Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Dinâmica Estritamente Toral

Pollyanna Vicente Nunes

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES/DS

Itajubá, Fevereiro de 2016

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Pollyanna Vicente Nunes

Dinâmica Estritamente Toral

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática.

Área de Concentração: Topologia/Geometria

Orientador: Bráulio Augusto Garcia

Fevereiro de 2016
Itajubá – MG

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Pollyanna Vicente Nunes

Dinâmica Estritamente Toral

Dissertação aprovada por banca examinadora em 12 de Fevereiro de 2016, conferindo ao autor o título de Mestre em Ciências em Matemática.

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Bráulio Augusto Garcia (Orientador)
Prof. Dr. Andrés Koropecki
Prof. Dr. Juan Valentín Mendoza Mogollón
Prof. Dr. Felipe Emanoel Chaves

Itajubá – MG
2016

À Vó Norvina (in memoriam) e

aos meus afilhados João Gabriel e Miguel.

Agradecimentos

À Deus, por ter me dado o dom da vida e muita sabedoria para trilhar o meu caminho e chegar até aqui.

À Vó Norvina (in memoriam), meu amor eterno, meu exemplo de garra, perseverança e otimismo. Obrigada por ter me ensinado o valor da vida e do amor verdadeiro. Sinto sua falta, te amo.

À minha família por terem me dado amor, educação e valores. Ao meu pai, que me ensinou que força é rir da vida mesmo que ela esteja sem graça. À minha mãe, que me mostrou que na vida o importante não é se preocupar se você vai cair, mas sim saber levantar a cada tombo que vier e, eles virão. À minha irmã, que esteve presente em todos os momentos da minha vida, que brigou, chorou e riu comigo. Aos meus tios, tias, primos, primas, afilhados e cunhado por serem minha base e meu aconchego. Amo vocês.

Às minhas amigas Luísa, Thiara e Monique, que são minhas amigas de escola, crescemos juntas e construímos uma amizade sólida e duradoura. Seus corações estão comigo e o meu com vocês.

Aos amigos que fiz em Alegre-ES, que fizeram parte da melhor época da minha vida, a faculdade, me ajudando a crescer social e profissionalmente. Keith por sonhar comigo; Gislayni por ser tudo o que um amigo pode ser; Marcela por ter sido minha irmã de mãe e pai diferentes; Amanda por ter me feito rir nos momentos que eu queria chorar; Stela por ter sido a melhor em me ouvir e aconselhar; Tiago, Aninha e Giselle pelos nossos estudos na biblioteca e no aloja; Aline pelos rocks dos finais de semana; Janaína por ter sido a melhor parceira no PIBID; Feliphe, Alexandre e Vanderli por rirem das minhas piadas (é mais ou menos) e eu das de vocês; Ronald pela companhia de sempre no Maná; Bernardo por até hoje aguentar os meus dramas; Thiago Pires e Alana pelo incentivo de sempre. Vocês fazem falta.

Aos meus amigos de Itajubá-MG, que tiveram muita paciência comigo nesses últimos dois e difíceis anos. República 8π meu lar em 2014 e, onde eu aprendi que pode sim 10 mulheres morarem juntas e não ter brigas; República Instagrau pelos forrós de segunda e momentos de descontração; André, Dayana, Luiz, Felipe, Tatiane, Camila, Gaúcho, Wellington, Estêvão, Daniela por termos crescido juntos academicamente; Braith por ter me dado força no meu maior momento de fraqueza; Thayná por ter aparecido de repente trazendo mais alegria para os meus dias; Mauro, Shaine e Matheus pela paciência e dedicação nas aulas de inglês.

Aos meus professores da Graduação e Mestrado, por todo o ensinamento, amizade e dedicação.

Ao professor Braulio Garcia, pelo orientação neste trabalho que, mesmo com os percalços, a fez com muita maestria, paciência e dedicação, me ensinando sabiamente não somente lições de matemática, mas também lições de vida.

Aos professores que avaliaram o meu trabalho por aceitarem, gentilmente, fazer parte da banca examinadora do mesmo.

Moça, olha só o que eu te escrevi
É preciso força pra sonhar e perceber
Que a estrada vai além do que se vê.
(Los Hermanos)

Resumo

Seja f um homeomorfismo definido no toro $\mathbb{T}^2$. Sob quais hipóteses f tem propriedades na sua dinâmica que são intrínsecas do toro? Isto é, que não estão presentes em homeomorfismos definidos no plano ou no anel.

Koropecki e Tal em [5] apresentam o conceito de dinâmica estritamente toral no caso em que f é não-errante (por exemplo, quando f preserva área) e homotópica à identidade. Nesse cenário, f é dita estritamente toral se a sua dinâmica pode ser decomposta em dois conjuntos onde um é união de discos periódicos limitados (podendo ser vazio) e outro que suporta a parte rotacional da dinâmica e, portanto, uma vasta informação sobre a mesma.

Um exemplo de dinâmica estritamente toral é aquela cujo conjunto de rotação, de acordo com a definição dada por Misiurewicz, M., Ziemian, K. em [15], tem interior não-vazio. Sendo assim a limitação dos discos periódicos, é um resultado chave o qual nos permite, entre outras coisas, generalizar os conceitos de "ilhas elípticas" e "região caótica", dado por Jäger em [24], pois esses tornam-se equivalente à decomposição acima.

Palavras–chave: Dinâmica, Homeomorfismo, Toro, Conjunto de Rotação, Folheação de Brouwer.

Abstract

Let f be a homeomorphism defined on the torus $\mathbb{T}^2$. Under what hypothesis f has properties in its dynamics that are intrinsic of the torus? That is, they are not present in homeomorphisms defined in the plan or in the annulus.

Koropecki and Tal in [5] exhibit the concept of strictly toral dynamic in the case where f is nonwandering (for example, when f is area preserving) and homotopic to the identity. In this scenario, f is said to strictly toral if its dynamics can be decomposed into two sets where a is the union of limited periodic disks (possibly empty) and another that supports the "rotational" part of the dynamic and therefore extensive information about the same.

An example of strictly toral dynamics is one whose rotation set, in the sense of Misiurewicz, M., Ziemian, K. in [15], has nonempty interior. Thus the boundedness of these periodic discs, is a key result which allows us, among other things, to generalize the concepts of "elliptical islands" and "chaotic region", given by Jäger in [24], because these become equivalent to the above decomposition.

Keywords: Dynamics, Homeomorphisms, Torus, Rotation Set, Brouwer Foliations.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Um par ordenado da forma (M, f), onde M é um espaço e f é uma aplicação é dito sistema dinâmico se $f : M \to M$. Quando M é um espaço topológico e f um homeomorfismo temos um sistema dinâmico topológico (inversível).

Um sistema dinâmico é uma abstração matemática usada para modelar e fornecer previsões sobre inúmeros fenômenos físicos, econômicos, sociais e outros.

O estudo de sistemas dinâmicos topológicos, provavelmente teve início com Henri Poincaré, matemático, físico e filósofo do século XIX, com a publicação do seu "último teorema geométrico", atualmente conhecido como Teorema de Poincaré-Birkhoff, devido as contribuições dadas por Birkhoff para o caso geral.

Uma pergunta chave em sistemas dinâmicos é sobre a existência de pontos que possuem algum tipo de recorrência, isto é, a existência de pontos fixos, pontos periódicos, pontos transitivos, etc. Por exemplo, o Teorema mencionado acima garante, sob certas condições, a existência de pontos fixos numa coroa circular (anel) cuja a dinâmica nas fronteiras estão orientadas em direções opostas.

Uma definição bastante útil no estudo de sistemas dinâmicos topológicos é o conceito de número de rotação, que também foi introduzido por Poincaré para o caso de homeomorfismos do círculo, S^1, que preservam orientação. Para esse caso, Poincaré mostrou que a órbita de qualquer ponto $z \in S^1$ tem o mesmo número de rotação.

Desde então, o conceito de número de rotação tem sido amplamente explorado pela sociedade matemática e, ao generalizar tal conceito para endomorfismos no círculo de grau 1 e homeomorfismos homotópicos à identidade em superfícies como o toro (ou o anel), obtemos não somente um número de rotação, mas sim um intervalo ou um conjunto de rotação.

Embora não tão facilmente como no caso do número de rotação para homeomorfismos no círculo, o conjunto de rotação nos dá muitas informações sobre a dinâmica em questão, como por exemplo a existência de pontos periódicos. Nesse sentido, o estudo da geometria e implicações dinâmicas desse conjunto forma uma importante área de pesquisa e de grande interesse. Veja, por exemplo, [8], [9], [10], [11], [15] e [16].

Para esse trabalho, iremos utilizar a definição de conjunto de rotação dada por M. Misiurewicz e K. Ziemian em [15], isto é, se F é um levantamento[1] de $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ para o $\mathbb{R}^2$ então

$$\rho(F) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2;\ v = \lim_{i \to \infty} \frac{F^{n_i}(\widehat{z}_i) - \widehat{z}_i}{n_i},\ \widehat{z}_i \in \mathbb{R}^2,\ n_i \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty \right\}.$$

O objetivo é estudar homeomorfismos definidos no toro, $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, que possuem propriedades na dinâmica que são próprias do toro, no sentido de que tais propriedades não estão presentes em homeomorfismos definidos no plano ou no anel. Chamaremos tais homeomorfismos de estritamente toral.

Apresentaremos esse conceito para homeomorfismos do toro que são homotópicos à identidade[2] e não-errantes. Denotaremos o conjunto dos homeomorfismos definidos no toro homotópicos à identidade por $Homeo_0(\mathbb{T}^2)$.

Antes de apresentarmos os resultados, introduziremos, brevemente, alguns conceitos que são necessários para o entendimento dos mesmos.

Dizemos que um conjunto aberto $U \subset \mathbb{T}^2$ é inessencial se qualquer curva fechada em U for homotopicamente trivial, caso contrário U é dito essencial. Um conjunto $U \subset \mathbb{T}^2$ é totalmente essencial se seu complementar for inessencial, isto é, se o seu complementar está contido na união de discos topológicos abertos.

---

[1] $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um levantamento de f para o $\mathbb{R}^2$ se $\pi \circ F = f \circ \pi$, onde $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ é a aplicação do recobrimento universal.

[2] Em superfícies fechadas o conceito de homotopia e isotopia entre aplicações são equivalentes, ver [6].

Sendo assim, um ponto $z \in \mathbb{T}^2$ é ponto essencial quando para qualquer vizinhança $U \subset \mathbb{T}^2$ de z, $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$ é essencial. Caso contrário dizemos que z é ponto inessencial. $Ess(f)$ denotará o conjunto de todos pontos essenciais de f e $Ine(f)$ o conjunto dos pontos inessenciais.

A definição do conjunto dos pontos inessenciais não implica que $Ine(f)$ é de fato inessencial. Por exemplo, na aplicação identidade, $f := Id$, temos que $Ine(f) = \mathbb{T}^2$, pois dado $z \in \mathbb{T}^2$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, então $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(B_\epsilon(z)) = B_\epsilon(z)$ é inessencial.

Uma das consequências de uma dinâmica estritamente toral é que $Ine(f)$ é união disjunta de discos periódicos e, além disso, os discos são *limitados.* Dado $U \subset \mathbb{T}^2$ aberto e conexo, $\mathcal{D}(U)$ denotará o diâmetro de U no levantamento, isto é, $\mathcal{D}(U) := diam(\widehat{U})$ independente da escolha de $\widehat{U} \in \pi^{-1}(U)$. E, dizemos que U é limitado quando $\mathcal{D}(U) < \infty$.

Uma aplicação f é anelar se existem um levantamento F de $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ para o $\mathbb{R}^2$, $M > 0$ e $v \in \mathbb{Z}^2_*$ tal que

$$|P_{v^\perp}(F^n(z) - z)| \leq M, \quad \forall z \in \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Em certo sentido, essa definição implica que a dinâmica de f pode ser mergulhada numa dinâmica do anel. Sendo assim para uma dinâmica f ser estritamente toral nenhuma iterada de f deve ser anelar.

E quando $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ não-errante é não-anelar? Isto é, quando a dinâmica é ilimitada em todas as direções o que mais podemos dizer?

Em [2] há um exemplo de dinâmica ilimitada em todas as direções, portanto não-anelar, mas tem um conjunto de rotação trivial (0, 0) e, além disso, tem-se $Fix(f)$ é totalmente essencial. Assim tal dinâmica não deve ser estritamente toral, pois após remover os pontos fixos o que resta é uma dinâmica que ocorre no plano.

Então, para que uma dinâmica seja estritamente toral, se torna coerente exigirmos também que para todo $k \in \mathbb{Z}$ não tenhamos $Fix(f^k)$ totalmente essencial e f^k irrotacional.

Diante disso obtemos o seguinte Teorema, que será demonstrado no Capítulo 3.

Teorema A. *Se $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ é não-errante, então vale uma das afirmações:*

(1A) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $Fix(f^k)$ é totalmente essencial e f^k é irrotacional;

(2A) *Existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* f^k *é anelar;*

(3A) $Ess(f)$ *é não vazio, totalmente essencial e conexo.* $Ine(f)$ *é união de uma família* $\mathcal{U}$ *de discos abertos periódicos dois a dois disjuntos tal que para cada* $U \in \mathcal{U}$, $\mathcal{D}(U)$ *é limitado por uma constante que depende somente do período de* U.

Assim, o Teorema A caracteriza dinâmicas estritamente toral, que ocorre quando os itens (1A) e (2A) não são satisfeitos. Em suma, se $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ não-errante é estritamente toral então sua dinâmica é decomposta em dois conjuntos: $Ess(f)$ que carrega a parte rotacional da dinâmica e $Ine(f)$ que é união de discos topológicos periódicos limitados, podendo ser vazio.

O próximo resultado, que será demonstrado no capítulo 5, é essencial para a demonstração do Teorema A, pois é ele que garante que se f^k é não-anelar e não vale que $Fix(f^k)$ é totalmente essencial e f^k é irrotacional para todo $k \in \mathbb{N}$ então a dinâmica é estritamente toral. A limitação dos discos segue diretamente desse Teorema.

Teorema B. *Se* $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ *é não-errante e não-anelar então vale uma e somente uma das afirmações:*

(1B) *Existe* $M > 0$ *real tal que para cada disco topológico aberto* f*-invariante* $U \subset \mathbb{T}^2$, $\mathcal{D}(U) < M$*;*

(2B) $Fix(f)$ *é totalmente essencial e* f *é irrotacional.*

A seguir enunciaremos resultados obtidos para uma dinâmica estritamente toral.

É possível caracterizar uma dinâmica transitiva no caso estritamente toral, dado pelo seguinte resultado que será demonstrado no capítulo 3,

Corolário (3.4). *Seja* $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ *não-errante e estritamente toral. Então* f *é transitiva se e, somente se, não houver discos topológicos periódicos limitados.*

Outro resultado é refletido sobre o conjunto $Ess(f)$, no sentido de que tal conjunto carrega a parte rotacional da dinâmica. M. Misiurewicz, K. Ziemian ([15] e [16]) mostram que se v é ponto extremal ou ponto interior do conjunto de rotação então v é realizado por uma medida ergódica. Se v é um vetor racional do conjunto de rotação então Franks ([8]–[10]) e M. Misiurewicz, K. Ziemian ([15]) mostram que v é realizado por um ponto periódico.

Nesse sentido o próximo resultado, que será demonstrado no capítulo 3, garante que se a dinâmica é estritamente toral e $v \in \rho(F) \cap \mathbb{Q}^2$ então v também é realizado por um ponto do $Ess(f)$. Além disso, se $v \notin \mathbb{Q}^2$ então a medida ergódica associada à v é suportada no $Ess(f)$.

Teorema (3.1). *Sejam $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ não-errante e estritamente toral e F um levantamento de f para o $\mathbb{R}^2$. Então,*

1. *se $\mu \in \mathcal{M}_e$ associada com $\rho_\mu(F) \notin \mathbb{Q}^2$ então μ é suportado em $Ess(f)$, isto é, $supp(\mu) \subset Ess(f)$;*
2. *qualquer vetor racional de $\rho(F)$ que é realizado por algum ponto periódico é também realizado por um ponto do $Ess(f)$.*

O próximo resultado garante que sendo f estritamente toral é possível, sob algumas hipóteses, garantir que se $z \in Ess(f)$ então para toda vizinhanda $U \subset \mathbb{T}^2$ de z existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cup U$ é essencial.

Teorema (3.2). *Sejam $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ não-errante e estritamente toral e D um domínio fundamental. Suponha que $diam(F^n(D)) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Então para toda vizinhança U de $z \in Ess(f)$ tem-se que $f^n(U) \cup U$ é essencial para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Um exemplo de dinâmica estritamente toral é a que apresenta conjunto de rotação com interior não-vazio. Vários trabalhos mostram que uma dinâmica que tem o conjunto de rotação com interior não-vazio implica em diversas informações sobre a dinâmica, por exemplo, abundância de órbitas periódicas (ver [8]), medidas ergódicas com todos os tipos de vetor de rotação (ver [16]) e entropia positiva (ver [11]).

Tobias Jäger mostra em [24] que se $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ é não-errante e o conjunto de rotação tem interior, então a dinâmica pode ser decomposta em dois conjuntos, a saber:

$\mathcal{C}(f)$ a região caótica (rotacional)[3] e $\mathcal{E}(f)$ as ilhas elípticas.

De acordo com a definição dada em [24], se $z \in \mathcal{C}(f)$ então para toda vizinhança U de z, $int(Conv(\rho_U(F))) \neq \emptyset$ e todo ponto pertencente à $\mathcal{E}(f)$ pertence à algum disco topológico aberto U tal que $\rho_U(F)$ é um único vetor racional. Além disso, $\mathcal{C}(f)$ apresenta dependência sensível nas condições iniciais.

O próximo Teorema, que será demonstrado no capítulo 4, mostra a equivalência do conceito de região caótica (rotacional) e a região das ilhas elípticas com o conceito de dinâmica estritamente toral, para os casos que o conjunto de rotação tem interior não-vazio. Dessa forma, generaliza-se o resultado obtido por Jäger uma vez que o Teorema A garante a limitação dos discos periódicos.

Teorema (4.3). *Sejam $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ não-errante, F um levantamento de f para o $\mathbb{R}^2$ e $\rho(F)$ com interior não-vazio. Então*

1. *Para todo $z \in Ess(f)$ e para toda vizinhança $U \subset \mathbb{T}^2$ de z, $Conv(\rho(F,U)) = \rho(F)$;*

2. *$\mathcal{C}(f) = Ess(f)$ e $\mathcal{E}(f) = Ine(f)$;*

3. *$Ess(f)$ é externamente sensível nas condições iniciais.*

[3]Pois podemos ter também dinâmica interessante (caótica) no interior das ilhas elípticas, mas no sentido rotacional a dinâmica é trivial.

Capítulo 2

Definições e Resultados Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar alguns resultados da Teoria Ergódica necessários para o desenvolvimento desse trabalho e, para sermos mais precisos não demonstraremos os teoremas e as proposições uma vez que podem ser facilmente encontrados em diversos livros como [17], [20].

Em seguida, introduziremos a notação básica usada ao longo do trabalho, as definições e os resultados preliminares.

2.1 Fundamentos da Teoria Ergódica

Um espaço métrico é um par (M, d) onde M é um conjunto e d é uma métrica definida em M.

Seja $\mathcal{M}(M) = (M, \mathcal{B}, \mu)$ o espaço de medida de probabilidade de Borel, ou seja, $\mu : M \to [0, 1]$ é medida de probabilidade definida em M e, $\mathcal{B}$ é a menor σ-álgebra que contém todos os subconjuntos abertos de M. Nesse caso, temos que uma aplicação f contínua é mensurável, pois dado $A \subset M$ aberto (portanto, mensurável), $f^{-1}(A)$ é aberto (portanto, mensurável). Logo f é mensurável.

Dizemos que uma medida μ é invariante por uma aplicação mensurável $f : M \to M$ se para cada $E \in M$ mensurável temos que $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$.

Definimos a topologia fraca* em $\mathcal{M}(M)$ como a menor topologia na qual qualquer aplicação $\mu \to \int f\, d\mu$ é contínua sempre que f o for. Dado $\mu \in \mathcal{M}(M)$, um conjunto finito $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ de funções contínuas limitadas $\phi_i : M \to \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, definimos

$$V(\mu, \Phi, \epsilon) = \left\{ \nu \in \mathcal{M}(M) : |\int \phi_i\, d\nu - \int \phi_i\, d\mu| < \epsilon \text{ para todo } i \right\}.$$

E sendo M um espaço métrico compacto, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *O espaço $\mathcal{M}(M)$ é compacto na topologia fraca*.*

O próximo teorema, garante a existência de medidas invariantes.

Teorema 2.2. *Seja $f : M \to M$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto M. Então existe pelo menos uma medida de probabilidade definida em M que é invariante por f.*

A ideia da prova do Teorema 2.2 é bem simples. De fato, considere $f : M \to M$ uma aplicação contínua, ν uma medida de probabilidade qualquer em M e forme a sequência de probabilidades

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \nu(f^{-1}(E)) \text{ para qualquer mensurável } E \subset M. \tag{2.1}$$

Pelo Teorema 2.1 esta sequência admite algum ponto de acumulação, ou seja, passando à uma subsequência se necessário, existe $\mu \in \mathcal{M}(M)$ tal que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \nu(f^{-1}(E)) \to \mu.$$

Assim, resta verificar que μ é uma medida de probabilidade invariante por f. Que é o resultado do seguinte Lema,

Lema 2.1. *Todo ponto de acumulação de uma sequência $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^2}$ tal como definida em (2.1) é uma medida de probabilidade invariante por f.*

Se $\mu \in \mathcal{M}(M)$ é invariante pela aplicação $f : M \to M$, definimos o suporte da medida μ por

$$supp(\mu) = \{z \in M : \text{ cada vizinhança } U \subset M \text{ de } z \text{ satisfaz } \mu(U) > 0\}. \tag{2.2}$$

Dada uma aplicação mensurável f, uma medida μ é dita ergódica para f se, para todo conjunto f-invariante $E \subset M$ temos

$$\mu(E) = 0 \text{ ou } \mu(E) = 1.$$

Existe diversas formas de definir a ergodicidade de uma aplicação $f : M \to M$ com respeito à uma medida de probabilidade invariante. Uma delas está proposta no próximo Teorema, conhecido como Teorema Ergódico de Birkhoff,

Teorema 2.3. *Seja μ uma probabilidade invariante por uma transformação mensurável $f : M \to M$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *f é ergódica relativamente a μ;*

2. *Para toda função integrável $\varphi : M \to \mathbb{R}$ o limite*

$$\widetilde{\varphi}(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(z))$$

existe em μ-quase todo ponto $z \in M$. E tem-se

$$\widetilde{\varphi}(z) = \int \varphi \, d\mu$$

para μ-quase todo ponto $z \in M$.

Denote por $\mathcal{M}(f) \subset \mathcal{M}(M)$ o espaço das medidas de probabilidades invariantes por uma transformação contínua $f : M \to M$, onde M é espaço métrico compacto. E, por $\mathcal{M}_e(f) \subset \mathcal{M}(f)$ o subespaço das probabilidades ergódicas.

Proposição 2.1. *$\mathcal{M}(f)$ é compacto e convexo, isto é, se μ_1 e μ_2 são medidas de probabilidades invariantes por f então $\mu = (1-t)\mu_1 + t\mu_2$ também é probabilidade invariante, para todo $t \in [0,1]$.*

Teorema 2.4. *Uma probabilidade invariante μ é ergódica para f se e, somente se, não é possível escrevê-la na forma $\mu = (1-t)\mu_1 + t\mu_2$ com $t \in (0,1)$ e μ_1, μ_2 probabilidades invariantes distintas. Em palavras, μ é ergódica se e, somente se, é ponto extremal de $\mathcal{M}(f)$.*

Dizemos que um ponto $x \in M$ é *recorrente* para uma aplicação $f : M \to M$ se existe uma sequência $n_i \to \infty$ em $\mathbb{N}$ tal que $f^{n_i}(x) \in U \neq \emptyset$, onde U é uma vizinhança arbitrária de x.

Teorema 2.5 (Recorrência de Poincaré)**.** *Sejam $f : M \to M$ uma aplicação mensurável e μ uma medida finita invariante por f. Seja $E \subset M$ qualquer conjunto mensurável com $\mu(E) > 0$. Então, para μ-quase todo ponto $x \in E$ existem infinitos valores de n para os quais $f^n(x) \in E$.*

Definição 2.1. *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo. Dizemos que $U \subset M$ é não-errante se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$, caso contrário U é errante. Um ponto $z \in M$ é não-errante se toda vizinhança de z é não errante, caso contrário o ponto é errante. Finalmente, dizemos que f é não-errante se todo ponto $z \in M$ é não-errante.*

É fácil ver que se U é aberto e contém um ponto não-errante então U é recorrente.

De fato, sendo $z \in U$ ponto não-errante, temos que qualquer vizinhança de z é não-errante. Daí como U é uma vizinhança de z, seja $\left\{B_{\frac{1}{r}}(z)\right\}_{r\geq 1}$, sequência encaixante de bolas centradas em x e de raio r^{-1}. Note que a partir de algum r_0, $B_{\frac{1}{r_0}}(z) \subset U$ e, como para todo $r > r_0$ existe $n_r \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_r}(B_{\frac{1}{r}}(z)) \cap B_{\frac{1}{r}}(z) \neq \emptyset$, segue que existem infinitos $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^l(U) \cap U \neq \emptyset$.

Logo, sendo f um homeomorfismo não-errante todo aberto é recorrente.

Além disso, se M é um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ é um homeomorfismo que preserva a medida de Lebesgue, então f é não-errante.

Definição 2.2. *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo num espaço métrico. Dizemos que o homeomorfismo f é transitivo se existe algum $x \in M$ tal que a órbita de x, $\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$, é densa em M.*

O próximo lema, é uma caracterização útil de transitividade para o caso em que M é um espaço métrico completo, para mais detalhes ver Lema 4.3.4 em [17].

Lema 2.2. *Suponha M um espaço métrico completo com base enumerável de abertos. Então $f : M \to M$ é transitiva se e, somente se, para todo par de abertos U e V existe $k \geq 1$ tal que $f^{-k}(U) \cap V \neq \emptyset$.*

2.2 Notação Básica

Considere no $\mathbb{R}^2$ a seguinte relação de equivalência: dados $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ e $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ então

$$z_1 \sim z_2 \Longleftrightarrow z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}^2.$$

Defina $[\widehat{z}] = \{\widehat{z}_0 \in \mathbb{R}^2; \widehat{z} \sim \widehat{z}_0\}$ como a classe de equivalência de qualquer $\widehat{z} \in \mathbb{R}^2$ e, $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ o espaço dessas classes de equivalência. Esse espaço é chamado de toro bi-dimensional plano ou, simplesmente, toro e denotado por $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Note que assim definido $\mathbb{T}^2$ é um espaço métrico compacto e, portanto, completo.

A aplicação de recobrimento universal do toro, definida por

$$\begin{array}{rccl} \pi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{T}^2 \\ & \widehat{z} & \longmapsto & \pi(\widehat{z}) = [\widehat{z}] = (e^{2\pi i\widehat{x}}, e^{2\pi i\widehat{y}}) \end{array}$$

é contínua e sobrejetora mas não é injetora, uma vez que a função $\widehat{z} \mapsto e^{2\pi i\widehat{z}}$ é bi-periódica de período 1. Isso implica que dado $\widehat{z} \in \mathbb{R}^2$

$$\pi\left(\widehat{z}\right) = \pi\left(\widehat{z} + (p,q)\right)$$

para qualquer $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$. Assim definida π é um *homeomorfismo local*, isto é, cada ponto $\widehat{z} \in \mathbb{R}^2$ tem uma vizinhança que é aplicada homeomorficamente por π sobre um subconjunto aberto do $\mathbb{T}^2$. Sendo assim, para simplificar a notação, a partir de agora $z \in \mathbb{T}^2$ representará $[z] \subset \mathbb{R}^2$.

Sejam $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ homeomorfismos e, portanto, mensuráveis. Dizemos que F é um levantamento de f para o $\mathbb{R}^2$ se

$$\pi \circ F = f \circ \pi.$$

Isto é, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^2 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{T}^2 \end{array}$$

Se f é homotópico à identidade então F comuta com as translações inteiras, isto é, tomando arbitrariamente, $v \in \mathbb{Z}^2$ e definindo

$$\begin{array}{rccl} T_v: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \widehat{z} & \longmapsto & T_v(\widehat{z}) = \widehat{z} + v \end{array}$$

segue que

$$F \circ T_v = T_v \circ F \Longleftrightarrow F(\widehat{z} + v) = F(\widehat{z}) + v, \ \forall \widehat{z} \in \mathbb{R}^2 \tag{2.3}$$

Denotaremos por $Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ o conjunto dos homeomorfismos definidos no toro que são homotópicos à identidade.

Observação 2.1. *Sejam $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ e F_1, F_2 dois levantamentos de f para o $\mathbb{R}^2$ então a aplicação $F_1 - F_2$ é constante, isto é, para qualquer $\widehat{z} \in \mathbb{R}^2$,*

$$F_1(\widehat{z}) - F_2(\widehat{z}) = v, \ \textit{tal que } v \in \mathbb{Z}^2.$$

Com efeito, basta observar que existem $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}$, tais que dado qualquer $\widehat{z} \in \mathbb{R}^2$ temos

$$F_i(\widehat{z} + v_i) = F_i(\widehat{z}) + v_i, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Logo

$$\pi(F_i(\widehat{z} + v_i)) = \pi(F_i(\widehat{z}) + v_i) = \pi(F_i(\widehat{z})), \quad i \in \{1, 2\}.$$

Mas $\pi(F_1(\widehat{z})) = f(\pi(\widehat{z})) = \pi(F_2(\widehat{z}))$ implica que

$$\pi(F_1(\widehat{z})) = \pi(F_2(\widehat{z})) \Leftrightarrow \pi(F_1(\widehat{z}) + v_1) = \pi(F_2(\widehat{z}) + v_2).$$

E, consequentemente $F_1(\widehat{z}) - F_2(\widehat{z}) = v_2 - v_1 = v \in \mathbb{Z}^2$.

Observação 2.2. *Seja $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ e defina a função deslocamento*

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathbb{T}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & z & \longmapsto & \phi(z) = F(\widehat{z}) - \widehat{z}, \end{array}$$

onde $\widehat{z} \in \pi^{-1}(z)$ qualquer, e F é um levantamento de f para o $\mathbb{R}^2$. Então, ϕ é uniformemente limitada.

De fato, seja $\phi := (\phi_1, \phi_2)$, tal que dados $v \in \mathbb{Z}^2$ e $z \in \mathbb{T}^2$, temos que para qualquer $\widehat{z} \in \pi^{-1}(z)$

$$
\begin{aligned}
F(\widehat{z}) - \widehat{z} &= (\phi_1(\widehat{z}), \phi_2(\widehat{z})) & (2.4)\\
F(\widehat{z}+v) - (\widehat{z}+v) &= (\phi_1(\widehat{z}+v), \phi_2(\widehat{z}+v)) & (2.5)
\end{aligned}
$$

Subtraindo (2.4) de (2.5) vem

$$F(\widehat{z}+v) - F(\widehat{z}) - v = (\phi_1(\widehat{z}+v) - \phi_1(\widehat{z}), \phi_2(\widehat{z}+v) - \phi_2(\widehat{z})) \tag{2.6}$$

Como $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ segue imediatamente de (2.3) que o lado esquerdo da equação (2.6) é igual à $(0,0)$, logo

$$\phi_1(\widehat{z}+v) = \phi_1(\widehat{z}) \text{ e } \phi_2(\widehat{z}+v) = \phi_2(\widehat{z})$$

o que implica que $F - Id =: \phi$ é $\mathbb{Z}^2$-periódica e, portanto, uniformemente limitada.

Assim definida a função ϕ mede o deslocamento de qualquer ponto $z \in \mathbb{T}^2$ no recobrimento $\mathbb{R}^2$.

2.3 Conjunto de Rotação

Sejam $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ e F um levantamento de f para o $\mathbb{R}^2$.

Definição 2.3. *Definimos o conjunto de rotação do ponto $z \in \mathbb{T}^2$ como sendo o conjunto $\rho(F, z)$ dos pontos de acumulação da sequência*

$$\left\{ \frac{F^n(\widehat{z}) - \widehat{z}}{n},\ n \geq 1,\ \widehat{z} \in \pi^{-1}(z) \right\}.$$

E o conjunto de rotação pontual de F definimos por,

$$\rho_p(F) = \bigcup_{z \in \mathbb{T}^2} \rho(F, z).$$

O conjunto de rotação pontual de F é o modo natural de generalizar a definição de número de rotação do círculo ([15]). Porém tal generalização não preserva boas propriedades, por exemplo, a conexidade.

Há, no entanto, a definição de conjunto de rotação, dada em [15], de modo que propriedades importantes são preservadas., como segue,

Definição 2.4. *Definimos o conjunto de rotação de F por*

$$\rho(F) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2;\ v = \lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(\widehat{z}_i) - \widehat{z}_i}{n_i},\ \widehat{z}_i \in \mathbb{R}^2,\ n_i \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty \right\}.$$

Segue imediatamente das Definições 2.3 e 2.4 que $\rho_p(F) \subseteq \rho(F)$.

A partir da Definição 2.4 podemos restringir o conjunto de rotação do toro à um conjunto local de rotação de um dado conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{T}^2$ por

$$\rho_U(F) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2;\ v = \lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(\widehat{z}_i) - \widehat{z}_i}{n_i},\ \widehat{z}_i \in \pi^{-1}(U),\ n_i \stackrel{i\to\infty}{\to} \infty \right\}. \tag{2.7}$$

Em particular, $\rho(F) = \rho_{\mathbb{T}^2}(F)$.

Outra forma de definir o conjunto de rotação é por medidas invariantes. Nesse contexto, a ideia fundamental é que o vetor de rotação mede o deslocamento médio do centro de massa de f por uma medida.

Sejam $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$, F um levantamento de f para o $\mathbb{R}^2$ e $\phi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^2$ como na Observação 2.2.

Seja $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ e denote por $\mathcal{M}(\mathbb{T}^2)$ o espaço das medidas borelianas de probabilidade definidas em $\mathbb{T}^2$ e sejam

$$\mathcal{M}(f) = \left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2);\ \mu \text{ é medida } f\text{-invariante} \right\} \text{ e}$$
$$\mathcal{M}_e(f) = \{ \mu \in \mathcal{M}(f);\ \mu \text{ é medida } f\text{-ergódica} \} \subset \mathcal{M}(f).$$

Definição 2.5. *Dado $\mu \in \mathcal{M}(f)$, definimos o conjunto de rotação de μ por*

$$\rho_\mu(F) = \int_{\mathbb{T}^2} \phi \, d\mu.$$

Note que $\rho_\mu(F)$ é um vetor, pois ϕ é uniformemente limitada em $\mathbb{T}^2$ e esse vetor é o deslocamento médio do centro de massa de f.

Uma vez que $\mu(\mathbb{T}^2) = 1$, $\int_{\mathbb{T}^2} \widehat{z} \, d\mu$ é o vetor do centro de massa inicial e $\int_{\mathbb{T}^2} F(\widehat{z}) \, d\mu$ é o vetor do centro de massa final, temos que

$$\frac{1}{\mu(\mathbb{T}^2)} \left(\int_{\mathbb{T}^2} F(\widehat{z}) \, d\mu - \int_{\mathbb{T}^2} \widehat{z} \, d\mu \right) = \int_{\mathbb{T}^2} (F(\widehat{z}) - \widehat{z}) \, d\mu = \int_{\mathbb{T}^2} \phi \, d\mu = \rho_\mu(F)$$

A proposição seguinte reúne algumas consequências que resultam da Definição 2.4.

Proposição 2.2. *Sejam $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ e F um levantamento de f para o $\mathbb{R}^2$, valem:*

(1) $\rho(F)$ é compacto;

(2) $\rho(F)$ é convexo;

(3) $\rho(F^n(\widehat{z}) + v) = n\rho(F) + v$, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$ e $v \in \mathbb{Z}^2$.

Demonstração. *(1)* A Definição 2.4 é equivalente à

$$\rho(F) = \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{k\geq n} K_k(F)},$$

onde $K_k(F) = \left\{ \dfrac{F^k(\widehat{z}) - \widehat{z}}{k} : \widehat{z} \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

De fato, seja $v \in \rho(F)$, isto é, que $v \in \overline{\bigcup_{k\geq n} K_k(F)}$ para todo n maior ou igual à 1.

Fixemos $n \geq 1$, como $v \in \rho(F)$ então dado $\epsilon > 0$ existe $m_n \geq n$ e $\widehat{z}_n \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v - v_n\| < \epsilon$, onde $v_n = \frac{F^{m_n}(\widehat{z}_n) - \widehat{z}_n}{m_n}$. Mas, pela definição de $K_k(F)$ temos que $v_n \in K_{m_n}(F)$ logo $v_n \in \bigcup_{k\geq n} K_k(F)$. Portanto, $v \in \overline{\bigcup_{k\geq n} K_k(F)}$.

Para provar a outra inclusão, seja $v \in \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{k\geq n} K_k(F)}$. Então para todo $n \geq 1$, $v \in \overline{\bigcup_{k\geq n} K_k(F)}$ e como consequência existe $v_n \in \bigcup_{k\geq n} K_k(F)$ tal que $\|v - v_n\| < \frac{1}{n}$. Como $v_n \in \bigcup_{k\geq n} K_k(F)$, existem $x_n \in \mathbb{R}^2$ e $m_n \geq n$ tais que $v_n = \frac{F^{m_n}(\widehat{z}_n) - \widehat{z}_n}{m_n}$. Mas $v_n \overset{n\to\infty}{\to} v$. Logo, $v \in \rho(F)$.

Como $F - Id$ é $\mathbb{Z}^2$-periódica temos que $K_k(F) = \left\{ \frac{F^k(\widehat{z}) - \widehat{z}}{k};\ \widehat{z} \in [0,1]^2 \right\}$. Logo $K_k(F)$ é compacto e, portanto, $\rho(F)$ é compacto.

(2) e *(3)* Ver [15]. □

Os próximos resultados são devidos à Definição 2.5.

Proposição 2.3. *Sejam $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ e F um levantamento de f para o $\mathbb{R}^2$, valem:*

(1) se $\mu \in \mathcal{M}_e(f)$ é tal que $\rho_\mu(F) = w \in \mathbb{R}^2$, então para μ-quase todo ponto $z \in \mathbb{T}^2$ e qualquer $\widehat{z} \in \pi^{-1}(z)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(\widehat{z}) - \widehat{z}}{n} = w;$$

(2) Se $w \in \rho(F)$ é um ponto extremal (no sentido de conjunto convexo) então existe $\mu \in \mathcal{M}_e(f)$; $\rho_\mu(F) = w$.

Demonstração. *(1)* Seja $\mu \in \mathcal{M}_e(f)$ de modo que $\rho_\mu(F) = v \in \mathbb{R}^2$ e ϕ a aplicação definida na Observação 2.2, isto é, $\phi(z) = F(\widehat{z}) - \widehat{z}$ para todo $z \in \mathbb{T}^2$ e $\widehat{z} \in \pi^{-1}(z)$.

Do Teorema Ergódico de Birkhoff (ver Teorema 2.3) segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k(z)) = \int_{\mathbb{T}^2} \phi \, d\mu = v, \ \mu - q.t.p, \tag{2.8}$$

Como $\pi(\widehat{z}) = z$ e $\pi \circ F = f \circ \pi$ temos

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k(z)) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k(\pi(\widehat{z}))) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(\pi(F^k(\widehat{z})))$$

Do fato de que $\phi(z) = \phi(\pi(\widehat{z})) = F(\widehat{z}) - \widehat{z}$ segue que o lado direito da equação anterior é igual à

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F(F^k(\widehat{z})) - F^k(\widehat{z}) = \frac{F^n(\widehat{z}) - \widehat{z}}{n}. \tag{2.9}$$

Daí segue de (2.8) e (2.9) que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(\widehat{z}) - \widehat{z}}{n} = \int_{\mathbb{T}^2} \phi \, d\mu = w, \ \mu - q.t.p.$$

(2) Defina o conjunto

$$\rho_{mes}(F) = \left\{ \int_{\mathbb{T}^2} \phi \, d\mu; \ \mu \in \mathcal{M}(f) \right\}.$$

Como $\rho(F)$ é convexo, pelo item (2) da Proposição 2.2, devemos mostrar que $\rho_{mes}(F)$ é convexo. De fato, sejam $r_1, r_2 \in \rho_{mes}(F)$ e $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(f)$; $\rho_{\mu_i}(F) = r_i$, tal que $i = 1, 2$.

Da Proposição 2.1 segue que o conjunto $\mathcal{M}(f)$ é convexo e então para todo $t \in [0,1]$ segue que $\mu := t\mu_1 + (1-t)\mu_2 \in \mathcal{M}(f)$. Mas

$$\begin{aligned} tr_1 + (1-t)r_2 &= t \int \phi \, d\mu_1 + (1-t) \int \phi \, d\mu_2 = \\ &= \int \phi \, d(t\mu_1 + (1-t)\mu_2) = \rho_\mu(F), \ \forall t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Logo, $tr_1 + (1-t)r_2 \in \rho_{mes}(F)$, para todo $t \in [0,1]$. Portanto $\rho_{mes}(F)$ é convexo.

- $\rho(F) \subseteq \rho_{mes}(F)$

Seja $v \in \rho(F)$, então existem sequências $(\widehat{z}_i)_{i\geq 1} \in \mathbb{R}^2$ e $(n_i)_{i\geq 1} \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(\widehat{z}_i) - \widehat{z}_i}{n_i} = v.$$

Defina a sequência de medidas de probabilidade $(\mu_i)_{i\geq 1}$ tal que

$$\mu_i := \frac{\delta_{\widehat{z}_i} + \delta_{F(\widehat{z}_i)} + \ldots + \delta_{F^{n_i-1}(\widehat{z}_i)}}{n_i}.$$

Como $\mathcal{M}(f)$ é compacto na topologia fraca* (ver Proposição 2.1), $(\mu_i)_{i\geq 1}$ tem algum ponto de acumulação $\mu \in \mathcal{M}(f)$. Passando à uma subsequência se necessário, podemos assumir que $\mu_i \overset{i\to\infty}{\to} \mu$. Então

$$\begin{aligned}\rho_\mu(F) &= \int \phi \, d\mu = \lim_{i\to\infty} \int \phi \, d\mu_i = \lim_{i\to\infty} \int (F(\widehat{z}) - \widehat{z}) \, d\mu_i = \\ &= \lim_{i\to\infty} \left(\int F(\widehat{z}) \, d\mu_i - \int \widehat{z} \, d\mu_i \right) = \lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(\widehat{z}_i) - \widehat{z}_i}{n_i} = v.\end{aligned}$$

E, portanto, $v \in \rho_{mes}(F)$.

- $\rho(F) \supseteq \rho_{mes}(F)$

Basta mostrar que os pontos extremais de $\rho_{mes}(F)$ estão contidos em $\rho(F)$. Para tanto considere o espaço vetorial $C(\mathbb{T}^2)$ das funções contínuas de $\mathbb{T}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e, considere o espaço vetorial dual $C^*(\mathbb{T}^2)$ de $C(\mathbb{T}^2)$. Pelo Teorema da Representação de Riesz (ver [27], p. 130) temos que $C^*(\mathbb{T}^2)$ é isometricamente isomorfo à $\mathcal{M}_*(\mathbb{T}^2) = (\mathbb{T}^2, \mathcal{B}, \mu)$ que é o conjunto das medidas regulares complexas de Borel definidas no toro, ou seja, $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel e μ é medida regular complexa definida no toro. Sendo assim $\mathcal{M}(\mathbb{T}^2)$[1] $\subset \mathcal{M}_*(\mathbb{T}^2)$,

Considere a transformação linear

$$\begin{array}{rccl} L_f: & \mathcal{M}(\mathbb{T}^2) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \mu & \longmapsto & L_f(\mu) = \int \phi \, d\mu. \end{array}$$

Note que além de L_f ser linear, $L_f(\mathcal{M}(f)) = \rho_{mes}(F)$.

Seja w um ponto extremal de $\rho_{mes}(F)$. Vamos mostrar que existe $z \in \mathbb{T}^2$ tal que $\rho(z, F) = w$. Para isso, vamos usar o seguinte resultado de análise convexa (ver [21]): *Se $T : E_1 \to E_2$ é uma aplicação linear entre dois espaços vetoriais, E_1 e E_2, e $C \subset E_1$ é convexo, então $T(C) \subset E_2$ é convexo e ainda, para todo $v \in T(C)$ ponto extremal, o conjunto $T^{-1}(v) \subset C$ contém um ponto extremal de C.*

Como L_f é linear e os conjuntos $\mathcal{M}(f)$ e $\rho_{mes}(F)$ são convexos, temos então que a pré-imagem do ponto extremal $w \in \rho_{mes}(F)$ contém um ponto extremal de $\mathcal{M}(f)$ que é uma

[1] Lembre que $\mathcal{M}(\mathbb{T}^2)$ é o conjunto das medidas borelianas de probabilidade definidas no toro.

medida μ f-ergódica, pois o Teorema 2.4 implica que uma medida de probabilidade f-invariante é ergódica se e, somente se, é ponto extremal (no sentido de conjunto convexo) do conjunto $\mathcal{M}(f)$. E, segue do Teorema Ergódico de Birkhoff (ver Teorema 2.3), que existe $z \in \mathbb{T}^2$ tal que

$$w = \int \phi \, d\mu = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k(z)) = \lim_n \frac{F^n(\widehat{z}) - \widehat{z}}{n} = \rho(F, z).$$

Então, $\rho(F) = \rho_{mes}(F)$

Para concluir a demonstração, se $w \in \rho(F) = \rho_{mes}(F)$ é um ponto extremal, basta notar que $L_f^{-1}(w)$ contém uma medida ergódica μ tal que $\rho_\mu(F) = L_f(\mu) = w$. $\square$

Definição 2.6. *Dado $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$, dizemos que f é pseudo-rotação quando o conjunto de rotação consiste de um único vetor. E quando esse vetor pertence à $\mathbb{Z}^2$, dizemos que f é irrotacional.*

Desse modo f é irrotacional se existe um levantamento F tal que $\rho(F) = \{(0,0)\}$. Pois sendo G um levantamento de f para o $\mathbb{R}^2$ de modo que $\rho(G) = \{v\}$ e $v \in \mathbb{Z}_*$, segue da Observação 2.1 que existe um levantamento F de f para o $\mathbb{R}^2$ tal que $G - F = v \Leftrightarrow F = G - v$. Isso implica que $\rho(F) = \rho(G - v)$, donde pela Proposição 2.2 item (3) temos que $\rho(F) = \rho(G) - v = \{(0,0)\}$.

Definição 2.7. *Seja F um levantamento de $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ para o $\mathbb{R}^2$. Se $v = (p_1/q, p_2/q)$ é um vetor racional na forma reduzida, isto é, p_1, p_2, q são inteiros mutuamente co-primos e $q > 0$, então diremos que v é realizado por uma órbita periódica se existe $z \in \mathbb{T}^2$ tal que $F^q(\widehat{z}) - \widehat{z} = (p_1, p_2)$ para qualquer $\widehat{z} \in \pi^{-1}(z)$.*

Segue da Definição 2.7 que $f^q(z) = z$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(\widehat{z})-\widehat{z}}{n} = v$. Pois, se existe $z \in \mathbb{T}^2$ tal que para qualquer $\widehat{z} \in \pi^{-1}(z)$, $F^q(\widehat{z}) - \widehat{z} = (p_1, p_2)$, então

$$F^q(\widehat{z}) = \widehat{z} + (p_1, p_2) \Leftrightarrow$$

$$\pi(F^q(\widehat{z})) = \pi(\widehat{z} + (p_1, p_2)) = \pi(\widehat{z}) \Leftrightarrow$$

$$f^q(\pi(\widehat{z})) = \pi(\widehat{z}) \Leftrightarrow$$

$$f^q(z) = z.$$

E, ainda, segue de $F^q(\widehat{z}) = \widehat{z} + (p_1, p_2)$ que

$$F^q(F^q(\widehat{z})) = F^{2q}(\widehat{z}) = F^q(\widehat{z} + (p_1, p_2)) = F^q(\widehat{z}) + (p_1, p_2) = \widehat{z} + 2(p_1, p_2)$$

E assim sucessivamente, de modo que

$$\underbrace{F^q(F^q(\dots(F^q(\widehat{z}))))}_{n \text{ vezes}} = F^{nq}(\widehat{z}) = \widehat{z} + n(p_1, p_2).$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^{nq}(\widehat{z}) - \widehat{z}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\widehat{z} + n(p_1, p_2) - \widehat{z}}{n} = (p_1, p_2).$$

Portanto, $\rho(F^q, z) = \{(p_1, p_2)\}$, e da Proposição 2.2 item (3) temos que

$$\rho(F, z) = \frac{1}{q}\rho(F^q, z) = \frac{1}{q}(p_1, p_2) = v.$$

2.4 Conjunto Essencial, Inessencial, Preenchido e Limitado

Entenderemos um *disco topológico* por um conjunto aberto homeomorfo à um disco do plano e, analogamente, um *anel topológico* por um conjunto aberto homeomorfo à um anel do plano.

Um *arco* em uma superfície S ligando $a \in S$ à $b \in S$ é uma aplicação contínua $\gamma : [0, 1] \to S$ onde os pontos $\gamma(0) := a$ e $\gamma(1) := b$ são os pontos extremais de γ. Quando $a = b$ coincidem, diremos que γ é uma *curva fechada (laço)*. Denotaremos por $[\gamma]$ o traço de γ, isto é, $\gamma([0, 1])$.

Dado dois arcos $\alpha, \beta : [0, 1] \to S$ de tal modo que $\alpha(1) = \beta(0)$, podemos definir o arco denotado por $(\alpha * \beta)$ que representa a concatenação de α e β, isto é,

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t - 1), & \text{se } t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

Definição 2.8. *Seja $U \subset \mathbb{T}^2$ um conjunto aberto. Dizemos que U é inessencial se toda curva fechada em U é homotopicamente trivial em $\mathbb{T}^2$, caso contrário U é dito essencial.*

Um conjunto arbitrário $E \subset \mathbb{T}^2$ é dito inessencial se existe alguma vizinhança de E que é inessencial, caso contrário E é essencial. Dizemos que E é totalmente essencial se $\mathbb{T}^2 \backslash E$ é inessencial.

Definição 2.9. *Sejam $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ e $z \in \mathbb{T}^2$, z é dito ponto essencial se para cada vizinhança $U \subset \mathbb{T}^2$ de z, $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(U)$ é essencial. Caso contrário, z é ponto inessencial.*

Denotaremos o conjunto dos pontos essenciais por $Ess(f)$ e dos pontos inessencias por $Ine(f)$. Note que $\mathbb{T}^2 \backslash Ess(f) = Ine(f)$.

Afirmação 2.1. *Decorre da Definição 2.9 que*

(1) $Ine(f)$ é aberto e, portanto, $Ess(f)$ é fechado;

(2) Ambos são f-invariantes.

Demonstração. (1) Seja $z \in Ine(f)$, isto é, existe $U \subset \mathbb{T}^2$ vizinhança de z tal que $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(U)$ é inessencial. Se $y \in U$ fosse ponto essencial então $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(U)$ seria essencial, absurdo. Logo $U \subset Ine(f)$ e, portanto, $Ine(f)$ é aberto. Como $Ess(f)$ é o complementar de $Ine(f)$, $Ess(f)$ é fechado.
(2) Ambos são f-invariantes. De fato, como f é homeomorfismo e $k \in \mathbb{Z}$ segue que,

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(U) \text{ é essencial } \Leftrightarrow \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{k+1}(U) \text{ é essencial.}$$

Logo

$$z \in Ess(f) \Leftrightarrow \text{para toda vizinhança } U \subset \mathbb{T}^2 \text{ de } z,$$
$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{k+1}(U) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(f(U)) \text{ é essencial } \Leftrightarrow f(z) \in Ess(f).$$

Portanto, $Ess(f)$ é f-invariante.

Do fato anterior segue que

$$f(\mathbb{T}^2 \backslash Ess(f)) = f(\mathbb{T}^2) \backslash f(Ess(f)) = \mathbb{T}^2 \backslash Ess(f).$$

E, portanto $Ine(f)$ é f-invariante. $\square$

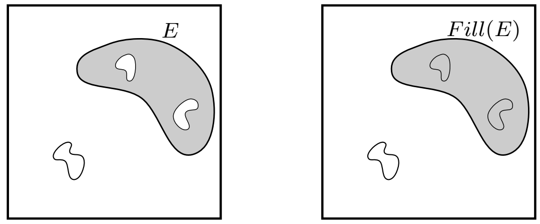

Figura 2.1: Conjunto $Fill(E)$.

Definição 2.10. *Se $E \subset \mathbb{T}^2$ é aberto ou fechado, denotaremos por $Fill(E)$ seu preenchimento que é a união de E com todas as componentes conexas inessenciais de $\mathbb{T}^2 \backslash E$.*

Definição 2.11. *Seja $A \subset \mathbb{T}^2$ um conjunto aberto e conexo. Nessa condição, A é anelar se $Fill(A)$ é homeomorfo à um anel topológico aberto no $\mathbb{R}^2$.*

Assim, se A é anelar segue que $Fill(A)$ deve ser necessariamente essencial, pois se não o for a Definição 2.11 implica que $Fill(A)$ não pode ser preenchido, contradizendo a Definição 2.10.

Proposição 2.4. *As próximas propriedades seguem das Definições anteriores.*

(1) Se $E \subset \mathbb{T}^2$ é um conjunto aberto ou fechado e totalmente essencial, então exatamente uma componente conexa de E é essencial e, de fato, é totalmente essencial.

(2) $Fill(E)$ é inessencial se E o for, totalmente essencial se E o for e nenhum dos dois se E não for.

(3) Um conjunto aberto $U \subset \mathbb{T}^2$ tem uma componente anelar se e, somente se, U não é inessencial e nem totalmente essencial.

(4) Se um conjunto aberto ou fechado $E \subset \mathbb{T}^2$ é invariante por um homeomorfismo $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ então $Fill(E)$ também é f-invariante.

(5) Seja $U \subset \mathbb{T}^2$ aberto e conexo e tome $\widehat{U}$, componente conexa de $\pi^{-1}(U)$. Então,

(5a) U é inessencial se e, somente se, $\widehat{U} \cap (\widehat{U} + v) = \emptyset$ para cada $v \in \mathbb{Z}^2_*$;

(5b) U é totalmente essencial se e, somente se, $\widehat{U} = \widehat{U} + v$ para todo $v \in \mathbb{Z}^2$;

(5c) U é anelar se e, somente se, existe $v \in \mathbb{Z}^2_*$ tal que $\widehat{U} = \widehat{U} + v$ e $\widehat{U} \cap (\widehat{U} + kv^{\perp})$ para todo $k \neq 0$.

Dado um conjunto conexo por caminhos $E \subset \mathbb{T}^2$ e $\widehat{E} \subset \mathbb{R}^2$ uma componente conexa de $\pi^{-1}(E)$ qualquer. Denotaremos por $\mathcal{D}(E)$ o diâmetro de $\widehat{E}$, isto é, $\mathcal{D}(E) = diam(\widehat{E})$. Esse valor é independente da escolha do representante $\widehat{E} \in \pi^{-1}(E)$.

Dados $u, v \in \mathbb{R}^2$, denotaremos o produto interno por $\langle u, v\rangle$ e $P_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denotará a projeção $P_v(u) = \langle u, \frac{v}{\|v\|}\rangle$ na direção de v. Sendo assim, se $v \in \mathbb{R}^2_*$, denotaremos por $\mathcal{D}_v(E)$ o diâmetro de $P_v(\widehat{E})$, que tembém independe da escolha do representante $\widehat{E} \in \pi^{-1}(E)$.

2.5 Homeomorfismo anelar

Dado $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ usaremos a notação $v^{\perp} = (-b, a)$ para representar o vetor ortogonal de v. Seja $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$, se existir um levantamento F de f para o $\mathbb{R}^2$, algum $v \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ e $M > 0$ tal que

$$|P_{v^{\perp}}(F^n(\widehat{z}) - \widehat{z})| < M, \ \forall \widehat{z} \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{2.10}$$

diremos que f é anelar com direção v.

Observação 2.3. *Segue imediatamente da inequação (2.10) que se f é anelar com direção v então $\rho(F) \subset \mathbb{R}v$.*

De fato, (2.10) implica que

$$\lim_{i\to\infty} P_{v^{\perp}}\left(\frac{F^n(\widehat{z}) - \widehat{z}}{n}\right) = 0, \quad \forall \widehat{z} \in \mathbb{R}^2.$$

Logo $P_{v^{\perp}}(\rho(F)) = 0$ que é equivalente à $\rho(F) \subset \mathbb{R}v$.

Proposição 2.5. *Se $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$, as seguintes propriedades valem:*

(1) Se um conjunto aberto $A \subset \mathbb{T}^2$ é anelar, então $diam(P_v(\widehat{A})) < \infty$ para algum $v \in \mathbb{Z}^2_*$ onde $\widehat{A} \in \pi^{-1}(A)$.

(2) Se existe um conjunto anelar f-invariante, então f é anelar.

(3) Se f é não errante e f^n é não-anelar para todo $n \in \mathbb{N}$ então qualquer conjunto aberto essencial f-invariante é totalmente essencial.

(4) Se f^n é anelar para algum $n \in \mathbb{N}$ e f tem ponto fixo então f é anelar.

Demonstração. (1) Se A é um conjunto aberto e anelar então $A' := Fill(A)$ é um anel topológico e, portanto, A' é de fato essencial.

Seja γ uma curva essencial simples e fechada em A'. Então qualquer componente conexa Γ de $\pi^{-1}(\gamma)$ separa o $\mathbb{R}^2$ em exatamente duas componentes conexas.

Seja $\widehat{A}'$ a componente conexa de $\pi^{-1}(A')$ que contém Γ. Pela Proposição 2.4 item (5) existe $v \in \mathbb{Z}^2_*$ tal que $\widehat{A}' = \widehat{A}' + v$ e $\widehat{A}' \cap (\widehat{A}' + kv^{\perp} = \emptyset)$ para todo $k \in \mathbb{Z}_*$.

Desse fato segue que $\widehat{A}'$ situa-se entre $\Gamma - v^{\perp}$ e $\Gamma + v^{\perp}$, isto é, $diam(P_{v^{\perp}}(\widehat{A}')) < \infty$.
(2) Suponha que o conjunto A do item anterior é f-invariante, então A' também o é e então, podemos tomar um levantamento de F de f tal que $\widehat{A}'$ seja F-invariante. Do item anterior segue que existe uma constante M tal que $P_{v^{\perp}}(\widehat{A}') < M$. Seja B a união de $\widehat{A}' \cup (\widehat{A}' + v^{\perp})$ com todas as componentes conexas do seu complementar cuja projeção por $v^{\perp}$ é limitada.

Então, B é F-invariante e $\pi(B) = \mathbb{T}^2$. E, assim para cada $\widehat{z} \in \mathbb{R}^2$ existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\widehat{z} + k \in B$. E, o fato de que B é F-invariante e que $P_{v^{\perp}}(B)$ é limitado, implica que

$$P_{v^{\perp}}(F^n(z) - z) = P_{v^{\perp}}(F^n(z + k) - (z + k)$$

é limitado para todo $n \in \mathbb{Z}$.
(3) Note que se $U \subset \mathbb{T}^2$ é f-invariante e essencial mas não totalmente essencial, então pelo item (3) da Proposição 2.4 U tem uma componente conexa anelar. Como f é não-errante e as componentes conexas de U são permutadas por f segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(A) = A$. Então A é um conjunto aberto, anelar e f^{n_0}-invariante. E assim, segue do item (2) dessa mesma Proposição segue que f^{n_0} é anelar, contradizendo a hipótese.
(4) Suponha que f^n é anelar para algum $n \in \mathbb{N}$ e que f tem ponto fixo. Então existe um levantamento F de f para o $\mathbb{R}^2$ tal que $F(z_0) = z_0$ para algum $z_0 \in \mathbb{R}^2$.

Como f^n é anelar existe $w \in \mathbb{Z}^2$ tal que

$$-M \leq P_{v^{\perp}}((F^n + w)^k(z) - z) \leq M,$$

para todo $z \in \mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{Z}$. Mas,

$$P_{v^\perp}((F^n + w)^k(z) - z) = P_{v^\perp}(F^{nk}(z) + kw - z) = P_{v^\perp}(F^{nk}(z) - z) + kP_{v^\perp}(w),$$

então,

$$-kP_{v^\perp}(w) - M \leq P_{v^\perp}(F^{nk}(z) - z) \leq M - kP_{v^\perp}(w),$$

para todo $z \in \mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{Z}$. Assim, se $z = z_0$ a inequação acima implica que $P_{v^\perp}(w) = 0$, pois ela deve ser satisfeita para todo $k \in \mathbb{Z}$. Portanto,

$$-M \leq P_{v^\perp}((F^{nk}(z) - z) \leq M,$$

para todo $z \in \mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Dado $m \in \mathbb{Z}$ arbitrário, podemos escrevê-lo como $m = nk + r$ onde $r \in [0, k) \cap \mathbb{N}$. E então, tomando $M' = max\,\{P_{v^\perp}(F^r(z) - z);\ z \in [0,1]^2 \text{ e } r \in [0,1) \cap \mathbb{N}\}$ temos que

$$P_{v^\perp}(F^m(z) - z) = P_{v^\perp}(F^{nk}(F^r(z)) + F^r(z)) - P_{v^\perp}(F^r(z) - z) \leq M + M'$$

para qualquer $z \in \mathbb{R}^2$. Portanto f é anelar. $\square$

Proposição 2.6. *Suponha que existe um levantamento F de f para o $\mathbb{R}^2$ e um aberto F-invariante $V \subset \mathbb{R}^2$;*

$$P_v^{-1}((-\infty, a)) \subset V \subset P_v^{-1}((-\infty, b)) \text{ para algum } a < b.$$

Então f é anelar.

Demonstração. Seja $M = b - a + \|v\|$. Tome arbitrariamente $z \in \mathbb{R}^2$ então existe $k \in \mathbb{Z}^2$ tal que $a - \|v\| \leq P_v(z + kv) < a$ e isso implica que $z + kv \in V$ e como V é F-invariante temos que $F^n(z + kv) \in V$, ou seja, $P_v(F^n(z + kv)) \leq b$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. E, sendo assim

$$\begin{aligned} P_v(F^n(z) - z) &= P_v(F^n(z) + kv - kv - z) = \\ &= P_v(F^n(z + kv)) - P_v(z + kv) \leq b - a + \|v\| = M, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Analogamente, existe $k \in \mathbb{Z}^2$ tal que $b < P_v(z + kv) \leq b + \|v\|$ e, então, $F^n(z + kv) \notin V$, ou seja, $P_v(F^n(z + kv)) \geq a$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$P_v(F^n(z) - z) = P_v(F^n(z + kv)) - P_v(z + kv) \geq a - b - \|v\| = -M,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, $-M \leq P_v(F^n(z) - z) \leq M$, para todo $z \in \mathbb{R}^2$ e todo $n \in \mathbb{Z}$, logo f é anelar. $\square$

2.6 Outros resultados

Definição 2.12. *Seja $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ e $E \subset \mathbb{T}^2$ um subconjunto invariante.*

(i) E é dito externamente transitivo se para quaisquer dois conjuntos abertos U e V que intersectam E existir $n \in \mathbb{Z}^2$ de tal modo que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$;

(ii) E é dito externamente sensível nas condições iniciais se existir $c > 0$ tal que para todo $z \in E$ e qualquer vizinhança U de z existe $n \geq 1$ de tal modo que $\mathcal{D}(f^n(U)) > c$.

O resultado seguinte é uma versão do clássico Lema de Brouwer, para maiores informações veja [1].

Proposição 2.7. *Se um homeomorfismo preservando orientação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tem um ponto não-errante, então F tem um ponto fixo.*

Já o próximo é devido à Brown e Kister, ver [14],

Teorema 2.6. *Seja S uma superfície orientada e $f : S \to S$ homeomorfismo preservando orientação (por exemplo, homeomorfismos homotópicos à identidade). Então cada componente conexa de $S \backslash Fix(f)$ é f-invariante.*

A proposição que se segue diz que nós podemos colapsar as componentes conexas do preenchimento de um conjunto compacto, inessencial e invariante em pontos, preservando a dinimica de fora do conjunto dado. Tal proposição será necessária para a demonstração do Teorema B para simplificar o conjunto dos pontos fixos, ver [5].

Proposição 2.8. *Seja $K \subset \mathbb{T}^2$ um conjunto preenchido compacto e inessential e $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ um homeomorfismo tal que $f(K) = K$. Então existe uma aplicação contínua e sobrejetora $h : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ e um homeomorfsimo $f' : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ tal que,*

- *h é homotópica à identidade;*
- *$hf = f'h$;*
- *$K' = h(K)$ é totalmente desconexo;*
- *$h|_{\mathbb{T}^2 \backslash K} : \mathbb{T}^2 \backslash K \to \mathbb{T}^2 \backslash K'$ é um homeomorfismo.*

Capítulo 3

Resultados

3.1 Homeomorfismo Estritamente Toral

Teorema A. *Seja $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ não-errante, então vale uma das afirmações:*

(1A) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $Fix(f^k)$ é totalmente essencial e f^k é irrotacional;

(2A) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que f^k é anelar;

(3A) $Ess(f)$ é não-vazio, totalmente essencial e conexo. $Ine(f)$ é união de uma família $\mathcal{U}$ de discos periódicos abertos dois-a-dois disjuntos tal que para cada $U \in \mathcal{U}$, $\mathcal{D}(U)$ é limitado por uma constante que depende somente do período de U.

Assim, se nem o item (1A) e nem o item (2A) valem, então vale o item (3A) que é o caso que caracteriza homeomorfismos não-errantes estritamente toral. Isto é, se f é não-errante e estritamente toral então sua dinâmica pode ser decomposta em dois conjuntos de tal modo que um é união de discos periódicos limitados (podendo ser vazio), $Ine(f)$, e outro que suporta a parte rotacional da dinâmica e, portanto, uma vasta informação sobre a mesma, $Ess(f)$.

3.1.1 Demonstração do Teorema A

Como será demonstrado na seção 5.3 do Capítulo 5 o Teorema B implica que dado uma aplicação $g \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ não-errante e não-anelar, $Fix(g)$ é essencial se e, somente se, $Fix(g)$ é totalmente essencial e g é irrotacional (ver Proposições 5.6 e 5.7).

Sendo assim, se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $Fix(f^k)$ é essencial, como $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ e é não-errante segue que f^k também o é. Então aplicando o Teorema B à f^k temos que ou $Fix(f^k)$ é totalmente essencial e f^k é irrotacional ou, caso contrário, f^k é anelar. Provando os casos (1A) e (2A), respectivamente.

Assim, para finalizar o Teorema A considere f tal que f^k é não-anelar e $Fix(f^k)$ é inessencial para todo $k \in \mathbb{N}$. Note que estamos negando que valem os itens (1A) e (2A) e, além disso, estamos nas hipóteses do Teorema B. Desse modo, vamos mostrar que sob essas hipóteses que o item (3A) vale.

Afirmação 3.1. *Cada $z \in Ine(f)$ está contido em um disco topológico periódico limitado.*

Demonstração. Como $Ine(f)$ é aberto, dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno temos que $U_\epsilon = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(B_\epsilon(z))$ é inessencial e f-invariante, pois sendo f um homeomorfismo e $k \in \mathbb{Z}$, $f(U_\epsilon) = f(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(B_\epsilon(z))) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{k+1}(B_\epsilon(z)) = U_\epsilon$.
Considere D_ϵ uma componente conexa de U_ϵ, a qual contém z. Como f é homeomorfismo não-errante segue que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^k(D_\epsilon) = D_\epsilon \quad \text{e,} \quad f^i(D_\epsilon) \cap D_\epsilon = \emptyset \quad \forall i \in \mathbb{N};\ 1 \leq i < k.$$

Dessa forma $U = Fill(D_\epsilon)$ é um disco periódico de período k. Assim o Teorema B aplicado à f^k garante que U é limitado, uma vez que $Fix(f^k)$ é inessencial para todo $k \in \mathbb{N}$. □

Afirmação 3.2. *$Ess(f)$ é totalmente essencial.*

Demonstração. Note que é equivalente afirmar que $Ine(f)$ é inessencial. Sendo assim, suponha por contradição que $Ine(f)$ é essencial. E, como $Ine(f)$ é aberto, segue que contém uma curva γ essencial. Como $\mathbb{T}^2$ é compacto segue da Afirmação 3.1 que existe uma família finita de conjuntos conexos periódicos limitados $U_1, \cdots, U_j$ de tal modo que $[\gamma] \subset U_1 \cup \cdots \cup U_j$. Não há perda de generalidade assumirmos que cada U_i, $1 \leq i \leq j$ intersecta $[\gamma]$. Assim, existem $M_i > 0$ e $m_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{m_i}(U_i) = U_i \quad \text{e} \quad \mathcal{D}(U_i) \leq M_i, \quad \forall i \in \mathbb{N};\ 1 \leq i \leq j.$$

Tomando $M = \max\{M_i;\ 1 \leq i \leq j\}$ e $m = \mathrm{mmc}\,(m_i;\ 1 \leq i \leq j)$ então

$$f^m(U_i) = U_i \quad \text{e} \quad \mathcal{D}(U_i) \leq M, \quad \forall i \in \mathbb{N} \text{ tal que } 1 \leq i \leq j.$$

Seja $g = f^m$ e G um levantamento de g para o $\mathbb{R}^2$. Para cada $1 \leq i \leq j$ escolha uma componente conexa $\widehat{U}_i$ de $\pi^{-1}(U_i)$.

Assim, existe $v_i \in \mathbb{Z}^2$ tal que $G(\widehat{U}_i) = \widehat{U}_i + v_i$ e então $G^n(\widehat{U}_i) = \widehat{U}_i + nv_i$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Como $diam(\widehat{U}_i) \leq M$ segue que se $z \in U_i$ e $\widehat{z} \in \widehat{U}_i$ então

$$\|G^n(\widehat{z}) - \widehat{z} - nv_i\| \leq M, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Definindo $\rho_z = \lim_{n\to\infty} \frac{G^n(\widehat{z}) - \widehat{z}}{n}$, segue que $\rho_z = v_i$ e tal vetor depende da escolha do levantamento G e de qual U_i contém z.

Sendo assim, a aplicação $U_1 \cup \cdots \cup U_j \to \mathbb{Z}^2$ definida por $z \mapsto \rho_z$ é localmente constante. Mas como, cada $U_i \cap [\gamma] \neq \emptyset$ e $[\gamma] \subset U_1 \cup \cdots \cup U_j$ segue que $U_1 \cup \cdots \cup U_j$ é conexo e, então ρ_z é constante em $U_1 \cup \cdots \cup U_j$.

Portanto $v_1 = v_2 = \cdots = v_j$, isto é, existe $v \in \mathbb{Z}^2$ tal que $G(\widehat{U}_i) = \widehat{U}_i + v$ para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq j$. Note agora que v só depende do levantamento escolhido, sendo assim podemos substituir G por um levantamento adequado de g, o qual $v = 0$.

Resumindo, podemos tomar um levantamento G de g para o $\mathbb{R}^2$ de modo que

$$G(\widehat{U}_i) = \widehat{U}_i, \quad \forall i \in \mathbb{N} \text{ tal que } 1 \leq i \leq j.$$

Assim se $z \in [\gamma]$ e $\widehat{z} \in \pi^{-1}(z)$ então

$$\|G^n(\widehat{z}) - \widehat{z}\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

Agora vamos mostrar que isso implica $g = f^m$ é anelar, contradizendo a hipótese de que f^k é não-anelar para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como γ é uma curva essencial, então é levantada para o $\mathbb{R}^2$ para um arco simples $\widehat{\gamma}$, que liga $\widehat{z}$ à $\widehat{z} + w$, para algum $w \in \mathbb{Z}^2_*$. Seja $\Gamma = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\widehat{\gamma} + kw)$.

Note que $P_{w^\perp}(\Gamma) \subset [a, b]$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ estão relacionados com o mínimo e o máximo que o arco $\widehat{\gamma}$ atinge em relação ao vetor $w^\perp$. E, ainda como $\Gamma \subset \pi^{-1}(\gamma)$, segue de (3.1) que $\|G^n(\widehat{z}) - \widehat{z}\| \leq M$, para todo $\widehat{z} \in \Gamma$.

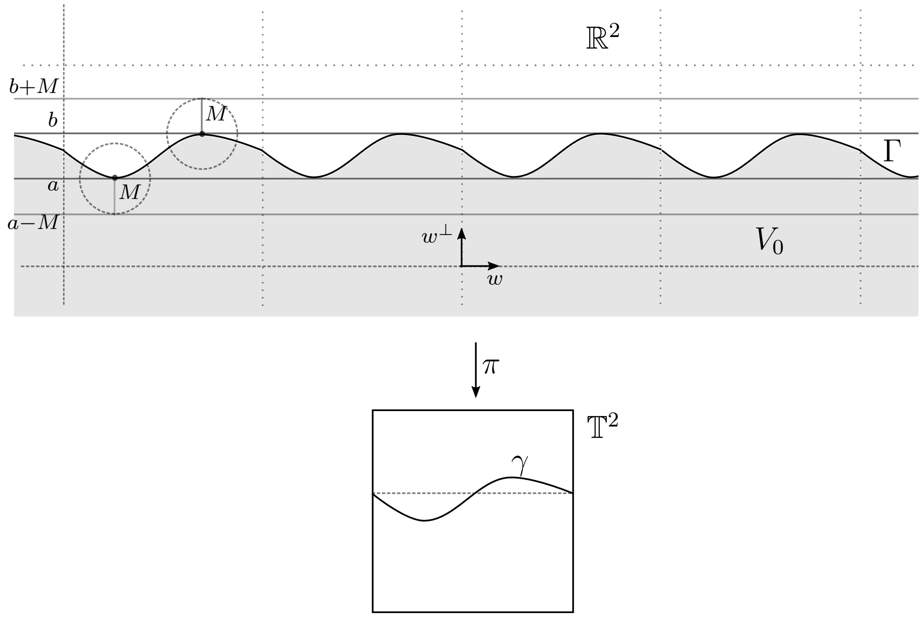

Figura 3.1: Componente conexa V_0.

Seja V_0 a componente conexa de $\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$ tal que $P_{w^\perp}^{-1}((-\infty, a)) \subset V_0$ e, consequentemente $V_0 \subset P_{w^\perp}^{-1}((-\infty, b))$. Logo

$$P_{w^\perp}^{-1}((-\infty, a - M)) \subset G^k(V_0) \subset P_{w^\perp}^{-1}((-\infty, b + M)), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, tomando $V = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} G^k(V_0)$ temos

$$P_{w^\perp}^{-1}((-\infty, a - M)) \subset V \subset P_{w^\perp}^{-1}((-\infty, b + M)).$$

Como V é G-invariante, de fato, $G(V) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} G^{k+1}(V_0) = V$, segue da Proposição 2.6 que g é anelar, chegando a contradição pretendida.

Portanto $Ine(f)$ é inessencial ou, equivalentemente, $Ess(f)$ é totalmente essencial. $\square$

Afirmação 3.3. *Para cada $z \in Ess(f)$, se U é uma vizinhança de z então o conjunto $V = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$ é conexo e totalmente essencial.*

Demonstração. Note que V é f-invariante e como z é ponto essencial segue que V é essencial, mas como f é não-errante e f^n é não-anelar para todo $n \in \mathbb{N}$ então pelo item (3) da Proposição 2.5 segue que V é totalmente essencial, isso implica que existe uma componente conexa de V que é totalmente essencial. Como f é homeomorfismo, segue que as componentes conexas de V são permutadas por f, logo as componentes conexas de V são duas-a-duas homeomorfas e uma vez que uma delas é totalmente essencial, todas as outras serão. Como dois conjuntos abertos e totalmente essenciais não são disjuntos, segue que V é conexo. E por argumento análogo concluímos que $Ess(f)$ é conexo. $\square$

Afirmação 3.4. *Se U é uma componente conexa de $Ine(f)$ então U é um disco topológico aberto periódico. Além disso, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $M_k > 0$ de modo que cada componente conexa U de $Ine(f)$ f^k-invariante satisfaz $\mathcal{D}(U) < M_k$.*

Demonstração. Como f é homeomorfismo não-errante e $Ine(f)$ é inessencial, aberto e f-invariante então se U é uma componente conexa de $Ine(f)$, U é inessencial, aberto e f^k-invariante para algum $k \in \mathbb{Z}$, pois como $Ine(f)$ é f-invariante, temos que $f^k(U) \subset Ine(f)$, qualquer que seja $k \in \mathbb{Z}$, e sendo f não-errante e U uma componente conexa do $Ine(f)$ segue que existe $k \in \mathbb{Z}$ que $f^k(U) = U$, isto é, U é f^k-invariante para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Note que $Fill(U) \subset Ine(f)$ herda as propriedades de U, isto é, $Fill(U)$ é aberto, inessencial e f^k-invariante para algum $k \in \mathbb{Z}$ e, além disso é simplesmente conexo e intersecta U, logo $U = Fill(U)$ e, portanto, U é, de fato, disco topológico aberto e periódico.

E ainda, como f^k é não-anelar e $Fix(f^k)$ é inessencial para todo $k \in \mathbb{N}$, então segue do Teorema B que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe uma constante $M_k > 0$ tal que cada componente conexa U de $Ine(f)$ que é f^k-invariante satisfaz $\mathcal{D}(U) < M_k$. $\square$

Assim as Afirmações 3.2 e 3.3 provam o que diz respeito ao conjunto $Ess(f)$ e as Afirmações 3.1 e 3.4 o que diz respeito ao conjunto $Ine(f)$. Sendo assim está provado o item (3A), concluindo a prova do Teorema A.

3.2 Aplicações

Os próximos resultados são consequências e aplicações de uma dinâmica estritamente toral. E, o primeiro deles está relacionado com o conceito de conjunto de rotação.

Corolário 3.1. *Se $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ não-errante e o conjunto de rotação $\rho(F)$ tem interior não-vazio então f é estritamente toral.*

Demonstração. De fato, se $\rho(F)$ tem interior não-vazio então f não é irrotacional, logo para todo $k \in \mathbb{N}$ f^k não é irrotacional. E se existisse $k \in \mathbb{N}$ de tal modo que f^k é anelar com direção v então segue da Observação 2.3 que $\rho(F) \subset \mathbb{R}v$ e, portanto, teria interior vazio. Logo, f^k é não-anelar para todo $k \in \mathbb{N}$. E, portanto, o Teorema A implica que f é estritamente toral. □

Corolário 3.2. *Seja $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ não-errante e estritamente toral, então $Ess(f)$ é externamente transitivo.*

Demonstração. De fato, sejam U_1 e U_2 abertos do $\mathbb{T}^2$ intersectando $Ess(f)$. A Afirmação 3.3 implica que $V_i = \bigcup_{n\geq 1} f^n(U_i),\ i = 1,2$ é totalmente essencial e f-invariante. Como dois conjuntos totalmente essenciais sempre se intersectam, segue que existem $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$f^{n_1}(U_1) \cap f^{n_2}(U_2) \neq \emptyset,$$

assim

$$f^{-n_1}(f^{n_1}(U_1) \cap f^{n_2}(U_2)) = U_1 \cap f^{n_2-n_1}(U_2) \neq \emptyset.$$

Logo, tomando $m = n_2 - n_1 \in \mathbb{Z}$ temos que $U_1 \cap f^m(U_2)$ e o resultado segue. □

Corolário 3.3. *Se $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ não-errante é estritamente toral, então $Ess(f^k) = Ess(f)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja f tal como nas hipóteses e tome arbitrariamente $k \in \mathbb{N}$.

A inclusão $Ess(f^k) \subset Ess(f)$ segue diretamente da definição. De fato, se $z \in Ess(f^k)$ então qualquer vizinhança U de z é tal que $V = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (f^k)^n(U)$ é essencial implicando, necessariamente, que $V' = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$ também é essencial, então $z \in Ess(f)$.

Mostrar a outra inclusão $Ess(f) \subset Ess(f^k)$ é equivalente a mostrar que $Ine(f^k) \subset Ine(f)$.

Seja $z \in Ine(f^k)$ então existe uma vizinhança U de z tal que $V = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^{kn}(U)$ é inessencial. Como $Ine(f^k)$ é aberto, segue que $V \subset Ine(f^k)$.

Mas para cada $i \in \mathbb{Z}$ temos

$$f^i(V) = f^i(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^{kn}(U)) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^{kn}(f^i(U)) \subset Ine(f^k),$$

isto é, $f^i(V)$ é f^k-órbita de $f^i(U)$ e, além disso, é inessencial para cada i.

Daí,

$$W = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} f^i(V) = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^{kn}(f^i(U)) \right) \subset Ine(f^k).$$

Mas como f é estritamente toral, f^k também é, então $Ine(f^k)$ é de fato inessencial, implicando que W é inessencial.

Sendo assim, existe uma vizinhança V de z tal que $W = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} f^i(V)$ é inessencial. Portanto $z \in Ine(f)$. □

O próximo resultado é uma caracterização para homeomorfismos do $\mathbb{T}^2$ que são transitivos (ver Definição 2.2 e Lema 2.2) homotópicos à identidade, não-errantes e estritamente torais.

Corolário 3.4. *Seja $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ não-errante e estritamente toral. Então f é transitiva se e, somente se, não houver discos topológicos periódicos limitados.*

Demonstração. Tome $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ não-errante e estritamente toral.

($\Rightarrow$) Seja f transitiva e suponha, por contradição, que exista um disco topológico limitado de período $n \geq 1$.

Sejam $U_1, U_2, \cdots, U_n$ as componentes conexas da órbita do disco, então $f^n(U_i) = U_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$. Note que como f é transitiva e $\bigcup_{i=1}^n U_i$ é aberto e f-invariante então

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} U_i} = \mathbb{T}^2. \tag{3.2}$$

Para cada $i = 1, \cdots, n$, tome componentes conexas $\widehat{U}_i \in \pi^{-1}(U_i)$ e seja $M > 0$ tal que $\mathcal{D}(U_i) \leq M$ para todo $i = 1, \cdots, n$.

Seja H um levantamento de f^n para o $\mathbb{R}^2$, assim existe $v \in \mathbb{Z}^2$ tal que $H(\widehat{U}_i) = \widehat{U}_i + v$, sendo assim tome $G = H - v$, daí

$$G(\widehat{U}_i) = \widehat{U}_i, \quad \forall i = 1, \cdots, n. \tag{3.3}$$

Sendo assim, dado $z \in \mathbb{T}^2$, segue de (3.2) que existe $i = 1, \cdots, n$ tal que $z \in \overline{U_i}$ e, então existe $\widehat{z} \in \pi^{-1}(z)$ pertencente ao $\overline{\widehat{U}_i}$.

Como G é um homeomorfismo temos de (3.3) que $G(\overline{\widehat{U}_i}) = \overline{\widehat{U}_i}$ e, portanto, a órbita de $\widehat{z} \in \overline{\widehat{U}_i}$ por G, $\left\{G^k(\widehat{z}); k \in \mathbb{Z}\right\}$ tem diâmetro limitado por M.

Analogamente , se $v \in \mathbb{Z}^2$, qualquer, então $\widehat{z} + v \in \left(\overline{\widehat{U}_i} + v\right)$ e a órbita de $\widehat{z} + v$ por G também tem diâmetro limitado por M. E assim, como $z \in \mathbb{T}^2$ é arbitrário, toda órbita por G tem diâmetro limitado por M.

Logo, como G é um levantamento de f^n, o fato anterior implica que f^n é anelar para algum $n \in \mathbb{N}$ contradizendo a hipótese de que f é estritamente toral.

($\Leftarrow$) Como f é estritamente toral então o Corolário 3.2 implica que $Ess(f)$ é externamente transitivo . Por hipótese não há discos topológicos periódicos limitados, isto é, $Ine(f) = \emptyset$. Logo $Ess(f) = \mathbb{T}^2$ então f é transitiva. □

Teorema 3.1. *Sejam $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ não-errante e estritamente toral e F um levantamento de f para o $\mathbb{R}^2$. Então*

(1) Se $\mu \in \mathcal{M}_e$ associada com $\rho_\mu(F) \notin \mathbb{Q}^2$ então μ é suportado em $Ess(f)$, isto é, $supp(\mu) \subset Ess(f)$.

(2) Qualquer vetor racional de $\rho(F)$ que é realizado por algum ponto periódico é também realizado por um ponto do $Ess(f)$.

Demonstração. (1) Mostrar que $supp(\mu) \subset Ess(f)$ equivale à mostrar que $Ine(f) \subset \mathbb{T}^2 \backslash supp(\mu)$. Sendo assim, como f é estritamente toral, se $z \in Ine(f)$ segue da Afirmação 3.1 que existe $U \subset \mathbb{T}^2$ de tal modo que U é disco topológico periódico limitado e $z \in U$. Assim, existe $k \geq 1$ tal que $f^k(U) = (U)$.

Se $\widehat{U} \in \pi^{-1}(U)$ então existe $v \in \mathbb{Z}^2$ tal que $F^k(\widehat{U}) = \widehat{U} + v$ implicando que

$$\|(F^k)^n(\widehat{z}) - \widehat{z} - nv\| \leq diam(\widehat{U}) < \infty, \quad \forall \widehat{z} \in \widehat{U}.$$

Sendo assim, $\rho_U(F^k) = \{v\}$, logo $\rho_U(F) = \left\{\frac{v}{k}\right\}$ e, portanto, $\rho(F, z) \in \mathbb{Q}^2$. Como μ-q.t.p $y \in \mathbb{T}^2$ é tal que $\rho_\mu(F) \notin \mathbb{Q}^2$ então $\mu(U) = 0$. Concluindo que $z \notin supp(\mu)$.

(2) *Ideia da prova:* Considere $z \in \mathbb{T}^2$ um ponto periódico que realiza $v = \left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}\right)$ com p_1, p_2, q inteiros mutualmente co-primos e $q > 0$, então a Definição 2.7 implica que $F^q(\widehat{z}) - \widehat{z} = (p_1, p_2)$ para qualquer $\widehat{z} \in \pi^{-1}(z)$.

Tome $g = f^q$ e $G = F^q - (p_1, p_2)$ levantamento de g para o $\mathbb{R}^2$. Desse modo, $G(\widehat{z}) = \widehat{z}$, $\widehat{z} \in \pi^{-1}(z)$. Ou seja, $Fix(G) \neq \emptyset$.

Sendo assim, resta mostrar que $\pi(Fix(G)) \cap Ess(f) \neq \emptyset$. Pois sendo $w \in \pi(Fix(G)) \cap Ess(f)$ então w é essencial e qualquer que seja $\widehat{w} \in \pi^{-1}(w)$ tem-se $\widehat{w} \in Fix(G)$ e o modo como G foi tomada implica que w realiza $v \in \mathbb{Q}^2$.

Mas pelo Corolário 3.3 segue então que é suficiente mostrar que $\pi(Fix(G)) \cap Ess(g) \neq \emptyset$. Para a demonstração completa ver [5] p. 355. $\square$

O próximo Teorema é um resultado encontrado em [26] que garante que, sob certas hipóteses, sendo f estritamente toral e $z \in Ess(f)$ então é possível encontrar uma iterada $n \in \mathbb{N}$ de tal modo que $f^n(U) \cup U$ já seja essencial para qualquer vizinhança U de z.

Teorema 3.2. *Sejam $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ não-errante e estritamente toral e D um domínio fundamental. Suponha que $diam(F^n(D)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Então para toda vizinhança U de $z \in Ess(f)$ tem-se que $f^n(U) \cup U$ é essencial para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. O caso em que U é essencial a prova é trivial. Então, seja U uma vizinhança de $z \in Ess(f)$ inessencial.

Seja $\widehat{U}$ uma componente conexa de $\pi^{-1}(U)$. Como f é estritamente toral e, ainda $z \in Ess(f)$ então $V = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} f^i(U)$ é totalmente essencial, invariante e conexo.

Sendo assim, existe curvas simples fechadas $\alpha_i : [0,1] \to \mathbb{T}^2$, $i = 1, 2$, não homotopicamente triviais, cujas imagens estão em V e geram o grupo fundamental do $\mathbb{T}^2$. Ver figura 3.2.

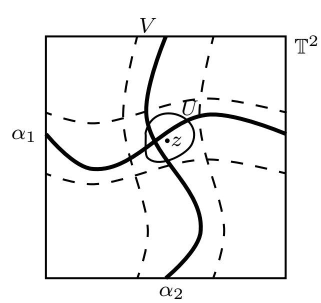

Figura 3.2: Curvas α_1 e α_2.

Note que as componentes conexas do complementar de $\pi^{-1}(\alpha_1 \cup \alpha_2)$ são uniformemente limitadas. E, note também que se $w \in (\alpha_1 \cup \alpha_2) \subset \mathbb{T}^2$ então existem $i_w \in \mathbb{N}$ tal que $w \in f^{i_w}(U)$.

Como f é homotópica à identidade segue que se $\widehat{w} \in \pi^{-1}(\alpha_1 \cup \alpha_2) \subset \mathbb{R}^2$ então existe $i_{\widehat{w}} \in \mathbb{N}$ e $v_{\widehat{w}} \in \mathbb{Z}^2$ tal que

$$\widehat{w} \in F^{i_{\widehat{w}}}(\widehat{U}) + v_{\widehat{w}} = F^{i_{\widehat{w}}}(\widehat{U} + v_{\widehat{w}}) = F^{i_{\widehat{w}}} \circ T_{v_{\widehat{w}}}(\widehat{U}).$$

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio fundamental e considere o conjunto conexo $D' \subset \mathbb{R}^2$ que é a união de D com as componentes conexas do complementar de $\pi^{-1}(\alpha_1 \cup \alpha_2)$ que intersectam D. Dessa forma D' é limitado e o bordo está contido em $\pi^{-1}(\alpha_1 \cup \alpha_2)$.

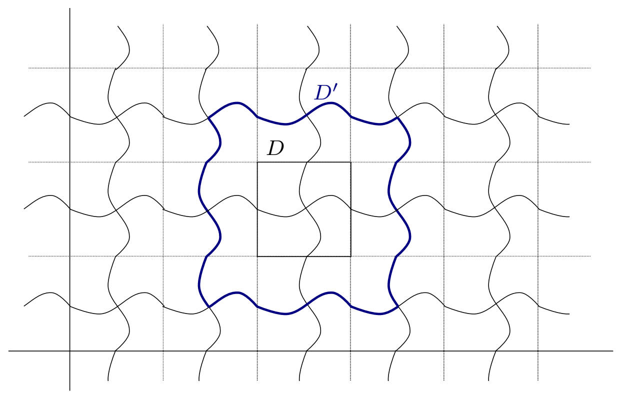

Figura 3.3: Conjunto D'

Assim, por compacidade, existem $i_j \in \mathbb{N}$ e $v_j \in \mathbb{Z}$ com $1 \leq j \leq k$ tais que

$$\partial D' \subset \bigcup_{j=1}^{k} F^{i_j}(\widehat{U}) + v_j,$$

onde $\bigcup_{j=1}^{k} F^{i_j}(\widehat{U}) + v_j$ é conexo.

Seja $R > diam(D')$. Por hipótese $diam(F^n(D)) \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$, assim existe $n \geq 1$ de tal modo que $diam(F^n(D)) > k(k+1)R$.

Como $F^n(\bigcup_{j=1}^{k} F^{i_j} \circ T_{v_j}(\widehat{U})) = \bigcup_{j=1}^{k} F^{i_j+n} \circ T_{v_j}(\widehat{U})$ então,

$$diam(\bigcup_{j=1}^{k} F^{i_j+n} \circ T_{v_j}(\widehat{U})) > k(k+1)R. \tag{3.4}$$

E assim para algum $1 \leq j_0 \leq k$ temos que $diam(F^{i_{j_0}+n} \circ T_{v_{j_0}}(\widehat{U})) > (k+1)R$. Pois se todos fossem menores ou iguais à $(k+1)R$ então não valeria (3.4).

Mas então $F^{i_{j_0}+n} \circ T_{v_{j_0}}(\widehat{U})$ intersecta pelo menos $k+2$ transladados inteiros de D', logo o mesmo intersecta pelo menos $k+1$ transladados inteiros de $\partial D'$. Veja a figura abaixo, que ilustra essas afirmações para o caso $k=2$.

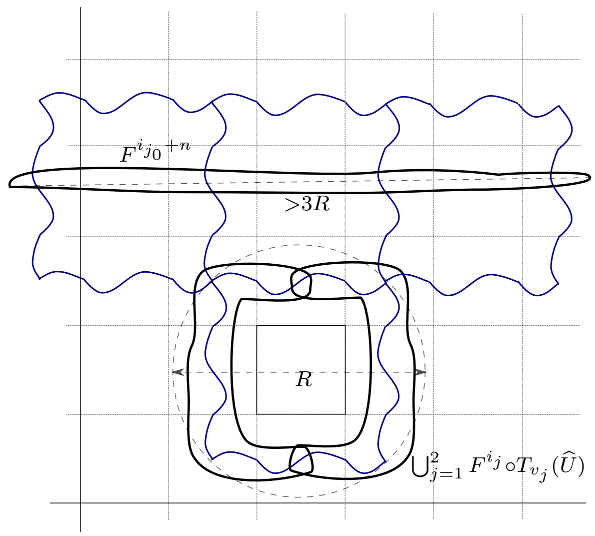

Figura 3.4: Ilustração para o caso $k=2$.

Sejam w_l com $1 \leq l \leq k+1$ vetores em $\mathbb{Z}^2$ tais que

$$F^{i_{j_0}+n} \circ T_{v_{j_0}}(\widehat{U}) \text{ intersecta } T_{w_l}(\partial D') \quad \text{para cada } l.$$

Como cada $T_{w_l}(\partial D')$ é coberto por k conjuntos $F^{i_j} \circ T_{v_j+w_l}(\widehat{U})$ então existem $w_{l_1} \neq w_{l_2}$ e algum $1 \leq j_1 \leq k$ de tal modo que $F^{i_{j_0}+n} \circ T_{v_{j_0}}(\widehat{U})$ intersecta ambos os conjuntos $F^{i_{j_1}} \circ T_{v_{j_1}+w_{l_1}}(\widehat{U})$ e $F^{i_{j_1}} \circ T_{v_{j_1}+w_{l_2}}(\widehat{U})$.

Isto é, para $r = 1, 2$ vale

$$F^{i_{j_0}+n}(\widehat{U} + v_{j_0}) \cap F^{i_{j_1}}(\widehat{U} + v_{j_1} + w_{l_r}) \neq \emptyset$$

Aplicando a iterada $F^{-i_{j_1}}$ temos,

$$F^{i_{j_0}-i_{j_1}+n}(\widehat{U} + v_{j_0}) \cap (\widehat{U} + v_{j_1} + w_{l_r}) \neq \emptyset$$

E, portanto,

$$F^{i_{j_0}-i_{j_1}+n}(\widehat{U} + v_{j_0} - v_{j_1}) \cap (\widehat{U} + w_{l_r}) \neq \emptyset.$$

Sendo assim, existe uma iterada $m := i_{j_0} - i_{j_1} + n$ de um transladado de $\widehat{U}$ que intersecta dois outros transladados diferentes de $\widehat{U}$. Em suma, $\pi^{-1}(f^m(U) \cup U)$ não pode ser projetado injetivamente no $\mathbb{T}^2$, então $f^m(U) \cup U$ é essencial. $\square$

Com esse resultado temos que se $\rho(F)$ tem interior não-vazio então para todo $z \in Ess(f)$ e U uma vizinhança arbitrária de z existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap U$ é essencial, pois $Ess(f)$ é externamente sensível nas condições iniciais (ver Teorema 4.3). E além disso, se f é um homeomorfismo do toro cuja nenhuma iterada de f é pseudo-rotação com desvio limitado então o Teorema 3.2 também aplica-se (ver o Lema 2.5 de [26]).

Capítulo 4

Ilhas elípticas e região caótica

Neste capítulos vamos apresentar os conceitos de ilhas elípticas e região caótica introduzidos por Jäger em [24]. E mostraremos que, com certas condições sobre f, tais conjuntos são equivalentes aos conjuntos $Ine(f)$ e $Ess(f)$, respectivamente.

4.1 Versão dinâmica

Vários trabalhos mostram que conjunto de rotação com interior não-vazio implica em diversas informações sobre a dinâmica, como por exemplo, grande quantidade de órbitas periódicas (ver [8]), medidas ergódicas que realizam todos os tipos de vetor de rotação (ver [16]) e, também, entropia positiva (ver [11]).

Jäger mostra, no trabalho *Elliptic Stars in a Chaotic Night*, que se $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ é não-errante e o conjunto de rotação tem interior não-vazio então a dinâmica pode ser decomposta em dois conjuntos como segue,

Teorema 4.1. *Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um levantamento de $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ não-errante. Suponha que $\rho(F)$ tem interior não vazio. Então para qualquer conjunto U aberto, conexo e limitado vale uma das afirmações,*

(1) $\rho_U(F)$ é reduzido à um único vetor racional e U está contido num disco topológico aberto $D \subset \mathbb{T}^2$ que é invariante para alguma iterada f^k e contém um ponto k-periódico;

(2) o fecho convexo de $\rho_U(F)$ tem interior não-vazio.

Dado $A \subset \mathbb{R}^2$, $Conv(A)$ denotará o fecho convexo de A e $int(A)$ denotará o interior de A.

Nesse sentido,

Definição 4.1. *Seja $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ tal que para qualquer levantamento F de f, $int(\rho(F)) \neq \emptyset$. Definimos a **região caótica** (rotacional) de f como o conjunto*

$$\mathcal{C}(f) := \left\{ z \in \mathbb{T}^2 : int(Conv(\rho_U(F))) \neq \emptyset \text{ para toda vizinhança } U \text{ de } z \right\}.$$

*E o conjunto das **ilhas elípticas** como*

$$\mathcal{E}(f) := \left\{ z \in \mathbb{T}^2 : \rho_U(F) = v \text{ tal que } v \in \mathbb{Q}^2 \text{ para alguma vizinhança } U \text{ de } z \right\}.$$

Para mostrarmos que $\mathcal{E}(f) = \mathbb{T}^2 \backslash \mathcal{C}(f)$ iremos demonstrar o seguinte resultado, o qual garante que se para alguma vizinhança U de $z \in \mathbb{T}^2$, $int(Conv(\rho_U(F))) = \emptyset$, isto é, $\rho_U(F)$ está contido numa reta, então $\rho_U(F)$ é um único vetor de rotação racional.

Teorema 4.2. *Se $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ é não-errante, $\rho(F)$ tem interior não-vazio e $\rho_U(F)$ está contido numa reta, onde U é aberto, conexo, recorrente e $\mathcal{D}(U) < \infty$, então $\rho_U(F)$ é um único vetor de rotação racional, isto é, $\rho_U(F) = \{v\}$ tal que $v \in \mathbb{Q}^2$.*

Primeiro apresentaremos algumas definições e resultados que são necessários para a demonstração do Teorema 4.2, para mais detalhes consulte [24].

Definição 4.2. *Dado $\lambda \neq 0$, $v \in \mathbb{R}^2_*$ e $a \leq b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ definimos (ver Figura 4.1):*

i. A reta passando pelo ponto λv na direção $v^\perp$ por $L_{\lambda,v} := \lambda v + \left\{ v^\perp \right\}$;

ii. O segmento de reta $L_{\lambda,v}[a,b] := \left\{ z \in L_{\lambda,v};\ a\langle z,v\rangle \leq \langle z,v^\perp\rangle \leq b\langle z,v\rangle \right\} \subset L_{\lambda,v}$;

iii. A região $C_v[a,b] := \left\{ z \in \mathbb{R}^2;\ a\langle z,v\rangle \leq \langle z,v^\perp\rangle \leq b\langle z,v\rangle \right\}$;

iv. $C_v[a,a] = \mathbb{R} \cdot (v + av^\perp)$ que é a reta que passa pela origem na direção $v + av^\perp$;

v. E a região $S_v[a,b] = \{z \in \mathbb{R}^2; \langle z,v\rangle \in [a,b]\}$.

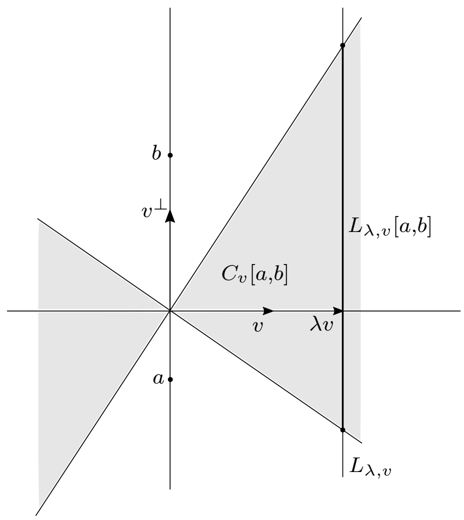

Figura 4.1: Ilustração da Definição 4.2

Seja $\varphi_n(z) = \dfrac{F^n(\widehat{z}) - \widehat{z}}{n}$, $n \geq 1$ e $\widehat{z} \in \pi^{-1}(z)$.

Lema 4.1. *Suponha F levantamento de $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ e $U \subseteq \mathbb{T}^2$. Então para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que $\varphi_n(U) \subset B_\epsilon(\rho_U(F))$ para todo $n \geq n_0$.*

Demonstração. Sabemos de 2.7 que

$$\rho_U(F) = \left\{\rho \in \mathbb{R}^2;\ \rho = \lim_{i\to\infty} \varphi_{n_i}(z_i),\ \widehat{z}_i \in \pi^{-1}(U),\ n_i \overset{i\to\infty}{\to} \infty\right\}.$$

Então dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos que

$$\varphi_n(z_i) \in B_\epsilon(\rho), \quad \text{para todo } \widehat{z}_i \in \pi^{-1}(U).$$

Mas como $\rho \in \rho_U(F)$ é arbitrário, segue que, $\varphi_n(U) \in B_\epsilon(\rho_U(F))$. □

Para os próximos resultados considere $g \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ e $U \subset \mathbb{T}^2$ aberto conexo e tome um levantamente G de g para o $\mathbb{R}^2$ tal que $G(\widehat{U}) \cap \widehat{U} \neq \emptyset$. E, ainda, assuma que $\lambda \neq 0$ e $v \in \mathbb{R}^2_*$.

Lema 4.2. *Suponha $\rho_{\widehat{U}}(G) = L_{\lambda,v}[a,b]$. Então todo ponto extremal de $\rho(G)$ pertence à $C_v[a,b]$.*

Lema 4.3. *Suponha* $\rho_{\widehat{U}}(G) = L_{\lambda,v}[a,b]$ *com* $a < b$. *Então existe uma constante* $c > 0$ *e* $N' \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\sup_{z\in\widehat{U}}\langle G^n(z), v^\perp\rangle - \inf_{z\in\widehat{U}}\langle G^n(z), v^\perp\rangle > cn,\ \forall n \geq N'.$$

Lema 4.4. *Suponha que* $\rho_{\widehat{U}}(G) = L_{\lambda,v}[a,b]$ *com* $a < b$. *Então* $\rho(G) = L_{\lambda,v}[a,b]$.

Demonstração. Pelo Lema 4.2 temos que todo ponto extremal de $\rho(G)$ pertence à $C_v[a,b]$. Logo basta mostrar que $\rho(G) \subset L_{\lambda,v}$.

Suponha, por contradição, que $\rho(G) \not\subset L_{\lambda,v}$. Então existe um ponto extremal $\rho \in \rho(G)$ tal que $\rho \notin L_{\lambda,v}$. Sem perda de generalidade, assuma que $\|v\| = 1$ e $\langle \rho, v\rangle > \lambda$.

Como ρ é ponto extremal de $\rho(G)$ então o item 2 da Proposição 2.3 implica que ρ é realizado por uma medida ergódica e então o item 1 da mesma Proposição implica que existe $z_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n - z_0}{n} = \rho,\ \text{onde } z_n := G^n(z_0).$$

Assim, por continuidade, dado $\eta > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\langle z_k - z_0, v\rangle > (1+\eta)k\lambda,\ \forall k \geq k_0. \tag{4.1}$$

Segue do Lema 4.1 e do fato de que $\rho_U(G) \subset L_{\lambda,v}$ temos que

$$\lim_{n\to\infty}\langle\frac{G^n(z) - z}{n}, v\rangle = \lambda \text{ uniformemente em } \widehat{U} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\langle\frac{G^n(z)}{n}, v\rangle = \lambda \text{ uniformemente em } \widehat{U}.$$

Assim dado $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$

$$\langle G^n(z), v\rangle \in [(1-\delta)\lambda n, (1+\delta)\lambda n] \quad \text{para todo } z \in \widehat{U} \text{ e } n \geq N \Rightarrow$$
$$\Rightarrow G^n(\widehat{U}) \subset S_v[(1-\delta)\lambda n, (1+\delta)\lambda n] \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Fixe $\delta > 0$ tal que

$$\delta\left(1 + \frac{15M}{c}\right) \geq \eta, \tag{4.2}$$

onde $M := \sup_{z\in\mathbb{R}^2}\|G(z) - z\|$ e c dado pelo Lema 4.3.

Assim, para esse $\delta > 0$, escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal modo que

$$G^n(\widehat{U}) \subset S_v[(1-\delta)\lambda n, (1+\delta)\lambda n], \quad \text{para todo } n \geq n_0 \quad \text{e} \quad \delta\lambda n_0 \geq 2. \tag{4.3}$$

Então escolha $k \geq k_0$ e $n \geq n_0$ tal que

$$4Mk + 2 \leq cn \leq 5Mk \Leftrightarrow \frac{4Mk+2}{c} \leq n \leq \frac{5Mk}{c}. \tag{4.4}$$

Pelo Lema 4.3 existe $\Gamma_0 \subset G^n(\widehat{U})$ com pontos extremais $\varsigma_1, \varsigma_2 \in G^n(\widehat{U})$ tais que $\langle \varsigma_2 - \varsigma_1, v^\perp \rangle > cn$ e $\Gamma_0 \subset S_{v^\perp}[\langle \varsigma_1, v^\perp \rangle, \langle \varsigma_2, v^\perp \rangle]$. Ver figura 4.2.

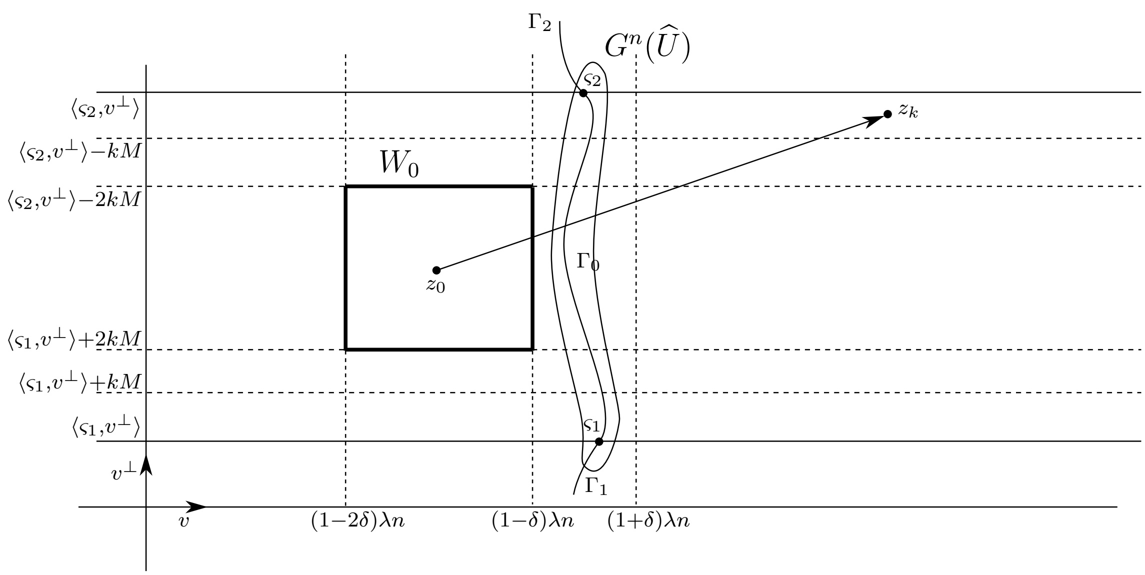

Figura 4.2: Ilustração do Lema 4.4.

Sejam Γ_1 e Γ_2 tal que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \approx \mathbb{R}$ e

$$(\Gamma_i \setminus \{\varsigma_i\}) \cap S_{v^\perp}[\langle \varsigma_1, v^\perp \rangle, \langle \varsigma_2, v^\perp \rangle] = \emptyset \tag{4.5}$$

e, ainda está orientada de ς_1 para ς_2.

Denote por W a componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ que está à esquerda de Γ. Assim

$$S_v(-\infty, (1-\delta)\lambda n] \cap S_{v^\perp}[\langle \varsigma_1, v^\perp \rangle, \langle \varsigma_2, v^\perp \rangle] \subset W,$$

pois $\Gamma_0 \subset G^n(\widehat{U})$ e valem (4.3) e (4.5).

Tome $W_0 := S_v[(1-2\delta)\lambda n, (1-\delta)\lambda n] \cap S_{v^\perp}[\langle \varsigma_1, v^\perp\rangle + 2kM, \langle \varsigma_2, v^\perp\rangle - 2kM]$. Note que (4.3) implica que

$$\lambda n - \delta\lambda n - \lambda n + 2\delta\lambda n = \delta\lambda n \geq 2$$

e (4.4), por sua vez, implica que

$$\langle \varsigma_2, v^\perp\rangle - 2kM - \langle \varsigma_1, v^\perp\rangle - 2kM = \langle \varsigma_2 - \varsigma_1, v^\perp\rangle - 4kM > cn - 4kM \geq 2.$$

Logo W_0 é um retângulo cujos lados têm tamanho maior ou igual que 2 (ver Figura 4.2). Assim W_0 contém um domínio fundamental do $\mathbb{T}^2$ e, passando z_0 à um transladado inteiro se necessário, podemos admitir que $z_0 \in W_0$. Isso implica que

$$\langle z_0, v\rangle \geq (1-2\delta)\lambda n. \tag{4.6}$$

Além disso,

$$z_0 \in S_{v^\perp}[\langle \varsigma_1, v^\perp\rangle + 2kM, \langle \varsigma_2, v^\perp\rangle - 2kM] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \langle z_0, v^\perp\rangle \in [\langle \varsigma_1, v^\perp\rangle + 2kM, \langle \varsigma_2, v^\perp\rangle - 2kM].$$

Mas $\|G(z_0) - z_0\| \leq M \Rightarrow z_k := G^k(z_0),\ \|z_k - z_0\| \leq kM$.

Então,

$$\langle z_k, v^\perp\rangle \in [\langle \varsigma_1, v^\perp\rangle + 2kM - kM, \langle \varsigma_2, v^\perp\rangle - 2kM + kM] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z_k \in S_{v^\perp}[\langle \varsigma_1, v^\perp\rangle + kM, \langle \varsigma_2, v^\perp\rangle - kM].$$

E, portanto, $z_k \in G^k(W) \cap S_{v^\perp}[\langle \varsigma_1, v^\perp\rangle + kM, \langle \varsigma_2, v^\perp\rangle - kM]$.

De (4.3) temos que $G^n + k(\widehat{U}) \subset S_v[(1-\delta)\lambda(n+k), (1+\delta)\lambda(n+k)]$ e daí

$$\langle G^k(\Gamma_0), v\rangle < (1+\delta)\lambda(n+k) \Rightarrow$$
$$G^k(W) \cap S_v[(1+\delta)\lambda(n+k), \infty) \cap S_{v^\perp}[\langle \varsigma_1, v^\perp\rangle + kM, \langle \varsigma_2, v^\perp\rangle - kM] = \emptyset.$$

E, assim,

$$z_k \in S_v(-\infty, (1+\delta)\lambda(n+k)] \tag{4.7}$$

E então de (4.6) e (4.7) temos que

$$
\begin{aligned}
\langle z_k - z_0, v\rangle &\leq (1+\delta)\lambda(n+k) - (1-2\delta)\lambda n = \\
&= (1+\delta)\lambda n + (1+\delta)\lambda k - \lambda n + 2\delta\lambda n = \\
&= \lambda n + \delta\lambda n + (1+\delta)\lambda k - \lambda n + 2\delta\lambda n = \\
&= 3\delta\lambda n + (1+\delta)\lambda k \leq \\
&\leq \frac{15M}{c}\delta\lambda k + (1+\delta)\lambda k = \\
&= \left[\left(\frac{15M}{c}+1\right)\delta + 1\right]\lambda k \leq \\
&\leq (\eta+1)\lambda k.
\end{aligned}
$$

Contradizendo (4.1). Logo $\rho(G) \subset L_{\lambda,v}$. Concluindo a prova do Lema 4.4. $\square$

Lema 4.5. *Suponha $\rho_{\widehat{U}}(G) \subset \mathbb{R}\cdot v$ é um segmento de reta de comprimento positivo. Então $\rho(G) \subset \mathbb{R}\cdot v$.*

Note que a reta $\mathbb{R}\cdot v$ contém a origem, o que difere do Lema 4.4, pois sendo $\lambda \neq 0$ a reta $L_{\lambda,v}$ não contém a origem. A demonstração, porém, segue o mesmo raciocínio da anterior.

Lema 4.6. *Suponha que F é um levantamento de $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ e que $U \subsetneq \mathbb{T}^2$ é aberto, conexo, limitado e recorrente. Além disso, assuma que $\rho_U(F) = \mathcal{S} \subset \mathbb{R}\cdot v$ é um segmento de reta com $0 \notin \mathcal{S}$ e v, v' são linearmente independentes. Seja $\widehat{U}$ uma componente conexa de $\pi^{-1}(U)$. Então existem $p \in \mathbb{N}$ e $w \in \mathbb{Z}^2$ linearmente independentes de v' tais que*

$$(F^P(\widehat{U}) - w) \cap \widehat{U} \neq \emptyset \tag{4.8}$$

Em particular, se v não é múltiplo escalar de um vetor inteiro então existe infinitos pares (p_i, w_i) que satisfazem (4.8).

De posse dos resultados anteriores, vamos à demonstração do Teorema 4.2. Isto é, vamos mostrar que sob as hipóteses de que $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ é não-errante, $\rho(F)$ tem interior não-vazio e $\rho_U(F)$ está contido numa reta, onde U é aberto, conexo, recorrente e $\mathcal{D}(U) < \infty$, então $\rho_U(F) = \{v\}$ tal que $v \in \mathbb{Q}^2$.

Demonstração do Teorema 4.2. Se $\rho_U(F)$ é um único vetor racional não há o que mostrar.

Se $\rho_U(F)$ não é reduzido à um único vetor racional vamos mostrar que $\rho(F)$ está contido numa reta, contradizendo a hipótese de que $\rho(F)$ tem interior não-vazio.

Afirmação 4.1. *Se $\mathcal{S}$ é um segmento de reta de comprimento positivo sem pontos racionais e $\rho_U(F) = \mathcal{S}$ então $\rho(F) = \mathcal{S}$.*

Demonstração. Sejam f, F, U como no enunciado do Teorema 4.2 e suponha $\rho_U(F) = \mathcal{S}$ e seja $\widehat{U}$ uma componente conexa de $\pi^{-1}(U)$.

(1) Suponha que a reta que contém $\mathcal{S}$ não contém pontos racionais.

Como $U \subseteq \mathbb{T}^2$ é recorrente e, portanto não-errante, existe $p \in \mathbb{N}$ e $w \in \mathbb{Z}^2$ tais que $(F^p(\widehat{U}) - w) \cap \widehat{U} \neq \emptyset$. Seja $G := F^p - w$ então

$$\rho_{\widehat{U}}(G) = p\rho_{\widehat{U}}(F) - w = p\mathcal{S} - w = L_{\lambda,v}[a,b], \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^2_* \text{ e } a < b.$$

E ainda, a reta $L_{\lambda,v}$ não contém nenhum ponto racional pois é transladado inteiro da reta que contém $p\mathcal{S}$ e $p \in \mathbb{N}$. E, portanto, $\lambda \neq 0$, pois caso contrário $0 \in L_{\lambda,v}$.

Tomando $g = f^p$ temos que G e $\widehat{U}$ satisfazem a hipótese do Lema 4.4. E então $\rho(G) = L_{\lambda,v}[a,b] = p\mathcal{S} - w$ e, portanto,

$$\rho(G) = \rho(F^p - w) = p\rho(F) - w \Rightarrow \rho(F) = \frac{\rho(G) + w}{p} = \frac{(p\mathcal{S} - w) + w}{p} = \mathcal{S}.$$

(2) Resta considerar agora o caso em que a reta que contém $\mathcal{S}$ tem inclinação irracional e contém um único vetor racional, pois uma reta com inclinação irracional não pode conter mais do que um ponto racional.

Para esse caso, se $\lambda \neq 0$ então a prova é análoga à anterior.

Se $\lambda = 0$ então temos que $L_{0,v} = \mathbb{R} \cdot v^\perp$ passa por $(0,0) =: 0$. Como no item (1), sejam $p \in \mathbb{N}$ e $w \in \mathbb{Z}^2$ tais que $(F^p(\widehat{U}) - w) \cap \widehat{U} \neq \emptyset$ e $G := F^p - w$. Então $\rho_{\widehat{U}}(G) = p\rho_{\widehat{U}}(F) - w \subset L_{0,v}$.

Por hipótese, $0 \notin \mathcal{S}$ e como w e $v^\perp$ são linearmente independentes, uma vez que $w \in \mathbb{Z}^2$ e o único racional que $\mathbb{R} \cdot v^\perp$ contém é o 0, então o Lema 4.6 garante a existencia de $p' \in \mathbb{N}$ e $w' \in \mathbb{Z}^2$ tal que w e w' são linearmente independentes e $(F^{p'}(\widehat{U}) - w') \cap \widehat{U} \neq \emptyset$. Tomando

$G' := F^{p'} - w'$ temos

$$\rho_{\widehat{U}}(G') = p'\rho_{\widehat{U}}(F) - w' = \frac{p'}{p}\rho_{\widehat{U}}(G) + \frac{p'}{p}w - w' \subset L_{0,v} + \frac{p'}{p}w - w'.$$

Como w e w' são linearmente independentes então $\frac{p'}{p}w - w' \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}$, logo não pertencem à $L_{0,v}$. Portanto $\rho_{\widehat{U}}(G') \subset L_{\lambda',v}$ para algum $\lambda' \neq 0$. E o restante da demonstração é análoga ao item (1).

Portando podemos concluir que $\rho(F) = \mathcal{S}$, onde $\mathcal{S}$ é um segmento de reta de comprimento positivo que não contém pontos racionais. □

Afirmação 4.2. *Se $\rho_U(F) = \{\rho\}$ com $\rho = (\rho_1, \rho_2)$; $\rho_1, \rho_2, \rho_2/\rho_1 \notin \mathbb{Q}^2$, isto é, ρ é (totalmente) irracional então $\rho(F) = \{\rho\}$.*

Demonstração. Sejam F, f, U como no enunciado. Como na demonstração da Afirmação 4.1 existem $p \in \mathbb{N}$ e $w \in \mathbb{Z}^2$ e $G := F^p - w$ tal que $G(U) \cap U \neq \emptyset$.

Então $\rho_{\widehat{U}}(G) = p\rho_{\widehat{U}}(F) - w = \{p\rho - w\} = L_{1,p\rho-w}[0,0]$.

Pelo Lema 4.2 todo ponto extremal de $\rho(G)$ está contido em $C_{p\rho-w}[0,0] = \mathbb{R}\cdot(p\rho - w)$ e isso implica que $\rho(G) \subset \mathbb{R}\cdot(p\rho - w) = \mathbb{R}\cdot\left(\rho - \frac{w}{p}\right)$.

$$\rho(G) = p\rho(F) - w \Rightarrow \rho(F) = \frac{\rho(G) + w}{p} \subset \mathbb{R}\cdot\left(\rho - \frac{w}{p}\right) + \frac{w}{p} =: A_1. \tag{4.9}$$

Pelo Lema 4.6 podemos repetir esse argumento para outro par $p' \in \mathbb{N}$ e $w' \in \mathbb{Z}^2$ com w e w' linearmente independentes (uma vez que w e ρ são linearmente independentes pois $w \in \mathbb{Z}^2$ e o único vetor racional que $\mathbb{R}\cdot\rho$ contém é o $(0,0)$) e $G'(U) \cap U \neq \emptyset$ onde $G' := F^{p'} - w'$. Daí

$$\rho(F) \subset \mathbb{R}\cdot\left(\rho - \frac{w'}{p'}\right) + \frac{w'}{p'} =: A_2. \tag{4.10}$$

Como a inclinação da reta ρ é irracional e os vetores $\frac{w}{p}$ e $\frac{w'}{p'}$ são racionais e linearmente independentes então $\rho - \frac{w}{p}$ e $\rho - \frac{w'}{p'}$ são linearmente independentes.

Segue de (4.9) e (4.10) que $\rho(F) \subset A_1 \cap A_2 = \{\rho\}$. Portanto $\rho(F) = \{\rho\}$. □

Note que a Afirmação 4.1 nos mostra que se $\rho_U(F) = \mathcal{S}$ é um segmento de reta de comprimento positivo sem pontos racionais então $\rho(F) = \mathcal{S}$, isto é, $\rho(F)$ tem interior não-vazio. E a Afirmação 4.2 que se $\rho_U(F) = \{\rho\}$ então $\rho(F) = \{\rho\}$ e, portanto, $\rho(F)$ tem interior não-vazio.

Para concluí-lo, resta mostrar que os casos em que ou $\rho_U(F)$ é um segmento de reta de comprimento positivo e que contém um vetor racional ou $\rho_U(F)$ é reduzido à um vetor semi-racional ρ, também implicam que $\rho(F)$ tem interior não-vazio.

A prova desse último é análoga à Afirmação 4.2, exceto pela parte na qual garantimos a existência de $w' \in \mathbb{Z}^2$ que é linearmente independente de $w \in \mathbb{Z}^2$ para concluirmos que $\rho(F)$ é um único vetor. Sendo assim, garantimos que $\rho(F)$ está contido numa reta que contém o ponto ρ, isto é, tem interior vazio.

Para o outro caso suponha que $\rho_U(F) \subset \mathbb{R} \cdot v$ é um segmento de reta de comprimento positivo e $\rho_U(F)$ contém um ponto racional. Passando à uma iterada se necessário, podemos assumir sem perda de generalidade que $0 \in \rho_U(F)$. Novamente, existem $p \in \mathbb{N}$ e $w \in \mathbb{Z}^2$ tal que $G(\widehat{U}) \cap \widehat{U} \neq \emptyset$ onde $G := F^p - w$. Nós temos que

$$\rho_{\widehat{U}}(G) \subset \mathbb{R} \cdot v - w = L_{\lambda, v^\perp}, \text{ tal que } \lambda = \langle w, v^\perp \rangle.$$

Se $\lambda \neq 0$, então o Lema 4.4 implica que $\rho(G) = \rho_U(G)$ e então $\rho(F) = \rho_U(F)$. Se $\lambda = 0$ então $\rho_{\widehat{U}}(G) \subset \mathbb{R} \cdot v$ e pelo Lema 4.5, $\rho(G) \subset \mathbb{R} \cdot v$, daí $\rho(F) = \frac{\rho(G)}{p} \subset \mathbb{R} \cdot v$.

Concluindo a demonstração do Teorema 4.2. $\square$

Observação 4.1. *Segue da Definição 4.1 e do Teorema 4.2 que se $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ não-errante e $int(\rho(F)) \neq \emptyset$ então $\mathcal{E}(f) = \mathbb{T}^2 \backslash \mathcal{C}(f)$.*

4.2 Generalização das ilhas elípticas e região caótica

O próximo Teorema é o que garante, no caso em que $\rho(F)$ tem interior não-vazio, a equivalência entre o conceito de dinâmica estritamente toral e os conceitos de ilhas elípticas e região caótica (rotacional). Além disso, tal resultado generaliza o Teorema 4.1, pois mostra que, de fato, os discos topológicos periódicos são limitados.

Teorema 4.3. *Seja $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ não-errante, F um levantamento de f para o $\mathbb{R}^2$ e $\rho(F)$ tem interior não-vazio. Então*

(1) Para todo $z \in Ess(f)$ e para toda vizinhança $U \subset \mathbb{T}^2$ de z, $Conv(\rho(F,U)) = \rho(F)$;

(2) $\mathcal{C}(f) = Ess(f)$ e $\mathcal{E}(f) = Ine(f)$;

(3) $Ess(f)$ é externamente sensível nas condições iniciais;

Sejam $U \subset \mathbb{T}^2$, $\rho(F)$ e $\rho_U(F)$ tais como nas Definição 2.4. Note que $\rho_U(F) \subset \rho(F)$, mas $\rho_U(F)$ não é, necessariamente, convexo. Sendo assim, vamos considerar o $Conv(\rho_U(F))$ que é o fecho convexo de $\rho_U(F)$.

Demonstração. (1) Vamos mostrar que para todo $z \in Ess(f)$ e qualquer vizinhança U de z, $Conv(\rho_U(F)) = \rho(F)$.

Primeiramente note que $\rho_U(F) \subseteq \rho(F) \Rightarrow Conv(\rho_U(F)) \subseteq \rho(F)$. Resta mostrar que $\rho(F) \subseteq Conv(\rho_U(F))$.

Como $\rho_U(F)$ é compacto então então $Conv(\rho_U(F))$ é convexo e compacto, assim como $\rho(F)$. E como $\rho_U(F) \subset \rho(F)$ temos que $Conv(\rho_U(F) \subset \rho(F)$ e então existe $w \in \mathbb{R}^2_*$ de tal modo que

$$sup(P_w(\rho_U(F))) < sup(P_w(\rho(F))) \tag{4.11}$$

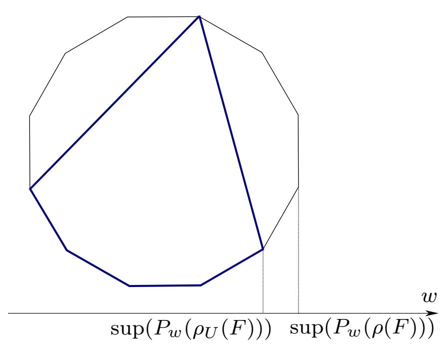

Figura 4.3: Ilustração da desigualdade 4.11

Note que $P_w(\rho_U(F)) \subseteq P_w(\rho(F))$.

Seja $z \in Ess(f)$ e suponha por contradição que

$$\rho(F) \not\subset Conv(\rho_U(F)), \text{ para alguma vizinhança } U \text{ de } z. \tag{4.12}$$

Note que existe um ponto extremal $v \in \rho(F)$ tal que $P_w(v) = sup(P_w(\rho_U(F)))$, isso implica que $v \notin Conv(\rho_U(F))$. Mas como v é ponto extremal de $\rho(F)$ então existe $\widehat{x} \in \mathbb{R}^2$

tal que
$$\frac{F^n(\widehat{x}) - \widehat{x}}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} v.$$

Como $v \notin Conv(\rho_U(F))$ então $\pi(\widehat{x}) \notin f^n(U)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Além disso, como $z \in Ess(f)$ e U é vizinhança de z então $V = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$ é aberto, invariante, totalmente essencial e conexo. Assim $\pi(\widehat{x}) \notin V$. Logo $\pi(\widehat{x}) \in \mathbb{T}^2\backslash V$ que é fechado e inessencial.

Então existe um disco topológico, D_0, periódico e limitado tal que $\pi(\widehat{x}) \in D_0$. Seja D tal que $D_0 \subseteq D$ e $\partial D \subset V$. Como ∂D é fechado e limitado então ∂D é compacto, logo existe $N \geq 1$ tal que $\partial D \subset \bigcup_{n=-N}^{N} f^n(U)$.

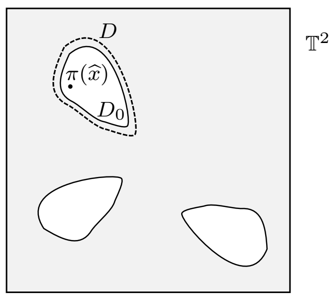

Figura 4.4: Disco topológico periódico $D_0 \subset D$, onde $\partial D \subset V$.

Seja agora, $\widehat{D}$ a componente conexa de $\pi^{-1}(D)$ que contém $\widehat{x}$.

Temos que $\frac{P_w(F^n(\widehat{x})-\widehat{x})}{n} \overset{n}{\to} P_w(v)$ e, se para cada $n \geq 1$ escolhermos $\widehat{x}_n \in \partial\widehat{D}$ então $P_w(F^n(\widehat{x}_n) - \widehat{x})$ é maximal, isto é, $\frac{P_w(F^n(\widehat{x}_n)-\widehat{x})}{n} \geq \frac{P_w(F^n(\widehat{x})-\widehat{x})}{n}$. Sendo assim,
$$\frac{P_w(F^n(\widehat{x}_n) - \widehat{x}_n + \widehat{x}_n - \widehat{x})}{n} = \frac{P_w(F^n(\widehat{x}_n) - \widehat{x}_n)}{n} + \frac{P_w(\widehat{x}_n - \widehat{x})}{n} \geq \frac{P_w(F^n(\widehat{x}) - \widehat{x})}{n}.$$

E ainda, como $|P_w(\widehat{x}_n - \widehat{x})| < diam(\widehat{D})$, temos que
$$\frac{P_w(F^n(\widehat{x}_n) - \widehat{x}_n)}{n} \geq \frac{P_w(F^n(\widehat{x}) - \widehat{x})}{n} - \frac{P_w(\widehat{x}_n - x)}{n} \overset{n}{\to} P_w(v). \tag{4.13}$$

Seja $K \in \mathbb{R}$ tal que $\|F(y) - y\| \leq K$, para todo $y \in \mathbb{R}^2$, esse K existe pois $F - Id$ é uniformemente limitada. E, assim $\|F^n(y) - y\| \leq nK$, para todo $y \in \mathbb{R}^2$.

Logo, $F^n(\widehat{x}_n) - \widehat{x}_n$ é limitada e, então, $\dfrac{F^n(\widehat{x}_n) - \widehat{x}_n}{n}$ admite subsequência convergente,
$$\lim_{n_i\to\infty} \frac{F^{n_i}(\widehat{x}_{n_i}) - \widehat{x}_{n_i}}{n_i} = v', \text{ onde } \|v'\| \leq K. \tag{4.14}$$

Sendo assim, segue de (4.13) que $P_w(v') \geq P_w(v)$. E como $P_w(v) = sup(P_w(\rho_U(F)))$ então $P_w(v') \leq P_w(v)$. Logo $P_w(v) = P_w(v')$.

Note que $\pi(\widehat{x}_{n_i}) \in \partial D$ e como $\partial D \subset \bigcup_{i=-N}^{N} f^i(U)$ existem r_i tal que $-N \leq r_i \leq N$ e $f^{r_i}(\pi(\widehat{x}_{n_i})) \in U$, de modo que se deixarmos $\widehat{y}_i = F^{r_i}(\widehat{x}_{n_i})$ então $\widehat{y}_i \in \pi^{-1}(U)$.

Assim, se $m_i = n_i - r_i$

$$\begin{aligned}
\frac{F^{m_i}(\widehat{y}_i) - \widehat{y}_i}{m_i} &= \frac{F^{n_i - r_i}(\widehat{y}_i) - \widehat{y}_i}{n_i - r_i} \\
&= \frac{F^{n_i}(F^{-r_i}(F^{r_i}(\widehat{z}_{n_i}))) - F^{r_i}(\widehat{z}_{n_i})}{n_i - r_i} \\
&= \frac{F^{n_i}(\widehat{z}_{n_i}) - F^{r_i}(\widehat{z}_{n_i})}{n_i - r_i} \\
&= \frac{F^{n_i}(\widehat{z}_{n_i}) - \widehat{z}_{n_i}}{n_i - r_i} - \frac{F^{r_i}(\widehat{z}_{n_i}) - \widehat{z}_{n_i}}{n_i - r_i} \\
&= \frac{n_i}{n_i - r_i}\left(\frac{F^{n_i}(\widehat{z}_{n_i}) - \widehat{z}_{n_i}}{n_i} - \frac{F^{r_i}(\widehat{z}_{n_i}) - \widehat{z}_{n_i}}{n_i}\right) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} v'.
\end{aligned}$$

Pois,

$$n_i \overset{i}{\to} \infty, \quad |r_i| < N \quad \text{e} \quad \|F^{r_i}(\widehat{z}_{n_i}) - \widehat{z}_{n_i}\| \leq r_i K < NK, \text{ para todo } n_i.$$

Portanto $v' \in \rho_U(F)$ isto é, $sup(P_w(\rho_U(F))) \geq P_w(v') = P_w(v) = sup(P_w(\rho(F)))$. Contradição com (4.11). Logo $\rho(f) \subset Conv(\rho_U(F))$. Concluindo que $Conv(\rho_U(F)) = \rho(f)$.

(2) $Ess(f) = \mathcal{C}(f)$.

De fato, se $z \in Ess(f)$ então segue da hipótese e do item (1) que $int(Conv(\rho_U(F))) = int(\rho(F)) \neq \emptyset$. Logo $z \in \mathcal{C}(f)$.

Para mostrar a outra inclusão é suficiente mostrar que $Ine(f) \subset \mathcal{E}(f)$, pois

$$\mathcal{C}(f) \subset Ess(f) \Leftrightarrow \mathbb{T}^2 \backslash \mathcal{E}(f) \subset \mathbb{T}^2 \backslash Ine(f) \Leftrightarrow Ine(f) \subset \mathcal{E}(f).$$

Sendo assim, tome $z \in Ine(f)$, segue da Afirmação 3.1 que $z \in U$ onde U é um disco topológico periódico limitado. Assim, existe $k \geq 1$ tal que $f^k(U) = (U)$.

Se $\widehat{U} \in \pi^{-1}(U)$ então existe $v \in \mathbb{Z}^2$ tal que $F^k(\widehat{U}) = \widehat{U} + v$ implicando que

$$\|(F^k)^n(\widehat{x}) - \widehat{x} - nv\| \leq diam(\widehat{U}), \ \forall \widehat{x} \in \widehat{U}.$$

Sendo assim, $\rho_U(F^k) = \{v\}$, logo $\rho_U(F) = \left\{\frac{v}{k}\right\}$, ou seja, $\#\rho_U(F) = 1$. E portanto, $z \in \mathcal{E}(f)$.

Como $\rho(F)$ tem interior não-vazio, a Observação 4.1 e a igualdade anterior implicam que $Ine(f) = \mathbb{T}^2 \backslash Ess(f) = \mathbb{T}^2 \backslash \mathcal{C}(f) = \mathcal{E}(f)$.

(3) O fato de $Ess(f)$ ser externamente sensível nas condições iniciais segue diretamente do item (1). Com efeito, tome $z \in Ess(f)$ então o item (1) garante que dado uma vizinhança U arbitrária de z, $Conv(\rho_U(F)) = \rho(F)$. Por hipótese, $\rho(F)$ tem interior não-vazio, então segue que $\rho_U(F)$ contém, pelo menos, dois pontos extremais u, v de $\rho(F)$ distintos, que também são pontos extremais de $\rho_U(F)$.

Sendo assim a Proposição 2.3 restrita à U implica que existem $\mu_u \neq \mu_v$ medidas ergódicas tais que $\rho_{\mu_u}(F) = u$ e $\rho_{\mu_v}(F) = v$. E, portanto, existem $z_u, z_v \in U$ tais que para qualquer $\widehat{z}_u \in \pi^{-1}(z_u)$ e $\widehat{z}_v \in \pi^{-1}(z_v)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(\widehat{z}_u) - \widehat{z}_u}{n} = u \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(\widehat{z}_v) - \widehat{z}_v}{n} = v. \tag{4.15}$$

Mas $u \neq v$ implica que $|u - v| = c > 0$, então segue de (4.15) que para n suficientemente grande existe c_n tal que

$$\left| \frac{F^n(\widehat{z}_u) - \widehat{z}_u}{n} - \frac{F^n(\widehat{z}_v) - \widehat{z}_v}{n} \right| = c_n \quad \text{e} \quad c_n \xrightarrow{n} c \neq 0.$$

Logo, $|F^n(\widehat{z}_u) - F^n(\widehat{z}_v)| = nc_n + \widehat{z}_u - \widehat{z}_v \quad \text{e} \quad c_n \xrightarrow{n} c \neq 0$.

E, assim, tomando o limite quando $n \to \infty$ em ambos os lados da equação anterior temos que $diam(F^n(\widehat{U})) \xrightarrow{n} \infty$, pois $\widehat{z}_u, \widehat{z}_v \in \widehat{U} \subset \pi^{-1}(U)$.

Portanto, $\mathcal{D}(f^n(U)) \xrightarrow{n} \infty$. $\square$

Capítulo 5

Limitação dos discos periódicos

Neste capítulo, primeiramente, introduziremos os conceitos e resultados fundamentais para a demonstração do Teorema B. Contudo, os resultados que ficarem sem demonstração podem ser consultados em [5]. E, por fim, demonstraremos o Teorema B o qual garante, sobre certas condições, a existência de uma cota superior para os discos periódicos f-invariantes.

5.1 Folheações Brouwer tipo-gradiente

Seja S uma superfície orientada qualquer.

Definição 5.1 (Folheação Orientada com Singularidades). *Uma folheação topológica orientada com singularidades $\mathcal{F}$ de S é a união de um conjunto fechado $Sing(\mathcal{F})$, chamado conjunto de singularidades de $\mathcal{F}$, com uma folheação $\mathcal{F}'$ topológica orientada de $S \backslash Sing(\mathcal{F})$. Os elementos de $\mathcal{F}'$ são variedades unidimensionais orientadas que chamaremos de folhas regulares de $\mathcal{F}$.*

Definição 5.2. *Um fluxo topológico é uma aplicação contínua $\phi : \mathbb{R} \times S \to S$ que satisfaz:*

(1) $\phi(0, z) = z$;

(2) $\phi(t + s, z) = \phi(t, \phi(s, z))$ $t, s \in \mathbb{R}$.

Em [12] e [13] foi mostrado que qualquer folheação $\mathcal{F}$ é o conjunto de órbitas orientadas de algum fluxo topológico $\phi : \mathbb{R} \times S \to S$, onde as singularidades de $\mathcal{F}$ coincidem com o conjunto de pontos fixos de ϕ.

Dessa forma, os conjuntos α-limite e ω-limite das folhas de $\mathcal{F}$ podem ser definidos da maneira usual, isto é,

Definição 5.3. *Seja Γ uma folha de $\mathcal{F}$ e z_0 um ponto qualquer de Γ definimos*

(1) $\omega(\Gamma) = \{z \in S;\ \exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ com } t_n \to \infty \textit{ e } \phi(z_0, t_n) \to z \textit{ quando } n \to \infty\}$;

(2) $\alpha(\Gamma) = \{z \in S;\ \exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ com } t_n \to -\infty \textit{ e } \phi(z_0, t_n) \to z \textit{ quando } n \to \infty\}$.

Em palavras o ω-limite de Γ é o conjunto dos pontos de acumulação da folha Γ para tempo futuro e α-limite de Γ é o conjunto dos pontos de acumulação da folha Γ para tempo passado.

Definição 5.4. *Um arco γ é positivamente transverso à uma folheação orientada com singularidades $\mathcal{F}$ se para cada $t_0 \in [0,1]$ existir um homeomorfismo g levando uma vizinhança U de $\gamma(t_o)$ à um aberto $V \subset \mathbb{R}^2$ tal que g aplica a folheação $\mathcal{F}|_U$ à uma folheação de linhas verticais orientadas para cima de tal modo que $t \mapsto g(\gamma(t))$ está crescendo na primeira coordenada na vizinhança de t_0.*

Em palavras, $[\gamma]$ não contém qualquer singularidade e cada interseção de $[\gamma]$ com uma folha de $\mathcal{F}$ é topologicamente transversa da esquerda pra direita.

Definição 5.5. *Duas aplicações contínuas $g, f : S \to S$ dizem-se homotópicas quando existe uma aplicação contínua*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{H}: & S \times [0,1] & \to & S \\ & (z,t) & \mapsto & \mathcal{H}(z,t) =: f_t(z) \end{array}$$

tal que $\mathcal{H}(z,0) = f_0(z) = g(z)$ e $\mathcal{H}(z,1) = f_1(z) = f(z)$ para todo $z \in S$. Dizemos que a aplicação $\mathcal{H}$ é uma homotopia entre f e g.

A homotopia é pensada como um processo de deformação contínua da aplicação f, que se dá no transcorrer do parâmetro t, que pode ser imaginado como o tempo. Sendo assim, no instante $t = 0$ temos f, para $t = 1$ temos g. Nos instantes $0 < t < 1$ as aplicações H_t fornecem os estágios intermediários da deformação (ver [7]).

Definição 5.6. *Uma isotopia entre dois homeomorfismos $g, f : S \to S$ é uma homotopia tal que f_t é um homeomorfismo para todo $t \in [0,1]$. Denotaremos por $\mathcal{I} = (f_t)_{t\in[0,1]}$*

Na definição anterior se $g = Id_S$, isto é, se g é a aplicação identidade em S então dizemos que f é isotópica à identidade.

De modo a sermos específicos, introduziremos as próximas definições e os próximos resultados no contexto do trabalho.

Seja $\mathcal{I} = (f_t)_{t\in[0,1]}$ uma isotopia em $\mathbb{T}^2$ de $f_0 = Id_{\mathbb{T}^2}$ em $f_1 = f$ homeomorfismo definido no $\mathbb{T}^2$. Sendo π o recobrimento universal do $\mathbb{T}^2$ então existe uma escolha natural para o levantamento $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de f. Isto é, tomando $\widehat{\mathcal{I}} = (F_t)_{t\in[0,1]}$ o levantamento da isotopia $\mathcal{I}$ tal que $F_0 = Id_{\mathbb{R}^2}$, definimos $F = F_1$. Dessa forma, F comuta com as translações inteiras do $\mathbb{R}^2$, como antes.

Definição 5.7. *Seja $\mathcal{I}$ uma isotopia da $Id_{\mathbb{T}^2}$ em f homeomorfismo em $\mathbb{T}^2$, um ponto fixo p de f é dito contrátil com respeito ao levantamento F, se a curva fechada $(f_t(p))_{t\in[0,1]}$ é homotopicamente trivial em $\mathbb{T}^2$.*

Note que essa definição não depende da isotopia $\mathcal{I}$, mas somente do levantamento F. De fato, os pontos fixos contráteis de f com respeito à $\mathcal{I}$ são os pontos fixos de F.

Dada uma folheação orientada do $\mathbb{T}^2$, $\mathcal{F}$, dizemos que a isotopia $\mathcal{I}$ é transversa à $\mathcal{F}$ se para cada $z \in \mathbb{T}^2$ o arco $(f_t)_{t\in[0,1]}$ é homotópico, com pontos extremais fixos, à um arco γ que é positivamente transverso à $\mathcal{F}$ no sentido da Definição 5.4. Nesse caso, dizemos que $\mathcal{F}$ é dinamicamente transversa à $\mathcal{I}$.

Os dois seguintes teoremas garantem a existência de folheações dinamicamente transversas à isotopia. Tais teoremas são válidos para qualquer superfície orientável S. O primeiro deles é uma versão do Teorema de Brouwer de Translação do Plano que foi dado por Le Calvez (ver [19]),

Teorema 5.1. *No contexto anterior, se não existe pontos fixos contráteis então existe uma folheação sem singularidades $\mathcal{F}$ que é dinamicamente transversa à isotopia $\mathcal{I}$.*

Como o conjunto de pontos fixos contráteis é usualmente não-vazio então temos a seguinte versão do Teorema 5.1 dada por Jaulent (ver [18]).

Teorema 5.2. *Dada uma isotopia $\mathcal{I} = (f_t)_{t\in[0,1]}$ da $Id_{\mathbb{T}^2}$ à um homeomorfismo $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ então existe um conjunto fechado $X \subset Fix(f)$ e uma isotopia $\mathcal{I}' = (f'_t)_{t\in[0,1]}$ da $Id_{\mathbb{T}^2\backslash X}$ à $f|_{\mathbb{T}^2\backslash X} : \mathbb{T}^2\backslash X \to \mathbb{T}^2\backslash X$ tal que*

(1) Para cada $z \in \mathbb{T}^2\backslash X$, o arco $(f'_t(z))_{t\in[0,1]}$ é homotópico, com pontos extremais fixos em $\mathbb{T}^2$ à $(f_t(z))_{t\in[0,1]}$;

(2) Não existe pontos fixos contráteis para $f|_{\mathbb{T}^2\backslash X}$ com respeito à $\mathcal{I}'$.

Note que assim, o Teorema 5.1 implica que existe uma folheação $\mathcal{F}_X$ em $\mathbb{T}^2\backslash X$ que é dinamicamente transversa à $\mathcal{I}'$.

Observação 5.1. *No contexto do Teorema 5.2 se X é totalmente desconexo é possível estender a isotopia $\mathcal{I}'$ à um isotopia em $\mathbb{T}^2$ que fixa os elementos de X, isto é, $f'_t(z) = z$ para todo $z \in X$ e para todo $t \in [0, 1]$.*

Com essas extensões, se considerarmos os respectivos levantamentos $\widehat{\mathcal{I}} = (F_t)_{t\in[0,1]}$ e $\widehat{\mathcal{I}}' = (F'_t)_{t\in[0,1]}$ de $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$ respectivamente, de tal modo que, $F_0 = F'_0 = Id_{\mathbb{R}^2}$ então $F_1 = F'_1$.

Além disso, se a folheação $\widehat{\mathcal{F}}$ é o levantamento da folheação $\mathcal{F}$ com singularidades em $\widehat{X} = \pi^{-1}(X)$, então $\widehat{\mathcal{F}}|_{\mathbb{T}^2\backslash X}$ é dinamicamente transversa à $\widehat{\mathcal{I}}'$.

Proposição 5.1 (Arcos positivamente transversos). *Seja $\mathcal{I} = (f_t)_{t\in[0,1]}$ uma isotopia da $Id_{\mathbb{T}^2}$ à um homeomorfismo $f = f_1$ sem pontos fixos contráteis e $\mathcal{F}$ uma folheação dinâmicamente transversa à $\mathcal{I}$, dada pelo Teorema 5.1, então valem:*

(1) Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{T}^2$, existe um arco positivamente transverso ligando z à $f^n(z)$;

(2) Se z e w podem ser ligados por um arco então existem vizinhanças V de z e V' de w tal que todo ponto de V pode ser ligado à todo ponto de V' por um arco positivamente transverso;

(3) Se z é ponto não-errante então existe uma vizinhança V de z tal que todo ponto de V pode ser ligado à todo ponto de V por um arco positivamente transverso;

(4) Se $K \subset \mathbb{T}^2$ é um subconjunto conexo de pontos não-errantes então qualquer ponto de K pode ser ligado a cada ponto de K por um arco positivamente transverso.

Faremos a demonstração do item (3) da Proposição anterior, para as demais demonstrações ver [5].

Demonstração. (3) É suficiente mostrar que sendo z não-errante então existe um arco positivamente transverso ligando z à si mesmo. Do item (1) e (2) , sendo V vizinhança de z e V' vizinhança de $f^{-1}(z)$ todo ponto de V' pode ser ligado à todo ponto de V por um arco positivamente transverso, e também podemos encontrar uma vizinhança V'' de $f(z)$ tal que todo ponto de V pode ser ligado a todo ponto de V'' por um arco positivamente transverso. Como z é não-errante, nós podemos encontrar $w \in V$ tão perto de z de tal modo que $f(w) \in V''$ e $f^n(w) \in V \cap f(V')$ para algum $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, isto é, $f^{n-1}(w) \in V'$. Então podemos encontrar um arco que liga z à $f(w)$ e outro que liga $f(w)$ à $f^{n-1}(w)$ e um terceiro que liga $f^{n-1}(w)$ à z. A concatenação desses três arcos, é um arco positivamente transverso que liga z à ele próprio, como queríamos. Ver Figura 5.1. $\square$

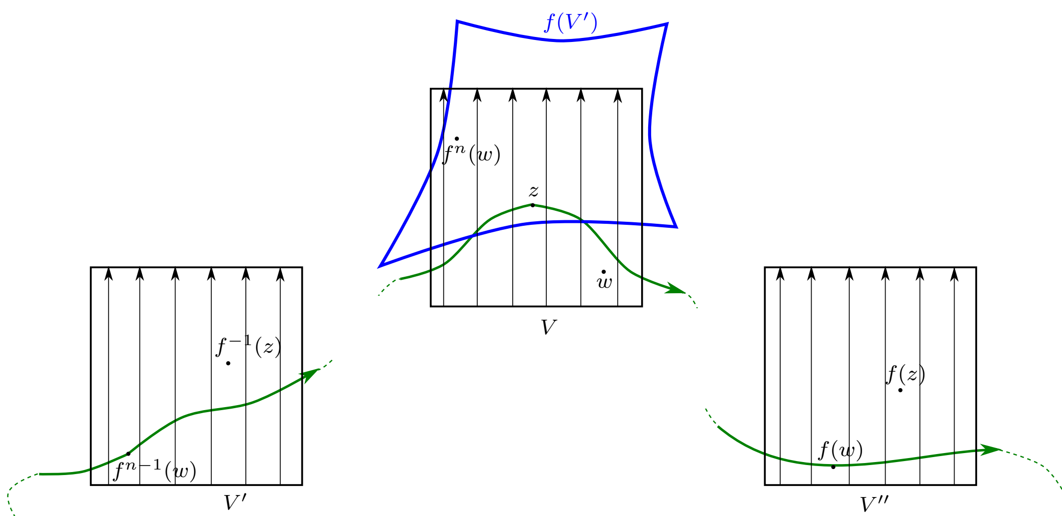

Figura 5.1: Ilustração da Proposição 5.1, item (3).

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação orientada com singularidades do $\mathbb{T}^2$ tal que o conjunto das singularidades, $Sing(\mathcal{F})$, é totalmente desconexo.

Definição 5.8. *Dizemos que uma folha Γ de $\mathcal{F}$ é uma conexão se ambos ω-limite e α-limite de Γ são subconjuntos unitários de $Sing(\mathcal{F})$. Por um ciclo generalizado de conexões de $\mathcal{F}$ entenderemos como uma curva fechada (laço) γ tal que $[\gamma]\backslash Sing(\mathcal{F})$ é união disjunta de folhas regulares, com sua orientação correspondente à orientação de γ.*

Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma folheação tipo-gradiente quando existir um laço fundamental[1] $\Sigma \in \mathbb{T}^2$ para $\mathcal{F}$. Mas a principal propriedade que iremos utilizar à respeito de uma folheação tipo-gradiente está proposta no próximo Lema.

Lema 5.1 (Folheação tipo Gradiente). *Se $\mathcal{F}$ é uma folheação tipo-gradiente então*

(1) Toda folha regular de $\mathcal{F}$ é uma conexão;

(2) Não existe órbitas periódicas nem ciclos generalizados de conexões;

(3) Existe uma constante M de tal modo que $\mathcal{D}(\Gamma) < M$ para cada folha regular $\Gamma \in \mathcal{F}$.

Para a demonstração, consultar [5].

Proposição 5.2 (Existência de folheações Brouwer do $\mathbb{T}^2$). *Seja $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ isotópica à identidade e F um levantamento de f para o $\mathbb{R}^2$ de tal modo que $Fix(F)$ é totalmente desconexo, então existe uma folheação orientada com singularidades $\mathcal{F}$ do $\mathbb{T}^2$ e uma isotopia $\mathcal{I} = (f_t)_{t\in[0,1]}$ da $Id_{\mathbb{T}^2}$ para f que além de $\mathcal{I}$ ser levantada para uma isotopia $\widehat{\mathcal{I}}$ da $Id_{\mathbb{R}^2}$ para F, temos que*

- *$Sing(\mathcal{F}) \subset \pi(Fix(F))$;*
- *$\mathcal{F}$ é levantada para uma folheação $\widehat{\mathcal{F}}$ do $\mathbb{R}^2$;*
- *$\mathcal{F}$ é dinamicamente transversa à $\mathcal{I}$ ($\Rightarrow \widehat{\mathcal{F}}$ é dinamicamente transversa à $\widehat{\mathcal{I}}$) e*
- *$\mathcal{I}$ fixa as singularidades de $\mathcal{F}$ ($\Rightarrow \widehat{\mathcal{I}}$ fixa as singularidades de $\widehat{\mathcal{F}}$).*

[1]Se $\Sigma \in \mathbb{T}^2$ é um laço fundamental então $\mathbb{T}^2 \backslash [\Sigma]$ é união disjunta de discos topológicos abertos.

5.2 Linking number

Nessa subseção assumiremos que $\widehat{\mathcal{I}}$ é uma isotopia da $Id_{\mathbb{R}^2}$ à um homeomorfismo $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ e $\widehat{X}$ é um conjunto fechado de pontos que são fixos para a isotopia $\widehat{\mathcal{I}}$, ou seja, se $z\in\widehat{X}$ então $F_t(z)=z$ para todo $t\in[0,1]$.

Definição 5.9 (Número de giro). *Tome $z\in\mathbb{R}^2$ e um arco $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ tal que $z\notin[\gamma]$. Defina a aplicação*

$$\begin{array}{rccl} \xi: & [0,1] & \to & \mathbb{S}^1 \\ & t & \mapsto & \xi(t)=\dfrac{\gamma(t)-z}{\|\gamma(t)-z\|}, \end{array}$$

e seja $\widetilde{\xi}:[0,1]\to\mathbb{R}$ um levantamento para o recobrimento universal do círculo, isto é, $e^{2\pi i\widetilde{\xi}(t)}=\xi(t)$. Então, definimos o número

$$I(\gamma,z)=\widetilde{\xi}(1)-\widetilde{\xi}(0).$$

Sendo γ uma curva fechada (laço), então o número $I(\gamma,z)$ é um inteiro e coincide com o número de giro da curva γ ao redor de z.

Esse número não depende da escolha do levantamento $\widetilde{\xi}$ nem da parametrização de γ, desde que preserve a orientação. Note que se γ_1 e γ_2 são arcos tais que $\gamma_1(1)=\gamma_2(0)$ e $z\notin[\gamma_1]\cup[\gamma_2]$ então $I(\gamma_1*\gamma_2,z)=I(\gamma_1,z)+I(\gamma_2,z)$.

Além disso $I(\gamma,z)$ é invariante por homotopia em $\mathbb{R}^2\backslash\{z\}$ com pontos finais fixos. Decorre desse fato que se $I(\gamma,z)\neq 0$ e γ é fechado, então z deve estar numa componente conexa limitada do $\mathbb{R}^2\backslash[\gamma]$.

Dado $z\in\mathbb{R}^2$ denotamos por $\widehat{\gamma}_z$ o arco $(F_t(z))_{t\in[0,1]}$ e para $n\in\mathbb{N}$ definimos

$$\widehat{\gamma}_z^n:=\widehat{\gamma}_z*\widehat{\gamma}_{F(z)}*\cdots*\widehat{\gamma}_{F^{n-1}(z)}.$$

Sejam $p\in\widehat{X}$ (isto é, p é fixo para a isotopia $\widehat{\mathcal{I}}$), q um ponto periódico de F e k o menor inteiro tal que $F^k(q)=q$. Então define-se o *linking number* de q em relação à p como

$$I_{\widehat{\mathcal{I}}}(q,p):=I(\widehat{\gamma}_q^k,p)=I(\widehat{\gamma}_q,p)+I(\widehat{\gamma}_{F(q)},p)+\cdots+I(\widehat{\gamma}_{F^{k-1}}(q),p).$$

Note que $I_{\widehat{\mathcal{I}}}(q,p) \in \mathbb{Z}$ pois $\widehat{\gamma}_q^k$ é uma curva fechada.

De modo a estender a definição anterior, pode-se considerar um conjunto periódico simplesmente conexo ao invés de um único ponto periódico q.

Definição 5.10. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto periódico simplesmente conexo arbitrário e k o menor inteiro positivo tal que $F^k(U) = U$. Tome $p \in \widehat{X} \backslash U$. Fixe $z \in U$ e σ_z um arco contido em U que une $F^k(z)$ à z. O linking number de U em relação à p é definido como*

$$I_{\widehat{\mathcal{I}}}(U,p) := I(\widehat{\gamma}_z^k * \sigma_z, p).$$

Proposição 5.3. *O linking number tal como na Definição 5.10 não depende da escolha de z nem do arco σ_z em U.*

Demonstração. Seja σ_z' outro arco em U que une $F^k(z)$ à z. Como $p \notin U$ e U é simplesmente conexo segue que $I(\sigma_z,p) = I(\sigma_z',p)$. Então

$$I(\widehat{\gamma}_z^k * \sigma_z, p) = I(\widehat{\gamma}_z^k, p) + I(\sigma_z, p) = I(\widehat{\gamma}_z^k, p) + I(\sigma_z', p) = I(\widehat{\gamma}_z^k * \sigma_z', p).$$

Considere, então, qualquer arco σ_z em U que une $F^k(z)$ à z, isto é,

$$\sigma_z(0) = F^k(z)$$
$$\sigma_z(1) = z.$$

Agora seja z' outro ponto em U e fixe um arco η em U que une z à z', isto é,

$$\eta(0) = z$$
$$\eta(1) = z'.$$

Note que $\sigma_z(1) = \eta(0)$.

Além disso, $(F^k \circ \eta)$ é um arco em U que une $F^k(z)$ à $F^k(z')$, logo o arco $(-F^k \circ \eta)$ une $F^k(z')$ à $F^k(z)$. Então, $(-F^k \circ \eta)(1) = \sigma_z(0)$.

Dessa forma, tome o arco $\sigma_{z'} := (-F^k \circ \eta) * \sigma_z * \eta$ que está contido em U e une $F^k(z')$ à z'.

Usaremos a notação η^s para representar o sub-arco de η que une $\eta(0) = z$ à $\eta(s)$, isto é, $\eta^s(t) = \eta|_{[0,s]}(st)$, veja na Figura 5.2.

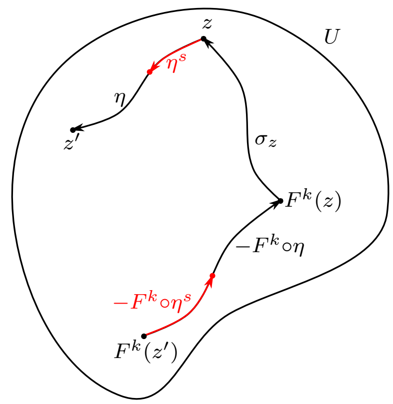

Figura 5.2: Sub-arco η^s.

Assim temos a seguinte homotopia

$$(\widehat{\gamma}^k_{\eta(s)} * (-F^k \circ \eta^s) * \sigma_z * \eta^s)_{s\in[0,1]} \tag{5.1}$$

entre $(\widehat{\gamma}^k_z * \sigma_z)$ à $(\widehat{\gamma}^k_{z'} * \sigma_{z'})$ em $\mathbb{R}^2\setminus\{p\}$.

De fato, quando $s = 0$ temos que os arcos $(\eta^s(t))_{t\in[0,1]}$ e $(-F^k(\eta^s(t))_{t\in[0,1]}$ são os pontos z e $F^k(z)$, respectivamente, então temos que (5.1) é igual à $(\widehat{\gamma}^k_z * \sigma_z)$. E, quando $s = 1$ temos que $(\eta^s(t))_{t\in[0,1]}$ é exatamente o arco $(\eta(t))_{t\in[0,1]}$ e, portanto (5.1) é $(\widehat{\gamma}^k_{z'} * \sigma_{z'})$.

E, portanto, $I(\widehat{\gamma}^k_z * \sigma_z, p) = I(\widehat{\gamma}^k_{z'} * \sigma_{z'}, p)$. □

Como consequência da independência da escolha de z e σ_z dada pela Proposição anterior temos:

Corolário 5.1. *Seja U um conjunto tal como na Definição 5.10 e suponha que existe $q \in U$ tal que $F^k(q) = q$, onde k é o menor inteiro tal que $f^k(U) = U$. Então*

$$I_{\widehat{\mathcal{I}}}(U, p) = I_{\widehat{\mathcal{I}}}(q, p) = I(\widehat{\gamma}^k_q, p),$$

para todo $p \in \widehat{X}\setminus U$.

Demonstração. De fato, basta tomar $z = q$ e o arco $(\sigma_z(t))_{t\in[0,1]} = z$ e como $I_{\widehat{\mathcal{I}}}(U, p)$ não depende da escolha de z nem do arco σ_z o resultado segue. □

O próximo Lema relaciona os conceitos de Folheações de Brouwer tipo-gradiente e Linking Number, sendo extremamente útil para a demonstração da limitação dos discos periódicos.

Lema 5.2 (**Linking Lema**). *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto F-periódico, aberto, simplesmente conexo e assuma que não existe pontos errantes de F em U, isto é, $F|_U$ é não-errante. Seja $\widehat{\mathcal{F}}$ uma folheação orientada com singularidades do $\mathbb{R}^2$, onde $\widehat{X} := Sing(\widehat{\mathcal{F}})$, tal que cada ponto $z \in \mathbb{R}^2 \backslash \widehat{X}$ o arco $\widehat{\gamma}_z$ é homotópico, com pontos finais fixos em $\mathbb{R}^2 \backslash \widehat{X}$, à um arco positivamente transverso à folheação.*

Suponha que Γ é uma folha de $\widehat{\mathcal{F}}$ que une $p \in \widehat{X} \backslash U$ à $q \in \widehat{X} \backslash U$ e intersectando $\overline{U}$. Então $I_{\widehat{\mathcal{I}}}(U,p) \neq 0$ ou $I_{\widehat{\mathcal{I}}}(U,q) \neq 0$.

Demonstração. Sejam U disco periódico de período $k \in \mathbb{Z}$, isto é, $F^k(U) = U$, $\widehat{\mathcal{F}}$ uma folheação do $\mathbb{R}^2$ dinamicamente transversa à isotopia $\widehat{\mathcal{I}}$ e $\widehat{X} = Sing(\widehat{\mathcal{F}})$. Tome $p, q \in \widehat{X} \backslash U$ e uma folha $\Gamma \in \widehat{\mathcal{F}}$ que intersecta $\overline{U}$. Vamos mostrar que $I_{\widehat{\mathcal{I}}}(U,p) \neq 0$ ou $I_{\widehat{\mathcal{I}}}(U,q) \neq 0$ mostrando que existe uma curva fechada (laço) não homotopicamente trivial em $\mathbb{R}^2 \backslash \{p,q\}$.

Considere a compatificação do $\mathbb{R}^2$ por um ponto, $\{\infty\}$, $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Retirando os pontos p, q do $\mathbb{R}^2$ e, consequentemente, de S^2, temos um anel, seja $A = S^2 \backslash \{p,q\}$. Sejam $\widetilde{A}$ o recobrimento de A, isto é, $\widetilde{A} = \mathbb{R}^2$ e $\tau : \widetilde{A} \to A$ a aplicação de recobrimento universal (ver Figura 5.3).

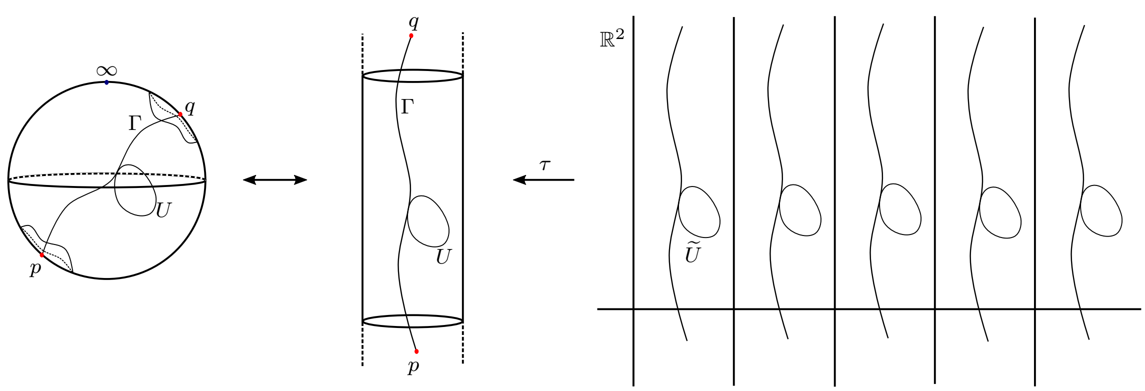

Figura 5.3: Aplicação de recobrimento τ no anel A.

Note que a isotopia $\widehat{\mathcal{I}}|_{\mathbb{R}^2 \backslash \{p,q\}}$ pode ser estendida para A fixando o infinito e essa extensão pode ser, então levantada para uma isotopia $\widetilde{\mathcal{I}} = (\widetilde{F}_t)_{t \in [0,1]}$ de $\widetilde{F}_0 = Id_{\widetilde{A}}$ em $\widetilde{F}_1 = \widetilde{F}$ homeomorfismo que comuta com as translações inteiras horizontais.

O mesmo acontece com a folheação, onde $\widetilde{X} = \tau^{-1}(\widehat{X} \cup \{\infty\})$ e $\widetilde{\mathcal{F}}$ é dinamicamente transversa à $\widetilde{\mathcal{I}}$, isto é, se $z \in \widetilde{A}$ não é fixo para $\widetilde{\mathcal{I}}$ então o arco $\widetilde{\gamma}_z$ é homotópico, com pontos finais fixos, à um arco positivamente transverso à $\widetilde{F}$.

Seja $\widetilde{U}$ uma componente conexa de $\tau^{-1}(U)$, então $\widetilde{U}$ é um disco e $\tau|_{\widetilde{U}}$ é injetora. Como U é F^k-periódico segue que

$$\widetilde{F}^k(\widetilde{U}) = \widetilde{U} + (v, 0). \tag{5.2}$$

Afirmação, $v \neq 0$.

Suponha, por contradição que $\widetilde{F}^k(\widetilde{U}) = \widetilde{U}$. Seja $z \in [\Gamma] \cap \overline{U}$, escolha $\widetilde{z} \in \tau^{-1}(z)$ (note que não há exigência que $\widetilde{z} \in \overline{\widetilde{U}}$) e tome $\widetilde{\Gamma}$ a folha de $\widetilde{\mathcal{F}}$ que passa por $\widetilde{z}$ então $\tau(\widetilde{\Gamma}) = \Gamma$.

Do fato de que ω-limite e α-limite de Γ são q e p, respectivamente, segue que $\widetilde{\Gamma}$ é um mergulho próprio de $\mathbb{R}$ em $\widetilde{A} \cong \mathbb{R}^2$, assim $\widetilde{A} \backslash [\widetilde{\Gamma}]$ tem exatamente duas componentes conexas. Além disso, como $\widetilde{\mathcal{F}}$ é dinamicamente transversa à isotopia, temos que $\widetilde{F}(\widetilde{\Gamma})$ e $\widetilde{F}^{-1}(\widetilde{\Gamma})$ pertencem à diferentes componentes conexas de $\widetilde{A} \backslash [\widetilde{\Gamma}]$.

Procedendo de maneira análoga para $\widetilde{F}(\widetilde{\Gamma})$ concluímos que $\widetilde{F}^2(\widetilde{\Gamma})$ e $\widetilde{\Gamma}$ pertencem à diferentes componentes conexas de $\widetilde{A} \backslash [\widetilde{F}(\widetilde{\Gamma})]$.

Prosseguindo com esse raciocínio sucessivamente, concluímos que todo ponto de $[\widetilde{\Gamma}]$ é errante para $\widetilde{F}$, em particular $\widetilde{z}$ é errante para $\widetilde{F}$. Seja W uma vizinhança de $\widetilde{z}$ tal que $\widetilde{F}^n(W) \cap W = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\tau(\widetilde{z}) = z \in \overline{U}$ e $F|_U$ é não-errante, segue que $z \in \partial U$ logo $\tau(W) \cap U \neq \emptyset$. Portanto existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $(\widetilde{U} + (m, 0)) \cap W \neq \emptyset$.

Como $\widetilde{F}$ comuta com as translações horizontais inteiras segue que

$$\widetilde{F}^k(\widetilde{U} + (m, 0)) = \widetilde{F}^k(\widetilde{U}) + (m, 0) = \widetilde{U} + (m, 0).$$

Mas $\tau|_{\widetilde{U}+(m,0)} = \tau|_{\widetilde{U}}$ é injetora e $F^k|_U$ é não-errante, isso implica que $\widetilde{F}^k$ não tem pontos errantes em $\widetilde{U} + (m, 0)$ contradizendo o fato de que $(\widetilde{U} + (m, 0)) \cap W \neq \emptyset$.

Portanto $v \neq 0$.

Para concluir a demonstração do Lema, fixe $\widetilde{z} \in \widetilde{U}$. Tome o arco $\widetilde{\gamma}^k_{\widetilde{z}}$ e escolha um arco $\sigma_{\widetilde{z}}$ em $\widetilde{F}^k(\widetilde{U}) = \widetilde{U} + (v, 0)$ que une $\widetilde{F}^k(\widetilde{z})$ à $(\widetilde{z} + (v, 0))$. Tome a projeção de $\widetilde{z}$, $\widetilde{\sigma}_{\widetilde{z}}$ e de $\widetilde{\gamma}^k_{\widetilde{z}}$ em A, ou seja,

$$z = \tau(\widetilde{z}),\ \sigma_z = \tau(\widetilde{\sigma}_{\widetilde{z}}) \text{ e } \widehat{\gamma}^k_z = \tau(\widetilde{\gamma}^k_{\widetilde{z}}),$$

respectivamente.

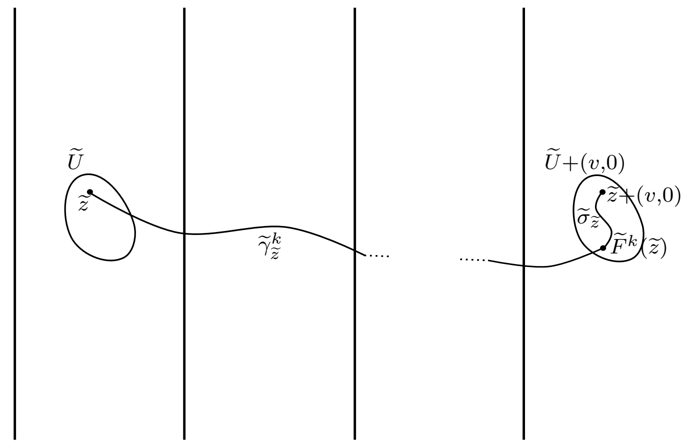

Figura 5.4: Arco $\widetilde{\gamma}^k_{\widetilde{z}} * \widetilde{\sigma}_{\widetilde{z}}$.

Então, segue que o arco $\tau(\widetilde{\gamma}^k_{\widetilde{z}} * \widetilde{\sigma}_{\widetilde{z}}) = \widehat{\gamma}^k_z * \sigma_z$ é não homotopicamente trivial em A, pois $\widetilde{\gamma}^k_{\widetilde{z}} * \widetilde{\sigma}_{\widetilde{z}}$ une $\widetilde{z}$ à $\widetilde{z} + (v, 0)$. E, é claro, que ainda é não homotopicamente trivial em $A \backslash \infty = \mathbb{R}^2 \backslash \{p, q\}$, pois a isotopia $\widehat{\mathcal{I}}$ foi extendida para uma isotopia em A a qual fixa o infinito.

Isso significa que $I(\widehat{\gamma}^k_z * \sigma_z, p) \neq 0$ ou $I(\widehat{\gamma}^k_z * \sigma_z, q) \neq 0$ e como σ_z é um arco em U que une $F^k(z)$ à z, a Definição 5.10 implica que $I_{\widehat{\mathcal{I}}}(U, p) \neq 0$ ou $I_{\widehat{\mathcal{I}}}(U, q) \neq 0$, como queríamos. $\square$

Para as próximas Proposições considere $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ homeomorfismo homotópico à identidade com o conjunto de pontos fixos totalmente desconexo e F um levantamento para o $\mathbb{R}^2$ de f. Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{I}$ folheação orientada com singularidades e a isotopia dada pela Proposição 5.2 isto é,

- $Sing(\mathcal{F}) \subset \pi(Fix(F)$;
- $\mathcal{I}$ é levantada para uma isotopia $\widehat{\mathcal{I}}$ da $Id_{\mathbb{R}^2}$ para F e $\mathcal{F}$ é levantada para uma folheação $\widehat{\mathcal{F}}$ do $\mathbb{R}^2$;
- $\mathcal{F}$ é dinamicamente transversa à $\mathcal{I}$ ($\Rightarrow \widehat{\mathcal{F}}$ é dinamicamente transversa à $\widehat{\mathcal{I}}$) e
- $\mathcal{I}$ fixa as singularidades de $\mathcal{F}$ ($\Rightarrow \widehat{\mathcal{I}}$ fixa as singularidades de $\widehat{\mathcal{F}}$).

E, ainda, assuma que $\mathcal{F}$ é uma folheação Brouwer tipo-gradiente, isto é, toda folha regular de $\mathcal{F}$ une pontos diferentes de $X = Sing(\mathcal{F})$ e, existe $M > 0$ tal que para cada folha regular $\Gamma \in \mathcal{F}$, $\mathcal{D}(\Gamma) < M$. Consequentemente, $\widehat{\mathcal{F}}$ também é tipo-gradiente. Seja $\widehat{X} = Sing(\widehat{\mathcal{F}})$.

Proposição 5.4. *Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe uma constante M_k tal que se $U \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto, simplesmente conexo, F^k-invariante sem pontos errantes e $diam(U) > M_k$ então $U \cap \widehat{X}$ é não-vazio.*

Demonstração. Como $\widehat{\mathcal{F}}$ é folheação de Brouwer, existe uma constante M' tal que toda folha regular Γ de $\widehat{\mathcal{F}}$ conecta dois elementos distintos de $\widehat{X}$ e $diam(\Gamma) < M'$.

Seja $M'' = sup\{\|F_t(z) - F_s(z)\|;\ s, t \in [0,1] \text{ e } z \in [0,1]^2\}$. Como F comuta com as translações inteiras segue que $diam([\widehat{\gamma}_z]) \leq M''$ para todo ponto $z \in \mathbb{R}^2$.

Como $F^k|_U$ é não-errante a Proposição 2.7 implica que F^k tem ponto fixo $z \in U$, isto é, $F^k(z) = z$.

Seja

$$A = \left\{p \in \widehat{X} \backslash U;\ I_{\widehat{\mathcal{I}}}(z, p) \neq 0\right\}.$$

E, como

$$diam(\widehat{\gamma}_z^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} diam(\widehat{\gamma}_{F^i(z)}) \leq kM'',$$

segue que $A \subset B(z, kM'')$, pois $I_{\widehat{\mathcal{I}}}(z,p) = I(\widehat{\gamma}_z^k, p)$, pela definição de linking number.

Por outro lado, o Corolário 5.1 implica que

$$A = \left\{p \in \widehat{X} \backslash U;\ I_{\widehat{\mathcal{I}}}(U, p) \neq 0\right\}.$$

Suponha que $diam(U) > M_k := (kM'' + M')$. Afirmação: $U \cap \widehat{X} \neq \emptyset$.

Suponha o contrário, isto é, $U \cap \widehat{X} = \emptyset$. Então, como $diam(U) > (kM'' + M')$, existe $w \in U \backslash \overline{B}(z, kM'' + M')$ e $w \notin \widehat{X}$, pois $U \cap \widehat{X} = \emptyset$.

A folha Γ que passa por w tem $diam(\Gamma) < M'$, logo Γ une dois pontos $p, q \in \widehat{X} \backslash \overline{B}(z, kM'')$. Como $U \cap \widehat{X} = \emptyset$ então $p, q \notin U$ e segue do Lema 5.2 que ou $I_{\widehat{\mathcal{I}}}(U, p) \neq 0$ ou $I_{\widehat{\mathcal{I}}}(U, q) \neq 0$. Isso implica que $p \in A$ ou $q \in A$, contradizendo o fato de que $A \subset B(z, kM'')$. Ver Figura 5.5.

Portanto, $U \cap \widehat{X} \neq \emptyset$. $\square$

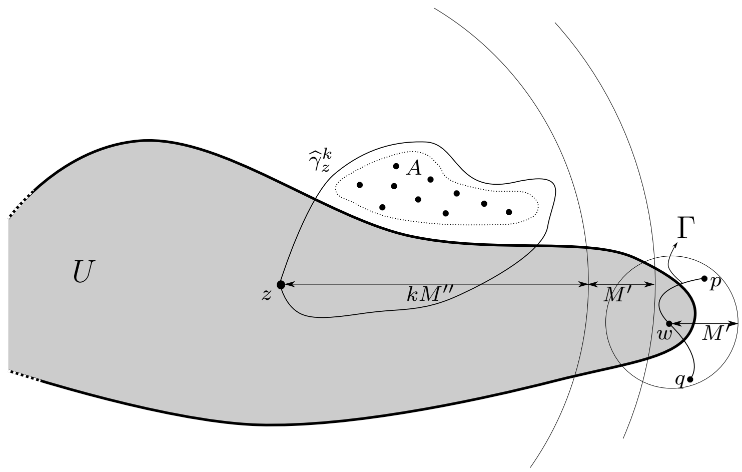

Figura 5.5: $U \cap \widehat{X} \neq \emptyset$.

Proposição 5.5. *Seja U um conjunto aberto, simplesmente conexo e F-periódico que intersecta $\widehat{X}$. Suponha que não existe pontos errantes de F, em U, isto é, $F|_U$ é não-errante. Então toda folha de $\widehat{\mathcal{F}}$ que intersecta $\overline{U}$ tem um ponto final em U.*

Demonstração. Como, $U \cap \widehat{X}$ então existe $z \in U$ tal que $F(z) = z$. Seja k o menor inteiro positivo tal que $F^k(U) = U$, logo $F^k(z) = z$. Sendo assim, o Corolário 5.1 implica que $I_{\widehat{\mathcal{I}}}(U, p) = I_{\widehat{\mathcal{I}}}(z, p)$ para todo $p \in \widehat{X} \backslash U$. Como z é fixo para a isotopia, pois a isotopia fixa as singularidades, segue que $I_{\widehat{\mathcal{I}}}(z, p) = 0$ para todo $p \in \widehat{X} \backslash U$. Logo

$$I_{\widehat{\mathcal{I}}}(U, p) = 0 \text{ para todo } p \in \widehat{X} \backslash U. \tag{5.3}$$

Sejam Γ uma folha regular de $\mathcal{F}$ que intersecta $\overline{U}$ e $p_1, p_2 \in \widehat{X}$ os pontos finais de Γ. Se nem p_1 e nem p_2 estão em U então o Lema 5.2 implica que $I_{\widehat{\mathcal{I}}}(U, p_i) \neq 0$, para algum $i = 1, 2$, contradizendo (5.3).

Portanto, um dos dois pontos finais de Γ pertencem à U. $\square$

5.3 Demonstração do Teorema B

Teorema B. *Se $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ é um homeomorfismo homotópico à identidade, não-errante e não-anelar então vale uma e somente uma das afirmações:*

(1B) Existe $M > 0$ real tal que para cada disco topológico aberto f-invariante $U \subset \mathbb{T}^2$, $\mathcal{D}(U) < M$;

(2B) $Fix(f)$ é totalmente essencial e f é irrotacional.

A prova do Teorema B será feita da seguinte forma:

1º) Vamos mostrar que se $Fix(f)$ é essencial então, de fato, $Fix(f)$ é totalmente essencial e f é irrotacional. Além disso, mostraremos que para cada $M > 0$ e $v \in \mathbb{Z}^2_*$ existe alguma componente conexa U de $\mathbb{T}^2 \backslash Fix(f)$ tal que $\mathcal{D}_v(U) > M$. Sendo assim, concluiremos que $Fix(f)$ é essencial se e, somente se, vale o item (2B).

2º) Após verificar as afirmações anteriores, será suficiente considerar o caso em que $Fix(f)$ é inessencial. Para esse caso, mostraremos que o item (1B) é válido. Para tanto iremos supor, por absurdo, que não é válido. Isto é, $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ é um homeomorfismo homotópico à identidade, não-errante e não-anelar, e ainda, $Fix(f)$ é inessencial então para todo $M > 0$ real existe um disco topológico aberto f-invariante $U \subset \mathbb{T}^2$ tal que $\mathcal{D}(U) > M$.

5.3.1 O caso onde $Fix(f)$ é essencial

Proposição 5.6. *Seja $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$, não-errante e não-anelar. Suponha que $Fix(f)$ é essencial. Então $Fix(f)$ é totalmente essencial e existe um levantamento F de f para o $\mathbb{R}^2$ tal que, $\rho(F) = \{0\}$, isto é, f é irrotacional. Além disso, $\pi(Fix(F)) = Fix(f)$.*

Demonstração. Suponha por contradição que $Fix(f)$ não é totalmente essencial o que implica que $\mathbb{T}^2 \backslash Fix(f)$ não é inessencial, logo $\mathbb{T}^2 \backslash Fix(f)$ é essencial. Então $\mathbb{T}^2 \backslash Fix(f)$ contém alguma componente conexa essencial A e como f é não-errante segue que existe $k > 0$ tal que $f^k(A) = A$.

Como $Fix(f)$ é essencial e $A \subset \mathbb{T}^2 \backslash Fix(f)$ então $A \cap Fix(f) = \emptyset$, logo A não é totalmente essencial e por isso deve ser anelar.

Assim a Proposição 2.5 item (2) implica que f^k é anelar, mas como f tem ponto fixo, pois $Fix(f)$ é essencial, segue do item (4) dessa mesma proposição que f é anelar. Contradição com a hipótese. Portanto $Fix(f)$ é totalmente essencial.

Logo existe uma componente conexa K de $Fix(f)$ totalmente essencial. Tome $z_0 \in K$ e um levantamento F de f para o $\mathbb{R}^2$ tal que $F(\widehat{z}_0) = \widehat{z}_0$ para qualquer $\widehat{z}_0 \in \pi^{-1}(z_0)$. Seja a aplicação $\phi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(z) = F(\widehat{z}) - \widehat{z}$, onde $\widehat{z} \in \pi^{-1}(z)$, que está bem definida e é contínua. Como $K \subset Fix(f)$ segue que $\phi(K) \subset \mathbb{Z}$. Sendo K conexo e ϕ contínua, temos que $\phi(K)$ é conexo, mas $\phi(\widehat{z}_0) = F(\widehat{z}_0) - \widehat{z}_0 = 0$ então $\phi|_K \equiv 0$. Logo, $\pi^{-1}(K) \subset Fix(F)$, isto é, $K \subset \pi(Fix(F))$ (portanto, $\pi(Fix(F))$ é totalmente essencial).

Vamos usar esse fato para mostrar que f é irrotacional. Suponha que não, isto é, suponha que para todo levantamento de f para o $\mathbb{R}^2$ o conjunto de rotação é diferente de zero, inclusive para o levantamento F tomado anteriormente, isto é $\rho(F) \neq \{0\}$.

Sendo assim $\rho(F)$ tem algum ponto extremal não-nulo w e pela Proposição 2.3 item (2) existe uma medida de probabilidade de Borel μ $f-$ergódica definida no $\mathbb{T}^2$ tal que $\rho_\mu(F) = w$, isto é, para μ-q.t.p $z \in \mathbb{T}^2$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\widehat{F}^n(\widehat{z}) - \widehat{z}}{n} = w \text{ onde } \widehat{z} \in \pi^{-1}. \tag{5.4}$$

E pelo Teorema de Recorrência de Poincaré (Teorema 2.5) segue que μ-q.t.p $z \in \mathbb{T}^2$ é recorrente. Então o conjunto dos pontos recorrentes que satisfazem (5.4) tem medida total. Logo existe $z \in \mathbb{T}^2$ recorrente valendo (5.4). Seja $\widehat{z} \in \pi^{-1}(z)$ e U uma componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus Fix(F)$ que contém z e, então pelo Teorema 2.6 temos que U é invariante, isto é, $F(U) = U$. Além disso, como $\pi(U) \subset \mathbb{T}^2 \setminus \pi(Fix(F))$ segue que $\pi(U) \cap K = \emptyset$. Logo $\pi(U)$ é inessencial, pois K é totalmente essencial, então $\pi|_U$ é injetora.

Como z é recorrente, existe uma sequencia $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ tal que $n_k \to \infty$ e $f^{n_k}(z) \to z$ quando $k \to \infty$. E, sendo $\pi|_U$ injetora (portanto, bijetora), existe uma conjugação entre $F|_U$ e $f|_{\pi(U)}$. Assim

$$F^{n_k}(\widehat{z}) \to \widehat{z}, \text{ quando } k \to \infty \;\Rightarrow\; \frac{F^{n_k}(\widehat{z}) - \widehat{z}}{n_k} \to 0 \neq w, \text{ quando } k \to \infty.$$

Contradição com a existência de um ponto recorrente satisfazendo (5.4). Portanto f é irrotacional.

Para finalizar, resta mostrar que $\pi(Fix(F)) = Fix(f)$.

Tome $z \in \pi(Fix(F))$ então existe $\widehat{z} \in Fix(F)$ tal que $\pi(\widehat{z}) = z$. Isto é, $F(\widehat{z}) = \widehat{z}$, aplicando π em ambos os membros e usando o fato que f é homotópica à identidade, segue que,

$$\pi \circ F(\widehat{z}) = \pi(\widehat{z}) \Leftrightarrow f \circ \pi(\widehat{z}) = \pi(\widehat{z}) \Leftrightarrow f(z) = z \Leftrightarrow z \in Fix(f).$$

Logo, $\pi(Fix(F)) \subset Fix(f)$.

Agora, seja $z \in Fix(f)$. Assim $F(\widehat{z}) = \widehat{z} + w$ onde $w \in \mathbb{Z}^2$ e $\widehat{z} \in \pi^{-1}(z)$, isso implica que $\rho(F, z) = w$. Assim, se $w \neq 0$ então $\rho(F, z) \neq 0$ contradizendo o fato de que $\rho(F) = \{0\}$. Logo $F(\widehat{z}) = \widehat{z}$ para todo $\widehat{z} \in \pi^{-1}(z)$. Isto é, $z \in \pi(Fix(F))$. Portanto $Fix(f) \subset \pi(Fix(F))$. $\square$

Proposição 5.7. *Seja $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$, não-errante e não-anelar. Se $Fix(f)$ é essencial, então para cada $M > 0$ e $v \in \mathbb{Z}^2_*$ existe alguma componente conexa U de $\mathbb{T}^2 \backslash Fix(f)$ tal que $\mathcal{D}_v(U) > M$.*

Demonstração. A proposição anterior implica que $Fix(f)$ é totalmente essencial e existe um levantamento F tal que $\pi(Fix(F)) = Fix(f)$. O Teorema 2.6, por sua vez, implica que cada componente conexa de $\mathbb{R}^2 \backslash Fix(F)$ é F-invariante. Se existisse um limite uniforme no diâmetro de cada componente conexa então $|F^n(z) - z|$ seria limitado uniformemente para $z \in \mathbb{R}^2$ e $n \in \mathbb{Z}$, contradição com o fato de que f é não-anelar. $\square$

Portanto, com as Proposições 5.6 e 5.7 mostramos que $Fix(f)$ é essencial se e, somente se, $Fix(f)$ é totalmente essencial e f é irrotacional.

5.3.2 O caso onde $Fix(f)$ é inessencial

As Proposições 5.6 e 5.7 nos garante que é suficiente considerar o caso onde $Fix(f)$ é inessencial.

Sendo assim considerando o caso que $Fix(f)$ é inessencial o restante da prova é feita por redução ao absurdo, isto é, vamos assumir que para cada $M > 0$ existe um disco topológico aberto U, f-invariante tal que $\mathcal{D}(U) > M$.

Esboço da prova. Sob essas hipóteses mostraremos que:

(1) Podemos fixar um levantamento F de f e uma sequência de discos topológicos abertos $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ F-invariantes tais que $\pi(U_n)$ é inessencial para cada $n \in \mathbb{N}$ e $diam(U_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$;

(2) $F|_{U_n+v}$ é não-errante para todo $n \in \mathbb{N}$ e $v \in \mathbb{Z}$;

(3) Sendo $Fix(f)$ inessencial, podemos assumir que $Fix(f)$ é totalmente desconexo;

(4) $diam(P_v(U_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ para todo $v \in \mathbb{Z}^2_*$;

(5) U_n pode ser escolhido como um conjunto maximal com respeito à propriedade de $\pi(U_n)$ ser aberto, f-invariante e simplesmente conexo, isto é, U_n não está propriamente contido em outro conjunto com as mesmas propriedades;

(6) Existe uma folheação $\mathcal{F}$ Brouwer tipo-gradiente do $\mathbb{T}^2$ e, consequentemente, o levantamento $\widehat{\mathcal{F}}$ é uma folheação Brouwer tipo-gradiente do $\mathbb{R}^2$;

(7) A Proposição 5.4 implica que $U_n \cap \widehat{X} \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, onde $\widehat{X} = Sing(\widehat{\mathcal{F}})$;

(8) A Proposição 5.5 implica que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $v \in \mathbb{Z}^2$ toda folha regular de $\widehat{\mathcal{F}}$ que intersecta $\overline{U_n + v}$ tem ponto final em $U_n + v$;

(9) U_n é limitado para cada $n \in \mathbb{N}$;

(10) $\pi(U_n)$ são dois-a-dois disjuntos, onde $n \in \mathbb{N}$;

(11) Para finalizar a prova do Teorema, a partir de U_1, construiremos um conjunto $\mathcal{O}$ de tal modo que $\widetilde{\mathcal{O}} = Fill(\mathcal{O})$ é aberto, f-invariante e simplesmente conexo e $U_1 \subset \widetilde{\mathcal{O}}$, logo $U_1 = \widetilde{\mathcal{O}}$, pois U_1 é maximal com respeito à essas propriedades. Além disso, a forma que $\widetilde{\mathcal{O}}$ é construído implica que $\widetilde{\mathcal{O}}$ contém todas as folhas que intersectam U_1. Portanto, U_1 contém todas as folhas que o intersectam. E usando o fato de que U_1 é aberto concluiremos que $\partial U_1 \subset \widehat{X}$, contradição com o fato de que $\widehat{X}$ é totalmente desconexo. Finalizando o Teorema.

Proposição 5.8. *Se $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ não-errante e não-anelar, e ainda, $Fix(f)$ é inessencial então existe $M > 0$ real tal que para cada disco topológico aberto f-invariante $U \subset \mathbb{T}^2$, $\mathcal{D}(U) < M$.*

Suponha que não, isto é, suponha que para cada $M > 0$ existe um disco topológico aberto U, f-invariante tal que $\mathcal{D}(U) > M$.

Afirmação 5.1. *Existe um levantamento F de f e uma sequência de discos topológicos abertos $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ F-invariantes tais que $\pi(U_n)$ é inessencial para cada $n \in \mathbb{N}$ e $diam(U_n) \overset{n\to\infty}{\to} \infty$.*

Demonstração. Por hipótese existem discos topológicos abertos f-invariantes D_n de diâmetro arbitrariamente grande, isto é, $diam(D_n) > M_n$ onde $M_n > 0$ e $M_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Como $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ é não-errante então segue da Proposição 2.7 que f tem ponto fixo em cada disco D_n.

Seja F_0 um levantamento de f para o $\mathbb{R}^2$, sabemos que F_0 tem a propriedade de ser uniformemente limitado, isto é, existe $c > 0$ tal que $|F_0(\widehat{z}) - \widehat{z}| < c$ para todo $\widehat{z} \in \mathbb{R}^2$, além disso qualquer outro levantamento de f para o $\mathbb{R}^2$ é um transladado inteiro de F_0, isto é, F_k é um levantamento de f para o $\mathbb{R}^2$ se e, somente se,

$$F_k = F_0 + k, \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}^2.$$

Sem perda de generalidade podemos supor que $Fix(F_0) \neq \emptyset$. Se $|k| > c$ então $Fix(F_k) = \emptyset$. Sendo assim $Fix(F_k) \neq \emptyset$ quando $k \in [-c, c]^2 \cap \mathbb{Z}^2$, ou seja, finitos levantamentos de f têm ponto fixo.

Seja $\widehat{D}_n \in \pi^{-1}(D_n)$ então como $f(D_n) = D_n$ e D_n é um disco existe um levantamento F_{k_n} tal que $F_{k_n}(\widehat{D}_n) = \widehat{D}_n$. E como $f|_{D_n}$ tem ponto fixo, segue que $F_{k_n}|_{\widehat{D}_n}$ também tem ponto fixo, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas como tem finitos F_{k_n} com pontos fixos, deve existir F_{k_0} que fixa $\widehat{D}_{n_i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Tomando $F := F_{k_0}$ e $U_n = D_{n_i}$ concluímos a Afirmação. □

Afirmação 5.2. *$F|_{U_n+v}$ é não-errante para todo $n \in \mathbb{N}$ e $v \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Como $\pi(U_n + v) = \pi(U_n)$ é inessencial, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $v \in \mathbb{Z}^2$. Assim $\pi|_{U_n+v}$ é um homeomorfismo sobre sua imagem que conjuga $F|U_n + v$ à $f|_{\pi(U_n)}$. Como f é não-errante, então $f|_{\pi(U_n)}$ também o é e, portanto, $F|_{U_n+v}$ é não-errante. □

Sob as hipóteses da Proposição 5.8 é possível assumir que $Fix(f)$ é totalmente desconexo usando a Proposição 2.8 a qual garante que as componentes conexas de $Fill(Fix(f))$ podem ser colapsadas em pontos.

Para tanto é necessário descartar que esse processo não leva à uma situação em que não há mais discos topológicos arbitrariamente grandes. Ou seja,

Afirmação 5.3. *Para cada $M > 0$ existe $U \subset \mathbb{R}^2 \backslash Fix(F)$ aberto, conexo e F-invariante, tal que $\pi(U)$ é inessencial e $diam(U) > M$.*

Demonstração. Ver **Claim 3** em [5]. □

Afirmação 5.4. *Pode-se assumir que $Fix(f)$ é totalmente desconexo.*

Demonstração. Ver **Claim 4** em [5]. □

Afirmação 5.5. *$diam(P_v(U_n)) \overset{n\to\infty}{\to} \infty$ para cada $v \in \mathbb{Z}^2_*$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que existe $v \in \mathbb{Z}^2_*$ e $M > 0$ de tal modo que, passando à uma subsequência se necessário,

$$diam(P_v(\overline{U_n}) \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $diam(U_n) \to \infty$ então $diam(P_{v^\perp}(U_n)) \to \infty$ e, somente nessa direção, caso contrário se $diam(P_{v'}(U_n)) \to \infty$ para qualquer outro vetor $v' \neq v^\perp$ implicaria que $diam(P_v(U_n)) \to \infty$.

Sendo

$$A = \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n + kv^\perp},$$

segue que

$$V^- = P^{-1}_{v^\perp}((-\infty, -M)) \quad \text{e} \quad V^+ = P^{-1}_{v^\perp}((M, \infty))$$

estão contidos em diferentes componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \backslash A$, $\widetilde{V}^-$ e $\widetilde{V}^+$ respectivamente.

Como cada U_n é F-invariante então $F(A) = A$ e assim as componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \backslash A$ são permutadas por F. Mas, como f é homotópica à identidade temos que $F(\widehat{z}) - \widehat{z}$ é uniformemente limitado para todo $\widehat{z} \in \mathbb{R}^2$. Logo $F(\widetilde{V}^-) = \widetilde{V}-$ e $F(\widetilde{V}^+) = \widetilde{V}^+$.

Note que $V^- \subset \widetilde{V}^-$ e $\widetilde{V}^-$ é disjunta de $\widetilde{V}^+$ e $V^+ \subset \widetilde{V}^+$ então para $M' \leq M$ temos que $P_{v^\perp}((\infty, -M')) \subset \widetilde{V}^- \subset P_{v^\perp}((-\infty, M'))$.

Então a Proposição 2.6 implica que f é anelar, contradição com a hipótese. □

Afirmação 5.6. *Podemos assumir que cada U_n é maximal com respeito às propriedades de $\pi(U_n)$ ser aberto, f-invariante e simplesmente conexo. Isto é, U_n não está propriamente contido num conjunto com as mesmas propriedades.*

Demonstração. O Lema de Zorn implica que existe um aberto simplesmente conexo f-invariante $\widetilde{U}'_n \subset \mathbb{T}^2$ tal que $\pi(U_n) \subset \widetilde{U}'_n$ e $\widetilde{U}'_n$ é maximal com respeito à propriedade de ser aberto, f-invariante e simplesmente conexo. A componente conexa $\widetilde{U}_n$ de $\pi^{-1}(\widetilde{U}'_n)$ que contém U_n satisfaz as propriedades requeridas. Então podemos substituir U_n por $\widetilde{U}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Afirmação 5.7. *Se U_n e U_m são limitados e $\pi(U_n) \cap \pi(U_m) \neq \emptyset$ então $\pi(U_n) = \pi(U_m)$.*

Demonstração. Se $\pi(U_n) \cap \pi(U_m) \neq \emptyset$ então existe $w \in \mathbb{Z}^2$ tal que $U_n \cap (U_m + w) \neq \emptyset$. Seja $U = Fill(U_n \cup (U_m + w))$, que é limitado e F-invariante, pois U_n e U_m o são.

Se $\pi(U)$ for essencial então existe $v \in \mathbb{Z}^2_*$ tal que $U \cap (U+v) \neq \emptyset$. Seja $V = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} U + kv$. Como U é limitado, segue que existe $M > 0$ tal que $diam(P_{v^\perp}(U)) \leq M$. Como V é F-invariante segue que as componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \backslash V$ são permutadas por F, mas como f é homotópica à identidade segue que $F(\widehat{z}) - \widehat{z}$ é uniformemente limitado para todo $\widehat{z} \in \mathbb{R}^2$, o que implica que as componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \backslash V$ são F-invariantes. Sendo assim, uma aplicação da Proposição 2.6 implica que f é anelar, contradizendo a hipótese. Logo $\pi(U)$ é inessencial.

Como U é preenchido e conexo, $\pi(U)$ é aberto, f-invariante simplesmente conexo que contém $\pi(U_n)$ e $\pi(U_m)$. Como $\pi(U_n)$ e $\pi(U_m)$ são maximais com respeito à essas propriedades a Afirmação 5.6 implica que $\pi(U_n) = \pi(U) = \pi(U_m)$, como queríamos. □

A Afirmação 5.4 garante que podemos considerar $Fix(f)$ totalmente desconexo, sendo assim a Proposição 5.2 implica que existe uma folheação orientada $\mathcal{F}$ com singularidades, $X = Sing(\mathcal{F})$, do $\mathbb{T}^2$ e uma isotopia $\mathcal{I} = (f_t)_{t\in[0,1]}$ da $Id_{\mathbb{T}^2}$ em f tal que

- $Sing(\mathcal{F}) \subset \pi(Fix(F)$;
- $\mathcal{I}$ é levantada para uma isotopia $\widehat{\mathcal{I}}$ da $Id_{\mathbb{R}^2}$ para F e $\mathcal{F}$ é levantada para uma folheação $\widehat{\mathcal{F}}$ do $\mathbb{R}^2$;

- $\mathcal{F}$ é dinamicamente transversa à $\mathcal{I}$ ($\Rightarrow \widehat{\mathcal{F}}$ é dinamicamente transversa à $\widehat{\mathcal{I}}$) e
- $\mathcal{I}$ fixa as singularidades de $\mathcal{F}$ ($\Rightarrow \widehat{\mathcal{I}}$ fixa as singularidades de $\widehat{\mathcal{F}}$).

Afirmação 5.8. *A folheação $\mathcal{F}$ é tipo-gradiente.*

Demonstração. Ver **Claim 9** e **Claim 10** em [5]. □

Sendo $\mathcal{F}$ tipo-gradiente, consequentemente $\widehat{\mathcal{F}}$ também é tipo-gradiente, isto é, se $\widehat{X} = Sing(\widehat{\mathcal{F}})$ então toda folha regular de $\widehat{\mathcal{F}}$ une pontos diferentes de $\widehat{X}$ e, existe $M_0 > 0$ tal que para cada folha regular $\Gamma \in \widehat{\mathcal{F}}$, $\mathcal{D}(\Gamma) < M_0$.

Afirmação 5.9. *Podemos assumir que $U_n \cap \widehat{X} \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Pela Afirmação 5.2, U_n não tem pontos errantes para todo $n \in \mathbb{N}$ e pela Afirmação 5.1, $diam(U_n) \to \infty$. Assim, passando à uma subsequência se necessário, a Proposição 5.4 implica que $U_n \cap \widehat{X} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Afirmação 5.10. *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $v \in \mathbb{Z}^2$, toda folha regular de $\widehat{\mathcal{F}}$ que intersecta $\overline{U_n + v}$ tem um ponto final em $U_n + v$.*

Demonstração. Como cada U_n intersecta $\widehat{X}$, pela Afirmação 5.9 e $\widehat{X}$ é $\mathbb{Z}^2$-invariante, segue que $(U_n + v) \cap \widehat{X} \neq \emptyset$ para qualquer $v \in \mathbb{Z}^2$. Como a Afirmação 5.2 garante que $U_n + v$ não tem pontos errantes a Proposição 5.5 implica que toda folha regular de $\widehat{\mathcal{F}}$ que intersecta $\overline{U_n + v}$ tem um ponto final em $U_n + v$. □

Agora vamos mostrar a limitação de U_n para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmação 5.11. *U_n é limitado para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Suponha por contradição que não, isto é, que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U = U_n$ é ilimitado. Então poderíamos ter assumido desde o início da prova da Proposição 5.8 que $U = U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que as hipóteses valem para esse caso.

Em particular, a Afirmação 5.5 implica que $diam(P_v(U)) = \infty$ para todo $v \in \mathbb{Z}^2_*$.

As próximas Afirmações serão no sentido de chegar à uma contradição para provar a Afirmação 5.11

Seja W o conjunto formado pela união de U com todas as folhas de $\widehat{\mathcal{F}}$ que intersectam U.

Note que W é aberto, pois se $z \in W$ então ou $z \in U$ ou $z \in \Gamma \backslash U$, onde $\Gamma \cap U \neq \emptyset$. Como U é aberto, se $z \in U$ então existe $B_{\delta(z)} \subset U \subset W$.

E, se $z \in \Gamma \backslash U$, onde $\Gamma \cap U \neq \emptyset$, tome $p \in \widehat{X} \cap U$ ponto final de $\Gamma = \{\phi_t(z);\ t \in \mathbb{R}\}$, sem perda de generalidade, suponha que $p = \omega(\Gamma)$.

Como U é aberto segue que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(p) \subset U$ e para $t > 0$ suficientemente grande $\phi_t(z) \in B_\epsilon(p)$. E, por continuidade da ϕ_t existe $\delta > 0$ tal que se $w \in B_\delta(z)$, $\phi_t(w) \in B_\epsilon(p)$. Logo $B_\delta(z) \subset W$. Portanto, W é aberto. Ver figura 5.6.

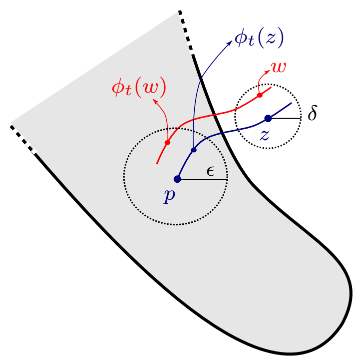

Figura 5.6: W é aberto.

Além disso, W é conexo por caminhos. De fato, sejam $z, w \in W$. Como U é simplesmente conexo então se $z, w \in U$ há um caminho que une z à w inteiramente contido em $U \subset W$. Se $z \in U$ e $w \in \Gamma \backslash U$, onde $\Gamma \cap U \neq \emptyset$ então sejam $\gamma \subset \Gamma$ o subarco que une w à $p \in \widehat{X} \cap U$ ponto final de Γ e σ qualquer arco contido em U unindo p à z. Assim $\gamma * \sigma$ é um caminho contido em W que une w à z. Se $z \in \Gamma_1 \backslash U$, onde $\Gamma_1 \cap U \neq \emptyset$ e $w \in \Gamma_2 \backslash U$, onde $\Gamma_2 \cap U \neq \emptyset$ então um caminho que une z à w seria o subarco γ_1 de Γ_1 unindo z ao ponto final p_1 de Γ_1 concatenado com um arco $\sigma \subset U$ qualquer que une p_1 ao ponto final p_2 de Γ_2 e esse concatenado com o subarco γ_2 de Γ_2 unindo p_2 à w. Isto é, $\gamma_1 * \sigma * \gamma_2$ é um arco contido em W unindo z à w.

Afirmação 5.12. *$W \cap (W + v) = \emptyset$ para cada $v \in \mathbb{Z}^2_*$.*

Demonstração. Suponha que não, então, como $\pi(U)$ é inessencial, existe $\Gamma \in \widehat{\mathcal{F}}$ que intersecta U e $U + v$, para algum $v \in \mathbb{Z}^2_*$. Então Γ une um ponto $p \in U \cap \widehat{X}$ à um ponto

$q \in (U+v) \cap \widehat{X}$. Seja σ qualquer arco em $U+v$ que une q à $p+v$. Sendo assim $\Gamma * \sigma$ une p à $p+v$. Então tomando $\Theta = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[\Gamma * \sigma] + nv$ é conexo, fechado, separa o $\mathbb{R}^2$ em duas componentes conexas e $diam(P_{v^\perp}(\Theta))$ é limitado.

O fato que $diam(P_{v^\perp}(U)) = \infty$ implica que $U + mv^\perp$ intersecta Θ para algum $m \in \mathbb{Z}_*$ e então $U + mv^\perp$ intersecta $[\Gamma * \sigma] + nv$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Mas $U + mv^\perp$ é disjunto de $[\sigma] + nv \subset U + (n+1)v$, pois caso contrário

$$U + mv^\perp \cap U + (n+1)v \neq \emptyset \Rightarrow U + mv^\perp - (n+1)v \cap U \neq \emptyset$$

e como $mv^\perp + (n+1)v \neq 0$ pois $m \neq 0$ teríamos que um transladado inteiro de U intersectaria U, constradizendo o fato que $\pi(U)$ é inessencial.

Logo $U + mv^\perp$ intersecta $\Gamma + nv$ e a Afirmação 5.10 implica que $\Gamma + nv$ tem ponto final em $U + mv^\perp$.

Por outro lado, temos que os pontos finais de $\Gamma + nv$ são $p + nv \in U + nv$ e $q + nv \in U + (n+1)v$, que analogamente ao caso anterior, ambos são disjuntos de $U + mv^\perp$. Essa contradição prova a Afirmação 5.12. $\square$

Agora seja $\mathcal{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F^n(W)$. Note que,

- $\mathcal{O}$ é aberto , pois W é aberto e F é um homeomorfismo;
- $F(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$, isto é, $\mathcal{O}$ é F-invariante;
- $\mathcal{O}$ é conexo. De fato, temos que W é conexo, pois é um conjunto aberto e conexo por caminho, além disso, como U é F-invariante segue que $U \cap F^n(U) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e então $W \cap F^n(W) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto é, $\mathcal{O}$ é união de conjunto conexos que se intersectam, portanto $\mathcal{O}$ é conexo.

Afirmação 5.13. *$\mathcal{O} \cap (U+v) = \emptyset$ para cada $v \in \mathbb{Z}^2_*$.*

Demonstração. Como $W \cap (W+v) = \emptyset$ para cada $v \in \mathbb{Z}^2_*$, em particular $W \cap (U+v) = \emptyset$. Como $U+v$ é F-invariante, segue que $F^k(W) \cap F^k(U+v) = F^k(W) \cap (U+v) = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. E, portanto, $\mathcal{O} \cap (U+v) = \emptyset$ para cada $v \in \mathbb{Z}^2_*$. $\square$

Afirmação 5.14. *$\mathcal{O} \cap (\mathcal{O}+v) = \emptyset$ para cada $v \in \mathbb{Z}^2_*$, isto é, $\pi(\mathcal{O})$ é inessencial.*

Demonstração. Suponha, por contradição que existe $v \in \mathbb{Z}^2_*$ tal que $\mathcal{O} \cap (\mathcal{O}+v) \neq \emptyset$. Como $\mathcal{O}$ é conexo, segue que existe um arco σ em $\mathcal{O}$ que une algum ponto $z \in \mathcal{O}$ à $z+v \in \mathcal{O}$. Seja $\Theta = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[\sigma] + nv$, então Θ é limitado da direção $v^\perp$ e como $diam(P_{v^\perp}(U)) = \infty$ implica que $U + mv^\perp$ intersecta Θ para algum $m \in \mathbb{Z}_*$. Mas então $U + mv^\perp$ intersecta $[\sigma] + nv$ para algum $n \in \mathbb{Z}$, então $U + mv^\perp - nv$ intersecta $[\sigma] \subset \mathcal{O}$. Como $m \neq 0$ segue que $mv^\perp - nv \neq 0$, contradizendo a Afirmação 5.13. □

Afirmação 5.15. *Se uma folha regular Γ de $\widehat{\mathcal{F}}$ intersecta U, então está contida em U.*

Demonstração. Seja $\widetilde{\mathcal{O}} = Fill(\mathcal{O})$. Segue que $\widetilde{\mathcal{O}}$ é simplesmente conexo e, ainda é aberto, F-invariante e $\pi(\widetilde{\mathcal{O}})$ é inessencial. Mas $U \subset \widetilde{\mathcal{O}}$ e a Afirmação 5.6 garante que U é maximal com respeito às propriedades anteriores, logo $U = \widetilde{\mathcal{O}}$. E, se uma folha Γ de $\widehat{\mathcal{F}}$ intersecta U, então pela construção de W, $\mathcal{O}$ e, consequentemente, de $\widetilde{\mathcal{O}}$ segue que $[\Gamma] \subset W \subset \mathcal{O} \subset \widetilde{\mathcal{O}} = U$. Provando a Afirmação 5.15. □

Afirmação 5.16. *$\partial U \subset \widehat{X}$.*

Demonstração. Suponha que não, isto é, suponha que existe $z \in \partial U$ regular. Então existe uma folha Γ de $\widehat{\mathcal{F}}$ que passa por z. Assim $\Gamma \cap \overline{U}$ e, então a Afirmação 5.10 implica que Γ tem um ponto final em U. Mas pela Afirmação anterior temos que Γ está inteiramente contida em U. Contradição, pois U é aberto, ou seja, $U \cap \partial U = \emptyset$ e mostramos que $z \in \partial U \cap \Gamma$ e $\Gamma \subset U$. Portanto $\partial U \subset \widehat{X}$. □

A Afirmação 5.16 é uma contradição com o fato de que $\widehat{X}$ é totalmente desconexo e não pode conter a fronteira de um disco topológico que é conexo.

Essa contradição completa a prova da Afirmação 5.11. Isto é, U_n é limitado para cada $n \in \mathbb{N}$.

Antes de completar a demonstração da Proposição 5.8 vamos mostrar que a limitação de cada U_n implica que a os discos $(\pi(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ são dois-a-dois disjuntos.

Afirmação 5.17. *Os discos $(\pi(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ são dois-a-dois disjuntos.*

Demonstração. Como por hipótese $diam(U_n) \to \infty$ quando $n \to \infty$ podemos construir uma subsequência de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ da seguinte forma, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $diam(U_{m_1}) >$

$diam(U_1)$, existe $m_2 \geq m_1$ tal que $diam(U_{m_2}) > diam(U_k)$ para $k \in \{1, 2\}$ e, sucessivamente, existe $m_{n+1} \geq m_n$ tal que $diam(U_{m_{n+1}}) > diam(U_k)$ para todo $k \in \{1, \cdots, n\}$. Então $\pi(U_{m_n}) \neq \pi(U_k)$ para todo $k \in \{1, \cdots, n\}$. Sendo assim, a subsequência $(U_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é projetada para discos dois-a-dois distintos e a Afirmação 5.7 implica que tais discos devem ser dois-a-dois disjuntos. Como não há perda de generalidade, podemos assumir $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como sendo tal subsequência. □

Agora podemos concluir a demonstração da Proposição 5.8. E, para finalizar vamos repetir as mesmas Afirmações que usamos para provar a Afirmação 5.11, com a diferença de que sabemos que U_n é limitado para cada $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $(\pi(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ são dois-a-dois disjuntos. Isto é, as Afirmações são as mesmas, mas as demonstrações mudam.

Sendo assim, seja W a união de U_1 com todas as folhas de $\widehat{\mathcal{F}}$ que o intersectam. Por justificativa análoga à anterior, W é aberto e conexo por caminhos, portanto, conexo.

Afirmação 5.18. *$W \cap (W + v) = \emptyset$ para todo $v \in \mathbb{Z}^2_*$*

Demonstração. Suponha que não vale, isto é, suponha que existe $v \in \mathbb{Z}^2_*$ tal que $W \cap (W + v) = \emptyset$. Como $U_1 \cap (U_1 + v) = \emptyset$, pois $\pi(U_1)$ é inessencial, segue que existe uma folha Γ de $\widehat{\mathcal{F}}$ que intersecta U_1 e $U_1 + v$.

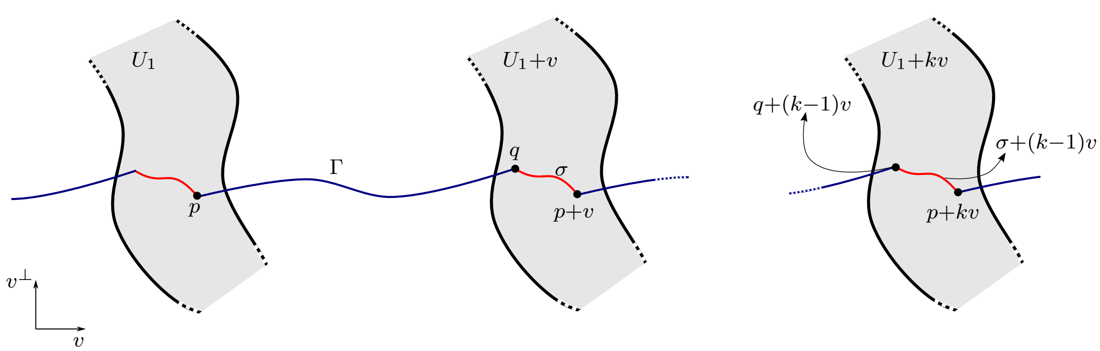

Figura 5.7: Ilustração da prova.

Então, Γ une um ponto $p \in U_1 \cap \widehat{X}$ à um ponto $q \in (U_1 + v) \cap \widehat{X}$. E, seja σ qualquer arco em $U_1 + v$ que une q à $p + v$. Sendo assim $\Gamma * \sigma$ é um arco unindo p à $p + v$. Tome $\Theta = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[\Gamma * \sigma] + nv$. Ver Figura 5.8.

O fato que $diam(P_{v^\perp}(U_n)) \to \infty$ quando $n \to \infty$ implica que dado n suficientemente grande, existe $w \in \mathbb{Z}$ tal que $U_n + w$ intersecta Θ e, então $U_n + w$ intersecta $[\Gamma * \sigma] + kv$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Mas $U_n + w$ é disjunto de $[\sigma] + kv \subset U_1 + (k+1)v$, pois caso contrário $U_1 + (k+1)v - w$ intersectaria U_n, contradizendo o fato que $\pi(U_1) \cap \pi(U_n) = \emptyset$.

Portanto, $U_n + w$ intersecta $[\Gamma] + kv$ e, pela Afirmação 5.10 $[\Gamma] + kv$ tem ponto final em $U_n + w$.

Por outro lado, sabemos que os pontos finais de $[\Gamma] + kv$ são $p + kv \in U_1 + kv$ e $q + kv \in U_1 + (k+1)v$ que ambos são disjuntos de $U_n + w$ novamente pelo fato de que $\pi(U_1) \cap \pi(U_n) = \emptyset$. □

Agora seja $\mathcal{O} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F^n(W)$ que é aberto, conexo e F-invariante, por justificativa análoga à anterior.

Afirmação 5.19. *$\mathcal{O} \cap (U_1 + v) = \emptyset$ para cada $v \in \mathbb{Z}^2_*$.*

Demonstração. Como $W \cap (W + v) = \emptyset$ para cada $v \in \mathbb{Z}^2_*$, em particular $W \cap (U_1 + v) = \emptyset$. Como $U_1 + v$ é F-invariante, segue que $F^k(W) \cap F^k(U_1 + v) = F^k(W) \cap (U_1 + v) = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. E, portanto, $\mathcal{O} \cap (U_1 + v) = \emptyset$ para cada $v \in \mathbb{Z}^2_*$. □

Afirmação 5.20. *$\mathcal{O} \cap (\mathcal{O} + v) = \emptyset$ para cada $v \in \mathbb{Z}^2_*$, isto é, $\pi(\mathcal{O})$ é inessencial.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $\mathcal{O} \cap (\mathcal{O} + v) \neq \emptyset$ para algum $v \neq 0$. Então existe um inteiro $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $F^{n_0}(W) \cap (\mathcal{O} + v) \neq \emptyset$, mas como $\mathcal{O}$ é F-invariante e f é homotópica à identidade, tomando $-n_0 \in \mathbb{Z}$ temos que $W \cap (\mathcal{O} + v) \neq \emptyset$.

Como $\pi(U_1)$ é inessencial, então temos que existem folhas Γ_1 e Γ_2 de $\widehat{\mathcal{F}}$ tais que Γ_1 tem pontos finais $p_1, q_1 \in \widehat{X}$ com $p_1 \in U_1$ ($\Rightarrow \Gamma_1 \in W \subset \mathcal{O}$) e Γ_2 tem pontos finais $p_2, q_2 \in \widehat{X}$ com $p_2 \in U_1 + v$ ($\Rightarrow \Gamma_2 \in \mathcal{O} + v$), tal que $F^k(\Gamma_2) \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Seja γ_1 o subarco de Γ_1 de p_1 à algum ponto de interseção $z \in F^k(\Gamma_2) \cap \Gamma_1$ e γ_2 um subarco de $F^k(\Gamma_2)$ de z à p_2 e σ qualquer arco em $U_1 + v$ que une p_2 à $p_1 + v$.

Como antes, o fato que $diam(P_{v^\perp}(U_n)) \to \infty$ implica que dado n suficientemente grande, existe $w \in \mathbb{Z}^2$ tal que $U_n + w$ intersecta $[\gamma_1 * \gamma_2 * \sigma] + mv$ para algum $m \in \mathbb{Z}$. Mas o fato de que $\pi(U_1) \cap \pi(U_n) = \emptyset$ implica que $U_n + w$ é disjunto de $[\sigma] + mv$, então $U_n + w$ intersecta ou $[\gamma_1] + mv$ ou $[\gamma_2] + mv$.

Isso significa que tomando $w' = w - mv$ temos que $U_n + w'$ intersecta $[\gamma_1]$ ou $[\gamma_2]$, isto é, $U_n + w'$ intersecta $[\Gamma_1]$ ou $F^k([\Gamma_2])$.

Mas como $U_n + w'$ é F-invariante então $U_n + w'$ intersecta $[\Gamma_1]$ ou $[\Gamma_2]$. Sendo assim a Afirmação 5.10 implica que um ponto final de $[\Gamma_1]$ ou $[\Gamma_2]$ está em $U_n + w'$. Como $p_1 \in U_1$ e $p_2 \in U_1 + v$ e $\pi(U_1) \cap \pi(U_n)$ segue que $q_1 \in U_n + w'$ ou $q_2 \in U_n + w'$.

Sem perda de generalidade, suponha que $q_1 \in U_n + w'$.

Com um argumento análogo ao anterior, dado $n' \in \mathbb{Z}$ tal que $n' > n$ segue que q_1 ou q_2 deverá pertencer à $U_{n'} + w''$ para algum $w'' \in \mathbb{Z}^2$. Como $q_1 \in U_n + w'$ e $\pi(U_n) \cap \pi(U_n') = \emptyset$, temos que $q_2 \in U_{n'} + w''$. Ver Figura 5.8.

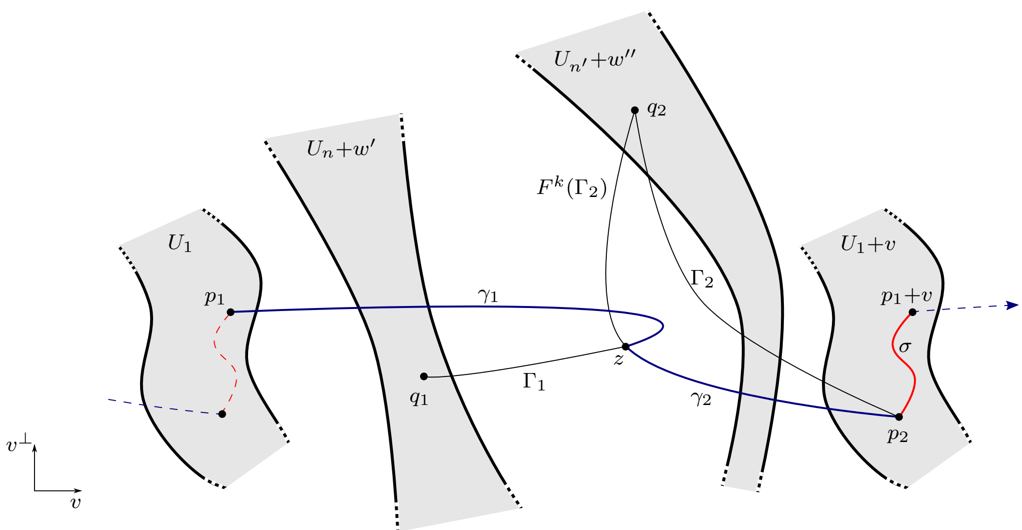

Figura 5.8: Ilustração da prova.

Repetindo esse processo uma terceira vez, isto é dado $n'' \in \mathbb{Z}$ tal que $n'' > n'$ concluímos que existe um $w''' \in \mathbb{Z}^2$ tal que $U_{n''} + w'''$ deverá conter q_1 ou q_2. Mas isso é impossível, pois $\pi(U_{n''})$ é disjunto de ambos $\pi(U_n)$ e $\pi(U_{n'})$. Chegando à uma contradição.

Portanto, $\pi(\mathcal{O})$ é inessencial. $\square$

As demonstrações das próximas Afirmações são análogas às demonstrações das Afirmações 5.15 e 5.16. Difere apenas no conjunto, ao invés de ser o conjunto U considera-se o conjunto U_1.

Afirmação 5.21. *Se uma folha regular* Γ *de* $\widehat{\mathcal{F}}$ *intersecta* U_1*, então está contida em* U_1*.*

Afirmação 5.22. $\partial U_1 \subset \widehat{X}$*.*

Sendo assim, a Afirmação 5.22 é, novamente, uma contradição com o fato de $\widehat{X}$ ser desconexo. E com essa, contradição finalizamos a demonstração da Proposição 5.8. E com ela, completamos a demonstração do Teorema B.

Considerações finais

Em [4] A. Koropecki, F. A. Tal além de estenderem os resultados obtidos a partir de uma dinâmica estritamente toral para superfícies, os autores melhoram de maneira significativa o Teorema A.

Usando uma versão generalizada do Teorema B (ver [4] Theorem A) onde não é necessário exigir que f seja não-anelar para concluir que se $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ é não-errante e $Fix(f)$ é inessencial então os discos periódicos são limitados e com o resultado obtido para superfícies (ver [4] Theorem C) chegam ao seguinte

Teorema A (nova versão). *Se $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ é não-errante, então vale uma das afirmações:*

(1) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $Fix(f^k)$ é totalmente essencial;

(2) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que f^k tem deslocamento uniformemente limitado;

(3) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que f^k tem um conjunto anelar essencial aberto e invariante;

(4) $Ess(f)$ é não vazio, totalmente essencial e conexo. $Ine(f)$ é união de uma família $\mathcal{U}$ de discos abertos periódicos dois a dois disjuntos tal que para cada $U \in \mathcal{U}$, $\mathcal{D}(U)$ é limitado por uma constante que depende somente do período de U.

Dizemos que uma aplicação $f \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$ tem deslocamento uniformemente limitado se existem uma constante $M > 0$ e um levantamento F de f para o $\mathbb{R}^2$ tal que $|F^n(\widehat{z}) - \widehat{z}| \leq M$ para todo $\widehat{z} \in \mathbb{R}^2$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Sendo assim, os itens (1A) e (2A) são divididos nos itens (1), (2) e (3). Pois,

(a) Se $Fix(f)$ é totalmente essencial segue o item (1);

(b) Se $Fix(f)$ é essencial, mas não totalmente essencial então existe uma região anelar invariante e, portanto vale o item (3);

(c) Se $Fix(f)$ é inessencial então

(c1) Se $Ine(f)$ é essencial, mas não totalmente essencial, então como $Ine(f)$ é aberto e f-invariante segue que $Fill(Ine(f))$ é um conjunto anelar essencial aberto e invariante, valendo o item (3);

(c2) Se $Ine(f)$ é totalmente essencial implica que f^k tem deslocamento uniformemente limitado para algum $k \in \mathbb{N}$, valendo o item (2);

(c3) E, finalmente, se $Ine(f)$ é inessencial então não valem os itens (1)-(3) e, portanto, vale o item (4)[2].

[2] Os itens (c2) e (c3) são consequencias dos resultados Theorem A e Theorem C obtidos em [4].

Referências Bibliográficas

[1] A. Fathi, *An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, Enseign. Math. **(2) 33(3-4)**, (1987), 315–322.

[2] A. Koropecki, F. A. Tal, *Area-preserving irrotational diffeomorphisms of the torus with sublinear diffusion*, Proc. Amer. Math. Soc., **142**, 1–8, (2014).

[3] A. Koropecki, F. A. Tal, *Bounded and unbounded behavior for area-preserving rational pseudo-rotations.* Proc. London Math. Soc. **109(3)**: 785–822 (2014).

[4] A. Koropecki, F. A. Tal, *Fully essential dynamics for area-preserving surface homeomorphisms* arXiv:1507.04611v1 (2015).

[5] A. Koropecki, F. A. Tal, *Strictly Toral Dynamics*, Invent. Math., **196** (2014), 339–381.

[6] D. Epstein, *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Math. **115** (1966) 83–107.

[7] E. L. Lima, *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*, 4ed. Rio de Janeiro: IMPA (2012).

[8] J. Franks, *Realizing rotation vectors for torus homeomorphisms*, Trans. Am. Math. Soc., **311(1)** (1989) 107–115.

[9] J. Franks, *Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms*, Ergod. Theory Dyn. Syst. **8** (1988) 99–107.

[10] J. Franks, *The rotation set and periodic points for torus homeomorphisms*, Dynamical Systems and Chaos, v.1, Hachioji (1994) 41–48.

[11] J. Llibre, R.S MacKay, *Rotation vectors and entropy for homeomorphisms of the torus isotopic to the identity*, Ergod. Theory Dyn. Syst. **11(1)** (1991) 115–128.

[12] H. Whitney, *Regular families of curves*, Ann. Math. **(2) 34(2)** (1933), 244–270.

[13] H. Whitney, *On regular families of curves*, Bull. Am. Math. Soc. **47** (1941), 145–147.

[14] M. Brown, J. M Kister, *Invariance of complementary domains of a fixed point set*, Proc. Am. Math. Soc. **91(3)**, (1984) 503–504.

[15] M. Misiurewicz, K. Ziemian, *Rotation Sets for Maps of Tori*, J. London. Math. Soc., **40** (1989), 490–506.

[16] M. Misiurewicz, K. Ziemian, *Rotation Sets and ergodic measures for torus homeomorphisms*, Fundamenta Mathematicae, **137(1)** (1991), 45–52.

[17] M. Viana, K. Oliveira, *Fundamentos da Teoria Ergódica*, Rio de Janeiro: SBM, **90**, 2014.

[18] O. Jaulent, *Existence d'un feuilletage positivement transverse à un homéomorphisme de surface.* arXiv:1206.0213v2 (2012).

[19] P. Le Calvez, *Une version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 102, 1–98 (2005)

[20] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer Verlag (1982).

[21] R. Tyrrell Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press (1997).

[22] R.L. Devaney *An introduction to chaotic dynamical systems*, Second Edition, Addison Wesley, Redwood, CA (1989).

[23] S. Zanata *Area-preserving diffeomorphisms of the torus whose rotation sets have non-empty interior.* Ergod. Theory Dyn. Syst. (Print), **35**, p. 1–33, (2013).

[24] T. Jäger, *Elliptic Stars in a Chaotic Night*, J. London. Math. Soc., **84** (2011), 595–611.

[25] T. Jäger, *Linearization of conservative toral homeomorphisms*, Invent. Math. **176(3)**, (2009), 601–616.

[26] T. Jäger, F. Tal, *Irrational rotation factors for conservative torus homeomorphisms*, arXiv:1410.366v2 (2014).

[27] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw–Hill Internetional Editions, Third Edition, 1987.