



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

**INSTITUTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE ELETROTÉCNICA
IEE/DET**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE EM REGIME
PERMANENTE DE SISTEMAS ELÉTRICOS
SUSCEPTÍVEIS A RESSONÂNCIA SUBSÍNCRONA**

ALUNO: MARCELO AROCA TOMIM

**ORIENTADORES: PEDRO PAULO DE CARVALHO MENDES
ANTÔNIO CARLOS ZAMBRONI DE SOUZA**

MAIO / 2004

À minha família pelo amor, torcida e vibração
em todos os momentos da minha vida.

E, especialmente, à minha querida esposa Adriana
pelo amor, paciência e apoio incondicionais, sem os quais
tornaria a minha vida um imenso vazio.

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores, Pedro Paulo e Zambroni, pela orientação, dedicação, confiança e amizade incomensuráveis durante todo o trabalho.

Ao chefe do departamento de eletrotécnica, Antônio Eduardo Hermeto, e pelo colega, Rafael Coradi Leme, pela colaboração e interesse imprescindíveis à realização do presente desenvolvimento.

A todos os professores que colaboraram, direta ou indiretamente, para a minha formação, tanto na graduação como no mestrado. Sou extremamente grato por tê-los como exemplos profissionais e humanos.

A todos os funcionários da UNIFEI pelo auxílio durante todos estes quase oito anos dentro desta universidade.

A todos os amigos e colegas de trabalho que me incentivaram ao longo destes dois anos de trabalho.

E, por fim, a Deus por ter conferido a mim a capacidade de conseguir realizar tal projeto.

RESUMO

Ressonância subsíncrona é um fenômeno inerente a sistemas elétricos de potência dotados de usinas termelétricas conectadas a redes de transmissão série compensadas. Este fenômeno é caracterizado pela troca de energia entre os sistemas mecânicos acoplados aos geradores e o sistema de transmissão a frequências abaixo da nominal, ou seja, subsíncronas. Assim, para a avaliação deste fenômeno faz-se necessário modelar geradores síncronos, eixos mecânicos turbina-gerador e rede elétrica, de forma que as frequências da rede possam ser refletidas nos eixos mecânicos através dos torques eletromagnéticos induzidos nos geradores e, vice-versa. Este efeito torna-se crítico, quando pelo menos uma das frequências de oscilação da rede é compatível com um dos modos torcionais do eixo. Sob estas condições o sistema se torna auto-excitado, podendo ser levado à instabilidade.

Este documento apresenta, de forma didática, formas alternativas de interpretação da ressonância subsíncrona e seus mecanismos. Aborda, também, modelos para os componentes básicos dos sistemas de potência para os estudos de ressonância subsíncrona, entre eles os geradores síncronos, rede elétrica e eixos mecânicos. A ferramenta de análise escolhida foi a técnica baseada em autovalores e autovetores aplicada à matriz de estados linearizada do sistema elétrico sob estudo.

É introduzido, ainda, um índice para a identificação de bifurcações Hopf em sistemas elétricos de potência, visando uma rápida visualização dos pontos críticos do sistema frente a variações de um parâmetro de controle específico.

Ao final da dissertação são realizadas algumas aplicações do que foi apresentado ao longo do documento, proporcionando que estes sejam totalmente reproduzidos.

ABSTRACT

Subsynchronous resonance is a phenomenon inherent in electrical power systems which presents thermal power plants connected to series compensated transmission networks. This phenomenon is characterized by energy exchange between turbine-generator shafts and the transmission system at frequencies below the synchronous one, i.e., at subsynchronous frequencies. Therefore, to capture this phenomenon it is necessary to model generators, turbine-generator mechanical shafts and electrical network, so that the network frequencies can be reflected on mechanical shafts through the electromagnetic torques induced in the generators and vice-versa. This effect becomes critical when one of the network natural frequencies is close, or equal, to one of the torsional modes of the shafts. Under these conditions, the system may come to be self-excited or even unstable.

This document intends to present, in a comprehensive way, alternative forms to interpret the subsynchronous resonance and its build-up mechanisms. It also exposes models for the basic components of the electrical power systems for subsynchronous resonance studies, among them synchronous generators, electrical network and mechanical shafts. The eigenanalysis are employed as the main tool for the stability analysis in this document, which are based in the linearised state space matrix of the whole system.

An index designed to identify Hopf bifurcations in electrical power systems is also presented, aiming a quick visualization of the system critical points, when a specific control parameter is varied.

In the end of the dissertation, some numerical examples are presented, providing one to reproduce them totally.

ÍNDICE

SIMBOLOGIA	IX
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 MOTIVAÇÃO	1
1.2 DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO	4
1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	9
2 FUNDAMENTOS BÁSICOS	11
2.1 INTRODUÇÃO	11
2.2 RESSONÂNCIA SUBSÍNCRONA	12
2.2.1 INFLUÊNCIA DE CAPACITORES SÉRIE EM SISTEMAS DE POTÊNCIA	13
2.2.2 INFLUÊNCIA DE FREQUÊNCIAS SUBSÍNCRONAS NOS GERADORES SÍNCRONOS	15
2.2.3 INFLUÊNCIA DE FREQUÊNCIAS SUBSÍNCRONAS NOS SISTEMAS MECÂNICOS TURBINA-GERADOR	21
2.2.4 ANÁLISE GLOBAL	23
2.2.5 MECANISMOS DA RESSONÂNCIA SUBSÍNCRONA	24
2.3 MODELO PARA OS SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA	27
3 MÁQUINAS SÍNCRONAS	30
3.1 INTRODUÇÃO	30
3.2 MODELO MATEMÁTICO DA MÁQUINA SÍNCRONA	31
3.2.1 REPRESENTAÇÃO	31
3.2.2 EQUAÇÕES DE TENSÃO – REFERÊNCIA ABC	33
3.2.3 TRANSFORMAÇÃO DE PARK	35
3.2.4 EQUAÇÕES DE TENSÃO – REFERÊNCIA $0DQ$	37
3.2.5 NORMALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE TENSÃO E FLUXO ENLAÇADO	39
3.2.6 EQUAÇÕES NORMALIZADAS DE TENSÃO	44
3.2.7 TORQUE ELETROMAGNÉTICO	45
3.2.8 PARÂMETROS DA MÁQUINA SÍNCRONA	47
3.3 SISTEMA MULTIMÁQUINAS	49
3.4 SISTEMA MULTIMÁQUINAS LINEARIZADO	53
3.4.1 INTRODUÇÃO	53
3.4.2 LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DA MÁQUINA SÍNCRONA	54

4	REDE ELÉTRICA	57
4.1	INTRODUÇÃO	57
4.2	TEORIA DOS GRAFOS APLICADA A CIRCUITOS ELÉTRICOS	58
4.2.2	CONCEITOS BÁSICOS EM TEORIA DE GRAFOS	59
4.2.3	LEIS DE KIRCHHOFF	67
4.3	EQUAÇÕES DE ESTADO	69
4.3.1	CONSIDERAÇÕES GERAIS	69
4.3.2	CONSIDERAÇÕES RELACIONADAS A SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA	71
4.3.3	FORMULAÇÃO SISTEMÁTICA DAS EQUAÇÕES DE ESTADO	72
4.3.4	VARIÁVEIS DE SAÍDA	79
4.3.5	EQUAÇÕES DE ESTADO NA REFERÊNCIA DQ	81
4.4	NORMALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ESTADO	83
4.5	LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ESTADO	85
5	EIXO TURBINA-GERADOR	86
5.1	INTRODUÇÃO	86
5.2	MODELO DE EIXO COM PARÂMETROS CONCENTRADOS	87
5.2.1	FORMULAÇÃO BÁSICA	87
5.2.2	NORMALIZAÇÃO	88
5.2.3	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE SEGUNDA ORDEM	89
5.2.4	EQUAÇÕES DE ESTADO	91
5.2.5	VARIÁVEIS DE SAÍDA	92
5.2.6	VARIÁVEIS DE ENTRADA	93
5.3	ANÁLISE MODAL DO EIXO	94
5.4	ASPECTOS TORCIONAIS DOS HIDROGERADORES	100
6	FERRAMENTAS DE ANÁLISE	102
6.1	INTRODUÇÃO	102
6.2	ANÁLISE MODAL DE SISTEMAS DINÂMICOS	103
6.2.1	RESPOSTA LIVRE DE UM SISTEMA DINÂMICO	103
6.2.2	RELAÇÕES ENTRE AUTOVALORES E ESTABILIDADE DE SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES	107
6.3	ESTABILIDADE DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES	107
6.4	BIFURCAÇÃO DE HOPF	110
6.5	ÍNDICE PARA IDENTIFICAÇÃO DE BIFURCAÇÕES DE HOPF	112
6.5.1	INTRODUÇÃO	112
6.5.2	ÍNDICE PROPOSTO	114
7	APLICAÇÕES	115
7.1	INTRODUÇÃO	115
7.2	SISTEMA RADIAL - FBM	116
7.2.2	ANÁLISE MODAL DO EIXO	118
7.2.3	ANÁLISE MODAL DO SISTEMA ELETROMECHANICO	120

7.2.4	APLICAÇÃO DO ÍNDICE PROPOSTO	129
7.3	SISTEMA RADIAL - SBM	132
7.3.2	ANÁLISE MODAL DOS EIXOS	135
7.3.3	ANÁLISE MODAL DO SISTEMA ELETROMECAÂNICO	138
7.3.4	APLICAÇÃO DO ÍNDICE PROPOSTO	142
7.4	SISTEMA HIDROTÉRMICO INTERLIGADO	143
7.4.2	ANÁLISE MODAL DOS EIXOS	145
7.4.3	ANÁLISE MODAL DO SISTEMA ELETROMECAÂNICO	146
8	<u>CONSIDERAÇÕES FINAIS</u>	151
8.1	CONCLUSÃO	151
8.2	DESENVOLVIMENTOS FUTUROS	154
A	<u>MONTAGEM DA MATRIZ DE ESTADOS LINEARIZADA</u>	156
A.1	INTRODUÇÃO	156
A.2	ACOPLAMENTO DAS EQUAÇÕES ELÉTRICAS	156
A.3	EQUAÇÕES MECÂNICAS	159
A.4	ACOPLAMENTO ENTRE SISTEMAS ELÉTRICO E MECÂNICO	161
B	<u>MÉTODO DA BI-ITERAÇÃO REFATORADA</u>	164
B.1	INTRODUÇÃO	164
B.2	ALGORITMO	165
	<u>REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA</u>	167

SIMBOLOGIA

CAPÍTULO 2

SÍMBOLO	DEFINIÇÃO
ε	Tensão induzida na bobina no domínio do tempo [V]
λ	Fluxo enlaçado pela bobina [Weber]
ξ	Coefficiente de amortecimento
ω_n	Freqüência natural [rad/s]
ω_s	Freqüência síncrona da rede elétrica [rad/s]
A	Área da bobina [m ²]
B, \vec{B}	Vetor campo magnético e seu módulo [Weber/m ²]
B_{sh}	Susceptâncias [mho]
C	Capacitâncias [F]
C, \vec{C}	Momento ou conjugado eletromagnético e seu módulo [N.m]
E, \dot{E}	Fasor de ε e sua amplitude máxima [V]
I	Corrente no domínio do tempo [A]
I, \dot{I}	Fasor de i e sua amplitude máxima [A]
J	Momento de inércia [kg.m ²]
K_{12}	Constante de elasticidade [N.m/rad]
L	Indutâncias [H]

SÍMBOLO	DEFINIÇÃO
M, \bar{M}	Momento de dipolo magnético e seu módulo [A.m ²]
\hat{m}, \hat{s} e \hat{z}	Versores
N	Número de espiras da bobina
R	Resistências [Ω]
S	Escorregamento entre campo magnético aplicado à bobina e seu eixo magnético.
T	Tempo [s]
T	Torque [N.m]
X	Reatâncias [Ω]
Z, \dot{Z}	Fasor de impedância da bobina [Ω]
$\theta, \phi, \alpha, \varphi$ e ψ	Ângulos [rad]

CAPÍTULO 3

SÍMBOLO	DEFINIÇÃO
Δ	Símbolo que denota variação am torno de um ponto
δ	Ângulo de carregamento da máquina [pu]
θ	Ângulo do eixo direto d com relação ao referencial fixo [rad]
ω	Velocidade angular do eixo direto d com relação ao referencial fixo [rad]
$\lambda_0, \lambda_d, \lambda_q$	Fluxos enlaçados na armadura na referência $0dq$ [Weber]
$\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$	Fluxos enlaçados na armadura na referência abc [Weber]
$\lambda_{fd}, \lambda_{kd}$	Fluxos enlaçados no campo (fd) e no enrolamento amortecedor (kd) [Weber]
$\lambda_{gq}, \lambda_{kq}$	Fluxos enlaçados nos enrolamentos amortecedores (gq e kq) [A]
θ_M	Ângulo mecânico do rotor com relação ao referencial fixo [rad]
ω_M	Velocidade angular do rotor com relação ao referencial fixo [rad]

SÍMBOLO	DEFINIÇÃO
A_B	Grandeza base de A
A^{pu}	Grandeza A dada por unidade [pu]
i_0, i_d, i_q	Correntes de armadura na referência $0dq$ [A]
i_a, i_b, i_c	Correntes de armadura na referência abc [A]
i_{fd}, i_{kd}	Correntes de campo (fd) e enrolamento amortecedor (kd) [A]
i_{gq}, i_{kq}	Correntes dos enrolamentos amortecedores (gq e kq) [A]
k	$\sqrt{3/2}$
L_0, L_d, L_q	Indutâncias da armadura na referência $0dq$ [H]
$L_{aa}, L_{aR}, L_{Ra}, L_R$	Matrizes de indutâncias da máquina com estator na referência abc
l_{aa}, l_{bb}, l_{cc}	Indutâncias próprias da armadura [H]
$l_{ab}, l_{ac}, l_{ba}, l_{bc}, l_{ca}, l_{cb}$	Indutâncias mútuas da armadura [H]
L_{ad}, L_{aq}	Indutâncias de magnetização dos eixos direto e em quadratura [H]
$l_{afd}, l_{akd}, l_{agq}, l_{akq}$	Indutâncias mútuas entre armadura e rotor [H]
$l_{bfd}, l_{bkd}, l_{bgq}, l_{bkq}$	
$l_{cfd}, l_{ckd}, l_{cgq}, l_{ckq}$	
$L_{fd}, L_{kd}, L_{gq}, L_{kq}$	Indutâncias próprias do rotor [H]
L_{fkd}, L_{gkq}	Indutâncias mútuas do rotor [H]
p	Número de pólos
ρ	Derivada com relação ao tempo [1/s]
P	Transformação de Park
R_a, R_b, R_c	Resistências de armadura [Ω]
R_{abc}, R_R	Matrizes de resistências de armadura e do rotor
$R_{fd}, R_{kd}, R_{gq}, R_{kq}$	Resistências do rotor [Ω]
T_E	Torque eletromagnético [N.m]
U_n	Matriz identidade de ordem n
V_ω	Vetor de tensões mocionais [V]

SÍMBOLO**DEFINIÇÃO**

V_0, V_d, V_q	Tensões de armadura na referência $0dq$ [V]
$V_{0dq}, I_{0dq}, \Lambda_{0dq}$	Vetores de tensões, correntes e fluxos enlaçados na referência $0dq$
V_a, V_b, V_c	Tensões de armadura na referência abc [V]
$V_{abc}, I_{abc}, \Lambda_{abc}$	Vetores de tensões, correntes e fluxos enlaçados na referência abc
V_{fd}	Tensão de campo [V]
V_R, I_R, Λ_R	Vetores de tensões, correntes e fluxos enlaçados na referência $0dq$

CAPÍTULO 4**SÍMBOLO****DEFINIÇÃO**

$0dq$	Índice associado a grandezas na referência $0dq$
A, B_1, B_2, C, D_1, D_2	Matrizes da formulação de estados da rede elétrica
$A_a = [a_{ij}]$	Matriz de incidência completa de um grafo orientado
abc	Índice associado a grandezas na referência abc
$A_f = [a_{ij}]$	Matriz de incidência reduzida de um grafo orientado
$B_a = [b_{ij}]$	Matriz de circuitos completa de um grafo orientado
$B_f = [b_{ij}]$	Matriz de circuitos fundamentais de um grafo orientado
e	Indicação de associação aos elos de um grafo orientado
E	Índice associado às fontes de tensão do circuito
i	Vetor de correntes de um circuito qualquer [A]
J	Índice associado às fontes de corrente do circuito
m	Número de arestas de um grafo
$n + 1$	Número de vértices de um grafo
Q_e	Matriz de cortes mínimos associada aos elos de um grafo orientado
r	Indicação de associação aos ramos de um grafo orientado

SÍMBOLO**DEFINIÇÃO**

\mathbf{v}	Vetor de tensões de um circuito qualquer [V]
\otimes	Produto de Kronecker

CAPÍTULO 5**SÍMBOLO****DEFINIÇÃO**

ω_m	Freqüência natural do eixo [rad/s]
σ_m	Fator de amortecimento modal [1/s]
ω_{MB}	Rotação síncrona do eixo [rad/s]
θ_{Mi}	Deslocamento angular entre a seção i do eixo e uma referência com rotação ω_{MB} constante
$\mathbf{A}_M, \mathbf{B}_M, \mathbf{C}_M$	Matrizes da formulação de estados do eixo
$D_{i(i+1)}$	Amortecimento mútuo do eixo entre as seções i e $i+1$ [N.m.s/rad]
D_{ij}	Amortecimento próprio da seção i [N.m.s/rad]
H_i	Constante de inércia da seção i do eixo [s]
J_i	Momento de inércia da seção i do eixo [kg.m ²]
$K_{i(i+1)}$	Constante de elasticidade do eixo entre as seções i e $i+1$ [N.m/rad]
m	Indicação de grandezas modais
\mathbf{Q}	Transformação modal ou modos do eixo
T_i	Torque aplicado à seção i do eixo [N.m]
n_{gt}	Razão entre H_g e H_t

CAPÍTULO 6

SÍMBOLO

DEFINIÇÃO

λ	Autovalor
Λ	Matriz diagonal formada por todos os λ associados a A
μ	Parâmetro de controle variável
A	Matriz de estados
<i>IND</i>	Índice para identificação de bifurcações Hopf
ρ_{ik}	Fator de participação do modo i na variável de estado k
v	Autovetor à direita
V	Matriz cujas colunas são formados por todos os v associados a A
w	Autovetor à esquerda
W	Matriz cujas colunas são formados por todos os w associados a A
x	Vetor de estados
z	Vetor de variáveis modais

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

*"O começo é a parte mais importante do trabalho".
Platão (428 - 348 a.C.)*

1.1 MOTIVAÇÃO

O Brasil é um país mundialmente conhecido por seus vastos território e potencial hidrelétrico. Indubitavelmente, esta característica é uma grande vantagem devido à energia hidrelétrica ser renovável. Atualmente, cerca de 90% do suprimento de energia do país provém da geração hidráulica, que corresponde a aproximadamente 68 GW de potência instalada.

Apesar da sua grande extensão territorial e sua abundância de recursos energéticos, o Brasil apresenta uma enorme diversidade regional e forte concentração populacional e econômica em regiões com sérios problemas de suprimento energético. Como indicado no último censo demográfico, mais de 80% da população brasileira vive na zona urbana [AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA, 2002].

Aliado a esta característica enunciada acima, surge o empecilho de grande parte dos recursos energéticos do país estarem localizados em regiões muito pouco desenvolvidas, distantes dos centros consumidores e com fortes restrições ambientais. E como garantir o suprimento energético de regiões mais desenvolvidas é um desafio da sociedade brasileira, torna-se fundamental o conhecimento sistematizado da disponibilidade de recursos energéticos, das tecnologias e sistemas para o seu aproveitamento e das necessidades energéticas setoriais e regionais do país.

Dentro deste contexto, há uma tendência de intensificação do emprego de outras fontes energéticas, devido às restrições socioeconômicas e ambientais e, dos avanços tecnológicos no aproveitamento de fontes não-convencionais (biomassa, solar e eólica).

Além destas fontes, estão o petróleo, carvão mineral e gás natural, sendo os dois últimos de maior relevância quando o assunto é geração de energia elétrica.

O carvão mineral é principal fonte de geração de energia elétrica em vários países como EUA, China, Índia, Alemanha, Japão e África do Sul. A abundância das reservas e o desenvolvimento de tecnologias de tratamento e combustão mais eficientes, conjugados à necessidade de expansão dos sistemas elétricos, indicam que o carvão mineral continuará sendo, por muitas décadas, uma das principais fontes de geração de energia elétrica. No Brasil, a participação do carvão ainda é incipiente (1,5% em 1999). Contudo essa parcela deve aumentar num futuro muito próximo, em razão do esgotamento dos melhores potenciais hidráulicos e dos referidos avanços tecnológicos na remoção de impurezas.

O gás natural, por sua vez, acompanha a mesma tendência do carvão mineral, que com o esgotamento dos melhores potenciais hidráulicos também passa a ser uma opção na expansão da capacidade de geração de energia elétrica. No Brasil, o Governo Federal instituiu o chamado Plano Prioritário de Termelétricas (PPT), no qual o Ministério de Minas e Energia definiu 49 centrais termelétricas integrantes do PPT, totalizando uma capacidade nominal prevista de aproximadamente 16 GW.

Com a inserção de geração termelétrica num sistema predominantemente hídrico, os operadores de sistemas devem estar atentos às conseqüências desta diversificação.

Por exemplo, o comportamento dinâmico do sistema elétrico tende a se alterar à medida que a parcela de geração termelétrica aumenta.

Os geradores térmicos são em geral mais sensíveis que os hidráulicos. Esta característica pode influir negativamente quando estes forem conectados a sistemas onde a maioria dos geradores apresenta resposta bem mais lenta. Uma das conseqüências deste acoplamento, se feito de forma equivocada, pode ser a oscilação de potência entre grupos geradores hidráulicos e térmicos, ou em outras palavras, o surgimento de modos naturais de oscilação interárea ou entre unidades geradoras.

Deve se ter em mente, também, que o rotor de um gerador termelétrico consiste em uma estrutura mecânica muito complexa com diversas massas girantes (como rotores de cada estágio de pressão, do gerador, da excitatriz, além dos acoplamentos mecânicos) conectadas a eixos não-rígidos por natureza. Estes eixos podem exceder 50 metros de comprimento e pesar algumas centenas de toneladas. Portanto, quando o gerador sofre algum tipo de perturbação, oscilações torcionais aparecem entre diferentes seções do eixo turbina-gerador. Estas oscilações torcionais, em geral, ocorrem na faixa subsíncrona, ou seja, abaixo da frequência nominal do sistema, e podem sob certas condições, interagir com o sistema elétrico de uma forma adversa. Dentro dos problemas causados por estas oscilações estão: interação torcional com sistemas de controle; ressonância subsíncrona com sistemas de transmissão compensados, e; fadiga torcional devido manobras na rede elétrica [KUNDUR, 1994].

Até este ponto, vários problemas foram enunciados de forma a esclarecer a necessidade de aprofundamento nas questões associadas a oscilações subsíncronas em sistemas elétricos de potência. Por exemplo, a tendência de se diversificar o parque gerador brasileiro lançando-se mão, também, da instalação de usinas termelétricas associada aos seus extensos sistemas de transmissão compensados (e.g. Interligação Norte/Sul). Notoriamente, este assunto merece atenção imediata já que, somente desta forma, o setor elétrico brasileiro estará apto a lidar com problemas desta natureza que poderão ocorrer num futuro muito próximo.

1.2 DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO

A necessidade de se transmitir cada vez maiores blocos de potência através de longas linhas de transmissão passou a ser um dos maiores desafios da engenharia ao longo dos anos. A demanda por energia em regiões densamente povoadas continua crescendo intensamente, ao passo que a construção de linhas de transmissão torna-se cada vez mais complicada, tendo-se em vista problemas econômicos e ambientais.

Uma das formas adotadas para o aumento da capacidade de transmissão em sistemas elétricos foi a compensação série por meio de capacitores. Este equipamento mostrou-se cada vez mais eficiente no controle de tensão e transmissão de grandes blocos de potência ao longo de grandes distâncias. No entanto, algumas de suas aplicações apresentaram alguns problemas como, oscilações subharmônicas ou subsíncronas¹.

Uma série de documentos que lidam com oscilações subsíncronas em sistemas elétricos de potência foi publicada desde então.

No artigo publicado por J. W. Butler e C. Concordia [BUTLER, 1937], já eram apontadas conseqüências da implementação de capacitores série em sistemas de potência. Os aspectos abordados pelos autores foram ferro-ressonância, oscilações eletromecânicas (*hunting of synchronous machines*) e auto-excitação em máquinas síncronas e de indução, sendo este tópico de maior importância na presente dissertação. Segundo os autores, tanto motores de indução como máquinas síncronas conectadas ao sistema através de linhas compensadas por capacitores série são submetidos a correntes a frequências inferiores à síncrona. Sob certas condições, estes podem se tornar geradores de indução para uma destas frequências inferiores que são limitadas apenas pela impedância equivalente do sistema à mesma frequência. Este fato pode acarretar no surgimento de correntes subsíncronas com grande amplitude e, por sua vez, fortes oscilações nos rotores devido aos intensos torques pulsantes induzidos pela corrente mencionada. Neste

¹ Os termos subharmônico e subsíncrono estão relacionados a frequências inferiores à frequência nominal do sistema em questão.

mesmo artigo, já se apontava uma forma de se eliminar a auto-excitação em sistemas série compensados utilizando-se um resistor em paralelo com o capacitor em questão.

Uma análise mais detalhada do problema foi publicada por C. Concordia e G. K. Carter [CONCORDIA, 1941]. Neste artigo os autores apresentaram um critério de avaliação unificado de estabilidade, que considera tanto aspectos elétricos como mecânicos dos sistemas elétricos, de forma a validar os métodos aproximados utilizados até então, dentro de certas limitações. Procedendo desta maneira, eles concluíram que os fenômenos de oscilações eletromecânicas e auto-excitação em máquinas elétricas são mutuamente dependentes e, de fato, inseparáveis. A abordagem de ambos os fenômenos separadamente só é possível devido à ampla diferença entre as ordens de grandeza de suas principais características de controle, ou seja, de suas constantes de tempo.

Este tipo de simplificação era importante na época devido à complexidade dos sistemas a serem avaliados e a limitada capacidade computacional para resolver este tipo de problema. Tanto que, este procedimento de avaliação completa do sistema eletromecânico não foi recomendado para a análise de sistemas reais.

Até a década de 70, a frequência de problemas associados a linhas de transmissão série compensadas por capacitores intensificou-se, da mesma forma que os esforços dos engenheiros para prevêê-los e solucioná-los.

Neste intuito, L. A. Kilgore, L. C. Elliot e E. R. Taylor apresentaram um método geral para predição de oscilações subharmônicas em sistemas série compensados por capacitores [KILGORE, 1971]. Os autores baseiam-se na referência da resistência total do rotor das máquinas síncronas ao estator e, a soma direta com a resistência equivalente externa do sistema. Apesar de utilizar esta aproximação, é feita menção a uma metodologia mais precisa para o levantamento da impedância efetiva da máquina síncrona. Teoricamente, esta tarefa consiste em aplicar uma tensão à frequência de escorregamento da máquina para uma determinada frequência natural da rede e, obter suas correntes e torques correspondentes. Neste mesmo artigo, os autores reforçam que uma maneira de evitar tais oscilações é utilizar resistores em paralelo com os capacitores série. Adicionalmente, o artigo propõe a inserção de um

circuito LC paralelo ressonante a 60 Hz, em série com o mencionado resistor. Desta forma, correntes a 60 Hz são bloqueadas e há uma redução na potência dissipada no resistor do circuito de amortecimento.

No fim do ano de 1970, enquanto grande parte dos esforços dos engenheiros eram concentrados na interpretação dos mecanismos da auto-excitação em sistemas série compensados, foi registrada a primeira falha de um eixo de turbogerador na usina de Mohave, localizada no sul da Califórnia, EUA. No entanto, tal fenômeno foi reconhecido como *ressonância subsíncrona* (RSS) apenas após uma segunda falha um ano depois [BALANCE, 1973, p.1655-1657]. Neste caso, este efeito envolveu o conjunto turbina-gerador e o sistema de transmissão compensado, ao qual o gerador estava conectado.

Neste momento, o fenômeno da RSS foi caracterizado por trocas de energia entre os sistemas mecânicos, associados a turbinas e geradores, e o sistema elétrico a frequências inferiores à síncrona, de acordo com o IEEE [IEEE SSR WORKING GROUP, 1981; ANDERSON, 1988].

O caso específico ocorrido em Mohave consistiu em uma falha do eixo do sistema turbina-gerador, o qual era composto por estágios de alta e média pressão, além do gerador principal e a excitatriz. Tal falha consistiu num curto-circuito entre os anéis coletores do circuito de excitação da máquina e o próprio eixo. Após apuração das possíveis causas do curto, concluiu-se que o eixo sofreu um aquecimento anormal na área dos anéis coletores devido a oscilações mecânicas provocadas pela RSS. Presumiu-se que a zona do eixo afetada fora submetida a temperaturas superiores a 650°C [BALANCE, 1973, p.1655-1657].

A falha ocorrida em Mohave proporcionou aos especialistas em sistemas elétricos um certo grau de detalhamento quantitativo acerca da performance de máquinas elétricas, especialmente, quando submetidas a fenômenos que envolvem aspectos torcionais e contribuição dos amortecimentos. A partir deste evento, era evidente a urgência de testes adicionais e correlação entre modos torcionais dos eixos e seus respectivos amortecimentos, dado o aumento considerável do uso de compensação série, principalmente no oeste dos EUA [BALANCE, 1973, p.1655-1657].

Nesta altura, era possível identificar dois mecanismos distintos para a formação das oscilações subsíncronas: *efeito de gerador de indução e interação torcional*. Sendo o primeiro o mesmo caracterizado anteriormente como auto-excitação e, de origem puramente elétrica. Enquanto o segundo, que pode resultar em RSS, se pelo menos uma das frequências naturais da rede for próxima de pelo menos uma frequência natural do eixo turbina-gerador. Ambas condições podem levar a indução de um alto nível de correntes a frequências subsíncronas no rotor, produzindo, por sua vez, torques que amplificam as oscilações do rotor.

Na mesma época do ocorrido em Mohave, foi publicado por W. Watson e M. E. Coultres, ambos da *Hydro-Electric Power Commission of Ontario*, Canadá, um artigo relatando o primeiro registro de instabilização de modos torcionais por controles de excitação [WATSON, 1973]. Este evento tinha sido observado em 1969, durante a implementação de um sinal estabilizante de potência, conhecido como PSS (*power system stabilizer*), em uma unidade térmica de 555 MVA, 3600 rpm na usina de Lambton, Ontário. Neste caso foi utilizado um PSS baseado na rotação medida no final do eixo turbina-gerador, após o gerador, que excitou o modo torcional do eixo com menor frequência, 16 Hz. Para a avaliação deste problema foi preciso levantar o modelo para o eixo dos turbogeradores da usina de Lambton, que eram compostos por cinco massas rotativas: um estágio de alta pressão, um de média, dois de baixa e o gerador. Todos os dados relativos às constantes de inércia e elasticidade do eixo foram fornecidos pelo fabricante. Neste caso, diferentemente do procedimento utilizado para avaliação de auto-excitação abordado anteriormente, a rede elétrica foi sintetizada por um coeficiente de potência sincronizante acoplado às equações mecânicas.

Ao longo da década de 70, várias metodologias para avaliação de oscilações subsíncronas, tanto conjunta como separadamente, foram desenvolvidas, com os mais diversificados níveis de detalhamento. Há referências que tratam o problema de uma forma conjunta, considerando aspectos da rede, torcionais dos eixos, além de sistemas de controle associados aos geradores em questão, embora utilizem metodologias diferenciadas de análise. Por exemplo, enquanto em [UNDRILL, 1976] é dado enfoque na avaliação do sistema no domínio da frequência a partir do critério de estabilidade generalizado de Nyquist, em [FOUAD, 1978; ANDERSON, 1988] é abordada a análise através de autovalores, além de apresentar, também, simulações

no domínio do tempo para o sistema completo não-linear no EMTP (*Electromagnetic Transients Program*). A modelagem considerada para os cálculos no domínio do tempo pode ser encontrada em detalhes em [GROSS, 1978].

Em 1977, outro tipo de interação torcional foi registrado em Square Butte, Dakota do Norte, EUA. Testes realizados no sistema de transmissão em corrente contínua que conecta Square Butte ao nordeste de Minnesota (750 km), indicaram que o sistema de amortecimento suplementar do retificador estava interagindo de uma forma adversa com o modo torcional (11,5 Hz) de um conjunto turbina-gerador adjacente, na usina de Milton Young [BAHRMA, 1980].

Mais tarde, em Março de 1983, durante o comissionamento de uma unidade geradora nuclear pela *Ontario Hydro*, foram registradas pela primeira vez, interações torcionais com sistemas de controle de velocidade [LEE, 1985]. O mecanismo de instabilidade torcional foi confirmado, tanto analítico como praticamente, como sendo consequência de dois fatores independentes: (a) discrepâncias na linearização da característica da válvula (abertura versus fluxo de vapor) e, (b) a ampla banda passante do servomecanismo eletro-mecânico responsável pelo controle da velocidade. Este último fator permitia significantes interações a altas frequências, compatível com os modos torcionais do eixo turbina-gerador.

Os problemas ocorridos em Mohave, Lambton e Square Butte envolvendo oscilações subsíncronas, proporcionou aos engenheiros um maior entendimento com relação a este tipo de fenômeno. Não apenas sistemas compensados por capacitores série são susceptíveis a interações torcionais com os eixos das turbinas e geradores. Qualquer equipamento, que apresente uma resposta rápida a variações de frequência ou potência, é capaz de interagir com os modos naturais dos sistemas mecânicos associados à geração de energia elétrica. Este fato é importante, já que outros aspectos, além de condições em regime permanente e avaliação de estabilidade transitória, deveriam ser analisados antes do início da operação comercial de uma unidade geradora. Dentre eles estão as interações da rede elétrica e controles associados com seus respectivos sistemas mecânicos.

Atualmente, com o advento de novas tecnologias, como os FACTS (*Flexible Alternate Current Transmission Systems*), os engenheiros de potência enfrentam

novos desafios para avaliar as interações torcionais com a rede elétrica. Esta preocupação é facilmente justificada, já que os FACTS são baseados em eletrônica de potência, o que torna suas respostas cada vez mais rápidas e, portanto, compatíveis com as frequências naturais dos eixos acoplados a turbina-geradores [RIVERA, 2000]. Para a aplicação dos FACTS em estudos de RSS, são necessários modelos capazes de representar a influência tanto das componentes subsíncronas como supersíncronas no equipamento, além de sua característica basicamente não-linear. Esta não é uma tarefa trivial, devido à presença da associação de tiristores que depende do circuito de disparo, ou seja, do tempo. Atualmente, grande parte dos esforços está concentrada na modelagem e projeto de controles para os equipamentos FACTS, de tal forma que estes não interajam negativamente com os sistemas mecânicos das turbinas e geradores [JALALI, 1994; RAJARAMAN, 1996; HAN, 1997].

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho visa apresentar aspectos básicos para a modelagem, compreensão e avaliação dos mecanismos responsáveis pelos esforços torcionais experimentados pelos eixos das turbinas e geradores.

De forma a atingir o objetivo citado acima, faz-se necessário uma discussão prévia, mais detalhada, acerca de possíveis condições que possam favorecer as interações torcionais, que serão apresentadas no capítulo 2. Além disto, serão abordados os aspectos a serem considerados nos estudos de oscilações subsíncronas e esforços torcionais em eixos de turbina-geradores.

Depois do enfoque macroscópico dado ao sistema no capítulo 2, serão abordadas, nos capítulos 3, 4 e 5, modelagens específicas para o gerador, rede elétrica e eixo mecânico, respectivamente. Os sistemas de excitação, reguladores de velocidade, HVDCs, ou quaisquer FACTS, não serão analisados no presente documento, permanecendo, portanto, como tema para futuros desenvolvimentos.

No capítulo 6, algumas técnicas de avaliação dos sistemas eletromecânicos, modelados previamente, serão analisadas, como técnica de autovalores. Em especial será abordado um índice proposto para a identificação de condições puramente oscilatórias em sistemas elétricos, apresentado no Bologna Power Tech 2003 [TOMIM, 2003].

Concluídas modelagem e apresentação de técnicas de avaliação, algumas aplicações serão realizadas no capítulo 7. Todos os resultados apresentados são frutos de um programa desenvolvido em MATLAB[®] pelo próprio mestrando com o auxílio fundamental de seus orientadores.

Por fim, segue a conclusão do presente trabalho com as devidas sugestões e pretensões para desenvolvimentos futuros.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS BÁSICOS

*"... a maior coisa que a alma humana faz neste mundo é ver algo, e contar o que ela vê de uma forma simples... Ver claramente é poesia, profecia e religião, tudo em um".
John Ruskin (1819-1900)*

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão discutidos, em maiores detalhes, os mecanismos de surgimento das oscilações subsíncronas em sistemas elétricos de potência.

Primeiramente, abordar-se-á a ressonância subsíncrona, fenômeno caracterizado pela interação torcional com sistemas compensados por capacitores série. A título de ilustração será utilizado um sistema radial simples para análise da influência de capacitores série nas características dinâmicas dos sistemas elétricos.

A seguir, será estudada a influência de frequências subsíncronas presentes na rede elétrica, nos geradores síncronos e sistemas mecânicos associados.

Finalmente, serão analisados os mecanismos de surgimento da RSS assim como aspectos da modelagem dos sistemas elétricos de potência, para que seja possível estudar tal fenômeno.

2.2 RESSONÂNCIA SUBSÍNCRONA

De acordo com o IEEE, *ressonância subsíncrona* (RSS) é uma condição do sistema de potência onde a rede elétrica troca energia com um eixo associado a um conjunto turbina-gerador, a uma ou mais frequências naturais do sistema combinado, abaixo da frequência síncrona da rede [IEEE SSR WORKING GROUP, 1981].

Esta condição é resultado de algumas características da rede elétrica e seus sistemas mecânicos associados (turbina-gerador).

Os sistemas de potência são compostos pelos sistemas de transmissão, geração e cargas. Tais sistemas consistem nas mais variadas conexões de diversos tipos de equipamentos, como linhas de transmissão, capacitores e/ou reatores série ou paralelo, geradores e motores e seus controles associados, além de outros equipamentos, como os FACTS. Em face desta característica inerente aos sistemas de potência, estes podem ser considerados grandes sistemas dinâmicos, com frequências naturais de oscilação e amortecimentos próprios.

Adicionalmente, aparecem os eixos mecânicos acoplados aos geradores, especialmente, térmicos. Como já foi dito, estes eixos consistem em uma estrutura mecânica complexa dotada de massas girantes conectadas por eixos com um certo grau de elasticidade. Desta forma, os eixos acoplados aos conjuntos turbina-gerador também apresentam frequências naturais de oscilação e amortecimentos definidos.

Portanto, como o sistema elétrico de potência resume-se ao um imenso sistema dinâmico eletro-mecânico, espera-se que o sistema elétrico influencie os sistemas mecânicos dos geradores e, vice-versa. Em outras palavras, frequências naturais da rede elétrica serão refletidas nos sistemas mecânicos e frequências naturais mecânicas refletidas no sistema elétrico, sendo os geradores (ou motores) os responsáveis por estas reflexões.

Neste contexto, a RSS pode surgir de acordo com dois mecanismos distintos, embora mútuos: *efeito de gerador de indução e interação torcional*. O primeiro, de origem puramente elétrica, é causador de intensas oscilações de torque no rotor dos

geradores (ou motores), enquanto o segundo é causado por interações entre os sistemas mecânicos e elétricos, tornando ambos os sistemas auto-excitados. Um terceiro tipo de interação subsíncrona é mencionado pela literatura e recebe o nome de *amplificação de torque*. Este fenômeno é relacionado a grandes distúrbios em sistemas série compensados e seus torques resultantes nos eixos turbina-gerador.

Antes de elucidar cada mecanismo separadamente, avaliar-se-á as características intrínsecas dos sistemas de transmissão série compensados por capacitores no que se refere a suas freqüências naturais de oscilação, e posteriormente, as conseqüências da interação destas freqüências com os sistemas compostos por geradores síncronos e turbinas associadas.

2.2.1 Influência de Capacitores Série em Sistemas de Potência

Seja o sistema radial, de acordo com a Figura 2.1, composto por uma unidade geradora conectada a uma barra infinita, através de uma linha transmissão compensada por um capacitor série. Neste exemplo, as resistências são desprezadas, já que o efeito de interesse é a oscilação da rede a freqüências diferentes da síncrona, e não seu amortecimento.

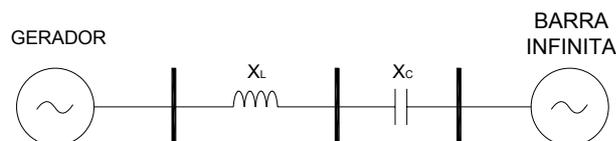


Figura 2.1 – Sistema radial série compensado

Este sistema de transmissão consiste em um circuito LC série com freqüência natural dada pela equação (2.1).

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_s \sqrt{\frac{X_C}{X_L}} \quad [\text{rad/s}] \quad (2.1)$$

As grandezas ω_n e ω_s representam as freqüências natural e síncrona associadas ao sistema, enquanto L e C, suas respectivas indutância e capacitância equivalentes. As grandezas X_C e X_L correspondem às reatâncias à freqüência síncrona.

Com base na equação (2.1), pode-se verificar, que para este sistema radial, a freqüência natural ω_n será sempre menor que a síncrona ω_s , dada a característica predominantemente indutiva dos sistemas elétricos de potência. Além do mais, ω_n ao quadrado apresentará um aumento proporcional a um aumento do grau de compensação série X_C/X_L do sistema de transmissão.

No caso deste sistema radial simples, verifica-se apenas uma freqüência natural associada ao sistema elétrico, dada a troca de energia entre os dois elementos armazenadores presentes, a saber, o indutor e o capacitor séries. No entanto, em sistemas elétricos reais existem os elementos em paralelo (ou *shunt*). Por exemplo, o efeito de carregamento em linhas de transmissão, bancos de capacitores, reatores de barra e de linha são, todos, representados por capacitores ou indutores em paralelo, que podem, dependendo do sistema, influenciar o seu comportamento como um todo. A consideração de elementos em paralelo, em geral, introduz freqüências elevadas, não compatíveis com as faixas de freqüências naturais dos sistemas mecânicos acoplados aos geradores.

Naturalmente a indutância equivalente do gerador influi no valor da freqüência natural do sistema e, o simples fato de negligenciá-la, insere discrepâncias no valor final de ω_n . O gerador será considerado no capítulo 4, quando serão apresentados modelos mais detalhados para as máquinas síncronas que permitirão seu acoplamento à rede elétrica.

2.2.2 Influência de Frequências Subsíncronas nos Geradores Síncronos

Como elucidado no item anterior, os sistemas de transmissão série compensados apresentam frequências naturais subsíncronas que interagem, sobretudo, com os sistemas mecânicos associados a geradores térmicos.

Para melhor entender esta interação, primeiramente, considere uma bobina dotada de N espiras, percorrida por uma corrente i_{f0} e sob ação de um campo magnético girante \vec{B}_s com rotação constante ω_s , idêntica à rotação da bobina (vide Figura 2.2).

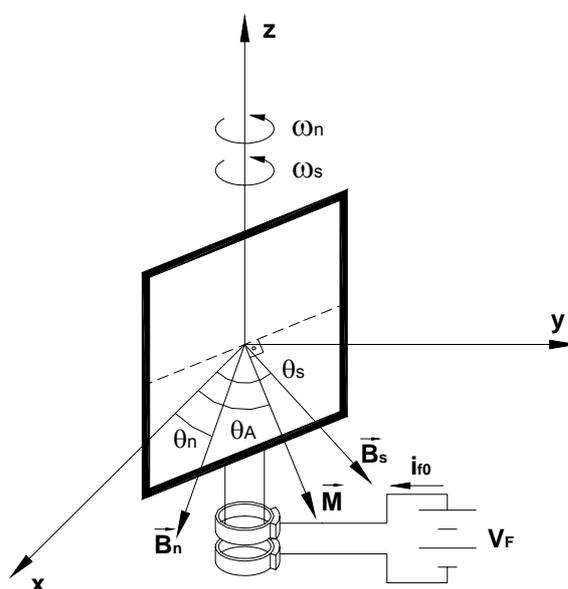


Figura 2.2 - Bobina com excitação externa e rotação ω_s num campo girante com componentes de frequência ω_s e ω_n

Os ângulos θ_A , θ_s e θ_n são dados em função da rotação ω_s , ω_n e seus valores iniciais, de acordo com as expressões (2.2), (2.3) e (2.4).

$$\theta_A = \omega_s t + \theta_{A0} \text{ [rad]} \quad (2.2)$$

$$\theta_s = \omega_s t + \theta_{s0} \text{ [rad]} \quad (2.3)$$

$$\theta_n = \omega_n t + \theta_{n0} \text{ [rad]} \quad (2.4)$$

O conjugado eletromagnético \vec{C}_s devido à interação entre a corrente i_{f0} e o campo magnético \vec{B}_s pode ser obtido pela equação (2.5), com o vetor \vec{M}_s representando o momento de dipolo magnético da bobina em questão. Este momento de dipolo magnético é definido como sendo um vetor com direção normal ao plano da bobina, com módulo $A \cdot i_{f0}$, onde A é a área do circuito fechado formado pela bobina. A orientação de \vec{M}_s é tal que o circuito é percorrido pela corrente i_{f0} em sentido anti-horário, quando visto de sua extremidade.

$$\vec{C}_s = \vec{M}_s \times \vec{B}_s \text{ [N.m]} \quad (2.5)$$

Para o exemplo ilustrado na Figura 2.2, tem-se \vec{M}_s e \vec{B}_s dados por

$$\vec{M}_s = A i_{f0} \hat{m} \text{ [A.m}^2\text{]} \quad (2.6)$$

$$\vec{B}_s = B_s \hat{s} \text{ [Weber/ m}^2\text{]} \quad (2.7)$$

onde \hat{m} e \hat{s} são versores que determinam direção e sentido de \vec{M}_s e \vec{B}_s , respectivamente.

Substituindo, agora, (2.6) e (2.7) em (2.5), considerando as relações (2.2) a (2.4) e o fato de que $\phi = \theta_{s0} - \theta_{A0}$, obtém-se \vec{C}_s , dado a seguir.

$$\vec{C}_s = A B_s i_{f0} \text{sen}\phi \hat{z} \text{ [N.m]} \quad (2.8)$$

O conjugado obtido em (2.8) exprime o princípio fundamental de funcionamento da máquina síncrona. Pode-se observar que a diferença angular, ϕ , entre o campo magnético girante \vec{B}_s aplicado e o eixo magnético da espira, dado pela direção de \hat{m} , deve ser diferente de zero para que haja torque, já que ambos estão em sincronismo. Além disto, se ϕ for positivo, o eixo magnético da bobina estará atrasado com relação ao campo e o conjugado será positivo, ajudando, por sua vez, o movimento da bobina. Ou seja, esta condição determina que esta bobina opera como um motor síncrono. Mas, se o eixo magnético da bobina estiver adiantado com relação ao campo, a diferença angular ϕ será negativa, resultando num conjugado

que obstruirá o movimento da bobina. Esta é a condição determinante para a bobina operar como gerador síncrono.

Considere agora um outro campo girante \vec{B}_n aplicado à bobina, com frequência angular constante ω_n , só que diferente de ω_s , como mostrado na Figura 2.2. Diferentemente do caso anterior, no qual a bobina e o campo magnético estavam sincronizados, agora existe velocidade angular relativa entre os dois, propiciado, assim, o aparecimento de tensões e correntes induzidas na bobina.

Pela lei de indução de Faraday-Lenz, denotada em (2.9), pode-se calcular a tensão induzida na bobina devido à influência de \vec{B}_n . As grandezas denotadas por λ e \vec{B}_T referem-se ao fluxo total enlaçado e o campo total aplicado à bobina, respectivamente, e estão relacionadas pela equação (2.10).

$$\varepsilon = -\frac{d\lambda}{dt} \text{ [V]} \quad (2.9)$$

$$\lambda = NA\vec{B}_T \cdot \hat{m} \text{ [Weber]} \quad (2.10)$$

Tendo em vista que,

$$\vec{B}_n = B_n \hat{m} \text{ [Weber/m}^2\text{]} \quad (2.11)$$

$$\vec{B}_T = \vec{B}_s + \vec{B}_n \text{ [Weber/m}^2\text{]} \quad (2.12)$$

o fluxo enlaçado λ é calculado como se segue.

$$\lambda(t) = NA[B_s \cos \phi + B_n \cos(s\omega_s t + \alpha)] \text{ [Weber]} \quad (2.13)$$

onde, s é o escorregamento entre o campo magnético girante \vec{B}_n e \hat{m} , ou seja, a velocidade angular relativa entre \vec{B}_n e \hat{m} , normalizada com relação a ω_s , como definido em (2.14), enquanto $\alpha = \theta_{A0} - \theta_{n0}$.

$$s = \frac{\omega_s - \omega_n}{\omega_s} \quad (2.14)$$

Calculado λ , basta aplicá-lo à equação (2.9), resultando, assim, a tensão induzida pelo campo magnético total aplicado à bobina, dado por (2.15).

$$\varepsilon(t) = s\omega_s NAB_n \text{sen}(s\omega_s t + \alpha) = sE \text{sen}(s\omega_s t + \alpha) \text{ [V]} \quad (2.15)$$

Como esta bobina consiste em um circuito fechado com parâmetros de resistência R e auto-indutância L próprios, uma corrente i circula na bobina, devido à tensão induzida ε . O módulo e a fase da corrente i podem ser obtidos através dos fasores da tensão ε e da impedância da bobina, dados por (2.16) e (2.17).

$$\dot{\mathbf{E}} = sE e^{j\alpha} \text{ [V]} \quad (2.16)$$

$$\dot{\mathbf{Z}} = R + js\omega_s L = R + jsX_L \text{ [\Omega]} \quad (2.17)$$

onde X_L é igual à reatância da bobina para a frequência ω_s .

Portanto, o fasor correspondente à corrente induzida i é dado pela relação (2.18).

$$\dot{\mathbf{i}} = I e^{j\varphi} \text{ [A]} \quad \left\{ \begin{array}{l} I = \frac{E}{\sqrt{\left(\frac{R}{s}\right)^2 + X_L^2}} \\ \varphi = \alpha - \text{atan}\left(\frac{sX_L}{R}\right) \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Transferindo, agora, o fasor $\dot{\mathbf{i}}$ para o domínio do tempo, tem-se:

$$i(t) = I \text{sen}(s\omega_s t + \varphi) \text{ [A]} \quad (2.19)$$

Agora, com a corrente total no circuito sendo igual a soma de i_{f0} e $i(t)$, o momento de dipolo magnético total torna-se igual à soma de $\vec{\mathbf{M}}_s$ e $\vec{\mathbf{M}}_i$, sendo este último produzido por $i(t)$. Assim,

$$\vec{\mathbf{M}}_T = \vec{\mathbf{M}}_s + \vec{\mathbf{M}}_i = A[i_{f0} + I \text{sen}(s\omega_s t + \varphi)] \hat{\mathbf{m}} \text{ [A.m}^2\text{]} \quad (2.20)$$

Conseqüentemente, o conjugado produzido sobre a bobina pode ser calculado através da equação (2.5), só que utilizando as grandezas \vec{M}_T e \vec{B}_T . Após algumas simplificações trigonométricas pode-se escrever o conjugado \vec{C}_T como se segue.

$$\vec{C}_T = [C_0 + C(s\omega_s t) + C(2s\omega_s t)] \hat{z} \text{ [N.m]} \quad (2.21)$$

onde,

$$C_0 = C_s - \frac{AIB_n}{2} \cos(\varphi - \alpha) \text{ [N.m]} \quad (2.22)$$

$$C(s\omega_s t) = A\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \cos(s\omega_s t + \psi) \text{ [N.m]} \quad (2.23)$$

$$C(2s\omega_s t) = \frac{AIB_n}{2} \cos(2s\omega_s t - \varphi - \alpha) \text{ [N.m]} \quad (2.24)$$

As constantes k_1 , k_2 e ψ , na expressão (2.23), são definidas a seguir:

$$k_1 = IB_s \sin\phi \cos\varphi - i_{f0} B_n \cos\alpha \quad (2.25)$$

$$k_2 = IB_s \sin\phi \sin\varphi - i_{f0} B_n \sin\alpha \quad (2.26)$$

$$\psi = \text{atan}\left(-\frac{k_1}{k_2}\right) \text{ [rad]} \quad (2.27)$$

De acordo com as expressões (2.21) a (2.24), o conjugado total exercido sobre a bobina é composto por três componentes bem definidas: uma constante, uma com a frequência relativa entre \vec{B}_n e \hat{m} e outra com o dobro da última.

A componente contínua pode ser, ainda, separada em outras duas parcelas. A primeira consiste no torque referente à operação síncrona da bobina, dado por C_s em (2.8). A segunda corresponde à componente de torque relativa à operação assíncrona, devido à interação do campo magnético \vec{B}_n e o momento \vec{M}_i (vide Figura 2.3). Esta característica torna-se evidente, já que esta parcela depende unicamente da corrente induzida na bobina, em módulo e ângulo. No entanto, se substituída a corrente induzida, dada por (2.18), na relação (2.22), obtém-se uma

expressão para C_0 que depende de C_s e do escorregamento s , como pode ser visto em (2.28).

$$C_0 = C_s - \frac{AERB_n}{2s \left[\left(\frac{R}{s} \right)^2 + X_L^2 \right]} = C_s + C(s) \quad (2.28)$$

Considerando, agora, que a bobina estivesse operando como gerador síncrono antes da aplicação de \vec{B}_n , C_s seria negativo. Neste caso, se s é negativo ($\omega_n > \omega_s$), o torque $C(s)$ se opõe a C_s , ou seja, tende a diminuir o torque eletromagnético total exercido sobre a bobina. Mas, se s é positivo ($\omega_n < \omega_s$), $C(s)$ está a favor de C_s e o torque total é acrescido. Para o caso do motor síncrono, um raciocínio análogo leva a uma situação oposta à apresentada para o gerador síncrono. O comportamento de $C(s)$ pode ser verificado na Figura 2.3.

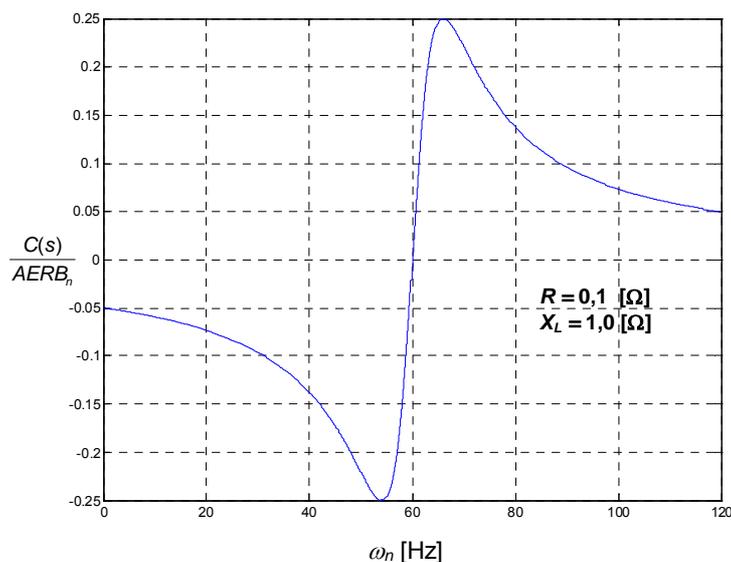


Figura 2.3 – Característica do conjugado $C(s)$ em função da frequência ω_n , para $R = 0,1$ [Ω] e $X_L = 1,0$ [Ω]

A componente $C(s\omega_s t)$, dada por (2.23), (2.25), (2.26) e (2.27), advém das interações entre \vec{B}_n e \vec{M}_s e, \vec{B}_s e \vec{M}_i , já que ambos pares apresentam escorregamento s entre si. Posteriormente, será mostrado que esta frequência desempenhará um papel importante nos estudos de RSS.

Por último, mas não menos importante, a interação entre \vec{B}_n e \vec{M}_i gera a componente $C(2s\omega_s t)$, apresentada por (2.24). Vale lembrar que esta parcela complementa o torque $C(s)$, abordado nos parágrafos anteriores, que também é fruto desta mesma interação.

Estas duas últimas componentes, apesar de não gerar trabalho, como C_0 , promovem oscilações na bobina. Durante toda esta avaliação do torque eletromagnético sobre a bobina da Figura 2.2, a frequência angular da bobina foi considerada constante, ou seja, uma bobina com inércia infinita. Mas, se a bobina apresentar uma inércia finita, a frequência ω_s passa a variar frente a qualquer perturbação no torque eletromagnético. Este comportamento será analisado em maiores detalhes na próxima seção.

2.2.3 Influência de Frequências Subsíncronas nos Sistemas Mecânicos Turbina-Gerador

Suponha, agora, que a bobina da Figura 2.2, esteja conectada a um sistema de massas J_1 e J_2 , conectadas entre si por um eixo com constante elástica k_{12} , como ilustrado na Figura 2.4.

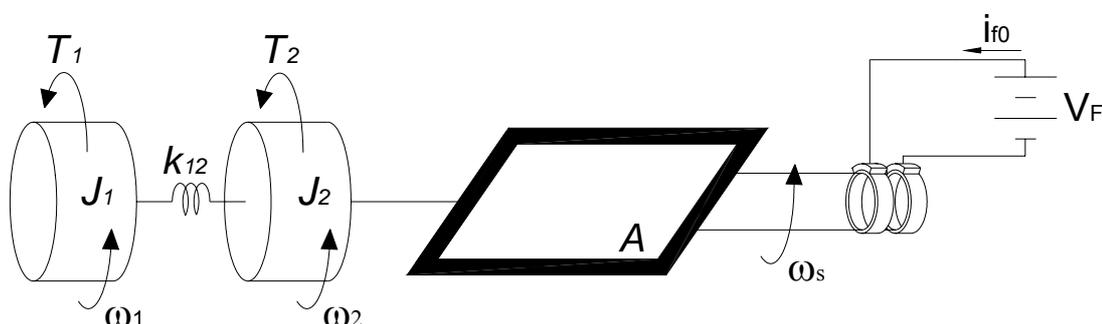


Figura 2.4 – Bobina com excitação externa acoplada a um sistema massa-mola com inércia finita

Baseando-se na lei de Newton para rotações, as equações dinâmicas para este sistema mecânico massa-mola assumem a forma denotada pelas expressões (2.29) e (2.30).

$$J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = T_1 - k_{12}(\theta_1 - \theta_2) \text{ [N.m]} \quad (2.29)$$

$$J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = T_2 - k_{12}(\theta_2 - \theta_1) \text{ [N.m]} \quad (2.30)$$

Definindo como nova variável $\theta = \theta_2 - \theta_1$, obtém-se uma única equação diferencial como apresentada em (2.31).

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dt^2} &= \frac{d^2\theta_2}{dt^2} - \frac{d^2\theta_1}{dt^2} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\left(\frac{k_{12}}{J_1} + \frac{k_{12}}{J_2}\right)\theta + \left(\frac{T_2}{J_2} - \frac{T_1}{J_1}\right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Agora, considerando apenas a resposta natural do sistema, ou seja, $T_1 = T_2 = 0$, a equação diferencial dada por (2.31) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k_{12}}{J_{eq}}\theta = 0 \quad (2.32)$$

Dado que,

$$\frac{1}{J_{eq}} = \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \quad (2.33)$$

A frequência natural deste sistema massa-mola pode ser obtida comparando-se a equação (2.32) com a equação diferencial ordinária de segunda ordem genérica, mostrada em (2.34), onde ω e ξ representam a frequência natural e constante de amortecimento associado um sistema dinâmico, respectivamente.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\omega \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0 \quad (2.34)$$

Portanto, a frequência natural ω do sistema massa-mola da Figura 2.4, é dada pela expressão (2.35).

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{12}}{J_{eq}}} \text{ [rad/s]} \quad (2.35)$$

Considere, agora, que o torque eletromagnético total C_T , calculado através da expressão (2.21), seja aplicado à massa J_2 por meio da bobina imersa nos campos magnéticos \vec{B}_s e \vec{B}_n , conforme a Figura 2.4. De acordo com a teoria de sistemas dinâmicos, se uma das duas freqüências, $(\omega_s - \omega_n)$ ou $2(\omega_s - \omega_n)$, que compõe C_T , coincidir ou forem próximas da freqüência natural ω do sistema mecânico, o sistema pode se tornar instável.

2.2.4 Análise Global

O exemplo apresentado no itens 2.2.2 e 2.2.3 preserva todas as características de um conjunto turbina-gerador, com pelo menos um modo torcional, conectado a uma rede elétrica com uma freqüência natural ω_n , como discutido no item 2.2.1. Esta freqüência ω_n pode ser fruto da interação entre as linhas de transmissão e suas compensações série ou com qualquer outro equipamento que influencie o comportamento dinâmico da rede elétrica, como sistemas de controle e FACTS.

A faixa de freqüências subsíncronas atrai maior atenção por parte dos operadores e planejadores do setor elétrico, já que as freqüências naturais dos eixos turbina-gerador costumam estar compreendidas nesta faixa. Pelo exemplo estudado anteriormente, nota-se que a freqüência natural depende fortemente da configuração do eixo e características dinâmicas como inércia e elasticidade (vide equação (2.35)). No caso de um eixo que acopla duas massas entre si verifica-se apenas uma freqüência natural ω , fato este que pode ser estendido para um eixo de n massas rotativas que apresentará $(n - 1)$ freqüências naturais ou modos torcionais.

É de extrema importância prever se alguma freqüência natural ω_n da rede irá interagir de forma adversa com o sistema mecânico turbina-gerador que possui uma freqüência natural ω de interesse. Com base no exemplo mostrado no item 2.2.2, torna-se claro que as freqüências que devem estar distantes de ω são, efetivamente,

as freqüências refletidas da rede para o rotor dos geradores pelo campo magnético. O exemplo utilizado leva em consideração campos magnéticos girantes com módulo e freqüência constantes, por isto a armadura da máquina pode ser vista como uma armadura ideal, sem dispersão, e que não sofre qualquer influência do rotor, o que não ocorre na realidade. No entanto, esta aplicação ilustra que campos girantes com freqüências diferentes da síncrona ($\omega_n \neq \omega_s$) podem induzir torques pulsantes no rotor das máquinas tanto síncronas como assíncronas. Como as rotações dos campos estão definidas no sentido anti-horário, considera-se apenas uma condição equilibrada no estator. Caso a operação seja desequilibrada, tanto componentes de seqüência positiva como negativa serão refletidas no rotor através de campos magnéticos com rotações nos sentidos horário e anti-horário. Desta forma são induzidas as freqüências $(\omega_s - \omega_n)$ e $(\omega_s + \omega_n)$ no rotor, conhecidas como complemento e suplemento da freqüência síncrona ω_s do sistema, respectivamente.

No caso das freqüências $2(\omega_s - \omega_n)$ e $2(\omega_s + \omega_n)$, que são o dobro das freqüências tratadas no parágrafo anterior, apenas a primeira tem a capacidade de excitar o conjunto mecânico turbina-gerador. Pois, se a freqüência ω_n equivaler a 50 Hz (por exemplo, para uma linha compensada em 70%), o seu complemento, por sua vez, será 10 Hz, estando, portanto, dentro da faixa de possíveis freqüências naturais dos eixos. No entanto, geralmente, a magnitude destas componentes é reduzida.

2.2.5 Mecanismos da Ressonância Subsíncrona

Nos itens anteriores foi mostrado, de uma forma ainda rudimentar, como cada parte do sistema de potência pode interagir negativamente entre si, como é o caso das freqüências naturais da rede que podem instabilizar modos torcionais mecânicos dos grupos turbina-gerador e vice-versa.

Como já mencionado, existem mecanismos fundamentais e mútuos que constituem o fenômeno da RSS: *efeito de gerador de indução, interação torcional e amplificação de torque*.

- **Efeito de gerador de indução**

O efeito de gerador de indução ocorre, já que os circuitos do rotor giram mais rápido que o campo magnético produzido por correntes subsíncronas na armadura, de acordo com a discussão do item 2.2.1. Esta característica recorda a operação de um gerador de indução. Na Figura 2.5 está representado o circuito equivalente de uma máquina de indução (ou assíncrona), onde o escorregamento s é definido como segue:

$$s = \frac{\omega_s - \omega_{rotor}}{\omega_s} \quad (2.36)$$

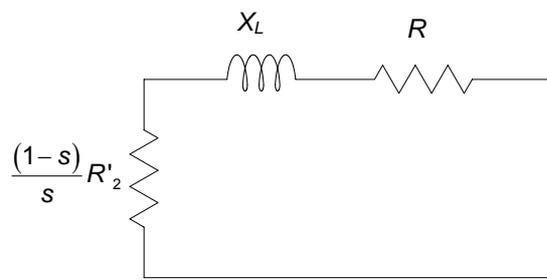


Figura 2.5 - Circuito equivalente de uma máquina assíncrona

Na presença de freqüências subsíncronas, o escorregamento s torna-se negativo e, conseqüentemente, também a resistência do rotor.

Este efeito é similar ao ocorrido nas máquinas síncronas, embora seja influenciado pela assimetria dos seus rotores. Se as máquinas síncronas fossem simétricas com relação ao seu eixo direto e em quadratura, o seu comportamento seria idêntico ao de um gerador de indução, frente a freqüências subsíncronas [KILGORE, 1971].

Por isto, sob certas condições a resistência do rotor, para uma dada corrente subsíncrona, torna-se negativa, quando vista da armadura do gerador. Se esta resistência negativa excede a soma das resistências da armadura e da rede elétrica, o sistema elétrico torna-se auto-excitado.

Como visto no item 2.2.2, o conjugado $C(s)$, ilustrado pela Figura 2.3, denota o comportamento de gerador de indução quando a máquina síncrona opera na presença de freqüências subsíncronas. Esta característica pode ser traduzida como

uma resistência negativa para o sistema, reforçando assim a idéia colocada no parágrafo anterior.

- **Interações Torcionais**

O fato dos eixos turbina-gerador serem multimodais, ou seja, apresentarem várias frequências naturais de oscilação, como mostrado no item 2.2.3, faz com que outras frequências, diferentes da síncrona, sejam refletidas na rede elétrica, por meio da modulação da tensão na armadura da máquina. Este comportamento ocorre, já que o sistema mecânico responde com todas as suas frequências naturais para mínimas perturbações.

Caso estas frequências refletidas sejam compatíveis ou próximas de alguma das frequências naturais da rede elétrica, como observado no item 2.2.1, as correntes produzidas, devido à esta modulação de tensão, induzem torques eletromagnéticos que reforçam, sobremaneira, as oscilações primeiras do rotor.

Este fenômeno origina um ciclo que, se não for interrompido, pode produzir torques pulsantes de intensa magnitude a frequência natural do sistema mecânico e, conseqüentemente, reduzir a vida útil do eixo que acopla turbina e gerador, por fadiga mecânica.

- **Amplificação de Torque**

Distúrbios elétricos impõem torques eletromagnéticos aos rotores dos geradores, sujeitando as várias seções dos eixos associados à fadiga torcional. Especialmente, em sistemas compensados por capacitores série, os torques eletromagnéticos resultantes de tais perturbações, oscilam à frequência $\omega_s - \omega_n$. Se esta frequência coincidir ou for próxima de alguma frequência natural do eixo turbina-gerador, os torques resultantes podem ser muito mais intensos do que aqueles produzidos por uma falta trifásica em um sistema sem compensação. Este fenômeno se deve à ressonância entre as frequências naturais elétricas e mecânicas. Este é o fenômeno conhecido por amplificação de torque [IEEE COMMITTEE REPORT, 1992].

2.3 MODELO PARA OS SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA

Após o entendimento dos mecanismos que promovem o fenômeno da ressonância subsíncrona, faz-se necessário estabelecer modelos adequados para o seu estudo.

A Figura 2.6 denota, em linhas gerais, como um sistema elétrico de potência é estruturado. Basicamente, o sistema é composto pelo sistema de transmissão com vários geradores elétricos acoplados. Cada gerador, por sua vez, é acionado normalmente por turbinas que transformam energia térmica ou potencial hidráulica em energia mecânica. Para que a operação deste sistema seja viável, ou seja, frequência e tensão ocorrendo dentro de certos limites, há necessidade de implementação de controladores de tensão e velocidade nos geradores e turbinas. Estes controladores compõem a conhecida regulação primária do sistema elétrico de potência. Naturalmente, como estes controladores não são capazes de restaurar plenamente a condição operativa do sistema após a ocorrência de alguma perturbação (ex. perda de carga ou falta seguida de abertura de uma linha de transmissão), o controle automático de geração (CAG), realizado nos centros de operação dos sistemas (COS), desempenha um papel importante ao tornar esta tarefa possível.

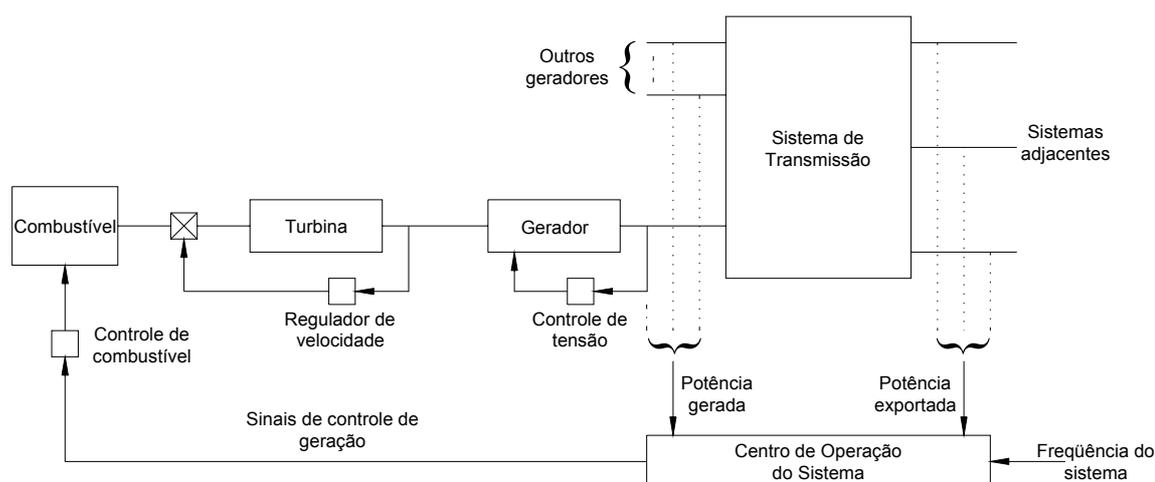


Figura 2.6 – Estrutura de um sistema elétrico de potência para análises dinâmicas

No tocante aos estudos de oscilações subsíncronas, é fundamental a análise do comportamento dinâmico das interações entre a rede elétrica e os eixos turbina-gerador. Para isto torna-se importante representar detalhadamente as turbinas, geradores e controles associados (reguladores de velocidade e tensão). Além disto, a rede elétrica deve ser representada a partir de suas equações diferenciais a parâmetros concentrados, já que o maior interesse se encontra no comportamento das baixas freqüências da rede, e não em ondas viajantes. Fogem, também, ao escopo destes estudos, fontes de energia como caldeiras e reatores nucleares, assim como o CAG e a evolução diária de carga, que apresentam fenômenos dinâmicos de muito baixas freqüências [ANDERSON, 1988].

A partir da Figura 2.7, pode-se notar que os fenômenos relacionados à ressonância subsíncrona abrangem a faixa de décimos de milésimos de segundo até aproximadamente 10 segundos. Em geral, as freqüências de oscilação de maior interesse estão compreendidas entre 10 e 50 Hz. Por esta razão, para a avaliação de oscilações subsíncronas, apenas os equipamentos que respondem nesta faixa necessitam ser modelados. As freqüências externas a esta faixa devem ser modeladas desde que interações modulem freqüências dentro da mesma. Verifica-se, ainda, que a faixa de freqüências de interesse para a ressonância subsíncrona não difere muito da faixa correspondente à estabilidade eletromecânica. Esta característica permite a utilização de muitos modelos amplamente utilizados em análises de estabilidade eletromecânica, também, em análises de oscilações subsíncronas [ANDERSON, 1988].

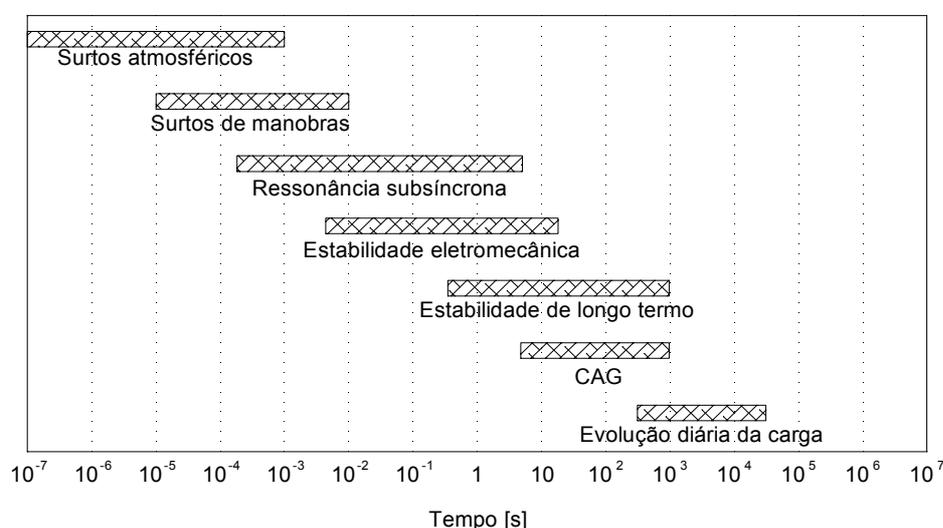


Figura 2.7 – Escala de tempo para diferentes fenômenos dinâmicos

Em suma, após a exposição das características dinâmicas dos sistemas de transmissão, geradores, eixos mecânicos e, conseqüentemente, do próprio sistema elétrico de potência, conclui-se que para estudos de ressonância subsíncrona, é essencial caracterizar:

- Gerador síncrono considerando o efeito transformador;
- Rede elétrica a partir de suas equações diferenciais a parâmetros constantes;
- Eixos turbina-gerador modelados por sistemas multimassa.

Adicionalmente, podem ser implementados quaisquer controladores, como os de tensão, velocidade e equipamentos FACTS, embora estes dependam, fortemente, de suas configurações de projeto.

Nos próximos capítulos será abordado cada tipo de modelagem em separado, para que seja viável a observação do fenômeno da ressonância subsíncrona nos sistemas elétricos de potência.

CAPÍTULO 3

MÁQUINAS SÍNCRONAS

*"Transportai um punhado de terra todos os dias e fareis uma montanha".
Confúcio (551-479 a.C.)*

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será apresentado em linhas gerais o modelo de gerador capaz de acoplar dinamicamente sistemas elétricos e mecânicos, de acordo com as necessidades do estudo de oscilações subsíncrona, discutidas no capítulo anterior.

A principal característica deste modelo é a presença do efeito transformador, o qual representa a dinâmica do campo magnético produzido na máquina síncrona. Assim, qualquer distúrbio na rede elétrica sensibiliza o referido campo magnético que, por sua vez, influencia o conjugado aplicado no rotor do gerador e vice-versa.

O modelo apresentado lança mão dos eixos perpendiculares entre si, d e q , amplamente difundidos na modelagem de máquinas rotativas. Inúmeros autores já publicaram a respeito de tal modelagem, por isto apenas serão definidas as grandezas utilizadas no modelo e a configuração do sistema referencial dq , ficando

a cargo do leitor uma pesquisa mais aprofundada das referências citadas que tratam exclusivamente deste assunto.

3.2 MODELO MATEMÁTICO DA MÁQUINA SÍNCRONA

3.2.1 Representação

Na Figura 3.1, denota-se uma máquina síncrona composta pelo seu rotor e estator. O rotor, por sua vez, é representado por dois enrolamentos no eixo direto d : um de campo (fd) e outro amortecedor (kd); e outros dois amortecedores no eixo em quadratura q (gq e kq). Ambos os eixos d e q giram à velocidade angular ω , dada em radianos elétricos, relativa a uma referência arbitrária fixa (ref.). O estator é dotado de três enrolamentos defasados entre si de 120° , que formam, conseqüentemente, as fases a, b e c.

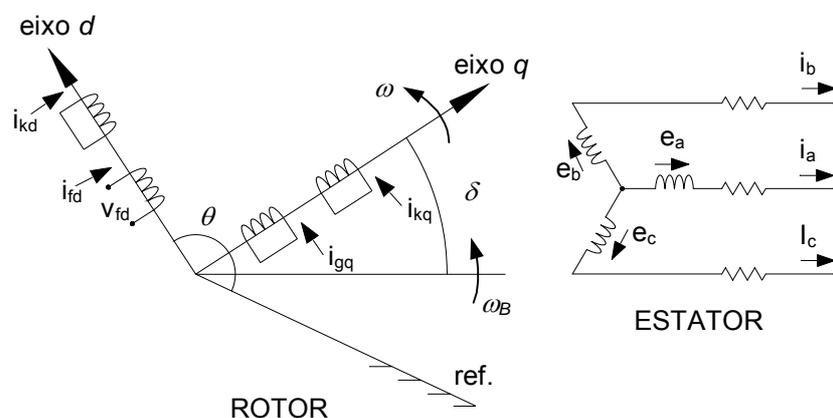


Figura 3.1 – Representação de uma máquina síncrona nos eixos d e q .

Na figura anterior, o ângulo θ define a posição angular do eixo direto d com relação à referência arbitrária fixa considerada. O ângulo δ é chamado de ângulo de carregamento ou carga da máquina e dado pelo ângulo formado entre o eixo q e uma outra referência com rotação síncrona constante, ω_B . Em regime permanente δ torna-se constante, enquanto que ω assume o mesmo valor de ω_B . A relação entre θ

e δ é dada pela equação (3.1), cuja derivada é descrita em (3.2), resultando, assim, a freqüência angular ω dos eixos d e q .

$$\theta = \omega_B t + \delta + \pi/2 \text{ [rad]} \quad (3.1)$$

$$\omega = \omega_B + \frac{d\delta}{dt} \text{ [rad/s]} \quad (3.2)$$

Como θ e ω são grandezas elétricas relacionadas ao sistema referencial dq da máquina, há a necessidade de relacioná-las com suas respectivas grandezas mecânicas, ou seja, ângulo e freqüência angular do rotor da máquina. Esta relação depende do número de pólos (p) do gerador em consideração, como apresentado a seguir.

$$\theta = \frac{p}{2} \theta_M \text{ [rad]} \quad \omega = \frac{p}{2} \omega_M \text{ [rad/s]} \quad (3.3)$$

Com relação ao número de enrolamentos amortecedores que devem ser modelados, isto depende do tipo de máquina síncrona e freqüências de interesse [KUNDUR, 1994]. No caso das máquinas de pólos salientes, comuns em usinas hidrelétricas, os circuitos amortecedores existem de fato e formam uma espécie de gaiola em torno do rotor. Devido a esta característica, apenas dois enrolamentos são necessários, isto é, um em cada eixo para a caracterização do circuito de amortecimento.

Já para as máquinas de pólos lisos, próprias para operar nas altas rotações exigidas pelas usinas termelétricas, a situação é diferente. O rotor deste tipo de máquina proporciona múltiplos caminhos para que as correntes parasitas de Foucault circulem. O efeito destas correntes pode ser exprimido a partir de enrolamentos amortecedores equivalentes nos eixos d e q , e diferenciados por seus períodos transitórios e subtransitórios de atuação [ANDERSON, 1977].

Para o caso de análise de sistemas elétricos de potência, é rara a utilização de mais de dois ou três conjuntos de enrolamentos amortecedores equivalentes para se modelar o efeito das correntes parasitas [KUNDUR, 1994; ONG, 1998]. Por esta razão e, aliando-se ao fato das termelétricas serem mais susceptíveis a RSS, será utilizada a representação de um turbogerador, como ilustrado na Figura 3.1. O

tratamento de um hidrogerador é análogo ao turbogerador, bastando retirar o enrolamento amortecedor (gq) no eixo em quadratura.

3.2.2 Equações de Tensão – Referência *abc*

A equação matricial que expressa as tensões terminais da máquina síncrona assume a forma de (2.1), de acordo com o circuito ilustrado na Figura 3.1. Nesta expressão são contabilizadas indutâncias próprias e mútuas entre os vários circuitos constituintes tanto do rotor como do estator da máquina síncrona.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{abc} \\ \mathbf{V}_R \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{abc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{abc} \\ \mathbf{I}_R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p\Lambda_{abc} \\ p\Lambda_R \end{bmatrix} [\text{V}] \quad (3.4)$$

Na equação anterior o operador p representa a derivada com relação ao tempo. Além disto tem-se,

$$\mathbf{V}_{abc} = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_{abc} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad \Lambda_{abc} = \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{V}_R = \begin{bmatrix} -V_{fd} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_R = \begin{bmatrix} i_{fd} \\ i_{kd} \\ i_{gq} \\ i_{kq} \end{bmatrix} \quad \Lambda_R = \begin{bmatrix} \lambda_{fd} \\ \lambda_{kd} \\ \lambda_{gq} \\ \lambda_{kq} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{R}_{abc} = \text{diag}(R_a, R_b, R_c) \quad \mathbf{R}_R = \text{diag}(R_{fd}, R_{kd}, R_{gq}, R_{kq}) \quad (3.7)$$

Enquanto que a relação entre os fluxos enlaçados, Λ_{abc} e Λ_R , e as correntes da máquina, \mathbf{I}_{abc} e \mathbf{I}_R , é dada através da uma matriz de indutâncias, como pode ser verificado na equação abaixo.

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{abc} \\ \Lambda_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{aa} & \mathbf{L}_{aR} \\ \mathbf{L}_{aR}^t & \mathbf{L}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{abc} \\ \mathbf{I}_R \end{bmatrix} [\text{Wb}] \quad (3.8)$$

onde a matriz de indutâncias é expressa através de suas submatrizes L_{aa} , L_{aR} e L_R , dadas na seqüência.

$$L_{aa} = \begin{bmatrix} l_{aa} & l_{ab} & l_{ac} \\ l_{ba} & l_{bb} & l_{bc} \\ l_{ca} & l_{cb} & l_{cc} \end{bmatrix} \quad L_{aR} = \begin{bmatrix} l_{afd} & l_{akd} & l_{agq} & l_{akq} \\ l_{bfd} & l_{bkd} & l_{bgq} & l_{bkq} \\ l_{cfd} & l_{ckd} & l_{cgq} & l_{ckq} \end{bmatrix} \quad L_R = \begin{bmatrix} L_{fd} & L_{fkd} & 0 & 0 \\ L_{fkd} & L_{kd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{gq} & L_{gkq} \\ 0 & 0 & L_{gkq} & L_{kq} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Nas relações denotadas em (3.9) as indutâncias definidas por letras minúsculas variam com a posição do rotor, ou seja, dependem do ângulo θ , ao passo que as indutâncias definidas através de letras maiúsculas representam grandezas constantes. O Quadro 3.1, a seguir, estabelece como cada uma das indutâncias variáveis da máquina síncrona se comportam com relação à posição do eixo direto d da máquina, considerando a referência arbitrária coincidente com o eixo magnético da fase a do estator [ANDERSON, 1977; ONG, 1998].

Quadro 3.1 – Indutâncias da máquina síncrona representada na Figura 3.1 [ANDERSON, 1977; ONG, 1998]

Indutâncias do Estator	
Próprias	Mútuas
$l_{aa} = L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2\theta$ $l_{bb} = L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2(\theta - 2\pi/3)$ [H] $l_{cc} = L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2(\theta + 2\pi/3)$	$l_{ab} = l_{ba} = -L_{ab0} - L_{aa2} \cos 2(\theta + \pi/6)$ $l_{bc} = l_{cb} = -L_{ab0} - L_{aa2} \cos 2(\theta - \pi/2)$ [H] $l_{ca} = l_{ac} = -L_{ab0} - L_{aa2} \cos 2(\theta + 5\pi/6)$
Indutâncias do Rotor	
Próprias	Mútuas
L_{fd} [H] (enrolamento de campo) L_{gq}, L_{kd} e L_{kq} [H] (enrolamentos amortecedores)	L_{fkd} [H] (entre os enrolamentos em d) L_{gkq} [H] (entre os enrolamentos em q)

Obs: Continuação na próxima página.

Continuação – Indutâncias da máquina síncrona representada na Figura 3.1
[ANDERSON, 1977; ONG, 1998]

Indutâncias Mútuas entre Estator e Rotor	
Estator - Campo fd	Estator - Amortecedor kd
$I_{afd} = L_{afd} \cos \theta$ $I_{bfd} = L_{afd} \cos(\theta - 2\pi/3) \text{ [H]}$ $I_{cfd} = L_{afd} \cos(\theta + 2\pi/3)$	$I_{akd} = L_{akd} \cos \theta$ $I_{bkd} = L_{akd} \cos(\theta - 2\pi/3) \text{ [H]}$ $I_{ckd} = L_{akd} \cos(\theta + 2\pi/3)$
Estator - Amortecedor gq	Estator - Amortecedor kq
$I_{agq} = L_{agq} \cos \theta$ $I_{bgq} = L_{agq} \cos(\theta - 2\pi/3) \text{ [H]}$ $I_{cgq} = L_{agq} \cos(\theta + 2\pi/3)$	$I_{akq} = L_{akq} \cos \theta$ $I_{bkq} = L_{akq} \cos(\theta - 2\pi/3) \text{ [H]}$ $I_{ckq} = L_{akq} \cos(\theta + 2\pi/3)$

3.2.3 Transformação de Park

O fato da máquina síncrona apresentar indutâncias que variam com a posição do rotor leva à obtenção de um sistema de equações diferenciais a parâmetros variáveis no tempo, dificultando, sobremaneira, a solução e análises recorrentes. Uma forma amplamente difundida de contornar esta complicação é o emprego da transformação ortogonal de Park \mathbf{P} , definida pela equação (3.10) [Park, 1929 e 1933]. Esta transformação resulta na projeção das grandezas (seja tensões, corrente ou fluxos), dadas na referência abc do estator, sobre os eixos dq . Adicionalmente, é acrescido à formulação um terceiro eixo, chamado 0, o qual representa uma porção estacionária, proporcional às grandezas de seqüência zero.

$$\mathbf{P} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \theta & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ \sin \theta & \sin(\theta - 2\pi/3) & \sin(\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Verifica-se que $\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^{-1}$, caracterizando a ortogonalidade desta transformação.

Portanto, por definição,

$$\Lambda_{0dq} = \mathbf{P}\Lambda_{abc} \quad \text{ou} \quad \Lambda_{abc} = \mathbf{P}^{-1}\Lambda_{0dq} \quad (3.11)$$

$$\Lambda_{0dq} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_d \\ \lambda_q \end{bmatrix} [\text{Wb}] \quad (3.12)$$

onde, Λ_{0dq} é o vetor que contém as projeções de Λ_{abc} sobre os eixos $0dq$. O mesmo raciocínio pode ser empregado tanto para correntes como tensões.

Uma nova e importante relação é obtida derivando-se ambos os lados da expressão (3.11). Esta derivada consiste no conhecido *efeito transformador* da máquina síncrona, mostrado em (3.13).

$$p\Lambda_{0dq} = \mathbf{P}(p\Lambda_{abc}) + (p\mathbf{P})\mathbf{P}^{-1}\Lambda_{0dq} \quad (3.13)$$

Define-se, então, à partir de (3.13), o vetor \mathbf{V}_ω que contém as conhecidas *tensões macionais* da máquina síncrona, $-\omega\lambda_q$ e $\omega\lambda_d$.

$$\mathbf{V}_\omega = (p\mathbf{P})\mathbf{P}^{-1}\Lambda_{0dq} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega\lambda_q \\ \omega\lambda_d \end{bmatrix} = \omega\mathbf{K}\Lambda_{0dq} [\text{V}] \quad (3.14)$$

onde,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Como, em análises de sistemas de potência, as grandezas são usualmente referidas ao estator e dadas em valores eficazes, torna-se interessante a obtenção de uma relação entre as intensidades referidas ao rotor e estator. Considere, então, uma grandeza senoidal qualquer referida ao estator, equilibrada, com valor eficaz A e uma fase α , como em (3.16).

$$\mathbf{A}_{abc} = \sqrt{2} A \begin{bmatrix} \text{sen}(\omega_B t + \alpha) \\ \text{sen}(\omega_B t - 2\pi/3 + \alpha) \\ \text{sen}(\omega_B t + 2\pi/3 + \alpha) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Quando \mathbf{A}_{abc} é referido ao rotor através da transformação de Park \mathbf{P} com ângulo δ nulo, por exemplo, obtém-se a expressão (3.17).

$$\mathbf{A}_{0dq} = \mathbf{P}\mathbf{A}_{abc} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_d \\ a_q \end{bmatrix} = \sqrt{3} A \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos \alpha \\ \text{sen} \alpha \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

O resultado é o vetor \mathbf{A}_{0dq} que gira com o sistema referencial dq e conserva seu módulo constante dado pela expressão a seguir.

$$a = \sqrt{a_d^2 + a_q^2} = \sqrt{3} A \quad (3.18)$$

A expressão (3.18) é justamente a relação entre as grandezas contínuas de pico referidas ao rotor com os valores eficazes do estator.

3.2.4 Equações de Tensão – Referência $0dq$

Define-se, agora, a transformação \mathbf{T}_V , dada a seguir, a qual se resume a uma matriz bloco-diagonal que contém a transformação de Park \mathbf{P} e uma matriz identidade de dimensão 4, denotada por \mathbf{U}_4 .

$$\mathbf{T}_V = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_4 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Então, multiplica-se, pela esquerda, ambos os lados da equação (2.1) pela transformação \mathbf{T}_V , que, considerando as relações dadas em (3.11), resulta na expressão (3.20).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{0dq} \\ \mathbf{V}_R \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{R}_{abc}\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{0dq} \\ \mathbf{I}_R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{P}(\rho\Lambda_{abc}) \\ \rho\Lambda_R \end{bmatrix} \quad [\text{V}] \quad (3.20)$$

Analisando (3.20), primeiramente conclui-se que, se $R_a=R_b=R_c$, a expressão (3.21), a seguir, é verdadeira.

$$\mathbf{P}\mathbf{R}_{abc}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{R}_{abc} \quad (3.21)$$

Segundo, a parcela $\mathbf{P}(\rho\Lambda_{abc})$ pode ser expressa a partir das relações (3.13) e (3.14), resultando (3.22).

$$\mathbf{P}(\rho\Lambda_{abc}) = \rho\Lambda_{0dq} - \mathbf{V}_\omega \quad (3.22)$$

Substituindo (3.21) e (3.22) em (3.20) vem,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{0dq} \\ \mathbf{V}_R \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{abc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{0dq} \\ \mathbf{I}_R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho\Lambda_{0dq} \\ \rho\Lambda_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_\omega \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [\text{V}] \quad (3.23)$$

Nota-se que a equação (3.23) apresenta apenas grandezas na referência $0dq$, além do termo adicional que depende das tensões mocionais \mathbf{V}_ω .

Agora, resta apenas encontrar a relação entre fluxos enlaçados e correntes da máquina no referencial $0dq$. Para esta tarefa, basta aplicar a transformação \mathbf{T}_V , dada em (3.19), na expressão (3.8), resultando (3.24).

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{0dq} \\ \Lambda_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{L}_{aa}\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{P}\mathbf{L}_{aR} \\ \mathbf{L}_{aR}^t\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{L}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{0dq} \\ \mathbf{I}_R \end{bmatrix} \quad [\text{Wb}] \quad (3.24)$$

Lembrando-se que a transformação de Park é ortogonal e a constante $k = \sqrt{3/2}$, tem-se,

$$\mathbf{L}_S = \mathbf{P}\mathbf{L}_{aa}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} L_0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 \\ 0 & 0 & L_q \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} L_0 = L_{aa0} - 2L_{ab0} \\ L_d = L_{aa0} + L_{ab0} + k^2 L_{aa2} \\ L_q = L_{aa0} + L_{ab0} - k^2 L_{aa2} \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{L}_M = \mathbf{P}\mathbf{L}_{aR} = \left(\mathbf{L}_{aR}^t \mathbf{P}^{-1}\right)^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ kL_{afd} & kL_{akd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & kL_{agq} & kL_{akq} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Assim, a equação (3.24) pode ser reescrita como apresentado em (3.27).

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{0dq} \\ \Lambda_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_S & \mathbf{L}_M \\ \mathbf{L}_M^t & \mathbf{L}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{0dq} \\ \mathbf{I}_R \end{bmatrix} \quad [\text{Wb}] \quad (3.27)$$

A principal característica da equação (3.27) é que todas as suas indutâncias são constantes e, portanto, independentes do tempo. Sendo assim, a equação (3.27) pode ser facilmente substituída em (3.23), resultando um sistema de equações diferenciais a parâmetros constantes cujas variáveis de estado se resumem nas correntes estáticas e rotóricas da máquina, referidas ao rotor da máquina. Este novo sistema é denotado pela expressão (3.28).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{0dq} \\ \mathbf{V}_R \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{abc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{0dq} \\ \mathbf{I}_R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_S & \mathbf{L}_M \\ \mathbf{L}_M^t & \mathbf{L}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p\mathbf{I}_{0dq} \\ p\mathbf{I}_R \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} \mathbf{W}_S & \mathbf{W}_M \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{0dq} \\ \mathbf{I}_R \end{bmatrix} \quad [\text{V}] \quad (3.28)$$

e,

$$\mathbf{W}_S = \mathbf{K}\mathbf{L}_S \quad \text{e} \quad \mathbf{W}_M = \mathbf{K}\mathbf{L}_M \quad (3.29)$$

Adicionalmente, verifica-se que a equação (3.28) pode descrever tanto valores eficazes referidos ao estator como grandezas contínuas do rotor, tendo-se sempre em vista a relação entre suas intensidades, dada por (3.18).

3.2.5 Normalização das Equações de Tensão e Fluxo Enlaçado

Como de praxe é feito em análise de sistemas de potência, proceder-se-á, agora com a conversão p.u., isto é, a normalização das equações apresentadas até o momento.

Primeiramente, antes da normalização propriamente dita, grandezas base devem ser escolhidas apropriadamente. Uma possível escolha de bases está disposta no Quadro 3.2, a qual será utilizada deste ponto em diante. Com relação aos enrolamentos do rotor, as bases devem ser calculadas a partir daquelas escolhidas para o estator. Os símbolos para as bases do rotor serão análogos aos utilizados para o estator, a menos do subscrito que identificará o enrolamento (fd, kd, gq e kq).

Quadro 3.2 – Grandezas base para a normalização das equações do estator da máquina síncrona

Descrição	Símbolo	Unidade
Potência aparente por fase	$S_{\phi B}$	[VA]
Tensão fase-neutro	V_B	[V]
Corrente por fase	$I_B = \frac{S_{\phi B}}{V_B}$	[A]
Freqüência angular síncrona	ω_B	[rad/s]
Tempo	$t_B = \frac{1}{\omega_B}$	[s]
Impedância	$Z_B = \frac{V_B}{I_B}$	[Ω]
Indutância	$L_B = \frac{Z_B}{\omega_B}$	[H]
Fluxo enlaçado	$\lambda_B = \frac{V_B}{\omega_B} = L_B I_B$	Wb

Obs: Tanto a base de freqüência angular como a base de tempo serão os mesmos para todos os enrolamentos.

- **Equações de tensão do estator**

A partir da equação (3.23) pode-se extrair a seguinte relação matricial para as tensões terminais da máquina na referência $0dq$.

$$\mathbf{V}_{0dq} = -\mathbf{R}_{abc} \mathbf{I}_{0dq} - p\Lambda_{0dq} + \mathbf{V}_{\omega} \quad [V] \quad (3.30)$$

Dividindo-se a equação (3.30) por V_B e recordando as relações apresentadas no quadro anterior, obtém-se:

$$\mathbf{V}_{0dq}^{pu} = -\mathbf{R}_{abc}^{pu} \mathbf{I}_{0dq}^{pu} - p^{pu} \mathbf{\Lambda}_{0dq}^{pu} + \mathbf{V}_{\omega}^{pu} \text{ [pu]} \quad (3.31)$$

sendo $p^{pu} = \frac{p}{\omega_B} = t_B p$.

- **Equações de tensão do rotor**

Ainda a partir da equação (3.23) pode ser explicitada a relação (3.32), que descreve a tensão aplicada no enrolamento de campo.

$$v_{fd} = R_{fd} i_{fd} + p \lambda_{fd} \text{ [V]} \quad (3.32)$$

Dividindo-se, então, a equação (3.32) por V_{fdB} , resulta a expressão seguinte.

$$v_{fd}^{pu} = R_{fd}^{pu} i_{fd}^{pu} + p^{pu} \lambda_{fd}^{pu} \text{ [pu]} \quad (3.33)$$

E, de forma análoga, utilizando as bases V_{kdB} , V_{gqB} e V_{kqB} , respectivamente, tem-se:

$$\begin{aligned} v_{kd}^{pu} = 0 &= R_{kd}^{pu} i_{kd}^{pu} + p^{pu} \lambda_{kd}^{pu} \\ v_{gq}^{pu} = 0 &= R_{gq}^{pu} i_{gq}^{pu} + p^{pu} \lambda_{gq}^{pu} \text{ [pu]} \\ v_{kq}^{pu} = 0 &= R_{kq}^{pu} i_{kq}^{pu} + p^{pu} \lambda_{kq}^{pu} \end{aligned} \quad (3.34)$$

- **Equações de fluxo enlaçado**

A normalização da expressão que relaciona os fluxos enlaçados e correntes da máquina pode ser executada explicitando-se a equação (3.27). Nesta altura, deve-se ter em mente as seguintes considerações:

1. Cada enrolamento do rotor possui bases distintas entre si;
2. A indutância mútua entre dois enrolamentos quaisquer deve ser sempre igual, independentemente do enrolamento tomado como referência;

3. As indutâncias mútuas entre os enrolamentos sobre um mesmo eixo (d ou q) devem ser idênticas.

Respeitando a primeira consideração, a equação (3.27) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0^{pu} \\ \lambda_d^{pu} \\ \lambda_q^{pu} \\ \lambda_{fd}^{pu} \\ \lambda_{kd}^{pu} \\ \lambda_{gq}^{pu} \\ \lambda_{kq}^{pu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0^{pu} & & & & & & \\ & L_d^{pu} & & & & & \\ & & L_q^{pu} & & & & \\ \hline & L_{afd}^{pu} & & & & & \\ & & L_{afd}^{pu} & & & & \\ & L_{akd}^{pu} & & & & & \\ \hline & & & L_{fd}^{pu} & & & \\ & & & L_{fkd}^{pu} & & & \\ & & & L_{fkd}^{pu} & L_{kd}^{pu} & & \\ & & & & L_{kd}^{pu} & & \\ & & & & & L_{gq}^{pu} & L_{gkq}^{pu} \\ & & & & & L_{gkq}^{pu} & L_{kq}^{pu} \\ & & & & & & L_{akq}^{pu} & L_{kq}^{pu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0^{pu} \\ i_d^{pu} \\ i_q^{pu} \\ i_{fd}^{pu} \\ i_{kd}^{pu} \\ i_{gq}^{pu} \\ i_{kq}^{pu} \end{bmatrix} \quad [pu] \quad (3.35)$$

onde as indutâncias mútuas estão definidas a seguir.

$$\begin{aligned} L_{afd}^{pu} &= \frac{KL_{afd}I_{fdB}}{L_B I_B} = \frac{KL_{afd}I_B}{L_{fdB}I_{fdB}} & L_{akd}^{pu} &= \frac{KL_{akd}I_{kdB}}{L_B I_B} = \frac{KL_{akd}I_B}{L_{kdB}I_{kdB}} \\ L_{agq}^{pu} &= \frac{KL_{agq}I_{gqB}}{L_B I_B} = \frac{KL_{agq}I_B}{L_{gqB}I_{gqB}} & L_{akq}^{pu} &= \frac{KL_{akq}I_{kqB}}{L_B I_B} = \frac{KL_{akq}I_B}{L_{kqB}I_{kqB}} \\ L_{fkd}^{pu} &= \frac{L_{fkd}I_{kdB}}{L_{fdB}I_{fdB}} = \frac{L_{fkd}I_{fdB}}{L_{kdB}I_{kdB}} & L_{qkq}^{pu} &= \frac{L_{gkq}I_{kqB}}{L_{gqB}I_{gqB}} = \frac{L_{gkq}I_{gqB}}{L_{kqB}I_{kqB}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

A partir do conjunto de indutâncias definidas em (3.36), as relações entre as bases dos vários enrolamentos do rotor e do estator podem ser encontradas, de forma que a segunda consideração exposta seja cumprida. Assim,

$$V_{fdB}I_{fdB} = V_{kdB}I_{kdB} = V_{gqB}I_{gqB} = V_{kqB}I_{kqB} = V_B I_B = S_{\phi B} \quad (3.37)$$

Ou seja, a base de potência é a mesma para todos os enrolamentos referidos ao rotor e idêntica à potência aparente base por fase da máquina síncrona.

Já a terceira consideração pode ser satisfeita igualando-se as indutâncias mútuas entre os enrolamentos, que estão sobre um mesmo eixo, a uma indutância comum.

Estas indutâncias comuns são conhecidas como *indutâncias de magnetização* L_{ad} , para o eixo d , e L_{aq} , para o eixo q . Os seus valores são deduzidos subtraindo-se a indutância de dispersão da armadura, L_L , das indutâncias L_d e L_q , associadas ao estator. Em suma,

$$L_{afd}^{pu} = L_{akd}^{pu} = L_{fkd}^{pu} = L_{ad}^{pu} = \frac{L_{ad}}{L_B} = \frac{L_d - L_L}{L_B} \quad (3.38)$$

$$L_{agq}^{pu} = L_{akq}^{pu} = L_{gkq}^{pu} = L_{aq}^{pu} = \frac{L_{aq}}{L_B} = \frac{L_q - L_L}{L_B} \quad (3.39)$$

Juntamente com as relações dadas em (3.36), as igualdades (3.38) e (3.39) completam, através das equações de (3.40) a (3.43), a definição das bases de todos os enrolamentos considerados no modelo. Nota-se que a potência base para cada enrolamento individual continua sendo $S_{\phi B}$.

$$\frac{I_B}{I_{fdB}} = \frac{V_{fdB}}{V_B} = \frac{L_{ad}}{kL_{afd}} \triangleq \frac{1}{k_F} \quad (3.40)$$

$$\frac{I_B}{I_{kdB}} = \frac{V_{kdB}}{V_B} = \frac{L_{ad}}{kL_{akd}} \triangleq \frac{1}{k_D} \quad (3.41)$$

$$\frac{I_B}{I_{gqB}} = \frac{V_{gqB}}{V_B} = \frac{L_{aq}}{kL_{agq}} \triangleq \frac{1}{k_G} \quad (3.42)$$

$$\frac{I_B}{I_{kqB}} = \frac{V_{kqB}}{V_B} = \frac{L_{aq}}{kL_{akq}} \triangleq \frac{1}{k_Q} \quad (3.43)$$

A constante k_F , definida em (3.40), exprime a relação de transformação do circuito de campo para o estator da máquina, cujo valor é obtido a partir do ensaio em vazio da máquina síncrona [ANDERSON, 1977].

Portanto, a equação (3.35) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0^{pu} \\ \lambda_d^{pu} \\ \lambda_q^{pu} \\ \lambda_{fd}^{pu} \\ \lambda_{kd}^{pu} \\ \lambda_{gq}^{pu} \\ \lambda_{kq}^{pu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0^{pu} & & & & & & \\ & L_d^{pu} & & & & & \\ & & L_q^{pu} & & & & \\ & & & L_{ad}^{pu} & L_{ad}^{pu} & & \\ & & & & & L_{aq}^{pu} & L_{aq}^{pu} \\ L_{ad}^{pu} & & & L_{fd}^{pu} & L_{ad}^{pu} & & \\ L_{ad}^{pu} & & & & & L_{ad}^{pu} & L_{kd}^{pu} \\ & & & & & L_{aq}^{pu} & \\ & & & & & & L_{gq}^{pu} & L_{aq}^{pu} \\ & & & & & & & L_{aq}^{pu} & L_{aq}^{pu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0^{pu} \\ i_d^{pu} \\ i_q^{pu} \\ i_{fd}^{pu} \\ i_{kd}^{pu} \\ i_{gq}^{pu} \\ i_{kq}^{pu} \end{bmatrix} \quad [\text{pu}] \quad (3.44)$$

Ou, matricialmente,

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{0dq}^{pu} \\ \Lambda_R^{pu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_S^{pu} & L_M^{pu} \\ (L_M^{pu})^t & L_R^{pu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{0dq}^{pu} \\ I_R^{pu} \end{bmatrix} \quad [\text{pu}] \quad (3.45)$$

3.2.6 Equações Normalizadas de Tensão

Agrupando as equações (3.31), (3.33) e (3.34), obtém-se a expressão matricial normalizada para as tensões nos vários circuitos da máquina síncrona. Nota-se que, como todas as grandezas são dadas por unidade, o sobrescrito *pu* será retirado das equações deste ponto em diante.

$$\begin{bmatrix} V_{0dq} \\ V_R \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{abc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{0dq} \\ I_R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho \Lambda_{0dq} \\ \rho \Lambda_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_\omega \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [\text{pu}] \quad (3.46)$$

Ou, de outra forma, substituindo as tensões mocionais por (3.14) e os fluxos enlaçados por (3.45), resulta equação (3.47).

$$\begin{bmatrix} V_{0dq} \\ V_R \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{abc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{0dq} \\ I_R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_S & L_M \\ L_M^t & L_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho I_{0dq} \\ \rho I_R \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} W_S & W_M \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{0dq} \\ I_R \end{bmatrix} \quad [\text{pu}] \quad (3.47)$$

E, caso não seja de interesse a avaliação de redes desequilibradas, não há necessidade de manter as variáveis que repousam sobre o eixo 0. Assim sendo, a equação (3.47) pode ser reescrita considerando apenas variáveis projetadas nos

eixos d e q , ou seja eliminando-se linhas e colunas correspondentes a grandezas no eixo 0 em todas as matrizes definidas até o momento. Assim, resulta a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{dq} \\ \mathbf{V}_R \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{dq} \\ \mathbf{I}_R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_S & \mathbf{L}_M \\ \mathbf{L}_M^t & \mathbf{L}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \mathbf{I}_{dq} \\ \rho \mathbf{I}_R \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} \mathbf{W}_S & \mathbf{W}_M \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{dq} \\ \mathbf{I}_R \end{bmatrix} \quad [\text{pu}] \quad (3.48)$$

Estas últimas equações, (3.47) e (3.48), tem extrema importância em estudos de fenômenos eletromagnéticos e oscilações subsíncronas, já que estas modelam toda a dinâmica dos circuitos do estator, do rotor e a interação magnética entre eles. No entanto, como o interesse das avaliações subseqüentes está nas condições equilibradas dos sistemas, apenas a forma denotada por (3.48) será utilizada deste ponto em diante.

3.2.7 Torque Eletromagnético

O torque eletromagnético é exercido pela armadura no rotor da máquina síncrona e equilibrado por um torque mecânico produzido por uma fonte primária de energia, por exemplo, uma turbina. Ele pode ser obtido através da parcela de potência que efetivamente atravessa o entreferro da máquina, gerando, conseqüentemente, trabalho. Sabe-se, portanto, que a potência gerada por uma máquina é dada pela soma das potências que flui em cada fase, ou seja:

$$p(t) = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c \quad [\text{W}] \quad (3.49)$$

Escrevendo a equação (3.49) por meio dos vetores \mathbf{V}_{abc} e \mathbf{I}_{abc} , anteriormente apresentados em (3.5), tem-se:

$$p(t) = \mathbf{V}_{abc}^t \mathbf{I}_{abc} \quad [\text{W}] \quad (3.50)$$

Referindo tanto \mathbf{V}_{abc} como \mathbf{I}_{abc} , na equação (3.50), para o sistema $0dq$, utilizando-se da transformada de Park \mathbf{P} , obtém-se a seguinte equação:

$$p(t) = (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{V}_{0dq})^t (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{I}_{0dq}) = \mathbf{V}_{0dq}^t (\mathbf{P} \mathbf{P}^{-1}) \mathbf{I}_{0dq} = \mathbf{V}_{0dq}^t \mathbf{I}_{0dq} \quad [\text{W}] \quad (3.51)$$

Comparando-se as expressões (3.50) e (3.51), fica clara mais uma importante característica da transformada ortogonal de Park que se mostra invariante em potência, isto é, a potência, seja na referência *abc* ou na *0dq*, é a mesma.

Finalmente, ao substituir \mathbf{V}_{0dq} , dado em (3.46), na equação (3.51) e, agrupar os termos apropriadamente, o resultado aparece na forma da seguinte equação:

$$p(t) = -R_a(i_o^2 + i_d^2 + i_q^2) - (i_o \frac{d\lambda_o}{dt} + i_d \frac{d\lambda_d}{dt} + i_q \frac{d\lambda_q}{dt}) + \omega(\lambda_d i_q - \lambda_q i_d) \quad [\text{W}] \quad (3.52)$$

Os três termos da expressão (3.52) podem ser identificados como perdas ôhmicas no estator, taxa de variação da energia magnética do campo e potência transferida através do entreferro. Assim, sendo, o torque eletromagnético exercido sobre o rotor pelo estator pode ser expresso como em (3.53).

$$T_E = \frac{P_E}{\omega_M} = \frac{\omega}{\omega_M} (\lambda_d i_q - \lambda_q i_d) = \frac{\mathbf{p}}{2} (\lambda_d i_q - \lambda_q i_d) \quad [\text{N.m}] \quad (3.53)$$

A constante \mathbf{p} representa o número de pólos da máquina em questão, de acordo com (3.3).

Para normalizar o torque elétrico calculado anteriormente divide-se a equação (3.53) pelo torque base, como mostrado a seguir.

$$T_B = \frac{3S_{\phi B}}{\omega_{MB}} = \frac{3\omega_B \lambda_B I_B}{\omega_{MB}} \quad [\text{N.m}] \quad (3.54)$$

$$T_E^{pu} = \frac{T_E}{T_B} = \frac{\omega_{MB}}{3\omega_B \lambda_B I_B} \frac{\mathbf{p}}{2} (\lambda_d i_q - \lambda_q i_d) = \frac{1}{3} (\lambda_d^{pu} i_q^{pu} - \lambda_q^{pu} i_d^{pu}) \quad [\text{pu}] \quad (3.55)$$

sendo ω_{MB} a freqüência angular base do rotor e, portanto, $\omega_B = \frac{\mathbf{p}}{2} \omega_{MB}$.

Deve-se ressaltar que as intensidades de fluxo enlaçado e corrente estão referidas ao rotor. Para referi-las ao estator, basta aplicar a relação (3.18) para obter a

equação (3.56), onde fluxos enlaçados e correntes foram trocados por letras maiúsculas para não haver confusão com a notação utilizada até agora.

$$T_E = \mathcal{A}_d^{pu} I_q^{pu} - \mathcal{A}_q^{pu} I_d^{pu} \text{ [pu]} \quad (3.56)$$

Ou, matricialmente, reescrevendo-se (3.56) com o auxílio da expressão (3.45).

$$T_E = (\mathbf{I}_{dq})^t \mathbf{W}_S \mathbf{I}_{dq} + (\mathbf{I}_{dq})^t \mathbf{W}_M \mathbf{I}_R \text{ [pu]} \quad (3.57)$$

3.2.8 Parâmetros da Máquina Síncrona

Durante toda a modelagem discutida até agora, foi utilizada uma série de parâmetros, como resistências e indutâncias próprias e mútuas dos vários circuitos constituintes da máquina. Só que estes dados não são fornecidos diretamente pelos fabricantes. Os parâmetros disponibilizados pelos fabricantes são obtidos a partir de medições realizadas na armadura da máquina e, consiste num conjunto de indutâncias e constantes de tempo.

Estes parâmetros padronizados são subdivididos de acordo com seus tempos de atuação ao longo de um período transitório. A priori, um período transitório se divide nos regimes *subtransitório*, *transitório* e *síncrono*. Os parâmetros *subtransitórios* são aqueles que influenciam as componentes transitórias que decaem rapidamente, após alguns ciclos apenas. Já os parâmetros *transitórios* influenciam componentes mais lentas que duram na ordem de segundos. E, por fim, os parâmetros *síncronos* que estão associados a componentes oscilatórias sustentadas, ou seja, ao regime permanente das máquinas [ANDERSON, 1977; KUNDUR, 1994; ONG, 1998].

O quadro a seguir apresenta um resumo dos parâmetros padronizados pelos fabricantes e suas relações com os parâmetros utilizados durante a modelagem da máquina síncrona. Serão apresentados apenas os parâmetros associados ao eixo direto d , já que expressões análogas são utilizadas para o eixo em quadratura q ,

com exceção da resistência de armadura R_a e da indutância de dispersão L_L , que são idênticas para ambos os eixos.

Quadro 3.3 – Parâmetros padronizados da máquina síncrona para o eixo direto

Definição	Expressão
Resistência da armadura	R_a
Indutância de dispersão de armadura	L_L
Indutância síncrona	$L_d = L_L + L_{ad}$
Indutância transitória	$L'_d = L_d - \frac{L_{ad}^2}{L_{fd}}$
Constante de tempo transitória de circuito aberto	$T'_{do} = \frac{L_{fd}}{\omega_B R_{fd}} \text{ [s]}$
Constante de tempo transitória de curto circuito	$T'_d = \frac{L'_d}{L_d} T'_{do} \text{ [s]}$
Indutância subtransitória	$L''_d = L_d - \frac{L_{ad}(L_{fd} + L_{kd} - 2L_{ad})}{L_{fd}L_{kd} - L_{ad}}$
Constante de tempo subtransitória de circuito aberto	$T''_{do} = \frac{L_{fd}L_{kd} - L_{ad}^2}{\omega_B R_{kd}} \text{ [s]}$
Constante de tempo subtransitória de curto-circuito	$T''_d = \frac{L''_d}{L'_d} T''_{do} \text{ [s]}$

Obs: Para os parâmetros do eixo em quadratura, troca-se d por q em todas as equações, menos para o enrolamento de campo fd que deve ser trocado por gq .

A partir das equações mostradas, acima, calcula-se os parâmetros empregados na modelagem apresentada nos itens anteriores. Os resultados estão apresentados a seguir.

$$L_{ad} = L_d - L_L \quad (3.58)$$

$$L_{aq} = L_q - L_L \quad (3.59)$$

$$L_{fd} = \frac{L_{ad}^2}{L_d - L'_d} \quad (3.60)$$

$$L_{gq} = \frac{L_{aq}^2}{L_q - L'_q} \quad (3.61)$$

$$L_{kd} = \frac{L_{ad}(L_d + L_{fd} - L''_d - 2L_{ad})}{L_{fd}(L_d - L''_d) - L_{ad}} \quad (3.62)$$

$$L_{kq} = \frac{L_{aq}(L_q + L_{gq} - L''_q - 2L_{aq})}{L_{gq}(L_q - L''_q) - L_{aq}} \quad (3.63)$$

$$R_{fd} = \frac{L_{fd}}{\omega_B T'_{do}} \quad (3.64)$$

$$R_{gq} = \frac{L_{gq}}{\omega_B T'_{qo}} \quad (3.65)$$

$$R_{kd} = \frac{L_{fd}L_{kd} - L_{ad}^2}{\omega_B T''_{do}} \quad (3.66)$$

$$R_{kq} = \frac{L_{gq}L_{kq} - L_{aq}^2}{\omega_B T''_{qo}} \quad (3.67)$$

3.3 SISTEMA MULTIMÁQUINAS

Na prática, os sistemas elétricos de potência são compostos por vários geradores conectados entre si, através de um sistema de transmissão. Desta forma, estudos que têm como foco tais sistemas, devem representá-los segundo uma mesma referência, que posteriormente, deve ser estendida para o sistema de transmissão. Esta necessidade pode ser explicada tomando-se como exemplo o sistema esquematizado pela Figura 3.2, que ilustra n geradores conectados a um sistema de transmissão qualquer.

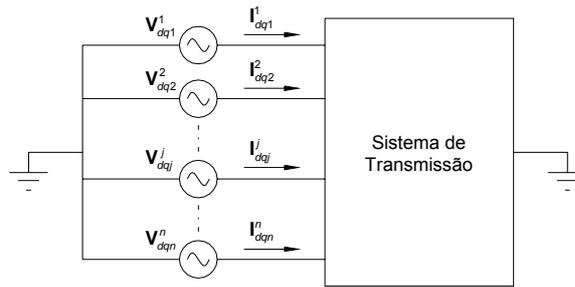


Figura 3.2 – Representação de um sistema multimáquinas com n geradores.

Como tratado nos itens anteriores, cada um dos n geradores pode ser modelado por uma expressão análoga à (3.48). Logo, para o i -ésimo gerador tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{dqj}^i \\ \mathbf{V}_{Ri} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{Ri} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{dqj}^i \\ \mathbf{I}_{Ri} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{Sij} & \mathbf{L}_{Mii} \\ \mathbf{L}_{Mii}^t & \mathbf{L}_{Ri} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{pI}_{dqj}^i \\ \mathbf{pI}_{Ri} \end{bmatrix} + \omega_i \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{Sij} & \mathbf{W}_{Mii} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{dqj}^i \\ \mathbf{I}_{Ri} \end{bmatrix} \text{ [pu]} \quad (3.68)$$

Nota-se que todas as tensões e correntes na expressão acima estão dadas na referência dq_i , associada à transformação de Park definida pelo ângulo θ_i , dado pela expressão (3.69)².

$$\theta_i = \omega_B t + \delta_{iB} + \pi/2 \text{ [rad]} \quad (3.69)$$

onde ω_B é a freqüência angular síncrona do sistema considerado e δ_{iB} o ângulo de carga do gerador i .

Ou seja, cada gerador possui sua própria referência dq com posição e freqüência angular próprias que dependem da sua própria condição operativa.

Então, para que seja possível a conexão de todos os geradores a uma mesma rede elétrica, torna-se necessário adotar uma referência comum a todos os geradores. Portanto, adotar-se-á a referência dq_B com rotação constante síncrona ω_B do sistema de acordo com Figura 3.1 (vide página 31).

² A notação adotada indica, através de um índice superior, o sistema referencial dqi na qual a grandeza está referida. Enquanto o número do gerador em questão é representado no índice inferior.

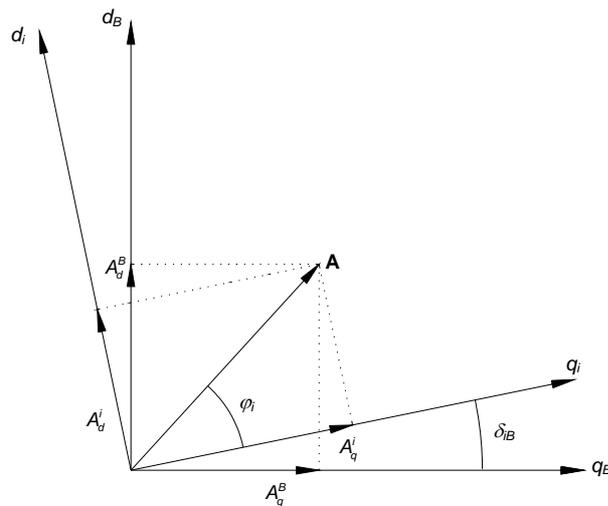


Figura 3.3 – Relação entre as coordenadas dq_i do gerador i e dq_B do sistema.

Seja, portanto, um vetor \mathbf{A} , que pode representar tanto tensões como correntes ou fluxos enlaçados referentes ao gerador i . Este vetor pode ser representado tanto no referencial dq_i , através das projeções A_d^i e A_q^i , como no referencial dq_B , por A_d^B e A_q^B , como mostrado na Figura 3.3. A relação entre estas projeções é dada por (3.70).

$$\mathbf{A}_{dq}^B = \mathbf{T}_{iB} \mathbf{A}_{dq}^i \quad (3.70)$$

onde,

$$\mathbf{A}_{dq}^B = \begin{bmatrix} A_d^B \\ A_q^B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{dq}^i = \begin{bmatrix} A_d^i \\ A_q^i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}_{iB} = \begin{bmatrix} \cos \delta_{iB} & \text{sen} \delta_{iB} \\ -\text{sen} \delta_{iB} & \cos \delta_{iB} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Verifica-se que a transformação \mathbf{T}_{iB} rotaciona o vetor \mathbf{A}_{dq}^i de δ_{iB} , em sentido horário, resultando \mathbf{A}_{dq}^B , além de ser ortogonal.

Agora, ao se definir uma outra transformação \mathbf{T} , dada por (3.72), as grandezas $\mathbf{V}_{dq_i}^i$ e $\mathbf{I}_{dq_i}^i$ da equação (3.68) podem ser referidas para as coordenadas dq_B .

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{iB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_4 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Logo, pré-multiplicando-se (3.68) por (3.72), obtém-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{dq_i}^B \\ \mathbf{V}_{Ri} \end{bmatrix} = & - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{Ri} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{dq_i}^B \\ \mathbf{I}_{Ri} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{SiB} & \mathbf{L}_{MiB} \\ \mathbf{L}_{MiB}^t & \mathbf{L}_{Ri} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \mathbf{I}_{dq_i}^B \\ \rho \mathbf{I}_{Ri} \end{bmatrix} + \\ & + \omega_i \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{SiB} & \mathbf{W}_{MiB} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{dq_i}^B \\ \mathbf{I}_{Ri} \end{bmatrix} - (\omega_i - 1) \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{SiB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{MiB} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{dq_i}^B \\ \mathbf{I}_{Ri} \end{bmatrix} \quad [\text{pu}] \end{aligned} \quad (3.73)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{SiB} &= \mathbf{T}_{iB} \mathbf{L}_{Sii} \mathbf{T}_{iB}^t & \mathbf{L}_{MiB} &= \mathbf{T}_{iB} \mathbf{L}_{Mii} \\ \mathbf{D}_{SiB} &= \mathbf{T}_{iB} \mathbf{L}_{Sii} \mathbf{T}_{diB}^t & \mathbf{D}_{MiB} &= \mathbf{L}_{Mii}^t \mathbf{T}_{diB}^t \\ \mathbf{W}_{SiB} &= \mathbf{T}_{iB} \mathbf{W}_{Sii} \mathbf{T}_{iB}^t & \mathbf{W}_{MiB} &= \mathbf{T}_{iB} \mathbf{W}_{Mii} \end{aligned} \quad (3.74)$$

e,

$$\mathbf{T}_{diB} = \frac{\partial \mathbf{T}_{iB}}{\partial \delta_{iB}} = \begin{bmatrix} -\text{sen} \delta_{iB} & \text{cos} \delta_{iB} \\ -\text{cos} \delta_{iB} & -\text{sen} \delta_{iB} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

A relação (3.73) resume as equações de tensão de uma máquina síncrona qualquer na referência dq_B do sistema, permitindo o tratamento de todos os n geradores conectados a um sistema conjuntamente. A rede elétrica em si será abordada no capítulo subsequente.

Por último, o torque eletromagnético dado por (3.57), em função de grandezas do estator, também pode ser escrito na referência dq_B do sistema.

$$T_{Ei} = (\mathbf{I}_{dq_i}^B)^t \mathbf{W}_{SiB} \mathbf{I}_{dq_i}^B + (\mathbf{I}_{dq_i}^B)^t \mathbf{W}_{MiB} \mathbf{I}_{Ri} \quad [\text{pu}] \quad (3.76)$$

3.4 SISTEMA MULTIMÁQUINAS LINEARIZADO

3.4.1 Introdução

Estudos de estabilidade para pequenos impactos, ou pequenas perturbações, de acordo com a literatura [ANDERSON, 1977; KUNDUR, 1994], têm por finalidade avaliar o comportamento dinâmico de um dado sistema quando da ocorrência de uma pequena perturbação. O sistema é dito estável quando sua resposta livre é amortecida após um período transitório. Nesta situação, espera-se que, frente a uma pequena perturbação temporária, o sistema retorne a sua condição operativa inicial. Por outro lado pequenas perturbações permanentes forçam o sistema a assumir uma nova condição operativa após o período transitório.

Seja então um sistema dinâmico qualquer descrito por um conjunto de equações diferenciais não-lineares, da mesma forma que os sistemas elétricos de potência³, como se segue.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (3.77)$$

onde \mathbf{x} representa as n variáveis de estado, \mathbf{u} as m variáveis de entrada e \mathbf{f} as n funções que relacionam \mathbf{x} e \mathbf{u} às derivadas de \mathbf{x} . Assim,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

No entanto, em torno de uma condição operativa \mathbf{x}_0 , tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \mathbf{0}$, o sistema dinâmico definido em (3.77) apresenta o mesmo comportamento dinâmico que o sistema linearizado por (3.79), obtido através da série de Taylor definida para \mathbf{x}_0 [VERHULST, 1990; PERKO, 1991].

³ Toma-se como exemplo o modelo apresentado para a máquina síncrona que possui não-linearidades em suas tensões macionais.

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \quad (3.79)$$

onde, $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ e $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ definem variações das variáveis de estado e entrada, respectivamente, em torno do ponto operativo \mathbf{x}_0 . Enquanto a matriz \mathbf{A} é conhecida como *matriz de estados* e, \mathbf{B} como *matriz de entrada* ou *controle* do sistema [KUNDUR, 1994]. As matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são expressas em (3.80).

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0} \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0} \quad (3.80)$$

A análise propriamente dita do sistema apresentado em (3.79) será apresentado no capítulo 6.

3.4.2 Linearização das Equações da Máquina Síncrona

A partir da equação (3.73), podem ser identificados o vetor de estado \mathbf{x}_i e os vetores de controle \mathbf{u}_{Vi} , $\mathbf{u}_{\delta i}$ e $\mathbf{u}_{\omega i}$ para o gerador i , dados em:

$$\mathbf{x}_{Gi} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{dq_i}^B \\ \mathbf{I}_{Ri} \end{bmatrix} [\text{pu}] \quad \mathbf{u}_{Vi} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{dq_i}^B \\ \mathbf{V}_{Ri} \end{bmatrix} [\text{pu}] \quad \mathbf{u}_{\delta i} = \delta_{iB} [\text{pu}] \quad \mathbf{u}_{\omega i} = \omega_i [\text{pu}] \quad (3.81)$$

Na realidade, o vetor de controle poderia ser definido de outra forma, contemplando todas as tensões aplicadas a maquina assim como ângulo de carga e frequência angular em um único vetor.

Logo, linearizando a equação (3.73) obtém-se (3.82).

$$\Delta \mathbf{u}_{Vi} = \left. \frac{\partial \mathbf{u}_{Vi}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_{Gi}} \right|_{\mathbf{x}_0} \Delta \dot{\mathbf{x}}_{Gi} + \left. \frac{\partial \mathbf{u}_{Vi}}{\partial \mathbf{x}_{Gi}} \right|_{\mathbf{x}_0} \Delta \mathbf{x}_{Gi} + \left. \frac{\partial \mathbf{u}_{Vi}}{\partial \mathbf{u}_{\delta i}} \right|_{\mathbf{x}_0} \Delta \mathbf{u}_{\delta i} + \left. \frac{\partial \mathbf{u}_{Vi}}{\partial \mathbf{u}_{\omega i}} \right|_{\mathbf{x}_0} \Delta \mathbf{u}_{\omega i} \text{ [pu]} \quad (3.82)$$

sendo,

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}_{Vi}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_{Gi}} \right|_{\mathbf{x}_0} = - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{SiB} & \mathbf{L}_{MiB} \\ \mathbf{L}_{MiB}^t & \mathbf{L}_{Ri} \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}_{Vi}}{\partial \mathbf{x}_{Gi}} \right|_{\mathbf{x}_0} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{Ri} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{SiB} & \mathbf{W}_{MiB} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}_{Vi}}{\partial \mathbf{u}_{\delta i}} \right|_{\mathbf{x}_0} = \omega_B \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathbf{W}_{SiB}}{\partial \delta_{iB}} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial \mathbf{W}_{MiB}}{\partial \delta_{iB}} \right|_{\mathbf{x}_0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{dq}^B \\ \mathbf{I}_{Ri} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0} \quad (3.85)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}_{Vi}}{\partial \mathbf{u}_{\omega i}} \right|_{\mathbf{x}_0} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{SiB} & \mathbf{W}_{MiB} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{SiB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{MiB} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{dq}^B \\ \mathbf{I}_{Ri} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0} \quad (3.86)$$

E,

$$\left. \frac{\partial \mathbf{W}_{SiB}}{\partial \delta_{iB}} \right|_{\mathbf{x}_0} = \left(\mathbf{T}_{diB} \mathbf{W}_{Sii} \mathbf{T}_{iB}^t + \mathbf{T}_{iB} \mathbf{W}_{Sii} \mathbf{T}_{diB}^t \right)_{\mathbf{x}_0} \quad \left. \frac{\partial \mathbf{W}_{MiB}}{\partial \delta_{iB}} \right|_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{T}_{diB} \big|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{W}_{Sii} \quad (3.87)$$

E, finalmente, isolando o vetor com as derivadas $\Delta \dot{\mathbf{x}}_{Gi}$ em (3.82), tem-se:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_{Gi} = \mathbf{A}_{Gi} \Delta \mathbf{x}_{Gi} + \mathbf{B}_{Vi} \Delta \mathbf{u}_{Vi} + \mathbf{B}_{\delta i} \Delta \mathbf{u}_{\delta i} + \mathbf{B}_{\omega i} \Delta \mathbf{u}_{\omega i} \quad (3.88)$$

onde,

$$\mathbf{A}_{Gi} = - \left(\left. \frac{\partial \mathbf{u}_{Vi}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_{Gi}} \right|_{\mathbf{x}_0} \right)^{-1} \left. \frac{\partial \mathbf{u}_{Vi}}{\partial \mathbf{x}_{Gi}} \right|_{\mathbf{x}_0} \quad (3.89)$$

$$\mathbf{B}_{Vi} = \left(\left. \frac{\partial \mathbf{u}_{Vi}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_{Gi}} \right|_{\mathbf{x}_0} \right)^{-1} \quad (3.90)$$

$$\mathbf{B}_{\delta i} = - \left(\frac{\partial \mathbf{u}_{Vi}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_{Gi}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}_{Vi}}{\partial \mathbf{u}_{\delta i}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \quad (3.91)$$

$$\mathbf{B}_{\omega i} = - \left(\frac{\partial \mathbf{u}_{Vi}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_{Gi}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}_{Vi}}{\partial \mathbf{u}_{\omega i}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \quad (3.92)$$

A equação (3.88) denota o sistema dinâmico linearizado a partir de (3.73), que representa a parte elétrica do gerador síncrono i , conectado e referido ao sistema cuja referência é dada pelas coordenadas dq_B .

Através da mesma metodologia aplicada acima, é linearizada, também, a equação (3.76), que denota o torque eletromagnético atuante no gerador i .

$$\Delta T_{Ei} = \mathbf{D}_{Ti}^s \Delta \mathbf{l}_{dq i}^B + \mathbf{D}_{Ti}^r \Delta \mathbf{l}_{Ri} + \mathbf{D}_{Ti}^\delta \Delta \delta_{iB} \text{ [pu]} \quad (3.93)$$

onde,

$$\mathbf{D}_{Ti}^s = \frac{\partial T_{Ei}}{\partial \mathbf{l}_{dq i}^B} \Big|_{\mathbf{x}_0} = \left[\left(\mathbf{l}_{dq i}^B \right)^t \left(\mathbf{W}_{SiB} + \mathbf{W}_{SiB}^t \right) + \left(\mathbf{l}_{Ri}^t \mathbf{W}_{MiB}^t \right) \right] \Big|_{\mathbf{x}_0} \quad (3.94)$$

$$\mathbf{D}_{Ti}^r = \frac{\partial T_{Ei}}{\partial \mathbf{l}_{Ri}} \Big|_{\mathbf{x}_0} = \left[\left(\mathbf{l}_{dq i}^B \right)^t \mathbf{W}_{MiB} \right] \Big|_{\mathbf{x}_0} \quad (3.95)$$

$$\mathbf{D}_{Ti}^\delta = \frac{\partial T_{Ei}}{\partial \delta_{iB}} \Big|_{\mathbf{x}_0} = \omega_B \left[\left(\mathbf{l}_{dq i}^B \right)^t \frac{\partial \mathbf{W}_{SiB}}{\partial \delta_{iB}} \mathbf{l}_{dq i}^B + \left(\mathbf{l}_{dq i}^B \right)^t \frac{\partial \mathbf{W}_{MiB}}{\partial \delta_{iB}} \mathbf{l}_{Ri} \right] \Big|_{\mathbf{x}_0} \quad (3.96)$$

Ou, de outra forma,

$$\Delta T_{Ei} = \mathbf{D}_{xi} \Delta \mathbf{x}_{Gi} + \mathbf{D}_{Ti}^\delta \Delta \delta_{iB} \text{ [pu]} \quad (3.97)$$

onde,

$$\mathbf{D}_{xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{Ti}^s & \mathbf{D}_{Ti}^r \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

CAPÍTULO 4

REDE ELÉTRICA

“O êxito consiste em aprender a ir de fracasso em fracasso sem cair no desespero”.
Winston Churchill (1874-1965)

4.1 INTRODUÇÃO

Em estudos de estabilidade angular e de tensão normalmente é utilizada uma formulação estática para a rede elétrica que, a priori, opera com frequência praticamente constante. Esta característica permite o tratamento de redes elétricas complexas por meio de impedâncias que não variam no domínio do tempo.

No entanto, em estudos de oscilações subsíncronas, a dinâmica da rede elétrica desempenha um papel importantíssimo, principalmente quando o foco está voltado para RSS. Isto se deve ao fato da RSS estar intimamente ligada a oscilações da rede elétrica, que ocorrem usualmente na faixa subsíncrona. Deste modo, torna-se imprescindível caracterizar dinamicamente uma dada rede elétrica para se avaliar corretamente a RSS.

Neste intuito surge a teoria de grafos, aplicada na solução de inúmeros problemas práticos nas áreas de engenharia, física, lingüística, ciências sociais e biológicas, e

muitas outras. O emprego de grafos na previsão do comportamento de circuitos elétricos originou-se com G. Kirchhoff em 1847 e foi melhorado por J. C. Maxwell em 1892. No início a vantagem de se utilizar tal metodologia era muito pequena, mudando vertiginosamente com o advento dos computadores digitais de alta-velocidade de processamento [DEO, 1974].

Este capítulo tratará dos conceitos básicos da teoria de grafos, objetivando a construção sistemática das equações de estado associadas a uma rede elétrica qualquer. Logo após, correntes e tensões, que compõe as variáveis de estado da rede em questão, serão referidas ao sistema de coordenada dq_B , apresentada no capítulo anterior. Assim, estando as variáveis de estado da rede elétrica referidas ao mesmo sistema de coordenadas dos geradores, torna-se possível a conexão entre eles, resultando num único sistema elétrico composto pela rede elétrica e estatores das máquinas síncronas, acoplado magneticamente aos circuitos rotóricos dos mesmos.

4.2 TEORIA DOS GRAFOS APLICADA A CIRCUITOS ELÉTRICOS

Seja o circuito elétrico apresentado a seguir, composto por elementos como resistores, indutores, capacitores, fontes de corrente e tensão.

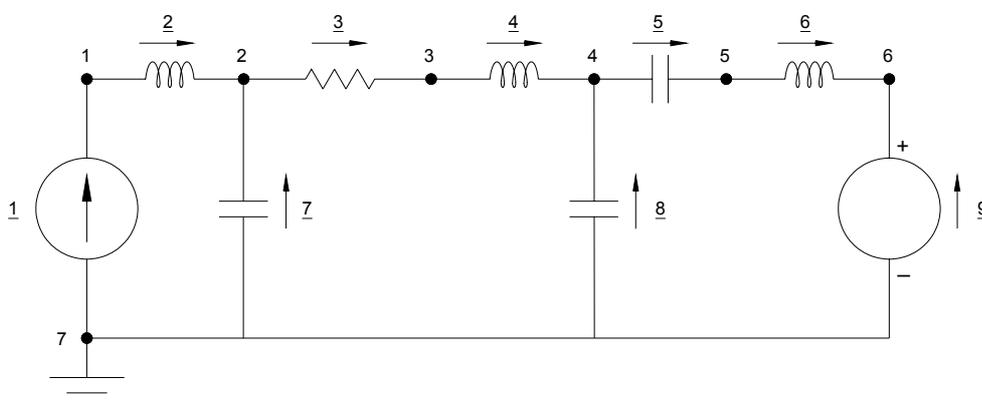


Figura 4.1 – Circuito exemplo.

A topologia dos circuitos elétricos é totalmente independente dos elementos que os compõe, referindo-se inteiramente à sua geometria ou estrutura. Portanto, pode-se associar o circuito elétrico a um grafo que consiste, basicamente, num conjunto de vértices conectados através de arestas orientadas de acordo com o sentido de suas correntes. Acompanhando este raciocínio, o grafo relativo ao circuito da Figura 4.1 é apresentado na Figura 4.2.

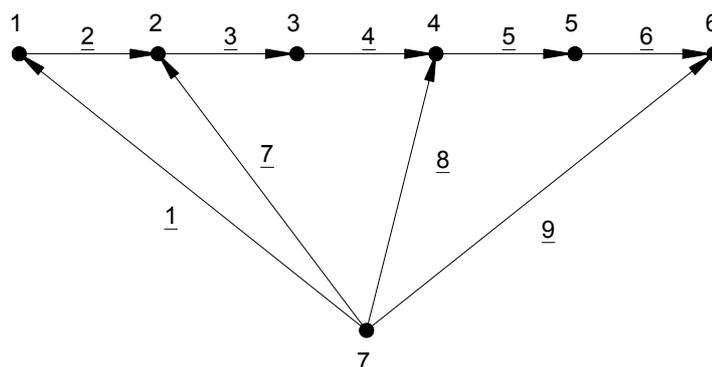


Figura 4.2 – Grafo orientado associado ao circuito exemplo da Figura 4.1.

De acordo com a Figura 4.2, os número sublinhados identificam as arestas enquanto os não-sublinhados nomeiam os vértices.

Antes de continuar com aspectos relacionados às equações de tensão e corrente para os circuitos elétricos, alguns conceitos básicos com relação aos grafos devem ser introduzidos.

4.2.2 Conceitos Básicos em Teoria de Grafos

- **Árvore**

Árvore é um *subgrafo* conectado, ou seja, um subconjunto de vértices e arestas de um grafo conectado, que não forma caminhos fechados. O termo *conectado* significa que há pelo menos um caminho entre quaisquer dois vértices do grafo [BALABANIAN, 1969]. Na Figura 4.3 encontra-se duas possíveis árvores associadas ao grafo da Figura 4.2.

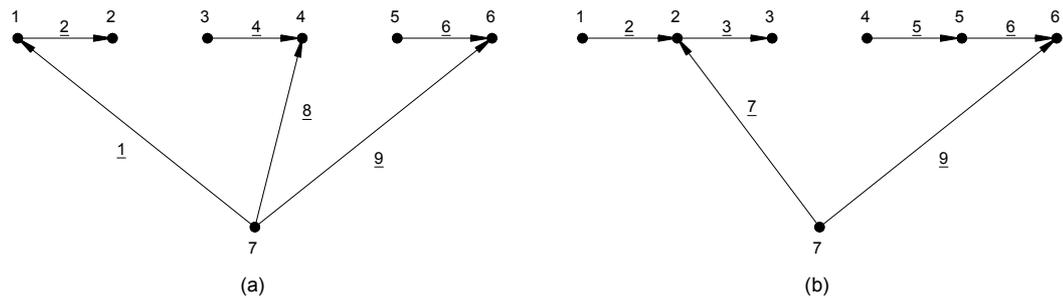


Figura 4.3 – Exemplos de árvores associadas ao grafo da Figura 4.2.

Para as arestas componentes das árvores adotar-se-á o nome *ramos*, enquanto que as outras não pertencentes à árvore em questão, receberão o nome *elos*. Por exemplo, na Figura 4.3a as arestas 1, 2, 4, 6, 8 e 9 compõe uma árvore e, por isto, são chamadas de ramos. Ao passo que, as arestas 3, 5 e 7 são denominadas elos.

- **Matriz de Incidência**

A *matriz de incidência completa* é uma forma compacta de se definir um grafo com $n + 1$ vértices e m arestas, contendo informações acerca da orientação das arestas e quais vértices estas conectam [BALABANIAN, 1969]. Os elementos desta matriz $\mathbf{A}_a = [a_{ij}]$, que tem dimensão $(n + 1) \times m$, são definidos como se segue.

$a_{ij} = 1 \Rightarrow$ se a aresta j estiver saindo do vértice i ;

$a_{ij} = -1 \Rightarrow$ se a aresta j estiver entrando no vértice i ; (4.1)

$a_{ij} = 0 \Rightarrow$ se a aresta j não incidir sobre o vértice i .

Assim sendo, para o grafo ilustrado pela Figura 4.2, tem-se a seguinte matriz de incidência completa:

$$\mathbf{A}_a = \begin{array}{c} \text{v} \\ \text{é} \\ \text{r} \\ \text{t} \\ \text{i} \\ \text{c} \\ \text{e} \\ \text{s} \end{array} \begin{array}{c} \text{arestas} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad (4.2)$$

No entanto, verifica-se que a soma de todas as linhas de \mathbf{A}_a resulta em uma linha nula. Esta característica é comum a todos os grafos já que cada coluna possui apenas dois elementos não-nulos, 1 e -1 . Isto se traduz em uma dependência entre as linhas da matriz \mathbf{A}_a , que pode ser eliminada retirando-se a linha referente ao neutro do circuito, neste caso, o vértice 7. Após esta eliminação, a matriz \mathbf{A}_f gerada é chamada *matriz de incidência* (ou *matriz de incidência reduzida*) e tem dimensão $n \times m$.

$$\mathbf{A}_f = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \end{array} \quad (4.3)$$

Uma outra representação para a matriz de incidência, útil na análise de circuitos elétricos, pode ser obtida considerando uma árvore específica, por exemplo aquela dada pela Figura 4.3a, separando-se os ramos dos elos na equação (4.3). Esta forma é apresentada a seguir, onde \mathbf{A}_r é uma matriz quadrada $n \times n$ cujas colunas correspondem aos ramos e, \mathbf{A}_e uma matriz $n \times (m - n)$ que por sua vez tem colunas correspondentes aos elos.

Uma característica importantíssima da matriz \mathbf{A}_r é que esta é sempre não-singular, já que seu determinante é sempre ± 1 [BALABANIAN, 1969]. Por exemplo, o determinante da matriz \mathbf{A}_r em (4.4) assume o valor -1 .

$$\mathbf{A}_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 6 & 8 & 9 & 3 & 5 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = [\mathbf{A}_r \quad \mathbf{A}_e] \quad (4.4)$$

ramos
elos

• **Matriz de Circuitos ou Malhas**

A *matriz de circuitos* ou *malhas* expressa de que forma malhas ou circuitos fechados são constituídos pelas arestas de um determinado grafo. Estes circuitos dependem, por sua vez, de orientações que devem ser convenientemente adotadas, como mostrado para as malhas a, b e c na Figura 4.4.

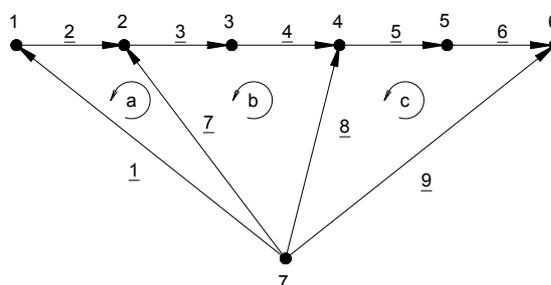


Figura 4.4 – Circuitos exemplos a, b e c, para o grafo exemplo da Figura 4.2.

Os elementos b_{ij} da matriz de circuitos são definidos, então, como se segue.

- $b_{ij} = 1 \Rightarrow$ se a aresta j estiver no circuito i e, suas orientações coincidirem
 - $b_{ij} = -1 \Rightarrow$ se a aresta j estiver no circuito i e, suas orientações não coincidirem;
 - $b_{ij} = 0 \Rightarrow$ se a aresta j não estiver no circuito i .
- (4.5)

A *matriz de circuitos completa* \mathbf{B}_a é aquela que caracteriza todos os possíveis circuitos para um dado grafo. Sendo assim, esta matriz tem m colunas e tantas linhas quanto forem os circuitos formados pelo grafo.

No entanto, maior atenção será voltada à *matriz de circuitos fundamentais* \mathbf{B}_f , que será discutida na seqüência.

Recordando que uma árvore é um subgrafo conectado no qual não se encontram circuitos, sabe-se que se um elo for adicionado à árvore, um único circuito será formado⁴. Adicionalmente, adota-se a orientação para este circuito de tal forma que esta coincida com a orientação do elo inserido à árvore. Este circuito, formado pela adição de um elo à árvore, é chamado *circuito fundamental*.

Por exemplo, para a árvore denotada pela Figura 4.3a, são constituídos três circuitos fundamentais, de acordo com a Figura 4.5. Em (a), foi inserido o elo 3, formando o circuito $\{1, 2, 3, 4, 8\}$. Analogamente, são formados os circuitos $\{5, 6, 8, 9\}$ e $\{1, 2, 7\}$, ilustrados, respectivamente, em (b) e (c).

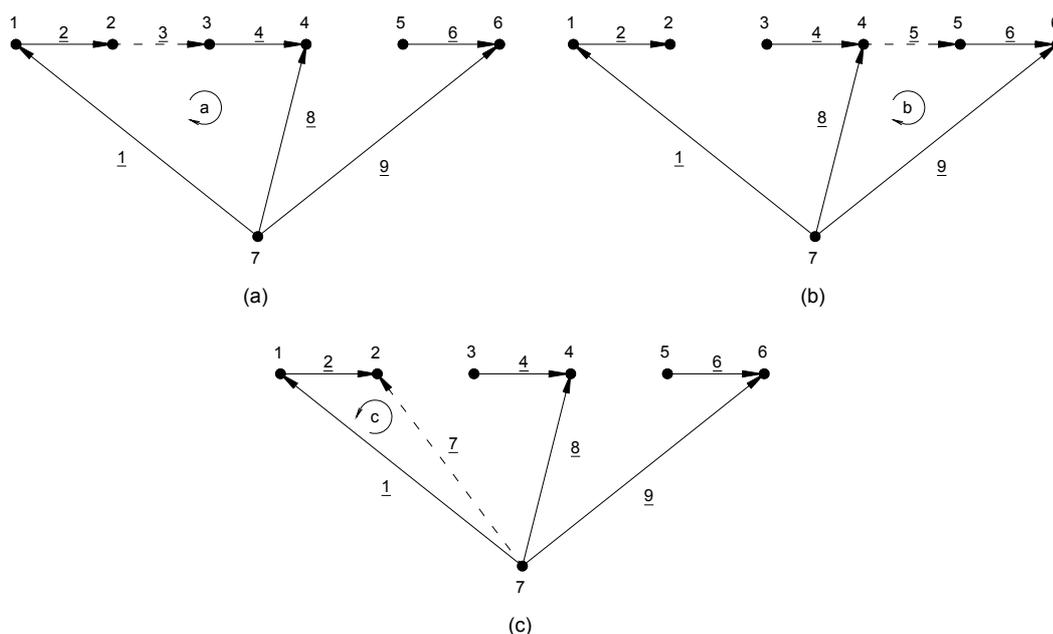


Figura 4.5 – Circuitos fundamentais devido à inserção dos elos (a) 3, (b) 5 e (c) 7.

A matriz de circuitos fundamentais \mathbf{B}_f , definida para as orientações representadas na Figura 4.5, é apresentada a seguir, já separada por ramos e elos. A submatriz \mathbf{B}_r correspondente aos ramos tem dimensão $(m - n) \times n$, enquanto \mathbf{B}_e , a submatriz correspondente aos elos tem dimensão $(m - n) \times (m - n)$.

⁴ Se assim não o for, o próprio elo deve ser um ramo.

$$\mathbf{B}_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 6 & 8 & 9 & 3 & 5 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [\mathbf{B}_r \quad \mathbf{B}_e] = [\mathbf{B}_r \quad \mathbf{U}_e] \quad (4.6)
 \end{matrix}$$

ramos
elos

Nota-se que \mathbf{B}_e é igual a matriz identidade e por isto pode ser substituída pela matriz identidade \mathbf{U}_e com dimensão e .

• **Conjuntos de Corte**

Um *conjunto de corte* é um conjunto de arestas de um grafo conectado cuja remoção torna o grafo desconectado em, exatamente, dois subgrafos conectados, sob a condição de que a remoção de qualquer subconjunto deste conjunto de corte conserva o grafo conectado [BALABANIAN, 1969].

Na Figura 4.6 são apresentados três conjuntos de corte: a , b e c . O subconjunto $\{1, 2\}$ forma o conjunto de corte a , que separa o grafo exemplo no subgrafos $\{1\}$ e $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, ambos conectados⁵. Analogamente, tem-se $b = \{4, 8, 9\}$ e $c = \{6, 9\}$.

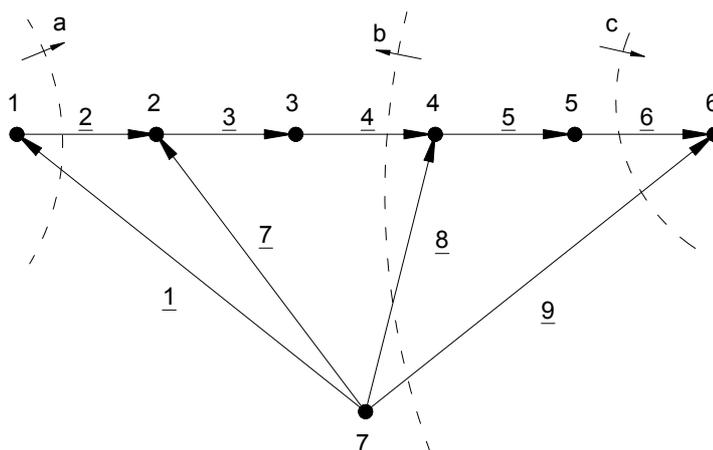


Figura 4.6 – Exemplos de conjunto de corte para o grafo exemplo da Figura 4.2.

⁵ Todo grafo composto por um único vértice é conectado [DEO, 1974].

- **Relação entre \mathbf{A} e \mathbf{B}_f**

Para um dado grafo, há uma *relação de ortogonalidade* entre sua matriz de incidência \mathbf{A}_f e sua matriz de circuitos fundamentais \mathbf{B}_f descrita abaixo [BALABANIAN, 1969].

$$\mathbf{A}_f \mathbf{B}_f^t = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

Esta propriedade se deve à estrutura topológica do grafo em questão. Primeiramente, deve-se ter em mente que \mathbf{A}_f possui linhas associadas aos vértices e, colunas às arestas do grafo, enquanto que \mathbf{B}_f^t possui linhas associadas às arestas e colunas aos circuitos formados pelo grafo.

Suponha, agora, que o vértice x conectado à aresta \underline{k} não faz parte do circuito z . Assim tem-se (4.8), onde as reticências representam elementos quaisquer, nulos ou não-nulos.

$$\begin{array}{c} \text{vértice } x \rightarrow \left[\cdots \quad \overset{\text{aresta } \underline{k}}{\downarrow} \quad \pm 1 \quad \cdots \right] \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \leftarrow \text{aresta } \underline{k} = \mathbf{0} \\ \uparrow \\ \text{circuito } z \end{array} \quad (4.8)$$

Assim, o elemento de \mathbf{A}_f relativo à aresta \underline{k} e o vértice x será não-nulo, ao passo que o elemento de \mathbf{B}_f^t relativo à aresta \underline{k} e o circuito z será nulo. Desta forma a multiplicação entre ambos será também nula. Este resultado mostra que para cada elemento não nulo presente na linha x de \mathbf{A}_f , existe um elemento nulo associado à coluna z em \mathbf{B}_f^t , se a aresta em questão não faz parte do circuito z .

Considere, agora, que o vértice x faz parte do circuito z . Assim sendo, existem pelo menos duas arestas \underline{k} e \underline{p} incidentes em x . Neste caso a orientação das arestas e do circuito citados desempenha um papel importante. Portanto, faz-se \underline{k} e \underline{p} chegando (ou saindo) em x , levando ao aparecimento de elementos não nulos de mesmo sinal na linha correspondente a x para estas arestas. No entanto, se a orientação considerada para o circuito for coincidente com a orientação de \underline{k} , o elemento correspondente a \underline{k} será $+1$, enquanto o elemento de \underline{p} será -1 , ou seja, elementos

Em [BALABANIAN, 1969], \mathbf{Q}_e é definida como submatriz da *matriz de conjuntos mínimos fundamentais* \mathbf{Q}_f , informando quais elos fazem parte dos conjuntos mínimos fundamentais associados a um dado grafo⁶.

4.2.3 Leis de Kirchhoff

Cada elemento componente de um circuito elétrico possui uma relação específica entre a diferença de tensão aplicada a seus terminais e a corrente que flui por ele. No entanto, estas relações não são suficientes para se determinar as tensões e correntes em todos os ramos de um circuito elétrico. Portanto, as leis de Kirchhoff para corrente e tensões desempenham um papel fundamental na análise de circuitos elétricos, como será discutido a seguir.

- **Lei de Kirchhoff para correntes**

Esta lei afirma que, em qualquer circuito elétrico e em qualquer instante de tempo, a soma das correntes deixando um nó é sempre zero.

Considerando, então, o grafo orientado associado a um circuito elétrico qualquer, pode-se dizer que,

$$\mathbf{A}_f \mathbf{i} = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

onde \mathbf{A}_f representa a matriz de incidência e \mathbf{i} o vetor que contém as correntes das arestas componentes do grafo.

Adotando a forma particionada de \mathbf{A}_f , como apresentada em (4.4), e fazendo a mesma separação no vetor \mathbf{i} , em ramos e elos, tem-se,

$$[\mathbf{A}_r \quad \mathbf{A}_e] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_r \\ \mathbf{i}_e \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.15)$$

⁶ Para maiores informações acerca da matriz de conjuntos de cortes mínimos fundamentais, recomenda-se uma pesquisa mais aprofundada de [BALABANIAN, 1969].

Explicitando \mathbf{i}_r em (4.15), resulta a seguinte expressão.

$$\mathbf{i}_r = -\mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{A}_e \mathbf{j}_e = -\mathbf{Q}_e \mathbf{j}_e \quad (4.16)$$

Verifica-se que as correntes dos elos, para uma dada árvore, servem de base para todas as correntes do circuito elétrico [BALABANIAN, 1969]. Isto se explica devido à possibilidade de expressar qualquer corrente do circuito em termos das correntes dos elos.

- **Lei de Kirchhoff para tensões**

Esta lei afirma que, em qualquer circuito elétrico e em qualquer instante de tempo, a soma das tensões dos ramos que compõem uma malha, respeitando uma dada orientação, é sempre zero.

Considerando, então, o grafo orientado associado a um circuito elétrico qualquer, pode-se dizer que,

$$\mathbf{B}_f \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

onde \mathbf{B}_f é a matriz de circuitos fundamentais para uma dada árvore associada ao grafo, e \mathbf{v} o vetor que contém as tensões das arestas do mesmo grafo.

Representando a matriz \mathbf{B}_f através de sua forma particionada em ramos e elos, dada por (4.6), pode-se reescrever (4.17) como se segue.

$$[\mathbf{B}_r \quad \mathbf{U}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_r \\ \mathbf{v}_e \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

Isolando \mathbf{v}_e acima, tem-se:

$$\mathbf{v}_e = -\mathbf{B}_r \mathbf{v}_r = \mathbf{Q}_e^t \mathbf{v}_r \quad (4.19)$$

Verifica-se que as tensões nos ramos, para uma dada árvore, servem de base de tensão em qualquer circuito elétrico [BALABANIAN, 1969], já que todas as tensões dos elos são meras combinações lineares das tensões \mathbf{v}_r .

4.3 EQUAÇÕES DE ESTADO

4.3.1 Considerações Gerais

As *equações de estado* formam um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem que modela o comportamento dinâmico de qualquer sistema físico, como um simples circuito elétrico, por exemplo.

Esta metodologia é conveniente quando se trata de sistemas com alto grau de complexidade e, conseqüentemente, necessitam de um grande número de equações diferenciais para modelá-los. O número de equações diferenciais requeridas para se modelar um dado sistema depende do número de *variáveis de estado* que este apresenta, ou seja, de *armazenadores de energia independentes*. Por exemplo, um circuito elétrico constituído por parâmetros concentrados, como resistores, indutores e capacitores, tem como variáveis de estado as correntes nos indutores e as tensões nos capacitores, devido às relações dadas abaixo.

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \quad \text{e} \quad i_c = C \frac{dv_c}{dt} \quad (4.20)$$

Porém, foi mencionado que os armazenadores de energia devem ser independentes, isto é, variáveis de estado não podem apresentar uma relação linear entre si. Isto ocorre quando há circuitos formados apenas por capacitores ou por capacitores e fontes de tensão e, quando há conjuntos de corte formados exclusivamente por indutores ou por indutores e fontes de corrente. Estas são chamadas *degenerações do circuito elétrico*.

No caso de circuitos formados apenas por capacitores ou capacitores e fontes de tensão, a lei de Kirchhoff das tensões para uma malha que contém c capacitores e n fontes de tensão, como ilustrado na Figura 4.7, pode ser resumida por (4.21), respeitando uma orientação apropriada.

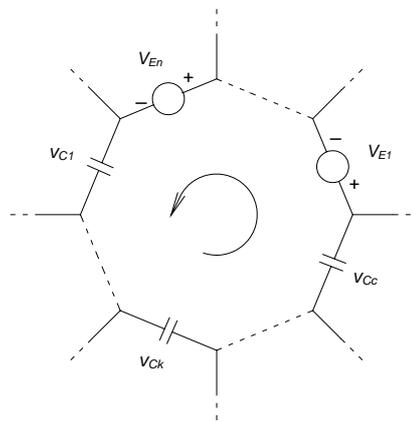


Figura 4.7 – Circuito formado por capacitores e fontes de tensão.

$$V_{Ck} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^c V_{Ci} + \sum_{i=1}^n V_{Ei} \tag{4.21}$$

Nota-se que sempre a tensão de um dos capacitores pode ser expressa, linearmente, em função das tensões dos outros capacitores e fontes de tensão. Por esta razão, o número de variáveis de estados do circuito é reduzido da mesma quantidade de malhas formadas por capacitores e/ou fontes de tensão.

Analogamente, no caso de conjuntos de corte formados apenas por indutores ou indutores e fontes de corrente, a lei de Kirchhoff das correntes para um dado conjunto de corte que contém l indutores e j fontes de corrente, como mostrado na Figura 4.8, pode ser escrita como em (4.22), respeitando uma orientação apropriada.

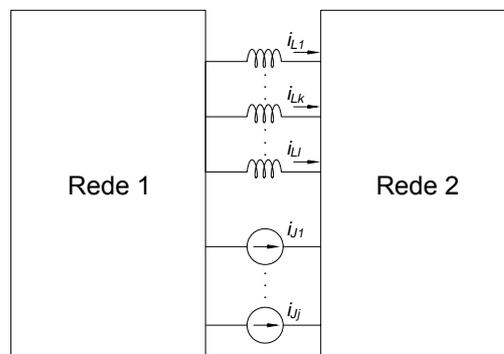


Figura 4.8 – Conjunto de corte formado por indutores e fontes de corrente.

$$i_{Lk} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^l i_{Li} + \sum_{i=1}^j i_{Ji} \quad (4.22)$$

Portanto, da mesma forma que para as malhas de capacitores, a corrente de um dos indutores é linearmente dependente das correntes dos outros indutores e fontes de corrente. Por esta razão, o número de variáveis de estados do circuito é reduzido da mesma quantidade de conjuntos de corte formados por indutores e/ou fontes de corrente.

Em suma, foi discutido que as equações de estado representam a dinâmica de um sistema físico qualquer, dotado de armazenadores de energia. E que, em se tratando de circuitos elétricos, estes armazenadores são constituídos por indutores e capacitores. Também foram abordadas as degenerações que podem ser encontradas em circuitos elétricos e que são responsáveis pela redução do seu *grau de complexidade*, ou seja, a ordem do sistema dinâmico que ele representa.

4.3.2 Considerações Relacionadas a Sistemas Elétricos de Potência

Uma descrição fiel dos sistemas de potência exigiria uma modelagem trifásica, incluindo suas indutâncias mútuas, diferentes interconexões para os transformadores e possíveis desequilíbrios, além de equipamentos com operação não-linear (ex. FACTS).

Porém, algumas características são normalmente consideradas ao se modelar sistemas elétricos de potência, quando o foco é a RSS. Por exemplo,

- As linhas de transmissão são totalmente transpostas;
- Os transformadores são modelados através de seus circuitos equivalentes monofásicos (circuitos T ou Y);
- As cargas do sistema são equilibradas e com impedância constante.

Estas três considerações permitem a construção das equações de estado de um sistema de potência a partir de seu equivalente monofásico, como visto na Figura 4.1, que não considera acoplamentos magnéticos ou desequilíbrios na rede.

Depois de obtidas as equações de estado para o circuito equivalente do sistema, basta repeti-las para as outras fases. Este procedimento levará a um conjunto de equações que representa as fases *abc* independentemente, possibilitando, assim, expressá-las em termos do sistema referencial dq_B , definido no capítulo 2 (vide página 51).

4.3.3 Formulação Sistemática das Equações de Estado

Para a formulação das equações de estado para uma dada rede elétrica, dois pontos são fundamentais: primeiramente, (a) deve-se conhecer a priori a topologia desta rede, ou seja, como os elementos componentes desta rede estão conectados entre si; e segundo (b) quais são estes elementos e quais leis físicas regem seus comportamentos dinâmicos.

No item 4.2 foram apresentados conceitos fundamentais para solucionar (a) com o auxílio de grafos orientados e suas relações com as leis de Kirchhoff para correntes e tensões. E, no item 4.3.1 foi discutido que as variáveis de interesse nos circuitos RLC são justamente as correntes nos indutores e tensões nos capacitores, esclarecendo (b).

De acordo com as formulações apresentadas em (4.16) e (4.19) para as leis de Kirchhoff, nota-se uma dependência da árvore associada ao grafo representativo do circuito. Por esta razão deve-se escolher cuidadosamente a árvore, segundo algumas considerações topológicas da rede, de forma que a sistematização seja possível.

Primeiramente, o máximo número de capacitores deve ser considerado como ramo, já que as tensões dos ramos formam uma base para todas as tensões do circuito e, as tensões dos capacitores são variáveis de estado do circuito elétrico, e devem

permanecer na formulação. Analogamente, o máximo número de indutores deve compor o conjunto de elos, uma vez que suas correntes formam uma base de corrente para o circuito e, as correntes dos indutores são variáveis de estado e, também, devem permanecer. Só existirão capacitores como elos e indutores como ramos, se houver degenerações na rede, como as apresentadas no item 4.3.1.

As fontes independentes de tensão, no entanto, já são conhecidas e não podem ser expressas a partir de outras tensões do circuito. Por este motivo, as fontes de tensão nunca podem ser consideradas elos. Acompanhando este raciocínio, aparecem as fontes independentes de corrente que não podem ser consideradas ramos.

Os resistores, por sua vez, não necessitam de nenhuma consideração adicional, podendo pertencer tanto ao conjunto dos ramos como dos elos.

Em suma, uma ordem deve ser respeitada para se escolher a árvore associada a um circuito elétrico qualquer. Portanto, já na numeração das arestas e vértices do grafo deve-se ter em mente uma lista hierárquica para a numeração dos conjuntos dos ramos e elos de acordo com [BALABANIAN, 1969]. Esta lista apresentada no Quadro 4.1, concentra todas as informações discutidas acima para escolha apropriada de uma árvore.

Quadro 4.1 – Lista hierárquica para a numeração dos ramos e elos associados aos circuitos RLC

Ramos	Elos
1° - Fontes independentes de tensão	5° - Capacitores (degenerações)
2° - Capacitores	6° - Resistores
3° - Resistores	7° - Indutores
4° - Indutores (degenerações)	8° - Fontes independentes de corrente

Estando o grafo numerado de acordo com o quê foi exposto nos últimos parágrafos, a matriz \mathbf{Q}_e , definida em (4.12), assume a seguinte forma.

$$\mathbf{Q}_e = \begin{array}{c} \begin{array}{c} E \\ C \\ R \\ L \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \text{Ramos} \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc} C & R & L & J \\ \mathbf{Q}_{EC} & \mathbf{Q}_{ER} & \mathbf{Q}_{EL} & \mathbf{Q}_{EJ} \\ \mathbf{Q}_{CC} & \mathbf{Q}_{CR} & \mathbf{Q}_{CL} & \mathbf{Q}_{CJ} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{RR} & \mathbf{Q}_{RL} & \mathbf{Q}_{RJ} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{LL} & \mathbf{Q}_{LJ} \end{array} \right] \leftarrow \begin{array}{c} \text{Elos} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \quad (4.23)$$

Cujos índices E , C , R , L e J correspondem às fontes de tensão, capacitores, resistores, indutores e fontes de corrente, respectivamente. Os zeros nesta matriz são justificados devido à existência de circuitos formados apenas por capacitores ou fontes de tensão quando houver um capacitor como elo. Analogamente, se existir um indutor como ramo, existirá, a priori, um conjunto de corte formado apenas por indutores e fontes de corrente [BALABANIAN, 1969].

Utilizando-se dos mesmos índices, pode-se definir os vetores de corrente e tensão tanto nos ramos como nos elos, como mostrado a seguir.

$$\mathbf{i}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_E \\ \mathbf{i}_{Cr} \\ \mathbf{i}_{Rr} \\ \mathbf{i}_{Lr} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{Cr} \\ \mathbf{v}_{Rr} \\ \mathbf{v}_{Lr} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{i}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{Ce} \\ \mathbf{i}_{Re} \\ \mathbf{i}_{Le} \\ \mathbf{i}_J \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ce} \\ \mathbf{v}_{Re} \\ \mathbf{v}_{Le} \\ \mathbf{v}_J \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Finalmente, aplicando-se as expressões de (4.23) a (4.25) na lei de Kirchhoff para correntes dada por (4.16), tem-se:

$$\mathbf{i}_E = -\mathbf{Q}_{EC}\mathbf{i}_{Ce} - \mathbf{Q}_{ER}\mathbf{i}_{Re} - \mathbf{Q}_{EL}\mathbf{i}_{Le} - \mathbf{Q}_{EJ}\mathbf{i}_J \quad (4.26)$$

$$\mathbf{i}_{Cr} = -\mathbf{Q}_{CC}\mathbf{i}_{Ce} - \mathbf{Q}_{CR}\mathbf{i}_{Re} - \mathbf{Q}_{CL}\mathbf{i}_{Le} - \mathbf{Q}_{CJ}\mathbf{i}_J \quad (4.27)$$

$$\mathbf{i}_{Rr} = -\mathbf{Q}_{RR}\mathbf{i}_{Re} - \mathbf{Q}_{RL}\mathbf{i}_{Le} - \mathbf{Q}_{RJ}\mathbf{i}_J \quad (4.28)$$

$$\mathbf{i}_{Lr} = -\mathbf{Q}_{LL}\mathbf{i}_{Le} - \mathbf{Q}_{LJ}\mathbf{i}_J \quad (4.29)$$

E, para as tensões, dadas em (4.19),

$$\mathbf{v}_{Ce} = \mathbf{Q}_{EC}^t \mathbf{v}_E + \mathbf{Q}_{CC}^t \mathbf{v}_{Cr} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{v}_{Re} = \mathbf{Q}_{ER}^t \mathbf{v}_E + \mathbf{Q}_{CR}^t \mathbf{v}_{Cr} + \mathbf{Q}_{RR}^t \mathbf{v}_{Rr} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{v}_{Le} = \mathbf{Q}_{EL}^t \mathbf{v}_E + \mathbf{Q}_{CL}^t \mathbf{v}_{Cr} + \mathbf{Q}_{RL}^t \mathbf{v}_{Rr} + \mathbf{Q}_{LL}^t \mathbf{v}_{Lr} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{v}_J = \mathbf{Q}_{EJ}^t \mathbf{v}_E + \mathbf{Q}_{CJ}^t \mathbf{v}_{Cr} + \mathbf{Q}_{RJ}^t \mathbf{v}_{Rr} + \mathbf{Q}_{LJ}^t \mathbf{v}_{Lr} \quad (4.33)$$

As equações (4.26) a (4.33) concentram toda a informação topológica da rede necessária a formulação das equações de estado.

As variáveis de estado estão resumidas nos vetores \mathbf{v}_{Cr} e \mathbf{i}_{Le} , que contém, respectivamente, tensões nos ramos com capacitores e, corrente dos elos com indutores. Portanto, relacionando as correntes dos capacitores com suas respectivas tensões, e as tensões nos indutores com suas respectivas correntes, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{Cr} \\ \mathbf{i}_{Ce} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_r & \mathbf{0}_{Cr \times Ce} \\ \mathbf{0}_{Ce \times Cr} & \mathbf{C}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Cr} \\ \mathbf{v}_{Ce} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Le} \\ \mathbf{v}_{Lr} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_e & \mathbf{0}_{Le \times Lr} \\ \mathbf{0}_{Lr \times Le} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{Le} \\ \mathbf{i}_{Lr} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

onde as matrizes \mathbf{C}_r e \mathbf{C}_e são diagonais e contém os valores de capacitância dos ramos e elos, respectivamente. As matrizes \mathbf{L}_r e \mathbf{L}_e são definidas de forma análoga, só que com indutâncias⁷. As dimensões das matrizes nulas são denotadas pelos mesmos índices que identificam cada classe de elemento do circuito, como “Cr” para número de capacitores classificados como ramos e, assim por diante.

Neste ponto as correntes dos capacitores e as tensões dos indutores devem ser eliminadas das equações (4.34) e (4.35). Assim, isolando as correntes dos capacitores em (4.27) e as tensões dos indutores em (4.32), vem:

⁷ Em [BALABANIAN, 1969], a possibilidade de existência de acoplamentos magnéticos é considerada. No entanto, como o enfoque deste documento é a abordagem de sistemas elétricos de potência totalmente equilibrados, estas são desprezadas no presente desenvolvimento.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{Cr} & \mathbf{Q}_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{Cr} \\ \mathbf{i}_{Ce} \end{bmatrix} = -\mathbf{Q}_{CR} \mathbf{i}_{Re} - \mathbf{Q}_{CL} \mathbf{i}_{Le} - \mathbf{Q}_{CJ} \mathbf{i}_J \quad (4.36)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{Le} & -\mathbf{Q}_{LL}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Le} \\ \mathbf{v}_{Lr} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{EL}^t \mathbf{v}_E + \mathbf{Q}_{CL}^t \mathbf{v}_{Cr} + \mathbf{Q}_{RL}^t \mathbf{v}_{Rr} \quad (4.37)$$

Substituindo (4.36) em (4.34), e (4.37) em (4.35), resulta:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{Cr} & \mathbf{Q}_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_r & \mathbf{0}_{Cr \times Ce} \\ \mathbf{0}_{Ce \times Cr} & \mathbf{C}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Cr} \\ \mathbf{v}_{Ce} \end{bmatrix} = -\mathbf{Q}_{CR} \mathbf{i}_{Re} - \mathbf{Q}_{CL} \mathbf{i}_{Le} - \mathbf{Q}_{CJ} \mathbf{i}_J \quad (4.38)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{Le} & -\mathbf{Q}_{LL}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_e & \mathbf{0}_{Le \times Lr} \\ \mathbf{0}_{Lr \times Le} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{Le} \\ \mathbf{i}_{Lr} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{EL}^t \mathbf{v}_E + \mathbf{Q}_{CL}^t \mathbf{v}_{Cr} + \mathbf{Q}_{RL}^t \mathbf{v}_{Rr} \quad (4.39)$$

Substituindo, agora, \mathbf{v}_{Ce} e \mathbf{i}_{Lr} , dados por (4.30) e (4.29), em (4.38) e (4.39), tem-se,

$$\mathbf{C} \frac{d\mathbf{v}_{Cr}}{dt} = -\mathbf{Q}_{CR} \mathbf{i}_{Re} - \mathbf{Q}_{CL} \mathbf{i}_{Le} - \mathbf{Q}_{CJ} \mathbf{i}_J + \hat{\mathbf{C}} \frac{d\mathbf{v}_E}{dt} \quad (4.40)$$

$$\mathbf{L} \frac{d\mathbf{i}_{Le}}{dt} = \mathbf{Q}_{EL}^t \mathbf{v}_E + \mathbf{Q}_{CL}^t \mathbf{v}_{Cr} + \mathbf{Q}_{RL}^t \mathbf{v}_{Rr} + \hat{\mathbf{L}} \frac{d\mathbf{i}_J}{dt} \quad (4.41)$$

onde,

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_r + \mathbf{Q}_{CC} \mathbf{C}_e \mathbf{Q}_{CC}^t \quad (4.42)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = -\mathbf{Q}_{CC} \mathbf{C}_e \mathbf{Q}_{EC}^t \quad (4.43)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_e + \mathbf{Q}_{LL}^t \mathbf{L}_r \mathbf{Q}_{LL} \quad (4.44)$$

$$\hat{\mathbf{L}} = -\mathbf{Q}_{LL}^t \mathbf{L}_r \mathbf{Q}_{LJ} \quad (4.45)$$

Observando-se as equações (4.40) e (4.41), fora as variáveis de estado, \mathbf{v}_{Cr} e \mathbf{i}_{Le} , e as fontes de tensão e corrente, \mathbf{v}_E e \mathbf{i}_J , estão sendo utilizadas as tensões dos ramos e correntes dos elos resistivos, \mathbf{v}_{Rr} e \mathbf{i}_{Re} , que devem ser eliminadas da formulação de estados. Para isto, representa-se de forma unificada as equações (4.40) e (4.41), resultando,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0}_{Cr \times Le} \\ \mathbf{0}_{Le \times Cr} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \mathbf{v}_{Cr} \\ \rho \mathbf{i}_{Le} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{Cr \times Le} & -\mathbf{Q}_{CL} \\ \mathbf{Q}_{CL}^t & \mathbf{0}_{Cr \times Le} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Cr} \\ \mathbf{i}_{Le} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_{CR} & \mathbf{0}_{Cr \times Rr} \\ \mathbf{0}_{Le \times Re} & \mathbf{Q}_{RL}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{Re} \\ \mathbf{v}_{Rr} \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{Cr \times E} & -\mathbf{Q}_{CJ} \\ \mathbf{Q}_{EL}^t & \mathbf{0}_{Le \times J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{i}_J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}} & \mathbf{0}_{Cr \times J} \\ \mathbf{0}_{Le \times E} & \hat{\mathbf{L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \mathbf{v}_E \\ \rho \mathbf{i}_J \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Para os ramos e elos resistivos, é verdadeira a seguinte relação, de acordo com a lei de Ohm.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{Re} \\ \mathbf{v}_{Rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Re} \\ \mathbf{i}_{Rr} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

onde \mathbf{G}_e e \mathbf{R}_r representam matrizes diagonais com as condutâncias dos elos e resistências dos ramos, respectivamente.

Então, agrupando as equações (4.28) e (4.31) e, substituindo em (4.47), obtém-se

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{Re} & -\mathbf{G}_e \mathbf{Q}_{RR}^t \\ \mathbf{R}_r \mathbf{Q}_{RR} & \mathbf{U}_{Rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{Re} \\ \mathbf{v}_{Rr} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_e \mathbf{Q}_{CR}^t & \mathbf{0}_{Re \times Le} \\ \mathbf{0}_{Rr \times Cr} & -\mathbf{R}_r \mathbf{Q}_{RL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Cr} \\ \mathbf{i}_{Le} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \mathbf{G}_e \mathbf{Q}_{ER}^t & \mathbf{0}_{Re \times J} \\ \mathbf{0}_{Rr \times E} & -\mathbf{R}_r \mathbf{Q}_{RJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{i}_J \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Finalmente, definindo as matrizes,

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{Re} & -\mathbf{G}_e \mathbf{Q}_{RR}^t \\ \mathbf{R}_r \mathbf{Q}_{RR} & \mathbf{U}_{Rr} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_e \mathbf{Q}_{CR}^t & \mathbf{0}_{Re \times Le} \\ \mathbf{0}_{Rr \times Cr} & -\mathbf{R}_r \mathbf{Q}_{RL} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_e \mathbf{Q}_{ER}^t & \mathbf{0}_{Re \times J} \\ \mathbf{0}_{Rr \times E} & -\mathbf{R}_r \mathbf{Q}_{RJ} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0}_{Cr \times Le} \\ \mathbf{0}_{Le \times Cr} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\mathbf{K}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{Cr \times Le} & -\mathbf{Q}_{CL} \\ \mathbf{Q}_{CL}^t & \mathbf{0}_{Cr \times Le} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_6 = \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_{CR} & \mathbf{0}_{Cr \times Rr} \\ \mathbf{0}_{Le \times Re} & \mathbf{Q}_{RL}^t \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$\mathbf{K}_7 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{Cr \times E} & -\mathbf{Q}_{CJ} \\ \mathbf{Q}_{EL}^t & \mathbf{0}_{Le \times J} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_8 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}} & \mathbf{0}_{Cr \times J} \\ \mathbf{0}_{Le \times E} & \hat{\mathbf{L}} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Pode-se reescrever (4.46) da seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} p\mathbf{v}_{Cr} \\ \rho\mathbf{i}_{Le} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_4^{-1}(\mathbf{K}_5 + \mathbf{K}_6\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{K}_2) \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Cr} \\ \mathbf{i}_{Le} \end{bmatrix} + \mathbf{K}_4^{-1}(\mathbf{K}_7 + \mathbf{K}_6\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{K}_3) \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{i}_J \end{bmatrix} + \mathbf{K}_4^{-1}\mathbf{K}_8 \begin{bmatrix} p\mathbf{v}_E \\ \rho\mathbf{i}_J \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Ou simplesmente,

$$\dot{\mathbf{x}}_E = \mathbf{A}\mathbf{x}_E + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_E + \mathbf{B}_2\dot{\mathbf{u}}_E \quad (4.54)$$

onde,

$$\mathbf{x}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Cr} \\ \mathbf{i}_{Le} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{i}_J \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

e,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{K}_4^{-1}(\mathbf{K}_5 + \mathbf{K}_6\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{K}_2) & \mathbf{B}_1 &= \mathbf{K}_4^{-1}(\mathbf{K}_7 + \mathbf{K}_6\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{K}_3) \\ \mathbf{B}_2 &= \mathbf{K}_4^{-1}\mathbf{K}_8 \end{aligned} \quad (4.56)$$

O leitor deve estar atento à parcela derivada das variáveis de entrada na formulação apresentada em (4.54). Note que a matriz \mathbf{B}_2 depende das matrizes \mathbf{C} , $\hat{\mathbf{C}}$, \mathbf{L} e $\hat{\mathbf{L}}$, definidas pelas expressões (4.42) a (4.45). Para redes que não apresentam degenerações devido a circuitos formados por capacitores e fontes de tensão, não há capacitores definidos como elos, ou seja, $\mathbf{C} = \mathbf{C}_r$ e $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$. Analogamente, se a rede não apresenta conjuntos de corte formados por indutores e fontes de corrente, não há indutores definidos como ramos, ou seja, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_e$ e $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$. E, por fim, se a rede não apresentar qualquer tipo de degeneração \mathbf{B}_2 será nula. Desta forma, fica explícito que se a rede apresentar qualquer espécie de degeneração, suas variáveis de estado dependerão, também, das derivadas das fontes independentes de tensão (degeneração de capacitores) e corrente (degeneração de indutores).

4.3.4 Variáveis de Saída

Como foi visto no capítulo anterior, a máquina síncrona pode ser representada como uma fonte de corrente, já que suas variáveis de estado são compostas pelas correntes do estator e rotor. Outro fator importante é a tensão terminal, imposta pela condição operativa da rede, servir de variável de entrada para o gerador. Estas características podem ser confirmadas pela equação (3.48). De outra forma, as variáveis de saída do gerador são constituídas pelas correntes do estator da máquina e, a variável de entrada corresponde à tensão terminal da máquina.

Em contrapartida, olhando-se para a rede elétrica, as correntes dos geradores formam o conjunto das variáveis de entrada da rede elétrica, como disposto em (4.54). Estas, por sua vez, não causam maiores preocupações, já que podem ser extraídas diretamente do modelo de estados da máquina síncrona.

Há a possibilidade, também, de existência de fontes de tensão nas redes elétricas, ou simplesmente, barras infinitas. Estas são amplamente difundidas na representação de equivalentes de sistemas e simplificação das análises subseqüentes.

Sendo assim, para que seja possível conectar máquinas síncronas à rede elétrica, há a necessidade de impor que as variáveis de saída da rede sejam compostas pelas tensões sobre as fontes de corrente, ou seja, nos geradores.

Para isto, considere a relação (4.33), repetida logo abaixo, que exprime as tensões das fontes de corrente \mathbf{v}_J em função das tensões dos ramos \mathbf{v}_E , \mathbf{v}_{Cr} , \mathbf{v}_{Rr} e \mathbf{v}_{Lr} .

$$\mathbf{v}_J = \mathbf{Q}_{EJ}^t \mathbf{v}_E + \mathbf{Q}_{CJ}^t \mathbf{v}_{Cr} + \mathbf{Q}_{RJ}^t \mathbf{v}_{Rr} + \mathbf{Q}_{LJ}^t \mathbf{v}_{Lr} \quad (4.33)$$

As variáveis de saída \mathbf{v}_J , da mesma forma que as derivadas das variáveis de estado \mathbf{x}_E , devem estar definidas em função das próprias variáveis de estado e de entrada. Portanto, deve-se, primeiramente, obter os vetores \mathbf{v}_{Rr} e \mathbf{v}_{Lr} em função das variáveis de estado e de entrada.

O vetor \mathbf{v}_{Rr} pode ser obtido a partir de (4.48), resultando (4.57).

$$\mathbf{v}_{Rr} = \mathbf{K}_{12}\mathbf{x}_E + \mathbf{K}_{13}\mathbf{u}_E \quad (4.57)$$

onde,

$$\mathbf{K}_9 = \mathbf{U}_{Rr} + \mathbf{R}_r \mathbf{Q}_{RR}^t \mathbf{G}_e \mathbf{Q}_{RR} \quad (4.58)$$

$$\mathbf{K}_{10} = -\begin{bmatrix} \mathbf{R}_r \mathbf{Q}_{RR} \mathbf{G}_e \mathbf{Q}_{CR}^t & \mathbf{R}_r \mathbf{Q}_{RL} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

$$\mathbf{K}_{11} = -\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{Rr \times E} & \mathbf{R}_r \mathbf{Q}_{RJ} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_9^{-1} \mathbf{K}_{10} \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_{13} = \mathbf{K}_9^{-1} \mathbf{K}_{11} \quad (4.61)$$

Já para o vetor \mathbf{v}_{Lr} , lança-se mão das relações (4.29) e (4.35), resultando a seguinte expressão:

$$\mathbf{v}_{Lr} = \mathbf{L}_r \mathbf{p}i_{Lr} = \mathbf{L}_r (-\mathbf{Q}_{LL} \mathbf{p}i_{Le} - \mathbf{Q}_{LJ} \mathbf{p}i_J) \quad (4.62)$$

Como a derivada $\mathbf{p}i_{Le}$ pode ser retirada da expressão (4.54), reescreve-se (4.62) da seguinte maneira,

$$\mathbf{v}_{Lr} = \mathbf{K}_{14}\mathbf{x}_E + \mathbf{K}_{15}\mathbf{u}_E + \mathbf{K}_{16}\dot{\mathbf{u}}_E \quad (4.63)$$

onde,

$$\mathbf{K}_{14} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{Lr \times Cr} & -\mathbf{L}_r \mathbf{Q}_{LL} \end{bmatrix} \mathbf{A} \quad (4.64)$$

$$\mathbf{K}_{15} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{Lr \times Cr} & -\mathbf{L}_r \mathbf{Q}_{LL} \end{bmatrix} \mathbf{B}_1 \quad (4.65)$$

$$\mathbf{K}_{16} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{Lr \times E} & -\mathbf{L}_r \mathbf{Q}_{LJ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{Lr \times Cr} & -\mathbf{L}_r \mathbf{Q}_{LL} \end{bmatrix} \mathbf{B}_2 \quad (4.66)$$

Substituindo, então, as expressões (4.57) e (4.63) em (4.33), resulta a relação (4.67) para as tensões nas fontes de corrente \mathbf{v}_J , dependente apenas das variáveis de estado e de entrada.

$$\mathbf{v}_J = \mathbf{C}\mathbf{x}_E + \mathbf{D}_1\mathbf{u}_E + \mathbf{D}_2\dot{\mathbf{u}}_E \quad (4.67)$$

onde,

$$\mathbf{K}_{17} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{CJ}^t & \mathbf{0}_{J \times L_e} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

$$\mathbf{K}_{18} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{EJ}^t & \mathbf{0}_{J \times J} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{K}_{17} + \mathbf{Q}_{RJ}^t \mathbf{K}_{12} + \mathbf{Q}_{LJ}^t \mathbf{K}_{14} \quad (4.70)$$

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{K}_{18} + \mathbf{Q}_{RJ}^t \mathbf{K}_{13} + \mathbf{Q}_{LJ}^t \mathbf{K}_{15} \quad (4.71)$$

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{Q}_{LJ}^t \mathbf{K}_{16} \quad (4.72)$$

4.3.5 Equações de Estado na Referência dq

Devido às características dos sistemas elétricos de potência, abordadas no item 4.3.2, o modelo de estados para o circuito equivalente, resumido pelas equações (4.54) e (4.67), pode ser expandido para as fases abc do sistema elétrico de potência. Desta forma, obtém-se,

$$\dot{\mathbf{x}}_E^{abc} = \mathbf{A}^{abc} \mathbf{x}_E^{abc} + \mathbf{B}_1^{abc} \mathbf{u}_E^{abc} + \mathbf{B}_2^{abc} \dot{\mathbf{u}}_E^{abc} \quad (4.73)$$

$$\mathbf{v}_J^{abc} = \mathbf{C}^{abc} \mathbf{x}_E^{abc} + \mathbf{D}_1^{abc} \mathbf{u}_E^{abc} + \mathbf{D}_2^{abc} \dot{\mathbf{u}}_E^{abc} \quad (4.74)$$

onde, cada matriz de coeficientes com o índice superior abc é o resultado do produto de Kronecker [EVES, 1980] entre a matriz de mesmo nome e a matriz identidade \mathbf{U}_3 , como denotado abaixo para uma matriz \mathbf{M} qualquer.

$$\mathbf{M}^{abc} = \mathbf{M} \otimes \mathbf{U}_3 \quad (4.75)$$

E, cada vetor de estados, ou de entradas, passa a ser composto pelas variáveis correspondentes às três fases em blocos, como se segue para um vetor \mathbf{y} qualquer com k variáveis.

$$\mathbf{y}^{abc} = [y_1^a \quad y_1^b \quad y_1^c \quad \cdots \quad y_k^a \quad y_k^b \quad y_k^c]^t \quad (4.76)$$

Define-se, então, a transformação \mathbf{T}_K a seguir,

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{U}_k \otimes \mathbf{P} \quad (4.77)$$

onde o índice inferior k acompanha a dimensão da matriz identidade utilizada. Já a matriz \mathbf{P} é a transformação de Park, dada em (3.10), com ângulo $\theta = \theta_B$, definido em (4.78), que realiza a projeção de quaisquer variáveis trifásicas no sistema de coordenadas dq_B , acompanhando a Figura 3.1.

$$\theta_B = \omega_B t + \pi/2 \text{ [rad]} \quad (4.78)$$

Uma propriedade desta transformação \mathbf{T}_K é justamente referir um vetor qualquer \mathbf{y}^{abc} , como denotado em (4.76), para o sistema de coordenadas dq_B .

$$\mathbf{y}^{0dq} = \mathbf{T}_k \mathbf{y}^{abc} \quad \text{e} \quad \mathbf{y}^{abc} = \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{y}^{0dq} \quad (4.79)$$

Em fim, multiplicando (4.73) por \mathbf{T}_n , com $n = Cr + Le$, e levando em conta as expressões dadas por (4.79) e que $m = E + J$, tem-se,

$$\mathbf{T}_n \dot{\mathbf{x}}_E^{abc} = \mathbf{T}_n \mathbf{A}^{abc} \mathbf{T}_n^{-1} \mathbf{x}_E^{0dq} + \mathbf{T}_n \mathbf{B}_1^{abc} \mathbf{T}_m^{-1} \mathbf{u}_E^{0dq} + \mathbf{T}_n \mathbf{B}_2^{abc} \dot{\mathbf{u}}_E^{abc} \quad (4.80)$$

Pelas propriedades do produto de Kronecker e da transformação de Park \mathbf{P} , são verdadeiras as seguintes relações:

$$\mathbf{T}_n \mathbf{A}^{abc} \mathbf{T}_n^{-1} = (\mathbf{U}_n \otimes \mathbf{P})(\mathbf{A} \otimes \mathbf{U}_3)(\mathbf{U}_n \otimes \mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{U}_3 = \mathbf{A}^{abc} \quad (4.81)$$

$$\mathbf{T}_n \mathbf{B}_1^{abc} \mathbf{T}_m^{-1} = (\mathbf{U}_n \otimes \mathbf{P})(\mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{U}_3)(\mathbf{U}_m \otimes \mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{U}_3 = \mathbf{B}_1^{abc} \quad (4.82)$$

$$\mathbf{T}_n \mathbf{B}_2^{abc} \mathbf{T}_m^{-1} = (\mathbf{U}_n \otimes \mathbf{P})(\mathbf{B}_2 \otimes \mathbf{U}_3)(\mathbf{U}_m \otimes \mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{B}_2 \otimes \mathbf{U}_3 = \mathbf{B}_2^{abc} \quad (4.83)$$

e,

$$\mathbf{T}_n \dot{\mathbf{x}}_E^{abc} = \dot{\mathbf{x}}_E^{0dq} - \omega_B (\mathbf{U}_n \otimes \mathbf{K}) \mathbf{x}_E^{0dq} = \dot{\mathbf{x}}_E^{0dq} - \omega_B \mathbf{K}_n \mathbf{x}_E^{0dq} \quad (4.84)$$

$$\mathbf{T}_m \dot{\mathbf{u}}_E^{abc} = \dot{\mathbf{u}}_E^{0dq} - \omega_B (\mathbf{U}_m \otimes \mathbf{K}) \mathbf{u}_E^{0dq} = \dot{\mathbf{u}}_E^{0dq} - \omega_B \mathbf{K}_m \mathbf{u}_E^{0dq} \quad (4.85)$$

onde a matriz \mathbf{K} é a mesma dada por (3.15).

Finalmente, substituindo as expressões (4.81) a (4.85) em (4.80), resulta,

$$\dot{\mathbf{x}}_E^{0dq} = (\mathbf{A}^{abc} + \omega_B \mathbf{K}_n) \mathbf{x}_E^{0dq} + (\mathbf{B}_1^{abc} - \omega_B \mathbf{B}_2^{abc} \mathbf{K}_m) \mathbf{u}_E^{0dq} + \mathbf{B}_2^{abc} \dot{\mathbf{u}}_E^{abc} \quad (4.86)$$

Analogamente, conclui-se, a partir de (4.74) que,

$$\mathbf{v}_J^{0dq} = \mathbf{C}^{abc} \mathbf{x}_E^{0dq} + (\mathbf{D}_1^{abc} - \omega_B \mathbf{D}_2^{abc} \mathbf{K}_m) \mathbf{u}_E^{0dq} + \mathbf{D}_2^{0dq} \dot{\mathbf{u}}_E^{0dq} \quad (4.87)$$

Portanto, definindo as seguintes matrizes,

$$\mathbf{A}^{0dq} = \mathbf{A}^{abc} + \omega_B \mathbf{K}_n \quad \mathbf{B}_1^{0dq} = \mathbf{B}_1^{abc} - \omega_B \mathbf{B}_2^{abc} \mathbf{K}_m \quad \mathbf{B}_2^{0dq} = \mathbf{B}_2^{abc} \quad (4.88)$$

$$\mathbf{C}^{0dq} = \mathbf{C}^{abc} \quad \mathbf{D}_2^{0dq} = \mathbf{D}_2^{abc} - \omega_B \mathbf{D}_1^{abc} \mathbf{K}_m \quad \mathbf{D}_2^{0dq} = \mathbf{D}_2^{abc} \quad (4.89)$$

Resulta nas seguintes equações matriciais que representam as equações de estado de uma rede elétrica nas coordenadas dq_B .

$$\dot{\mathbf{x}}_E^{0dq} = \mathbf{A}^{0dq} \mathbf{x}_E^{0dq} + \mathbf{B}_1^{0dq} \mathbf{u}_E^{0dq} + \mathbf{B}_2^{0dq} \dot{\mathbf{u}}_E^{0dq} \quad (4.90)$$

$$\mathbf{v}_J^{0dq} = \mathbf{C}^{0dq} \mathbf{x}_E^{0dq} + \mathbf{D}_1^{0dq} \mathbf{u}_E^{0dq} + \mathbf{D}_2^{0dq} \dot{\mathbf{u}}_E^{0dq} \quad (4.91)$$

Ou, simplesmente, ignorando-se as variáveis sobrepostas ao eixo 0.

$$\dot{\mathbf{x}}_E^{dq} = \mathbf{A}^{dq} \mathbf{x}_E^{dq} + \mathbf{B}_1^{dq} \mathbf{u}_E^{dq} + \mathbf{B}_2^{dq} \dot{\mathbf{u}}_E^{dq} \quad (4.92)$$

$$\mathbf{v}_J^{dq} = \mathbf{C}^{dq} \mathbf{x}_E^{dq} + \mathbf{D}_1^{dq} \mathbf{u}_E^{dq} + \mathbf{D}_2^{dq} \dot{\mathbf{u}}_E^{dq} \quad (4.93)$$

As matrizes com índices superiores dq são calculadas de forma análoga à apresentada nos últimos parágrafos, só que considerando a transformação \mathbf{P} sem a sua primeira linha, e a matriz \mathbf{K} sem a primeira linha e a primeira coluna. Desta forma, apenas as variáveis nos eixos d e q permanecem.

4.4 NORMALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ESTADO

Até o momento, foram considerados apenas valores de pico por fase tanto para tensões como para as correntes durante a modelagem da rede elétrica. No entanto, há a necessidade de se normalizar as equações da rede elétrica com o mesmo

conjunto de bases escolhido para as máquinas síncronas para que seja possível a interconexão entre elas (vide Quadro 3.2 na página 34).

Seja, então, o conjunto de equações denotado em (4.90) e (4.91), que pode ser reescrito em termos de valores normalizados de tensão e corrente da seguinte forma:

$$p^{pu} \mathbf{x}_{Epu}^{0dq} = \mathbf{A}_{pu}^{0dq} \mathbf{x}_{Epu}^{0dq} + \mathbf{B}_{1pu}^{0dq} \mathbf{u}_{Epu}^{0dq} + \mathbf{B}_{2pu}^{0dq} p^{pu} \mathbf{u}_{Epu}^{0dq} \quad (4.94)$$

$$\mathbf{v}_{Jpu}^{0dq} = \mathbf{C}_{pu}^{0dq} \mathbf{x}_{Epu}^{0dq} + \mathbf{D}_{1pu}^{0dq} \mathbf{u}_{Epu}^{0dq} + \mathbf{D}_{2pu}^{0dq} p^{pu} \mathbf{u}_{Epu}^{0dq} \quad (4.95)$$

onde,

$$\mathbf{A}_{pu}^{0dq} = \frac{1}{\omega_B} (\mathbf{S}_X^{abc})^{-1} \mathbf{A}^{0dq} \mathbf{S}_X^{abc} \quad \mathbf{B}_{1pu}^{0dq} = \frac{1}{\omega_B} (\mathbf{S}_X^{abc})^{-1} \mathbf{B}_1^{0dq} \mathbf{S}_U^{abc} \quad \mathbf{B}_{2pu}^{0dq} = (\mathbf{S}_X^{abc})^{-1} \mathbf{B}_2^{0dq} \mathbf{S}_U^{abc} \quad (4.96)$$

$$\mathbf{C}_{pu}^{0dq} = \frac{1}{V_B} \mathbf{C}^{0dq} \mathbf{S}_X^{abc} \quad \mathbf{D}_{1pu}^{0dq} = \frac{1}{V_B} \mathbf{D}_1^{0dq} \mathbf{S}_U^{abc} \quad \mathbf{D}_{2pu}^{0dq} = \frac{\omega_B}{V_B} \mathbf{D}_2^{0dq} \mathbf{S}_U^{abc} \quad (4.97)$$

$$\mathbf{S}_X^{abc} = \begin{bmatrix} V_B \mathbf{U}_{Cr}^{abc} & \mathbf{0}_{3(Cr \times Le)} \\ \mathbf{0}_{3(Le \times Cr)} & I_B \mathbf{U}_{Le}^{abc} \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_U^{abc} = \begin{bmatrix} V_B \mathbf{U}_E^{abc} & \mathbf{0}_{3(E \times J)} \\ \mathbf{0}_{3(J \times E)} & I_B \mathbf{U}_J^{abc} \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

Após uma análise dimensional de cada matriz apresentada em (4.96) e (4.97), separadamente, considerando as definições dadas por (4.88) e (4.89), conclui-se:

$$\mathbf{A}_{pu}^{0dq} = \mathbf{A}_{pu}^{abc} + \mathbf{K}_n \quad \mathbf{B}_{1pu}^{0dq} = \mathbf{B}_{1pu}^{abc} - \mathbf{B}_{2pu}^{abc} \mathbf{K}_m \quad \mathbf{B}_{2pu}^{0dq} = \mathbf{B}_{2pu}^{abc} \quad (4.99)$$

$$\mathbf{C}_{pu}^{0dq} = \mathbf{C}_{pu}^{abc} \quad \mathbf{D}_{2pu}^{0dq} = \mathbf{D}_{1pu}^{abc} - \mathbf{D}_{2pu}^{abc} \mathbf{K}_m \quad \mathbf{D}_{1pu}^{0dq} = \mathbf{D}_{1pu}^{abc} \quad (4.100)$$

onde todas as matrizes com índices superiores abc , dadas por unidade, são calculadas de acordo com os itens 4.3.3 e 4.3.4, só que utilizando os parâmetros de capacitância, indutância e resistência normalizados por suas respectivas bases.

4.5 LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ESTADO

As equações de estado normalizadas, dadas pelas expressões (4.94) e (4.95), são lineares, portanto o processo de linearização é direto, não trazendo grande dificuldade para o leitor. Assim, pode-se reescrever as expressões mencionadas como em (4.101) e (4.102). Note que o subscrito pu foi eliminado de forma a simplificar a notação.

$$\rho \Delta \mathbf{x}_E^{0dq} = \mathbf{A}^{0dq} \Delta \mathbf{x}_E^{0dq} + \mathbf{B}_{1J}^{0dq} \Delta \mathbf{i}_J^{0dq} + \mathbf{B}_{2J}^{0dq} \rho \Delta \mathbf{i}_J^{0dq} \quad (4.101)$$

$$\Delta \mathbf{v}_J^{0dq} = \mathbf{C}^{0dq} \Delta \mathbf{x}_E^{0dq} + \mathbf{D}_{1J}^{0dq} \Delta \mathbf{i}_J^{0dq} + \mathbf{D}_{2J}^{0dq} \rho \Delta \mathbf{i}_J^{0dq} \quad (4.102)$$

onde \mathbf{B}_{1J}^{0dq} , \mathbf{B}_{2J}^{0dq} , \mathbf{D}_{1J}^{0dq} e \mathbf{D}_{2J}^{0dq} são partições das matrizes \mathbf{B}_1^{0dq} , \mathbf{B}_2^{0dq} , \mathbf{D}_1^{0dq} e \mathbf{D}_2^{0dq} , respectivamente, correspondentes às fontes de corrente \mathbf{i}_J^{0dq} . Isto se faz necessário já que as barras infinitas são constantes tanto em módulo como em ângulo.

Assim, conclui-se a modelagem das redes elétricas que compõe os sistemas de transmissão num sistema base de coordenadas dq , que possibilita a sua conexão com os geradores que também foram modelados no mesmo sistema referencial. Este acoplamento é apresentado com maiores detalhes no apêndice A.

CAPÍTULO 5

EIXO TURBINA-GERADOR

*"A mente que se abre a uma nova idéia jamais retorna ao tamanho original".
Albert Einstein (1879-1955)*

5.1 INTRODUÇÃO

Os eixos das turbinas de turbogeradores são sistemas mecânicos complexos, compostos por várias seções (por exemplo, estágios de alta e baixa pressão) e dotados de inúmeras frequências naturais. Apesar destes sistemas poderem ser representados por um sistema contínuo, no qual o eixo é subdividido em pequenas seções cilíndricas, este tipo de abordagem é raramente utilizado. Quando os modos torcionais de interesse estão na faixa subsíncrona, tem sido mostrado pela prática que utilizar um modelo simplificado com parâmetros concentrados é frequentemente recomendado [ONG, 1997].

Portanto, neste capítulo será apresentado o modelo do eixo mecânico turbina-gerador destinado a estudos de RSS, cujo maior interesse é caracterizar adequadamente o comportamento dinâmico de tais eixos quando estão sob ação de torques oscilantes a frequências abaixo da síncrona. Adicionalmente, serão

discutidos aspectos relacionados à análise modal, fundamental para a construção do modelo que será apresentado, e ao comportamento dinâmico dos eixos de hidrogeradores frente a oscilações subsíncronas.

5.2 MODELO DE EIXO COM PARÂMETROS CONCENTRADOS

5.2.1 Formulação Básica

O eixo turbina-gerador pode ser considerado, sem perda de generalidade, como sendo um conjunto finito de seções rotativas conectadas por molas e amortecedores, como mostra a Figura 5.1.

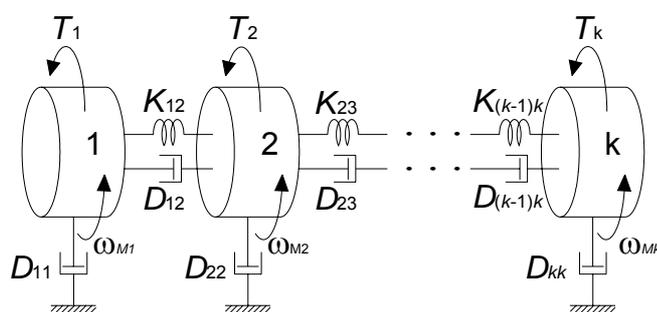


Figura 5.1 - Modelo massa-mola para eixos de turbinas de turbogeradores.

As molas entre as seções, representadas pelas constantes elásticas K_{ij} , caracterizam a elasticidade do eixo entre as seções i e j . Os amortecedores D_{ii} representam o atrito viscoso entre o fluido de trabalho e as pás da turbina e, atrito nos mancais em cada seção i , enquanto que aqueles denotados pelas constantes D_{ij} caracterizam o fenômeno de histerese mecânica do eixo entre as seções i e j . Por último, aparecem as grandezas T_i e ω_{Mi} , representando os torques aplicados a cada seção e sua respectiva velocidade angular.

De acordo com a lei de Newton aplicada a corpos rotativos, tem-se para a i -ésima seção a seguinte relação:

$$J_i \frac{d^2\theta_{Mi}}{dt^2} = T_i - K_{i(i-1)}(\theta_{Mi} - \theta_{Mi-1}) - K_{i(i+1)}(\theta_{Mi} - \theta_{Mi+1}) - D_{i(i-1)}(\omega_{Mi} - \omega_{Mi-1}) - D_{i(i+1)}(\omega_{Mi} - \omega_{Mi+1}) - D_{ii}\omega_{Mi} \quad [\text{Nm}] \quad (5.1)$$

onde, J_i é o momento de inércia da seção i , sendo a sua velocidade angular dada por:

$$\frac{d\theta_{Mi}}{dt} = \omega_{Mi} - \omega_{MB} \quad [\text{rad/s}] \quad (5.2)$$

O ângulo θ_{Mi} determina o deslocamento angular entre a i -ésima seção e uma referência com rotação constante e idêntica à nominal do eixo, ω_{MB} .

Reordenando a equação (5.1), obtém-se,

$$J_i \frac{d^2\theta_{Mi}}{dt^2} = T_i + K_{i(i-1)}\theta_{Mi-1} - (K_{i(i-1)} + K_{i(i+1)})\theta_{Mi} + K_{i(i+1)}\theta_{Mi+1} + D_{i(i-1)}\omega_{Mi-1} - (D_{i(i-1)} + D_{ii} + D_{i(i+1)})\omega_{Mi} + D_{i(i+1)}\omega_{Mi+1} \quad [\text{Nm}] \quad (5.3)$$

Esta é equação diferencial de segunda ordem que determina o comportamento dinâmico da seção i do eixo considerado.

5.2.2 Normalização

Para a normalização da equação (5.3) deve-se utilizar as mesmas grandezas base usadas para a normalização do gerador, ao qual este eixo está conectado. Estas bases estão denotadas no Quadro 3.2. Vale ressaltar que as rotações ω_{Mi} são grandezas do rotor da máquina, por isto há a necessidade de se considerar uma base de rotação do rotor, ou seja, ω_{MB} .

Portanto, dividindo-se (5.3) por T_B , tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{J_i}{T_B} \frac{d^2 \theta_{Mi}}{dt^2} = T_i^{pu} + \frac{1}{T_B} \left[K_{i(i-1)} \theta_{Mi-1} - (K_{i(i-1)} + K_{i(i+1)}) \theta_{Mi} + K_{i(i+1)} \theta_{Mi+1} \right] + \\ + \frac{\omega_{MB}}{T_B} \left[D_{i(i-1)} \omega_{Mi-1}^{pu} - (D_{i(i-1)} + D_{ii} + D_{i(i+1)}) \omega_{Mi}^{pu} + D_{i(i+1)} \omega_{Mi+1}^{pu} \right] \quad [\text{pu}] \end{aligned} \quad (5.4)$$

No entanto, define-se a constante de inércia H_i como sendo a razão entre a energia cinética E_c armazenada pela seção i a rotação base ω_{MB} , e a potência base trifásica do gerador ao qual o eixo está conectado. Assim,

$$H_i = \frac{E_c}{S_{3\phi B}} = \frac{1}{2} \frac{J_i \omega_{MB}^2}{S_{3\phi B}} = \frac{1}{2} \frac{J_i \omega_{MB}}{T_B} \quad [\text{s}] \quad (5.5)$$

E, também, as grandezas base para as constantes elásticas e de amortecimento, dadas a seguir.

$$K_B = T_B = \frac{S_{3\phi B}}{\omega_{MB}} \qquad D_B = \frac{T_B}{\omega_{MB}} = \frac{S_{3\phi B}}{\omega_{MB}^2} \quad (5.6)$$

Logo, reescrevendo (5.4) utilizando-se das expressões dadas por (5.5) e (5.6), resulta,

$$\begin{aligned} \frac{2H_i}{\omega_{MB}} \frac{d^2 \theta_{Mi}}{dt^2} = T_i^{pu} + K_{i(i-1)}^{pu} \theta_{Mi-1} - (K_{i(i-1)}^{pu} + K_{i(i+1)}^{pu}) \theta_{Mi} + K_{i(i+1)}^{pu} \theta_{Mi+1} + \\ + D_{i(i-1)}^{pu} \omega_{Mi-1}^{pu} - (D_{i(i-1)}^{pu} + D_{ii}^{pu} + D_{i(i+1)}^{pu}) \omega_{Mi}^{pu} + D_{i(i+1)}^{pu} \omega_{Mi+1}^{pu} \quad [\text{pu}] \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde, todos os parâmetros são dados por unidade nas bases da máquina síncrona associada, exceto os deslocamentos angulares θ_{Mi} , que são dados em radianos.

5.2.3 Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

Primeiramente, as equações diferenciais de segunda ordem, que assumem a forma denotada por (5.7), podem ser agrupadas matricialmente como se segue.

$$\frac{2}{\omega_{MB}} \mathbf{H} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_M + \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\omega}}_M + \mathbf{K} \boldsymbol{\theta}_M = \mathbf{T} \text{ [pu]} \quad (5.8)$$

e,

$$\mathbf{H} = \text{diag}(H_1, H_2, \dots, H_n) \text{ [s]} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{D} = (d_{ij})_{n \times n} \begin{cases} d_{ij} = -D_{ij}^{pu}, & i \neq j \\ d_{ii} = \sum_{j=1}^n D_{ij}^{pu} \end{cases} \text{ [pu]} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{K} = (k_{ij})_{n \times n} \begin{cases} k_{ij} = -K_{ij}^{pu}, & i \neq j \\ k_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K_{ij}^{pu} \end{cases} \text{ [pu/rad]} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{T} = [T_1^{pu} \quad T_2^{pu} \quad \dots \quad T_n^{pu}]^t \text{ [pu]} \quad (5.12)$$

$$\boldsymbol{\theta}_M = [\theta_{M1} \quad \theta_{M2} \quad \dots \quad \theta_{Mn}]^t \text{ [rad]} \quad (5.13)$$

$$\boldsymbol{\omega}_M = [\omega_{M1}^{pu} \quad \omega_{M2}^{pu} \quad \dots \quad \omega_{Mn}^{pu}]^t \text{ [pu]} \quad (5.14)$$

Mas, tomando que a relação entre as velocidades e os deslocamentos angulares é dada pela expressão (5.2), pode-se escrever a equação (5.8) apenas em função dos deslocamentos angulares, como se segue.

$$\frac{2}{\omega_{MB}} \mathbf{H} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_M + \frac{1}{\omega_{MB}} \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\theta}}_M + \mathbf{K} \boldsymbol{\theta}_M = \mathbf{T} - \mathbf{D} \boldsymbol{\omega}_{MB} \text{ [pu]} \quad (5.15)$$

onde, $\boldsymbol{\omega}_{MB} = [1 \quad \dots \quad 1]_{1 \times n}^t$.

Nota-se na equação (5.15) sua característica linear, a qual permite considerar apenas variações das variáveis de estado e de entrada em torno de uma condição de equilíbrio pré-definida, sem perda de generalidade. Desta forma, define-se novas variáveis de estado e de entrada para o modelo, dadas a seguir.

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_M = \boldsymbol{\theta}_M - \boldsymbol{\theta}_{M0} \text{ [rad]} \quad (5.16)$$

$$\Delta \boldsymbol{\omega}_M = \boldsymbol{\omega}_M - \boldsymbol{\omega}_{MB} \text{ [pu]} \quad (5.17)$$

$$\Delta \mathbf{T} = \mathbf{T} - \mathbf{T}_0 \text{ [pu]} \quad (5.18)$$

onde, as condições iniciais θ_{M0} e \mathbf{T}_0 se relacionam como mostrado pela expressão (5.19), obtida considerando as derivadas da equação (5.15) nulas⁸.

$$\mathbf{K}\theta_{M0} + \mathbf{D}\omega_{MB} = \mathbf{T}_0 \text{ [pu]} \quad (5.19)$$

Logo, reescrevendo a equação (5.15) com as variáveis definidas em (5.16) e (5.18), resulta a equação (5.20).

$$\frac{2}{\omega_{MB}} \mathbf{H} \Delta \ddot{\theta}_M + \frac{1}{\omega_{MB}} \mathbf{D} \Delta \dot{\theta}_M + \mathbf{K} \Delta \theta_M = \Delta \mathbf{T} \text{ [pu]} \quad (5.20)$$

A equação anterior modela o comportamento dinâmico de um eixo mecânico com n seções rotativas, em torno de uma condição operativa pré-estabelecida. Diferentemente dos sistemas não-lineares linearizados em torno de um ponto crítico, a equação (5.20), tem validade frente a variações quaisquer, devido a característica linear apresentada pela equação (5.15).

5.2.4 Equações de Estado

Considerando, agora, a relação (5.17), pode-se reescrever (5.20) como um sistema de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem, onde n equações são correspondentes aos deslocamentos angulares $\Delta \theta_M$ e as outras n equações relativas às variações de velocidades angulares $\Delta \omega_M$. Assim,

$$p^{pu} \mathbf{x}_M = \mathbf{A}_M \mathbf{x}_M + \mathbf{B}_M \mathbf{u}_M \text{ [pu/pu]} \quad (5.21)$$

onde,

⁸ A equação (5.19) não é recomendada para se calcular os deslocamentos angulares θ_{M0} em função dos torques \mathbf{T}_0 , já que a matriz \mathbf{K} é singular por definição. Caso se queira calculá-los, é necessário formular o problema considerando deslocamentos angulares entre seções adjacentes [ONG, 1998] e, depois somá-los à referência angular considerada.

$$\mathbf{A}_M = \frac{1}{\omega_B} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{U}_n \\ \mathbf{K}_M & \mathbf{D}_M \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_M = \frac{1}{\omega_B} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} \\ \frac{1}{2} \mathbf{H}^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$$\mathbf{K}_M = -\frac{\omega_{MB}}{2} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{K} \quad \mathbf{D}_M = -\frac{1}{2} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{D} \quad (5.23)$$

$$\mathbf{x}_M = \begin{bmatrix} \Delta \theta_M^{pu} \\ \Delta \omega_M \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta \theta_M^{pu} = \frac{1}{\omega_{MB}} \Delta \theta_M \quad \mathbf{u}_M = \Delta \mathbf{T} \quad (5.24)$$

A frequência ω_B , que aparece nas relações definidas acima, caracteriza a normalização, inclusive das derivadas definidas pelo operador p^{pu} . Esta escolha mostra-se apropriada, já que foi considerada, também, para as derivadas das máquinas síncronas e da rede elétrica. Adicionalmente, os ângulos também são expressos por unidade na base angular que coincide com a base de velocidade angular mecânica ω_{MB} .

5.2.5 Variáveis de Saída

Como pode ser verificado na expressão (3.88), o modelo linearizado para máquina síncrona quando conectada a um sistema de potência tem como variáveis de entrada, variações de ângulos de carga δ e de velocidade angular ω . Por isto, para que seja possível a conexão entre sistemas mecânicos e elétricos deve-se determinar a relação entre os ângulos e rotações, acima mencionadas, com as grandezas mecânicas do eixo.

Primeiramente, deve-se ter em mente que a equação (3.88) utiliza apenas grandezas elétricas por unidade e, as equações de estado formuladas no item anterior utilizam grandezas mecânicas por unidade. Assim sendo, toma-se as relações definidas em (3.3).

$$\theta = \frac{\mathbf{p}}{2} \theta_M \text{ [rad]} \quad \omega = \frac{\mathbf{p}}{2} \omega_M \text{ [rad/s]} \quad (3.3)$$

Normalizando as expressões acima, obtém-se,

$$\theta^{pu} = \theta_M^{pu} \text{ [pu]} \qquad \omega^{pu} = \omega_M^{pu} \text{ [pu]} \qquad (5.25)$$

Estas expressões denotam que, em pu, grandezas elétricas e mecânicas são idênticas entre si. Portanto, as variações do ângulo de carga de um gerador i são idênticas às variações angulares do seu rotor, quando consideradas apenas grandezas por unidade.

Considerando que o gerador i seja representado pela g -ésima massa girante acoplada a um eixo com n seções, pode-se escrever a seguinte expressão.

$$\Delta\Omega_i = \begin{bmatrix} \Phi_i & \mathbf{0}_{1 \times n} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & \Phi_i \end{bmatrix} \mathbf{x}_{Mi} = \mathbf{C}_{Mi} \mathbf{x}_{Mi} \qquad (5.26)$$

onde,

$$\Delta\Omega_i = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_{\delta i} \\ \Delta\mathbf{u}_{\omega i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\mathcal{S}_{iB} \\ \Delta\omega_i \end{bmatrix} \qquad (5.27)$$

$$\Phi_i = (\phi_p)_{1 \times n} \begin{cases} \phi_p = 1, p = g \\ \phi_q = 0, p \neq g \end{cases} \qquad (5.28)$$

A relação (5.26) expressa as variáveis de saída de eixo do gerador i em função de suas variáveis de estado \mathbf{x}_{Mi} , cujo comportamento é descrito pela expressão (5.21). São estas variáveis que servem de entrada para o gerador síncrono modelado pela expressão (3.88).

5.2.6 Variáveis de Entrada

As variáveis de entrada do modelo de eixo são compostas pelos torques aplicados a cada estágio da turbina e ao gerador, como pode ser observado pela equação (5.21).

Os torques aplicados a cada estágio da turbina dependem do modelo utilizado de turbina. Estes modelos diferem de acordo com a estrutura física e configuração do sistema de suprimento de energia, embora um modelo geral tanto para turbinas a vapor como hidráulicas tenha sido introduzido pela referência [IEEE COMMITTEE REPORT, 1973]. No entanto, muitos estudos de RSS desconsideram os modelos de turbinas, já que as constantes de tempo envolvidas nos processos térmicos são muito elevadas e influem marginalmente nas frequências naturais e acoplamentos entre geradores e a rede elétrica [ANDERSON, 1988]. Por esta razão, as entradas correspondentes a torques aplicados na turbina não serão representadas.

Portanto, ao desconsiderar as variações dos torques aplicados a cada seção da turbina, com exceção do torque eletromagnético aplicado no gerador, conclui-se que,

$$\mathbf{u}_M = -\Phi_i^t \Delta T_{Ei} \quad (5.29)$$

onde Φ_i é definido pela expressão (5.28) e ΔT_{Ei} é a variação do torque eletromagnético no gerador i , apresentado pela expressão (3.97). Já o sinal negativo aparece porque a rede elétrica representa uma carga para o eixo.

5.3 ANÁLISE MODAL DO EIXO

Primeiramente, ao ignorar os termos correspondentes aos amortecimentos e às excitações da equação diferencial (5.20), obtém-se um sistema de equações diferenciais não-forçadas do eixo, como se segue.

$$\Delta \ddot{\theta}_M + \frac{\omega_{MB}}{2} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{K} \Delta \theta_M = \mathbf{0} \quad (5.30)$$

onde a matriz $\frac{\omega_{MB}}{2} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{K}$ é, em geral, uma matriz tri-diagonal não-simétrica, lembrando as definições de \mathbf{H} e \mathbf{K} , dados por (5.9) e (5.11).

Esta matriz, por sua vez, pode ser decomposta em autovalores e autovetores como denotado na expressão (5.31).

$$\frac{\omega_{MB}}{2} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{K} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^{-1} \quad (5.31)$$

onde,

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n] \quad (5.32)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (5.33)$$

Sendo cada vetor \mathbf{q}_j o autovetor associado ao autovalor λ_j , correspondente a uma das raízes do polinômio característico de ordem n , dado abaixo.

$$\det\left(\frac{\omega_{MB}}{2} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{K} - \lambda \mathbf{U}_n\right) = 0 \quad (5.34)$$

A matriz \mathbf{Q} não é única, sendo usual considerar cada autovetor normalizado por sua norma euclidiana ou com relação à componente referente à seção do gerador [IEEE SSR WORKING GROUP, 1980 e 1985].

Sabe-se, ainda, que cada autovetor \mathbf{q}_j se relaciona com o seu respectivo autovalor λ_j como mostrado em (5.35).

$$\frac{\omega_{MB}}{2} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{q}_j = \lambda_j \mathbf{q}_j \quad (5.35)$$

O que equivale a escrever a seguinte expressão:

$$\frac{2}{\omega_{MB}} \lambda_j \mathbf{H} \mathbf{q}_j = \mathbf{K} \mathbf{q}_j \quad (5.36)$$

Pré-multiplicando, então, a relação (5.36) por \mathbf{q}_i tem-se (5.37).

$$\frac{2}{\omega_{MB}} \lambda_j \mathbf{q}_i \mathbf{H} \mathbf{q}_j = \mathbf{q}_i \mathbf{K} \mathbf{q}_j \quad (5.37)$$

De forma análoga, pela qual se obteve (5.37), pode-se obter, também, (5.38).

$$\frac{2}{\omega_{MB}} \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{H} \mathbf{q}_j = \mathbf{q}_j \mathbf{K} \mathbf{q}_i \quad (5.38)$$

Porém, sabe-se que \mathbf{H} é uma matriz diagonal e \mathbf{K} uma matriz simétrica, o que leva a concluir as seguintes relações:

$$\mathbf{q}_j \mathbf{H} \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i \mathbf{H} \mathbf{q}_j \quad (5.39)$$

$$\mathbf{q}_j \mathbf{K} \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i \mathbf{K} \mathbf{q}_j \quad (5.40)$$

Portanto, se a expressão (5.37) for subtraída da (5.38), tem-se a expressão (5.41).

$$\frac{2}{\omega_{MB}} (\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{q}_i \mathbf{H} \mathbf{q}_j = 0 \quad (5.41)$$

A partir da expressão anterior, pode-se verificar que para autovalores distintos λ_i e λ_j , a expressão (5.42) é verdadeira.

$$\mathbf{q}_i \mathbf{H} \mathbf{q}_j = 0 \quad (5.42)$$

Enquanto, que para autovalores idênticos, tem-se a expressão (5.43).

$$H_{mi} = \mathbf{q}_i \mathbf{H} \mathbf{q}_i \quad (5.43)$$

E, analogamente, para a matriz \mathbf{K} ,

$$\mathbf{q}_i \mathbf{K} \mathbf{q}_j = 0 \quad (5.44)$$

$$K_{mi} = \mathbf{q}_i \mathbf{K} \mathbf{q}_i \quad (5.45)$$

Os parâmetros H_{mi} e K_{mi} são chamados de inércia e constantes elásticas modais, respectivamente, que, matricialmente, podem ser expressos como se segue.

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{Q}' \mathbf{H} \mathbf{Q} \quad (5.46)$$

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{Q}' \mathbf{K} \mathbf{Q} \quad (5.47)$$

Pode-se, então, definir um novo conjunto de variáveis de estado θ_m , conhecidas como variáveis modais do eixo, que se relacionam com o vetor de deslocamentos angulares $\Delta \theta_M$ através da transformação modal \mathbf{Q} .

$$\Delta \theta_M = \mathbf{Q} \theta_m \quad (5.48)$$

Nota-se que ao substituir a relação (5.48) na equação diferencial (5.20) e, em seguida, multiplicando-a pela transformação \mathbf{Q}^t , tem-se,

$$\frac{2}{\omega_{MB}} \mathbf{Q}^t \mathbf{H} \mathbf{Q} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_m + \frac{1}{\omega_{MB}} \mathbf{Q}^t \mathbf{D} \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\theta}}_m + \mathbf{Q}^t \mathbf{K} \mathbf{Q} \boldsymbol{\theta}_m = \mathbf{Q}^t \Delta \mathbf{T} \quad (5.49)$$

Como já foi visto, as matrizes $\mathbf{Q}^t \mathbf{H} \mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q}^t \mathbf{K} \mathbf{Q}$ foram definidas pelas expressões (5.46) e (5.47), e representam suas respectivas matrizes modais. Por analogia, define-se a matriz de amortecimentos modais \mathbf{D}_m dada pela relação (5.50). A matriz \mathbf{D}_m também assume a forma diagonal, já que \mathbf{D} é simétrica e, muitas vezes, considerada diagonal, como será discutido adiante.

$$\mathbf{D}_m = \mathbf{Q}^t \mathbf{D} \mathbf{Q} \quad (5.50)$$

Portanto, a equação (5.49) pode ser reescrita como se segue.

$$\frac{2}{\omega_{MB}} \mathbf{H}_m \ddot{\boldsymbol{\theta}}_m + \frac{1}{\omega_{MB}} \mathbf{D}_m \dot{\boldsymbol{\theta}}_m + \mathbf{K}_m \boldsymbol{\theta}_m = \mathbf{Q}^t \Delta \mathbf{T} \quad (5.51)$$

Verifica-se que a equação (5.51) constitui um conjunto de n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem completamente desacopladas, a menos das entradas que são combinações lineares dos torques aplicados a cada seção do eixo. Cada equação diferencial representa o comportamento dinâmico de um único modo torcional, caracterizado por uma frequência bem definida, e que são excitados independentemente pelos torques modais⁹. O torque modal aplicado ao modo torcional j pode ser expresso pela expressão (5.52), a qual apresenta explicitamente a sua relação com os componentes do autovetor \mathbf{q}_j .

$$T_{mj} = \sum_{k=1}^n q_{jk} T_k \quad (5.52)$$

A partir da equação (5.52), averigua-se que cada componente q_{jk} do autovetor \mathbf{q}_j representa um peso para o torque T_k , ou seja, o autovetor \mathbf{q}_j traduz um grau de sensibilidade do modo torcional j com relação aos torques aplicado em cada seção

⁹ Para o modelo de eixo apresentado sempre haverá um modo torcional com frequência natural nula. Este é chamado de modo 0 e, está sempre associado a um autovetor cujas componentes são idênticas entre si. Por isto, ao se utilizar a normalização do autovetor através do elemento referente ao gerador, o autovetor associado ao modo 0 terá todas as suas componentes iguais a 1.

do eixo. Este tipo de informação é importante, já que denuncia a contribuição de cada torque para um dado modo torcional.

Enfim, considera-se a equação diferencial não forçada correspondente ao j -ésimo modo torcional, escrita abaixo.

$$\frac{2}{\omega_{MB}} H_{mj} \ddot{\theta}_{mj} + \frac{1}{\omega_{MB}} D_{mj} \dot{\theta}_{mj} + K_{mj} \theta_{mj} = 0 \quad (5.53)$$

Ao se comparar a equação (5.53) com a forma normal da equação diferencial ordinária de segunda ordem, apresentada em (5.54), encontra-se as relações (5.55) e (5.56) para o fator de amortecimento modal σ_{mj} e a frequência natural ω_{mj} referentes ao sistema mecânico.

$$\ddot{\theta}_{mj} + 2\sigma_{mj} \dot{\theta}_{mj} + \omega_{mj}^2 \theta_{mj} = 0 \quad (5.54)$$

onde,

$$\sigma_{mj} = \frac{D_{mj}}{4H_{mj}} \Rightarrow D_{mj} = 4\sigma_{mj} H_{mj} \quad (5.55)$$

$$\omega_{mj} = \sqrt{\frac{\omega_{MB} K_{mj}}{2H_{mj}}} \quad (5.56)$$

As equações (5.55) e (5.56) desempenham um papel importante na determinação dos parâmetros utilizados no modelo do eixo turbina-gerador.

As constantes de inércia e de elasticidade, fornecidas pelos fabricantes, são baseadas em aspectos de projeto dos eixos e, no passado, já eram capazes de prever as frequências naturais com precisão de 1 Hz, para os modos torcionais mais significativos. No caso de aquisição mais precisa das frequências naturais dos eixos por meio de testes, os dados fornecidos pelo fabricante podem ser ajustados para melhor caracterizar o eixo sob estudo [ANDERSON, 1988].

Já as constantes de amortecimento não são passíveis de cálculo a partir de dados construtivos, uma vez que apresentam intensa dependência da condição operativa do sistema. Vários aspectos influenciam o amortecimento líquido destes sistemas,

podendo ser divididos em aspectos mecânicos e elétricos. Os amortecimentos de origem mecânica estão associados a forças de atrito (em geral com o ar, fluido de trabalho e nos mancais dos eixos) e perdas por histerese mecânica. O amortecimento devido a forças de atrito entre o vapor e as pás das turbinas é considerado dominante e se intensifica à medida que a carga imposta ao gerador aumenta. O amortecimento que reúne todos estes efeitos mecânicos pode ser representado por σ_{mj} , o fator de amortecimento no j -ésimo modo torcional do eixo, quando o sistema mecânico opera isoladamente [IEEE SSR WORKING GROUP, 1980 e 1985].

Portanto, na prática, são os fatores de amortecimento σ_{mj} que são levantados a partir de ensaios de campo, considerando uma determinada condição operativa¹⁰. Estes por sua vez são utilizados na determinação das constantes de amortecimento individuais D_{ij} , enquanto que as constantes de amortecimento mútuo D_{ij} são desconsideradas, para efeito de simplificação dos cálculos. Para esta tarefa pode ser utilizada a relação (5.50), considerando \mathbf{D} uma matriz diagonal. Desta forma, tem-se o sistema linear definido em (5.57).

$$\begin{bmatrix} q_{11}^2 & q_{21}^2 & \cdots & q_{n1}^2 \\ q_{12}^2 & q_{22}^2 & \cdots & q_{n2}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1n}^2 & q_{2n}^2 & \cdots & q_{nn}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ \vdots \\ D_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{m1} \\ D_{m2} \\ \vdots \\ D_{mn} \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

onde, q_{ij} é a j -ésima componente do autovetor \mathbf{q}_i .

¹⁰ Para maiores detalhes acerca de métodos empregados para a aquisição dos fatores de amortecimento, recomenda-se pesquisa na referência [ANDERSON, 1988].

5.4 ASPECTOS TORCIONAIS DOS HIDROGERADORES

Os hidrogeradores, diferentemente dos turbogeradores, apresentam apenas duas massas girantes conectadas entre si, a priori, a turbina e o gerador.

Considerando a matriz \mathbf{Q} constituída por autovetores normalizados com relação à componente relativa ao gerador, as constantes de inércia modais são então calculadas a partir da expressão (5.46).

$$H_{mn} = \begin{bmatrix} \frac{q_{nt}}{q_{ng}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_t & 0 \\ 0 & H_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{q_{nt}}{q_{ng}} \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{q_{nt}}{q_{ng}} \right)^2 H_t + H_g \quad (5.58)$$

onde H_g e H_t são constantes de inércia do gerador e turbina, respectivamente.

Só que, da expressão (5.42), tem-se

$$H_g = -\frac{q_{nt}}{q_{ng}} H_t \quad (5.59)$$

Portanto,

$$H_{mn} = \frac{H_g}{H_t} (H_t + H_g) = n_{gt} (H_t + H_g) \quad (5.60)$$

Para o amortecimento modal, é obtida a relação (5.61) a partir da expressão (5.50).

$$D_{mn} = n_{gt}^2 D_t + D_g \quad (5.61)$$

E finalmente, o fator de amortecimento modal σ_{mn} é calculado pela expressão (5.55), resultando (5.62).

$$\sigma_{mn} = \frac{n_{gt} D_t}{4(H_t + H_g)} + \frac{D_g}{4n_{gt}(H_t + H_g)} \quad (5.62)$$

Analisando-se a expressão anterior, verifica-se a dependência do fator de amortecimento modal σ_{mn} com relação à constante n_{gt} , que expressa a razão entre as inércias do gerador H_g e turbina H_t , e os amortecimentos próprios da turbina e do gerador¹¹.

Esta dependência foi alvo de um estudo realizado pela ASEA apresentado em [ANDERSSON, 1984]. Este estudo apresentou características torcionais de diversos tipos de turbinas e geradores típicos de usinas hidrelétricas, inclusive valores típicos para a constante n_{gt} . Foi mostrado que turbinas tipo Kaplan apresentam n_{gt} entre 7 e 30, enquanto turbinas tipo Pelton, este está compreendido entre 10 e 40. Estes elevados valores de n_{gt} , aliados ao fato de o amortecimento D_g ser insignificante, em comparação a D_t , contribuem para que a segunda parcela na expressão (5.62) se torne irrisória, logo, desprezível.

Adicionalmente, o resultado de outro estudo, publicado em [OLDENBURGER, 1962], confirma que o valor teórico de D_t corresponde a 1,0 pu na condição nominal e, 0,35 pu quando em vazio, para turbinas hidráulicas.

A título de ilustração, uma turbina tipo Pelton com $n_{gt}= 25$ e $H_t+H_g=4$ s que opera em vazio ($D_t=0,35$ pu), apresenta um fator de amortecimento de, aproximadamente, $0,55 \text{ s}^{-1}$. Este valor pode ser comparado com os fatores de amortecimento associados à operação em vazio da unidade geradora de Navajo 892,4 MVA [IEEE COMMITTEE REPORT, 1977], que correspondem a $0,05 \text{ s}^{-1}$ e $0,11 \text{ s}^{-1}$ para as frequências de 15,71 Hz e 20,21 Hz, respectivamente. Esta comparação resulta que o fator de amortecimento apresentado pela turbina hidráulica adotada seria, aproximadamente, 10 e 5 vezes maior que os fatores de amortecimento da turbina térmica de Navajo.

¹¹ Nota-se que as parcelas de amortecimento D_{ji} , relativas à histerese mecânica dos eixos, foram desconsideradas, devido sua ínfima influência quando comparado com o amortecimento viscoso com o fluido de trabalho D_{ji} , neste caso, a água.

CAPÍTULO 6

FERRAMENTAS DE ANÁLISE

*"Comece por fazer o que é necessário, depois o que é possível e de repente estará a fazer o impossível".
São Francisco de Assis (1182 - 1226)*

6.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será apresentado o ferramental necessário para a avaliação do grau de estabilidade de sistemas dinâmicos lineares, empregando técnicas baseadas em autovalores e autovetores.

Como os sistemas elétricos de potência apresentam características dinâmicas não-lineares, este tipo de estudo visa levantar suas características dinâmicas intrínsecas quando sujeitos a pequenas perturbações. E como discutido no item 3.4.1, estas análises são executadas a partir de sistemas linearizados em torno de uma dada condição operativa.

Estas técnicas são amplamente difundidas em estudos no setor de engenharia de sistemas, já que desempenham um papel importante tanto no projeto como na operação dos sistemas elétricos de potência. Isto porque as mesmas permitem

identificar as principais influências no comportamento dinâmico de um determinado sistema e, conseqüentemente, implementar melhores ações de controle.

6.2 ANÁLISE MODAL DE SISTEMAS DINÂMICOS

6.2.1 Resposta Livre de um Sistema Dinâmico

Seja um sistema dinâmico definido pelo seguinte sistema linear e homogêneo de equações diferenciais:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (6.1)$$

onde, \mathbf{x} representa o vetor de estados e, \mathbf{A} uma matriz $n \times n$ de estados.

A solução geral do sistema apresentado em (6.1) pode ser encontrada a partir da decomposição da matriz \mathbf{A} em autovalores e autovetores. Desde que a matriz \mathbf{A} possua apenas autovalores distintos entre si, cada autovalor λ_i está associado a um autovetor à direita \mathbf{v}_i e um autovetor à esquerda \mathbf{w}_i , ambos definidos como se segue.

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad (6.2)$$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i \quad (6.3)$$

Pode-se, ainda, exprimir as relações (6.2) e (6.3) referentes a cada autovalor λ_i (com $i = 1, \dots, n$) através de formas matriciais, como dispostas em (6.4) e (6.5).

$$\mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{V} \Lambda \quad (6.4)$$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{W} = \mathbf{W} \Lambda \quad (6.5)$$

onde,

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n] \quad \mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \quad \dots \quad \mathbf{w}_n] \quad (6.6)$$

Comparando-se as expressões (6.4) e (6.5), nota-se a seguinte relação entre \mathbf{V} e \mathbf{W} .

$$\mathbf{W}^t = \mathbf{V}^{-1} \quad (6.7)$$

Ou seja,

$$\mathbf{w}_i^t \mathbf{v}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (6.8)$$

Adicionalmente, define-se a seguinte relação.

$$\mathbf{x} = \mathbf{V} \mathbf{z} \quad (6.9)$$

onde, \mathbf{z} é o vetor constituído pelas conhecidas variáveis modais do sistema (6.1).

Agora, substituindo a expressão (6.9) no sistema de equações diferenciais dado por (6.1), conclui-se que

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{z} \quad (6.10)$$

A principal característica do sistema de equações diferenciais obtido em (6.10), é que não há acoplamento entre as variáveis modais de \mathbf{z} , uma vez que a matriz $\mathbf{\Lambda}$ é diagonal. Assim, a solução da equação (6.10) é trivial e dada a seguir.

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{\Lambda}t} \mathbf{z}(0) \quad (6.11)$$

onde, $e^{\mathbf{\Lambda}t} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$ e $\mathbf{z}(0)$ é vetor de condições iniciais para as variáveis modais.

A relação entre o vetor $\mathbf{z}(0)$ e o vetor $\mathbf{x}(0)$ de condições iniciais das variáveis de estado é dada através da matriz de autovetores à esquerda \mathbf{W} , como pode-se concluir a partir das expressões (6.7) e (6.9). Ou seja,

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{W}^t \mathbf{x}(0) \quad (6.12)$$

Finalmente, substituindo as expressões (6.11) e (6.12) em (6.9), obtém-se a solução geral do sistema de equações diferenciais disposto em (6.1), resultando a seguinte função matricial.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V} e^{\Lambda t} \mathbf{W}^t \mathbf{x}(0) \quad (6.13)$$

Expandindo a expressão (6.13), obtém-se

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w_{1i} x_i(0) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n w_{ni} x_i(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n v_{i1} w_{i1} e^{\lambda_i t} & \dots & \sum_{i=1}^n v_{i1} w_{in} e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n v_{in} w_{i1} e^{\lambda_i t} & \dots & \sum_{i=1}^n v_{in} w_{in} e^{\lambda_i t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

onde v_{ik} e w_{ik} representam o k -ésimo elemento dos vetores \mathbf{v}_i e \mathbf{w}_i , respectivamente.

Nota-se a partir da expressão (6.14) que as componentes do autovetor à direita \mathbf{v}_i medem o grau de atividade do modo definido por pelo autovalor λ_i , enquanto as componentes do autovetor à esquerda \mathbf{w}_i pesam a contribuição das condições iniciais para este mesmo modo.

Os autovetores à direita podem ser utilizados para a determinação de como os modos, associados a um dado sistema dinâmico, influenciam suas variáveis de estado. Uma desvantagem em utilizar esta técnica é a necessidade de normalização das variáveis de estado apropriadamente e a dificuldade em compará-las [PÉREZ-ARRIAGA, 1982; VAN NESS, 1980].

Desta forma, um método de quantificação das características denotadas pelos autovetores associados aos sistemas dinâmicos lineares foi proposto por [PÉREZ-ARRIAGA, 1982], que define a matriz de fatores de participação \mathbf{P}_f , dada por (6.15).

$$\mathbf{P}_f = [\mathbf{p}_1 \quad \dots \quad \mathbf{p}_n] \Rightarrow \mathbf{p}_i = [p_{i1} \quad \dots \quad p_{in}]^t \quad (6.15)$$

$$p_{ik} = v_{ik} w_{ik} \begin{cases} i = 1, \dots, n \\ k = 1, \dots, n \end{cases}$$

onde \mathbf{p}_k é um vetor composto pelos fatores de participação p_{ik} .

Para melhor interpretação dos fatores de participação p_{ik} , adota-se as condições iniciais $\mathbf{x}(0)=\mathbf{u}_k$, onde \mathbf{u}_k é um vetor cuja k-ésima posição é unitária e as demais nulas. Com isto, para a variável de estado $x_k(t)$ resulta a seguinte expressão:

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^n v_{ik} w_{ik} e^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^n p_{ik} e^{\lambda_i t} \quad (6.16)$$

onde p_{ik} representa a participação relativa do i-ésimo modo na k-ésima variável de estado, para $t=0$.

Já que v_{ik} mede a atividade do modo i na variável x_k e, w_{ik} pondera a contribuição desta atividade no modo, p_{ik} representa sua participação líquida [PÉREZ-ARRIAGA, 1982; KUNDUR, 1994].

Uma outra característica dos fatores de participação p_{ik} é que estes podem ser reais ou complexos, dependendo dos autovalores λ_i . Ou seja, se λ_i for real, os fatores de participação p_{ik} serão também reais, resultando parcelas reais no somatório apresentado na expressão (6.16). Porém, se λ_i for complexo, ou seja $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$, estes sempre aparecerão em pares conjugados, e a relação (6.17) é verdadeira.

$$p_{ik} e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} + p_{ik}^* e^{(\sigma_i - j\omega_i)t} = 2|p_{ik}| \cos(\omega_i t + \varphi) \quad (6.17)$$

onde $\varphi = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{p_{ik}\}}{\text{Re}\{p_{ik}\}}\right)$.

Portanto, a expressão anterior expressa que o módulo do fator de participação p_{ik} melhor caracteriza a influência de do i-ésimo modo na k-ésima variável de estado.

6.2.2 Relações entre Autovalores e Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Lineares

A estabilidade da resposta de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo é expressa pela condição de que a resposta deve ser limitada quando a excitação também for limitada [D'AZZO, 1984].

Portanto, analisando-se a expressão (6.14), que representa a resposta livre de um sistema linear, é possível fazer algumas inferências acerca de sua estabilidade.

Primeiramente, os autovalores λ_i podem ser tanto reais como complexos. Para λ_i reais, verifica-se, através das relações (6.2) e (6.3), que ambos autovetores associados \mathbf{v}_i e \mathbf{w}_i devem ser compostos por valores, também, reais. Desta forma, cada parcela de $\mathbf{x}(t)$ relativa ao modo definido por λ_i , assume a forma de uma exponencial. Assim, se λ_i for negativo, este modo é estável e caracterizado por uma exponencial negativa. Mas, se λ_i for positivo, este modo caracteriza-se por uma exponencial positiva e, portanto, instável.

Para autovalores λ_i complexos, estes sempre ocorrerão em pares conjugados. Analogamente aos autovalores reais, pode-se verificar, por meio das relações (6.2) e (6.3), que os autovetores associados \mathbf{v}_i e \mathbf{w}_i devem ser compostos por valores igualmente complexos. Assim, cada parcela de $\mathbf{x}(t)$ relativa ao modo definido por $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$, assume a forma de uma senóide com frequência ω_i e envoltória exponencial caracterizada por σ_i . Portanto, se σ_i for negativo, o modo associado a λ_i será estável, ao contrário do que acontece para valores de σ_i positivos [KUNDUR, 1994].

6.3 ESTABILIDADE DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES

No que toca aos sistemas não-lineares, o conceito de estabilidade apresentado para os sistemas lineares deve ser estendido. Este problema foi atacado por vários

estudiosos, entre eles Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) que estabeleceu o conceito geral de estabilidade.

Primeiramente, considere o sistema não-linear autônomo¹² definido da seguinte forma,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) \quad (6.18)$$

onde \mathbf{x} representa as n variáveis de estado que definem o espaço de estados, μ um escalar qualquer e \mathbf{f} é uma função vetorial de mesma dimensão de \mathbf{x} .

A solução do sistema de equações diferenciais (6.18), para uma condição inicial qualquer, definem trajetórias no espaço de estados, também conhecidas como espaço de fases [PERKO, 1991; VERHULST, 1990; D'AZZO, 1984].

Adicionalmente, os pontos de equilíbrio \mathbf{x}_e do sistema dado em (6.18), obtidos a partir do sistema de equações não-lineares, são calculados a partir do sistema não-linear apresentado em (6.19).

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mu) = \mathbf{0} \quad (6.19)$$

Agora, toma-se uma região ξ no espaço de estados envolvendo um ponto de equilíbrio específico dado por (\mathbf{x}_0, μ_0) . Este ponto de equilíbrio é dito estável desde que exista uma região η contida em ξ , tal que toda trajetória começando em η não extrapole os limites de ξ . Esta definição não exige que a trajetória tenda para o ponto de equilíbrio (\mathbf{x}_0, μ_0) , e sim, que permaneça na região ξ . Este conceito também é conhecido como *estabilidade finita*. Nota-se ainda que a estabilidade finita permite a existência de oscilações contínuas em torno do ponto de equilíbrio (\mathbf{x}_0, μ_0) . Estas oscilações no espaço de estados definem trajetórias fechadas conhecidas como *ciclos limites estáveis*.

No caso em que qualquer trajetória, obtida para uma dada condição inicial, tender sempre para o ponto de equilíbrio (\mathbf{x}_0, μ_0) quando tempo tendendo ao infinito, diz-se que o sistema é *assintoticamente estável*.

¹² Um sistema dinâmico autônomo é aquele que não depende explicitamente do tempo.

Ao se expandir a região η , de forma que esta englobe todo o espaço de estados, as definições de Lyapunov e de estabilidade assintótica passam a definir o conceito de *estabilidade global*. Os sistemas lineares são exemplos típicos de sistemas global e assintoticamente estáveis (ou instáveis) em decorrência da discussão da seção 6.2.2.

Na Figura 6.1 são ilustradas as trajetórias no espaço de estados que ilustram o princípio geral de estabilidade de Lyapunov, estabilidade assintótica e instabilidade, de acordo com o que já foi discutido.

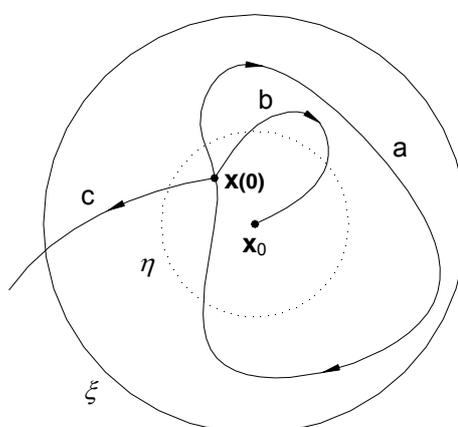


Figura 6.1 – Trajetória no plano de estados indicando: (a) estabilidade de Lyapunov (ciclo limite estável), (b) estabilidade assintótica e (c) instabilidade [D’AZZO, 1984].

Na seção 3.4.1 foi abordada a técnica de linearização de sistemas não-lineares a partir de séries de Taylor na vizinhança de um ponto de equilíbrio. Assim, para o sistema dado em (6.18), considerando μ_0 fixo, tem-se:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} \quad (6.20)$$

onde $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, caracteriza a variação das variáveis de estado em torno do ponto de equilíbrio (\mathbf{x}_0, μ_0) . Enquanto, a matriz \mathbf{A} corresponde ao Jacobiano de \mathbf{f} calculado em (\mathbf{x}_0, μ_0) .

Desta forma, como a expressão (6.20) é linear e equivalente à (6.18) em torno de (\mathbf{x}_0, μ_0) , pode-se aplicar a técnica de autovalores para a avaliação da *estabilidade local* do referido ponto de equilíbrio, como discorrido na seção anterior.

Este método foi desenvolvido independentemente por Jules Henri Poincaré (1854-1912) e Lyapunov, em 1892, e foi designado por este último como *primeiro método*.

6.4 BIFURCAÇÃO DE HOPF

O termo *bifurcação* foi introduzido no estudo de sistemas dinâmicos não-lineares por Poincaré, de forma a indicar mudanças qualitativas no comportamento dinâmico dos sistemas, como o número e o tipo de soluções, quando se varia um ou mais parâmetros do sistema [HARB, 1996]. Para o sistema representado por (6.18), μ pode ser visto como um *parâmetro de bifurcação*.

Quando este parâmetro μ varia, as condições de equilíbrio \mathbf{x}_e , dadas em (6.19), podem perder estabilidade através de bifurcações tipo sela-nó, tridente (*pitchfork*), transcítica e de Hopf. Sendo, esta última, de maior interesse no estudo de sistemas ressonantes.

De forma geral, a bifurcação de Hopf ocorre quando uma solução periódica (ciclo limite) é criada à medida que a estabilidade do ponto de equilíbrio (\mathbf{x}_0, μ) muda [PERKO, 1991]. As condições necessárias para que um dado valor de $\mu = \mu_0$ seja considerado um *ponto de bifurcação Hopf*, são descritas a seguir:

- (a) O ponto (\mathbf{x}_0, μ_0) deve ser um ponto de equilíbrio, satisfazendo (6.19);
- (b) O Jacobiano \mathbf{A} calculado em (\mathbf{x}_0, μ_0) possui um par de autovalores $(\lambda_{1,2})$ puramente imaginários, enquanto todos os outros possuem partes reais negativas;
- (c) A velocidade do par de autovalores $\lambda_{1,2}$ ao cruzar o eixo imaginário deve ser não-nula, ou seja, $\frac{d}{d\mu} \text{Re}\{\lambda_{1,2}\} \neq 0$. A esta última dá-se o nome de *condição de transversalidade*.

De acordo com a condição (c), se o par de autovalores $\lambda_{1,2}$ tiver parte real negativa para $\mu < \mu_0$, conseqüentemente, o par $\lambda_{1,2}$ terá parte real positiva para valores de

$\mu > \mu_0$. Só que, de acordo com a análise de estabilidade local, os pontos de equilíbrio (\mathbf{x}_0, μ) serão assintoticamente estáveis para $\mu < \mu_0$ e, assintoticamente instáveis para $\mu > \mu_0$.

A formação de ciclos limites, que também podem ser estáveis ou instáveis, provém das não linearidades do sistema dinâmico sob enfoque.

No caso dos pontos (\mathbf{x}_0, μ) localmente estáveis, o sistema pode estar associado a um foco estável ou um ciclo limite instável, como mostrado na Figura 6.2. Como pode ser observado nesta figura, o foco estável é caracterizado por atrair as trajetórias do sistema no espaço de estados, não importando a condição inicial do sistema. Já o ciclo limite instável repele as trajetórias no espaço de estados. Desta forma para condições iniciais contidas no ciclo limite, as trajetórias convergem para o ponto de equilíbrio, caso contrário divergem indefinidamente. Esta característica dos sistemas apresentarem ciclos limites instáveis após o ponto de bifurcação $\mu = \mu_0$ caracteriza uma *bifurcação de Hopf subcrítica*.

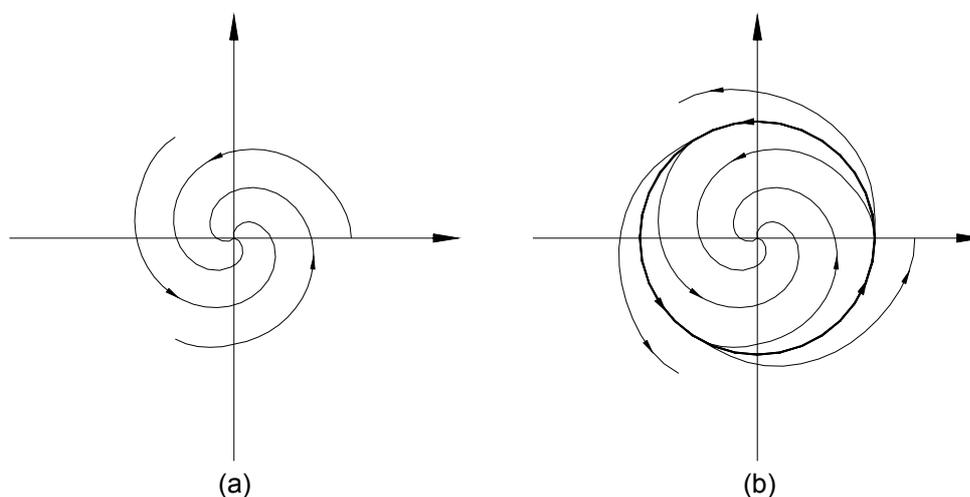


Figura 6.2 – Trajetória no plano de estados indicando: (a) foco estável, (b) foco associado a uma bifurcação de Hopf subcrítica.

De forma análoga para os pontos (\mathbf{x}_0, μ) localmente instáveis, o sistema pode estar associado a um foco instável ou um ciclo limite estável, como mostrado na Figura 6.3. Neste caso, o foco instável é caracterizado por repelir as trajetórias do sistema no espaço de estados, não importando a condição inicial do sistema, diferentemente do ciclo limite estável que atrai as trajetórias no espaço de estados,

independentemente das condições iniciais do sistema. Quando os sistemas apresentarem ciclos limites estáveis após o ponto bifurcação $\mu = \mu_0$, uma *bifurcação de Hopf supercrítica* é caracterizada.

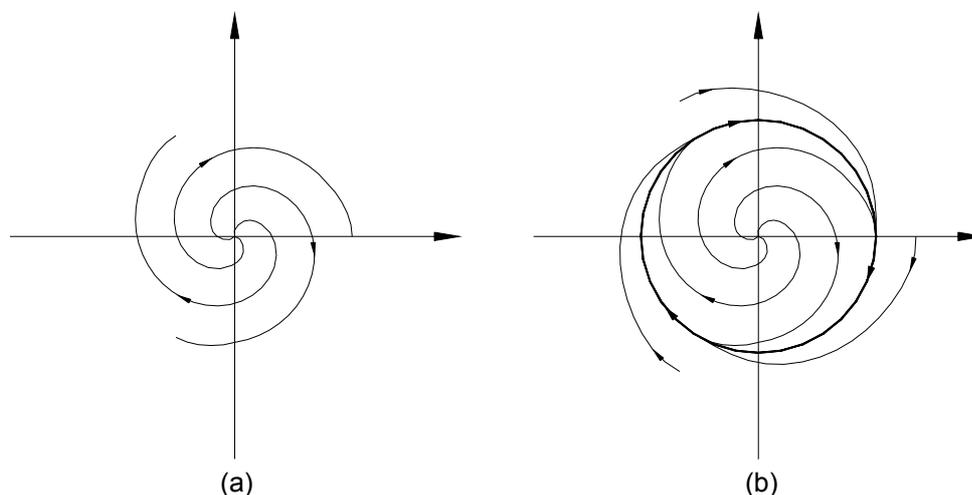


Figura 6.3 – Trajetória no plano de estados indicando: (a) foco instável, (b) foco associado a uma bifurcação de Hopf supercrítica.

6.5 ÍNDICE PARA IDENTIFICAÇÃO DE BIFURCAÇÕES DE HOPF

6.5.1 Introdução

De acordo com a discussão realizada nas seções anteriores, foi observado que os autovalores possibilitam a determinação de modos instáveis, enquanto autovetores à direita e à esquerda determinam o grau de atividade, ou participação, líquida dos referidos modos no comportamento dinâmico dos sistemas. Só que esta avaliação é feita para uma determinada condição operativa do sistema sob estudo, ou seja, para pequenas perturbações.

Em seguida, foi apresentado que sistemas não lineares podem mudar estruturalmente, quando algum parâmetro de controle é alterado, podendo torná-lo oscilatório ou instável. Foi discutido, também, que este ponto de transição estrutural

chama-se ponto de bifurcação, e quando este é caracterizado pela criação de soluções periódicas, recebe o nome de bifurcação Hopf.

No caso dos sistemas elétricos de potência, bifurcações de Hopf, sejam elas sub ou supercríticas, tornam-se indesejáveis sob condições normais. Desta forma, para que seja evitada qualquer oscilação auto-sustentada ou crescente no tempo, nenhum autovalor associado ao sistema de potência linearizado pode apresentar parte real positiva. Ou seja, todos os pontos de equilíbrio ou condições operativas do sistema devem ser assintoticamente estáveis. Neste contexto, basta observar os autovalores da matriz de estados linearizada do sistema de potência sob estudo, para uma avaliação da estabilidade do sistema em regime permanente.

Os sistemas elétricos de potência, no entanto, são muito complexos apresentando, invariavelmente, dimensões bastante elevadas, com autovalores com diferentes sensibilidades à variação de um determinado parâmetro de controle. Esta última característica se reflete na velocidade de aproximação dos autovalores dominantes ao eixo imaginário, podendo ser alta para autovalores com grande sensibilidade à variações do parâmetro em questão. Assim, torna-se necessário, durante os estudos de planejamento, rastrear um número também elevado de autovalores, para que seja possível garantir a estabilidade do referido sistema, frente a variações de um dado parâmetro de controle.

Então, visando uma melhor visualização das condições críticas para o sistema, é proposto neste documento avaliar a média geométrica das partes reais dos autovalores de interesse do sistema. No caso de estudos de RSS, estes autovalores estão associados aos modos torcionais dos eixos turbina-gerador.

Esta ferramenta, devido as suas características intrínsecas, é capaz de identificar rapidamente bifurcações de Hopf, como será visto na próxima seção.

6.5.2 Índice Proposto

Considere o conjunto $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$, onde σ_k correspondem às partes reais de um conjunto reduzido de autovalores dominantes associados à matriz de estados linearizada de um sistema de potência qualquer.

Desta forma, propõe-se o seguinte índice baseado na média geométrica dos valores absolutos dos elementos de Σ e no número de autovalores com parte real positiva.

$$IND = \begin{cases} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n |\sigma_k|} \Rightarrow \{\sigma_k \in \Sigma / \sigma_k > 0\} = \emptyset \\ -\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n |\sigma_k|} \Rightarrow \{\sigma_k \in \Sigma / \sigma_k > 0\} \neq \emptyset \end{cases} \quad (6.21)$$

Observa-se que se o conjunto $\{\sigma_k \in \Sigma / \sigma_k > 0\}$ for vazio, ou seja, se todos os valores σ_k forem negativos, IND é positivo, indicando estabilidade assintótica do referido sistema. Mas, se $\{\sigma_k \in \Sigma / \sigma_k > 0\}$ tiver pelo menos um elemento, ou seja, pelo menos um dos valores de σ_k forem positivos, IND é negativo, indicando instabilidade ou a presença de oscilações auto-sustentadas na resposta dinâmica do sistema.

O cálculo de um número reduzido de autovalores é uma tarefa comum na análise de sistemas elétricos de potência, dado a elevada dimensão dos mesmos. O algoritmo utilizado nas análises apresentadas no capítulo seguinte é conhecido como Método da Bi-Iteração Refatorada (*Refactored Bi-Iteration Method*) proposto em [CAMPAGNOLO, 1996], que converge para um conjunto qualquer de autovalores, dados um conjunto de estimativas iniciais. No caso de estudos de RSS, estas estimativas podem ser os próprios modos oscilatórios dos eixos turbina-gerador sob estudo, diminuindo, sobremaneira, o esforço computacional envolvido nas análises.

CAPÍTULO 7

APLICAÇÕES

*"Ad augusta per augusta".
A resultados sublimes por vias estreitas.
Victor Hugo (1802 - 1885)*

7.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas aplicações práticas dos modelos e técnicas abordadas nos capítulos anteriores.

Para isto serão utilizados sistemas apresentados por [IEEE COMMITTEE REPORT, 1977 e 1985], e um sistema de 6 barras (3 de carga e 3 de geração) baseado no sistema descrito em [WOOD, 1984].

Em todas as análises serão considerados sistemas não controlados, para que seja possível a compreensão do fenômeno da RSS pura e simplesmente.

7.2 SISTEMA RADIAL - FBM

O sistema avaliado neste item, ilustrado na Figura 7.1, é constituído por uma máquina síncrona conectada ao equivalente de um grande sistema através de uma linha de transmissão série compensada.

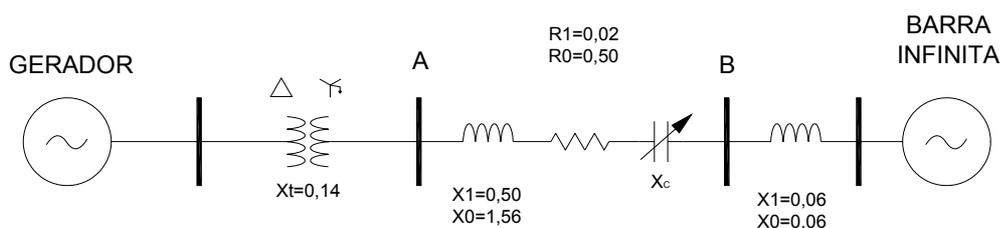


Figura 7.1 – Sistema radial apresentado em [IEEE COMMITTEE REPORT, 1977].

Este sistema foi apresentado por [IEEE COMMITTEE REPORT, 1977], e nomeado “*First Benchmark Model for Computer Simulation of Subsynchronous Resonance*”, por isto será utilizada a sigla FBM toda vez que este for referenciado. Os dados estão dispostos nos quadros abaixo, nos quais a potência base para as grandezas por unidade é 892,4 [MVA].

Quadro 7.1 – Dados do gerador síncrono

Resistência e reatâncias [pu]		Constantes de tempo [s]
R = 0	$X'_d = 0,169$	$T'_{do} = 4,3$
$X_L = 0,13$	$X'_q = 0,228$	$T'_{qo} = 0,85$
$X_d = 1,79$	$X''_d = 0,135$	$T''_{do} = 0,032$
$X_q = 1,71$	$X''_q = 0,20$	$T''_{qo} = 0,05$

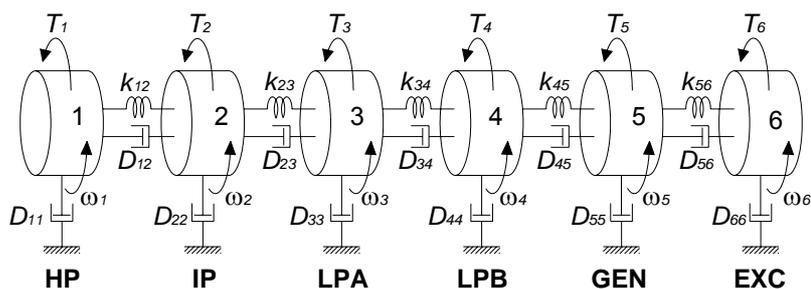


Figura 7.2 – Eixo acoplado a turbina de quatro estágios (HP, IP, LPA e LPB), gerador (GEN) e excitatriz (EXC).

Quadro 7.2 – Dados do eixo turbina-gerador

Seção	Eixo	Inércia H [s]	Elasticidade K [pu Torque/rad]
HP		0,092897	
	HP-IP		7,277
IP		0,155589	
	IP-LPA		13,168
LPA		0,858670	
	LPA-LPB		19,618
LPB		0,884215	
	LPB-GEN		26,713
GEN		0,868495	
	GEN-EXC		1,064
EXC		0,0342165	

Quadro 7.3 – Dados da rede elétrica

Resistência da LT	0,02 [pu]
Reatância da LT	0,50 [pu]
Reatância do Sistema	0,06 [pu]
Reatância do Transformador	0,14 [pu]

7.2.2 Análise Modal do Eixo

Com base nos parâmetros torcionais do eixo, dados no Quadro 7.2, calcula-se, conforme o capítulo 6, as freqüências naturais do eixo e as respectivas contribuições de cada seção do eixo nos referidos modos, expressas pela matriz **Q**. Este resultado é mostrado na Tabela 7.1.

Nota-se que o eixo apresentado possui cinco freqüências naturais, já que este é constituído por 6 seções, e classificados em ordem crescente como Modo 1, Modo 2 e assim por diante. O modo 0 é associado ao modo uníssono, sob o qual todo o eixo oscila conjuntamente, como um corpo rígido.

Tabela 7.1 – Modos torcionais para o eixo da Figura 7.2¹³.

Seção	Freqüências Naturais					
	Modo 5 47,5 Hz	Modo 4 32,3 Hz	Modo 3 25,5 Hz	Modo 2 20,2 Hz	Modo 1 15,7 Hz	Modo 0 0 Hz
HP	-0,7874	0,8638	1,0000	0,1099	-0,7761	1,0000
IP	1,0000	-0,0437	0,3422	0,0647	-0,5830	1,0000
LPA	-0,1133	-0,5027	-0,2297	0,0151	-0,3420	1,0000
LPB	0,0211	1,0000	-0,0955	-0,0395	0,1115	1,0000
GEN	-0,0045	-0,6205	0,1660	-0,0374	0,3727	1,0000
EXC	0,0009	0,3763	-0,2520	1,0000	1,0000	1,0000

¹³ O modos torcionais foram normalizados com relação à componente de maior valor absoluto.

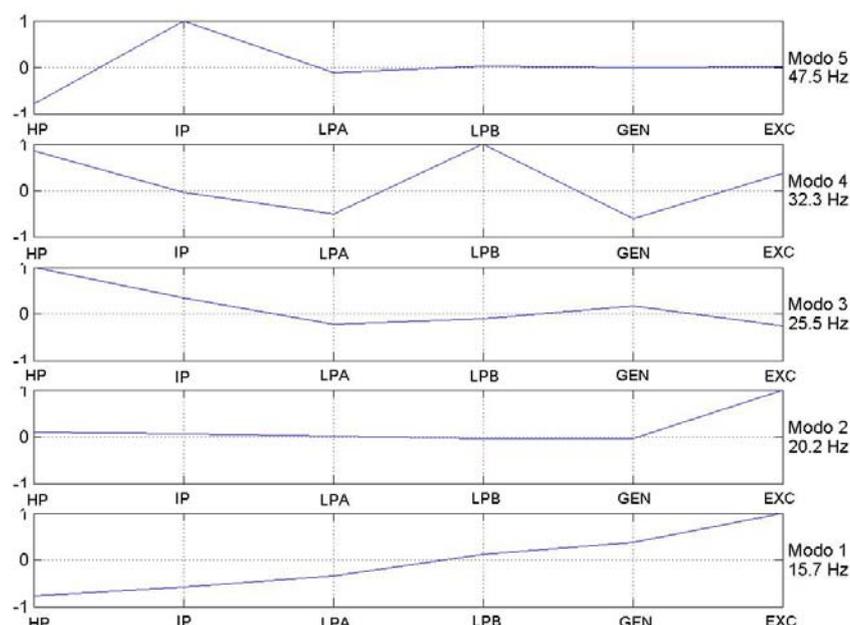


Figura 7.3 – Representação gráfica dos modos torcionais do eixo apresentado na Figura 7.2.

Como abordado anteriormente, os modos torcionais do eixo expressam como torques aplicados em cada seção do eixo contribuem para cada modo oscilatório. Assim, pode-se averiguar, pela Figura 7.3, por exemplo, que o Modo 1 apresenta maior sensibilidade a torques aplicados à excitatriz e estágio de alta pressão, que a torques aplicados às outras seções. Ainda, pode-se verificar a pouca influência dos Modos 2 e 5 no gerador. Este tipo de informação é importante para decisão da localização mais adequada dos equipamentos de medição de velocidade angular que, por sua vez, alimentam controladores e estabilizadores [LEE, 1985; KUNDUR, 1994].

Os fatores de amortecimento modais σ_n também são fornecidos em [IEEE COMMITTEE REPORT, 1977] e estão dispostos na Tabela 7.2, juntamente com as inércias e elasticidades. Estes fatores de amortecimento desempenham papel fundamental no cálculo dos amortecimentos representados na Figura 7.2, que são calculados a partir dos amortecimentos modais obtidos pelas equações (5.55) e (5.58). Para esta tarefa, normalmente, o fator de amortecimento referente ao Modo 0 é considerado nulo, já que apenas $n - 1$ fatores de amortecimento são disponíveis, devido à presença de exatamente $n - 1$ modos de oscilação.

Tabela 7.2– Grandezas modais do eixo da Figura 7.2.

Grandezas Modais					
Modos	H_n [s]	K_n [pu/rad]	D_n [pu/pu]	σ_n [s ⁻¹]	ω_n [rad/s]
Modo 5	0,2246	105,9467	0,0449	-0,0500	298,18
Modo 4	1,5100	329,6359	0,1691	-0,0280	202,85
Modo 3	0,1906	26,0496	0,0213	-0,0280	160,52
Modo 2	0,0388	3,3156	0,0171	-0,1100	126,95
Modo 1	0,3751	19,3948	0,0750	-0,0500	98,72
Modo 0	2,8941	0	0	0	0

E, conseqüentemente, obtêm-se as constantes de amortecimento individual das seções ilustradas na Figura 7.2, dadas a seguir.

Tabela 7.3 – Constantes de amortecimento do eixo da Figura 7.2.

Seção	HP	IP	LPA	LPB	GEN	EXC
D [pu/pu]	0,0530	0,0292	-1,3373	-0,0197	1,2599	0,0149

Nota-se na Tabela 7.3 a existência de constante de amortecimento negativas decorrentes do processo numérico utilizado para sua obtenção, baseado nas equações (5.50) e (5.55).

7.2.3 Análise Modal do Sistema Eletromecânico

Depois de modelados o gerador, eixo e rede elétrica de acordo com os capítulos 3, 4 e 5, respectivamente, é possível conectá-los em um único sistema eletromecânico linearizado (vide Apêndice A).

E, como discutido no capítulo 6, a partir da matriz de estados deste sistema, determinada para uma dada condição operativa pré-estabelecida, pode-se avaliar a estabilidade do sistema com base em seus autovalores, e a influência dos modos oscilatórios em suas variáveis de estado com base nos fatores de participação.

Para as condições operativas analisadas para o sistema FBM, as tensões terminais da máquina e da barra infinita foram consideradas 1,00 [pu], enquanto que a potência despachada na máquina foi de 0,1 [pu]. Esta configuração de baixo carregamento do sistema foi adotada devido aos baixos amortecimentos mecânicos presentes em situações como esta.

Na Figura 7.4 está ilustrado o comportamento dos 20 autovalores do sistema radial FBM, com a compensação série da linha de transmissão A-B variando de 10 a 90% da reatância total do sistema.

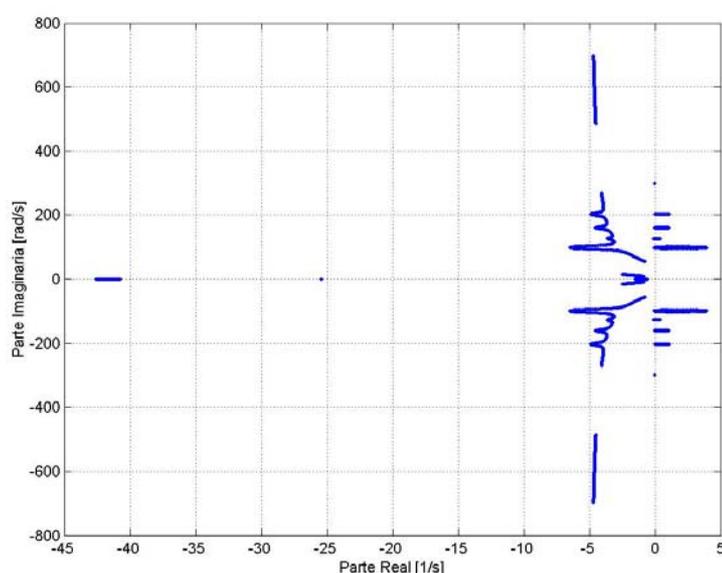


Figura 7.4 – Comportamento dos autovalores com a compensação série variando de 10 a 90%.

Os comportamentos específicos dos modos do eixo e da rede elétrica podem ser visualizados em detalhe na Figura 7.5. Nota-se que ao longo da variação do grau de compensação da linha de transmissão, o modo subsíncrono da rede elétrica influencia fortemente os modos 1, 2, 3 e 4. As máximas influências deste modo elétrico nos modos do eixo podem ser verificados para os graus de compensação 26,3%, 40,7%, 54,2% e 67,4%, de acordo com a Figura 7.6, onde os fatores de amortecimento também são máximos.

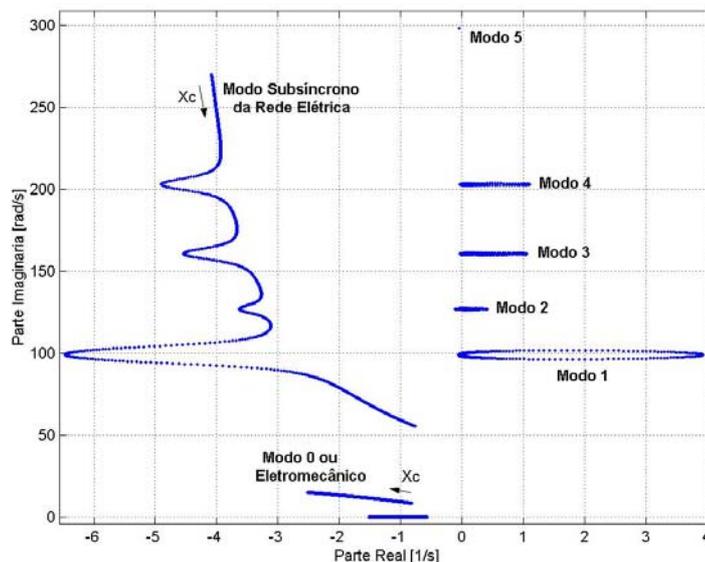


Figura 7.5 – Autovalores dominantes da Figura 7.4.

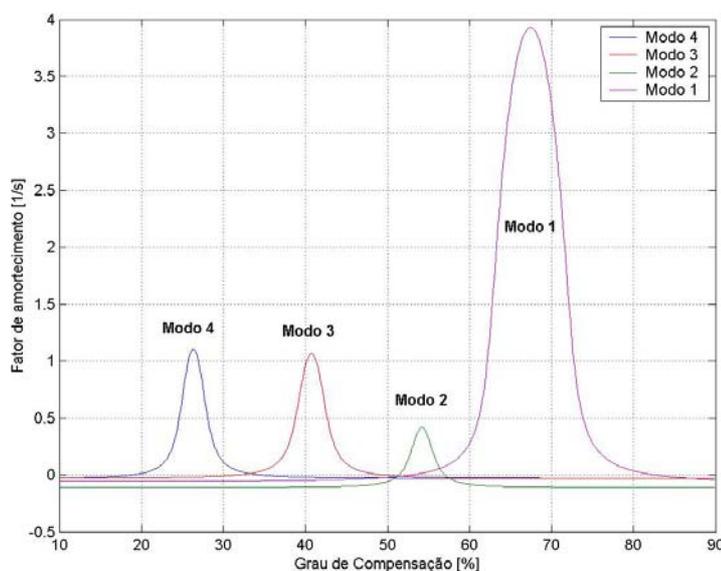


Figura 7.6 – Fatores de amortecimento dos modos oscilatórios referentes ao eixo turbina-gerador.

No entanto, o ponto crítico, para este sistema ocorre para o grau de compensação 18,8%, o qual determina o ponto em que o primeiro autovalor, associado ao modo 4, cruza o eixo imaginário do plano complexo, tornando-se instável. À medida que o grau de compensação aumenta outros autovalores se instabilizam, enquanto que aqueles excitados anteriormente retornam ao semiplano da esquerda, em decorrência da modulação da frequência da rede elétrica. O último autovalor a retornar do semiplano complexo da direita é aquele associado ao modo 1, em 82,6%

de compensação da linha. Desta forma, verifica-se que este sistema não apresenta condições operativas estáveis para graus de compensação entre 18,8 e 82,6%, sem que sejam projetados controladores específicos para o fenômeno da RSS.

Neste contexto, os fatores de participação desempenham um papel importante na determinação das variáveis de estado mais influentes num determinado modo oscilatório, a priori, que comprometam o comportamento dinâmico do sistema FBM.

Tabela 7.4 – Fatores de participação para o sistema radial FBM com grau de compensação 26,3%¹⁴.

Estados	Modos Elétricos		Modos Mecânicos					Modos Eletromecânicos e dos Circuitos do Rotor				
	-4,5808 +j550,75	-4,9058 +j203,01	-0,0500 +j298,18	1,1077 +j202,95	-0,0178 +j160,70	-0,1094 +j127,00	-0,0550 +j99,26	-0,9460 +j9,32	-40,9133	-25,3940	-0,6275	-0,9500
I_d	0,5893	0,9605	0,0000	0,2254	0,0026	0,0003	0,0016	0,0023	0,1014	0,0000	2,4193	0,0192
I_q	0,5372	0,8365	0,0000	0,1952	0,0064	0,0013	0,0152	1,0500	0,0001	0,0075	0,0001	0,0213
I_{fd}	0,0461	0,1452	0,0000	0,0343	0,0004	0,0000	0,0004	0,0010	1,3726	0,0000	2,7073	0,0189
I_{gq}	0,2027	0,4419	0,0000	0,1034	0,0038	0,0008	0,0100	0,8137	0,0001	0,0616	0,0026	0,8286
I_{kd}	0,2943	0,6547	0,0000	0,1525	0,0017	0,0002	0,0010	0,0004	2,4738	0,0000	0,7060	0,0048
I_{kq}	0,0864	0,1877	0,0000	0,0439	0,0016	0,0003	0,0042	0,2425	0,0001	0,9466	0,0007	0,2315
V_{cd}	0,2522	0,2020	0,0000	0,0471	0,0006	0,0001	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
V_{cq}	0,2479	0,2051	0,0000	0,0479	0,0005	0,0000	0,0003	0,0002	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
δ_{HP}	0,0000	0,0042	0,1282	0,0184	0,2435	0,0150	0,0745	0,0169	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005
δ_{IP}	0,0000	0,0000	0,3463	0,0001	0,0473	0,0087	0,0699	0,0283	0,0000	0,0000	0,0000	0,0010
δ_{LPA}	0,0000	0,0133	0,0245	0,0578	0,1207	0,0026	0,1304	0,1571	0,0000	0,0001	0,0001	0,0112
δ_{LPB}	0,0000	0,0555	0,0009	0,2369	0,0197	0,0185	0,0161	0,1568	0,0000	0,0001	0,0000	0,0064
δ_{GEN}	0,0001	0,0255	0,0000	0,0912	0,0646	0,0163	0,1628	0,1494	0,0000	0,0001	0,0030	0,0033
δ_{EXC}	0,0000	0,0003	0,0000	0,0013	0,0058	0,4391	0,0477	0,0060	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
ω_{HP}	0,0000	0,0042	0,1282	0,0184	0,2435	0,0150	0,0745	0,0170	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007
ω_{IP}	0,0000	0,0000	0,3463	0,0001	0,0473	0,0087	0,0699	0,0283	0,0000	0,0000	0,0000	0,0011
ω_{LPA}	0,0000	0,0133	0,0245	0,0578	0,1207	0,0026	0,1304	0,1553	0,0000	0,0001	0,0000	0,0061
ω_{LPB}	0,0000	0,0555	0,0009	0,2369	0,0197	0,0185	0,0161	0,1568	0,0000	0,0001	0,0000	0,0063
ω_{GEN}	0,0001	0,0233	0,0000	0,0910	0,0641	0,0162	0,1621	0,1501	0,0000	0,0001	0,0000	0,0062
ω_{EXC}	0,0000	0,0003	0,0000	0,0013	0,0058	0,4391	0,0477	0,0060	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002

Por exemplo, na Tabela 7.4 estão relacionados os fatores de participação do sistema exemplo para o grau de compensação 26,3%, que excita intensamente o modo 4 do eixo.

Verifica-se que o modo instável, associado ao par conjugado $1,1077 \pm j202,95$ é amplamente influenciado pelas variáveis de estado elétricas, sobretudo pelas

¹⁴ As células com sombreamento amarelo são aquelas cujos valores absolutos são superiores a 0,05.

correntes I_d e I_q da armadura da máquina síncrona, e pelas variáveis mecânicas associadas ao estágio de baixa pressão LPB, em igual proporção. Esta característica decorre da interação entre rede elétrica e eixo turbina-gerador, tomando que o modo subsíncrono da rede elétrica está associado ao par conjugado $-4,9058 \pm j203,01$.

Esta interação pode ser confirmada traçando o comportamento dos autovalores (lugar das raízes) modelando o eixo como um corpo rígido. Para isto é considerado apenas o modo 0 do eixo multimassas, ou seja, uma única massa girante cuja constante de inércia H é a soma das constantes de inércia das seções e, de acordo com a Tabela 7.2, constante de amortecimento D nula. Este resultado pode ser visualizado pela Figura 7.7, que apresenta o lugar das raízes da Figura 7.5 adicionado do lugar das raízes obtido para o sistema com eixo rígido. Pode-se verificar que, como o eixo não apresenta modos oscilatórios, o modo 0 de ambas modelagens são coincidentes. Além disto, os lugares do modo subsíncrono elétrico são idênticos fora da região de interação torcional.

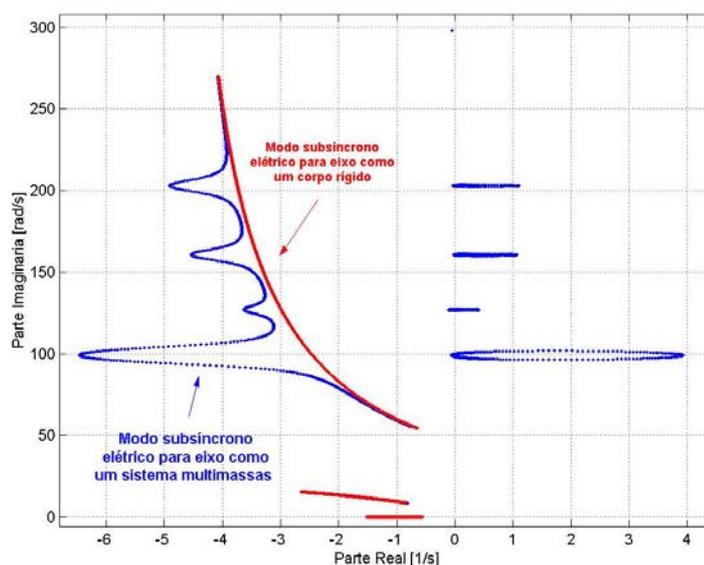


Figura 7.7 – Comparação entre o lugar das raízes do sistema com eixo multimassas e rígido.

Este comportamento confirma o comentário de C.E.J. Bowler em [FOUAD, 1978], o qual afirma que o efeito de gerador de indução é caracterizado pelo fator de amortecimento associado ao autovalor cuja parte imaginária possui frequência inferior à síncrona, quando as oscilações mecânicas são ignoradas; e que a

interação torcional é caracterizada pelas regiões de instabilização adicionais devido à representação dos modos mecânicos.

Tabela 7.5 – Fatores de participação para o sistema radial FBM com grau de compensação 26,3% e eixo rígido.

Estados	Modos Elétricos		Modos Eletromecânicos e dos Circuitos do Rotor				
	-4,5798 +j550,73	-3,7464 +j203,17	-0,9644 +j9,38	-40,9133	-25,3948	-0,6275	-0,9500
I_d	0,5894	1,1814	0,0024	0,1014	0,0000	2,4193	0,0192
I_q	0,5370	1,0212	1,0649	0,0001	0,0077	0,0001	0,0213
I_{fd}	0,0461	0,1787	0,0011	1,3725	0,0000	2,7073	0,0189
I_{kd}	0,2026	0,5395	0,8252	0,0001	0,0596	0,0026	0,8286
I_{gq}	0,2943	0,8042	0,0004	2,4737	0,0000	0,7060	0,0048
I_{kq}	0,0864	0,2291	0,2461	0,0001	0,9487	0,0007	0,2315
V_{cd}	0,2522	0,2481	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
V_{cq}	0,2479	0,2523	0,0002	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
δ -GEN	0,0000	0,0008	0,5135	0,0000	0,0003	0,0029	0,0226
ω -GEN	0,0000	0,0004	0,5135	0,0000	0,0003	0,0001	0,0207

Em outras palavras, considerar o sistema mecânico turbina-gerador como um corpo rígido, elimina a reflexão de frequências naturais do eixo na rede elétrica. Neste caso, é observado apenas o efeito de gerador de indução, já que apenas a rede elétrica em conjunto com o estator do gerador apresenta modos oscilatórios, sem considerar o modo eletromecânico que não é influenciado pela oscilação da rede.

Assim, pode-se comparar o modo subsíncrono da rede elétrica correspondente a ambas representações para o eixo. Note que, na Tabela 7.4, a soma dos fatores de amortecimento associados ao modo subsíncrono da rede ($\sigma_{en} = -4,9058$ [s⁻¹]) e ao modo 4 mecânico ($\sigma_n = 1,1077$ [s⁻¹]) resulta, aproximadamente, o fator de amortecimento subsíncrono da rede elétrica ($\sigma_{en} = -3,7464$ [s⁻¹]), denotado na Tabela 7.5, para o eixo considerado um corpo rígido. Assim, generalizando,

$$\begin{aligned}\sigma_{egi} &= \sigma_{en}^{er} \\ \sigma_{int} &= \sigma_{egi} - \sigma_{en}^{em}\end{aligned}\tag{7.1}$$

onde, σ_{egi} é o fator de amortecimento associado ao efeito de gerador de indução; σ_{int} , o fator de amortecimento associado à interação torcional; σ_{en}^{er} , o fator de amortecimento do modo subsíncrono da rede com eixo rígido, e; σ_{en}^{em} , o fator de amortecimento do modo subsíncrono da rede com eixo multimassas.

Outra importante observação decorrente da Figura 7.7, é que a interação torcional se apresenta muito mais intensa próxima às freqüências naturais do eixo, atingindo seu máximo quando o complemento da freqüência da rede ($f_r = f_o - f_{er}$) é idêntica a uma das freqüências naturais do eixo f_n . Enquanto que, quando f_r está distante de qualquer f_n , o efeito predominante seja o de gerador de indução. Porém, sempre lembrando que ambos fenômenos são mútuos e inseparáveis.

Então, considerando agora que a resistência equivalente da rede elétrica seja nula, pode-se traçar um novo lugar das raízes para o sistema com eixo multimassas e com eixo rígido, como mostrado na Figura 7.8.

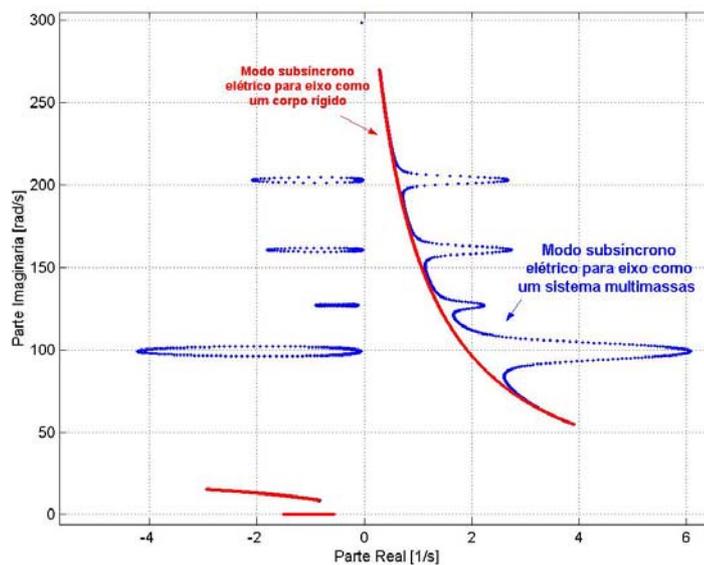


Figura 7.8 – Comparação entre o lugar das raízes do sistema com eixo multimassas e rígido, sem resistência na rede elétrica.

Na ilustração anterior, nota-se o efeito contrário observado na Figura 7.7, pois os modos mecânicos são impulsionados para o semiplano complexo esquerdo, enquanto o modo subsíncrono da rede é impulsionado para o sentido oposto. Neste caso, como o modo da rede é instável para todos os valores de compensação

adotados (considerando as duas diferentes representações para o eixo), tanto o efeito de gerador de indução como a interação torcional colaboram para a instabilidade do sistema, embora o primeiro seja o mais intenso. No entanto, continua válido que a interação torcional está mais presente quando a frequência natural do sistema se aproxima das frequências naturais do eixo.

Os fatores de participação, descritos tanto na Tabela 7.6 como na Tabela 7.7, também expressam a maior atividade das variáveis de estado elétricas na instabilidade do modo subsíncrono elétrico ($2,6684 \pm j203,01$), caracterizando a intensidade do efeito de gerador de indução.

Tabela 7.6– Fatores de participação para o sistema radial FBM com grau de compensação 26,3% sem resistência na rede elétrica.

Estados	Modos Elétricos		Modos Mecânicos					Modos Eletromecânicos e dos Circuitos do Rotor				
	-0,2267 +j550,82	2,6684 +j203,01	-0,0500 +j298,18	-2,0862 +j202,94	-0,0315 +j160,70	-0,1110 +j127,00	-0,0664 +j99,26	-0,9531 +j9,32	-40,9066	-25,3938	-0,6274	-0,9505
I_d	0,5891	0,6729	0,0000	0,5123	0,0026	0,0003	0,0016	0,0008	0,1001	0,0000	2,4188	0,0191
I_q	0,5370	0,5845	0,0000	0,4467	0,0065	0,0013	0,0152	1,0504	0,0006	0,0075	0,0001	0,0214
I_{fd}	0,0462	0,1027	0,0000	0,0779	0,0004	0,0001	0,0004	0,0011	1,3590	0,0000	2,7072	0,0188
I_{kd}	0,2026	0,3094	0,0000	0,2359	0,0038	0,0008	0,0101	0,8139	0,0003	0,0623	0,0026	0,8291
I_{gq}	0,2940	0,4554	0,0000	0,3488	0,0017	0,0002	0,0010	0,0004	2,4588	0,0000	0,7060	0,0047
I_{kq}	0,0863	0,1312	0,0000	0,1001	0,0016	0,0003	0,0042	0,2426	0,0003	0,9458	0,0007	0,2317
V_{cd}	0,2521	0,1413	0,0000	0,1077	0,0006	0,0001	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
V_{cq}	0,2478	0,1436	0,0000	0,1094	0,0005	0,0000	0,0003	0,0001	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
δ_{HP}	0,0000	0,0097	0,1282	0,0129	0,2435	0,0150	0,0745	0,0169	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005
δ_{IP}	0,0000	0,0001	0,3463	0,0001	0,0473	0,0087	0,0699	0,0283	0,0000	0,0000	0,0000	0,0010
δ_{LPA}	0,0000	0,0307	0,0245	0,0405	0,1207	0,0026	0,1304	0,1571	0,0000	0,0001	0,0001	0,0112
δ_{LPB}	0,0000	0,1263	0,0009	0,1661	0,0197	0,0185	0,0161	0,1568	0,0000	0,0001	0,0000	0,0064
δ_{GEN}	0,0001	0,0510	0,0000	0,0659	0,0646	0,0163	0,1628	0,1498	0,0000	0,0001	0,0026	0,0039
δ_{EXC}	0,0000	0,0007	0,0000	0,0009	0,0058	0,4391	0,0477	0,0060	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
ω_{HP}	0,0000	0,0097	0,1282	0,0129	0,2435	0,0150	0,0745	0,0170	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007
ω_{IP}	0,0000	0,0001	0,3463	0,0001	0,0473	0,0087	0,0699	0,0283	0,0000	0,0000	0,0000	0,0011
ω_{LPA}	0,0000	0,0307	0,0245	0,0405	0,1207	0,0026	0,1304	0,1553	0,0000	0,0001	0,0000	0,0061
ω_{LPB}	0,0000	0,1263	0,0009	0,1661	0,0197	0,0185	0,0161	0,1568	0,0000	0,0001	0,0000	0,0063
ω_{GEN}	0,0001	0,0498	0,0000	0,0646	0,0641	0,0162	0,1621	0,1501	0,0000	0,0001	0,0000	0,0062
ω_{EXC}	0,0000	0,0007	0,0000	0,0009	0,0058	0,4391	0,0477	0,0060	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002

Tabela 7.7 – Fatores de participação para o sistema radial FBM com grau de compensação 26,3% e eixo rígido.

Estados	Modos Elétricos		Modos Eletromecânicos e dos Circuitos do Rotor				
	-0,2266 +j550,79	0,6081 +j203,16	-0,9717 +j9,38	-40,9065	-25,3946	-0,6274	-0,9505
I_d	0,5892	1,1807	0,0009	0,1001	0,0000	2,4188	0,0191
I_q	0,5368	1,0204	1,0653	0,0006	0,0076	0,0001	0,0214
I_{fd}	0,0462	0,1798	0,0011	1,3588	0,0000	2,7072	0,0188
I_{kd}	0,2025	0,5392	0,8255	0,0004	0,0604	0,0026	0,8292
I_{gq}	0,2941	0,8013	0,0004	2,4586	0,0000	0,7060	0,0047
I_{kq}	0,0863	0,2287	0,2461	0,0003	0,9479	0,0007	0,2317
V_{cd}	0,2521	0,2480	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
V_{cq}	0,2478	0,2522	0,0001	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
δ -GEN	0,0000	0,0008	0,5139	0,0000	0,0003	0,0025	0,0232
ω -GEN	0,0000	0,0004	0,5135	0,0000	0,0003	0,0001	0,0207

Por último, pode-se identificar os amortecimentos de origem mecânica e elétrica para um dado modo oscilatório do sistema. Para isto, basta considerar todos os amortecimentos mecânicos nulos, restando, assim, apenas a contribuição elétrica nos modos. O resultado desta avaliação para o grau de compensação 26,3% está mostrado na Tabela 7.8, onde σ_{mn} , σ_{en} e σ_n representam os fatores de amortecimento mecânico, elétrico e total, respectivamente.

Tabela 7.8 – Fatores de amortecimento mecânicos e elétricos para o sistema FBM para o grau de compensação 26,3%.

Modos	$\sigma_{mn} [s^{-1}]$	$\sigma_{en} [s^{-1}]$	$\sigma_n [s^{-1}]$
Modo 5	-0,0500	0	-0,0500
Modo 4	-0,0294	1,1371	1,1077
Modo 3	-0,0276	0,0098	-0,0178
Modo 2	-0,1101	0,0007	-0,1094
Modo 1	-0,0542	-0,0008	-0,0550

Obs: Os dados referentes a σ_n foram extraídos da Tabela 7.4.

7.2.4 Aplicação do Índice Proposto

Empregando o índice apresentado na seção 6.3, verifica-se a existência de três bifurcações Hopf associadas ao sistema FBM. Estas ocorrem próximas aos graus de compensação 18,74%, 49,56%, 51,34% e 82,66% de acordo com a Figura 7.9. Além disto, as faixas com índice negativo indicam as regiões nas quais o sistema está sujeito a oscilações não amortecidas ou instáveis, ao contrário das faixas com índice positivo, que indicam oscilações amortecidas no sistema.

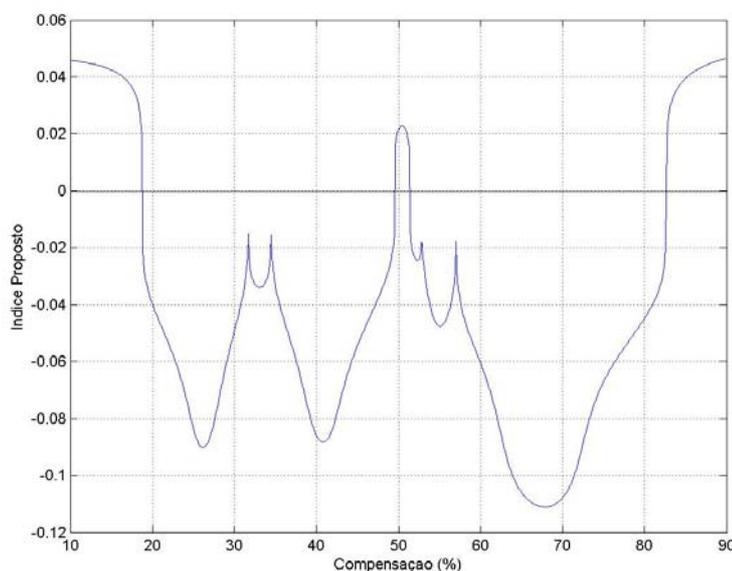


Figura 7.9 – Índice proposto para a identificação de bifurcação Hopf para o sistema FBM.

No entanto, a faixa intermediária estável, compreendida entre as compensações 49,56% e 51,34%, não é recomendada, devido a necessidade de uma margem de estabilidade para a operação do sistema. Além disto, as linhas de transmissão não admitem, usualmente, compensações fixas acima de 70% de suas reatâncias série, devido ao aumento substancial das oscilações experimentadas pelo sistema de potência¹⁵. Logo, o sistema FBM admite apenas compensações inferiores a 18,74% da reatância total do sistema.

¹⁵ Compensações acima deste valor são possíveis apenas quando a compensação série for controlada, como ocorre, por exemplo no TCSC (*Thyristor Controlled Series Capacitor*)

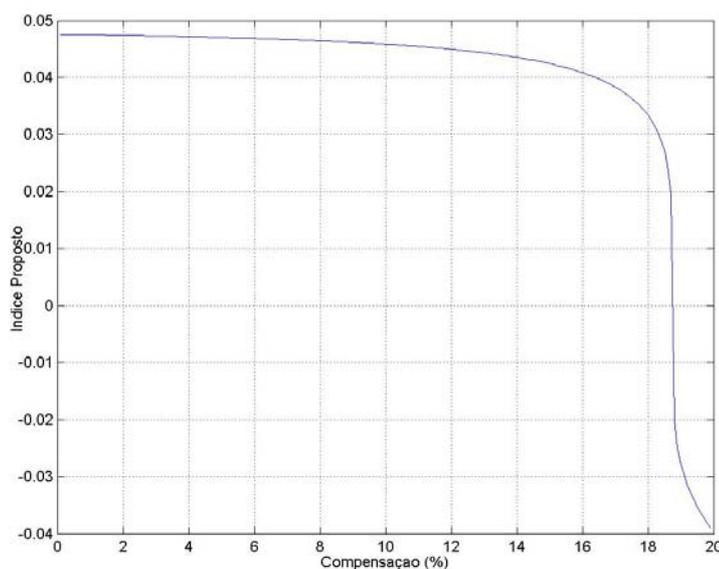


Figura 7.10 – Comportamento do índice proposto para a compensação variando entre 0 e 20%.

Dada a simplicidade deste sistema, foram realizadas simulações adicionais com o programa ATP (*Alternative Transients Program*), para a verificação do comportamento dinâmico deste sistema frente a um curto-circuito trifásico de 0,07 [s] de duração. Para estas simulações foram consideradas as compensações 10%, 18,74% e 30%, cujos resultados estão ilustrados nas figuras 7.11 a 7.13.

Nota-se que, para os graus de compensação 10% e 18,74% o sistema permanece estável, apesar de pequenas oscilações perdurarem até o fim da simulação, como pode ser visto nas figuras 7.11 e 7.12. Estas oscilações, como discutido anteriormente, provêm da característica não linear do sistema. E, como se esperava, verifica-se uma maior oscilação no caso de 18,74%, dada a sua proximidade da bifurcação de Hopf.

Já na Figura 7.13, para o grau de compensação 30%, que é associado a um ponto de equilíbrio instável, de acordo com a Figura 7.9, as oscilações têm comportamento crescente caracterizando sua instabilidade.

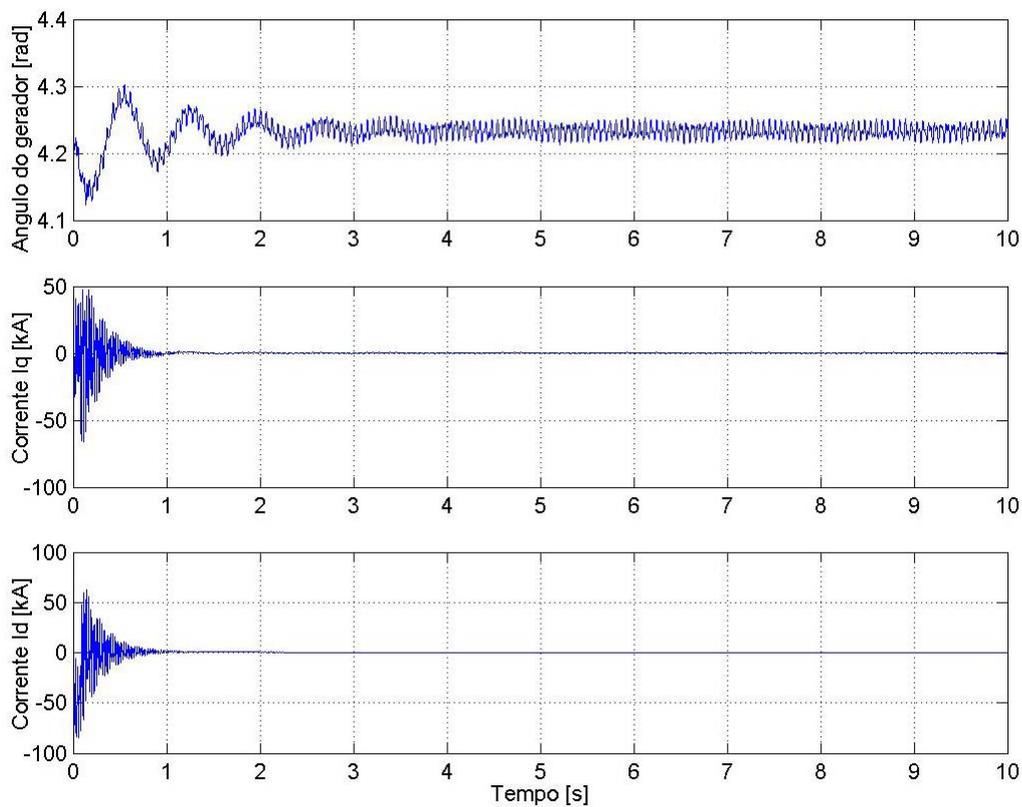


Figura 7.11 – Distúrbio para o sistema com 10% de compensação.

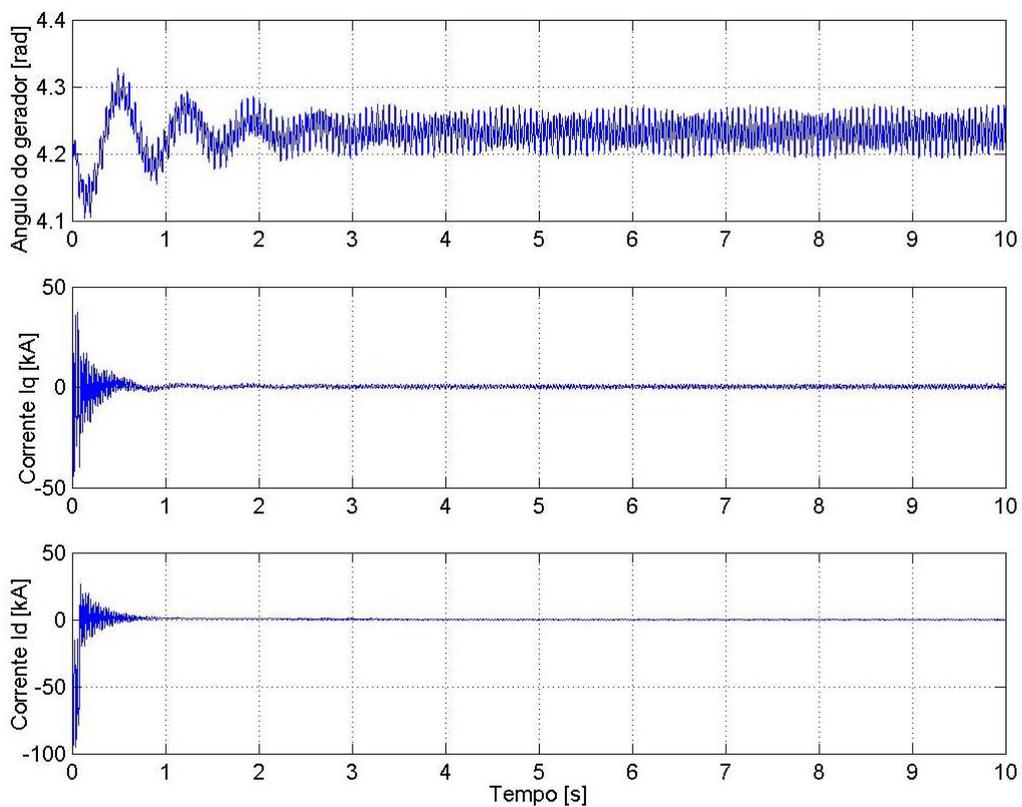


Figura 7.12 – Distúrbio para o sistema com 18,74% de compensação.

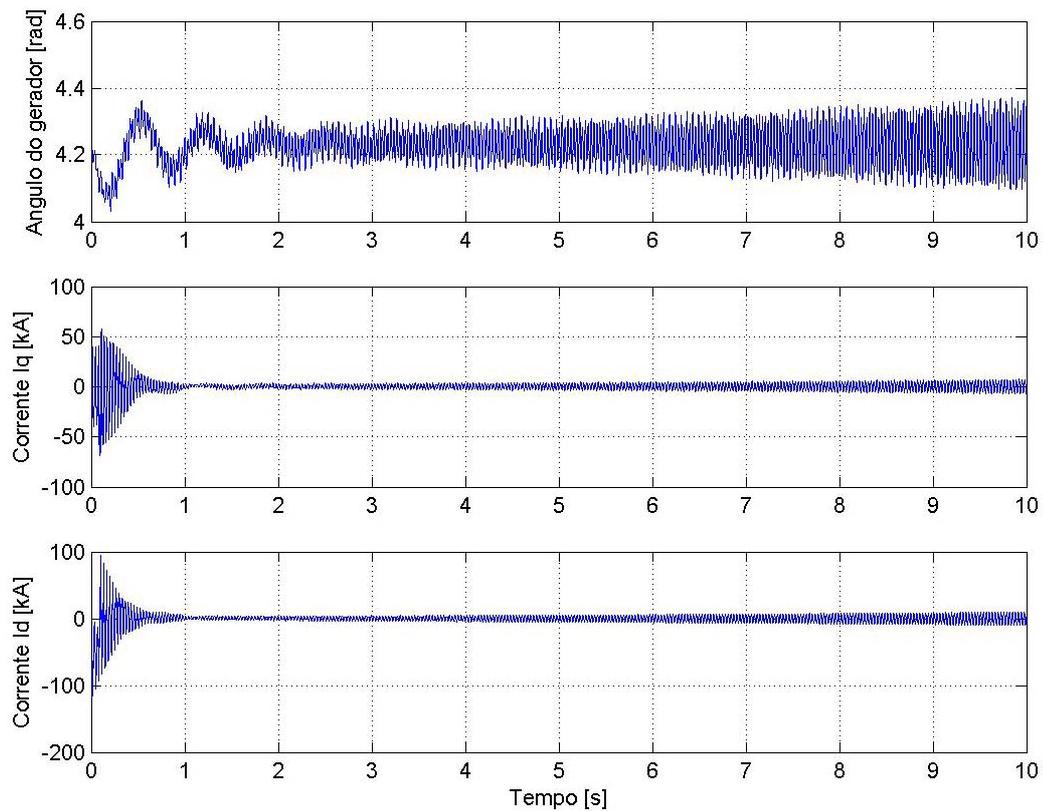


Figura 7.13 – Distúrbio para o sistema com 30% de compensação.

7.3 SISTEMA RADIAL - SBM

Agora, o sistema a ser analisado, ilustrado na Figura 7.14, é constituído por duas máquinas síncronas (G1 e G2) conectadas a um grande sistema através de uma linha de transmissão série compensada. Um detalhe deste sistema é que, além das máquinas serem diferentes, este possui uma frequência torcional, próxima a 25 Hz, comum às duas unidades geradoras.

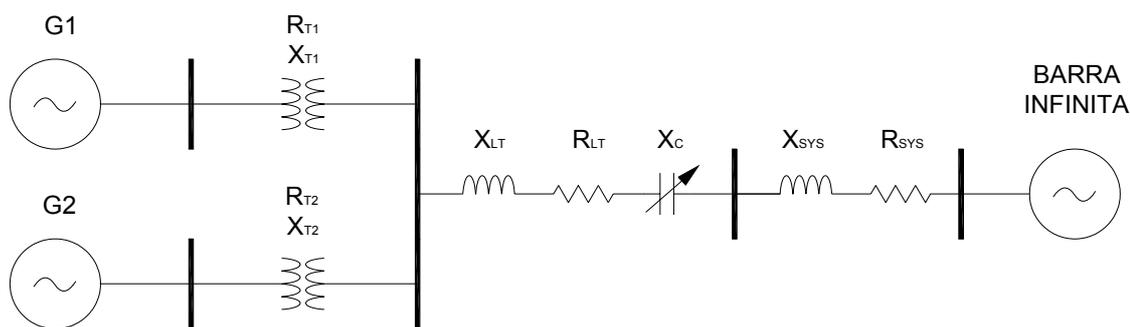


Figura 7.14 – Sistema radial apresentado em [IEEE COMMITTEE REPORT, 1985].

Este sistema foi primeiramente apresentado por [IEEE COMMITTEE REPORT, 1985] e nomeado “*Second Benchmark Model for Computer Simulation of Subsynchronous Resonance*”, por isto será utilizada a sigla SBM toda vez que este for referenciado. Os dados deste sistema estão dispostos nos quadros abaixo, nos quais as potências base das máquinas G1 e G2 e da rede elétrica são, respectivamente, 600, 700 e 100 [MVA].

Quadro 7.4 – Dados do gerador G1 ($MVA_B = 600$)

Resistência e reatâncias [pu]		Constantes de tempo [s]
$R = 0,0045$	$X'_d = 0,230$	$T'_{do} = 3,7$
$X_L = 0,12$	$X'_q = 0,420$	$T'_{qo} = 0,43$
$X_d = 1,54$	$X''_d = 0,180$	$T''_{do} = 0,04$
$X_q = 1,50$	$X''_q = 0,180$	$T''_{qo} = 0,06$

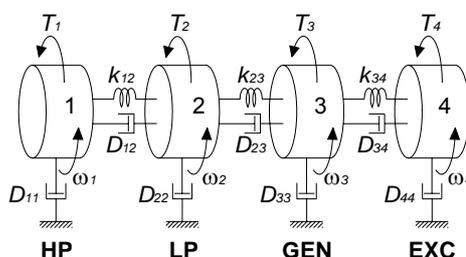


Figura 7.15 – Eixo acoplado à turbina de dois estágios (HP e LP), gerador (GEN) e excitatriz (EXC).

Quadro 7.5 – Dados do eixo turbina-gerador G1

Seção	Eixo	Momento de Inércia J [lb-ft ²]	Elasticidade K [Mlbf-ft/rad]
HP		49912	
	HP-LP		50,12
LP		310729	
	LP-GEN		97,97
GEN		176204	
	GEN-EXC		4,39
EXC		1383	

Quadro 7.6 – Dados do gerador G2 (MVA_B = 700)

Resistência e reatâncias [pu]		Constantes de tempo [s]
R = 0,0045	X' _d = 0,250	T' _{do} = 4,5
X _L = 0,14	X' _q = 0,460	T' _{qo} = 0,55
X _d = 1,65	X'' _d = 0,200	T'' _{do} = 0,04
X _q = 1,59	X'' _q = 0,200	T'' _{qo} = 0,09

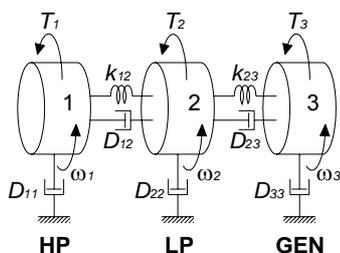


Figura 7.16 – Eixo acoplado à turbina de dois estágios (HP e LP) e gerador (GEN).

Quadro 7.7 – Dados do eixo turbina-gerador G2

Seção	Eixo	Momento de Inércia J [lb-ft ²]	Elasticidade K [Mlbf-ft/rad]
HP		109922	
	HP-LP		198,7
LP		370483	
	LP-GEN		156,1
GEN		334914	

Quadro 7.8 – Dados da rede elétrica ($MVA_B = 100$)

R_{LT}	0,0052 [pu]
X_{LT}	0,054 [pu]
R_{T1}	0,0002 [pu]
X_{T1}	0,020 [pu]
R_{T1}	0,0004 [pu]
X_{T1}	0,040 [pu]
R_{SYS}	0,0014 [pu]
X_{SYS}	0,030 [pu]

7.3.2 Análise Modal dos Eixos

Como no exemplo anterior, com base nos parâmetros torcionais do eixo, dados nos quadros 7.5 e 7.7, calcula-se, primeiramente, as frequências naturais de cada eixo e as respectivas contribuições de cada seção nos referidos modos. Estes resultados são condensados nas tabelas e figuras a seguir.

Tabela 7.9 – Modos torcionais para o eixo de G1¹⁶.

Seção	Frequências Naturais			
	Modo 3 51,1 Hz	Modo 2 32,4 Hz	Modo 1 24,6 Hz	Modo 0 0 Hz
HP	-0,0005	1,0000	1,0000	1,0000
LP	0,0012	-0,2807	0,2583	1,0000
GEN	-0,0097	0,2089	-0,7313	1,0000
EXC	1,0000	0,3512	-0,9555	1,0000

¹⁶ O modos torcionais foram normalizados com relação à componente de maior valor absoluto.

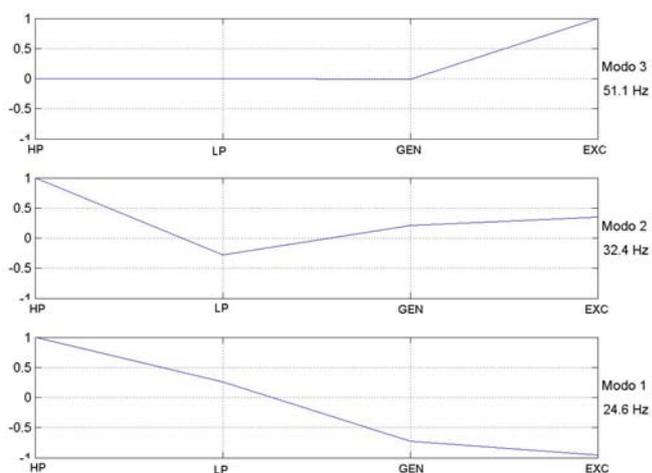


Figura 7.17 – Representação gráfica dos modos torcionais do eixo apresentado na Figura 7.15.

Tabela 7.10 – Modos torcionais para o eixo de G2¹⁷.

Seção	Frequências Naturais		
	Modo 2 45,0 Hz	Modo 1 24,7 Hz	Modo 0 0 Hz
HP	1,0000	1,0000	1,0000
LP	-0,3749	0,5873	1,0000
GEN	0,0865	-0,9779	1,0000

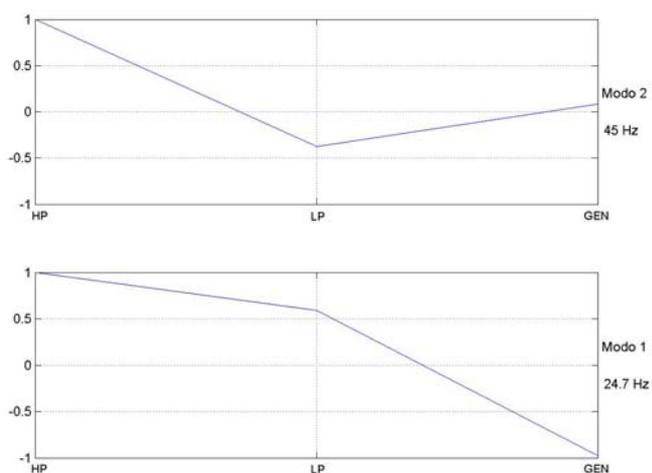


Figura 7.18 – Representação gráfica dos modos torcionais do eixo de G2.

¹⁷ O modos torcionais foram normalizados com relação à componente de maior valor absoluto.

Agora, com base nos fatores de amortecimento modais fornecidos em [IEEE COMMITTEE REPORT, 1985] para o conjunto turbina-gerador G1, são obtidas as grandezas modais apresentadas na Tabela 7.11 e, conseqüentemente, as constantes de amortecimento denotadas na Tabela 7.12. Analogamente, os fatores de amortecimento de G2 são calculados e expostos nas tabelas 7.13 e 7.14.

Tabela 7.11 – Grandezas modais do eixo de G1.

Grandezas Modais					
Modos	H_n [s]	K_n [pu/rad]	D_n [pu/pu]	σ_n [s ⁻¹]	ω_n [rad/s]
Modo 3	0,0070	3,8230	0,0014	0,05	321,13
Modo 2	0,4105	90,1045	0,0821	0,05	203,41
Modo 1	0,8292	105,4123	0,1658	0,05	154,80
Modo 0	2,6862	0	0	0	0

Tabela 7.12 – Constantes de amortecimento do eixo de G1.

Seção	HP	LP	GEN	EXC
D [pu/pu]	0,0952	-0,2586	0,1619	0,0014

Tabela 7.13 – Grandezas modais do eixo de G2.

Grandezas Modais					
Modos	H_n [s]	K_n [pu/rad]	D_n [pu/pu]	σ_n [s ⁻¹]	ω_n [rad/s]
Modo 2	0,7038	298,5535	0,0704	0,025	282,78
Modo 1	2,3869	303,9451	0,2387	0,025	154,93
Modo 0	3,4878	0	0	0	0

Tabela 7.14 – Constantes de amortecimento do eixo de G2.

Seção	HP	LP	GEN
D [pu/pu]	0,1221	-0,3817	0,2596

7.3.3 Análise Modal do Sistema Eletromecânico

Para as análises seguintes foi adotada uma condição operativa de baixo carregamento para o sistema. As potências despachadas em G1 e G2 iguais a 0,1 [pu], na base da sua respectiva máquina, e tensões de geração e da barra infinita iguais a 1,00 [pu]. O baixo carregamento adotado para o sistema, visa uma configuração onde os amortecimentos na turbina são bem pequenos.

Na Figura 7.19 está ilustrado o comportamento dos 28 autovalores associados ao sistema SBM para variação da compensação da linha de transmissão entre 10 e 90% da sua reatância série.

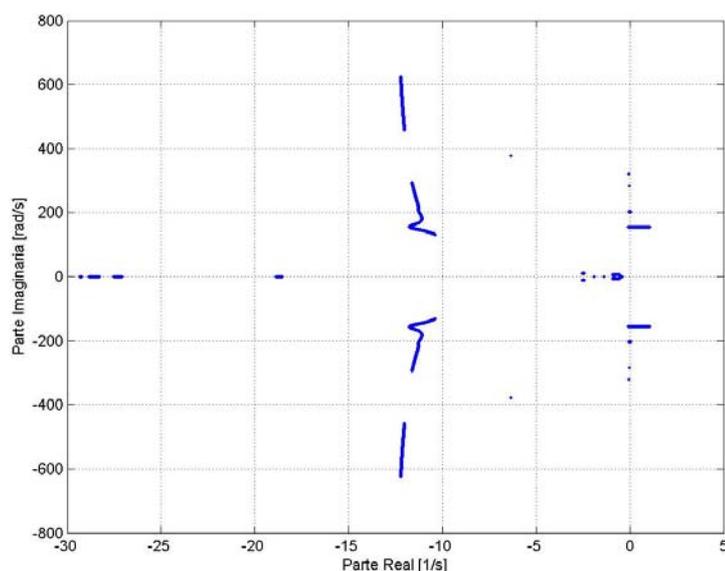


Figura 7.19 – Comportamento dos autovalores com a compensação série variando de 10 a 90%.

Nota-se pela Figura 7.19 que ao longo da variação do grau de compensação da linha de transmissão, o modo 2 associado a G1, e o modo 1 comum a G1 e G2 se instabilizam. Na Figura 7.20 pode-se verificar detalhadamente esta característica. Adicionalmente, os fatores de amortecimento, ilustrados na Figura 7.21, denotam que as máximas interações entre rede elétrica e os eixos mecânicos ocorrem próximas às compensações de 44,3% (modo 2 de G1) e 72,8% (modo 1 comum a G1 e G2).

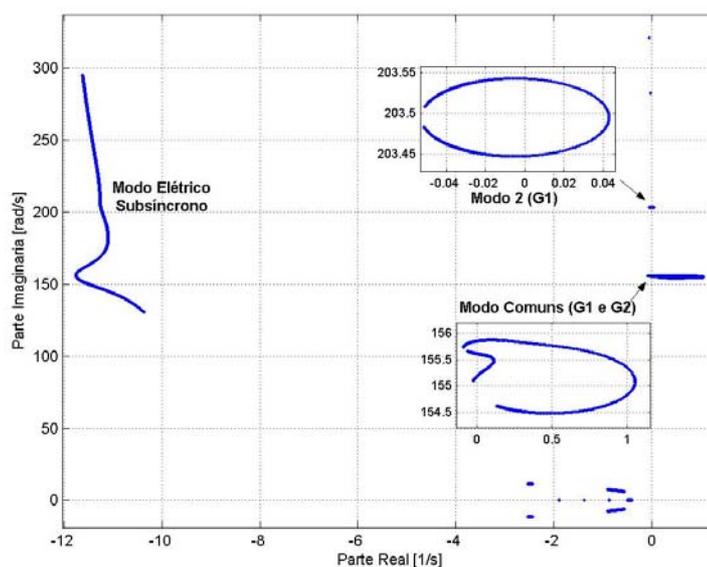


Figura 7.20 – Modos eletromecânicos do sistema SBM.

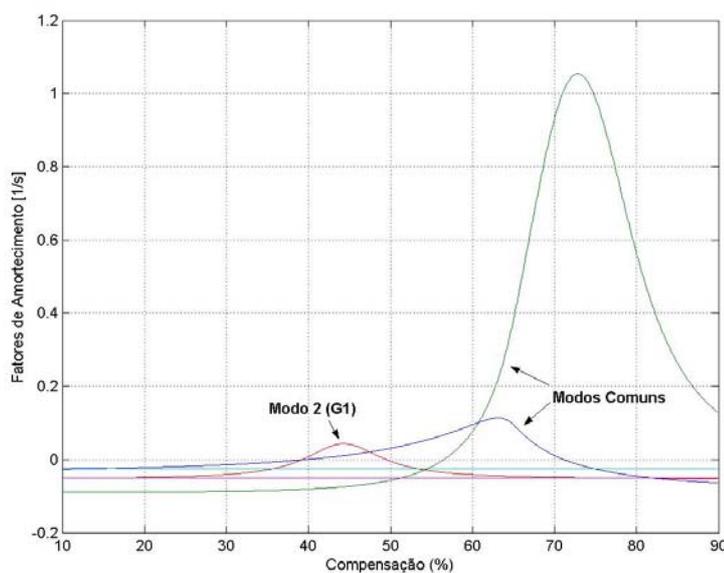


Figura 7.21 – Fatores de amortecimento dos modos oscilatórios referentes aos eixos turbina-gerador.

A partir do cálculo dos fatores de participação para o grau de compensação 44,3%, apresentado parcialmente na Tabela 7.15, nota-se que tanto o modo 1 como o modo 2 são instáveis, apesar de ser o máximo da interação da rede com o modo 2. Além disto, pode-se verificar que o modo 2 se mostra bastante influente nas seções HP e LP da unidade G1, estando de acordo com os modos torcionais de G1, dados na Figura 7.17.

Tabela 7.15 – Fatores de participação para o sistema SBM com grau de compensação 44,3%¹⁸.

Estados	Modos Elétricos			Modos Mecânicos				
	-12,1459 +j550,08	-6,3438 +j376,88	-11,2556 +j203,58	-0,0499 +j321,13	-0,0250 +j282,79	0,0430 +j203,50	-0,0743 +j155,79	0,0108 +j155,22
I_{d1}	0,2605	1,1700	0,4553	0,0000	0,0000	0,0046	0,0030	0,0011
I_{q1}	0,2567	1,1398	0,4514	0,0002	0,0001	0,0050	0,0239	0,0015
I_{d2}	0,1614	1,1642	0,2542	0,0000	0,0000	0,0021	0,0003	0,0012
I_{q2}	0,1596	1,1290	0,2484	0,0001	0,0001	0,0032	0,0052	0,0043
I_{fd1}	0,0607	0,5043	0,1652	0,0000	0,0000	0,0013	0,0009	0,0004
I_{gq1}	0,0185	0,1554	0,0530	0,0000	0,0000	0,0007	0,0039	0,0002
I_{kd1}	0,0547	0,4531	0,1472	0,0000	0,0000	0,0012	0,0008	0,0003
I_{kq1}	0,0937	0,7781	0,2552	0,0001	0,0001	0,0033	0,0178	0,0009
I_{fd2}	0,0295	0,4619	0,0798	0,0000	0,0000	0,0008	0,0003	0,0003
I_{gq2}	0,0082	0,1293	0,0224	0,0000	0,0000	0,0003	0,0009	0,0005
I_{kd2}	0,0265	0,4130	0,0708	0,0000	0,0000	0,0007	0,0002	0,0003
I_{kq2}	0,0455	0,7120	0,1214	0,0001	0,0000	0,0016	0,0046	0,0028
V_{cd}	0,2506	0,0000	0,2495	0,0000	0,0000	0,0021	0,0004	0,0007
V_{cq}	0,2506	0,0000	0,2495	0,0000	0,0000	0,0022	0,0004	0,0006
δ_{HP-1}	0,0000	0,0000	0,0024	0,0000	0,0000	0,2991	0,1252	0,0273
δ_{LP-1}	0,0000	0,0000	0,0015	0,0001	0,0000	0,1478	0,0482	0,0110
δ_{GEN-1}	0,0001	0,0013	0,0034	0,0061	0,0000	0,0477	0,2372	0,0517
δ_{EXC-1}	0,0000	0,0000	0,0000	0,4938	0,0000	0,0011	0,0032	0,0007
ω_{HP-1}	0,0000	0,0000	0,0024	0,0000	0,0000	0,2991	0,1252	0,0273
ω_{LP-1}	0,0000	0,0000	0,0015	0,0001	0,0000	0,1478	0,0482	0,0110
ω_{GEN-1}	0,0000	0,0000	0,0022	0,0060	0,0000	0,0478	0,2359	0,0515
ω_{EXC-1}	0,0000	0,0000	0,0000	0,4938	0,0000	0,0011	0,0032	0,0007
δ_{HP-2}	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,3340	0,0000	0,0175	0,0809
δ_{LP-2}	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1583	0,0000	0,0200	0,0935
δ_{GEN-2}	0,0000	0,0006	0,0008	0,0000	0,0077	0,0000	0,0525	0,2383
ω_{HP-2}	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,3340	0,0000	0,0175	0,0809
ω_{LP-2}	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1583	0,0000	0,0200	0,0935
ω_{GEN-2}	0,0000	0,0000	0,0004	0,0000	0,0077	0,0000	0,0523	0,2378

Para o grau de compensação 72,8%, o modo 1, comum a G1 e G2 é o único instável. Neste caso, verifica-se claramente a interação entre os dois conjuntos turbina-gerador G1 e G2, devido às notórias influências das seções HP e GEN de G1, e da seção GEN de G2.

¹⁸ As células com sombreamento amarelo são aquelas cujos valores absolutos são superiores a 0,05.

Tabela 7.16 – Fatores de participação para o sistema SBM com grau de compensação 72,8%¹⁹.

Estados	Modos Elétricos			Modos Mecânicos				
	-12,1972 +j599,10	-6,3438 +j376,88	-11,7510 +j154,85	-0,0499 +j321,13	-0,0250 +j282,79	-0,0492 +j203,48	1,0539 +j155,09	-0,0129 +j155,62
I_{d1}	0,2508	1,1698	0,5011	0,0000	0,0000	0,0001	0,0534	0,0017
I_{q1}	0,2473	1,1399	0,4929	0,0002	0,0001	0,0005	0,0414	0,0050
I_{d2}	0,1567	1,1642	0,2757	0,0000	0,0000	0,0004	0,0310	0,0031
I_{q2}	0,1550	1,1290	0,2709	0,0001	0,0001	0,0014	0,0363	0,0195
I_{fd1}	0,0556	0,5043	0,1999	0,0000	0,0000	0,0001	0,0194	0,0007
I_{gq1}	0,0169	0,1554	0,0646	0,0000	0,0000	0,0001	0,0059	0,0010
I_{kd1}	0,0502	0,4531	0,1765	0,0000	0,0000	0,0001	0,0168	0,0006
I_{kq1}	0,0859	0,7781	0,2996	0,0001	0,0000	0,0005	0,0267	0,0044
I_{fd2}	0,0271	0,4619	0,0970	0,0000	0,0000	0,0002	0,0109	0,0017
I_{gq2}	0,0075	0,1293	0,0278	0,0000	0,0000	0,0002	0,0039	0,0026
I_{kd2}	0,0243	0,4130	0,0852	0,0000	0,0000	0,0001	0,0094	0,0014
I_{kq2}	0,0417	0,7120	0,1476	0,0001	0,0001	0,0009	0,0204	0,0135
V_{cd}	0,2504	0,0000	0,2280	0,0000	0,0000	0,0001	0,0232	0,0013
V_{cq}	0,2504	0,0000	0,2281	0,0000	0,0000	0,0002	0,0240	0,0013
δ_{HP-1}	0,0000	0,0000	0,0101	0,0000	0,0000	0,3022	0,0968	0,0548
δ_{LP-1}	0,0000	0,0000	0,0051	0,0001	0,0000	0,1491	0,0394	0,0214
δ_{GEN-1}	0,0000	0,0013	0,0227	0,0061	0,0000	0,0479	0,1813	0,1033
δ_{EXC-1}	0,0000	0,0000	0,0003	0,4938	0,0000	0,0011	0,0025	0,0014
ω_{HP-1}	0,0000	0,0000	0,0101	0,0000	0,0000	0,3022	0,0968	0,0548
ω_{LP-1}	0,0000	0,0000	0,0051	0,0001	0,0000	0,1491	0,0394	0,0214
ω_{GEN-1}	0,0000	0,0000	0,0211	0,0060	0,0000	0,0479	0,1829	0,1034
ω_{EXC-1}	0,0000	0,0000	0,0003	0,4938	0,0000	0,0011	0,0025	0,0014
δ_{HP-2}	0,0000	0,0000	0,0020	0,0000	0,3340	0,0000	0,0338	0,0696
δ_{LP-2}	0,0000	0,0000	0,0023	0,0000	0,1583	0,0000	0,0391	0,0799
δ_{GEN-2}	0,0000	0,0006	0,0066	0,0000	0,0077	0,0000	0,0986	0,2083
ω_{HP-2}	0,0000	0,0000	0,0020	0,0000	0,3340	0,0000	0,0338	0,0696
ω_{LP-2}	0,0000	0,0000	0,0023	0,0000	0,1583	0,0000	0,0391	0,0799
ω_{GEN-2}	0,0000	0,0000	0,0060	0,0000	0,0077	0,0000	0,0989	0,2073

¹⁹ As células com sombreamento amarelo são aquelas cujos valores absolutos são superiores a 0,05.

7.3.4 Aplicação do Índice Proposto

Empregando o índice apresentado na seção 6.3, verifica-se a existência de uma bifurcação Hopf associada ao sistema SBM próxima ao grau de compensação 39,25%. Este resultado pode ser conferido pelo índice ilustrado na Figura 7.22.

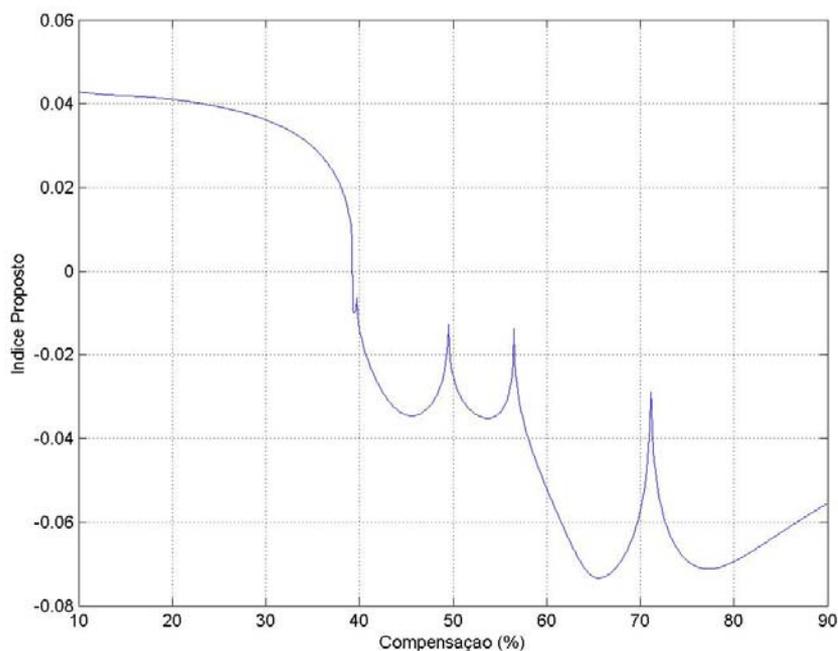


Figura 7.22 – Índice proposto para a identificação de bifurcação Hopf para o sistema SBM.

Este resultado indica que até o grau de compensação de 39,25% o sistema se mostra estável com oscilações bem amortecidas. A partir deste ponto esta característica não é mais observada e o sistema passa a apresentar oscilações sustentadas ou até crescentes no tempo.

7.4 SISTEMA HIDROTÉRMICO INTERLIGADO

O sistema avaliado neste item, ilustrado na Figura 7.23, é composto por 6 barras interligadas entre si, cujas cargas são supridas por uma usina hidrelétrica (G1) e duas usinas termelétricas (G2 e G3).

Para a unidade geradora G1 foram adotados dados elétricos e torcionais de uma unidade geradora da usina Itaipu Binacional (Foz do Iguaçu-PR-Brasil). Os dados elétricos foram retirados da base de dados do ONS (Operador Nacional do Sistema Elétrico), enquanto que os dados torcionais, principalmente da turbina, foram cedidos pela própria usina.

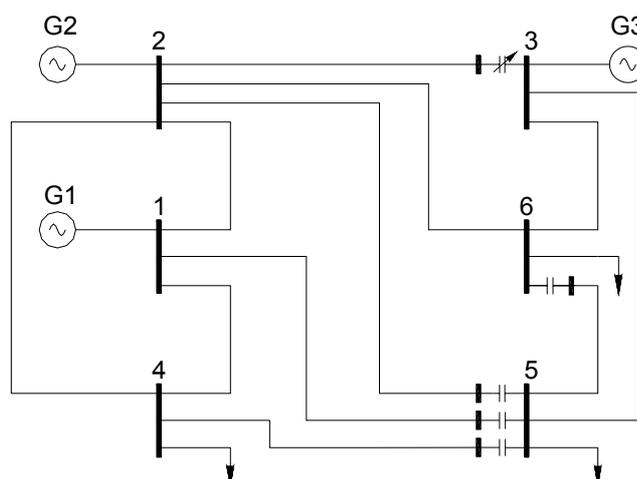


Figura 7.23 – Sistema hidrotérmico interligado.

Os dados utilizados para G2 e G3 são idênticos aos apresentados na seção anterior. Assim seguem os dados do gerador hidráulico G1, todos na base de 737 [MVA].

Quadro 7.9 – Dados do gerador hidráulico G1 ($MVA_B = 737$)

Resistência e reatâncias [pu]		Constantes de tempo [s]
$R = 0$	$X'_d = 0,329$	$T'_{do} = 8,5$
$X_L = 0,12$	$X''_d = 0,258$	$T''_{do} = 0,09$
$X_d = 0,945$	$X''_q = 0,258$	$T''_{qo} = 0,19$
$X_q = 0,693$		

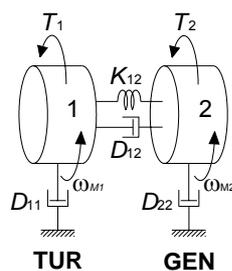


Figura 7.24 – Conjunto turbina-gerador para G1.

Quadro 7.10 – Dados do eixo turbina-gerador de G1

Seção	Eixo	Inércia H [s]	Elasticidade K [pu Torque/rad]
TUR		0,194783	
	TUR-GEN		202,8065
GEN		5,194217	

Quadro 7.11 – Dados de linha da rede elétrica (MVA_B=700)

De	Para	R [pu]	X _L [pu]	X _C [pu]	B _{sh} * [pu]
1	2	0,010	0,20	0,00	0,04
1	4	0,005	0,20	0,00	0,04
1	5	0,008	0,45	0,10	0,06
2	3	0,005	0,25	X _C variável	0,06
2	4	0,005	0,10	0,00	0,02
2	5	0,010	0,45	0,25	0,04
2	6	0,007	0,20	0,00	0,05
3	5	0,012	0,26	0,00	0,05
3	6	0,002	0,10	0,00	0,02
4	5	0,020	0,50	0,20	0,08
5	6	0,010	0,40	0,20	0,06

Obs: B_{sh} representa a susceptância total da linha de transmissão

Quadro 7.12 – Dados de barra da rede elétrica

Barra	Tipo	Tensão [pu]	P _{geração} [MW]	P _{carga} [MW]	Q _{carga} [MVar]
1	Slack	1,050	-	0,0	0,0
2	Geração	1,050	60	0,0	0,0
3	Geração	1,050	70	0,0	0,0
4	Carga	-	-	70	70
5	Carga	-	-	70	70
6	Carga	-	-	70	70

7.4.2 Análise Modal dos Eixos

Como estudo já foi realizado para os eixos de G2 e G3, basta retornar à seção 7.3.2 para este estudo. Desta forma basta avaliar apenas o eixo do hidrogerador G1, representado apenas por duas seções associadas à turbina (TUR) e ao gerador (GEN). Nas tabelas 7.17 a 7.19 são apresentados os resultados desta análise modal.

Tabela 7.17 – Modos torcionais para o eixo de G1²⁰.

Seção	Frequências Naturais	
	Modo 1 11,5 Hz	Modo 0 0 Hz
TUR	1,0000	1,0000
GEN	-0,0375	1,0000

Nota-se, ainda, através da Tabela 7.17 que o modo torcional de 11,5 Hz da unidade hidráulica praticamente não influencia as variáveis de estado associadas ao gerador, em comparação com a turbina. Esta característica comprova os argumentos colocados na seção 5.4, acerca dos aspectos torcionais dos hidrogeradores.

²⁰ O modos torcionais foram normalizados com relação à componente de maior valor absoluto.

Tabela 7.18 – Grandezas modais do eixo de G1.

Grandezas Modais					
Modos	H_n [s]	K_n [pu/rad]	D_n [pu/pu]	σ_n [s ⁻¹]	ω_n [rad/s]
Modo 1	0,2021	218,3021	0,0404	0,05	72,26
Modo 0	5,3890	0	0	0	0

Tabela 7.19 – Constantes de amortecimento do eixo de G1.

Seção	TUR	GEN
D [pu/pu]	-0,0405	0,0405

7.4.3 Análise Modal do Sistema Eletromecânico

Para análise deste sistema foi adotada a condição operativa estabelecida no Quadro 7.12, e variou-se a compensação da linha de transmissão 2-3 de 10 a 90% da sua reatância série.

Na Figura 7.25, é apresentado o comportamento dos modos dominantes do sistema interligado. As cargas foram consideradas elementos resistivos e indutivos em paralelo com o sistema. Para este caso foram obtidos 85 autovalores, que são mostrados na Tabela 7.20.

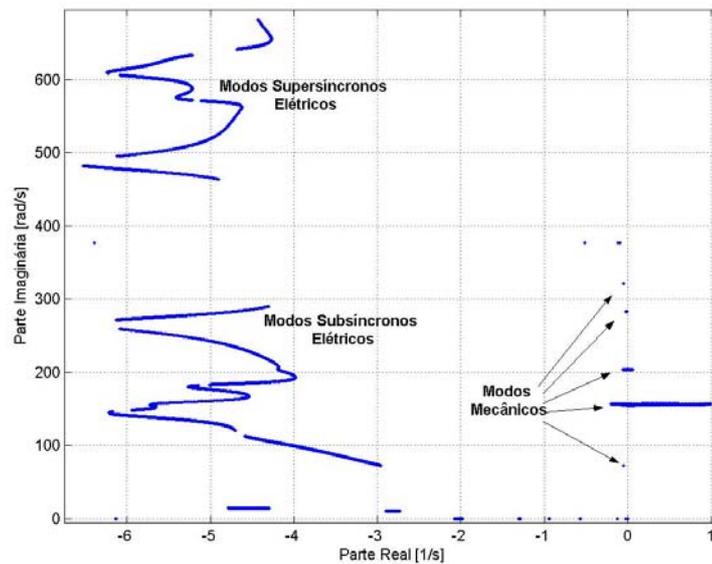


Figura 7.25 – Detalhe do comportamento dos autovalores dominantes do sistema interligado.

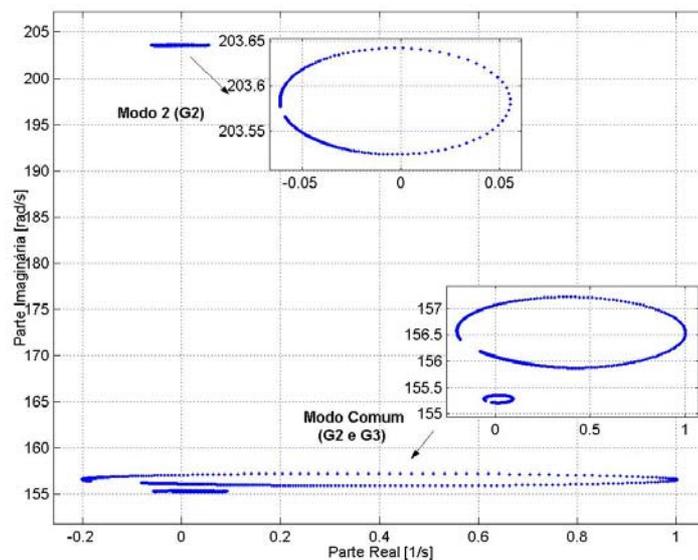


Figura 7.26 – Detalhe do comportamento dos modos mecânicos de G2 e G3 do sistema interligado que cruzam o eixo imaginário.

Verifica-se que o modo oscilatório associado ao gerador G1 (11,5 Hz) mantém-se praticamente inalterado durante toda a simulação, como pode ser visto na Figura 7.25. Ao contrário do modo 2 do gerador G2 e do modo comum a G1 e G2 que se mostram bastante sensíveis a essa variação, de acordo com a Figura 7.26.

Foi aplicado, também, o índice para a identificação de bifurcações Hopf, cujo resultado está ilustrado na Figura 7.27. Nota-se que o sistema apresenta quatro bifurcações Hopf associadas ao modo comum aos geradores G2 e G3, e ao modo 2 de G2. Estas bifurcações ocorrem próximo aos graus de compensação 30,2%, 33,7%, 47,8% e 70,0%, mostrando que este sistema pode se instabilizar entre os dois primeiros e, os dois últimos valores de compensação.

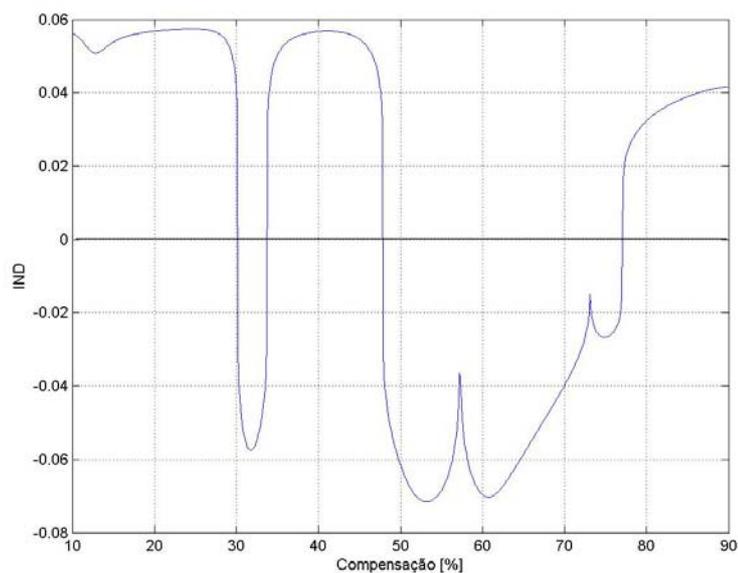


Figura 7.27 – Índice proposto para a identificação de bifurcação Hopf para o sistema interligado.

A seguir, são apresentados na Tabela 7.20 os autovalores associados ao sistema para o grau de compensação de 31,75% na LT 2-3. Observa-se que o único autovalor com parte real positiva é aquele associado ao modo 2 do gerador G2.

Tabela 7.20 – Autovalores para o sistema interligado para 31,75% de compensação na LT 2-3.

Numero	Parte Real [1/s]	Parte Imaginária [rad/s]	Parte Imaginária [Hz]
1, 2	0,0553	203,58	32,40
3, 4	-0,0230	282,79	45,01
5	-0,0286	0,00	0,00
6, 7	-0,0500	321,14	51,11
8, 9	-0,0526	72,28	11,50
10, 11	-0,0545	155,26	24,71
12, 13	-0,0913	376,99	60,00
14, 15	-0,1204	376,99	60,00
16	-0,1251	0,00	0,00
17, 18	-0,1999	156,53	24,91
19, 20	-0,5172	376,99	60,00
21	-0,5664	0,00	0,00
22	-0,9373	0,00	0,00
23	-1,2885	0,00	0,00
24	-1,9897	0,00	0,00
25, 26	-2,7556	10,27	1,63
27, 28	-4,1828	203,06	32,32
29, 30	-4,3522	14,15	2,25
31, 32	-4,5494	111,53	17,75
33, 34	-4,6018	642,46	102,25
35, 36	-4,6927	550,82	87,67
37, 38	-5,2556	180,89	28,79
39, 40	-5,3354	573,09	91,21
41, 42	-5,9132	273,19	43,48
43	-6,1334	0,00	0,00
44, 45	-6,2086	144,97	23,07
46, 47	-6,2374	609,02	96,93
48, 49	-6,3815	480,72	76,51
50, 51	-6,3886	376,88	59,98
52, 53	-9,9848	376,80	59,97
54	-12,7080	0,00	0,00
55, 56	-15,3380	376,98	60,00

Continuação – Autovalores para o sistema interligado para 31,75% de compensação na LT 2-3.

Numero	Parte Real [1/s]	Parte Imaginária [rad/s]	Parte Imaginária [Hz]
57	-19,4300	0,00	0,00
58	-27,6609	0,00	0,00
59	-30,8053	0,00	0,00
60	-31,4446	0,00	0,00
61, 62	-71,2334	6872,68	1093,82
63, 64	-71,2889	6118,70	973,82
65, 66	-96,4905	7953,31	1265,81
67, 68	-96,5453	7199,33	1145,81
69, 70	-100,5042	8552,48	1361,17
71, 72	-100,5557	7798,51	1241,17
73, 74	-118,5630	4572,49	727,73
75, 76	-118,6761	3818,51	607,73
77, 78	-119,9250	2201,54	350,39
79, 80	-121,8603	1447,84	230,43
81, 82	-157,7449	5204,29	828,29
83, 84	-157,8622	4450,31	708,29
85	0	0	0

Por fim, são apresentados os fatores de participação associados ao modo torcional instável, dado na Tabela 7.20. Pode ser observado, que as maiores influências neste modo provém do eixo de G2, comprovando a interação torcional experimentada pelo referido eixo.

Tabela 7.21 – Fatores de participação para o modo comum de G2 e G3 para 31,75% de compensação na LT 2-3.

ESTADOS	MODO 2 (G2) 0,0553+j203,58
δ -HP-2	0,2917
δ -LP-2	0,1453
δ -GER-2	0,0483
ω -HP-2	0,2917
ω -LP-2	0,1453
ω -GER-2	0,0483

CAPÍTULO 8

CONSIDERAÇÕES FINAIS

*"Somos a memória que temos e a responsabilidade que assumimos".
José Saramago*

8.1 CONCLUSÃO

A literatura especializada neste assunto apresenta-se, em sua maior parte, na forma de artigos de revista e experiências práticas, tornando bastante difícil o aprofundamento neste tema e muitas vezes o acesso a estes documentos. Além disto, os livros que tratam sobre RSS são raros, como [ANDERSON, 1988], [KUNDUR, 1994] e [ONG, 1998], e mesmo assim tratam o problema qualitativamente, empregando sistemas extremamente simples para a avaliação deste fenômeno.

Por estas razões, objetivou-se, neste documento, modelar de forma sistemática os sistemas elétricos visando a avaliação da RSS. Na verdade, todo o desenvolvimento teórico apresentado é fruto da implementação de um programa em MATLAB® destinado à avaliação da RSS nos sistemas de potência. Esta forma de abordagem

propiciou a maturação de uma visão crítica e detalhada acerca do problema e, como este é encarado pelo setor elétrico, sobretudo, brasileiro.

Como foi visto ao longo de toda a dissertação, a maior complexidade dos modelos utilizados em comparação com aqueles empregados em avaliações de estabilidade transitória demanda informações mais detalhadas que devem ser fornecidas pelos fabricantes, principalmente, de turbinas e geradores. No entanto, pôde ser observado durante este estudo a dificuldade de obtenção de dados de sistemas reais e a falta de informação dos profissionais do setor elétrico brasileiro com relação a RSS, comprometendo a veracidade dos estudos pré-operacionais, especialmente de usinas térmicas.

No tocante aos modelos utilizados, a máquina síncrona deve preservar o efeito transformador, que caracteriza a variação do fluxo magnético no entreferro, ao contrário dos modelos normalmente utilizados em estudos de estabilidade transitória de sistemas de potência. Apenas desta forma, são preservadas as reflexões de freqüências da rede no rotor e vice-versa.

Outro importante aspecto voltado às máquinas síncronas é a disposição das mesmas de forma interligada. Esta característica envolve considerações adicionais à sua modelagem que normalmente são subentendidas na bibliografia utilizada. Nesta dissertação utilizou-se uma referência dq com freqüência constante igual à nominal do sistema elétrico, comum a todas as máquinas síncronas, que posteriormente foi utilizada como referência, também, para a rede elétrica. Este procedimento possibilita a interconexão de várias máquinas síncronas a uma rede elétrica, todas referenciadas a um mesmo sistema referencial.

Os eixos mecânicos acoplados às unidades geradoras também desempenham um papel importante, já que estes inserem outras freqüências naturais de oscilação. Para estes modelos são fundamentais as constantes de elasticidade e de inércia calculadas no projeto das turbinas, pelos fabricantes. Adicionalmente, necessita-se das constantes de amortecimento calculadas a partir de dados obtidos de ensaios de campo.

Foi mostrado, também, na seção 5.4 e no terceiro exemplo do capítulo 7, o motivo da baixa sensibilidade dos hidrogeradores às interações torcionais. Como nestes casos

a inércia do gerador é muito superior a da turbina, qualquer torque aplicado ao gerador influi de forma insignificante nos modos naturais do eixo turbina-gerador. Em outras palavras, a inércia elevada dos geradores hidráulicos funciona como uma espécie de barreira para as oscilações subsíncronas, que ficam confinadas em seus respectivos sistemas nos quais estas foram originadas (elétrico ou mecânico).

Outro aspecto igualmente importante a se considerar é a modelagem da rede elétrica, que também deve preservar sua característica dinâmica. Como as redes elétricas são, basicamente, formadas por circuitos RLC, é de se esperar frequências naturais de oscilação, que por sua vez, interagem com as unidades geradoras e outros equipamentos. Se esta interação é benéfica ou não, depende fortemente da configuração do sistema em questão. Devido a esta forte dependência da topologia da rede, a sistematização para sua modelagem é possível graças à aplicação de grafos a circuitos elétricos. Apesar desta técnica ter sido apresentada por [BALABANIAN, 1981], algumas considerações merecem ser observadas quando o assunto é sistemas de potência. Por exemplo, os geradores devem ser considerados como fontes de corrente e as barras infinitas como fontes de tensão. Além disto, outro importante desenvolvimento foi a generalização do modelo da rede elétrica na referência *dq*, utilizando-se o produto de Kronecker.

Depois de modelado o sistema, optou-se por avaliar a RSS frente a pequenos sinais (ou regime permanente) a partir de matrizes de estados que descrevem o comportamento dinâmico do sistema elétrico de potência em torno de uma condição operativa pré-estabelecida, apesar da existência de várias outras técnicas para a avaliação deste fenômeno (vide seção 1.2 para maiores detalhes). Esta técnica mostrou-se eficiente para a compreensão dos mecanismos de surgimento da RSS, tais como *efeito de gerador de indução* e *interação torcional*, de acordo com as aplicações apresentadas no capítulo 7. Nas referidas análises, observou-se, ainda, que considerar apenas uma única massa girante caracterizando o sistema turbina-gerador, elimina a interação torcional entre os sistemas elétrico e mecânico, restando apenas o efeito de gerador de indução, característico do sistema elétrico. Este é mais um indício da importância do conhecimento dos parâmetros mecânicos do eixo turbina-gerador para a devida execução dos estudos de RSS.

Adicionalmente, foi proposto um índice calculado a partir de um número reduzido de autovalores do sistema, visando uma melhor visualização e identificação das condições operativas estáveis e instáveis para um dado sistema. Além disto, este índice permite a identificação de pontos de bifurcação Hopf, caracterizada por oscilações sustentadas nos sistemas dinâmicos, como foi visto para as análises no domínio do tempo para o sistema FBM apresentado no capítulo 7.

Indubitavelmente, a presença de controladores influencia, sobremaneira, o comportamento dinâmico dos sistemas de potência. Porém, como o objetivo desta dissertação é buscar um melhor entendimento a respeito das interações entre sistemas elétricos e mecânicos, não considerá-los torna-se até recomendável. Desta forma, o engenheiro responsável pelo projeto de controladores estará apto a atacar o problema de forma mais eficiente, já que este conhecerá, a priori, as variáveis mais críticas no comportamento dinâmico do sistema, através da análise modal do sistema sem controle.

8.2 DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Apesar de ser um tema difundido e abordado em pesquisas em todo mundo, o estudo de ressonância subsíncrona ainda oferece inúmeras frentes de atuação. A seguir, algumas possibilidades de desenvolvimentos futuros são comentadas.

Grande atenção tem sido dada pelo setor elétrico aos equipamentos FACTS, que vêm se difundindo rapidamente, inclusive, como meio de supressão de oscilações subsíncronas em sistemas elétricos de potência. Estes equipamentos são baseados em eletrônica de potência e, portanto, altamente não-lineares. Desta forma, para a realização de estudos confiáveis da dinâmica de sistemas elétricos de potência são necessários modelos igualmente confiáveis para todos os equipamentos conectados à rede elétrica, inclusive, para os FACTS. Alguns exemplos deste tipo de abordagem podem ser vistos nas referências [JALALI, 1994], [HAN, 1997], [RAJARAMAN, 1996] e [RIVERA, 2000].

Ainda dentro deste contexto, surge a possibilidade de se avaliar o comportamento de cargas que possam apresentar frequências naturais subsíncronas ou serem influenciadas por elas. Neste caso, aparecem os motores de indução que podem se tornar auto-excitados operando com frequências subsíncronas em sua armadura.

Outra vertente de estudos também importante é a análise de interações entre os eixos turbina-gerador e controladores, como reguladores de tensão e velocidade. Para este tipo de estudo considera-se a modelagem convencional de sistemas de potência utilizada em estudos de estabilidade transitória, só que considerando eixos multimassas para os conjuntos turbina-gerador.

Outro assunto seria a abordagem mais aprofundada do índice proposto baseado na média geométrica das partes reais de um conjunto de autovalores associados ao sistema sob estudo. Análise do comportamento do índice próximo a bifurcações Hopf é uma das possíveis vertentes de estudo para este índice, sem contar com a possibilidade de abordagens de técnicas de controle de supressão de oscilações em sistemas elétricos de potência a partir deste índice.

APÊNDICE A

MONTAGEM DA MATRIZ DE ESTADOS LINEARIZADA

A.1 INTRODUÇÃO

Após as modelagens individuais apresentadas nos capítulos 3, 4 e 5 dos geradores síncronos, rede elétrica e eixo turbina-gerador, respectivamente, faz-se necessário o acoplamento entre eles para seja possível a observação de suas interações num sistema de potência real.

Neste apêndice será apresentada a forma utilizada para a obtenção dos resultados apresentados no capítulo 7.

A.2 ACOPLAMENTO DAS EQUAÇÕES ELÉTRICAS

A parte elétrica é composta pelos estatores dos geradores e da rede elétrica em si, cujas modelagens estão apresentadas nos capítulos 3 e 4. Portanto, faz-se necessário o acoplamento entre eles para que seja formado um único sistema elétrico, a menos de algumas entradas mecânicas, como será visto posteriormente.

Assim, as equações elétricas associadas ao gerador i , dadas pela expressão matricial (3.88), podem ser, primeiramente, reescritas da seguinte forma.

$$\begin{bmatrix} p\Delta I_{dq1}^B \\ p\Delta I_{Ri} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{Gi}^{ss} & \mathbf{A}_{Gi}^{sr} \\ \mathbf{A}_{Gi}^{rs} & \mathbf{A}_{Gi}^{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I_{dq1}^B \\ \Delta I_{Ri} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{Vi}^{ss} & \mathbf{B}_{Vi}^{sr} \\ \mathbf{B}_{Vi}^{rs} & \mathbf{B}_{Vi}^{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{V}_{dq1}^B \\ \Delta \mathbf{V}_{Ri} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\Omega i}^s \\ \mathbf{B}_{\Omega i}^r \end{bmatrix} \Delta \Omega_i \text{ [pu/pu]} \quad (\text{A.1})$$

$$\text{onde, } \Delta \Omega_i = \begin{bmatrix} \Delta \delta_{iB} \\ \Delta \omega_i \end{bmatrix}.$$

Admitindo que no sistema sob estudo existam g geradores, estes podem ser agrupados como se segue, a partir da expressão (3.88).

$$\begin{bmatrix} p\Delta I_G^s \\ p\Delta I_G^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_G^{ss} & \mathbf{A}_G^{sr} \\ \mathbf{A}_G^{rs} & \mathbf{A}_G^{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I_G^s \\ \Delta I_G^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_V^{ss} & \mathbf{B}_V^{sr} \\ \mathbf{B}_V^{rs} & \mathbf{B}_V^{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{V}_G^s \\ \Delta \mathbf{V}_G^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\Omega^s \\ \mathbf{B}_\Omega^r \end{bmatrix} \Delta \Omega \text{ [pu/pu]} \quad (\text{A.2})$$

onde,

$$\Delta I_G^s = \begin{bmatrix} \Delta I_{dq1}^B \\ \Delta I_{dq2}^B \\ \vdots \\ \Delta I_{dqg}^B \end{bmatrix} \quad \Delta I_G^r = \begin{bmatrix} \Delta I_{R1} \\ \Delta I_{R2} \\ \vdots \\ \Delta I_{Rg} \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{V}_G^s = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{V}_{dq1}^B \\ \Delta \mathbf{V}_{dq2}^B \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{V}_{dqg}^B \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{V}_G^r = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{V}_{R1} \\ \Delta \mathbf{V}_{R2} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{V}_{Rg} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\Delta \Omega = \left[(\Delta \Omega_1)^t \quad (\Delta \Omega_2)^t \quad \dots \quad (\Delta \Omega_g)^t \right]^t \quad (\text{A.4})$$

E, para as matrizes,

$$\mathbf{A}_G^{xy} = \text{diag}(\mathbf{A}_{G1}^{xy}, \mathbf{A}_{G2}^{xy}, \dots, \mathbf{A}_{Gg}^{xy}) \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{B}_V^{xy} = \text{diag}(\mathbf{B}_{V1}^{xy}, \mathbf{B}_{V2}^{xy}, \dots, \mathbf{B}_{Vg}^{xy}) \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{B}_\Omega^x = \text{diag}(\mathbf{B}_{\Omega 1}^x, \mathbf{B}_{\Omega 2}^x, \dots, \mathbf{B}_{\Omega g}^x) \quad (\text{A.7})$$

Nas expressões de (A.5) a (A.7), os sobrescritos x e y foram utilizados para simplificar as definições, podendo ser ambos iguais a s ou r . E, como as dimensões destas matrizes dependem do modelo utilizado para os geradores (turbogeradores ou hidrogenadores), deste ponto em diante as dimensões dessas matrizes serão dadas em função do número de variáveis de estado estatóricas (ns) e rotóricas (nr) de todos os geradores somados. Por exemplo, \mathbf{A}_G^{sr} é uma matriz de dimensão $ns \times nr$.

Agora, tomando as expressões referentes à rede elétrica, dadas em (4.101) e (4.102), sem a seqüência zero, tem-se:

$$\rho \Delta \mathbf{x}_E^{dq} = \mathbf{A}^{dq} \Delta \mathbf{x}_E^{dq} + \mathbf{B}_{1J}^{dq} \Delta \mathbf{i}_J^{dq} + \mathbf{B}_{2J}^{dq} \rho \Delta \mathbf{i}_J^{dq} \quad [\text{pu/pu}] \quad (\text{A.8})$$

$$\Delta \mathbf{v}_J^{dq} = \mathbf{C}^{dq} \Delta \mathbf{x}_E^{dq} + \mathbf{D}_{1J}^{dq} \Delta \mathbf{i}_J^{dq} + \mathbf{D}_{2J}^{dq} \rho \Delta \mathbf{i}_J^{dq} \quad [\text{pu}] \quad (\text{A.9})$$

Verifica-se que $\Delta \mathbf{v}_J^{dq}$ na expressão (4.95) representa as tensões terminais dos geradores $\Delta \mathbf{V}_G^s$ da expressão (A.2), só que com sinais opostos. Esta oposição de sinais vem dos sentidos adotados nas modelagens da rede elétrica, já que as quedas de tensões estão sempre opostas às correntes.

Assim, pode-se substituir (4.95) com sinal oposto em (A.2) no lugar de $\Delta \mathbf{V}_G^s$, resultando a expressão (A.10).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{ns} + \mathbf{B}_V^{SS} \mathbf{D}_{2J}^{dq} & \mathbf{0}_{ns \times nr} \\ \mathbf{B}_V^{RS} \mathbf{D}_{2J}^{dq} & \mathbf{U}_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \Delta \mathbf{I}_G^s \\ \rho \Delta \mathbf{I}_G^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_G^{SS} - \mathbf{B}_V^{SS} \mathbf{D}_{1J}^{dq} & \mathbf{A}_G^{Sr} \\ \mathbf{A}_G^{RS} - \mathbf{B}_V^{RS} \mathbf{D}_{1J}^{dq} & \mathbf{A}_G^{Rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{I}_G^s \\ \Delta \mathbf{I}_G^r \end{bmatrix} + \\ - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_V^{SS} \mathbf{C}^{dq} \\ \mathbf{B}_V^{RS} \mathbf{C}^{dq} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_E^{dq} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\Omega^s \\ \mathbf{B}_\Omega^r \end{bmatrix} \Delta \Omega + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_V^{Sr} \\ \mathbf{B}_V^{Rr} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{V}_G^r \quad (\text{A.10})$$

Agrupando, finalmente, a equação (4.94) à (A.10), resulta,

$$\rho \Delta \mathbf{X}_E = \mathbf{A}_E \Delta \mathbf{X}_E + \mathbf{B}_\Omega \Delta \Omega + \mathbf{B}_{Vr} \Delta \mathbf{V}_G^r \quad [\text{pu/pu}] \quad (\text{A.11})$$

onde,

$$\Delta \mathbf{X}_E = \left[\left(\Delta \mathbf{I}_G^s \right)^t \quad \left(\Delta \mathbf{I}_G^r \right)^t \quad \left(\Delta \mathbf{x}_E^{dq} \right)^t \right]^t \quad (\text{A.12})$$

E,

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{ns} + \mathbf{B}_V^{SS} \mathbf{D}_{2J}^{dq} & \mathbf{0}_{ns \times nr} & \mathbf{0}_{ns \times ne} \\ \mathbf{B}_V^{RS} \mathbf{D}_{2J}^{dq} & \mathbf{U}_{nr} & \mathbf{0}_{nr \times ne} \\ -\mathbf{B}_{2J}^{dq} & \mathbf{0}_{ne \times nr} & \mathbf{U}_{ne} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_G^{SS} - \mathbf{B}_V^{SS} \mathbf{D}_{1J}^{dq} & \mathbf{A}_G^{SR} & -\mathbf{B}_V^{SS} \mathbf{C}^{dq} \\ \mathbf{A}_G^{rS} - \mathbf{B}_V^{rS} \mathbf{D}_{1J}^{dq} & \mathbf{A}_G^{rr} & -\mathbf{B}_V^{rS} \mathbf{C}^{dq} \\ \mathbf{B}_{1J}^{dq} & \mathbf{0}_{n \times nr} & \mathbf{A}^{dq} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\Omega}^s \\ \mathbf{B}_{\Omega}^r \\ \mathbf{0}_{n \times 2g} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_V^{sr} \\ \mathbf{B}_V^{rr} \\ \mathbf{0}_{n \times nr} \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{A}_E = (\mathbf{M}_1)^{-1} \mathbf{M}_2 \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{B}_{\Omega} = (\mathbf{M}_1)^{-1} \mathbf{M}_3 \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{B}_{Vr} = (\mathbf{M}_1)^{-1} \mathbf{M}_4 \quad (\text{A.19})$$

A equação (A.11) descreve o sistema dinâmico formado pelos estatores e circuitos rotóricos do geradores síncronos conectados a uma rede elétrica modelada por parâmetros concentradas. Nota-se ainda que as entradas deste sistema são exatamente as tensões aplicadas nos circuitos rotóricos $\Delta \mathbf{V}_G^r$, e ângulos e velocidades angulares dos eixos dq de cada máquina em questão, dados em $\Delta \Omega$.

A.3 EQUAÇÕES MECÂNICAS

Para os eixos mecânicos, deve-se considerar a equação (5.21), reescrita a seguir, para um eixo acoplado ao gerador i .

$$p \Delta \mathbf{x}_{Mi} = \mathbf{A}_{Mi} \Delta \mathbf{x}_{Mi} + \mathbf{B}_{MGi} \Delta T_{Gi} + \mathbf{B}_{MTi} \Delta T_{Ti} \quad [\text{pu/pu}] \quad (\text{A.20})$$

onde,

$$\mathbf{B}_{MGi} = -\mathbf{B}_{Mi} \mathbf{C}_{Mi}^2 \qquad \mathbf{B}_{MTi} = \mathbf{B}_{Mi} \Theta_i \qquad (\text{A.21})$$

onde, \mathbf{C}_{Mi}^2 é a segunda linha da matriz \mathbf{C}_{Mi} , definida na expressão (5.26). Já a matriz Θ_i corresponde à matriz identidade de mesma dimensão que \mathbf{B}_{Mi} (equação (5.21)), só que sem a coluna relativa ao elemento de \mathbf{C}_{Mi}^2 não-nulo. Este processo promove a separação do torque aplicado ao gerador i e os torques aplicados à turbina acoplada ao mesmo gerador.

Agrupando, então, as equações referentes aos eixos dos g geradores, obtém-se a expressão (A.22).

$$\rho \Delta \mathbf{X}_M = \mathbf{A}_{Me} \Delta \mathbf{X}_M + \mathbf{B}_{MG} \Delta \mathbf{T}_G + \mathbf{B}_{MT} \Delta \mathbf{T}_T \quad [\text{pu/pu}] \qquad (\text{A.22})$$

onde,

$$\Delta \mathbf{X}_M = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{M1} \\ \Delta \mathbf{x}_{M2} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{x}_{Mg} \end{bmatrix} \qquad \Delta \mathbf{T}_G = \begin{bmatrix} \Delta T_{G1} \\ \Delta T_{G2} \\ \vdots \\ \Delta T_{Gg} \end{bmatrix} \qquad \Delta \mathbf{T}_T = \begin{bmatrix} \Delta T_{T1} \\ \Delta T_{T2} \\ \vdots \\ \Delta T_{Tg} \end{bmatrix} \qquad (\text{A.23})$$

E, para as matrizes,

$$\mathbf{A}_{Me} = \text{diag}(\mathbf{A}_{M1}, \mathbf{A}_{M2}, \dots, \mathbf{A}_{Mg}) \qquad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{B}_{MG} = \text{diag}(\mathbf{B}_{MG1}, \mathbf{B}_{MG2}, \dots, \mathbf{B}_{MGg}) \qquad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{B}_{MT} = \text{diag}(\mathbf{B}_{MT1}, \mathbf{B}_{MT2}, \dots, \mathbf{B}_{MTg}) \qquad (\text{A.26})$$

O vetor de entradas $\Delta \mathbf{T}_G$ pode ser obtido agrupando-se os torques eletromagnéticos de cada gerador, dados pela expressão (3.93). Este procedimento resulta a relação

$$\Delta \mathbf{T}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_T^s & \mathbf{D}_T^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{I}_G^s \\ \Delta \mathbf{I}_G^r \end{bmatrix} + \mathbf{D}_T^\Omega \Delta \Omega \quad [\text{pu}] \qquad (\text{A.27})$$

onde,

$$\mathbf{D}_T^y = \text{diag}(\mathbf{D}_{T1}^y, \mathbf{D}_{T2}^y, \dots, \mathbf{D}_{Tg}^y) \quad (\text{A.28})$$

E, o sobrescrito y pode ser substituído por s , r ou Ω .

Pode-se ainda reescrever (A.27) como apresentado em (A.29).

$$\Delta \mathbf{T}_G = \mathbf{D}_T^{xE} \Delta \mathbf{X}_E + \mathbf{D}_T^{\Omega} \Delta \Omega \quad [\text{pu}] \quad (\text{A.29})$$

onde,

$$\mathbf{D}_T^{xE} = \left[\mathbf{D}_T^s \mid \mathbf{D}_T^r \mid \mathbf{0}_{g \times ne} \right] \quad \mathbf{D}_T^{\Omega} = \left[\mathbf{D}_T^{\delta} \mid \mathbf{0}_{g \times g} \right] \quad (\text{A.30})$$

E, ne é a dimensão de $\Delta \mathbf{X}_E$, vetor composto pelas variáveis de estado elétricas dado por (A.12).

Substituindo, finalmente, a equação (A.29) em (A.22), resulta a seguinte expressão.

$$\rho \Delta \mathbf{X}_M = \mathbf{A}_{Me} \Delta \mathbf{X}_M + \mathbf{B}_{MG} \mathbf{D}_T^{xE} \Delta \mathbf{X}_E + \mathbf{B}_{MG} \mathbf{D}_T^{\Omega} \Delta \Omega + \mathbf{B}_{MT} \Delta \mathbf{T}_T \quad [\text{pu/pu}] \quad (\text{A.31})$$

A expressão (A.31) aglomera todos os sistemas mecânicos em um só sistema de equações diferenciais de primeira ordem, com entradas compostas, além das variações dos torques aplicados à turbina, pelas variáveis de estado elétricas, cujos comportamentos dinâmicos são descritos por (A.11).

A.4 ACOPLAMENTO ENTRE SISTEMAS ELÉTRICO E MECÂNICO

Para o acoplamento entre os sistemas elétrico e mecânico descritos por (A.11) e (A.31), respectivamente, faz-se necessário recordar a relação entre grandezas angulares elétricas e mecânicas, discutida no item 5.2.5.

De acordo com as definições dos vetores $\Delta \Omega$ e $\Delta \mathbf{X}_M$, dadas pelas expressões (A.4) e (A.23), e a relação (5.26), pode-se escrever (A.32).

$$\Delta\Omega = \mathbf{C}_M \Delta\mathbf{X}_M \text{ [pu]} \quad (\text{A.32})$$

onde,

$$\mathbf{C}_M = \text{diag}(\mathbf{C}_{M1}, \mathbf{C}_{M2}, \dots, \mathbf{C}_{Mg}) \quad (\text{A.33})$$

A expressão (A.32) relaciona todos os deslocamentos e velocidades angulares de cada sistema referencial dq com os deslocamentos e velocidades angulares dos rotores dos seus respectivos geradores. Desta forma, substituindo (A.32) em (A.11) e (A.31), tem-se,

$$p\Delta\mathbf{X}_E = \mathbf{A}_E \Delta\mathbf{X}_E + \mathbf{B}_\Omega \mathbf{C}_M \Delta\mathbf{X}_M + \mathbf{B}_{Vr} \Delta\mathbf{V}_G^r \text{ [pu/pu]} \quad (\text{A.34})$$

$$p\Delta\mathbf{X}_M = (\mathbf{A}_{Me} + \mathbf{B}_{MG} \mathbf{D}_T^\Omega \mathbf{C}_M) \Delta\mathbf{X}_M + \mathbf{B}_{MG} \mathbf{D}_T^{XE} \Delta\mathbf{X}_E + \mathbf{B}_{MT} \Delta\mathbf{T}_T \text{ [pu/pu]} \quad (\text{A.35})$$

Ou, de outra forma,

$$\begin{bmatrix} p\Delta\mathbf{X}_E \\ p\Delta\mathbf{X}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_E & \mathbf{A}_{EM} \\ \mathbf{A}_{ME} & \mathbf{A}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{X}_E \\ \Delta\mathbf{X}_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{Vr} & \mathbf{0}_{ne \times nt} \\ \mathbf{0}_{nm \times nr} & \mathbf{B}_{MT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{V}_G^r \\ \Delta\mathbf{T}_T \end{bmatrix} \text{ [pu/pu]} \quad (\text{A.36})$$

onde, nm e nt representam as dimensões de $\Delta\mathbf{X}_M$ e $\Delta\mathbf{T}_T$, respectivamente. E, para as matrizes tem-se (A.37).

$$\mathbf{A}_{EM} = \mathbf{B}_\Omega \mathbf{C}_M \quad \mathbf{A}_M = \mathbf{A}_{Me} + \mathbf{B}_{MG} \mathbf{D}_T^\Omega \mathbf{C}_M \quad \mathbf{A}_{ME} = \mathbf{B}_{MG} \mathbf{D}_T^{XE} \quad (\text{A.37})$$

A expressão (A.36) é o sistema de equações diferenciais de primeira ordem que descrevem o comportamento dinâmico do sistema eletromecânico composto por rede elétrica modelada por parâmetros concentrados, geradores síncronos considerando efeito transformador e eixos multimassas.

Deve se ressaltado que nenhuma espécie de controle foi considerada na modelagem apresentada. Porém, as entradas para eventuais controladores de tensão e velocidade estão explícitas pelos vetores $\Delta\mathbf{V}_G^r$ e $\Delta\mathbf{T}_T$ que tornam acessíveis as tensões aplicadas aos circuitos dos rotores das máquinas síncronas e, torques aplicados a cada seção das turbinas.

Logicamente, elementos controlados na rede elétrica são comuns, como é o caso dos FACTS. Só que a implementação destes não é uma tarefa trivial, ficando, portanto, como objetivo de desenvolvimentos futuros.

APÊNDICE B

MÉTODO DA BI-ITERAÇÃO REFATORADA

B.1 INTRODUÇÃO

Este método iterativo, destinado à solução parcial dos autovalores de grandes matrizes assimétricas, foi proposto em [CAMPAGNOLO, 1996]. Em suma, este método pode ser visto como uma generalização do quociente de Rayleigh aplicado a matrizes assimétricas, que proporciona deslocamentos auto-ajustáveis, acelerando, sobremaneira, a convergência do processo, quando comparado com outras técnicas com este fim.

Este método converge para tantos autovalores quanto o número de vetores teste utilizados no processo. Uma outra vantagem deste método é que os valores iniciais dados aos deslocamentos servem de estimativa para os autovalores, forçando com que o processo convirja para os autovalores mais próximos destas estimativas iniciais. Este é um aspecto positivo, pois favorece o usuário que conhece o fenômeno dinâmico a ser analisado e a grandeza dos modos oscilatórios críticos do sistema sob estudo. No caso da RSS, os modos críticos são justamente aqueles associados aos eixos turbina-gerador, facilmente obtidos através da suas análises modais.

A seguir, o algoritmo do método será apresentado superficialmente, apesar de já possibilitar a sua implementação de forma rápida e sem grandes dificuldades. Para maiores detalhes recomenda-se aprofundamento em [CAMPAGNOLO, 1996] e [WILKINSON, 1965].

B.2 ALGORITMO

Primeiramente, é definida a seguinte simbologia:

k	número de iterações;
m	número de vetores teste ou deslocamentos iniciais;
\mathbf{A}	matriz de estados $n \times n$ a ser analisada;
\mathbf{U}_n	matriz identidade $n \times n$;
λ_i	deslocamentos de \mathbf{A} ;
$\mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i$	autovetores à direita e seu auxiliar, $i = 1, \dots, m$;
$\mathbf{w}_i, \bar{\mathbf{w}}_i$	autovetores à esquerda e seu auxiliar, $i = 1, \dots, m$;
$\mathbf{V}, \bar{\mathbf{V}}$	matrizes $n \times m$ cujas colunas compostas, respectivamente, por \mathbf{v}_i e $\bar{\mathbf{v}}_i$;
$\mathbf{W}, \bar{\mathbf{W}}$	matrizes $n \times m$ cujas colunas compostas, respectivamente, por \mathbf{w}_i e $\bar{\mathbf{w}}_i$;
$\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$	matrizes de dimensão $m \times m$;
ε	tolerância (recomenda-se 10^{-10});

A seguir, são dispostos os passos do algoritmo:

(I) Iniciar $k = 0$, os deslocamentos $\lambda_i^{(k)}$ e os vetores teste $\mathbf{v}_i^{(k)}$ e $\mathbf{w}_i^{(k)}$. Recomenda-se iniciar os vetores teste aleatoriamente;

(II) Cálculo de $\bar{\mathbf{v}}_i^{(k)}$ e $\bar{\mathbf{w}}_i^{(k)}$ através de²¹:

$$\begin{cases} (\mathbf{A} - \lambda_i^{(k)} \mathbf{U}_n) \bar{\mathbf{v}}_i^{(k)} = \mathbf{v}_i^{(k)} \\ (\mathbf{A} - \lambda_i^{(k)} \mathbf{U}_n)^H \bar{\mathbf{w}}_i^{(k)} = \mathbf{w}_i^{(k)} \end{cases}$$

(III) Cálculo das matrizes $\mathbf{G}^{(k)}$, $\mathbf{H}^{(k)}$ e $\mathbf{B}^{(k)}$:

$$\begin{cases} \mathbf{G}^{(k)} = (\bar{\mathbf{W}}^{(k)})^H \bar{\mathbf{V}}^{(k)} \\ \mathbf{H}^{(k)} = (\bar{\mathbf{W}}^{(k)})^H \mathbf{A} \bar{\mathbf{V}}^{(k)} \\ \mathbf{B}^{(k)} = (\mathbf{G}^{(k)})^{-1} \mathbf{H}^{(k)} \end{cases}$$

(IV) Cálculo dos autovalores $\lambda_{Bi}^{(k)}$ de $\mathbf{B}^{(k)}$, através do método QR, já que normalmente $m \ll n$;

(V) Atualização dos deslocamentos de \mathbf{A} : $\lambda_i^{(k+1)} = \lambda_{Bi}^{(k)}$;

(VI) Atualização dos vetores teste:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_i^{(k+1)} = \frac{\bar{\mathbf{v}}_i^{(k)}}{\|\bar{\mathbf{v}}_i^{(k)}\|_\infty} \\ \mathbf{w}_i^{(k+1)} = \frac{\bar{\mathbf{w}}_i^{(k)}}{\|\bar{\mathbf{w}}_i^{(k)}\|_\infty} \end{cases}$$

(VII) Verificação de convergência: $\frac{|\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}|}{|\lambda_i^{(k)}|} < \varepsilon$.

Caso esta proposição seja falsa, faça $k = k+1$ e retorne ao passo (II). Caso seja verdadeira, o processo convergiu.

(VIII) Saída de resultados corresponde ao conjunto dos $\lambda_i^{(k+1)}$, que são autovalores de \mathbf{A} e, $\mathbf{v}_i^{(k+1)}$ e $\mathbf{w}_i^{(k+1)}$ correspondem, respectivamente, os autovetores à direita e à esquerda associados a $\lambda_i^{(k+1)}$.

²¹ O índice H representa a transposição conjugada da matriz em questão.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- [1] AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA (ANEEL). **Atlas de Energia Elétrica no Brasil**. Brasília, 2002.
- [2] ANDERSON, P.M.; FOUAD, A.A. **Power System Control and Stability**. *The Iowa State University Press*, 1977.
- [3] ANDERSON, P.M.; AGRAWAL, B.L.; VAN NESS, J.E. **Subsynchronous Resonance in Power Systems**. *IEEE Press*, 1988.
- [4] ANDERSSON, G. et al. **Influence of Hydro Units' Generator-to-Turbine Inertia Ratio on Damping of Subsynchronous Oscillations**. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-103, No. 8, August 1984.
- [5] BAHRMA, M. et al. **Experience with HVDC – Turbine-Generator Torsional Interaction At Square Butte**. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-99, No. 3 May/June. 1980.
- [6] BALABANIAN, N.; BICKART, T. **Linear Network Theory**. Matrix Publishers, Inc., Beaverton, Oregon, 1981, pp. 118-132.
- [7] BALANCE, J.W.; GOLDBERG, S. **Subsynchronous Resonance in Series Compensated Transmission Lines**. *IEEE Trans. on Power Apparatus & Systems*, vol. PAS-92, pp. 1649-1658, Sept./Oct. 1973.
- [8] BUTLER, J. W.; CONCORDIA, C. **Analysis of Series Capacitor Application Problems**. *AIEE Trans.*, pp. 975-988, Aug. 1937.
- [9] CAMPAGNOLO, J. M; MARTINS, N.; FALCÃO, D. M. **Refactored Bi-Iteration: A High Performance Eigensolution Method for Large Power System Matrices**. *IEEE Trans.*, Vol. 11, nº 3, pp. 1228-1235, August 1996.
- [10] CONCORDIA, C; CARTER, G. K. **Negative Damping of Electrical Machinery**. *AIEE Trans.*, vol. 60, pp. 116-119, Mar. 1941.
- [11] D'AZZO, J. J; HOUPIS, C. H. **Análise e Projeto de Sistemas de Controle Lineares**. Ed. Guanabara Dois, 2ª Edição, 1984.

- [12] DEO, N. **Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science.** *Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.*, Series in Automatic Computation, 1974.
- [13] EVES, H. **Elementary Matrix Theory.** *Dover Publications*, 1980.
- [14] FOUAD, A.A.; KHU, K.T. **Subsynchronous Resonance Zones in the IEEE 'Benchmark' Power System.** *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-97, No. 3, pp 754-762, May/June 1978.
- [15] GROSS, G.; HALL, M.C. **Synchronous Machine and Torsional Dynamics Simulation in the Computation of Electromagnetic Transients.** *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-97, No. 4 July/Aug. 1978.
- [16] HAN, H.G.; PARK, J.K.; LEE, B.H. **Analysis of Thyristor Controlled Series Compensator Dynamics Using the State Variable Approach of a Periodic System Model.** *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 12, No. 4, pp. 1744-1750, October 1997.
- [17] HOLMES, M. H. **Introduction to Perturbation Methods.** *Text in Applied Mathematics 20.* Springer-Verlag, 1995.
- [18] IEEE COMMITTEE REPORT. **Dynamic Models for Steam and Hydro Turbines in Power System Studies.** *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, Vol. 92, No. 6, pp. 1904-1915, Nov./Dec. 1973.
- [19] _____. **First Benchmark Model for Computer Simulation of Subsynchronous Resonance.** *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 96, No. 5, pp. 1565-1572, Sep./Oct. 1977.
- [20] _____. **Second Benchmark Model for Computer Simulation of Subsynchronous Resonance.** *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 104, No. 5, pp. 1057-1066, May 1985.
- [21] _____. **Reader's Guide to Subsynchronous Resonance.** *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 7, No. 1, Feb. 1992.
- [22] IEEE SSR WORKING GROUP. **Proposed Terms and Definitions for Subsynchronous Resonance.** *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-99, No. 2, March/April 1980.
- [23] _____. **Terms, Definitions and Symbols for Subsynchronous Oscillations.** *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-104, No. 6, June 1985.
- [24] JALALI, S.G.; LASSETER, R.H.; DOBSON, I. **Dynamic Response of a Thyristor Controlled Switched Capacitor.** *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 9, No. 3, pp. 1609-1615, July 1994.
- [25] KILGORE, L. A.; ELLIOTT, L.C.; TAYLOR, E.R. **The Prediction and Control of Self-Excited Oscillations due to Series Capacitors in Power Systems.** *IEEE Trans.*, PAS-90, vol. 3, May/June 1971.

- [26] KUNDUR, P. **Power System Stability and Control**. McGraw-Hill, 1994.
- [27] LEE, D.C.; BEAULIEU, R.E.; ROGERS, G.J. **Effects of Governor Characteristics on Turbo-Generator Shaft Torsionals**. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-104, No. 6 June 1985.
- [28] OLDENBURGER, R.; J. DONELSON, J.R. **Dynamic Response of Hydro Electric Plant**. *AIEE Winter Meeting*, paper 62-167, January 28-February 2, 1962, New York.
- [29] ONG, C.M. **Dynamic Simulation of Electric Machinery**. Prentice Hall PTR, 1998.
- [30] PARK, R.H. **Two Reaction Theory of Synchronous Machines, Pt. 1**. *AIEE Trans.*, Vol. 48 pp. 716-730, 1929.
- [31] _____. **Two Reaction Theory of Synchronous Machines, Pt. 2**. *AIEE Trans.*, Vol. 52 pp. 352-355, 1933.
- [32] PÉREZ-ARRIAGA, I. J.; VERGHESE, G. C.; SCHWEPPE, F. C. **Selective Modal with Applications to Electric Power Systems, Part I: Heuristic Introduction**. *IEEE Trans. On Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-101, No. 9, September, 1982.
- [33] PERKO, L. **Differential Equations and Dynamical Systems**. Springer-Verlag New York, Inc., 1991.
- [34] RAJARAMAN, R. et al. **Computing the Damping of Subsynchronous Oscillations due to a Thyristor Controlled Series Capacitor**. *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 11, No. 2, pp. 1120-1127, April 1996.
- [35] RIVERA S., C.A.; OLGUÍN S., D.; MESSINA, A.R. **Analysis of Subsynchronous Torsional Interactions with FACTS Devices**. *IEEE Power Engineering Society Summer Meeting*, Vol. 2, pp. 1026 –1031, 16-20 July 2000.
- [36] TOMIM, M.A.; ZAMBRONI DE SOUZA, A.C.; MENDES, P.P.C.; TORRES, G.L. **Identification of Hopf Bifurcation in Power Systems Susceptible Subsynchronous Resonance**. Paper presented at the IEEE Bologna PowerTech, paper BPT03-272, June 23-26, 2003.
- [37] UNDRILL, J.M.; KOSTYNIK, T.E. **Subsynchronous Oscillations Part I - Comprehensive System Stability Analysis**. *IEEE Trans.*, vol. PAS-95, pp 1446-1455, July 1976.
- [38] VAN NESS, J. E. et al. **Analytical Investigation of Dynamic Instability Ocurring at Powerton Station**. *IEEE Trans.*, Vol. PAS-99, No. 4, pp 1386-1955, July-August 1980.
- [39] VERHULST, F. **Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990.

-
- [40] WATSON, W.; COULTES, M.E. **Static Exciter Stability Signal on Large Generators - Mechanical Problems.** *IEEE Trans.*, vol. PAS-92, pp. 205-212, January/February 1973.
- [41] WILKINSON, J. H. **The Algebraic Eigenvalue Problem.** *Clarendon Press* – Oxford, 1965.
- [42] WOOD, A.J.; WOLLENBERG, B.F. **Power Generation, Operation & Control.** John Wiley & Sons, pp. 123, 1984.