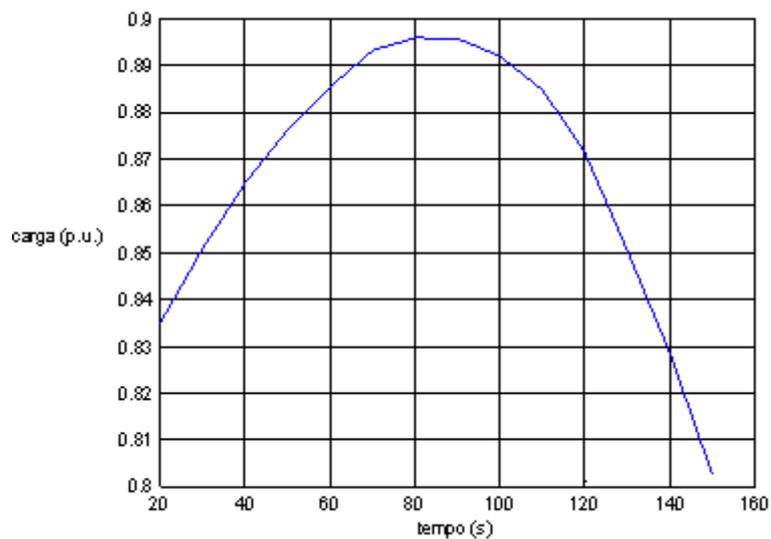


Figura 5.2: Carga Recuperada pelo LTC

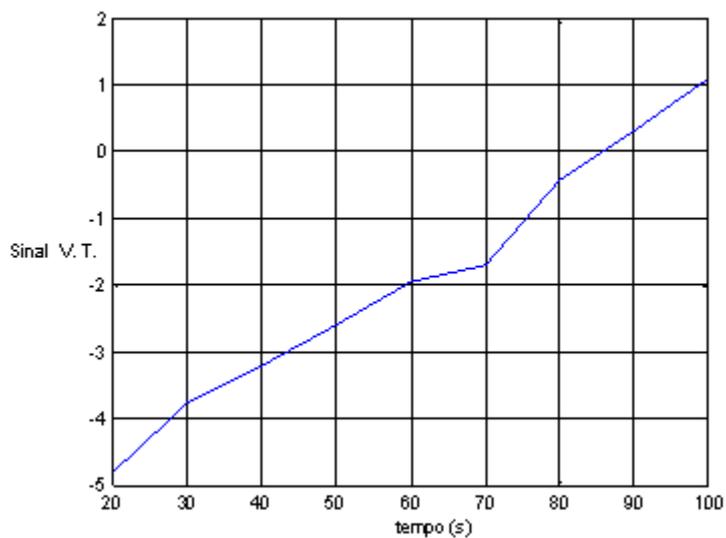


Figura 5.3: Mudança de Sinal do Vetor Tangente

5.4 Ajuste do “set point” do AVR (Automatic Voltage Regulator)

Este controle é feito na tentativa de se manter o nível de tensão em uma barra representativa de uma determinada área ou vizinhança do sistema – barra piloto. É uma extensão do controle remoto de tensão, onde um gerador monitora o nível de tensão em uma outra barra qualquer do sistema. No ajuste do “set-point” do AVR, não apenas um gerador, mas mais de um gerador controla o nível de tensão em uma barra de interesse. Numa aplicação, por exemplo, dois geradores controlam o nível de tensão numa barra piloto. O desvio de tensão na barra piloto é enviado aos geradores, onde o sinal de saída do bloco integrador é obtido a partir dos fatores de participação de cada gerador no controle a ser exercido. A potência reativa é então fornecida até que o desvio esteja dentro de uma margem satisfatória pré-determinada. Este controle é limitado pelas curvas de capacidade das máquinas envolvidas no processo. A Figura 5.4 apresenta esquematicamente o tipo do controle exercido. Cabe ressaltar que a barra piloto escolhida pode ser a barra crítica do sistema sob o ponto de vista do colapso de tensão e os fatores de participação de cada gerador são determinados a partir da reserva de potência reativa de cada máquina.

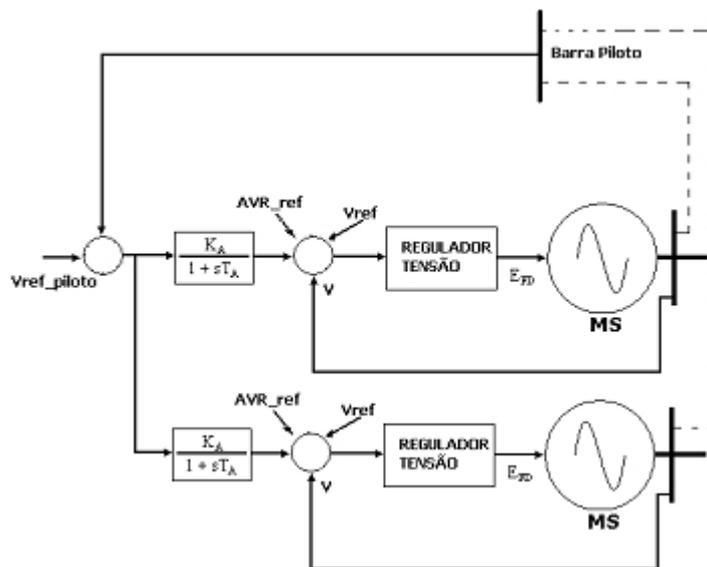


Figura 5.4: Regador Automático de Tensão

5.5 Metodologia para o Corte de Carga por Subtensão

Se todas as medidas discutidas até agora não forem suficientes na obtenção de uma condição operativa satisfatória, duas hipóteses podem ocorrer:

(i) o sistema pode permanecer por um curto espaço de tempo nesta situação;

(ii) o sistema definitivamente não pode permanecer nesta situação. Portanto, se esta situação ocorre e todas as ações de controle já foram tomadas, a alternativa drástica é o corte de carga, visando à manutenção de uma condição mínima operativa para o sistema.

Para a situação (ii), se a frequência do sistema é o problema em questão, várias alternativas podem ser adotadas. A referência [37] propõe um método baseado em subfrequência, que considera um corte rápido de carga e uma massiva compensação de potência reativa, enquanto [38] propõe um método em tempo real para se melhorar a reserva girante do sistema. A idéia principal desta aplicação é encontrar uma condição operativa que não viole o balanço carga-frequência.

O problema da subtensão pode também ser considerado, como uma última medida corretiva, um problema de corte de carga. A partir dessa consideração, uma nova abordagem é então proposta para se determinar a quantidade de carga a ser cortada, de modo a ter um nível mínimo de tensão em determinada barra de interesse. A proposta é similar ao controle remoto de tensão. A magnitude da tensão, então, passa a ser um valor de interesse nessa situação de subtensão. O nível de tensão em determinada barra é portanto conhecido, esse nível restrito de tensão ainda é capaz de uma condição operativa satisfatória e na manutenção da estabilidade do sistema. O efeito prático na implementação dessa abordagem é substituir a coluna das derivadas parciais em relação à tensão para aquela barra por uma nova coluna onde aparecem apenas as derivadas de interesse (barra onde se efetuará o corte de carga) em relação a essa nova variável corte de carga. Portanto, o -1 na equação 5.5, para a barra de interesse (tanto para potência ativa e reativa), e para as demais barras as derivadas são iguais a zero – por conveniência o corte de carga é efetuado em apenas uma barra. Porém, nada impede de se estender o método para mais de uma barra ou para todas as barras de carga do sistema. A equação 5.5 apresenta a metodologia aplicada à matriz Jacobiana de um fluxo de potência convencional. Nota-se que a dimensão da matriz Jacobiana não se altera, já que apenas há uma substituição de variáveis, pois a tensão na barra é conhecida e uma nova variável,

corde de carga, é criada. Nota-se também que este é um valor conhecido da tensão, ou valor esperado para a tensão na barra de interesse, atingido somente quando o corte de carga é efetivado. A simplicidade do método é que deve ser considerada, pois as alterações no conjunto de equações é mínima. Pode-se obviamente utilizar um fluxo de potência ótimo para determinação do montante de carga a ser cortado, porém além de ser um assunto completamente fora do contexto deste trabalho, envolveria equacionamentos nem um pouco simples como este.

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta P_k \\ \Delta P \\ \Delta Q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & \tilde{N} & 0 \\ & & \vdots \\ & & -1 \\ M & \tilde{L} & 0 \\ & & \vdots \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \\ \Delta C \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Na equação 5.5, $H, \tilde{N}, M, \tilde{L}$ são as derivadas parciais das equações de potência ativa e reativa (ΔP e ΔQ) em relação à ($\Delta \theta$) e (ΔV) e diferem do Jacobiano comum porque não contêm as derivadas parciais com relação à tensão da barra a ser efetivado o corte de carga. A última coluna vem das equações $P_k = P_{ko}(V, \theta) - \Delta C$ e $Q_k = Q_{ko}(V, \theta) - \Delta C$, onde k é a barra em que o corte de carga será efetuado, P_{ko} é o montante de carga na barra k e ΔC o montante de carga a ser cortado.

5.6 Uma Proposta de Solução por Newton-Raphson

No processo quase-dinâmico admite-se que o sistema passou pela fase transitória e já se encontra num novo ponto operativo ou de equilíbrio. O exemplo a seguir pretende expor a formulação já apresentada para um conjunto de equações algébrico-diferencial, ou seja, procura-se a solução para o conjunto de equações puramente algébrico.

Neste exemplo, o processo de Newton-Raphson é empregado para se obter a solução de regime permanente ou quase-dinâmica. A partir desta formulação e da extensão do método trapezoidal, propõe-se um método iterativo de resolução das equações algébrico-diferenciais, mantendo-se o conjunto original e a matriz Jacobiana calculada para o processo quase-dinâmico, com pequenas modificações nesta matriz.

Seja o problema de valor inicial a seguir:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \dot{x} = 1 - \text{sen}(x) + \cos(y) & (5.6) \\
g(x, y) &= 0 = x - y^2 \\
x(0) &= .5 \\
y(0) &= 2
\end{aligned}$$

A matriz Jacobiana para o conjunto de equações é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(x) & -\text{sen}(y) \\ 1 & -2y \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Para o processo iterativo quase-dinâmico, tem-se:

$$\begin{bmatrix} -\Delta f(x, y) \\ -\Delta g(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Seja agora a equação que representa a fórmula de recorrência para o método trapezoidal:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad (5.9)$$

Esta equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$F(x, y) = -x_{n+1} + x_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad (5.10)$$

Assim, chega-se a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} &= -1 + \frac{h}{2} \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right] \\
\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} &= \frac{h}{2} \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right]
\end{aligned}$$

onde $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ são as derivadas parciais que aparecem na matriz Jacobiana no processo quase-dinâmico. Portanto, no processo iterativo de resolução de equações algébrico-diferencial, pode-se optar por uma metodologia que permita ao mesmo tempo obter soluções dinâmicas e/ou quase-dinâmicas, apenas com a inclusão da constante h , passo de integração e o acréscimo de -1 na diagonal da matriz representativa das equações dinâmicas. Obviamente estas considerações são feitas apenas para as equações

dinâmicas, já que as equações puramente algébricas mantêm suas derivadas parciais sem qualquer alteração.

A matriz Jacobiana para o processo de resolução numérica iterativa para o problema de valor inicial apresentado passa a ter a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -1 + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{h}{2} \cos(x) & -\frac{h}{2} \text{sen}(y) \\ 1 & -2y \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Considerando $h = 2$ e adicionando a matriz quadrada $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ à matriz Jacobiana anterior, pode-se permutar entre a resolução dinâmica ou quase-dinâmica para o sistema algébrico-diferencial. A Figura 5.5 apresenta o resultado da simulação dinâmica e quase-dinâmica para o problema de valor inicial apresentado na equação 5.6. A extensão para qualquer conjunto de equações é idêntica a esta proposta.

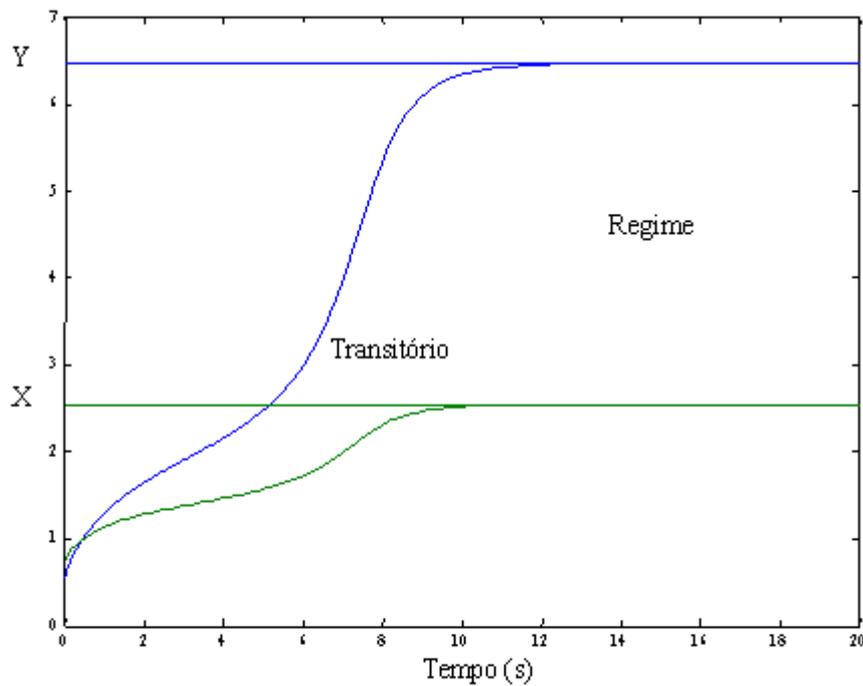


Figura 5.5: Solução do PVI : Processo Dinâmico e Quase-Dinâmico

5.7 Proposta de Determinação de Autovalores Críticos

Há na literatura vários trabalhos que tentam apontar um comportamento previsível para alguns índices que identificariam os tipos de bifurcação no modelo de sistema elétrico. A presença de não linearidades intrínsecas ao problema, devido às equações envolvidas no modelo para o sistema elétrico de potência, infelizmente produz um comportamento quase sempre imprevisível, principalmente nas proximidades dos pontos de bifurcação. A teoria das bifurcações e a teoria linear têm ajudado a compreender mais profundamente o assunto.

Um conjunto de equações não lineares, apresentando um ponto de equilíbrio, pode ser linearizado, fornecendo informações relevantes sobre a estabilidade na vizinhança deste ponto. Com isto, pode-se encontrar para esse conjunto linear de equações, informações que são determinantes na avaliação do processo de instabilidade e do tipo de bifurcação envolvida. Da teoria das bifurcações, tem-se associado ao comportamento monotônico da queda de tensão no colapso, uma bifurcação do tipo sela-nó. Isto sugere um autovalor nulo para matriz Jacobiana no ponto de colapso. Identificar o comportamento, por exemplo, do menor autovalor à medida que o sistema caminha com um aumento gradativo do carregamento é um proposta interessante. Porém, quase sempre, somente próximo ao ponto de colapso é que se pode prever de fato qual o autovalor e autovetor associados e as variáveis de estado envolvidas. Este, portanto, não é um bom índice para prever o fenômeno colapso de tensão.

Estabelecer um critério, ou identificar antecipadamente qual autovalor irá se anular é uma tarefa difícil, apesar do conjunto linear de equações, válidas quase sempre bem próximas do ponto de equilíbrio existente. Na identificação da bifurcação de Hopf, subcrítica ou supercrítica, a teoria linear nos ajuda a encontrar, pelo menos no ponto de bifurcação, um par de autovalores puramente imaginários. Agregando a estas duas informações importantes, a bifurcação induzida por singularidade (típica dos sistemas elétricos de potência e o modelo algébrico-diferencial), tem-se os tipos mais comuns de bifurcações que ocorrem no sistema elétrico de potência:

- (i) um autovalor nulo : bifurcação sela-nó;
- (ii) um par de autovalores puramente complexos conjugados que cruzam o plano complexo da esquerda para direita : bifurcação de Hopf;
- (iii) um autovalor tendendo ao infinito (ilimitado): bifurcação induzida por singularidade.

Apesar do conjunto de equações lineares poder identificar os pontos de

bifurcação, um índice quase sempre falha na tentativa de identificar um comportamento previsível para qualquer um dos 3 casos. Como há um certo comprometimento entre a teoria e as equações linearizadas para o sistema elétrico de potência, o conjunto de equações utilizado está intrinsecamente relacionado aos resultados obtidos. Por exemplo, para se identificar uma bifurcação sela-nó é suficiente o conjunto de equações do fluxo de potência, como apresentado no Capítulo III. A determinação do par de autovalores complexos conjugados da bifurcação de Hopf exige um modelo mais completo de sistema. Todavia, pode-se reduzir o conjunto de equações algébrico-diferencial a apenas as equações diferenciais do sistema, obtendo-se assim um conjunto linearizado que fornece alternativamente o comportamento dinâmico para o sistema em torno do ponto de equilíbrio considerado.

A proposta, portanto, não é mais monitorar o menor autovalor ou o menor valor singular para as equações linearizadas, mas tentar estabelecer com algum critério um certo limite para os autovalores críticos no processo de carregamento gradativo do sistema. Garantindo que este limite seja um índice (limitador), e como tal apresente um comportamento semelhante ao autovalor crítico na bifurcação. Com este propósito, pretende-se encontrar este índice que limitaria os prováveis autovalores que estariam envolvidos em algum tipo de bifurcação, os autovalores críticos.

Desse modo, seja o conjunto algébrico-diferencial que modela um sistema elétrico de potência:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ 0 &= g(x, y) \end{aligned} \quad (5.12)$$

As variáveis x estão relacionadas ao comportamento dinâmico do sistema, relacionadas às equações das máquinas síncronas e reguladores. A equação $g(x, y) = 0$ são as equações da rede (topologia da rede) ou equações do fluxo de potência. Estas equações podem ser linearizadas em torno de um ponto de equilíbrio e reduzidas às equações dinâmicas apenas, equação 5.13:

$$J_{red} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x} \right) \Big|_{x_o, y_o} \quad (5.13)$$

Esta matriz J_{red} é utilizada na determinação do limite proposto para os autovalores críticos. Uma vez que as equações reduzidas implicitamente consideram o conjunto algébrico, esta matriz Jacobiana reduzida representativa do sistema no ponto de equilíbrio, fornece as informações relativas ao sistema durante todo o processo gradativo de carregamento. Caso ocorra, este conjunto é suficiente para se detectar as bifurcações apresentadas: sela-nó, Hopf - estudadas no Capítulo II. Porém, deve ficar claro que para uma bifurcação

do tipo sela-nó é suficiente o conjunto algébrico de equações ($0 = g(x, y)$), como mostrado no Capítulo III.

A idéia é baseada na expressão proposta em [18], que fornece um limite superior para os autovalores críticos para matriz Jacobiana do fluxo de potência, equação 5.14:

$$I_{ND} = VT^T \times J \times VT \quad (5.14)$$

onde:

$VT \Rightarrow$ vetor tangente normalizado;

$VT^T \Rightarrow$ vetor tangente normalizado transposto;

$J \Rightarrow$ matriz Jacobiana no ponto de equilíbrio.

O cálculo do vetor tangente já foi apresentado anteriormente, e novamente é mostrado na equação 5.15. Para as equações de fluxo de potência, o cálculo é extremamente simplificado, uma vez que depende apenas do carregamento inicial do sistema (caso base).

$$VT = \frac{\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix}}{\Delta\lambda} = \frac{J^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix}}{\Delta\lambda} \quad (5.15)$$

Como:

$$\begin{aligned} \Delta P &= P_o \Delta\lambda \\ \Delta Q &= Q_o \Delta\lambda \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde P_o e Q_o são as potências ativas e reativas iniciais e $\Delta\lambda$ é o fator de carregamento que leva o sistema de um estado de equilíbrio a outro. Substituindo ΔP e ΔQ na equação 5.15, obtém-se:

$$VT = J^{-1} \begin{bmatrix} P_o \\ Q_o \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Porém a forma geral para o vetor tangente é dada pela equação 5.18:

$$VT = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta\lambda} = J^{-1} \begin{bmatrix} \Delta f \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

onde x e y são as variáveis de estado do sistema e J a matriz Jacobiana que contém as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Para as equações de fluxo de potência o VT assume a forma da equação 5.17.

Agora, considerando J como a matriz Jacobiana reduzida J_{red} , equação 5.13, surgem alguns problemas relacionados à determinação do vetor $\begin{bmatrix} \Delta f \\ \Delta\lambda \end{bmatrix}$,

que não é conhecido explicitamente. Este problema é contornado usando para o cálculo do vetor tangente a proposta da equação 5.19, que nada mais é do que a primeira iteração dos métodos das potências, apresentado no Apêndice A2.

$$VT = J^{-1}J^{-1}[\Delta\epsilon] \quad (5.19)$$

Onde $\Delta\epsilon$ é o vetor de erro para o caso convergido do processo iterativo. Observa-se que o vetor tangente calculado pela equação 5.19 independe da determinação do vetor $[\frac{\Delta f}{\Delta \lambda}]$, sendo agora facilmente obtido para as variáveis dinâmicas.

Esta proposta de determinação de um índice limitador para os autovalores críticos tem apresentado muito bons resultados, como será mostrado no Capítulo VI. O índice é baseado na proposta apresentada em [47], onde um autovalor de interesse é um limitante superior para os autovalores que apresentam ou irão apresentar a ocorrência da bifurcação sela-nó. A extensão para o cálculo deste índice [47], utilizando a equação 5.19, permite no entanto trabalhar não apenas com o conjunto de equações do fluxo de potência, como mostrado em [47], mas também para um conjunto de equações puramente diferenciais, onde o parâmetro variável (fator de carregamento, por exemplo), ocorre em uma das barras do sistema. A dificuldade aqui, que não ocorre para as equações de fluxo de potência (equação 5.17), é o relacionamento entre uma variação paramétrica na rede e o seu efeito nas variáveis dinâmicas presentes nas equações diferenciais. A idéia do uso da 1^a iteração do método das potências é um cálculo alternativo proposto para a equação 5.17, que elimina estas dificuldades e fornece para o índice um comportamento similar (identificação da bifurcação) para o autovalor crítico, além de ser um limitante para os autovalores que eventualmente apresentam as características das bifurcações sela-nó ou de Hopf. Os resultados obtidos a partir das equações 5.17 e 5.19 mostram comportamentos idênticos para as equações de fluxo de potência, além de permitir a aplicação ao conjunto de equações puramente diferenciais com uma variação paramétrica da rede - um obstáculo que não aparece na equação 5.19.

Capítulo VI

6 Simulação

6.1 Exemplo de Aplicação

A simulação de curto e longo prazos em sistemas elétricos de potência é extremamente simplificada a partir da simulação quase-dinâmica e a partir da proposta de integração numérica iterativa, mantendo-se a estrutura da matriz Jacobiana nos dois processos. Nesta seção há um exemplo ilustrativo de aplicação dos métodos quase-dinâmico e dinâmico. Para isso, seja o sistema apresentado na Figura 6.1, com as máquinas representadas pelo modelo de 2 eixos (enrolamentos amortecedores nos eixos d e q) e os seus respectivos reguladores de tensão¹¹. A Figura 6.1 e a Tabela 6.1 apresentam o sistema proposto para a simulação e os dados da rede, respectivamente - a potência de base é de 100 MVA. As Tabelas 6.2 e 6.3 apresentam os parâmetros de interesse das máquinas e reguladores de tensão. Durante todo o processo a potência mecânica (torque mecânico) fornecida no eixo dos geradores foi considerada constante e o ângulo delta (ângulo de carga) do gerador 1 a referência angular do sistema com relação à fase A .

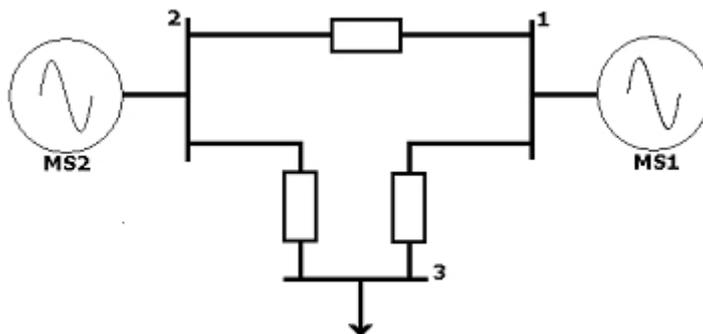


Figura 6.1: Sistema de 3 Barras

¹¹Nos Apêndices D e E há uma descrição pormenorizada de alguns tipos de geradores e regulador de tensão

Tabela 6.1: Dados do Sistema de 3 Barras

LT	R%	X%	B _{sh} %
12	10	20	2
13	5	25	3
23 – <i>Trafo(LTC)</i>	0	10	0

Tabela 6.2: Dados dos Geradores

<i>MS</i>	<i>T'go</i>	<i>T'do</i>	<i>H</i>	<i>X_d</i>	<i>X'_d</i>	<i>X_q</i>	<i>X'_q</i>	<i>D</i>
1	0,31	8,96	23,64	0,146	0,0608	0,097	0,097	20
2	0,54	6,00	6,40	0,896	0,1198	0,865	0,197	15

Tabela 6.3: Dados dos Reguladores de Tensão

<i>MS</i>	<i>Ta</i>	<i>Ka</i>	<i>Te</i>	<i>Ke</i>	<i>Tf</i>	<i>Kf</i>	<i>VRmax</i>	<i>VRmin</i>
1	0,20	20	0,314	1,0	0,35	0,063	3,5	-2,5
2	0,20	20	0,314	1,0	0,35	0,063	3,5	-2,5

Para o modelo de regulador a saturação de campo obedece a seguinte equação: $S_E = 0,0039e^{(1.555*Efd)}Efd$. Para a simulação, a carga ativa na barra 3 é subitamente aumentada em dois instantes: 2 s e 9 s, em 100% e 120% da carga inicial, respectivamente. O tap do transformador (entre as linhas 2 e 3) é ajustado inicialmente em 0,96, com tempo de atuação inicial de 5 s e posteriormente de 3 s para cada mudança. A Tabela 6.4 a seguir apresenta o valores iniciais obtidos de um fluxo de potência para o sistema de 3 barras. A partir desses dados são então calculadas as variáveis iniciais das máquinas e reguladores de tensão, equações 6.1 a 6.12.

$$\delta = \theta + \arctg \left(\frac{X'_d P}{V^2 + X'_d Q} \right) \quad (6.1)$$

$$I = \frac{1}{V} \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (6.2)$$

Tabela 6.4: Dados do Fluxo de Potência

Barra	Tensão(pu)	Ângulo(rad)	P.Ativa (pu)	P.Reativa(pu)
1	1.0500	0,0000	0,5111	0,1521
2	1.0500	-0.0266	0,5000	0,3909
3	0.9784	-0.0842	-1,0000	-0,5000

$$\alpha = \theta - \arctg\left(\frac{P}{Q}\right) \quad (6.3)$$

$$I_d = I \sen(\delta - \alpha) \quad (6.4)$$

$$I_q = I \cos(\delta - \alpha) \quad (6.5)$$

$$E_{FD} = E'_q + (X_d - X'_d) I_d \quad (6.6)$$

$$E'_q = V \cos(\delta - \theta) + X'_d I_d \quad (6.7)$$

$$E'_d = V \sen(\delta - \theta) - X'_q I_q \quad (6.8)$$

$$T_m = (E'_q - X'_d I_d) I_q + (E'_d + X'_q I_q) I_d \quad (6.9)$$

$$\omega = \omega_s = 1 \quad (6.10)$$

$$V_R = K_E E_{FD} + S_E$$

$$V_S = -\frac{K_F}{T_E} S_E \quad (6.11)$$

$$V_{REF} = \frac{V_R}{K_A} + V + V_S - V_{PSS} \quad (6.12)$$

As equações linearizadas referentes ao modelo de dois eixos para as máquinas síncronas e as equações linearizadas para os reguladores de tensão são apresentadas para facilitar o acompanhamento do processo de montagem das matrizes Jacobianas, equações 6.13 a 6.52.

$$\Delta \dot{E}'_d = \frac{\partial \dot{E}'_d}{\partial E'_d} \Delta E'_d + \frac{\partial \dot{E}'_d}{\partial I_q} \Delta I_q \quad (6.13)$$

$$\Delta \dot{E}'_q = \frac{\partial \dot{E}'_q}{\partial E'_q} \Delta E'_q + \frac{\partial \dot{E}'_q}{\partial I_d} \Delta I_d \quad (6.14)$$

$$\Delta \dot{\delta} = \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \omega} \Delta \omega \quad (6.15)$$

$$\Delta \dot{\omega} = \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial E'_d} \Delta E'_d + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial E'_q} \Delta E'_q + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \omega} \Delta \omega + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial I_d} \Delta I_d + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial I_q} \Delta I_q \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial \dot{E}'_d}{\partial E'_d} = -\frac{1}{T'_{qo}} \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial \dot{E}'_q}{\partial E'_q} = -\frac{1}{T'_{do}} \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial \dot{E}'_d}{\partial I_q} = \frac{X_q - X'_q}{T'_{qo}} \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial \dot{E}'_q}{\partial I_d} = -\frac{X_d - X'_d}{T'_{do}} \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \omega} = 1 \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial E'_d} = -\frac{I_d}{2H} \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial E'_q} = -\frac{I_q}{2H} \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \omega} = -\frac{D}{2H} \quad (6.24)$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial I_d} = \frac{-E'_d + (X'_d - X'_q) \cdot I_{q(0)}}{2H} \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial I_q} = \frac{-E'_q + (X'_d - X'_q) \cdot I_d}{2H} \quad (6.26)$$

$$\Delta I_d = \frac{\partial I_d}{\partial E'_q} \Delta E'_q + \frac{\partial I_d}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial I_d}{\partial \delta} \Delta \delta + \frac{\partial I_d}{\partial \theta} \Delta \theta \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial I_d}{\partial E'_q} = \frac{1}{X'_d} \quad (6.28)$$

$$\frac{\partial I_d}{\partial V} = -\frac{\cos(\delta - \theta)}{X'_d} \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial I_d}{\partial \delta} = \frac{V \operatorname{sen}(\delta - \theta)}{X'_d} \quad (6.30)$$

$$\frac{\partial I_d}{\partial \theta} = -\frac{V \operatorname{sen}(\delta - \theta)}{X'_d} \quad (6.31)$$

$$\Delta I_q = \frac{\partial I_q}{\partial E'_d} \Delta E'_d + \frac{\partial I_q}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial I_q}{\partial \delta} \Delta \delta + \frac{\partial I_q}{\partial \theta} \Delta \theta \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial I_q}{\partial E'_d} = -\frac{1}{X'_q} \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial I_q}{\partial V} = \frac{\operatorname{sen}(\delta - \theta)}{X'_q} \quad (6.34)$$

$$\frac{\partial I_q}{\partial \delta} = \frac{V \cos(\delta - \theta)}{X'_q} \quad (6.35)$$

$$\frac{\partial I_q}{\partial \theta} = -\frac{V \cos(\delta - \theta)}{X'_q} \quad (6.36)$$

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial E'_d} \Delta E'_d + \frac{\partial P}{\partial E'_q} \Delta E'_q + \frac{\partial P}{\partial I_d} \Delta I_d + \frac{\partial P}{\partial I_q} \Delta I_q \quad (6.37)$$

$$\frac{\partial P}{\partial E'_d} = I_d \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial P}{\partial E'_q} = I_q \quad (6.39)$$

$$\frac{\partial P}{\partial I_d} = E'_d + (X'_q - X'_d) I_q \quad (6.40)$$

$$\frac{\partial P}{\partial I_q} = E'_q + (X'_q - X'_d) I_d \quad (6.41)$$

$$\Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial E'_d} \Delta E'_d + \frac{\partial Q}{\partial E'_q} \Delta E'_q + \frac{\partial Q}{\partial I_d} \Delta I_d + \frac{\partial Q}{\partial I_q} \Delta I_q \quad (6.42)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial E'_d} = -I_q \quad (6.43)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial E'_q} = I_d \quad (6.44)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial I_d} = E'_q - 2X'_d I_d \quad (6.45)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial I_q} = -E'_d - 2X'_q I_q \quad (6.46)$$

$$\Delta \dot{V}_R = \frac{\partial \dot{V}_R}{\partial V_R} \Delta V_R + \frac{\partial \dot{V}_R}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial \dot{V}_R}{\partial V_S} \Delta V_S + \frac{\partial \dot{V}_R}{\partial V_{PSS}} \Delta V_{PSS} \quad (6.47)$$

$$\Delta \dot{V}_R = -\frac{1}{T_A} \Delta V_R - \frac{K_A}{T_A} \Delta V - \frac{K_A}{T_A} \Delta V_S + \frac{K_A}{T_A} \Delta V_{PSS} \quad (6.48)$$

$$\Delta \dot{E}_{FD} = \frac{\partial \dot{E}_{FD}}{\partial E_{FD}} \Delta E_{FD} + \frac{\partial \dot{E}_{FD}}{\partial V_R} \Delta V_R + \frac{\partial \dot{E}_{FD}}{\partial S_E} \Delta S_E \quad (6.49)$$

$$\Delta \dot{E}_{FD} = -\frac{K_E}{T_E} \Delta E_{FD} + \frac{1}{T_E} \Delta V_R - \frac{1}{T_E} \Delta S_E \quad (6.50)$$

$$\Delta \dot{V}_S = \frac{\partial \dot{V}_S}{\partial V_S} \Delta V_S + \frac{\partial \dot{V}_S}{\partial E_{FD}} \Delta E_{FD} + \frac{\partial \dot{V}_S}{\partial V_R} \Delta V_R + \frac{\partial \dot{V}_S}{\partial S_E} \Delta S_E \quad (6.51)$$

$$\Delta \dot{V}_S = -\frac{1}{T_F} \Delta V_S - \frac{K_E K_F}{T_E T_F} \Delta E_{FD} + \frac{K_F}{T_E T_F} \Delta V_R - \frac{K_F}{T_E T_F} \Delta S_E \quad (6.52)$$

6.2 Simulação de Curto e Longo Prazos

6.2.1 Sistema Modelo

A tensão na Barra 3 (tensão controlada pelo LTC) nas fases transitórias e de longo prazo, durante o abrupto aumento da carga na Barra 3 (100% e 120%), é mostrada na Figura 6.2. O LTC atua para um nível de tensão inferior a 0.98 p.u. na barra controlada; a primeira atuação, para essa simulação proposta, ocorre em 5 s e posteriormente a cada 3 s. O sistema se recupera inicialmente, porém o nível de tensão final continua abaixo de 0.98 p.u., obrigando o LTC a atuar uma única vez, elevando o nível de tensão (após o equilíbrio) para 0.99 p.u..

Em 9 s há um novo aumento abrupto da carga na barra 3, com ação do LTC recuperando a tensão em torno 1.0 p.u. após o equilíbrio. É importante notar o processo de simulação rápida no tempo com o processo dinâmico de longo prazo durante o período de simulação. As Figuras 6.3 a 6.8 mostram as respostas dinâmicas de curto e longo prazos para algumas variáveis de interesse nessa simulação. Uma vez que o LTC recupera o nível de tensão da barra 3, as tensões de campo das máquinas tendem a se estabilizarem em valores próximos aos valores inicialmente obtidos a partir do fluxo de potência (caso base), ou seja, a ação de controle (atuação do LTC) foi satisfatória para esse caso. O comportamento dos reguladores de tensão das máquinas durante os aumentos de carga e atuações do LTC são mostrados nas Figuras 6.3 e 6.4.

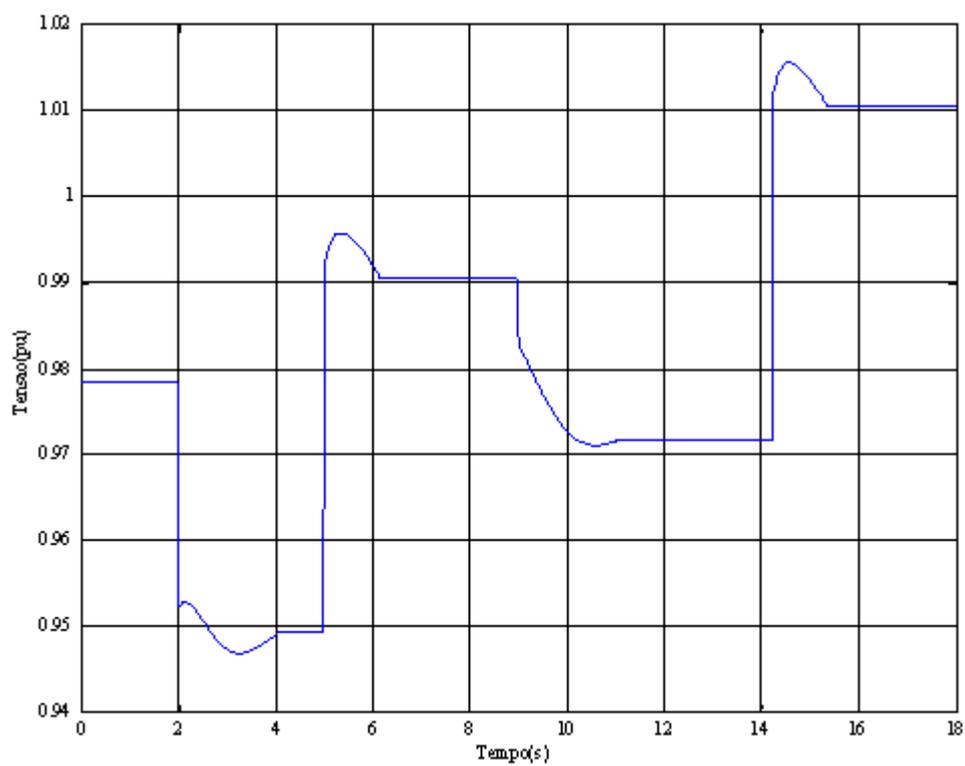


Figura 6.2: Perfil de Tensão na Barra 3 - Sistema de 3 Barras

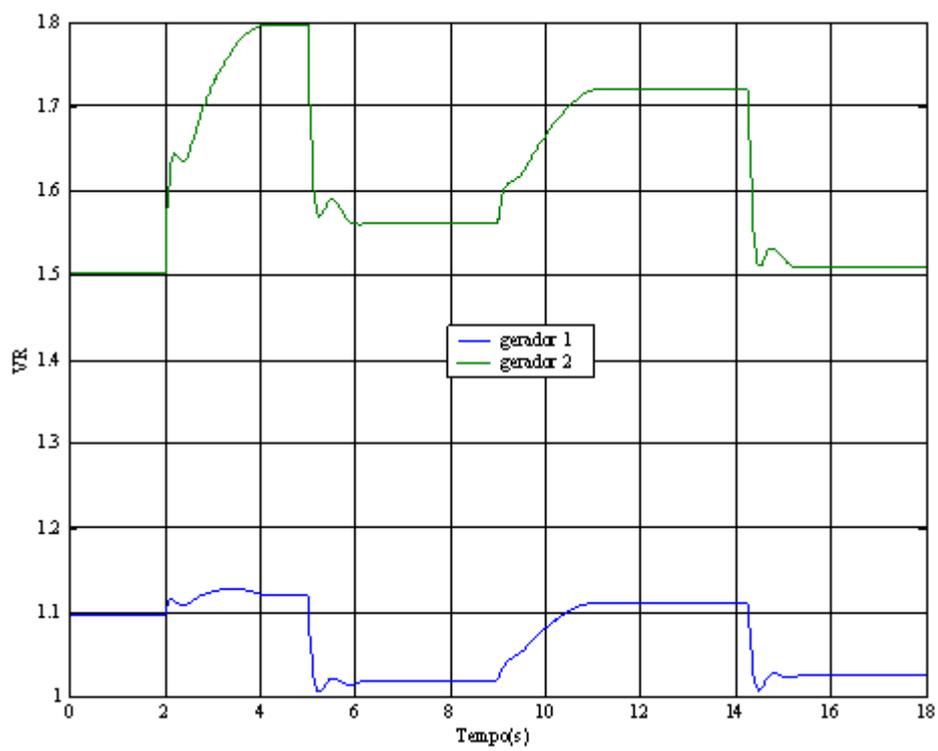


Figura 6.3: Saída do Bloco Regulador - Sistema de 3 Barras

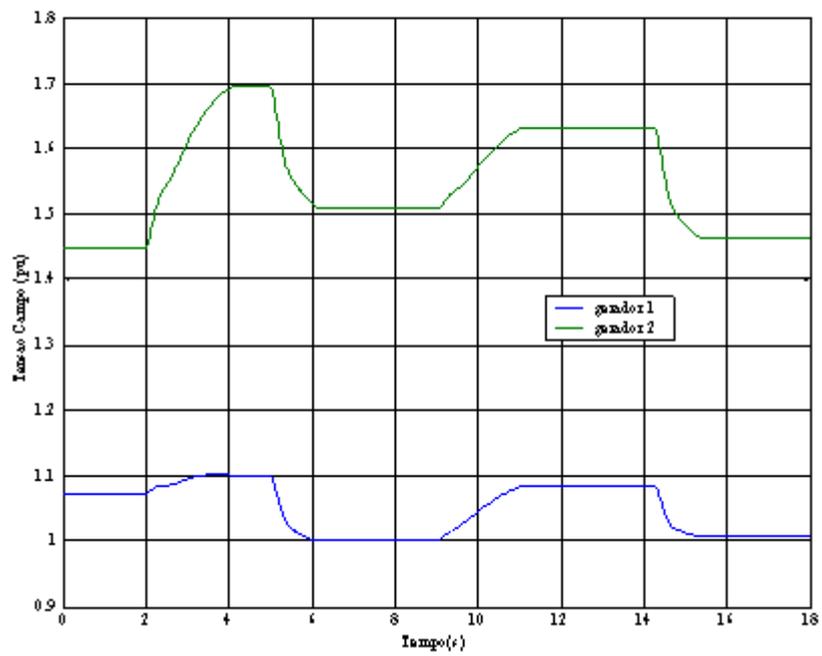


Figura 6.4: Tensão de Campo - Sistema de 3 Barras

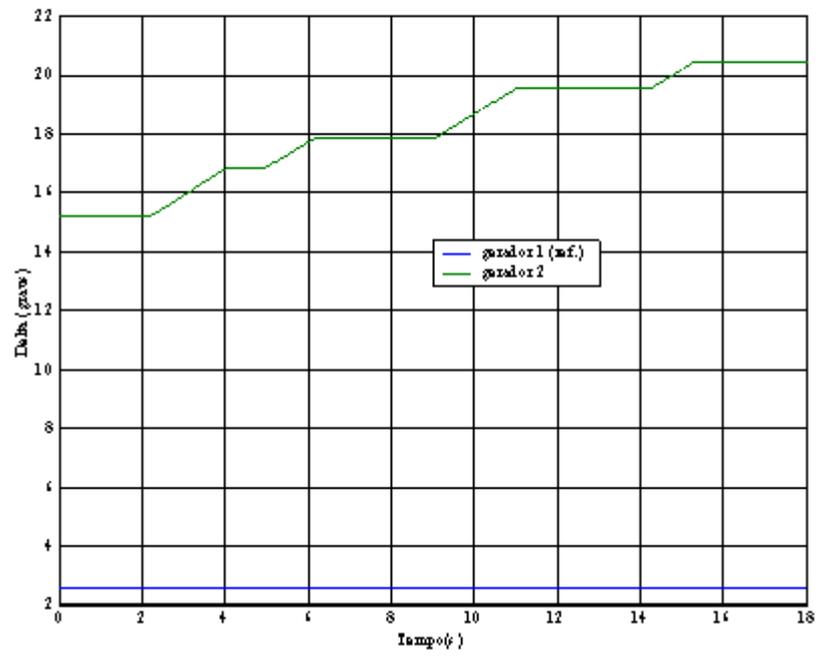


Figura 6.5: Variação Angular - Sistema de 3 Barras

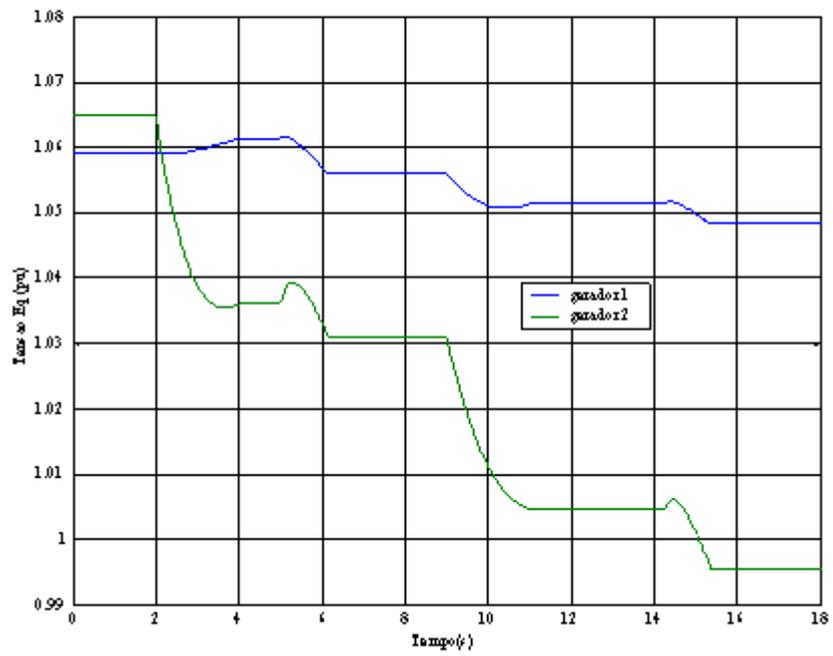


Figura 6.6: Tensão E_q dos Geradores - Sistema de 3 Barras

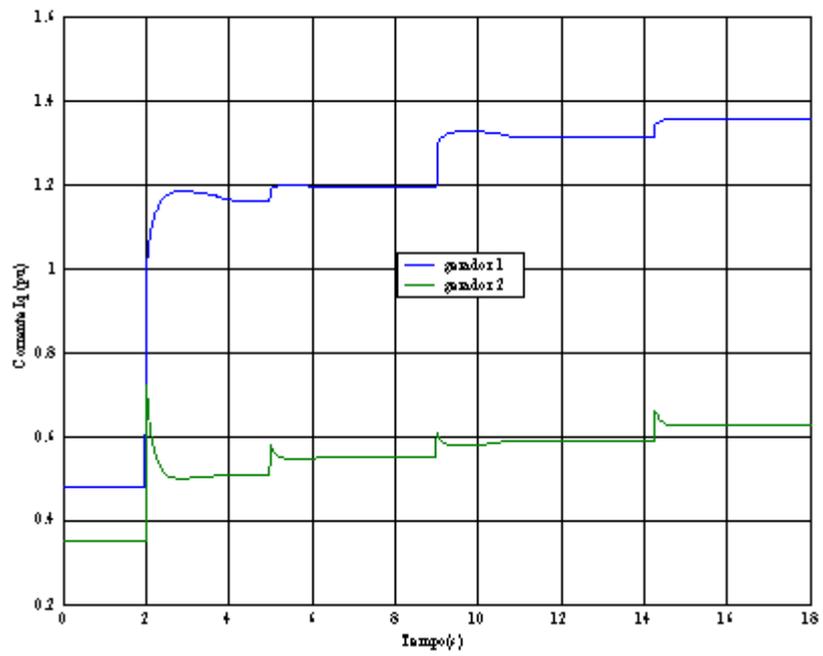


Figura 6.7: Corrente I_q dos Geradores - Sistema de 3 Barras

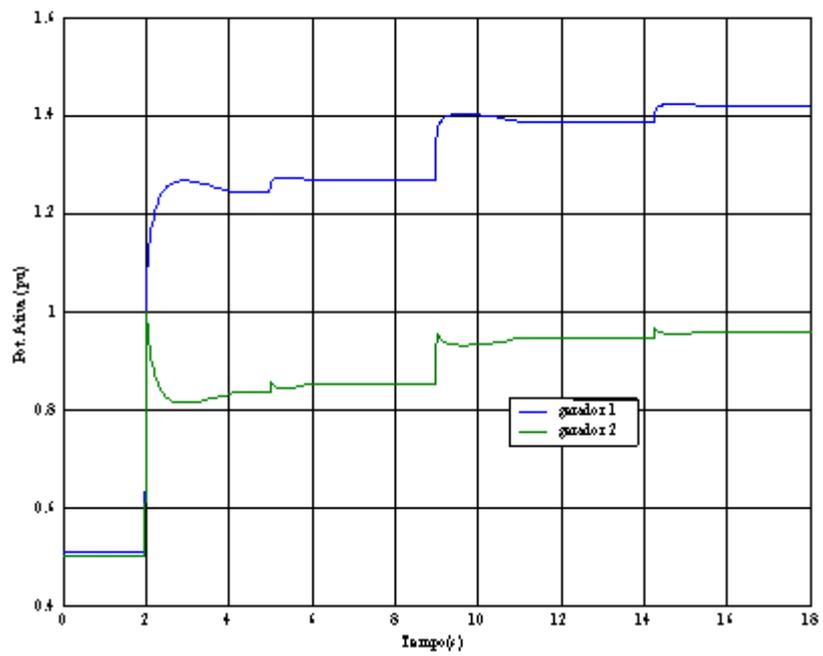


Figura 6.8: Potência Ativa Suprida - Sistema de 3 Barras

6.2.2 Sistema de 9 Barras [48]

A metodologia é também aplicada para o sistema de 9 barras apresentado em [48], onde as simulações ao longo do tempo, processos dinâmico e quase dinâmico, são apresentadas distintamente nas Figuras 6.9 a 6.12. Para simulação, a carga ativa da Barra 5 foi aumentada em 50% de seu valor inicial em 1 s; em 10 s a carga da Barra 5 foi aumentada em 60% do valor inicial e, finalmente, em 21 s a carga da Barra 5 foi aumentada em 80% de seu valor inicial. Os resultados mostram a compatibilidade entre as soluções para os dois processos. O processo quase-dinâmico foi extremamente mais rápido que o processo dinâmico, e a incorporação dos dois métodos num único processo de resolução é definitivamente um ganho a mais em simulações temporais de sistemas elétricos de potência. Os dados do sistema e as equações das máquinas e reguladores de tensão foram os mesmos usados em [48].

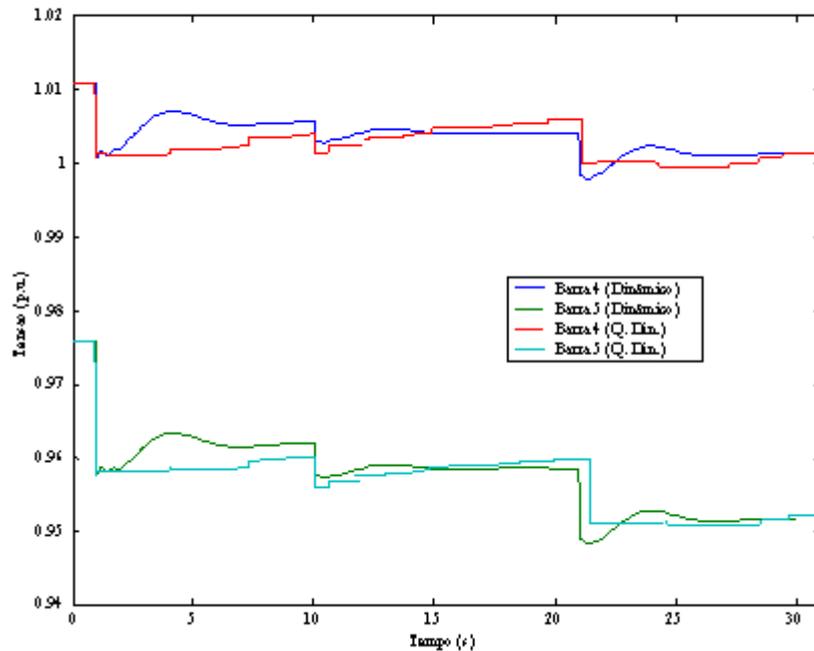


Figura 6.9: Perfil de Tensões - Sistema 9 Barras

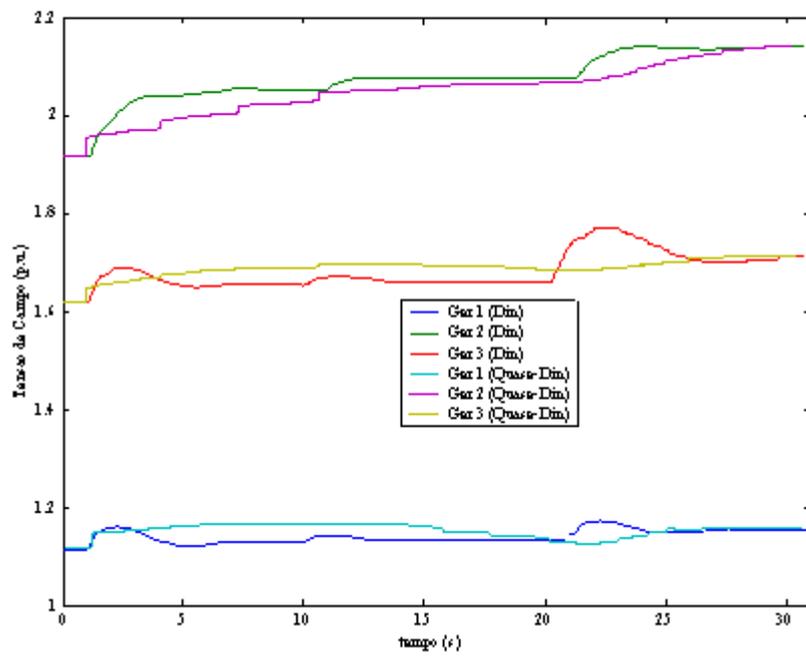


Figura 6.10: Tensão de Campo dos Geradores - Sistema de 9 Barras

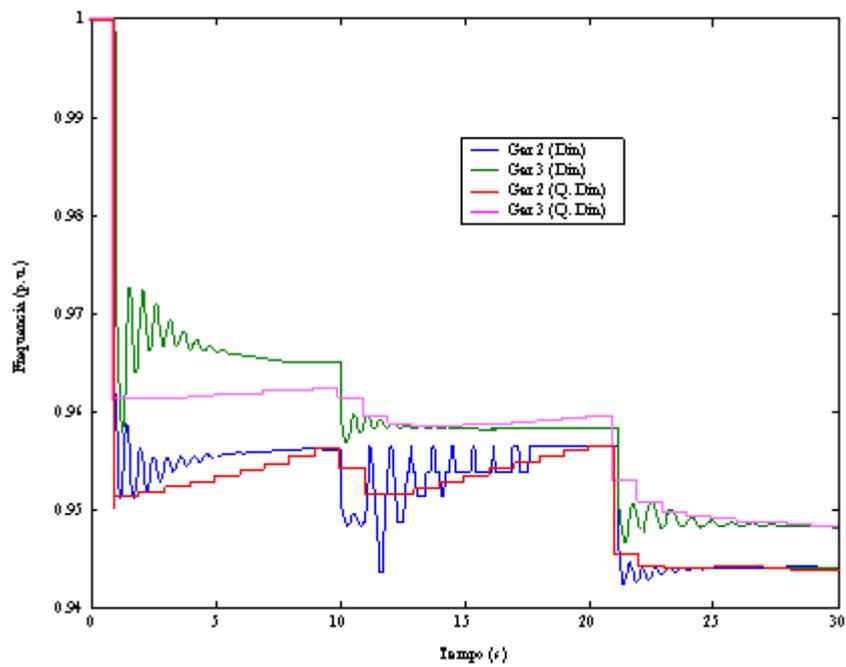


Figura 6.11: Sincronismo dos Geradores - Sistema 9 Barras

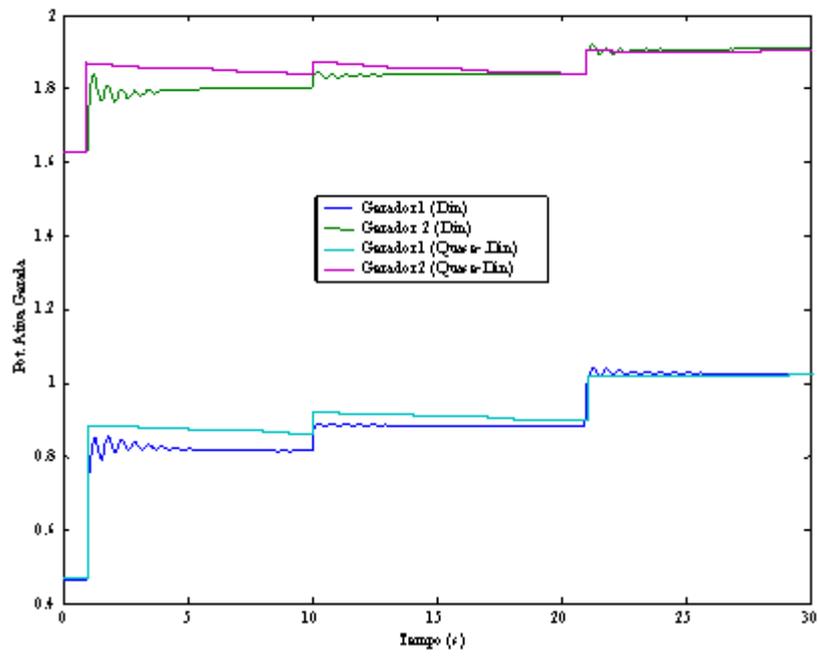


Figura 6.12: Potência Ativa Suprida - Sistema 9 Barras

6.3 Descrição do Sistema CEMIG

A Companhia Energética de Minas Gerais (CEMIG) é a concessionária de geração, transmissão e distribuição, responsável por 96 % do atendimento do Estado de Minas Gerais. O sistema da empresa apontou uma carga de aproximadamente 6.200 MW em 2002. O sistema utilizado para aplicação da dinâmica de curto e longo-prazos foi o sistema elétrico da Região Norte do Estado de Minas Gerais, Figura 6.13.

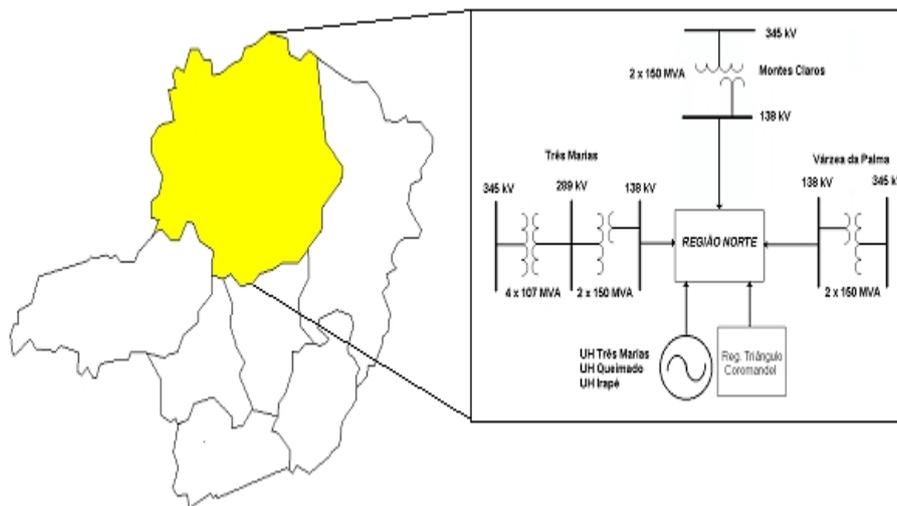


Figura 6.13: Regiões Sistema CEMIG

A Região Norte do Estado de Minas Gerais tem um mercado de aproximadamente 760 MW, correspondendo a 12 % do mercado CEMIG. O atendimento do sistema elétrico da região, conforme apresentado na Figura 6.14, passa através do eixo em 345 kV que interliga as subestações de Três Marias, Várzea da Palma e Montes Claros 2, além da usina hidrelétrica de Três Marias. Foi considerada a previsão de entrada em operação da usina hidrelétrica de Queimado em 2003 e Irapé em 2005. A região Norte abriga dois pólos de desenvolvimento: Montes Claros e Pirapora e a região Noroeste, cujas principais cidades são Paracatu e Unai. A região Noroeste de Minas possui grande potencial para a produção de grãos, em especial a soja e o milho. Nessa região, destacam-se diversos setores industriais: cimento, têxteis, biotecnologia, ferroligas, etc. Na atividade agrícola sobressaem dois grandes projetos de irrigação: Jaíba e Gorotuba. As principais atividades produtivas são: agroindústria (Norte e Noroeste de Minas), têxtil, turismo, metalurgia, não-metálico (Norte de Minas).



Figura 6.14: Sistema Elétrico Região Norte

A Região Norte é bem característica em termos de equipamentos de controle presentes no sistema da CEMIG como: LTC's (autotransformadores 345/138 kV) das subestações Várzea da Palma e Montes Claros; Banco de capacitores nas principais subestações da região; Geradores nas grandes hidrelétricas de Três Marias, Queimado e Irapé.

O perfil de carga da região é predominantemente industrial nos pólos de Montes Claros, Pirapora e Várzea da Palma, e nos pólos de Paracatu e Janaúba, de irrigação.

Sistema adotado: utilizou-se como caso base para o fluxo de potência, o sistema referente ao caso do Grupo de Trabalho do Planejamento Indicativo – GTPI2000, do CCPE, carga pesada ano 2005. Obteve-se um sistema equivalente para o restante do sistema, permanecendo apenas o sistema elétrico da Região Norte do Estado de Minas Gerais. Ressalta-se que no ano de 2005 consideram-se as usinas de Queimado e Irapé em operação no caso base. Modelagem de carga: o modelo de carga adotado foi do tipo potência constante. Geradores: foram adotados dados típicos para os geradores e reguladores de tensão obtidos de dados fornecidos na literatura.

6.3.1 Simulação

A viabilidade da simulação quase-dinâmica e dinâmica abordada nos capítulos precedentes é então testada para um sistema real: sistema equivalente da CEMIG. Seguindo uma contingência, um curto-circuito trifásico e posterior retirada de uma LT (linha de transmissão), uma ação de controle, atuação de um LTC, tenta restabelecer o nível de tensão da barra secundária. As Figuras 6.15 a 6.18 apresentam algumas curvas de interesse para o sistema CEMIG, nota-se o processo de instabilidade de tensão em torno de 65 segundos para esse caso – carga pesada. Trata-se de um teste para avaliar a proposta de simulação dinâmica e quase-dinâmica de sistemas elétricos de potência. Portanto, é apenas uma aplicação do método em um sistema real.

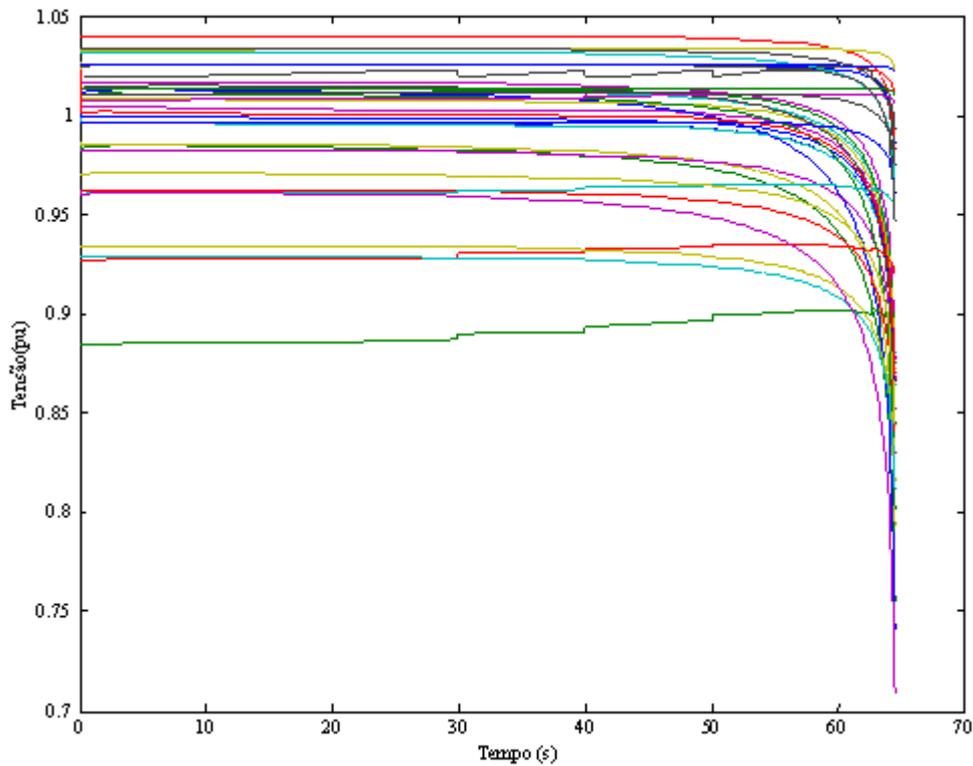


Figura 6.15: Perfil de Tensão - Sistema CEMIG

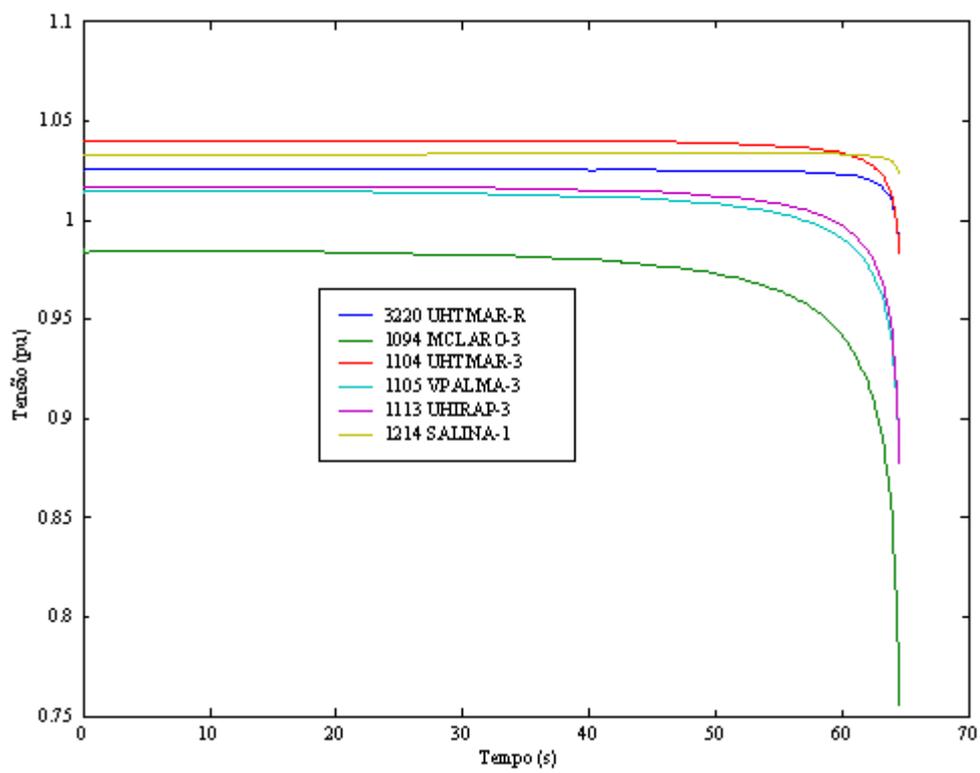


Figura 6.16: Perfil de Tensão em Algumas Barras de Interesse

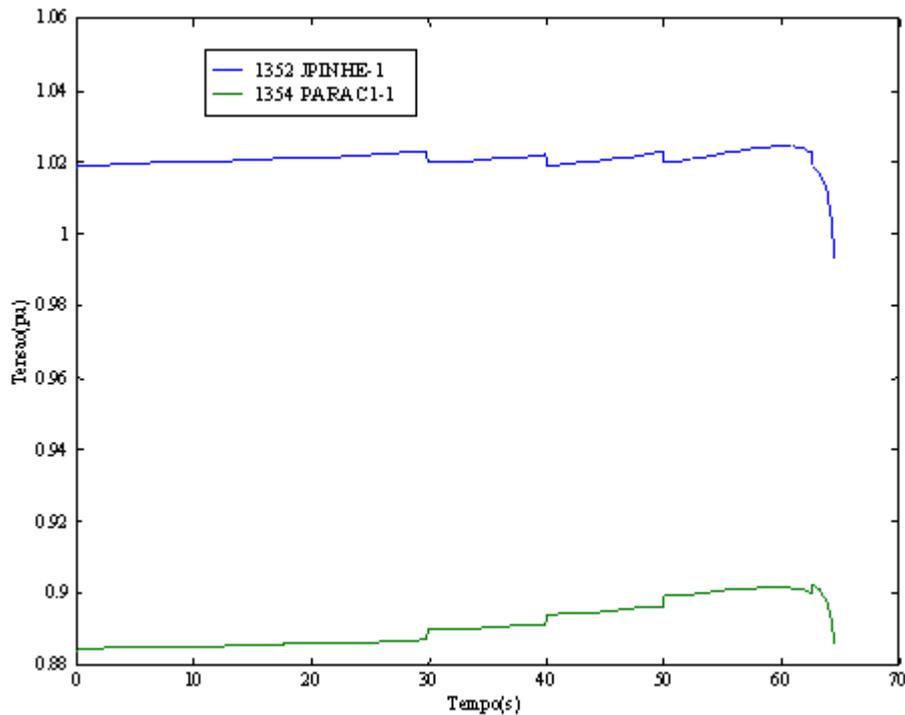


Figura 6.17: Instabilidade de Tensão - Sistema CEMIG

6.4 Manutenção da Estabilidade

A metodologia proposta para manutenção da estabilidade de tensão de longo prazo é aplicada ao sistema de 57 barras do IEEE, modificado com o propósito de aplicação da metodologia. Admitiu-se um modelo de carga do tipo ZIP com 50 % de potência constante e 50 % de impedância constante para as barras de carga do sistema. Pode-se descrever a seqüência de eventos e controles como segue:

(i) uma contingência e posterior eliminação ocorre entre as barras 4 e 6. Assim, o sistema é capaz de suportar o transitório e uma nova condição operativa é atingida. Porém um baixo perfil de tensões é obtido em várias barras do sistema, em torno de 0.7 p.u.;

(ii) admite-se que o nível de tensão aceitável para a Barra 31 do sistema é de 1.0 p.u.. Esta barra é a barra piloto, desde que ela é identificada como

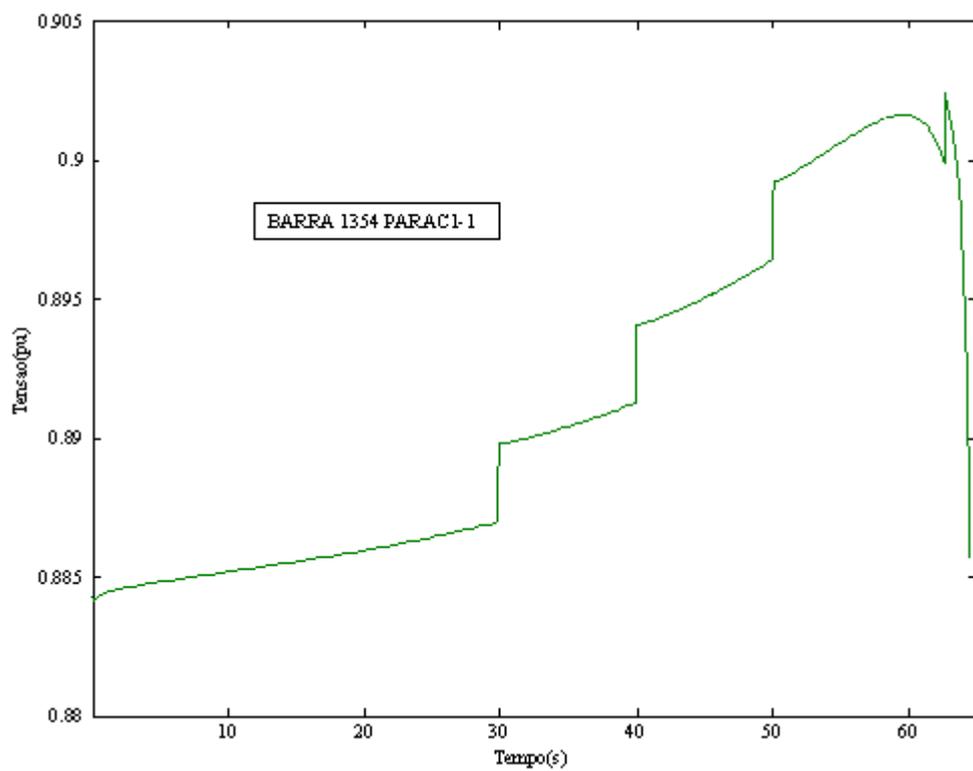


Figura 6.18: Atuação do LTC - Sistema CEMIG

a barra crítica em se tratando de colapso de tensão [35]. A tensão na Barra 31 está abaixo de 0.75 p.u., e ações de controle são então tomadas. De acordo com a hierarquia sugerida, um banco de capacitores junto à Barra 31 é ativado. Dez s após a detecção desse nível de tensão insatisfatório um primeiro banco de 0.075 p.u. é chaveado. O processo se repete 15 s depois, desde que o nível de tensão ainda permanece baixo. Com o chaveamento completo dos bancos (0.15 p.u.), o nível de tensão na Barra 31 atinge 0.87 p.u.;

(iii) como os capacitores não foram suficientes para recuperação da tensão na barra, os transformadores com tapes comutados sob carga (LTC's) são então ativados. Entretanto, uma condição pior é considerada agora, pois uma rampa de carga ocorre justamente na Barra 31, que tende a deteriorar ainda mais o perfil de tensão. Esta rampa dura em torno de 80 s. O objetivo aqui é considerar a interação entre os LTC's que atuam no sistema. O primeiro LTC está localizado entre as Barras 13 e 14, enquanto o segundo LTC se encontra entre as Barras 7 e 29;

(iv) as Barras 14 e 29 são aquelas que têm as tensões controladas pelos LTC's. Neste caso, as variações simultâneas dos tapes são os parâmetros do sistema. A atuação simultânea dos LTC's produz um único vetor de sensibilidade com relação às barras onde os mesmos estão localizados. Os demais elementos, obviamente, são todos nulos. A primeira mudança de tape ocorre 20 s após o chaveamento do último banco de capacitores, e as mudanças subsequentes ocorrem a cada 5 s. A Figura 6.19 apresenta o comportamento do vetor tangente associado ao parâmetro tape (em função do tempo). A linha contínua está associada ao LTC 13-14, enquanto a linha pontilhada está associada ao LTC 7-29. Nesta figura apresenta-se o instante ótimo de bloqueio do LTC (o índice se anula ou muda de sinal). A partir da Figura 6.20, vê-se claramente que o LTC 13-14 é bloqueado em 300 s, e o outro em 315 s. Nenhum limite físico dos tapes foi atingido durante a simulação, significando que o índice proposto para o bloqueio foi determinante neste caso.

A Figura 6.21 apresenta a seguinte seqüência de execução:

(i) O primeiro LTC (13-14) é bloqueado em 300 s, enquanto o segundo LTC (7-29) mantém-se atuando. Como o sistema é relativamente pequeno, as mudanças de tapes afetam também a Barra 14 (anteriormente controlada pelo primeiro LTC, agora bloqueado). Uma consequência disso é a queda de tensão na Barra 14, como apresentado pela linha contínua na Figura 6.15. Essa situação é mantida até 315 s, quando o segundo LTC é então bloqueado e o nível de tensão em ambas as Barras 14 e 29 é mantido constante durante 10 s, quando outra ação de controle é ativada.

(ii) A próxima ação de controle é o ajuste do “set-point” do AVR. Os Geradores 4 e 12 monitoram a tensão da Barra 31. Este controle inicia em 325 s, ou seja, 10 s após o último LTC ter sido bloqueado. Durante o processo uma rampa de carga é aplicada, desta vez nas Barras 14,19 e 31. Esta rampa é mantida até 380 s. Em 325 s o Gerador 4 atinge seu limite superior do bloco regulador da tensão de campo, e o Gerador 12 passa a controlar sozinho o nível de tensão na Barra 31, quando a situação passa a ter a característica de um controle remoto de tensão. O nível de tensão da Barra 31 é continuamente recuperado até 385 s, quando o Gerador 12, então, atinge o limite superior do bloco regulador da tensão de campo. A partir daí o nível de tensão na Barra 31 passa a ser novamente constante.

(iii) O nível de tensão na Barra 31 é de 0.981 p.u. que ainda está abaixo do valor inicialmente desejado. Porém, agora não se dispõe de mais nenhuma ação de controle para a correção deste nível. Entretanto, em 430 s, a linha de transmissão conectando as Barras 5 e 6 apresenta um defeito com posterior eliminação satisfatória, ou seja, o sistema ainda apresenta um ponto operativo pós-falta, levando o nível de tensão na Barra 31 para 0.835 p.u. após a eliminação da contingência. Tal valor está bem abaixo do valor desejado, e também para uma condição mínima confiável de operação do sistema.

(iv) Desde que todas as ações de controle se esgotaram, o corte de carga é, então, implementado como uma ação drástica de controle. Porém, desta vez, um nível mais baixo de tensão é adotado como referência para operação mínima confiável do sistema. Adota-se 0.85 p.u. para a Barra 31, valor para uma situação de emergência a ser considerada. Vários estágios de corte de carga poderiam ser implementados até que o nível aceitável fosse atingido. Entretanto, a metodologia para o corte de carga é utilizada uma única vez, de forma a tentar obter o nível de tensão de emergência. Usando proposta apresentada, um corte de carga de 8.84% do montante instalado na Barra 31 é suficiente para se atingir o nível de tensão de emergência de 0.85 p.u. O processo completo é apresentado na Figura 6.21, onde o efeito de cada ação controle é claramente indicado.

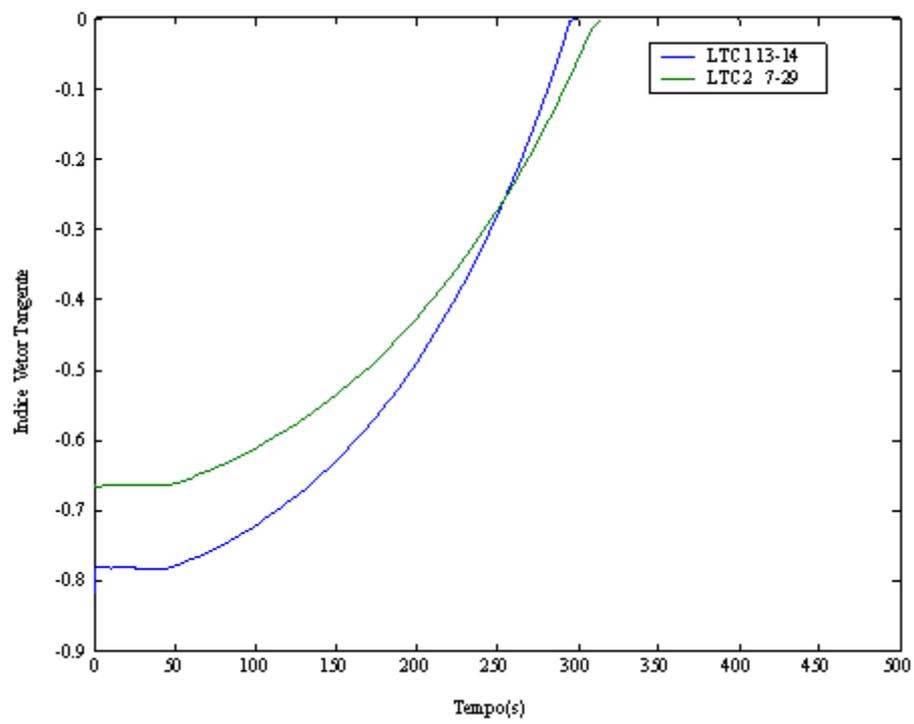


Figura 6.19: Sinal do Vetor Tangente

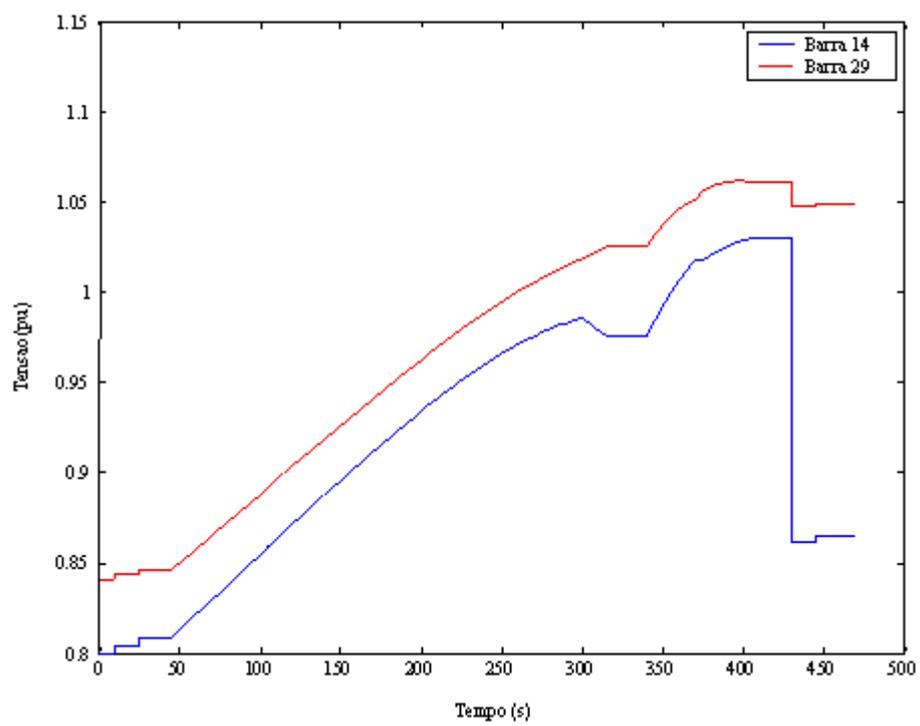


Figura 6.20: Tensão nas Barras 14 e 29

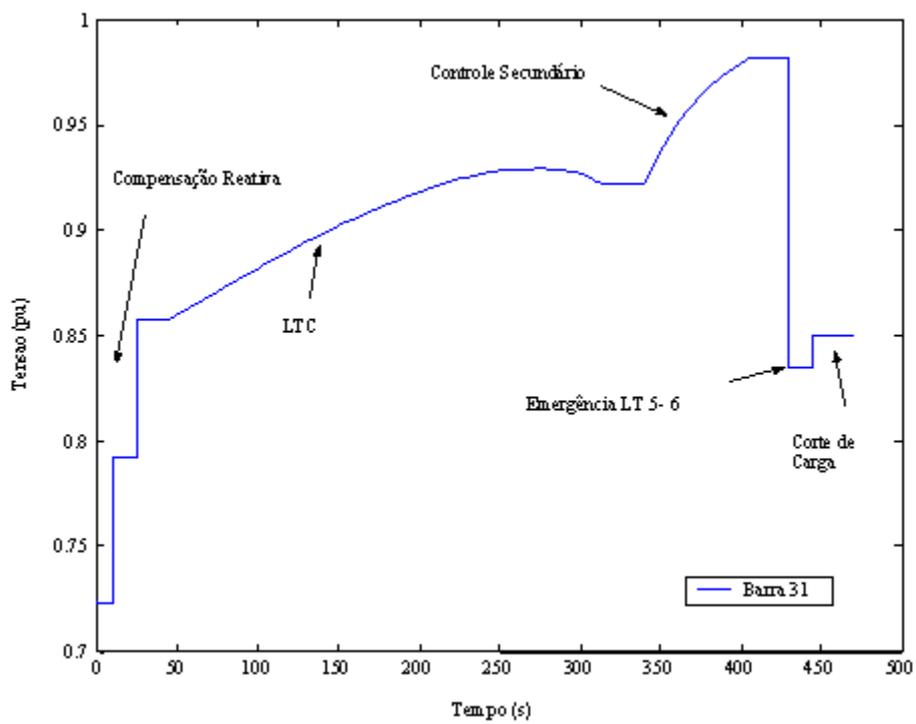


Figura 6.21: Recuperação do Nível de Tensão da Barra 31

6.5 Autovalores Críticos

A proposta apresentada para determinação de um índice limite para um conjunto de autovalores críticos (Capítulo V) é aplicada ao sistemas de 9 barras, estudado em [48]. Considere como fator de carregamento o parâmetro λ , que guiará o sistema até o colapso de tensão. Trata-se de uma comparação com os resultados já apresentados em [48] e a metodologia proposta.

6.5.1 Sistema de 9 barras [48]

As Figuras 6.22 e 6.23 apresentam o índice proposto para identificação da bifurcação sela-nó e o autovalor crítico, obtidos a partir das equações do fluxo de potência para o sistema de 9 barras.

O índice limitador, a partir da equação $I_{ND} = VT^T \times J \times VT$, fornece uma estimativa superior para o autovalor crítico apresentado nas Figuras 6.23 e 6.24. Estas curvas (autovalores críticos) são as mesma obtidas em [48], validando o programa desenvolvido e o equacionamento proposto. Nota-se, neste caso, que há apenas um autovalor crítico a ser monitorado, Figura 6.24.

Na identificação da bifurcação de Hopf, as equações reduzidas às variáveis dinâmicas são então empregadas. As Figuras 6.24 e 6.25 apresentam as curvas obtidas com a metodologia abordada no Capítulo V. Há um perfeito enquadramento do autovalor crítico para esse caso, com o mesmo resultado obtido em [48]. Isso confirma não só o surgimento do par complexo conjugado migrando para o plano direito (bifurcação de Hopf), mas também a bifurcação sela-nó, como era de se esperar para situação de máximo carregamento. Aqui, há um conjunto de autovalores (5) que são monitorados antes da bifurcação, porém apenas um autovalor crítico de fato ocorre, como mostrado nas Figuras 6.24 e 6.25.

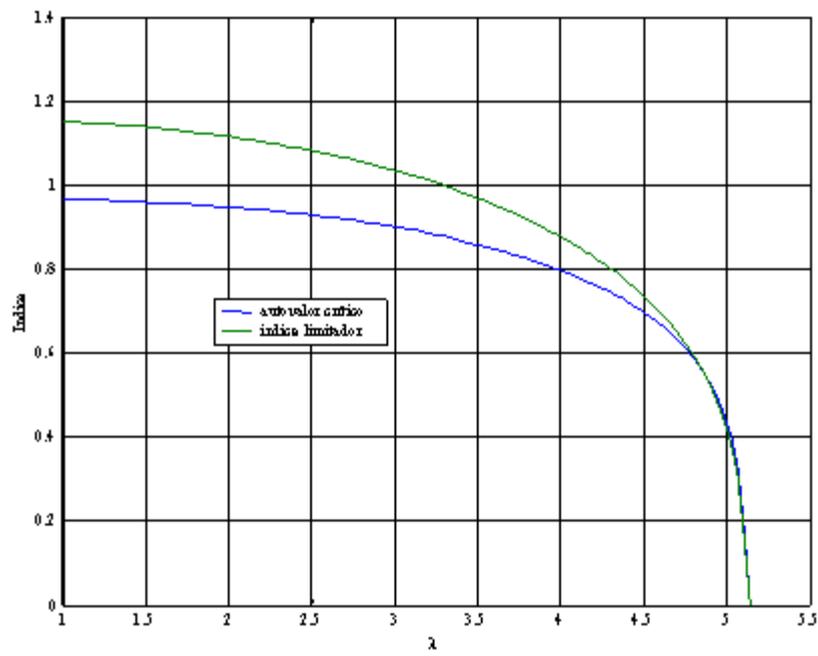


Figura 6.22: Autovalor Valor Crítico e Bifurcação Sela-Nó

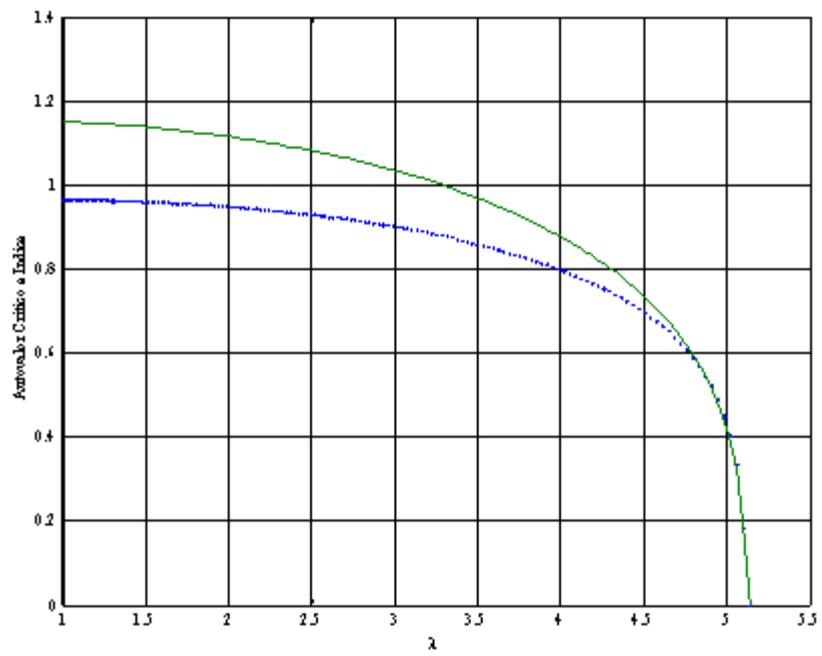


Figura 6.23: Autovalor Crítico e Índice

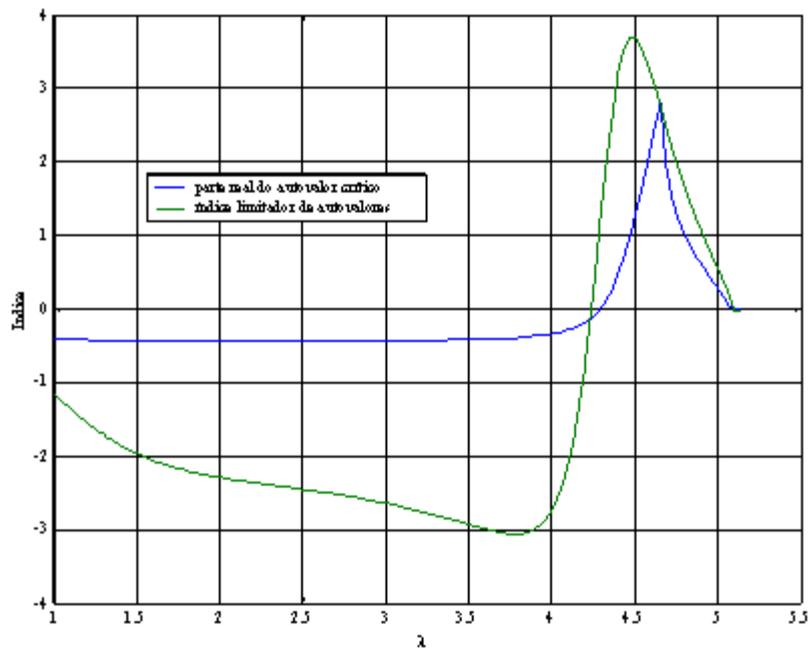


Figura 6.24: Autovalor Crítico e Índice para a Bifurcação de Hopf

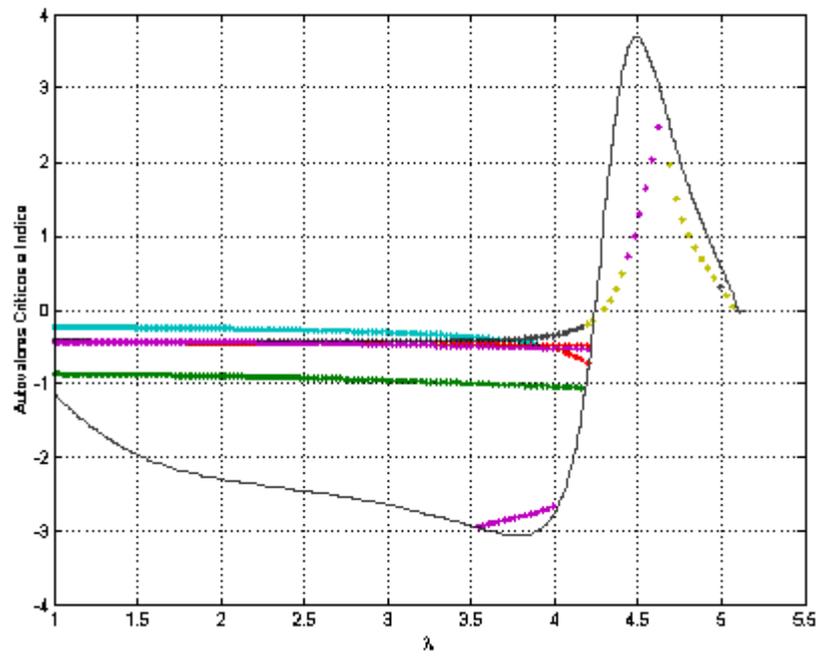


Figura 6.25: Autovalores Críticos - 9 Barras

A utilização do índice limitador proposto mostrou-se eficiente na identificação de dois tipos de bifurcações presentes em sistemas elétricos de potência: a bifurcação do tipo sela-nó e a bifurcação de Hopf. O cálculo do vetor tangente usando a 1^a. iteração do método das potências, $VT = J^{-1}J^{-1}[\Delta\epsilon]$, tem a grande vantagem de poder ser aplicado a qualquer conjunto de equações: algébricas, para o modelo estático de sistema (equações do fluxo de potência), como apresentado nas Figuras 6.22 e 6.23; e dinâmicas, para o modelo do sistema (conjunto puramente diferencial), como apresentado nas Figuras 6.24 e 6.25. O comportamento do índice tem mostrado nas duas situações (estática e dinâmica) um comportamento similar ao autovalor crítico. Identificando a ocorrência das bifurcações nos dois casos e apresentando uma trajetória possível para esse autovalor crítico.

Como um limitador para o conjunto de autovalores críticos, o índice tem a vantagem de permitir, por exemplo, selecionar apenas alguns elementos de um grupo de autovalores a serem monitorados, e não mais o conjunto todo. Sem dúvida alguma, trata-se de uma vantagem a ser explorada, já que possibilita a aplicação em grandes sistemas, onde a determinação de todo o conjunto de autovalores e autovetores associados torna-se inviável, independentemente do método utilizado para a obtenção dos mesmos.

Capítulo VII

7 Conclusões e Perspectivas

O sistema elétrico de potência é um sistema dinâmico extremamente complexo devido às interações entre os diversos elementos constituintes que necessariamente apresentam características e comportamentos diferenciados. O conjunto de equações do fluxo de potência convencional, um modelo estático para o sistema elétrico, permite simulações rápidas e, dentro de um conjunto de aplicações, estudos e análises, avaliando muito bem as condições de operação, de planejamento e de expansão do sistema. Uma situação menos rigorosa, mas eficaz numa abordagem inicial, utilizaria a variante do fluxo AC, o fluxo DC, como uma estimativa razoável para uma condição de planejamento ou de expansão.

Os modelos matemáticos de sistemas estão intimamente relacionados às características que são relevantes ao estudo, principalmente o tempo envolvido na avaliação de uma determinada condição operativa e a disponibilidade de uma resposta rápida frente a uma situação de emergência. O sincronismo de unidades geradoras diante de uma perturbação, por exemplo, exigiria um conjunto de equações diferente daquele apresentado no modelo estático do sistema elétrico. E, considerações como a rapidez do evento transitório, como as injeções de correntes ocorrendo apenas nas barras dos geradores, e outras simplificações, permitem obter as respostas quanto ao sincronismo ou não (pós-distúrbio) dos geradores.

Em eventos discretos, como chaveamento de banco de capacitores e atuações de tapetes de transformadores, também podem ser assimilados numa representação estática do sistema, desprezando-se, obviamente, o aspecto cronológico dessas ações de controle. O modelo estático representaria um instante único para o sistema, ou seja, haveria uma simultaneidade de ações e interações, com a cronologia dos eventos sendo sacrificada neste caso.

Um modelo de sistema elétrico representado por um conjunto de equações algébrico-diferencial admite uma nova abordagem para o problema da cronologia dos eventos. Quando se admite que uma ação de controle, como o chaveamento de um banco de capacitores, não instabiliza o sistema sob nenhuma hipótese, prevalece sempre um ponto operativo pós-transitório ao chaveamento, e essa condição permite uma consideração relevante nessa nova abordagem.

A atuação de elementos discretos do sistema se enquadram perfeitamente nesta simplificação. O modelo algébrico-diferencial se mantém, porém as

soluções de regime permanente são agora de interesse, tornando-se assim um conjunto puramente algébrico para as equações do modelo, respeitando a cronologia dos eventos e, com uma vantagem adicional da utilização de um processo iterativo de resolução podendo ser aplicado ao conjunto de equações. Este modelo de sistema um pouco mais elaborado, um conjunto algébrico-diferencial, com um ponto de equilíbrio pós-transitório é o modelo quase-dinâmico para o sistema elétrico de potência.

Finalmente, tem-se que o conjunto de equações pode ser reduzido ou não às equações diferenciais do sistema, obtendo-se um conjunto que pode resolvido por um método numérico qualquer de integração explícita ou implícita. A desvantagem, claramente, seria o tempo e o pesado esforço computacional envolvido, as diferentes características dos elementos presentes, com constantes de tempo (respostas) de milissegundos até minutos, e o problema adicional do tamanho do passo de integração nestes casos. Além de problemas de instabilidade numérica que podem surgir para o método escolhido. Somando-se a isso tem-se a aplicação em grandes sistemas, onde a redução às equações diferenciais devem ser contornados, utilizando o conjunto completo de equações obtidos. Vale a pena lembrar que o conjunto de equações algébrico-diferencial é extremamente esparsa, porém a redução ao conjunto puramente diferencial cria uma nova matriz Jacobiana reduzida completamente cheia. Isto aplicado a pequenos sistemas produz poucos problemas de resolução e tempo (apesar da desvantagem inerente), porém em grandes sistemas a situação já não é tão simples e o método proposto de se manter a estrutura da matriz Jacobiana é parte dessa superação.

Alternativamente, estendendo o método iterativo usado tanto nos processos estático e quase-dinâmico, o conjunto de equações algébrico-diferencial também pode ser resolvido iterativamente, preservando a matriz jacobiana do modelo quase-dinâmico, importante na análise da estabilidade dinâmica, apenas com a inserção de valores conhecidos (os $h's$ e $l's$) apropriadamente nessa matriz.

É justamente o objetivo deste trabalho apresentar uma alternativa flexível entre os métodos estático, quase-dinâmico e dinâmico de curto e longo prazos, aproveitando-se do processo iterativo de resolução nas simulações que são apresentadas. As simulações para alguns sistemas demonstrou a aplicabilidade do método numérico iterativo em sistemas elétricos de potência. No processo de longo prazo, uma aplicação interessante é aquela de vários eventos cronologicamente ocorrendo no sistema de 57 barras (IEEE57 modificado), além da proposta de novas ferramentas discutidas e aplicadas ao sistema, como o bloqueio dos LTC's pelo vetor tangente e o corte de carga por subtensão.

A complexidade apresentada pelos sistemas elétricos de potência não está

apenas relacionada à solução numérica do conjunto de equações com características intrinsecamente não lineares. Em estudos que envolvem sistemas não lineares, a teoria das bifurcações fornece um conjunto de condições que prevêem a mudança estrutural no comportamento do sistema elétrico.

Aliada com a teoria das bifurcações, o uso de conceitos e ferramentas tipicamente lineares, que envolvem a análise em torno de um ponto operativo conhecido do sistema, tem permitido avaliar com certa segurança a estabilidade do sistema ao longo, por exemplo, de uma trajetória de carregamento. As limitações obviamente existem, principalmente nas proximidades de uma mudança estrutural ou de ocorrência de uma "bifurcação".

A análise linear permite investigar a priori em torno de um ponto de equilíbrio do sistema a estabilidade do mesmo. Obviamente, a validade está limitada até onde se pode considerar como uma fronteira para esse ponto operativo, aqui geralmente a validade se reduz a uma estreita borda em torno do ponto. Uma vez que apenas localmente pode-se garantir alguma coisa e no máximo a essa região muito próxima ao ponto. Evidentemente é uma limitação, porém não inviabiliza em muitos casos, a adoção de índices para se estudar o comportamento da estabilidade do sistema. Isto tem permitido validar alguns índices relativamente coerentes nas diversas análises feitas para os sucessivos pontos de equilíbrios obtidos e nas proximidades do ponto de bifurcação, onde o ponto de equilíbrio é perdido.

É sabido que para o conjunto de equações do fluxo de potência um autovalor nulo ocorre no ponto de máximo carregamento, com isto, a identificação de uma bifurcação sela-nó é associada a essa condição. Em um outro caso, um par complexo conjugado de autovalores, cruzando o plano complexo da esquerda para a direita (com parte real nula) é identificado com uma bifurcação de Hopf. E, ainda associada ao modelo matemático para o sistema elétrico, tem-se um tipo especial de bifurcação que ocorre quando um autovalor apresenta um comportamento ilimitado (tendendo ao infinito), onde a bifurcação neste caso é relacionada a uma singularidade das equações da rede. Estas são as contribuições apresentadas pela teoria das bifurcações e o uso das ferramentas lineares disponíveis na análise da estabilidade de sistemas elétricos.

O comportamento abrupto da queda de tensão no ponto de colapso é mais bem estudado a partir da avaliação temporal do fenômeno. Com isto, há necessidade de se obter a resposta temporal do sistema, e uma simulação numérica do conjunto de equações deve ser empregado. A mudança estrutural no comportamento das equações envolvida exige uma análise transitória do fenômeno no ponto de colapso. Somente assim, pode-se inferir de fato a natureza e o envolvimento das variáveis no colapso de tensão. Várias metodologias são propostas para a simulação temporal, mas a eficiência se

compromete com o tempo de simulação e os resultados obtidos. A separação dos elementos em escalas temporais de interesse aliam eficiência, tempo e resultados. Então, em análises de curto e longo prazos, cabe estabelecer os critérios e abordagens que se deseja e se espera, ficando claro que a junção dos dois processos envolvidos (curto e longo prazos) podem ser vantajosamente explorados.

A aplicação a grandes sistemas é outro fator que impede a aplicação de muitas ferramentas e índices. As peculiaridades envolvidas, as necessidades de ferramentas numéricas de cálculo e o tratamento das equações durante qualquer arranjo para simulação de grandes sistemas, deixam claro que as simplificações na abordagem do problema é sempre bem aceita. Neste contexto, não se pode perder de vista a validade das aplicações e o uso de metodologias que exigem um mínimo possível na implementação a ser agregada ao pacote computacional a ser desenvolvido.

Cabe ainda ressaltar a proposta de um índice limitador para os autovalores críticos dentro da teoria das bifurcações e da teoria linear aplicada, e o método de obtenção do índice a partir da 1^a iteração dos métodos das potências que contorna o problema apresentado para o cálculo do vetor tangente.

Um pacote computacional foi desenvolvido em Visual Fortran com a proposta dos modelos estático, quase-dinâmico e dinâmico de curto e longo prazos para as simulações e aplicações das propostas apresentas na tese.

8 Referências

- [1] Kundur, P., Morison, G. K., "A Review of Definitions and Classification of Stability Problems in Today's Power Systems", IEEE Pes Meeting, New York, Feb., 1997.
- [2] Kundur, P., "Power System Stability and Control", Palo Alto: Mcgraw Hill, 1994.
- [3] Kundur, P., "General Introduction and Basic Concepts of Voltage Stability Analysis", In: IEEE Pes Summer Meeting, IEEE Special Tutorial Course: Voltage Stability, San Diego, 1998.
- [4] Cutsem, T. Van, Jacquemart, Y., Pruvot, P., "Extensions and Applications of a Mid-Term Voltage Stability Method", Proc. Bulk Power System Voltage Phenomena Iii-Voltage Stability And Security, Ecc Inc., Switzerland, August 1994.
- [5] Vu, K.T., Liu, C. C., "Dynamic Mechanism of Voltage Collapse", Systems and Control Letters, Vol.15, Pp. 1683-1688, 1996.
- [6] Xu, W., Mansour, Y., "Voltage Stability Analysis Using Generic Dynamic Load Models", IEEE Transactions On Power Systems, Vol.9, N.1, Pp. 479 - 493, 1994.
- [7] Souza, A. C. Z., Cañizares, C.A., Quintana, V.H., "New Techniques to Speed up Voltage Collapse Computations Using Tangent Vectors", IEEE Transactions on Power Systems, Vol.12, pp. 1380-1387, Aug. 1997.
- [8] Gcoi - Grupo Coordenador para Operação Interligada, "Análise das Perturbações dos Dias 24 E 25/04/97 no Sistema Interligado S/SE/CO", Relatório SCO/SCEL-01/97, 1997.
- [9] Souza, A. C. Z., Brito, N. H. M. N., "Ações de Controle para Prevenção de Colapso de Tensão: Efeitos e Restrições", Anais do XI Congresso Brasileiro de Automática, São Paulo, 1996.
- [10] Taylor, C. W. , "Power System Voltage Stability", Palo Alto: Mcgraw-Hill, 1994.
- [11] Taylor, C. W. Et Al., " Modelling of Voltage Collapse Including Dynamic Phenomena", Cigre Task Force 38-02-10, 1992.
- [12] Clark, H. K., "New Challenge: Voltage Stability", IEEE Power Engineering Review, 1990.
- [13] Kundur, P., Gao, B., "Practical Considerations in Voltage Stability Assessment", Proceedings of Iv Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning, Foz do Iguaçu, May 1994.
- [14] Price, W. W. Et Al., "Load Representation for Dynamic Performance Analysis", IEEE Transactions on Power Systems, Vol.8, N.2, Pp. 472-482, 1993.

- [15] Brito, N. H. M. N., "Ações de Controle Aplicadas à Análise de Estabilidade de Tensão", Dissertação de Mestrado, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Minas Gerais, 1996.
- [16] D' Ajuz, A. Et Al., "Equipamentos Elétricos - Especificação e Aplicação em Subestações e Alta Tensão", Niterói, Furnas -: Universidade Federal Fluminense/Eduff, 1987.
- [17] Taranto, G. N., Pinto, L. M. V. G., Pereira, M. V. F., "Representation of Facts Devices in Power System Economic Dispatch", IEEE Transactions On Power Systems, Vol.7, N.2, pp. 572-576, May 1992.
- [18] Faur, Z. T., Cañizares, C. A., "Effects of Facts Devices on Systems Loadability", North American Power Symposium, June 1995.
- [19] Price, W. W. (Chairman) – IEEE Task Force on Load Representation for Dynamic Performance. Load Representation for Dynamic Performance Analysis. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 8, No. 2, May 1993, Pp. 472-482.
- [20] Pal, M. K. Voltage Instability Considering Load Characteristics. IEEE Transactions on Power Systems. Vol. Pwrs 7, No. 1, February 1992, Pp. 243-249.
- [21] Hill, D. J. Nonlinear Dynamic Load Models with Recovery for Voltage Stability Studies. IEEE Transactions on Power Systems. Vol. 8, No. 1, February 1993, Pp. 166-176.
- [22] Pinto, D. P., " Representação das Cargas nos Estudos de Estabilidade",,. Dissertação de Mestrado, Coppe/UFRJ, Rio De Janeiro, 1988.
- [23] Ohima, T. Et All., "Voltage Dependence of Composite Loads in Power Systems", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. Pas-104, No. 11, November 1985, Pp. 3064-3073.
- [24] Van Cutsem, T., Vournas, C. D., "Voltage Stability Analysis in Transient and Mid-Term Time Scales", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 11, N.1, Pp. 146-154, February 1992.
- [25] Causarano, W. J., Falcão, D. M., Taranto, G. N., "A Fast Time Domain Simulation Method for Voltage Stability Assessment", Proceedings of the VI Sepope, Salvador, Bahia, May 1998, Disponível em Cd.
- [26] Y. Mansour, ed., "Voltage Stability of Power Systems: Concepts, Analytical Tools and Industry Experience", IEEE Publication 90TH0358-2-PWR, 1990.
- [27] Y. Mansour, ed., "Suggested Techniques for Voltage Stability Analysis", IEEE Publication 93TH0620-5PWR, 1993.
- [28] C.W. Taylor, "Power System Voltage Stability", McGraw-Hill: New York 1993.
- [29] P. Kundur, "Power System Stability and Control", McGraw-Hill: New York 1993.

- [30] T. Van Cutsem, C.D. Vournas, "Voltage Stability of Electric Power Systems", ISBN 0-7923-8139-4, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1998.
- [31] P.-A. Lof, D.J. Hill, S. Arnborg, G. Andersson, "On the Analysis of Long-Term Voltage Stability", *Electric Power and Energy Systems*, vol. 15, no. 4, 1993, pp. 229-237.
- [32] B. Lee, V. Ajjarapu, "Period-Doubling Route to Chaos in Electrical Power System", *IEE proceedings-C*, vol.140, no. 6, November 1993, pp. 490-496.
- [33] R. Seydel, "From Equilibrium to Chaos: Practical Bifurcation and Stability Analysis", Elsevier, NY 1988 OR the second edition [1994], Springer-Verlag, New York.
- [34] Thompson, J.M.T., Stewart, H.B., "Non-Linear Dynamics and Chaos: Geometrical Methods for Engineers and Scientists", John Wiley, New York, 1986.
- [35] K.T. Vu, C.C. Liu, "Dynamic Mechanisms of Voltage Collapse", *Systems and Control Letters*, vol. 15, 1990, pp. 329-338.
- [36] K.T. Vu, C.C. Liu, "Shrinking Stability Regions and Voltage Collapse in Power Systems", *IEEE Transactions on Circuits and Systems. Part I*, vol. 39, no. 4, April 1992, pp. 271-289.
- [37] I. Dobson, "The Irrelevance of Load Dynamics for the Loading Margin to Voltage Collapse and its Sensitivities", in [24], pp. 509-518.
- [38] C.A. Canizares, "Conditions for Saddle-Node Bifurcations in AC/DC Power Systems", *Electrical Energy & Power Systems*, vol. 17, no. 1, pp. 61-68, 1995.
- [39] R. H. Abraham, C.D. Shaw, "Dynamics, the Geometry of Behavior", volumes 1-4, Aerial Press, Santa Cruz, CA, 1988. 2-58
- [40] V. Ajjarapu, B. Lee, "Bifurcation Theory and its Application to Non-Linear Dynamical Phenomenon in an Electric Power System", *IEEE Trans. Power Systems*, vol. 7, pp.424-431, February 1992.
- [41] E.H. Abed, P.P. Varaiya, "Non-Linear Oscillations in Power Systems", *International Journal of Electric Energy and Power Systems*, vol. 6, no. 1, January 1984, pp. 37-43.
- [42] C. D. Vournas, M. A. Pai, P. W. Sauer, "The Effect of Automatic Voltage Regulation on the Bifurcation Evolution in Power Systems", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 11, no. 4, November 1996, pp. 1683-1688.
- [43] W. Ji, V. Venkatasubramanian, "Dynamics of a Minimal Power System: Invariant Tori and Quasi-Periodic Motions", *IEEE Transactions on Circuits and Systems. Part I*, vol. 42, no. 12, December 1995, pp. 981-1000.
- [44] E.H. Abed, J.C. Alexander, H. Wang, A.M.A. Hamdan, H.-C. Lee, "Dynamic Bifurcations in a Power System Model Exhibiting Voltage Col-

lapse", International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 3, pp. 1169-1176, 1993.

[45] G.A. Manos, C.D. Vournas, "Bifurcation Analysis of a Generator-Motor System", Proceedings of the fourth IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation, Maleme, Crete, Greece, June 1996, pp. 250-255.

[46] V. Venkatasubramanian, H. Schättler, J. Zaborsky, "Dynamics of Large Constrained Non-Linear Systems—A Taxonomy Theory", Proceedings of the IEEE, Special Issue on Non-Linear Phenomena in Power Systems, November 1995, vol. 83, no. 11, pp. 1530-1561.

[47] Souza, A. C. Z., Cañizares, "Identifying a Vanishing Eigenvalue in Voltage Collapse Analysis with Limits Consideration", IEE Proceedings, Generation, Transmission and Distribution, Vol. 148, No. 3, May 2001, pp. 263-267.

[48] Rajagopalan, C., Lesiuetre, B., Sauer, P. W., Pai, M. A., "Dynamic Aspects of Voltage/Power Characteristics", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 7, pp. 990-1000, Aug. 1992.

Apêndices

APÊNDICE A

A Sistema de 2 Barras

A.1 Equacionamento

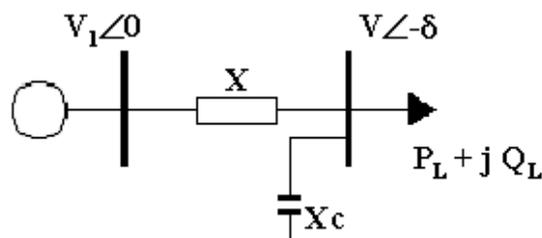


Figura A.1: Sistema de 2 Barras

Para o sistema de duas barras, tem-se que:

$$P_L + jQ_L = (V_2 \angle -\delta) \left(\frac{V_1 \angle 0 - V_2 \angle -\delta}{X_L \angle 90^\circ} + \frac{V_2 \angle -\delta}{X_C \angle -90^\circ} \right)^* \quad (\text{A.1})$$

$$P_L + jQ_L = \left(\frac{V_1 V_2}{X_L} \text{sen}(\delta) \right) + j \left(\frac{V_1 V_2 \cos(\delta) - V_2^2}{X_L} - \frac{V_2^2}{X_C} \right) \quad (\text{A.2})$$

$$P_L = \frac{V_1 V_2}{X_L} \text{sen}(\delta) \quad (\text{A.3})$$

$$Q_L = \frac{V_1 V_2 \cos(\delta) - V_2^2}{X_L} - \frac{V_2^2}{X_C} \quad (\text{A.4})$$

Substituindo (A.3) em (A.4) :

$$P_L^2 \left[Q_L \left(\frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C} \right) V_2^2 \right]^2 = \frac{V_1^2 V_2^2}{X_L^2} \quad (\text{A.5})$$

$$P_L^2 + Q_L^2 + \left[2Q_L \left(\frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C} \right) V_2^2 + \left(\frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C} \right)^2 V_2^4 \right] = \frac{V_1^2 V_2^2}{X_L^2} \quad (\text{A.6})$$

Esta é uma equação quadrática que pode ser resolvida como uma equação do 2º grau, da seguinte forma:

$$V = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{A.7})$$

$$V_2^2 = V \quad (\text{A.8})$$

Onde:

$$a = \left(\frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C} \right)^2 \quad (\text{A.9})$$

$$b = 2Q_L \left(\frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C} \right) - \frac{V_1^2}{X_L^2} \quad (\text{A.10})$$

$$c = P_L^2 + Q_L^2 \quad (\text{A.11})$$

APÊNDICE B

B Autovalores de Autovetores

B.1 Introdução

Admita um conjunto de n equações linearmente independentes a n incógnitas. Por conveniência as equações serão limitadas a duas incógnitas. Considere o sistema de equações:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= y_2 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Estas equações podem ser colocadas numa forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

A notação pode ser ainda mais simplificada, ou seja, $AX = Y$. A matriz A será uma matriz quadrada de ordem n e X e Y serão vetores de dimensão $n \times 1$. O problema é encontrar um vetor X (chamado autovetor, vetor característico, vetor próprio ou vetor modal) que será transformado pela matriz A em um vetor Y , cujas coordenadas são proporcionais às coordenadas de X e, portanto, têm a mesma direção de X no espaço vetorial. Ou seja, encontrar um vetor que satisfaça a equação B.3, onde λ (chamado autovalor, valor característico ou valor próprio) é um escalar, real, ou complexo que também deve ser determinado.

$$AX = \lambda X \tag{B.3}$$

Como λ é um escalar, λX pode ser substituído por λIX , onde I é a matriz identidade e X é um vetor:

$$\lambda X = \lambda IX \tag{B.4}$$

Resultando finalmente em:

$$AX = \lambda IX \tag{B.5}$$

Reagrupando os termos, temos a Equação B.6 :

$$[A - \lambda I] X = 0 \tag{B.6}$$

A matriz $[A - \lambda I]$ é chamada matriz característica da matriz A . Ela representa os coeficientes de um sistema de equações lineares homogêneas simultâneas que somente terá solução não trivial ($X = 0$), se o determinante da matriz $[A - \lambda I]$ for igual a zero. O cálculo de $\det [A - \lambda I]$ resulta em um polinômio de grau n em λ , que é chamado de função característica ou polinômio característico, cujas as raízes desse polinômio são os autovalores da matriz A .

B.2 Interpretação Física do Problema

Cada ponto do espaço n -dimensional pode ser considerado como a extremidade de um vetor partindo de uma origem arbitrariamente escolhida para o sistema de coordenadas do espaço vetorial. Uma matriz A transforma cada ponto nesse espaço (cada vetor) em outro vetor no mesmo espaço. Por exemplo, a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

transforma o vetor:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

no vetor:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

ou seja:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Esta transformação é apresentada na Figura B.1. Note que os dois vetores têm direções diferentes no espaço vetorial. Em problemas envolvendo autovalores e autovetores, deve-se encontrar os vetores X que serão transformados pela matriz A em vetores Y que têm a mesma direção no espaço vetorial que os vetores originais. Logo, X não é autovetor de A .

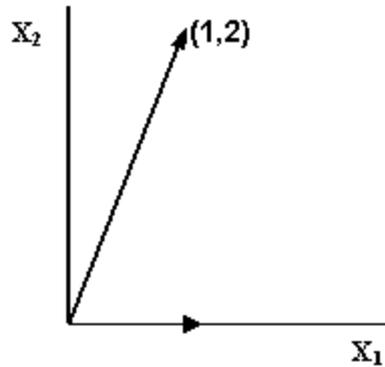


Figura B.1: Transformação Vetorial

A aplicação da equação B.6 a esse exemplo, fornece:

$$[A - I\lambda] X \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 2 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B.11})$$

Cujo o polinômio característico, determinante de $[A - I\lambda]$, deve ser igual a zero:

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 2 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = -4 - 3\lambda + \lambda^2 = 0 \quad (\text{B.12})$$

As raízes desta equação são os dois autovalores $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -1$. Substituindo $\lambda_1 = 4$ na equação B.11:

$$\begin{bmatrix} 1 - 4 & 3 \\ 2 & 2 - 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B.13})$$

Este conjunto de equações não tem apenas uma solução. Entretanto, quando se atribui um valor a uma incógnita, a outra incógnita pode ser determinada. Por exemplo, se $x_1 = 1$, então $x_2 = 1$. Ou seja:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

ou:

$$Y = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

que tem a mesma direção que X_1 . O tamanho do vetor foi alterado, mas a direção continua a mesma. Para o segundo autovalor $\lambda_2 = -1$, substituindo na equação B.11:

$$\begin{bmatrix} 1 - (-1) & 3 \\ 2 & 2 - (-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B.16})$$

Cujos valores de x_1 e x_2 são obtidos arbitrando: $x_1 = 1$. Com isto, o autovetor associado a λ_2 será:

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

Pode-se mostrar que este vetor é transformado pela matriz A num vetor com a mesma direção no espaço, mas com sentido oposto. Estes dois autovetores X_1 e X_2 são linearmente independentes, portanto, formam uma base em \mathfrak{R}^2 , ou seja, qualquer vetor em \mathfrak{R}^2 pode ser escrito como uma combinação linear de X_1 e X_2 .

Seja agora um segundo exemplo, uma matriz 3×3 , a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

O determinante da matriz $[A - I\lambda]$ deve ser igual a zero (solução não trivial):

$$\begin{bmatrix} 8 - \lambda & -8 & -2 \\ 4 & -3 - \lambda & -2 \\ 3 & -4 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B.19})$$

Cuja a equação característica:

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0 \quad (\text{B.20})$$

As raízes desta equação são: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$. A substituição de $\lambda_1 = 1$ na equação B.19 define as três equações simultâneas:

$$\begin{bmatrix} 7 & -8 & -2 \\ 4 & -4 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B.21})$$

A solução da equação B.21 é obtida fazendo-se, arbitrariamente, $x_3 = 2$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

A determinação dos dois autovetores correspondentes aos outros dois autovalores segue a mesma regra. Estes dois exemplos ilustram a técnica, mas se a ordem da matriz A é grande, o cálculo do determinante da matriz $[A - \lambda I]$, para obtenção da equação característica e em seguida a determinação das raízes λ s e os correspondentes autovetores, constitui uma grande dificuldade computacional. Felizmente, em muitos problemas da engenharia somente os maiores ou menores autovalores são particularmente de interesse. Em outras situações procura-se saber quando um autovalor está próximo de um valor em particular. Em outros casos, busca-se apenas determinar se a parte real de todos os autovalores é negativa ou não. Estes problemas são geralmente mais simples que a determinação do conjunto completo de autovalores; entretanto, se há raízes múltiplas que tenham valores próximos, algumas dificuldades numéricas devem ser superadas.

B.3 Formas Quadráticas

Associada à matriz quadrada A está uma forma binária na qual A é pré-multiplicada por um vetor-linha e pós-multiplicada por um vetor-coluna X , como mostrado na equação B.23:

$$B(y, x) = [y_1 y_2 \dots y_n] [A] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B.23})$$

Por exemplo, a forma binária aplicada à matriz 2×2 (já apresentada), fornece a equação B.24:

$$B(y, x) = [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1y_1 + 3x_2y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_2 \quad (\text{B.24})$$

As matrizes de coeficientes são simétricas em muitos problemas de engenharia, cujos elementos fora da diagonal satisfazem a relação $a_{ij} = a_{ji}$. Por razões de conveniência, as matrizes consideradas são simétricas, embora muitas das técnicas se apliquem igualmente a matrizes não simétricas.

Considerando A uma matriz simétrica e $y_i = x_i$, então a forma binária torna-se quadrática, como mostrada na equação B.25:

$$Q(X, X) = [x_1x_2\dots x_n] [A] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = K \quad (\text{B.25})$$

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, então a forma quadrática associada é dada na equação B.26:

$$Q(X, X) = [x_1x_2] \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = K \quad (\text{B.26})$$

A interpretação da equação B.26 é a de que cada ponto do espaço bidimensional pertence a algum membro desta família infinita de seções cônicas obtidas substituindo-se uma ampla faixa de valores ($0 < K < \infty$) na equação B.26. Os vetores que correspondem a um valor particular de K descrevem uma "curva de nível" - curva que representa em cartografia a elevação de um terreno. Pode-se mostrar que a matriz A transforma o vetor X em outro vetor que aponta na direção do gradiente no ponto X (na superfície da curva). Assim, a equação B.27 determina o vetor gradiente Y no ponto X definido pela equação B.28.

$$AX = Y \quad (\text{B.27})$$

$$X^T AX = K \quad (\text{B.28})$$

Por exemplo, substituindo o valor K por um valor qualquer, por exemplo, 12, na equação B.26 :

$$3x_1^2 = 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 12 \quad (\text{B.29})$$

A curva de nível da equação B.29 é mostrada na Figura B.2. Quatro vetores X e os vetores gradientes Y correspondentes são mostrados na Tabela B.1. Os dois vetores X_3 e X_4 satisfazem a condição B.6 e são portanto autovetores da matriz A . Estes dois vetores devem ser normais à curva, visto que eles têm a mesma direção dos vetores gradientes Y_3 e Y_4 . Os raios vetores de uma cônica que estão em ângulos retos com a superfície são seus eixos maior e menor. Portanto, os eixos menor e maior da forma quadrática são os autovetores da matriz A .

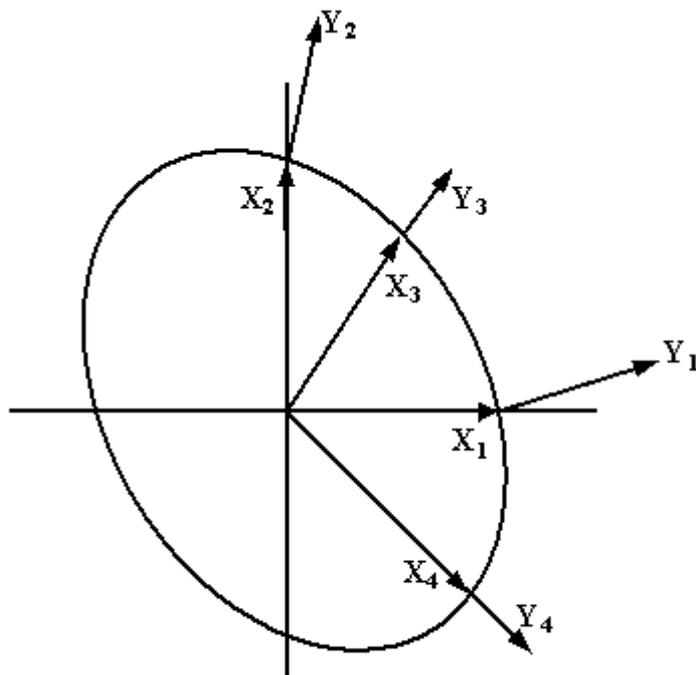


Figura B.2: Curva de Nível ($K=12$)

Tabela B.1: Vetores e Vetores Gradiente

VETOR	X	Y
X_1	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$
X_2	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$
X_3	$\begin{bmatrix} \sqrt{1,5} \\ \sqrt{1,5} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{1,5} \\ \sqrt{1,5} \end{bmatrix}$
X_4	$\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$

Note-se também que os vetores Y_1 e Y_2 apontam ambos em uma direção mais próxima da direção do autovetor X_3 do que os vetores correspondentes X_1 e X_2 . Isto sugere que um processo iterativo pode ser usado para se encontrar um autovetor. Por exemplo, admitindo que o vetor original seja:

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.30})$$

e, $AX_1 = Y_1$, com:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.31})$$

Em cada passo iterativo o novo vetor será dividido pelo último componente do vetor para evitar dificuldades de escalonamento no processo. As etapas serão repetidas usando $X_2 = Y_1$ como estimativa para o autovetor.

$$AY_1 = \left[\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1,66666 \\ 1,00000 \end{bmatrix} = \lambda_2 Y_2 \quad (\text{B.32})$$

Na próxima iteração usa-se Y_2 como estimativa para o autovetor.

$$AY_2 = \left[\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 1,66666 \\ 1,00000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,0000 \\ 4,6666 \end{bmatrix} = 4,6666 \begin{bmatrix} 1,2857 \\ 1,0000 \end{bmatrix} \quad (\text{B.33})$$

Até que, após algumas iterações o autovetor e o autovalor são aproximadamente:

$$\left[\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 1,000976 \\ 1,000000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,00230 \\ 4,0009767 \end{bmatrix} = 4,0008177 \begin{bmatrix} 1,00048 \\ 1,00098 \end{bmatrix} \quad (\text{B.34})$$

E o processo indica que $\lambda = 4$ e o autovetor correspondente é $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Determinando o autovetor a partir da equação B.6 para fins comparativos:

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = 8 - 6\lambda + \lambda^2 = 0 \quad (\text{B.35})$$

cujas raízes são 4 e 2. Então, o processo iterativo resultou no maior autovalor e no autovetor correspondente. Quanto maior for a diferença entre os valores absolutos do maior autovalor e do autovalor seguinte, mais rápida será a convergência do processo iterativo. Caso contrário, se os dois maiores autovalores são bastante próximos, o processo iterativo é extremamente lento. Se os valores absolutos dos dois autovalores diferem pouco, a cônica representativa é quase circular, e torna mais difícil determinar qual é o menor raio vetor que corresponde ao maior autovalor. O autovalor assim determinado será muito mais preciso que o autovetor, porém, se somente o autovalor é necessário, o processo iterativo é bastante razoável para essa situação difícil.

Este processo iterativo, muito útil na obtenção do maior (menor) autovalor e autovetor associado, é também conhecido como método das potências, uma vez que a matriz é sempre multiplicada por ela mesma a cada iteração até a convergência do método.

APÊNDICE C

C Resolução Numérica de Equações Diferenciais

C.1 Introdução

Muitos fenômenos físicos podem ser modelados através de equações diferenciais: equações que envolvem uma função e algumas de suas derivadas. Uma equação que envolve derivadas de ordem até n é chamada de equação diferencial de ordem n , e pode ser escrita como:

$$y^{(n)}(x) = F(x, y'(x), y(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad x \in [a, b] \quad (\text{C.1})$$

A solução desta equação é uma função $y = f(x)$ definida em $[a, b]$, com n derivadas e que satisfaz a equação C.1.

Exemplo: A solução da equação diferencial de 2ª ordem:

$$y'' = -y \quad (\text{C.2})$$

é a função:

$$y(x) = \text{sen}(x) + \cos(x) \quad (\text{C.3})$$

pois:

$$y(x) = \text{sen}(x) + \cos(x) \Rightarrow y'(x) = \cos(x) - \text{sen}(x) \Rightarrow y''(x) = -\text{sen}(x) - \cos(x) \quad (\text{C.4})$$

Logo:

$$y''(x) = -(\text{sen}(x) + \cos(x)) = -y(x) \quad (\text{C.5})$$

Se a função é de uma só variável (como no exemplo acima), tem-se uma equação diferencial ordinária. Do contrário, tem-se uma equação diferencial parcial.

Alguns exemplos de equações diferenciais ordinárias:

- a) $y' = y + x^2$
- b) $y' = y^2$
- c) $y' = 2x + 3$
- d) $y'' = -3y' + 17y$
- e) $yy'' + xy' = 0$

Em casos como o da equação (c), o problema se reduz a um problema de integração $y' = f(x)$ com f contínua em $[a, b]$, cuja solução é dada por:

$$y = \underbrace{\int f(x)dx}_{\text{integral definida}} + c \quad (\text{C.6})$$

onde c é uma constante de integração. No caso (c), por exemplo, tem-se:

$$y = \int (2x + 3)dx = x^2 + 3x + c \quad (\text{C.7})$$

Portanto, como c pode ser uma constante qualquer, tem-se uma família de soluções, como ilustra a Figura C.1 a seguir:

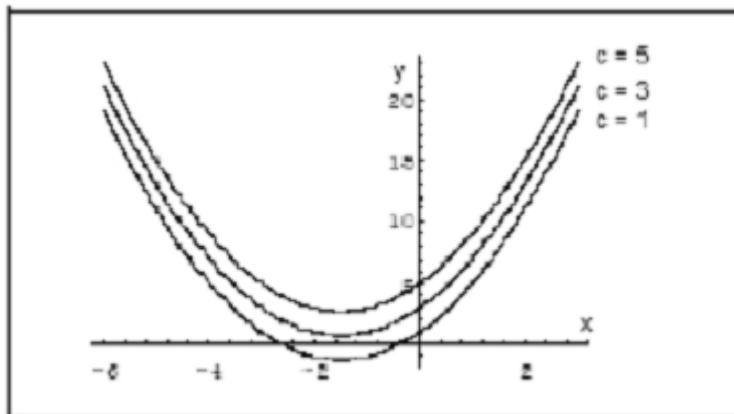


Figura C.1: Família de Curvas

Se para a equação (c) for conhecido, por exemplo, que $y(0) = 1$ (condição inicial), então a solução da equação é unívoca, pois desta forma fica estabelecido o valor da constante c (no caso, $c = 1$). Em geral, para especificar

uma das soluções de uma família de soluções para a equação C.1 é preciso impor condições adicionais da forma (condições iniciais):

$$y(a) = v_1; \quad y'(a) = v_2; \quad \dots; \quad y^{(n-1)}(a) = v_n \quad (\text{C.8})$$

A equação C.1 com as condições C.8 é denominada problema de valor inicial (PVI). Na solução de um PVI, portanto, procura-se uma função $y(x)$, que além de satisfazer a equação diferencial para valores de $x > a$, atenda às condições iniciais pré-estabelecidas.

Outra categoria de problemas associada à equação C.1 é a dos problemas de valor de contorno (PVC). Para um PVC, além das condições no início do fenômeno (ou seja, condições para $x = a$), tem-se também condições a serem satisfeitas no final do fenômeno modelado pela equação diferencial (ou seja, condições para $x = b$). Infelizmente, dispõe-se de poucas técnicas matemáticas que possibilitem soluções analíticas de tais problemas. Por exemplo, para o PVI:

$$y' = x^2 + y^2; \quad y(0) = 1 \quad (\text{C.9})$$

Não se conhece uma técnica para obter uma solução analítica. Em casos assim, é preciso então pensar em técnicas de aproximação. A solução aproximada do problema será uma tabela de pontos: $\{(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n\}$ representando a função $y = f(x)$ desconhecida.

Mesmo no caso de uma solução analítica, pode ser difícil avaliar $f(x)$ para um dado valor de x . Por exemplo, o problema:

$$y' = 1 + 2xy; \quad y(0) = 0 \quad (\text{C.10})$$

tem como solução: $y(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$. Para avaliar $y(x)$ para um dado valor de x será necessário usar uma regra de quadratura para avaliar a integral. Este Apêndice é dedicado justamente aos métodos numéricos de resolução dos problemas de valor inicial e dos problemas de contorno. Para problemas de valor inicial, os desenvolvimentos e exemplos consideram apenas as equações diferenciais de 1ª ordem. Deve-se, no entanto, observar que como uma equação diferencial de ordem n pode ser transformada facilmente em um sistema de n equações diferenciais de 1ª ordem, utilizando-se uma mudança de variáveis, tais desenvolvimentos podem ser facilmente estendidos para equações de mais alta ordem.

Exemplo: Seja a equação: $y'''(x) = xy'(x) + e^x y(x) + x^2 + 1$, $x \in [0, 1]$, com as seguintes condições iniciais: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$;

Fazendo: $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y'(x)$ e $y_3(x) = y''(x)$, tem-se o seguinte sistema de equações de 1ª ordem:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_3(x) \\ y_3'(x) &= y'''(x) = xy_2(x) + e^x y_1(x) + x^2 + 1 \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Portanto, a equação original pode ser vista como um sistema de 3 equações de 1ª ordem, com as condições iniciais: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = -1$.

C.2 Método de Euler

Seja a equação $y' = f(x, y)$ com $y(x_0) = y_0$ e com passo de integração $h = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0, 1, \dots$). Para o desenvolvimento em série de Taylor, pode-se escrever:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi), \quad \xi \in (x_i, x_{i+1}) \quad (\text{C.12})$$

Mas como $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$ e usando a notação: $y_j = y(x_j)$, tem-se:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, \dots) \quad (\text{C.13})$$

Portanto, com esta expressão para o método de Euler, conhecido o valor y_0 (condição inicial) é possível determinar outros valores y_i ($i = 1, 2, \dots$) para a função $y(x)$ nos pontos x_j .

Métodos como o de Euler em que os valores de y_i podem ser obtidos diretamente são denominados métodos explícitos. Além disso, como y_i é obtido através do ponto imediatamente precedente, tal método é conhecido como de passo simples.

Graficamente o método de Euler é mostrado na Figura C2 a seguir:

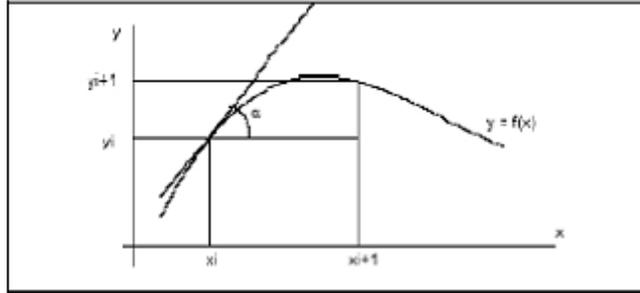


Figura C.2: Método de Euler

Da Figura C.2,tem-se que :

$$y'(x_i) = f(x_i, y_i) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \implies y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \quad (\text{C.14})$$

Exemplo: Seja o seguinte problema de valor inicial:

$$y' = 2x + 3, x \in [1.0, 1.5], \text{ com } y(1.0) = 1.0 \quad (\text{C.15})$$

Para $h = 0.1$, tem-se os seguintes valores numéricos pelo método de Euler:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1.00 \\ y_1 &= y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1.00 + (0.1)f(1.0, 1.00) = 1.00 + (0.1)(2 \cdot (1.0) + 3) = 1.50 \\ y_2 &= y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1.50 + (0.1)f(1.1, 1.50) = 1.50 + (0.1)(2 \cdot (1.1) + 3) = 2.02 \\ y_3 &= y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 2.02 + (0.1)f(1.2, 2.02) = 2.02 + (0.1)(2 \cdot (1.2) + 3) = 2.56 \\ y_4 &= y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 2.56 + (0.1)f(1.3, 2.56) = 2.56 + (0.1)(2 \cdot (1.3) + 3) = 3.12 \\ y_5 &= y_4 + h \cdot f(x_4, y_4) = 3.12 + (0.1)f(1.4, 3.12) = 3.12 + (0.1)(2 \cdot (1.4) + 3) = 3.70 \end{aligned}$$

Ou seja, neste caso a solução é dada pelo seguinte conjunto de pontos:

x	$y(x)$
1.0	1.00
1.1	1.50
1.2	2.02
1.3	2.56
1.4	3.12
1.5	3.70

Para $h = 0.01$, os valores obtidos serão mais precisos. Os dados a seguir mostram tais valores, onde o valor correto é dado por: $x^2 + 3x - 3$.

x	$y(x)$	<i>correto</i>
1.0	1.000	1.000
1.1	1.509	1.510
1.2	2.038	2.040
1.3	2.587	2.590
1.4	3.156	3.160
1.5	3.747	3.750

Para uma equação de ordem n , como comentado anteriormente, pode-se considerar um sistema de n equações diferenciais de 1ª ordem e aplicar o método de Euler a cada uma delas.

Exemplo: Seja o seguinte problema de valor inicial:

$$y'' = y; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = -1 \quad (\text{C.16})$$

Fazendo a troca de variáveis: $y_1 = y$ e $y_2 = y'$, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x, y_1, y_2), & y_1(0) &= 1 \\ y_2 &= f_2(x, y_1, y_2), & y_2(0) &= -1 \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Considerando $h = 0.2$, pelo método de Euler tem-se:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_1(0.2) = y_1(x_0) + h \cdot f_1(x_0, y_1(x_0), y_2(x_0)) = \\ &= 1.00 + 0.2(y_2(x_0)) = 1.00 + 0.2(-1.00) = 0.80 \\ y_2(x_1) &= y_2(0.2) = y_2(x_0) + h \cdot f_2(x_0, y_1(x_0), y_2(x_0)) = \\ &= -1.00 + 0.2(y_1(x_0)) = -1.00 + 0.2(1.00) = -0.80 \\ y_1(x_2) &= y_1(0.4) = y_1(x_1) + h \cdot f_1(x_1, y_1(x_1), y_2(x_1)) = \\ &= 0.80 + 0.2(y_2(x_1)) = 0.80 + 0.2(-0.80) = 0.64 \\ y_2(x_2) &= y_2(0.4) = y_2(x_1) + h \cdot f_2(x_1, y_1(x_1), y_2(x_1)) = \end{aligned}$$

$$= -0.80 + 0.2(y_1(x_1)) = -0.80 + 0.2(0.80) = -0.64$$

Portanto, como $y_1(x) = y(x)$, os valores de $y_1(x_i)$, ($i = 0, 1, \dots$), representam as aproximações para a solução da equação diferencial. Os dados abaixo mostram estes valores para 4 casas decimais, onde o valor correto é dado por: e^{-x}

i	x_i	$y_1(x_i)$	$y_2(x_i)$	<i>correto</i>
0	0.0	1.0000	-1.0000	1.0000
1	0.2	0.8000	-0.8000	0.8187
2	0.4	0.6400	-0.6400	0.6703
3	0.6	0.5120	-0.5120	0.5488
4	0.8	0.4096	-0.4096	0.4493
5	1.0	0.3277	-0.3277	0.3678

C.3 Métodos Baseados na Série de Taylor

O método de Euler considera apenas os termos até a primeira derivada na série de Taylor. Outros métodos numéricos podem ser obtidos considerando mais termos desta série. Seja $y' = f(x, y)$ com $y(x_0) = y_0$, um PVI com a solução dada por $y = F(x)$. Se a solução $F(x)$ for suficientemente derivável, pode-se escrever a expansão de Taylor em torno de x_0 :

$$F(x) = F(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} F'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} F''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} F^{(n)}(x_0) + E_T \quad (\text{C.18})$$

Mas:

$$\begin{aligned} F(x_0) &= y_0 \\ F'(x_0) &= y'(x_0) = f(x_0, y_0) = y'_0 \\ F''(x_0) &= y''(x_0) = y''_0 \end{aligned}$$

As derivadas y'', y''', \dots não são conhecidas, uma vez que $F(x)$ não é conhecida. Contudo, se $f(x, y)$ for suficientemente derivável, tais derivadas podem ser determinadas da seguinte maneira:

$$y' = f(x, y(x)) = f \quad (\text{C.19})$$

$$y'' = f'(x, y(x)) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{f_y} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y' = f} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{f_x} = f_y f + f_x \quad (\text{C.20})$$

$$\begin{aligned} y''' &= \frac{\partial(f_y f)}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_f + \frac{\partial(f_y f)}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_f + \frac{\partial f_x}{\partial x} = \\ &= f_{yy} f^2 + f_y^2 f + 2f_{xy} f + f_x f_y + f_{xx} \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

e assim sucessivamente.

Exemplo: Seja o PVI $y' = x + y^2$ com $y(0) = 1$.

Neste caso, tem-se:

$$y'' = f_y f + f_x = 2y(x + y^2) + 1 = 2yy' + 1 \quad (\text{C.22})$$

$$y''' = 2(y')^2 + (2y)^2 y' + 2(0)y' + 1(2y) + 0 = 2(y')^2 + 4y^2 y' + 2y \quad (\text{C.23})$$

Portanto, como $y_0 = y(0) = 1$, tem-se:

$$y'_0 = f(x_0, y_0) = 0 + 1^2 = 1$$

$$y''_0 = 2y_0 y'_0 + 1 = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$y'''_0 = 2(y'_0)^2 + 4(y_0)^2 y'_0 + 2y_0 = 2 \cdot (1)^2 + 4 \cdot (1)^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 8$$

Logo:

$$y(x) = y_0 + (x - x_0)y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y''_0 + \frac{(x - x_0)^3}{3!}y'''_0 + E_T \quad (\text{C.24})$$

$$y(x) \cong 1 + (x - 0).1 + 3\frac{(x - 0)^2}{2} + 8\frac{(x - 0)^3}{6} = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 \quad (\text{C.25})$$

Exemplo: O problema de valor inicial $y' = y^2$; $x \in [0, 1]$; $y(0) = 0.25$, tem como solução:

$$y(x) = \frac{1}{4 - x} \quad (\text{C.26})$$

Para se determinar, por exemplo, o valor de $y(0.2)$, tem-se a partir da série de Taylor:

$$y(x) \cong y_0 + xy'_0 + \frac{x^2}{2}y''_0 + \frac{x^3}{6}y'''_0 \quad (\text{C.27})$$

Mas:

$$y_0 = 0.25$$

$$y'_0 = (y_0)^2 = (0.25)^2 = 0.0625$$

$$y''_0 = f_y f + f_x = 2y_0 y'_0 + 0 = 2(0.25)(0.0625) = 0.03125$$

$$y'''_0 = f_{yy} f^2 + f_y^2 f + 2f_{xy} f + f_x f_y + f_{xx} = 2(y'_0)^2 + (2y_0)^2 y'_0 + 2(0)y'_0 + 0(2y_0) + 0 = 2 \cdot (0.0625)^2 + 4(0.25)^2(0.0625) = 0.0234375$$

Portanto:

$$y(0.2) \cong 0.25 + (0.2)(0.0625) + \frac{(0.2)^2}{2}(0.03125) + \frac{(0.2)^3}{6}(0.0234375) = 0.263156 \quad (\text{C.28})$$

O valor exato neste caso seria: $y(0.2) = \frac{1}{4 - 0.2} = 0.263157$.

C.4 Métodos Baseados em Regras de Quadratura

Muitos métodos para solução de um PVI podem ser obtidos a partir de regras de integração numérica, uma vez que para o problema:

$$y'(x) = f(x, y) \text{ com } y(x_0) = y_0 \quad (\text{C.29})$$

pode-se escrever:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} y'(x) dx = y|_{x_{i-1}}^{x_i} = y(x_i) - y(x_{i-1}) = y_i - y_{i-1} \quad (\text{C.30})$$

Por outro lado, a partir do cálculo da área de um trapézio, tem-se:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} y'(x) dx = \frac{h}{2} [y'(x_{i-1}) + y'(x_i)] + E_T \quad (\text{C.31})$$

Portanto: $y_i \cong y_{i-1} + \frac{h}{2} [f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_i)]$ é uma aproximação para o valor de $y(x)$ no ponto $x = x_j$.

Esta aproximação, constitui um esquema de passo simples (o valor de y_i depende de apenas do valor anterior y_{i-1}).

Entretanto, este esquema é implícito, uma vez que o valor de y_i depende do próprio valor de y_i . Portanto, neste caso, é necessário um processo iterativo para determinar o valor de y_i ($i = 1, 2, \dots$).

Para que y_i seja obtido iterativamente é necessário uma estimativa inicial para $y_i^{[0]}$. Muitas escolhas são possíveis para a estimativa inicial. Alguns exemplos são:

- (i) o valor anterior y_{i-1}
- (ii) o valor de y_i obtido pelo método de Euler: $y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$

Dado um valor para $y_i^{[0]}$, tem-se o seguinte esquema iterativo:

$$y_i^{[n]} = y_{i-1} + \frac{h}{2} [f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_i^{[n-1]})] \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{C.32})$$

ou seja:

$$y_i^{[n]} = \phi(y_i^{[n-1]}) \text{ onde : } \phi(y_i) = y_{i-1} + \frac{h}{2} f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \quad (\text{C.33})$$

Para a convergência em cada iteração deve-se ter:

$$\left| \frac{d\phi}{dy_i} \right| < 1 \quad (\text{C.34})$$

Portanto, tem-se que:

$$\left| \frac{d\phi}{dy_i} \right| = \frac{h}{2} \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial(x, y)} \right|_{\substack{x = x_j \\ y = y_j}} < 1 \quad (\text{C.35})$$

ou seja, para garantir a convergência do processo iterativo, o passo h deverá ser tal que:

$$h < \frac{2}{\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial(x, y)} \right|_{\substack{x = x_j \\ y = y_j}}}$$

Exemplo: Seja $y' = y^2$; $x \in [0, 1]$; $y(0) = 0.25$

Neste caso: $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \implies h < \frac{2}{|2y|} \implies h < \left| \frac{1}{|y|} \right|$. Tomando

$y(0)$ como uma estimativa para o valor de y , tem-se $h < \frac{1}{0.25} = 4$. Assim, a escolha de $h = 0.2$ deve ser suficiente para garantir a convergência do processo iterativo. Então:

$$\begin{aligned} y_0 &= 0.25 \\ y_1^{[0]} &= y_0 + hf(x_0, y_0) \text{ (estimativa inicial pelo método de Euler)} = 0.25 + \\ &0.2(0.25)^2 = 0.2625 \end{aligned}$$

Seja a tolerância do método dada por : $\varepsilon = 0.00001$

$$y_1^{[1]} = 0.25 + \frac{0.2}{2} + [(0.25)^2 + (0.2625)^2] = 0.263141$$

$$y_1^{[2]} = 0.25 + \frac{0.2}{2} [(0.25)^2 + (0.263141)^2] = 0.263174$$

$$y_1^{[3]} = 0.25 + \frac{0.2}{2} [(0.25)^2 + (0.263174)^2] = 0.263176$$

$$y_1^{[4]} = 0.25 + \frac{0.2}{2} [(0.25)^2 + (0.263176)^2] = 0.263176$$

Logo: $y_1 = 0.263176$ (uma vez que $y_1 = y(0.2)$ cujo valor exato é $y(0.2) = \frac{1}{4-0.2} = 0.263157$).

C.5 Métodos de Runge-Kutta

Os métodos Runge-Kutta são muito empregados na prática, pois possuem as seguintes características:

- (i) são auto-inicializáveis, ou seja, a partir da condição inicial é possível conhecer os demais pontos da solução;
- (ii) não requerem o cálculo de derivadas;

(iii) permitem, facilmente, a alteração do tamanho do passo h ;
 (iv) utilizam n avaliações da função a cada passo, onde n é o grau do método.

A partir do desenvolvimento em séries de Taylor, tem-se:

$$y_{i+1} = y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + E_T \quad (\text{C.36})$$

Como $y'(x) = f(x, y)$, tem-se:

$$y_{i+1} \cong y(x_i) + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \frac{df(x, y)}{dx} \Big|_{x=x_i} \quad (\text{C.37})$$

Para calcular $\frac{df(x, y)}{dx}$, seja o polinômio interpolador de 1º grau no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$:

$$p(x) = \frac{x_i - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} y(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y(x_{i+1}) = \frac{1}{h} [(x - x_i)y(x_{i+1}) - (x - x_{i+1})y(x_i)] \quad (\text{C.38})$$

Portanto:

$$p'(x) = \frac{1}{h} [y(x_{i+1}) - y(x_i)] \quad (\text{C.39})$$

Usando este resultado, pode-se escrever:

$$\frac{df(x, y)}{dx} \cong \left[\frac{1}{h} \right] [f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)] \quad (\text{C.40})$$

Então:

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &\cong y(x_i) + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \frac{1}{h} [f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)] = \\
 &= y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, y_{i+1})
 \end{aligned} \tag{C.41}$$

Mas, pelo método de Euler, tem-se: $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$, e portanto: $f(x_{i+1}, y_{i+1}) = f(x_{i+1}, hf(x_i, y_i))$. Então:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))] \tag{C.42}$$

Fazendo:

$$k_1 = hf(x_i, y_i) \tag{C.43}$$

$$k_2 = hf(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)) = hf(x_{i+1}, y_i + k_1) \tag{C.44}$$

tem-se o método de Runge-Kutta de 2ª ordem.:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} [k_1 + k_2] \tag{C.45}$$

De uma forma geral, os métodos de Runge-Kutta são estabelecidos como:

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{i=1}^n w_i k_i \tag{C.46}$$

com:

$$k_i = hf(x_j + \theta_i h, y_j + \sum_{p=1}^{i-1} \phi_{i,p} k_p) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{C.47}$$

e os coeficientes w_i, θ_j e $\phi_{i,p}$ ($i = 1, 2, \dots, n; p = 1, 2, \dots, i-1$) são escolhidos de modo que a expansão de y_{i+1} pela série considera até n termos.

Para $n = 2$ (método de Runge-Kutta de 2^a ordem) tem-se:

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{i=1}^2 w_i k_i = y_i + w_1 k_1 + w_2 k_2 \quad (\text{C.48})$$

com: $w_1 = w_2 = 1/2; \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 1; \quad \phi_{2,1} = 1$

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \underbrace{\frac{1}{2}}_{w_1} \underbrace{hf(x_i + \underbrace{0}_{\theta_1} h, y_i)}_{k_1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{w_2} \underbrace{hf(x_i + \underbrace{1}_{\theta_2} h, y_i + \sum_{p=1}^{2-1} \phi_{2,p} k_p)}_{k_2} = \\ &= y_i + \frac{1}{2} hf(x_i, y_i) + \frac{1}{2} hf(x_{i+1}, y_i + \underbrace{1}_{\phi_{2,1}} k_1) \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

Para $n = 3$ (método Runge-Kutta de 3^a ordem) tem-se

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{i=1}^3 w_i k_i = y_i + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 \quad (\text{C.50})$$

com:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i + \theta_1 h, y_i) \\ k_2 &= hf(x_i + \theta_2 h, y_i + \phi_{2,1} k_1) \\ k_3 &= hf(x_i + \theta_3 h, y_i + \phi_{3,1} k_1 + \phi_{3,2} k_2) \end{aligned} \quad (\text{C.51})$$

onde:

$$\begin{aligned} w_1 + \frac{1}{6} \quad w_2 = \frac{2}{3} \quad w_3 = \frac{1}{6} \\ \theta_1 = 0 \quad \theta_2 = \frac{1}{2} \quad \theta_3 = 1 \\ \phi_{2,1} = \frac{1}{2} \quad \phi_{3,1} = -1 \quad \phi_{3,2} = 2 \end{aligned} \quad (\text{C.52})$$

ou seja:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[k_1 + 4k_2 + k_3] \quad (\text{C.53})$$

com:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2) \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$

Um dos métodos de Runge-Kutta mais utilizados é o de 4^a ordem, dado por:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \quad (\text{C.55})$$

com:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3) \end{aligned} \quad (\text{C.56})$$

Observação:

Seja $y' = f(x)$ (ou seja, o lado direito da equação diferencial é uma função que não depende de $y(x)$). Neste caso, para o método de Runge-Kutta de 3^a ordem, tem-se:

$$k_1 = hf(x_i) \quad k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \quad k_3 = hf(x_i + h) \quad (\text{C.57})$$

e, portanto:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}[f(x_i) + 4f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + f(x_i + h)] \quad (\text{C.58})$$

Por outro lado:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx = y_{i+1} - y_i \quad (\text{C.59})$$

Logo:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{6}[f(x_i) + 4f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_i + h)] \quad (\text{C.60})$$

que corresponde a regra de quadratura da função $f(x)$ com passo $\frac{h}{2}$.

C.6 Método de Passo Múltiplo

Os métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias vistos anteriormente são todos de passo único, isto é, para calcular y_{i+1} leva-se em conta apenas os valores de $f(x, y)$ em torno do ponto anterior y_i . Os métodos de passo múltiplo levam em conta não apenas o valor de y_i como também pontos anteriores $y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-n+1}$ (método de n-passos).

A fórmula geral de um método de n-passos é dada por:

$$y_{i+1} = \sum_{j=1}^n \alpha_j y_{i-j+1} + h \sum_{j=0}^n \beta_j \underbrace{f(x_{i-j+1}, y_{i-j+1})}_{f_{i-j+1}} \quad (\text{C.61})$$

Dependendo do valor de β_0 tem-se duas classes de métodos de passo múltiplo: métodos explícitos e métodos implícitos.

Se $\beta_0 = 0$, então:

$$y_{i+1} = \sum_{j=1}^n \alpha_j y_{i-j+1} + h \sum_{j=1}^n \beta_j f_{i-j+1} = (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_{i-1} + \dots + \alpha_n y_{i-n+1}) + h(\beta_1 f_i + \beta_2 f_{i-1} + \dots + \beta_k f_{i-n+1}) \quad (\text{C.62})$$

ou seja, para determinar o próximo ponto da solução, y_{i+1} , são necessários os n valores anteriores da solução: $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-n+1}$, além dos respectivos valores de $f(x_j, y_j)$ ($j = i, i-1, i-2, \dots, i-n+1$). Portanto, quando $\beta_0 = 0$, tem-se um método explícito de passo múltiplo.

Se $\beta_0 \neq 0$, além destes pontos é necessário também o valor de f_{i+1} . Neste caso, para calcular y_{i+1} é preciso um processo iterativo levando, portanto, a um método implícito de passo múltiplo.

C.6.1 Métodos Explícitos de Passo Múltiplo

Dada a equação $y' = f(x, y(x))$ pode-se obter por integração:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx \quad (\text{C.63})$$

Supondo já conhecidos os valores anteriores y_j ($j = i, i-1, \dots, i-n+1$) pode-se substituir $f(x, y(x))$ por um polinômio interpolador que passa por estes pontos anteriores. Neste caso tem-se uma família de métodos (dependendo da escolha do grau do polinômio) para resolver a equação diferencial, conhecidos como métodos de Adams-Bashforth.

Para $n = 2$, o polinômio é do 1º grau e tem-se um método de 2º grau:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\frac{(x - x_i)}{(x_{i-1} - x_i)} f_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} f_i \right] dx = \\ &= y_i + \frac{1}{h} \left[f_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i-1}) dx - f_{i-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) dx \right] \end{aligned} \quad (\text{C.64})$$

Essas integrais podem ser calculadas facilmente. Por exemplo:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - x_{i-1} \cdot x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{x_{i+1}^2}{2} - \frac{x_i^2}{2} - x_{i-1}(x_{i+1} - x_i) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2 - 2x_{i-1}x_{i+1} + 2x_{i-1}x_i}{2} \\
&= \frac{x_{i+1}x_{i+1} - x_i x_i - x_{i-1}x_{i+1} - x_{i-1}x_{i+1} + x_{i-1}x_i + x_{i-1}x_i}{2} = \\
&= \frac{x_{i+1}(x_{i+1} - x_{i-1}) + x_i(x_{i-1} - x_i) + x_{i-1}(x_i - x_{i+1})}{2} \\
&= \frac{2hx_{i+1} - hx_i - hx_{i-1}}{2} = \frac{hx_{i+1} + hx_{i+1} - hx_i - hx_{i-1}}{2} = \\
&= \frac{h(x_{i+1} - x_{i+1}) + h(x_{i+1} - x_i)}{2} = \frac{h(2h) + h(h)}{2} = \frac{3h^2}{2} \quad (\text{C.65})
\end{aligned}$$

Assim :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{h} \left[\frac{3h^2}{2} f_i - \frac{h^2}{2} f_{i-1} \right] = y_i + \frac{h}{2} [3f_i - f_{i-1}] \quad (\text{C.66})$$

Considerando a forma geral vista anteriormente, o método de Adams-Bashforth de 2º grau pode ser escrito como:

$$y_{i+1} = \alpha_1 y_i + \alpha_2 y_{i-1} + h[\beta_1 f_i + \beta_2 f_{i-1}] \quad (\text{C.67})$$

onde:

$$\alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = 0; \quad \beta_1 = 3/2; \quad \beta_2 = -1/2 \quad (\text{C.68})$$

Para $n = 3$, o polinômio é do 2º grau e tem-se o método de Adams-Bashforth de 3º grau:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} [23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}] \quad (\text{C.69})$$

Para $n = 4$, o polinômio é do 3º grau e tem-se o método Adams-Bashforth de 4º grau :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}] \quad (\text{C.70})$$

Para $n = 5$, o polinômio é do 4º grau e tem-se o método de Adams-Bashforth de 5º grau:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720} [1901f_i - 2774f_{i-1} + 2616f_{i-2} - 1274f_{i-3} + 251f_{i-4}] \quad (\text{C.71})$$

Nota-se que à medida que aumenta o grau do polinômio interpolador, aumentam os coeficientes de $f_j (j = i, i - 1, i - 2, \dots, i - n + 1)$, e portanto o método torna-se mais sensível a erros de arredondamento. Os métodos de Adams-Bashforth não são auto-inicializáveis, porque necessitam de um conjunto de n pontos anteriores da solução para que possam ser aplicados (de início, tem-se apenas um ponto de solução: a condição inicial). Portanto, para aplicar um método de Adams-Bashforth é preciso, primeiramente, obter este conjunto inicial de n pontos através de um método de passo único.

C.6.2 Métodos Implícitos de Passo Múltiplo

Os métodos implícitos de passo múltiplo são obtidos da mesma forma que os métodos explícitos, só que agora, $\beta_0 \neq 0$. Tais métodos são conhecidos como métodos de Adams-Moulton.

Para $n = 2$ (método de Adams-Moulton de 2º grau):

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i+1})} f_i + \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} f_{i+1} \right] dx = \\ &= y_i + \frac{1}{h} [f_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) dx - f_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i+1}) dx] \end{aligned} \quad (\text{C.72})$$

ou seja:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f_{i+1} + f_i] \quad (\text{C.73})$$

Para $n = 3$ (método de Adams-Moulton de 3º grau):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}[5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}] \quad (\text{C.74})$$

Para $n = 4$ (método de Adams-Moulton de 4º grau):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}[9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}] \quad (\text{C.75})$$

Para $n = 5$ (método de Adams-Moulton de 5º grau):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720}[251f_{i+1} + 646f_i - 264f_{i-1} + 106f_{i-2} - 19f_{i-3}] \quad (\text{C.76})$$

Note-se que as fórmulas implícitas são menos sensíveis a erros de arredondamento (pois os coeficientes são menores) do que as fórmulas explícitas, porém necessitam de um processo iterativo.

C.7 Método Previsor-Corretor

Os métodos implícitos são menos sujeitos a erros de arredondamento e apresentam limites de erro de truncamento menores que os métodos explícitos de mesma ordem. Entretanto, nos métodos implícitos o cálculo de y_{i+1} requer-se o valor de f_{i+1} e, portanto, um processo iterativo. Já os métodos

explícitos tem a vantagem de se poder calcular y_{i+1} somente com base em valores anteriores da solução. Pode-se, então, combinar estes dois tipos de métodos de modo a empregar as vantagens de cada um. Esta combinação é conhecida como método previsor-corretor, que corresponde :

(i) inicializar o processo por um método de passo único (por exemplo, Runge-Kutta);

(ii) calcular o valor de y_{i+1} pelo método de passo múltiplo explícito (previsor);

(iii) recalcular o valor de y_{i+1} usando o método de passo múltiplo de mesma ordem (corretor).

Portanto, no método previsor-corretor, o método explícito (método de Adams-Bashforth) pode ser usado como um previsor e o método implícito (método de Adams-Moulton) corresponde ao corretor.

Exemplo: Seja o PVI: $y' = y^2$; $y(0) = 0.25$; $x \in [0, 1]$; $h = 0.2$

(i) inicialização: cálculo de y_1 (Runge-Kutta de 2ª ordem): $y_i = y_0 +$

$$\frac{1}{2}[k_1 + k_2], \text{ com:}$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.2(0.25)^2 = 0.012500$$

$$k_2 = hf(x_1, y_0 + k_1) = 0.2(0.25 + 0.012500)^2 = 0.013781$$

$$\text{Logo: } y_1 = 0.25 + \frac{1}{2}[0.012500 + 0.013781] = 0.263141$$

(ii) previsor: cálculo de y_2 (Adams-Bashfort de 2ª ordem) : $y_2 = y_1 +$

$$\frac{h}{2}[3f_1 - f_0]$$

$$y_2 = 0.263141 + \frac{0.2}{2}[3 \cdot (0.263141)^2 - (0.25)^2] = 0.277664$$

(iii) corretor: cálculo de y_2 (Adams-Moulton de 2ª ordem) : $y_2 = y_1 +$

$$\frac{h}{2}[f_2 + f_1]$$

$$y_2 = 0.263141 + \frac{0.2}{2}[(0.277664)^2 + (0.263141)^2] = 0.277775$$

Neste caso o valor correto é: $y_2 = y(0.4) = \frac{1}{4 - 0.4} = 0.277778$

Deve-se observar que o passo de correção pode ser executado várias vezes, até que se consiga um resultado satisfatório.

C.8 Método das Diferenças Finitas

Basicamente, para uma função $y(x)$ em torno do ponto $x = x_i$, pode-se escrever a partir do desenvolvimento em série de Taylor.:

$$y(x) = y(x_i) + (x - x_i)y'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2!}y''(x_i) + \dots \quad (\text{C.77})$$

Portanto o valor de $y(x)$ no ponto $x = x_{i+1} = x_i + h$, pode ser escrito como:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + (x_{i+1} - x_i)y'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!}y''(x_i) + \dots \quad (\text{C.78})$$

$$= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \dots \quad (\text{C.79})$$

ou seja:

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = y'(x_i) + \frac{h}{2}y''(x_i) + \dots \quad (\text{C.80})$$

Tem-se, portanto:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} + O(h) \quad (\text{C.81})$$

onde $O(h)$ (ordem de h) indica que a magnitude dos termos restantes dependem da ordem de grandeza do valor de h .

Assim, pode-se escrever:

$$y'(x_i) \cong \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \quad (\text{C.82})$$

Neste caso, $y'(x)$ é aproximada por uma diferença finita ascendente, com erro da ordem de h .

Se na equação C.77, substitui-se x por x_{i-1} , tem-se:

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) + (x_{i-1} - x_i)y'(x_i) + \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2!}y''(x_i) + \dots \quad (\text{C.83})$$

$$= y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \dots \quad (\text{C.84})$$

e, portanto:

$$y'(x_i) \cong \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h} \quad (\text{C.85})$$

e, neste caso, diz-se que $y'(x)$ é aproximada por uma diferença finita descendente, com erro também da ordem de h .

Uma terceira aproximação para $y'(x)$ pode ser obtida subtraindo-se a expressão para $y(x_{i-1})$, ou seja:

$$y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) = 2hy'(x_i) + O(h^3) \quad (\text{C.86})$$

Portanto:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + O(h^2) \quad (\text{C.87})$$

Logo:

$$y'(x_i) \cong \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} \quad (\text{C.88})$$

Neste caso, diz-se que $y'(x)$ é aproximada por uma diferença finita central. Deve-se observar, entretanto, que nesta aproximação o erro é da ordem de h^2 (menor, portanto, que o erro das aproximações anteriores, se $h < 1$).

Pode-se obter uma aproximação para a segunda derivada, somando-se as expressões para $y(x_{i-1})$ e $y(x_{i+1})$:

$$y(x_{i-1}) + y(x_{i+1}) = 2y(x_i) + h^2y''(x_i) + O(h^4) \quad (\text{C.89})$$

ou seja

$$y''(x_i) \cong \frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1}))}{h^2} \quad (\text{C.90})$$

Esta expressão aproxima o valor $y''(x)$ com erro da ordem de h^2 . Aproximações para derivadas de ordens superiores podem ser obtidas de forma análoga.

O método das diferenças finitas para solução de equações diferenciais decorre da substituição das derivadas da função pelas suas correspondentes aproximações por diferenças finitas. Considerando a notação y_i para designar o valor de $y(x_i)$, tem-se então:

Derivada	Aproximação	Erro (ordem)
Primeira	$y'_i \cong \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$	h
	$y'_i \cong \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$	h
	$y'_i \cong \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$	h^2
Segunda	$y''_i \cong \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$	h^2

Exemplo: Solução para o PVC a seguir:

$$\begin{cases} y'' - y' + xy = e^x(x^2 + 1) & x \in [0, 1] \\ y(0.0) = 0.00 \\ y(1.0) = 2.71 \end{cases} \quad (\text{C.91})$$

Para resolver o problema pelo método das diferenças finitas, deve-se inicialmente discretizar o domínio. Para o caso acima, seja $n = 5$ o número de subintervalos do domínio $[0, 1]$. Neste caso:

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{5} = 0.2 \quad (\text{C.92})$$

onde:

$$\begin{aligned} y_0 &= y(x_0) = y(0.0) = 0.00 \\ y_5 &= y(x_5) = y(1.0) = 2.71 \end{aligned}$$

Portanto, a solução aproximada consiste em determinar os valores de $y_i, i = 1, \dots, 4$, como mostra os dados a seguir:

i	x_i	y_i
0	0.0	0.00
1	0.2	?
2	0.4	?
3	0.6	?
4	0.8	?
5	1.0	2.71

Substituindo, na equação diferencial, as derivadas pelas aproximações por diferenças finitas (para derivada primeira, a diferença central, por ser mais exata), obtém-se:

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + x_i y_i = e^{x_i}(x_i^2 + 1) \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{C.93})$$

ou seja:

$$(2 + h)y_{i-1} + (2h^2x_i - 4)y_i + (2 - h)y_{i+1} = 2h^2e^{x_i}(x_i^2 + 1) \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{C.94})$$

Tem-se então:

$$\begin{aligned} i = 1 &\implies (2h^2x_1 - 4)y_1 + (2 - h)y_2 = 2h^2e^{x_1}(x_1^2 + 1) - (2 + h)y_0 \\ i = 2 &\implies (2 + h)y_1 + (2h^2x_2 - 4)y_2 + (2 - h)y_3 = 2h^2e^{x_2}(x_2^2 + 1) \\ i = 3 &\implies (2 + h)y_2 + (2h^2x_3 - 4)y_3 + (2 - h)y_4 = 2h^2e^{x_3}(x_3^2 + 1) \\ i = 4 &\implies (2h^2x_4 - 4)y_4 + (2 - h)y_5 = 2h^2e^{x_4}(x_4^2 + 1) - (2 - h)y_5 \end{aligned}$$

Os termos correspondentes a y_0 e y_5 , por serem constantes, foram deslocados para o segundo membro nas respectivas equações. Assim, substituindo-se os valores obtém-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} -3.984 & 1.8 & 0 & 0 \\ 2.2 & -3.968 & 1.8 & 0 \\ 0 & 2.2 & -3.952 & 1.8 \\ 0 & 0 & 2.2 & -3.936 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.102 \\ 0.138 \\ 0.198 \\ -4.601 \end{bmatrix} \quad (\text{C.95})$$

Resolvendo o sistema, tem-se os valores correspondentes a solução aproximada. Os dados a seguir compara os valores obtidos para a solução aproximada com os valores obtidos através da solução analítica $y(x) = xe^x$.

i	x_i	y_i calculado	y_i exato
0	0.0	0.0000	0.0000
1	0.2	0.2434	0.2443
2	0.4	0.5954	0.5967
3	0.6	1.0917	1.0933
4	0.8	1.7791	1.7804
5	1.0	2.7183	2.7183

APÊNDICE D

D A Máquina Síncrona

D.1 Introdução

A máquina síncrona é a principal fonte de energia dos sistemas elétricos de potência, e portanto, está intimamente relacionada à estabilidade do sistema elétrico de potência. O entendimento de sua dinâmica e o desenvolvimento de modelos matemáticos adequados é de suma importância em estudos de estabilidade dos sistemas elétricos. Assim, pretende-se desenvolver uma rigorosa apresentação da máquina síncrona (ou máquinas síncronas), suas implicações e simplificações em estudos de regime permanente e transitório.

D.2 Considerações Iniciais

Seja o circuito da Figura D.1:

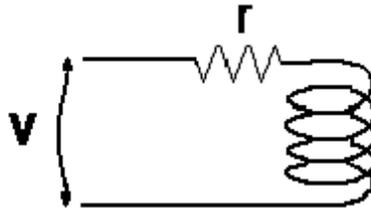


Figura D.1: Tensão Induzida na Bobina

Onde:

$V = \pm ri \pm \frac{Ldi}{dt}$, tensão que aparece sobre a bobina quando da energização e/ou desenergização do circuito. Lembrando-se de que: $L = \frac{\phi}{i} \rightarrow \phi = Li$ e $L \Rightarrow$ indutância da bobina, $r \Rightarrow$ resistência da bobina.

Logo, em um enrolamento a tensão terminal V é dada por:

$$V = \pm ri \pm \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{D.1})$$

Os sinais " + " e " - " dependem do sentido da corrente na bobina e da convenção de sinal adotada.

A partir desse modelo simples de circuito serão desenvolvidos dois modelos, um usando como variáveis de estado as correntes, e outro usando os fluxos de dispersão nos enrolamentos das máquinas síncronas.

O acoplamento magnético entre os enrolamentos é uma função da posição do rotor. Assim, o fluxo mútuo entre enrolamentos é também uma função da posição do rotor, Figura D.2. A tensão instantânea terminal V de cada enrolamento é da forma:

$$V = \pm \Sigma r i \pm \Sigma \lambda \tag{D.2}$$

Onde λ é o fluxo de dispersão, r é a resistência do enrolamento e i é a corrente positiva, se flui para fora dos terminais. As expressões para as tensões nos enrolamentos são complicadas devido à variação do fluxo com a posição do rotor, Figura D.2.

A máquina síncrona pode ser representada por seis enrolamentos magneticamente acoplados:

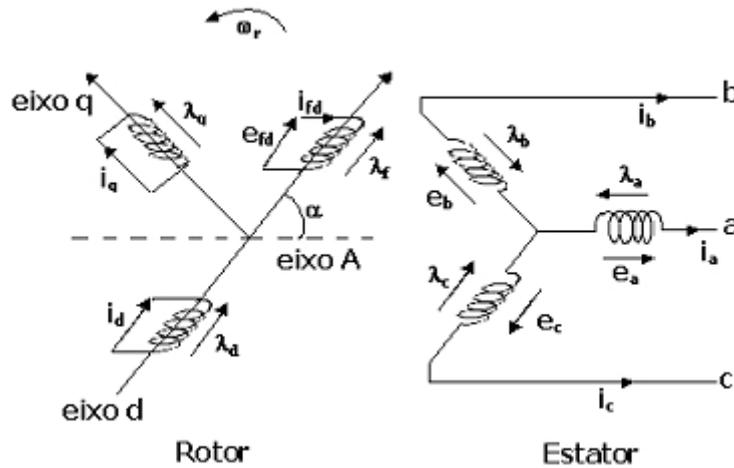


Figura D.2: Representação da Máquina Síncrona

O rotor da máquina gira com uma velocidade angular ω_r . Assim, a posição angular α em relação a referência (fase A) aumenta continuamente com o tempo: $\alpha = \omega_r t$.

O fluxo principal está na direção do eixo d do rotor que produz uma f.e.m na direção do eixo q . Considere uma máquina tendo uma tensão terminal constante V . Para um gerador, o fasor E estaria adiantado em relação ao fasor V . O ângulo entre E e V é o ângulo de torque da máquina ou ângulo de carga, δ ; se o fasor V coincidir com a fase A (referência), Figura D.3.

Em $t = 0$ o fasor V está localizado no eixo a , o eixo q está deslocado de um ângulo δ , e o eixo d deslocado de um ângulo $\theta = \delta + \frac{\pi}{2}$. Em $t > 0$, o eixo a deslocou-se de um ângulo $\omega_r t$ em relação à fase A , e o eixo d do rotor está agora deslocado de um ângulo $\theta = \omega_r t + \delta + \frac{\pi}{2}$.

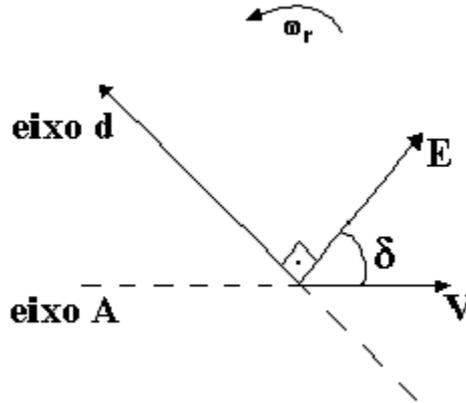


Figura D.3: Deslocamento do eixo d

Os seis circuitos da Figura D.2 interagem da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \\ \lambda_f \\ \lambda_d \\ \lambda_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{af} & L_{ad} & L_{aq} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bf} & L_{bd} & L_{bq} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cf} & L_{cd} & L_{cq} \\ L_{fa} & L_{fb} & L_{fc} & L_{ff} & L_{fd} & L_{fq} \\ L_{da} & L_{db} & L_{dc} & L_{df} & L_{dd} & L_{dq} \\ L_{qa} & L_{qb} & L_{qc} & L_{qf} & L_{qd} & L_{qq} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_f \\ I_d \\ I_q \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

As relações de composição das indutâncias podem ser compreendidas a partir da Figura D.4, que apresenta o desdobramento do rotor da máquina síncrona, evidenciando a variação da permeância magnética, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_2 \cos(2\alpha)$

(gráfico) ; à medida que se caminha ao longo do rotor: indo do eixo d (pólo N), passando pelo eixo q e chegando ao pólo S.

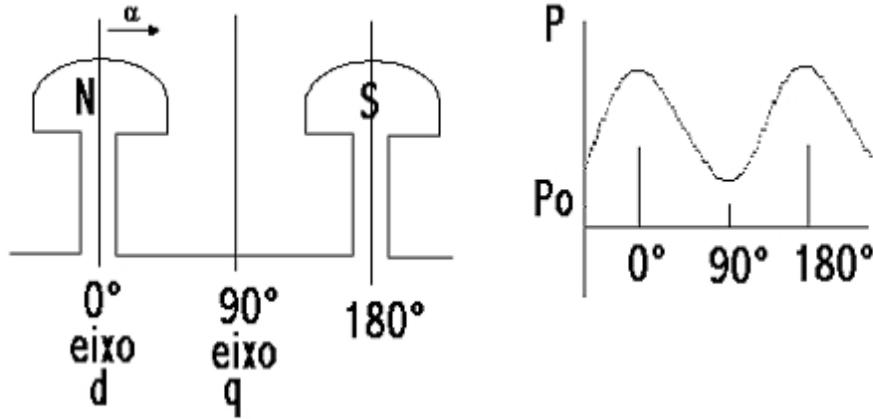


Figura D.4: Permeância Magnética e Posição Relativa do Rotor

As forças magnetomotrizes (fmm's) dependem do ângulo α (posição relativa do rotor). As equações D.4 a D.12 mostram essa dependência apresentando a condição máxima e mínima para as fmm's. O fluxo concatenado com a fase A , equação D.6, pode ser decomposto nos eixos perpendiculares d e q – os eixos d e q estão no rotor da máquina. A partir daí, fazendo-se uso da relação da permeância com a posição do rotor, obtém-se a indutância própria para a fase A . As fases A , B e C estão defasadas 120° uma em relação à outra, permitindo facilmente obter as indutâncias próprias dos enrolamentos A e C a partir do enrolamento A . As indutâncias mútuas entre as fases têm um desenvolvimento semelhante, não apresentando qualquer complicação adicional. As permeâncias constantes P_d e P_q são permeâncias invariantes na direção dos eixos d e q , respectivamente.

$$FMM_{\max} = N_a i_a \cos \theta \quad (D.4)$$

$$FMM_{\min} = N_a i_a \cos(\theta + 90^\circ) = -N_a i_a \sin \theta \quad (D.5)$$

$$\Phi_{aa} = \Phi_{ad} \cos \theta - \Phi_{aq} \sin \theta \quad (D.6)$$

$$\Phi_{aa} = N_a i_a (P_d \cos^2 \theta + P_q \sin^2 \theta) \quad (D.7)$$

$$\Phi_{aa} = N_a i_a \left(\frac{P_d + P_q}{2} + \frac{P_d - P_q}{2} \cos 2\theta \right) \quad (\text{D.8})$$

$$L_{aa} = \frac{N_a \Phi_{aa}}{i_a} \quad (\text{D.9})$$

$$\Phi_{aa} = N_a^2 \left[\frac{P_d + P_q}{2} + \frac{P_d - P_q}{2} \cos(2\theta) \right] \quad (\text{D.10})$$

$$L_{aa} = L_o + L_m \cos(2\theta) + L_{a1} \quad (\text{D.11})$$

$$L_{aa} = L_s + L_m \cos(2\theta) \quad (\text{D.12})$$

Assim, pode-se equacionar todas as indutâncias presentes na máquina síncrona.

Indutâncias próprias do estator:

$$\begin{aligned} L_{aa} &= L_s + L_m \cos 2\theta \\ L_{bb} &= L_s + L_m \cos 2 \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ L_{cc} &= L_s + L_m \cos 2 \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Indutâncias mútuas do estator:

$$\begin{aligned} L_{ab} &= L_{ba} = -M_s - L_m \cos 2 \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \\ L_{bc} &= L_{cb} = -M_s - L_m \cos 2 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \\ L_{ca} &= L_{ac} = -M_s - L_m \cos 2 \left(\theta + \frac{5\pi}{6} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Indutâncias próprias do rotor:

$$\begin{aligned} L_{ff} &= L_f \\ L_{dd} &= L_d \\ L_{qq} &= L_q \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Indutâncias Mútuas do rotor:

$$\begin{aligned} L_{fd} &= L_{df} = M_r \\ L_{fq} &= L_{qf} = 0 \\ L_{dq} &= L_{qd} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Indutâncias Mútuas estator/ rotor:

$$\begin{aligned}
L_{af} &= L_{fa} = M_f \cos \theta \\
L_{bf} &= L_{fb} = M_f \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\
L_{cf} &= L_{fc} = M_f \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\
L_{ad} &= L_{da} = M_d \cos \theta \\
L_{bd} &= L_{db} = M_d \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\
L_{cd} &= L_{dc} = M_d \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\
L_{aq} &= L_{qa} = M_q \text{sen} \theta \\
L_{bq} &= L_{qb} = M_q \text{sen} \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\
L_{cq} &= L_{qc} = M_q \text{sen} \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right)
\end{aligned} \tag{D.17}$$

Na matriz D.3, com exceção das indutâncias do rotor, todas as demais são funções da posição do rotor, uma vez que a permeância magnética vista a partir do estator (armadura) da máquina muda com posição do rotor. O fluxo concatenado, por exemplo, com a fase *A* da armadura, atravessa o entreferro, passa através do rotor e volta através da armadura enlaçando a fase *A* novamente, ou seja, o caminho seguido pelo fluxo tem sua permeância alterada com a posição do rotor. Através de uma mudança de referencial das componentes da armadura (estator) esta permeância variável com a posição do rotor é eliminada. A partir da transformação, obtém-se uma matriz D.3 com elementos constantes, não mais dependentes da posição do rotor e, com isto, uma simplificação fundamental na obtenção das equações dinâmicas das máquinas síncronas.

3.2 Transformada de Park

Uma grande simplificação matemática é obtida se uma certa transformação de variáveis é aplicada às equações da máquina síncrona. A transformação usada é chamada transformada de Park. As novas variáveis são obtidas a partir da projeção das variáveis atuais sobre três eixos: um ao longo do eixo direto do rotor do enrolamento de campo, chamado eixo direto; um segundo ao longo do eixo neutro do enrolamento de campo, chamado eixo em quadratura e um terceiro eixo estacionário. Através da transformação de Park, substitui-se um sistema de seis equações diferenciais a coeficientes variáveis para um sistema de seis equações diferenciais a coeficientes constantes não lineares devido à presença de ω . No entanto, na grande maioria dos

casos, a velocidade angular elétrica ω é praticamente constante e, portanto, a não linearidade é pouco influente. As correntes i_a , i_b e i_c são correntes que saem do gerador, Figura D.2..

Projetando estas correntes nos eixos d e q do rotor, tem-se:

$$\begin{aligned} i_d &= i_a \cos \theta + i_b \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) + i_c \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \\ i_q &= i_a \text{sen} \theta + i_b \text{sen}\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) + i_c \text{sen}\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

O eixo A foi escolhido como eixo de referência por conveniência. Qualquer deslocamento da fase A com relação a referência arbitrária aparecerá nas equações. A transformada de Park transforma quantidades estatóricas em variáveis rotóricas que se movem com o rotor. A terceira variável é uma corrente estacionária, proporcional a corrente de seqüência zero. Assim, tem-se notação numérica simplificada: $i_{odq} = P i_{abc}$.

Com: $i_{odq} = \begin{bmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix}$, $i_{abc} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$ e a matriz P é a transformada de Park, dada por:

$$P = \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \text{sen} \theta & \text{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \text{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{D.19})$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{odq} \\ \lambda_{fdq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{abc} \\ \lambda_{fdq} \end{bmatrix}, \lambda_{odq} = P \lambda_{abc} \quad (\text{D.20})$$

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_{abc} & L_{ar} \\ L_{ra} & L_{rr} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{abc} \\ I_{fdq} \end{bmatrix} \quad (\text{D.21})$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{abc} \\ \lambda_{fdq} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} PL_{abc}P^{-1} & PL_{ar} \\ L_{ra}P^{-1} & L_{rr} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{abc} \\ I_{fdq} \end{bmatrix} \quad (\text{D.22})$$

Resultando:

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \\ \lambda_f \\ \lambda_d \\ \lambda_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & KM_f & KM_d & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & KM_q \\ 0 & KM_f & 0 & L_f & M_r & 0 \\ 0 & KM_d & 0 & M_r & L_d & 0 \\ 0 & 0 & KM_q & 0 & 0 & L_q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_f \\ I_d \\ I_q \end{bmatrix} \quad (\text{D.23})$$

Onde todos os elementos são constantes e dados por:

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{\frac{3}{2}} \\ L_o &= L_s - 2M_s \\ L_q &= L_s + M_s - \left(\frac{3}{2}\right) L_m \\ L_d &= L_s + M_s + \left(\frac{3}{2}\right) L_m \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

Expressões similares àquela escrita para as correntes podem ser escritas para as tensões ou fluxos.

$$V_{odq} = PV_{abc}, \lambda_{odq} = P\lambda_{abc} \quad (\text{D.25})$$

Deve-se também notar que $P^{-1} = P^T$ ($T \Rightarrow$ transposto), ou seja, P é ortogonal. Sendo P ortogonal, pode-se reescrever para potência:

$$P = V_a i_a + V_b i_b + V_c i_c = V_{abc}^T i_{abc} = (P^{-1} V_{odq})^t (P^{-1} i_{odq}) \quad (\text{D.26})$$

$$P = V_{odq}^T (P^{-1})^t P^{-1} i_{odq} = V_{odq}^T P P^{-1} i_{odq} \quad (\text{D.27})$$

$$P = V_{odq}^T I_{odq} = V_o i_o + V_d i_d + V_q i_q \quad (\text{D.28})$$

Portanto, a potência é invariante com a transformada de Park.

D.3 Interpretação Física das Correntes i_d , i_q e i_o

i_d \longrightarrow corrente instantânea que circula numa bobina fictícia que gira com o rotor e que se mantém alinhada com o eixo direto. O valor é tal que produz, no eixo direto, a mesma f.m.m produzida pelas três correntes instantâneas existentes nas fases.

i_q \longrightarrow similar, exceto que atua no eixo em quadratura.

i_o \longrightarrow associada a fluxos de dispersão das fases da armadura sob desequilíbrio, circulando em uma bobina fictícia fixa, não produzindo f.m.m girante no entreferro da MS.

D.4 Equações de Tensão:

As equações da tensão de um gerador têm a forma das equações da corrente. O circuito esquematizado na Figura D.5 é exatamente o mesmo, já apresentado na Figura D.2, sendo que as indutâncias mútuas foram omitidas para simplificar o esquema. As correntes estatóricas são admitidas positivas quando saem nos terminais da máquina, desde que a máquina seja um gerador.

Para as condições indicadas, pode-se escrever:

$$v = -ri - \dot{\lambda} + v_n \quad (\text{D.29})$$

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ -v_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_a \\ \dot{\lambda}_b \\ \dot{\lambda}_c \\ \dot{\lambda}_F \\ \dot{\lambda}_D \\ \dot{\lambda}_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.30})$$

A tensão v_n é dada por:

$$\begin{aligned} v_n &= -r_n \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} - L_n \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \\ &= -r_n i_{abc} - L_n i_{abc} \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

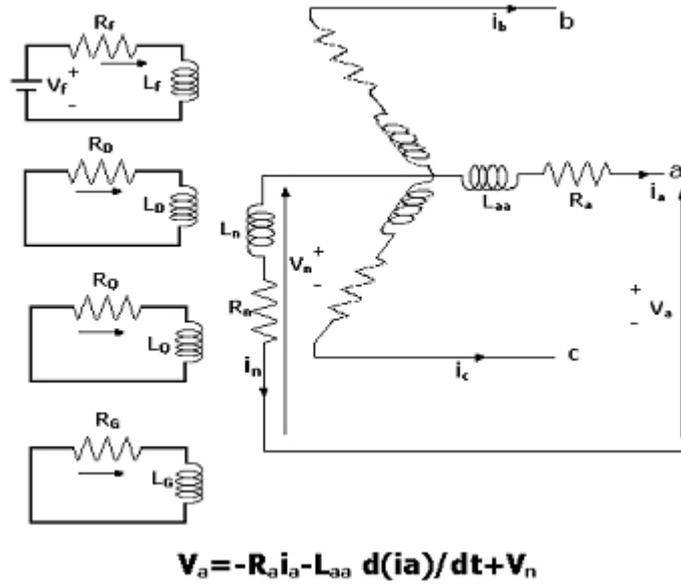


Figura D.5: Tensões na Máquina Síncrona

Se $r_a = r_b = r_c = r$, como normalmente ocorre, pode-se escrever: $R_{abc} = rU_3$, onde U_3 é uma matriz unitária 3×3 , assim reescreve-se a equação acima na forma:

$$\begin{bmatrix} v_{abc} \\ v_{FDQ} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{abc} & 0 \\ 0 & r_{FDQ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{abc} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{abc} \\ \dot{\lambda}_{FDQ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (D.32)$$

onde:

$$v_{FDQ} = \begin{bmatrix} -v_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad i_{FDQ} = \begin{bmatrix} i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad \dot{\lambda}_{FDQ} = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_F \\ \dot{\lambda}_D \\ \dot{\lambda}_Q \end{bmatrix} \quad (D.33)$$

A complicação é a presença dos termos λ variando com o tempo, mas estes termos podem ser eliminados aplicando a transformação de Park nas equações do estator. Isto exige que ambos os lados sejam pré-multiplicados por:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix} \quad (D.34)$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{abc} \\ v_{FDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{odq} \\ v_{FDQ} \end{bmatrix} \quad (D.35)$$

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{abc} & 0 \\ 0 & r_{FDQ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{abc} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} = \quad (D.36)$$

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{abc} & 0 \\ 0 & r_{FDQ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abc} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} = \quad (D.37)$$

$$\begin{bmatrix} P \cdot r_{abc} \cdot P^{-1} & 0 \\ 0 & r_{FDQ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{odq} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{abc} & 0 \\ 0 & r_{FDQ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{odq} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} \quad (D.38)$$

Para os termos $\dot{\lambda}$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{abc} \\ \dot{\lambda}_{FDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P\dot{\lambda}_{abc} \\ \dot{\lambda}_{FDQ} \end{bmatrix}$$

Sabe-se que: $\lambda_{odq} = P\lambda_{abc}$, então, $\dot{\lambda}_{odq} = P\dot{\lambda}_{abc} + \dot{P}\lambda_{abc}$. Assim:

$$P\dot{\lambda}_{abc} = \dot{\lambda}_{odq} - \dot{P}\lambda_{abc} = \dot{\lambda}_{odq} - \dot{P}P^{-1}\lambda_{odq} \quad (D.39)$$

Pode-se mostrar que:

$$\dot{P}P^{-1}\lambda_{odq} = \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_o \\ \lambda_d \\ \lambda_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega\lambda_q \\ \omega\lambda_d \end{bmatrix} \quad (D.40)$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} n_{odq} &= \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \cdot v_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{odq} \\ 0 \end{bmatrix} \\ n_{odq} &= P \cdot v_n = -P \cdot r_n \cdot P^{-1} \cdot P \cdot i_{abc} - P \cdot L_n P^{-1} \cdot P \cdot i_{abc} \\ &= -P \cdot r_n \cdot P^{-1} \cdot i_{odq} - P \cdot L_n P^{-1} \cdot i_{odq} \\ &= - \begin{bmatrix} 3r_n i_o \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3L_n i_o \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (D.41)$$

Observe que esta queda de tensão só ocorre na seqüência zero, como deveria.

Resumindo, tem-se:

$$\begin{bmatrix} v_{odq} \\ v_{FDQ} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{abc} & 0 \\ 0 & r_{FDQ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{odq} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{odq} \\ \dot{\lambda}_{FDQ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{P}P^{-1}\lambda_{odq} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{odq} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.42})$$

Em condições equilibradas a tensão de seqüência zero é nula.

$$R = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \quad R_R = \begin{bmatrix} r_F & 0 & 0 \\ 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} -\omega\lambda_q \\ \omega\lambda_d \end{bmatrix} \quad (\text{D.43})$$

E pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} v_{odq} \\ v_{FDQ} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{dq} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{odq} \\ \dot{\lambda}_{FDQ} \end{bmatrix} \quad (\text{D.44})$$

D.5 Sistema PU

As equações da M.S. desenvolvidas até aqui estão num sistema de unidades real. Uma escolha adequada de bases permite obter um mesmo conjunto de equações independentes do sistema de unidades escolhido, sistema p.u.. Tem-se as equações de tensão da M.S.:

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_d \\ v_q \\ -v_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_a + 3r_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_b & \omega L_q & 0 & 0 & \omega\sqrt{\frac{3}{2}}M_Q \\ 0 & -\omega L_D & r_c & -\omega\sqrt{\frac{3}{2}}M_F & -\omega\sqrt{\frac{3}{2}}M_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} +$$

$$- \begin{bmatrix} L_0 + 3L_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}M_F & \sqrt{\frac{3}{2}}M_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}M_Q \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}M_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}M_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}M_Q & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_0 \\ \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_F \\ \dot{i}_D \\ \dot{i}_Q \end{bmatrix} \quad (\text{D.45})$$

Os vetores de tensão e corrente podem ser escritos a partir das unidades de bases de tensão e corrente – para as três primeiras equações de tensão, a base escolhida será V_B e as demais bases serão V_{FB}, V_{DB}, V_{QB} , respectivamente, para as demais tensões.

O mesmo procedimento é feito para as equações de corrente, ou seja, as 3 primeiras equações terão como base I_B e as 3 últimas, respectivamente, I_{FB}, I_{DQ}, I_{QB} .

$$\begin{bmatrix} v_{0u} V_B \\ v_{du} V_B \\ v_{qu} V_B \\ -v_{Fu} V_{FB} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_a + 3r_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_b & \omega L_q & 0 & 0 & \omega \sqrt{\frac{3}{2}}M_Q \\ 0 & -\omega L_D & r_c & -\omega \sqrt{\frac{3}{2}}M_F & -\omega \sqrt{\frac{3}{2}}M_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{0u} I_B \\ i_{du} I_B \\ i_{qu} I_B \\ i_{Fu} I_{FB} \\ i_{Du} I_{DB} \\ i_{Qu} I_{QB} \end{bmatrix} +$$

$$- \begin{bmatrix} L_0 + 3L_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}M_F & \sqrt{\frac{3}{2}}M_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}M_Q \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}M_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}M_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}M_Q & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{0u} I_B \\ \dot{i}_{du} I_B \\ \dot{i}_{qu} I_B \\ \dot{i}_{Fu} I_{FB} \\ \dot{i}_{Du} I_{DB} \\ \dot{i}_{Qu} I_{QB} \end{bmatrix} \quad (\text{D.46})$$

Com o objetivo de se demonstrar o processo, a equação do enrolamento D será utilizada. Assim, basta estender a manipulação matemática para as demais equações.

$$0(V_{DB}) = -r_D i_{Du} I_{DB} - \sqrt{\frac{3}{2}} M_D \dot{i}_{du} I_B - M_R \dot{i}_{Fu} I_{FB} - L_D \dot{i}_{Du} I_{DB} \quad (D.47)$$

Dividindo por V_{DB} , obtém-se:

$$0 = -\frac{r_D}{V_{DB}} i_{Du} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{M_D}{I_B} \dot{i}_{du} - \frac{M_R}{I_{FB}} \dot{i}_{Fu} - \frac{L_D}{I_{DB}} \dot{i}_{Du} \quad (D.48)$$

Multiplicando e dividindo o denominador dos 3 últimos termos da equação D.42 por V_B/V_B e, ainda, os 2 últimos termos por I_B/I_B , tem-se:

$$0 = -\frac{r_D}{R_{DB}} i_{Du} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{M_D}{\frac{V_{DB}V_B}{I_B V_B}} \dot{i}_{du} - \frac{M_R}{\frac{V_{DB}V_B I_B}{I_{FB} V_B I_B}} \dot{i}_{Fu} - \frac{L_D}{\frac{V_{DB}V_B I_B}{I_{DB} V_B I_B}} \dot{i}_{Du} \quad (D.49)$$

Agora, chamando as constantes: $k_D = \frac{V_{DB}}{V_B} = \frac{I_B}{I_{DB}}$ e $k_F = \frac{I_B}{I_{FB}}$, tem-se:

$$0 = -\frac{r_D}{R_{DB}} i_{Du} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{M_D}{\frac{k_D V_B}{I_B}} \dot{i}_{du} - \frac{M_R}{\frac{k_D k_F V_B}{I_B}} \dot{i}_{Fu} - \frac{L_D}{\frac{k_D^2 V_B}{I_B}} \dot{i}_{Du} \quad (D.50)$$

Lembrando que $L_B = V_B/(\omega_B I_B)$, e dividindo e multiplicando os 3 últimos termos por ω_B :

$$0 = -\frac{r_D}{R_{DB}} i_{Du} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{M_D}{\frac{k_D V_B \omega_B}{I_B \omega_B}} \dot{i}_{du} - \frac{M_R}{\frac{k_D k_F V_B \omega_B}{I_B \omega_B}} \dot{i}_{Fu} - \frac{L_D}{\frac{k_D^2 V_B \omega_B}{I_B \omega_B}} \dot{i}_{Du} \quad (D.51)$$

Substituindo por L_B , tem-se:

$$0 = -\frac{r_D}{R_{DB}} i_{Du} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{M_D}{k_D L_B \omega_B} \dot{i}_{du} - \frac{M_R}{k_D k_F L_B \omega_B} \dot{i}_{Fu} - \frac{L_D}{k_D^2 L_B \omega_B} \dot{i}_{Du} \quad (D.52)$$

Considerando as constantes: $M_{DB} = k_D L_B$, $M_{RB} = k_D k_F L_B$ e $L_{DB} = k_D^2 L_B$, pode-se escrever:

$$0 = -\frac{r_D}{R_{DB}}\dot{i}_{Du} - \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{M_D}{M_{DB}\omega_B}\dot{i}_{du} - \frac{M_R}{M_{RB}\omega_B}\dot{i}_{Fu} - \frac{L_D}{L_{DB}\omega_B}\dot{i}_{Du} \quad (D.53)$$

Resultando em:

$$0 = -r_{Du}\dot{i}_{Du} - \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{M_{Du}}{\omega_B}\dot{i}_{du} - \frac{M_{Ru}}{\omega_B}\dot{i}_{Fu} - \frac{L_{Du}}{\omega_B}\dot{i}_{Du} \quad (D.54)$$

Lembrando que $\omega_B = 1/t_B$:

$$\frac{1}{\omega_B}\dot{i}_{du} = \frac{1}{t_B}\frac{di_{du}}{dt} = \frac{di_{du}}{d\left(\frac{t}{t_B}\right)} = \frac{di_{du}}{dT} \quad (D.55)$$

e, também: $\frac{1}{\omega_B}\dot{i}_{Fu} = \frac{di_{Fu}}{dT}$. Assim, finalmente, tem-se a equação em p.u.:

$$0 = -r_{Du}\dot{i}_{Du} - \sqrt{\frac{3}{2}}M_{Du}\dot{i}_{du} - M_{Ru}\dot{i}_{Fu} - L_{Du}\dot{i}_{Du} \quad (D.56)$$

Trabalhando as demais equações, chega-se ao sistema de equações da M.S. em p.u., similar à equação D.45.

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ -v_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & \omega L_q & 0 & 0 & kM_Q \\ -\omega L_D & r & -\omega kM_F & -\omega kM_D & 0 \\ 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \\ - \begin{bmatrix} L_d & 0 & kM_F & kM_D & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & kM_Q \\ kM_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ kM_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & kM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_F \\ \dot{i}_D \\ \dot{i}_Q \end{bmatrix} \quad (D.57)$$

D.6 Modelos Matemáticos de Geradores

As equações de Park são gerais e representam a dinâmica das máquinas, estando elas referidas a um par de eixos perpendiculares d e q no rotor da máquina. A partir de considerações sobre este conjunto de equações, obtém-se os respectivos modelos matemáticos para as máquinas síncronas. Considerando um enrolamento amortecedor D no eixo d e um enrolamento amortecedor Q no eixo q , as equações em valores por unidade, são:

Equações do estator:

$$\begin{aligned} v_d &= \frac{d\lambda_d}{dt} - \omega\lambda_q - Ri_d \\ v_q &= \frac{d\lambda_q}{dt} + \omega\lambda_d - Ri_q \end{aligned} \quad (\text{D.58})$$

Equações do rotor:

$$\begin{aligned} v_F &= \frac{d\lambda_F}{dt} + R_F i_F \\ 0 &= \frac{d\lambda_D}{dt} + R_D i_D \\ 0 &= \frac{d\lambda_Q}{dt} + R_Q i_Q \end{aligned} \quad (\text{D.59})$$

Estando a máquina síncrona em regime permanente equilibrado, todas as derivadas desaparecem. Assim obtém-se:

$$\left. \begin{aligned} V_d &= -\varpi\lambda_q - Ri_d \\ V_q &= -\varpi\lambda_d - Ri_q \end{aligned} \right\} \text{estator em regime permanente equilibrado}$$

$$V_F = R_F i_F \} \text{rotor em regime permanente equilibrado}$$

Se nas equações correspondentes ao estator, as expressões para os fluxos concatenados dos eixos d e q são substituídas, de acordo com:

$$\begin{aligned} \lambda_d &= -L_d i_d + L_{ad} i_F \\ \lambda_q &= -L_q i_q \end{aligned} \quad (\text{D.60})$$

E considerando a velocidade da máquina ω como sendo de 1 p.u., serão iguais as indutâncias e reatâncias:

$$\begin{aligned} v_d &= X_q i_q - Ri_d \\ v_q &= -X_d i_d - R_a i_q + X_{ad} i_F \end{aligned} \quad (\text{D.61})$$

Onde X_d e X_q são as chamadas reatâncias síncronas de eixo direto e de eixo em quadratura, respectivamente. E X_{ad} é uma reatância mútua que representa o acoplamento entre as correntes de eixo direto do estator e do rotor.

Compondo as tensões, tem-se:

$$\begin{aligned} v_d + jv_q &= -R(i_d + ji_q) - jX_q(i_d + ji_q) + j[X_{ad}i_F - (X_d - X_q)i_d] \\ v_d + jv_q &= -(R + jX_q)(i_d + ji_q) + j[X_{ad}i_F - (X_d - X_q)i_d] \end{aligned} \quad (\text{D.62})$$

Onde a segunda destas equações foi obtida da primeira adicionando e subtraindo o termo $jX_q i_d$.

Reconhecendo agora os seguintes fasores:

$$\begin{aligned} v_d + jv_q &= v_t \text{ (tensão terminal da M.S.)} \\ i_d + ji_q &= i \text{ (corrente da M.S.)} \end{aligned}$$

D.7 Considerações Iniciais

Nos estudos de estabilidade procura-se estudar o comportamento de várias máquinas diante de uma dada perturbação. Aqui, as máquinas eletricamente mais próximas devem ser detalhadas em sua modelagem, enquanto máquinas mais afastadas devem ser descritas por modelos mais simples. Os modelos usuais de máquinas são obtidos a partir das equações de Park, desprezando-se o efeito transformador ($d\lambda/dt$).

D.7.1 Modelo E'_q

Neste modelo o efeito dos enrolamentos amortecedores não é considerado, nas equações das tensões V_d e V_q . Supõe-se $\omega \approx 1,0$, ou seja, $X_u \approx Lu$.

Diante de uma perturbação equilibrada, vem:

$$\begin{aligned} V_{du} &= -r_u i_{du} - \omega_u \lambda_{qu} \\ V_{qu} &= -r_u i_{qu} + \omega_u \lambda_{du} \\ V_{Fu} &= r_{Fu} i_{Fu} + \frac{d\lambda_{Fu}}{dt_u} \end{aligned} \quad (\text{D.63})$$

Tem-se também:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{du} \\ \lambda_{Fu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{du} & L_{adu} \\ L_{adu} & L_{Fu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{du} \\ i_{Fu} \end{bmatrix} \implies$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{du} \\ i_{Fu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{du} - \frac{L_{adu}^2}{L_{Fu}} & \frac{L_{adu}}{L_{Fu}} \\ -\frac{L_{adu}}{L_{Fu}} & \frac{1}{L_{Fu}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{du} \\ \lambda_{Fu} \end{bmatrix} \quad (D.64)$$

Daí vem:

$$\lambda_{du} = \left(L_{du} - \frac{L_{adu}^2}{L_{Fu}} \right) i_{du} + \frac{L_{adu}\lambda_{Fu}}{L_{Fu}} = L'_{du}i_{du} + \frac{L_{adu}\lambda_{Fu}}{L_{Fu}} \quad (D.65)$$

$$i_{Fu} = -\frac{L_{adu}}{L_{Fu}}i_{du} + \frac{\lambda_{Fu}}{L_{Fu}} \quad (D.66)$$

Assim:

$$V_{du} = -r_u i_{du} - \omega_u L_{qu} i_{qu} = -r_u i_{du} - X_{qu} i_{qu} \quad (D.67)$$

$$V_{qu} = -r_u i_{qu} + \omega_u \left(L'_{du} \cdot i_{du} + \frac{L_{adu}\lambda_{Fu}}{L_{Fu}} \right) = -r_u i_{qu} + X'_{du} i_{du} + e'_{qu} \quad (D.68)$$

Onde:

$$e'_{qu} = \frac{\omega_u L_{adu}\lambda_{Fu}}{L_{Fu}} [V] \quad \text{ou} \quad e'_q = \frac{\omega_R K M_F \lambda_F}{L_F} [V] \quad (D.69)$$

Para o circuito de campo: $\frac{d\lambda_{Fu}}{dt_u} = V_{Fu} - r_{Fu} i_{Fu}$, mas:

$$\frac{de'_{qu}}{dt_u} = \frac{\omega_u L_{adu}}{L_{Fu}} \frac{d\lambda_{Fu}}{dt_u} \quad (D.70)$$

$$\frac{L_{Fu}}{\omega_u L_{adu}} \frac{de'_{qu}}{dt_u} = V_{Fu} - r_{Fu} \left(-\frac{L_{adu}}{L_{Fu}} i_{du} + \frac{\lambda_{Fu}}{L_{Fu}} \right) \quad (D.71)$$

Assim:

$$\frac{de'_{qu}}{dt_u} = \frac{\omega_u L_{adu} V_{Fu}}{L_{Fu}} + \frac{1}{\frac{L_{Fu}}{r_{Fu}}} \left(\omega_u \frac{L_{adu}^2}{L_{Fu}} i_{du} - \frac{\omega_u L_{adu}\lambda_{Fu}}{L_{Fu}} \right) \quad (D.72)$$

Definindo:

$$e_{FDu} = \frac{\omega_u L_{adu} V_{Fu}}{r_{Fu}} \text{ ou } e_{FD} = \frac{\omega_R K M_F V_F}{r_F} [V] \quad (D.73)$$

Vem:

$$\frac{de'_{qu}}{dt_u} = \frac{1}{\tau'_{dou}} \left[e_{FDu} + \omega_u \frac{L_{adu}^2}{L_{Fu}} i_{du} - e'_{qu} \right] \quad (D.74)$$

$$\frac{L_{adu}^2}{L_{Fu}} = L_{du} - L'_{du} \quad (D.75)$$

Assim, em valores estat6ricos equivalentes:

$$\frac{dE'_q}{dt} = \frac{1}{\tau'_{do}} \left\{ E_{FD} - [E'_q - (X_d - X'_d)I_d] \right\} \quad (D.76)$$

Em vazio:

$$\dot{E}'_{qu} = E'_{qu} = E_{FDu} = \frac{L_{adu} i_{Fu}}{\sqrt{3}} \quad (D.77)$$

Em regime:

$$E_{qu} = E_{FDu} = E'_{qu} - (X_{du} - X'_{du}) \cdot I_{du} \quad (D.78)$$

E por ocasi6o de uma perturba7o qualquer, o rotor da m6quina oscila. Tal oscila7o, al6m de provocar esfor7os adicionais no eixo, provoca flutua7o nas tens6es terminais, aumento das perdas, e eventualmente a perda de sincronismo da m6quina.

Sabe-se que:

$$T_a = I \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} \quad (D.79)$$

Onde:

$T_a = T_m - T_{el} - T_D \Rightarrow$ torque acelerante

$T_m \Rightarrow$ torque mec6nico 6til no eixo do gerador

$T_{el} \Rightarrow$ torque eletromagn6tico desenvolvido

$T_D \Rightarrow$ torque de amortecimento da oscila7o

$I \Rightarrow$ momento de in6rcia das partes girantes

$\theta_m \Rightarrow$ 6ngulo mec6nico descrito pelo rotor

$$\theta_m = \frac{\theta}{\frac{p}{2}} = \frac{2}{p}\theta, \text{ onde } \theta = \omega_R t + \frac{\pi}{2} + \delta \quad (\text{D.80})$$

Logo:

$$T_a = \frac{2}{p} I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2}{p} I \frac{d^2\delta}{dt^2} \quad (\text{D.81})$$

Em p.u.:

$$T_{au} = \frac{T_a}{T_B} = \frac{T_a}{\frac{S_{B3\phi}}{\omega_S}} = \frac{\omega_S T_a}{S_{B3\phi}} \quad (\text{D.82})$$

Onde: $\omega_S = \frac{2}{p}\omega_R \Rightarrow$ velocidade angular síncrona do rotor.

Assim:

$$T_{au} = \frac{2}{p} \frac{I}{S_{B3\phi}} \frac{\omega_S d^2\delta}{dt^2} \quad (\text{D.83})$$

Definindo H , constante de inércia, como:

$$H = \frac{E_C}{S_{B3\phi}} = \frac{\frac{1}{2} I \omega_R^2}{S_{B3\phi}} \frac{\frac{1}{2} I \omega_S^2}{S_{B3\phi}} [S] \quad (\text{D.84})$$

Assim:

$$T_{au} = \frac{2}{p} \frac{2H}{\omega_S} \frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{2H}{\omega_R} \frac{d\omega}{dt} = 2H \frac{d\omega_u}{dt} \quad (\text{D.85})$$

Por outro lado: $T_{au} = T_{mu} - T_{elu} - T_{Du}$. E para o torque mecânico, tem-se:

$$T_{mu} = \frac{P_m}{\omega_R} T_{mu} = \frac{P_m}{\omega_R} \frac{\omega_S}{S_{B3\phi}} = \frac{P_m}{S_{B3\phi}} \frac{1}{\frac{\omega_R}{\omega_S}} \quad (\text{D.86})$$

Logo:

$$T_{mu} = \frac{P_{mu}}{\omega_u} \quad (\text{D.87})$$

$$P_{3\phi} = V_d i_d + V_q i_q = \left(-r i_d - \frac{d\lambda_d}{dt} - \omega \lambda_q \right) i_d + \left(-r i_q - \frac{d\lambda_q}{dt} + \omega \lambda_d \right) i_q \quad (\text{D.88})$$

E:

$$P_{3\phi} = \underbrace{- \left(i_d \frac{d\lambda_d}{dt} + i_q \frac{d\lambda_q}{dt} \right)}_{\substack{\text{variação da energia magnética} \\ \text{acumulada nos enrolamentos} \\ \text{da armadura}}} + \underbrace{\omega (i_q \lambda_d - i_d \lambda_q)}_{\substack{\text{potência eletromagnética} \\ \text{transferida pelo entreferro}}} - \underbrace{r (i_d^2 + i_q^2)}_{\substack{\text{potência dissipada} \\ \text{nos enrolamentos} \\ \text{da armadura}}} \quad (\text{D.89})$$

Para o torque eletromagnético, vem: ,

$$T_{el} = \frac{\omega (i_q \lambda_d - i_d \lambda_q)}{\omega_R}, \text{ onde } \omega = \omega_R \frac{p}{2} \quad (\text{D.90})$$

$$T_{el} = \frac{p (i_q \lambda_d - i_d \lambda_q)}{2} \quad (\text{D.91})$$

Em p.u.: $T_{el} = \frac{T_{el}}{\frac{S_{B3\phi}}{\omega_S}} = \omega_S \frac{p}{2} \left(\frac{i_q \lambda_d - i_d \lambda_q}{3\omega_B I_B \lambda_B} \right)$ porém: $\omega_R = \omega_S \frac{p}{2}$ e $\omega_B = \omega_R$

Logo:

$$T_{el} = \frac{1}{3} (i_{qu} \lambda_{du} - i_{du} \lambda_{qu}) = \frac{1}{3} \left(L'_{du} i_{du} i_{qu} + e'_{qu} i_{qu} - L_{qu} i_{du} i_{qu} \right) \quad (\text{D.92})$$

Em valores estatóricos eficazes:

$$T_{el} = E'_{qu} I_{qu} - \left(X_{qu} - X'_{du} \right) I_{du} I_{qu} \quad (\text{D.93})$$

Para o torque de amortecimento da oscilação, tem-se:

$$T_D = D (\omega_R - \omega_S) \quad (\text{D.94})$$

Em p.u.:

$$T_{Du} = \frac{T_D}{\frac{S_{B3\phi}}{\omega_S}} = \frac{D \omega_S^2}{S_{B3\phi}} (\omega_u - 1) \quad (\text{D.95})$$

$$T_{Du} = D_u (\omega_u - 1) \quad (\text{D.96})$$

Normalmente $D_u \cong 2$ a 5 p. u.. Por ocasião da supressão dos enrolamentos amortecedores é usual compensar $D_u \cong 15$ a 25 p.u..

Para a equação de balanço, resulta:

$$\frac{d\omega_u}{dt} = \frac{1}{\omega_R} \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\omega_R} \frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{1}{2H} \left\{ \frac{P_{mu}}{\omega_u} - [E'_{qu} I_{qu} - (X_{qu} - X'_{du}) \cdot I_{du} I_{qu}] - D_u (\omega_u - 1) \right\} \quad (\text{D.97})$$

A velocidade angular é obtida de:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_R + \frac{d\delta}{dt} \frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_R = \omega_R \left(\frac{\omega}{\omega_R} - 1 \right) \quad (\text{D.98})$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega_R (\omega_u - 1) \quad (\text{D.99})$$

A interação com o sistema é obtida através de V_{du} e V_{qu} . Para a utilização do modelo, torna-se necessário conhecer τ'_{do} e os parâmetros

X_{qu}, X_{du}, X'_{du} e r_u . Lembrando que: $\omega_u = 1.0$, $\delta = \delta_o$ e $E'_q = E'_{qo}$ são condições de contorno e E_{FD} e P_{mu} são variáveis de entrada.

Desprezando o efeito transformador frente às tensões por efeito mocional, tem-se:

$$\begin{aligned} V_d &= -X_q I_q \\ V_q &= X'_d I_d + E'_q \end{aligned} \quad (\text{D.100})$$

Agora, a partir dessas equações a valores estatóricos reais nos eixos d e q , é estabelecido um conjunto de equações fasoriais equivalentes que permitirá a obtenção de um circuito elétrico equivalente para o modelo. Para isso, tem-se a relação entre grandezas reais e fasoriais com o seguinte modelo mostrado na Figura D.6 a seguir.

Assim:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \bar{A}_q + \bar{A}_d \\ \bar{A} &= A e^{j(\phi - \delta)} \\ \bar{A} &= A [\cos(\phi - \delta) + j \text{sen}(\phi - \delta)] \end{aligned} \quad (\text{D.101})$$

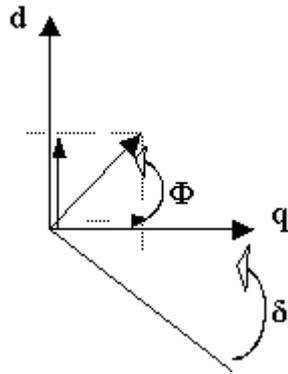


Figura D.6: Relação entre Grandezas Reais e Fasoriais

$$\begin{aligned}\bar{A}_q &= A \cos(\phi - \delta) = A_q \\ \bar{A}_d &= jA \sin(\phi - \delta) = jA_d\end{aligned}\quad (\text{D.102})$$

Conseqüentemente, tem-se:

$$\begin{aligned}A_q &= \bar{A}_q \\ A_d &= -j\bar{A}_d\end{aligned}\quad (\text{D.103})$$

A partir disto, aplicando ao conjunto de equações anterior para V_d e V_q – omitindo o subíndice (u); tem-se os fasores:

$$\begin{aligned}\bar{V}_d &= -jX_q\bar{I}_q \\ \bar{V}_q &= -jX'_d\bar{I}_d + \bar{E}'_q\end{aligned}\quad (\text{D.104})$$

Compondo a tensão terminal:

$$\bar{V} = \bar{V}_d + \bar{V}_q = -j \cdot X_q\bar{I}_q - j \cdot X'_d\bar{I}_d + \bar{E}'_q\quad (\text{D.105})$$

Somando e subtraindo o termo $jX_q\bar{I}_d$ no 2º membro da equação (), vem:

$$\bar{V} = -j \cdot X_q\bar{I}_q - j \cdot X_q\bar{I}_d - j \cdot X'_d\bar{I}_d + j \cdot X_q\bar{I}_d + \bar{E}'_q\quad (\text{D.106})$$

Lembrando que: $\bar{I} = \bar{I}_d + \bar{I}_q$, tem-se finalmente:

$$\bar{V} = -j \cdot X_q\bar{I} + j \cdot (X_q - X'_d)\bar{I}_d + \bar{E}'_q\quad (\text{D.107})$$

Assim, tem-se o circuito elétrico equivalente para o modelo \bar{E}'_q , Figura D.7:

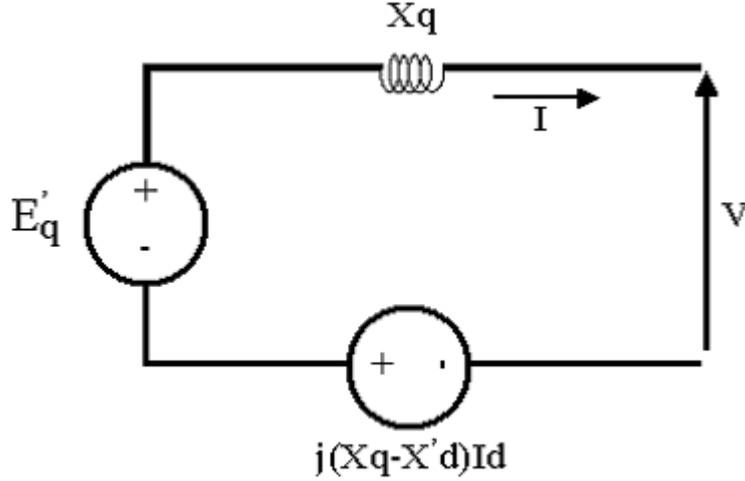


Figura D.7: Modelo E'_q

Onde:

$$V_d = V \sin(\delta - \theta) \quad I_d = \frac{E'_q - V \cos(\delta - \theta)}{X_q} \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \text{ é o ângulo entre eixo } q \text{ e a ref.;} \\ \theta \text{ é o ângulo entre } V \text{ e a ref..} \end{array} \right. \quad (\text{D.108})$$

$$V_q = V \cos(\delta - \theta) \quad I_q = \frac{V \sin(\delta - \theta)}{X'_d} \quad (\text{D.109})$$

O conjunto de equações representativas para o modelo \bar{E}'_q :

$$\frac{dE'_q}{dt} = \frac{1}{T'_{do}} \left[E_{FD} - E'_q - (X_d - X'_d) I_d \right] \quad (\text{D.110})$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_s = \Delta\omega \quad (\text{D.111})$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2H} \left[T_m - \left(E'_q + (X_q - X'_d) \cdot I_d \right) I_q - D\Delta\omega \right] \quad (\text{D.112})$$

$$I_d = \frac{E'_q - V \cos(\delta - \theta)}{X'_d} \quad (\text{D.113})$$

$$I_q = \frac{V \sin(\delta - \theta)}{X_q} \quad (\text{D.114})$$

Onde:

$X_d \Rightarrow$ reatância de eixo direto

$X_q \Rightarrow$ reatância de eixo em quadratura

$X'_d \Rightarrow$ reatância transitória de eixo direto

$T'_{do} \Rightarrow$ constante de tempo transitória de eixo direto

$D \Rightarrow$ coeficiente de amortecimento

$H \Rightarrow$ constante de tempo de inércia do grupo gerador

$I_d \Rightarrow$ corrente de eixo direto

$I_q \Rightarrow$ corrente de eixo em quadratura

$T_m \Rightarrow$ conjugado mecânico

$V \Rightarrow$ tensão terminal da máquina

$\theta \Rightarrow$ ângulo da tensão

$E_{FD} \Rightarrow$ tensão de campo da máquina

$E'_q \Rightarrow$ tensão transitória de eixo em quadratura

$\delta \Rightarrow$ ângulo do gerador

$\omega \Rightarrow$ velocidade angular do rotor

$\omega_s \Rightarrow$ velocidade angular síncrona

D.7.2 Modelo Clássico

O modelo clássico de máquina síncrona, Figura D.8, é obtido a partir de uma simplificação no modelo E'_q apresentado. Aqui, considera-se $X_d = X_q$ e $E_{FD} = E_q = E'_q$. Estas simplificações permitem escrever para este modelo as seguintes equações:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2H} \left[T_m - \frac{E'_q V}{X'_d} \sin(\delta - \theta) - D\Delta\omega \right] \quad (\text{D.115})$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_s = \Delta\omega \quad (\text{D.116})$$

Onde:

$X'_d \Rightarrow$ reatância transitória de eixo direto

$D \Rightarrow$ coeficiente de amortecimento
 $H \Rightarrow$ constante de tempo de inércia do grupo gerador
 $Tm \Rightarrow$ conjugado mecânico
 $V \Rightarrow$ tensão terminal da máquina
 $\theta \Rightarrow$ ângulo da tensão
 $E'_q \Rightarrow$ tensão transitória de eixo em quadratura
 $\delta \Rightarrow$ ângulo do gerador
 $\omega \Rightarrow$ velocidade angular do rotor
 $\omega_s \Rightarrow$ velocidade angular síncrona

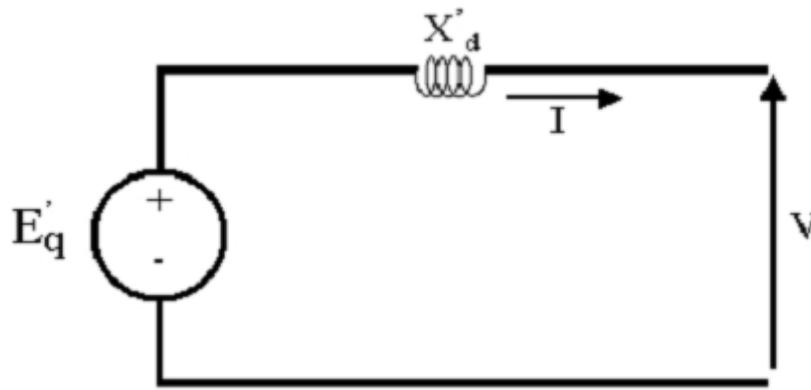


Figura D.8: Modelo Clássico de Máquina Síncrona

D.7.3 Modelo de Quatro Enrolamentos

Como o processo de demonstração segue rigorosamente a mesma metodologia, com apenas um enrolamento amortecedor adicional no eixo em quadratura (eixo q), o desenvolvimento foi omitido.

Neste modelo, acrescenta-se em relação ao modelo E'_q um quarto enrolamento no eixo em quadratura da máquina, enrolamento este denominado enrolamento amortecedor. A Figura D.9 representa a disposição destes enrolamentos nos eixos d e q da máquina síncrona. O circuito elétrico correspondente associado ao modelo de quatro enrolamentos é apresentado a seguir, Figura D.10.

As equações são apresentadas a seguir:

$$\frac{dE'_d}{dt} = \frac{1}{T'_{qo}} \left[-E'_d + (X_q - X'_q) I_q \right] \quad (\text{D.117})$$

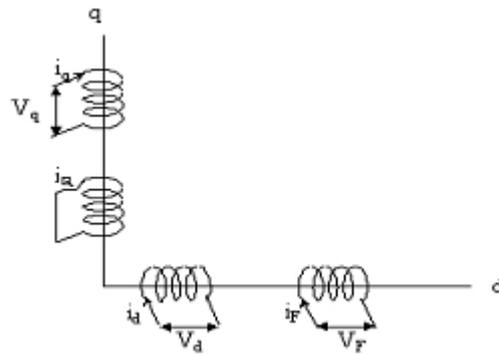


Figura D.9: Disposição dos Enrolamentos

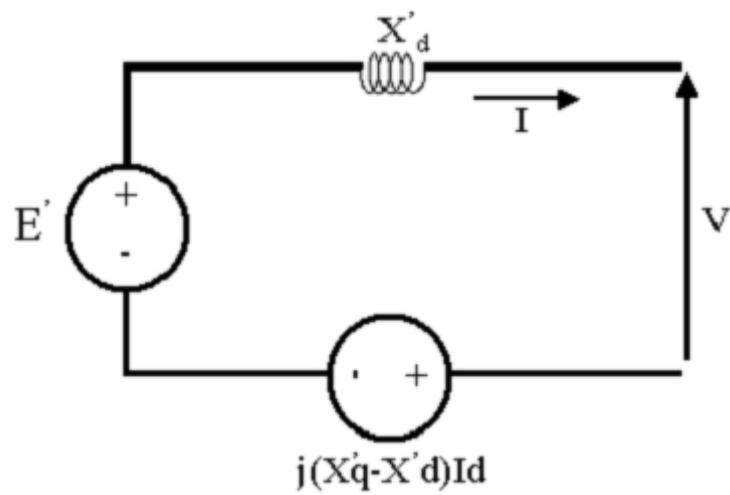


Figura D.10: Circuito Elétrico Equivalente

$$\frac{dE'_q}{dt} = \frac{1}{T'_{do}} \left[E_{FD} - E'_q - (X_d - X'_d) I_d \right] \quad (\text{D.118})$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_s = \Delta\omega \quad (\text{D.119})$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2H} \left[T_m - \left[E'_d I_d + E'_q I_q + (X'_q - X'_d) I_d I_q \right] - D\Delta\omega \right] \quad (\text{D.120})$$

$$I_d = \frac{E'_q - V \cos(\delta - \theta)}{X'_d} \quad (\text{D.121})$$

$$I_q = \frac{V \sin(\delta - \theta) - E'_d}{X'_q} \quad (\text{D.122})$$

Onde:

$X_d \Rightarrow$ reatância de eixo direto

$X_q \Rightarrow$ reatância de eixo em quadratura

$X'_d \Rightarrow$ reatância transitória de eixo direto

$X'_q \Rightarrow$ reatância transitória de eixo em quadratura

$T'_{do} \Rightarrow$ constante de tempo transitória de eixo direto

$T'_{qo} \Rightarrow$ constante de tempo transitória do eixo q

$D \Rightarrow$ coeficiente de amortecimento

$H \Rightarrow$ constante de tempo de inércia do grupo gerador

$I_d \Rightarrow$ corrente de eixo direto

$I_q \Rightarrow$ corrente de eixo em quadratura

$T_m \Rightarrow$ conjugado mecânico

$V \Rightarrow$ tensão terminal da máquina

$\theta \Rightarrow$ ângulo da tensão

$E_{FD} \Rightarrow$ tensão de campo da máquina

$E'_q \Rightarrow$ tensão transitória de eixo em quadratura

$E'_d \Rightarrow$ tensão transitória de eixo direto

$\delta \Rightarrow$ ângulo do gerador

$\omega \Rightarrow$ velocidade angular do rotor

$\omega_s \Rightarrow$ velocidade angular síncrona

A tensão E_{FD} e o torque mecânico T_m são admitidos constantes quando não são considerados os sistemas de excitação nem os reguladores de velocidade, respectivamente.

D.8 Modelos Linearizados

Os dois modelos apresentados anteriormente E'_q e de quatro enrolamentos são modelos não lineares. Para uma dada condição de equilíbrio, os modelos são então linearizados usando o desenvolvimento em séries de Taylor, desprezando-se os termos de ordem superior a dois, inclusive.

D.8.1 Modelo E'_q

A linearização do modelo E'_q é apresentada a seguir.

$$\Delta \dot{E}'_q = \frac{\partial \dot{E}'_q}{\partial E'_q} \Delta E'_q + \frac{\partial \dot{E}'_q}{\partial I_d} \Delta I_d \quad (\text{D.123})$$

$$\Delta \dot{\delta} = \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \omega} \Delta \omega \quad (\text{D.124})$$

$$\Delta \dot{\omega} = \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial E'_q} \Delta E'_q + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \omega} \Delta \omega + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial I_d} \Delta I_d + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial I_q} \Delta I_q \quad (\text{D.125})$$

Onde:

$$\frac{\partial \dot{E}'_q}{\partial E'_q} = -\frac{1}{T'_{do}} \quad (\text{D.126})$$

$$\frac{\partial \dot{E}'_q}{\partial I_d} = -\frac{X_d - X'_d}{T'_{do}} \quad (\text{D.127})$$

$$\frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \omega} = 1 \quad (\text{D.128})$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial E'_q} = -\frac{I_q}{2H} \quad (\text{D.129})$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \omega} = -\frac{D}{2H} \quad (\text{D.130})$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial I_d} = -\frac{(X_q - X'_d)}{2H} I_q \quad (\text{D.131})$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial I_q} = -\frac{(E'_q + (X_q - X'_d) I_d)}{2H} \quad (\text{D.132})$$

$$\Delta I_d = \frac{\partial I_d}{\partial E'_q} \Delta E'_q + \frac{\partial I_d}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial I_d}{\partial \delta} \Delta \delta + \frac{\partial I_d}{\partial \theta} \Delta \theta \quad (\text{D.133})$$

$$\frac{\partial I_d}{\partial E'_q} = \frac{1}{X'_d} \quad (\text{D.134})$$

$$\frac{\partial I_d}{\partial V} = -\frac{\cos(\delta - \theta)}{X'_d} \quad (\text{D.135})$$

$$\frac{\partial I_d}{\partial \delta} = \frac{V \text{sen}(\delta - \theta)}{X'_d} \quad (\text{D.136})$$

$$\frac{\partial I_d}{\partial \theta} = -\frac{V \text{sen}(\delta - \theta)}{X'_d} \quad (\text{D.137})$$

$$\Delta I_q = \frac{\partial I_q}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial I_q}{\partial \delta} \Delta \delta + \frac{\partial I_q}{\partial \theta} \Delta \theta \quad (\text{D.138})$$

$$\frac{\partial I_q}{\partial V} = \frac{\text{sen}(\delta - \theta)}{X_q} \quad (\text{D.139})$$

$$\frac{\partial I_q}{\partial \delta} = \frac{V \cos(\delta - \theta)}{X_q} \quad (\text{D.140})$$

$$\frac{\partial I_q}{\partial \theta} = -\frac{V \cos(\delta - \theta)}{X_q} \quad (\text{D.141})$$

D.8.2 Modelo de Quatro Enrolamentos

$$\Delta \dot{E}'_d = \frac{\partial \dot{E}'_d}{\partial E'_d} \Delta E'_d + \frac{\partial \dot{E}'_d}{\partial I_q} \Delta I_q \quad (\text{D.142})$$

$$\Delta \dot{E}'_q = \frac{\partial \dot{E}'_q}{\partial E'_q} \Delta E'_q + \frac{\partial \dot{E}'_q}{\partial I_d} \Delta I_d \quad (\text{D.143})$$

$$\Delta \dot{\delta} = \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \omega} \Delta \omega \quad (\text{D.144})$$

$$\Delta\dot{\omega} = \frac{\partial\dot{\omega}}{\partial E'_d} \Delta E'_d + \frac{\partial\dot{\omega}}{\partial E'_q} \Delta E'_q + \frac{\partial\dot{\omega}}{\partial\omega} \Delta\omega + \frac{\partial\dot{\omega}}{\partial I_d} \Delta I_d + \frac{\partial\dot{\omega}}{\partial I_q} \Delta I_q \quad (\text{D.145})$$

Onde:

$$\frac{\partial\dot{E}'_d}{\partial E'_d} = -\frac{1}{T'_{qo}} \quad (\text{D.146})$$

$$\frac{\partial\dot{E}'_q}{\partial E'_q} = -\frac{1}{T'_{do}} \quad (\text{D.147})$$

$$\frac{\partial\dot{E}'_d}{\partial I_q} = \frac{X_q - X'_q}{T'_{qo}} \quad (\text{D.148})$$

$$\frac{\partial\dot{E}'_q}{\partial I_d} = -\frac{X_d - X'_d}{T'_{do}} \quad (\text{D.149})$$

$$\frac{\partial\dot{\delta}}{\partial\omega} = 1 \quad (\text{D.150})$$

$$\frac{\partial\dot{\omega}}{\partial E'_d} = -\frac{I_d}{2H} \quad (\text{D.151})$$

$$\frac{\partial\dot{\omega}}{\partial E'_q} = -\frac{I_q}{2H} \quad (\text{D.152})$$

$$\frac{\partial\dot{\omega}}{\partial\omega} = -\frac{D}{2H} \quad (\text{D.153})$$

$$\frac{\partial\dot{\omega}}{\partial I_d} = \frac{-E'_d + (X'_d - X'_q) I_q}{2H} \quad (\text{D.154})$$

$$\frac{\partial\dot{\omega}}{\partial I_q} = \frac{-E'_q + (X'_d - X'_q) I_d}{2H} \quad (\text{D.155})$$

$$\Delta I_d = \frac{\partial I_d}{\partial E'_q} \Delta E'_q + \frac{\partial I_d}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial I_d}{\partial \delta} \Delta \delta + \frac{\partial I_d}{\partial \theta} \Delta \theta \quad (\text{D.156})$$

$$\frac{\partial I_d}{\partial E'_q} = \frac{1}{X'_d} \quad (\text{D.157})$$

$$\frac{\partial I_d}{\partial V} = -\frac{\cos(\delta - \theta)}{X'_d} \quad (\text{D.158})$$

$$\frac{\partial I_d}{\partial \delta} = \frac{V \text{sen}(\delta - \theta)}{X'_d} \quad (\text{D.159})$$

$$\frac{\partial I_d}{\partial \theta} = -\frac{V \text{sen}(\delta - \theta)}{X'_d} \quad (\text{D.160})$$

$$\Delta I_q = \frac{\partial I_q}{\partial E'_d} \Delta E'_d + \frac{\partial I_q}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial I_q}{\partial \delta} \Delta \delta + \frac{\partial I_q}{\partial \theta} \Delta \theta \quad (\text{D.161})$$

$$\frac{\partial I_q}{\partial E'_d} = -\frac{1}{X'_q} \quad (\text{D.162})$$

$$\frac{\partial I_q}{\partial V} = \frac{\text{sen}(\delta - \theta)}{X'_q} \quad (\text{D.163})$$

$$\frac{\partial I_q}{\partial \delta} = \frac{V \cos(\delta - \theta)}{X'_q} \quad (\text{D.164})$$

$$\frac{\partial I_q}{\partial \theta} = -\frac{V \cos(\delta - \theta)}{X'_q} \quad (\text{D.165})$$

D.8.3 Potência Fornecida pelas Máquinas Síncronas

Considerando o sistema equilibrado, pode-se escrever para as potências nos terminais das máquinas síncronas :

$$P = E'_d I_d + E'_q I_q + (X'_q - X'_d) I_d I_q \quad (\text{D.166})$$

$$Q = E'_q I_d - E'_d I_q - X'_q I_q^2 - X'_d I_d^2 \quad (\text{D.167})$$

onde:

$P \implies$ potência ativa no terminal da máquina

$Q \implies$ potência reativa no terminal da máquina

Aplicando o desenvolvimento em séries de Taylor para P e Q , tem-se a linearização:

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial E'_d} \Delta E'_d + \frac{\partial P}{\partial E'_q} \Delta E'_q + \frac{\partial P}{\partial I_d} \Delta I_d + \frac{\partial P}{\partial I_q} \Delta I_q \quad (\text{D.168})$$

onde:

$$\frac{\partial P}{\partial E'_d} = I_d \quad (\text{D.169})$$

$$\frac{\partial P}{\partial E'_q} = I_q \quad (\text{D.170})$$

$$\frac{\partial P}{\partial I_d} = E'_d + (X'_q - X'_d) I_q \quad (\text{D.171})$$

$$\frac{\partial P}{\partial I_q} = E'_q + (X'_q - X'_d) I_d \quad (\text{D.172})$$

$$\Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial E'_d} \Delta E'_d + \frac{\partial Q}{\partial E'_q} \Delta E'_q + \frac{\partial Q}{\partial I_d} \Delta I_d + \frac{\partial Q}{\partial I_q} \Delta I_q \quad (\text{D.173})$$

onde:

$$\frac{\partial Q}{\partial E'_d} = -I_q \quad (\text{D.174})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial E'_q} = I_d \quad (\text{D.175})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial I_q} = -E'_d - 2X'_q I_q \quad (\text{D.176})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial I_d} = E'_q - 2X'_q I_d \quad (\text{D.177})$$

APÊNDICE E

E Sistema de Excitação da Máquina Síncrona

O sistema de excitação no conjunto unidade geradora desempenha o papel de alimentar o enrolamento de campo das máquinas síncronas e estabelecer funções de proteção e controle. Estas funções visam ao desempenho satisfatório da máquina dentro do sistema elétrico interligado. A Figura E.1 apresenta o desenho esquemático da unidade geradora (máquina síncrona e sistema de excitação).

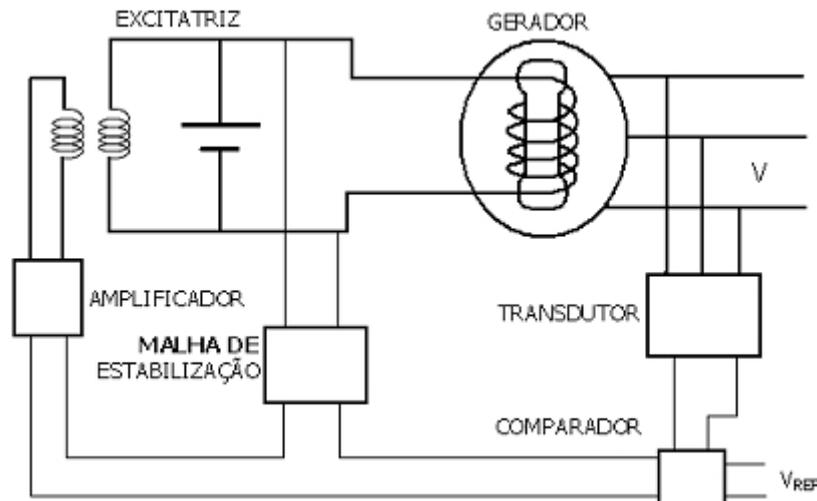


Figura E.1: Gerador e Sistema de Excitação

Para o sistema de excitação pode-se enumerar:

- (i) a excitatriz: responsável por manter a potência no enrolamento de campo da máquina;
- (ii) o limitador de corrente de excitação (OXL): limita a corrente de campo da máquina exercendo a função de proteção do circuito de campo frente a uma elevação de temperatura devido à excitação, prejudicial para o desempenho satisfatório da máquina;
- (iii) estabilizadores de sistemas de potência (PSS): responsáveis por sinais adicionais que proporcionam amortecimento nas oscilações do sistema;

- (iv) amplificadores: potencializam os sinais de controle;
- (v) transdutores: atuam como sensores e permitem a comparação das grandezas envolvidas nas medições efetuadas;

Para o modelo de sistema de excitação tem-se a representação do diagrama de blocos, Figura E.2. Este modelo é o modelo IEEE Type 1, onde a malha representativa da saturação do circuito de campo também é considerada. A variável de saída é a tensão E_{FD} de alimentação do campo da máquina síncrona. Nota-se que este modelo de regulador de tensão é geral, portanto, podendo ser usado nas simulações transitórias e de longo-prazo.

No diagrama de blocos da Figura E.2 o V_{PSS} aparece como um sinal adicional junto à referência, já o OXL não aparece neste modelo de regulador de tensão, sendo a tensão de saída do primeiro bloco limitada pelas tensões $V_{R_{max}}$ e $V_{R_{min}}$.

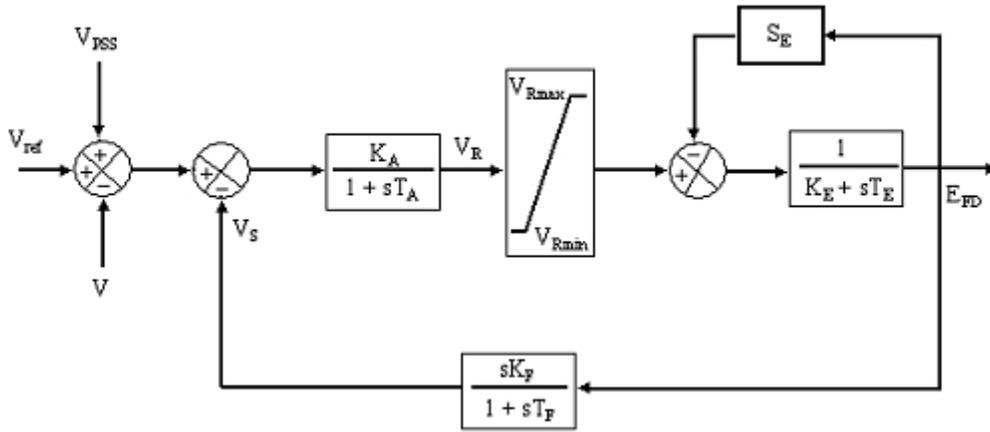


Figura E.2: Diagrama de Blocos do Regulador de Tensão

O seguinte conjunto de equações diferenciais representa o modelo de sistema de excitação da máquina síncrona, Figura E.2.

$$\frac{dV_R}{dt} = \frac{1}{T_A} [-V_R + K_A (V_{REF} - V - V_S + V_{PSS})] \quad (E.1)$$

$$\frac{dE_{FD}}{dt} = \frac{1}{T_E} [-K_E \cdot E_{FD} + V_R - S_E] \quad (E.2)$$

$$\frac{dV_S}{dt} = \frac{1}{T_F} \left[-V_S + \frac{K_F}{T_E} (K_E \cdot E_{FD} + V_R - S_E) \right] \quad (E.3)$$

Onde:

$V \Rightarrow$ tensão terminal da máquina síncrona

$VR \Rightarrow$ tensão de saída do regulador de tensão

$V_S \Rightarrow$ tensão de saída da malha de estabilização

$V_{REF} \Rightarrow$ tensão de referência

$V_{PSS} \Rightarrow$ tensão adicional estabilizante

$E_{FD} \Rightarrow$ tensão da máquina síncrona

$S_E \Rightarrow$ saturação da excitatriz, função de EFD

$K_A \Rightarrow$ ganho do regulador de tensão

$T_A \Rightarrow$ constante de tempo do regulador de tensão

$K_E \Rightarrow$ ganho da excitatriz

$T_E \Rightarrow$ constante de tempo da excitatriz

$K_F \Rightarrow$ ganho da malha de estabilização

$T_F \Rightarrow$ constante de tempo da malha de estabilização

VR_{max} e $VR_{min} \Rightarrow$ limitadores de saída do bloco regulador

A partir das equações acima, pode-se linearizar as equações para o sistema de excitação. Este conjunto linearizado é extremamente importante na montagem da matriz Jacobiana, e na análise da estabilidade do sistema.

$$\Delta \dot{V}_R = \frac{\partial \dot{V}_R}{\partial V_R} \Delta V_R + \frac{\partial \dot{V}_R}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial \dot{V}_R}{\partial V_S} \Delta V_S + \frac{\partial \dot{V}_R}{\partial V_{PSS}} \Delta V_{PSS} \quad (\text{E.4})$$

$$\Delta \dot{V}_R = -\frac{1}{T_A} \Delta V_R - \frac{K_A}{T_A} \Delta V - \frac{K_A}{T_A} \Delta V_S + \frac{K_A}{T_A} \Delta V_{PSS} \quad (\text{E.5})$$

$$\Delta \dot{E}_{FD} = \frac{\partial \dot{E}_{FD}}{\partial E_{FD}} \Delta E_{FD} + \frac{\partial \dot{E}_{FD}}{\partial V_R} \Delta V_R + \frac{\partial \dot{E}_{FD}}{\partial S_E} \Delta S_E \quad (\text{E.6})$$

$$\Delta \dot{E}_{FD} = -\frac{K_E}{T_E} \Delta E_{FD} + \frac{1}{T_E} \Delta V_R - \frac{1}{T_E} \Delta S_E \quad (\text{E.7})$$

$$\Delta \dot{V}_S = \frac{\partial \dot{V}_S}{\partial V_S} \Delta V_S + \frac{\partial \dot{V}_S}{\partial E_{FD}} \Delta E_{FD} + \frac{\partial \dot{V}_S}{\partial V_R} \Delta V_R + \frac{\partial \dot{V}_S}{\partial S_E} \Delta S_E \quad (\text{E.8})$$

$$\Delta \dot{V}_S = -\frac{1}{T_F} \Delta V_S - \frac{K_E K_F}{T_E T_F} \Delta E_{FD} + \frac{K_F}{T_E T_F} \Delta V_R - \frac{K_F}{T_E T_F} \Delta S_E \quad (\text{E.9})$$

Para inicialização das variáveis, tem-se as condições iniciais:

$$V_R = K_E E_{FD} + S_E \quad (\text{E.10})$$

$$V_S = -\frac{K_F}{T_E} S_E \quad (\text{E.11})$$

$$V_{REF} = \frac{V_R}{K_A} + V + V_S - V_{PSS} \quad (\text{E.12})$$