

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Centro Global e o Problema da Injetividade  
Global no Plano**

**Paulo Donizete Pereira Machado**

**Orientador: Prof. Dr. Fabio Scalco Dias**

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 2 DE JANEIRO DE 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Centro Global e o Problema da Injetividade Global no Plano

**Paulo Donizete Pereira Machado**

**Orientador: Prof. Dr. Fabio Scalco Dias**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Ciências em Matemática

**Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias**

ITAJUBÁ – MG

2 DE JANEIRO DE 2023

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Ana B. P. Machado e José Galvão P. Machado, minha avó Maria Conceição B. de Moraes, por sempre me ajudarem e me apoiarem nos meus estudos.

Ao professor Luis Fernando de Osório Mello, pela colaboração nesse trabalho.

Ao professor Fabio Scalco Dias, meu orientador, pela ajuda, pela dedicação e paciência.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro, das bolsas de estudo durante o mestrado.

# Resumo

A Conjectura Jacobiana Real no plano, diz que uma aplicação polinomial do plano no plano com Jacobiano não nulo é injetora. Sabemos que essa conjectura é falsa em geral. Mas, é de grande interesse encontrar classes de aplicações que satisfaçam as hipóteses e tornem essa conjectura verdadeira. Neste trabalho, apresentamos uma maneira de abordar esse problema utilizando a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. Mais especificamente, veremos a conexão entre a Conjectura Jacobiana Real no plano e a existência de um centro global de um campo de vetores Hamiltoniano.

**Palavras-chave:** Conjectura Jacobiana, Centro Global, Compactificação de Poincaré, Injetividade Global, Campo Hamiltoniano.

# Abstract

The Real Jacobian Conjecture in the plane says that a polynomial map of the plane in the plane with non-zero Jacobian is one-to-one. We know that this conjecture is false in general. But, it is of great interest to find classes of maps satisfying the hypotheses in which the conjecture is true. In this work, we present a way to study this problem using the qualitative theory of differential equations. More specifically, we will see the connection between the Real Jacobian Conjecture in the plane and the existence of a global center of a Hamiltonian vector field.

**Keywords:** Jacobian Conjecture, Global Center, Poincaré Compactification, Global Injectivity, Hamiltonian Field.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Índice</b>	<b>iv</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Conjecturas Jacobianas</b>	<b>5</b>
1.1 Injetividade global e as Conjecturas Jacobianas . . . . .	5
1.2 Respostas às Conjecturas Jacobianas . . . . .	8
<b>2 Conexão entre injetividade global e centro global em <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>14</b>
2.1 Centro Global . . . . .	14
2.2 Teorema de Sabatini . . . . .	16
2.3 Generalização do Teorema de Sabatini . . . . .	21
<b>3 Condições para que a Conjectura Jacobiana Real em <math>\mathbb{R}^2</math> seja verdadeira</b>	<b>34</b>
3.1 A Compactificação de Poincaré . . . . .	34
3.2 Índice topológico . . . . .	43
3.3 Condições suficientes para a CJR em $\mathbb{R}^2$ - parte 1 . . . . .	44

3.4	Condições suficientes para a CJR em $\mathbb{R}^2$ - parte 2 . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Um sistema diferencial polinomial de grau par não tem centro global</b>	<b>57</b>
4.1	Prova do Teorema 4.1 . . . . .	58
	<b>Conclusões</b>	<b>63</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>64</b>

# Lista de Figuras

2.1	Centro linear. . . . .	15
2.2	Centro não global. . . . .	16
2.3	Parabolóide em $\mathbb{R}^3$ , dado por $M_F(x, y)$ . . . . .	20
2.4	Na figura a esquerda temos o retrato de fase do campo $H_{M_F}$ e na figura da direita, temos as curvas de nível de $M_F$ juntamente com seu gráfico. . . . .	20
2.5	$0 < h \in M_F(U)$ se, e somente se, $S_h \cap F(U) \neq \emptyset$ . . . . .	22
2.6	Ilustração do anel $A$ cujo bordo é $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . . . . .	25
2.7	$F$ é injetora em órbitas $\Gamma_h$ distintas. . . . .	25
2.8	Ilustração para a prova da afirmação 2. . . . .	27
2.9	Ilustração da prova do Corolário 2.1. . . . .	29
2.10	Retrato de fase do campo $H_{M_F}$ juntamente com o anel periódico, à esquerda. À direita, gráfico da função $M_F$ dada no Exemplo 2.4. . . . .	31
2.11	Retrato de fase perto da origem de $H_{M_F}$ . As curvas destacadas representam o bordo do anel periódico, à esquerda. À direita, temos o gráfico da função $M_F$ dada no Exemplo 2.5. . . . .	33
3.1	Projeção central. . . . .	36
3.2	Cartas locais sobre a esfera de Poincaré. . . . .	37
3.3	Retrato de fase no disco de Poincaré do sistema (3.7). . . . .	42
3.4	Setores de um ponto singular. . . . .	43
3.5	Ilustração da prova da Afirmação 3. . . . .	47
3.6	Retrato de fase global de $H_{M_F}$ . . . . .	49
3.7	Retrato de fase global de $H_{M_F}$ . . . . .	51



3.8	Ilustração de um setor hiperbólico e dois setores hiperbólicos degenerados, nos quais as duas separatrizes estão contidas em $\mathbb{S}^1$ . . . . .	53
4.1	Fluxo das órbitas numa vizinhança de $(U, V) = (0, 0)$ . . . . .	61

# Introdução

A Conjectura Jacobiana Real (CJR) no plano, diz que uma aplicação polinomial do plano no plano com Jacobiano não nulo é injetora. Sabemos que o Teorema da Função Inversa garante que tal aplicação é localmente injetiva em cada um dos pontos do seu domínio. Mas, não podemos garantir que ela seja globalmente injetiva. Essa conjectura tem sido objeto de estudo para muitos matemáticos. Em 1994, no artigo [12], Sergey Pinchuk exibiu uma aplicação polinomial satisfazendo as hipóteses da conjectura mas que não é injetora. Ou seja, a conjectura é falsa em geral. Mesmo assim, é de grande interesse encontrar classes de aplicações que satisfaçam as hipóteses e tornem essa conjectura verdadeira.

Neste trabalho, apresentamos uma maneira de abordar esse problema utilizando a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. Mais especificamente, veremos a conexão entre a CJR no plano e a existência de um centro global de um campo de vetores Hamiltoniano. Essa conexão, foi apresentada em 1998, no artigo [15], por M. Sabatini. A ideia básica é a seguinte.

Considere  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação polinomial com  $F(0, 0) = (0, 0)$ . Defina a função  $M_F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$M_F(x, y) = \frac{\|F(x, y)\|^2}{2} = \frac{(f(x, y))^2 + (g(x, y))^2}{2}.$$

A partir desta função  $M_F$  defina o campo de vetores Hamiltoniano associado à  $M_F$ , ou seja,  $H_{M_F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por

$$H_{M_F}(x, y) = \left( -\frac{\partial M_F(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial M_F(x, y)}{\partial x} \right).$$

**Teorema 0.1 (Teorema de Sabatini).** *Considere  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação polinomial com  $F(0,0) = (0,0)$  e com Jacobiano diferente de zero em todo ponto  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ .*

*As seguintes duas afirmações são equivalentes:*

1. *A origem é um centro global de  $H_{M_F}$ .*
2.  *$F$  é um difeomorfismo global.*

Em outras palavras, nas hipóteses da CJR em  $\mathbb{R}^2$ , construímos o campo de vetores Hamiltoniano  $H_{M_F}$ . Se esse campo possuir a origem como um centro global, então a aplicação  $F$  é um difeomorfismo global, em particular é globalmente injetora. Assim, temos uma nova maneira de abordar o problema; devemos procurar classes específicas de aplicações polinomiais,  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que satisfaçam as hipóteses da conjectura, tal que o campo de vetores  $H_{M_F}$  tenha a origem como um centro global. Foi isso que fizeram F. Braun e J. Llibre, em 2015, no artigo [3], através do seguinte teorema.

**Teorema 0.2 (Braun, Llibre).** *Considere  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto. Suponha que  $\text{grau}(f) = \text{grau}(g) = m > 1$ . Se os polinômios homogêneos de mais altos graus  $f_m$  e  $g_m$  de  $f$  e de  $g$ , respectivamente, não têm fatores lineares reais comuns, então  $F$  é injetora.*

O Teorema 0.2 dá uma condição suficiente, mas não necessária, para a injetividade global do campo de vetores  $F$ . Essencialmente, a prova do Teorema 0.2, consiste em mostrar que, nessas condições,  $H_{M_F}$  tem um centro global na origem e, pelo Teorema de Sabatini, segue que  $F$  é um difeomorfismo global. Portanto,  $F$  é injetora. Todas as classes de aplicações  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  nas hipóteses do Teorema 0.2, satisfazem afirmativamente a CJR em  $\mathbb{R}^2$ .

Em 2016, F. Braun, J. Giné e J. Llibre, no artigo [2] generalizaram o resultado obtido no Teorema 0.2.

**Teorema 0.3 (Braun, Giné, Llibre).** *Considere  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto e tal que  $F(0,0) = (0,0)$ , e o campo de vetores polinomial  $H_{M_F} = (P(x,y), Q(x,y))$ . Suponha que os polinômios homogêneos de mais altos graus de  $P$  e de  $Q$  não têm fatores lineares reais comuns. Então,  $F$  é injetora.*

Novamente, o Teorema 0.3 fornece apenas uma condição suficiente, mas não necessária, para a injetividade global do campo de vetores  $F$ . A prova do Teorema 0.3 também consiste em mostrar que nas hipóteses dadas, o campo de vetores  $H_{M_F}$  tem um centro global na origem, pelo Teorema de Sabatini,  $F$  é um difeomorfismo global, assim  $F$  é injetora.

Ao longo desta dissertação mostraremos também que o Teorema 0.3 é mais geral do Teorema 0.2, isto é, há situações em que não podemos utilizar o Teorema 0.2, mas podemos utilizar o Teorema 0.3. Nas hipóteses dos teoremas,  $F$  é uma aplicação polinomial, assim o campo de vetores  $H_{M_F}$  também é polinomial, logo, podemos aplicar a compactificação de Poincaré sobre esse campo e analisar os pontos de equilíbrio no infinito. Nas hipóteses do Teorema 0.2, o campo de vetores  $H_{M_F}$ , quando compactificado, não possui pontos de equilíbrio no infinito. Já nas hipóteses do Teorema 0.3, o campo  $H_{M_F}$  quando compactificado pode ter pontos de equilíbrio no infinito.

Em 2017, no resultado principal de [4], F. Braun e J. Llibre, obtiveram uma generalização do Teorema de Sabatini. As hipóteses do teorema a seguir, não exigem que a aplicação  $F = (f, g) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  seja polinomial e nem que esteja definida sobre o plano todo, basta um aberto  $U$  subconjunto do plano.

**Teorema 0.4 (Braun, Llibre).** *Considere  $F = (f, g) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação de classe  $C^2$ , com  $F(Z_0) = (0, 0)$ ,  $Z_0 \in U$ , e com Jacobiano diferente de zero em todo ponto de  $U$ . O ponto de equilíbrio  $Z_0$  é um centro global de  $H_{M_F}$  se, e somente se,  $F$  é injetora e  $F(U) = \mathbb{R}^2$  ou  $F(U) = B((0, 0), \delta)$ ,  $\delta > 0$ .*

No mesmo artigo, F. Braun e J. Llibre, apresentam uma maneira de encontrar o anel periódico do centro  $Z_0$  de  $H_{M_F}$ . Neste caso, se  $Z_0$  for um centro global de  $H_{M_F}$ , seu anel periódico será o subconjunto  $U \setminus \{Z_0\}$ .

Finalizamos esta dissertação apresentando o resultado principal do artigo [17], no qual C. Valls e J. Llibre, demonstraram o seguinte teorema.

**Teorema 0.5 (Llibre, Valls).** *Um sistema diferencial polinomial no plano de grau par não tem centro global.*

A ideia é basicamente calcular a compactificação de Poincaré do sistema diferencial polinomial e verificar que os pontos de equilíbrio em  $\mathbb{S}^1$  não possuem setores hiperbólicos degenerados. Em toda esta dissertação, estamos considerando conhecidos alguns conceitos e resultados básicos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Excelentes referências para esses conceitos e resultados são [8] e [16]. Finalmente, nesta dissertação utilizamos alguns *softwares* para geração de figuras tais como, Mathematica, Geogebra, Inkscape e P4.

Esta dissertação está estruturada da seguinte maneira:

- Capítulo 1, apresentamos as Conjecturas Jacobianas e algumas respostas encontradas na literatura.
- Capítulo 2, apresentamos a demonstração do Teorema de Sabatini, do Teorema 0.4 e alguns exemplos.
- Capítulo 3, apresentamos alguns conceitos preliminares, a demonstração do Teorema 0.2, e do Teorema 0.3. Mostramos que o Teorema 0.3 generaliza o Teorema 0.2 e daremos alguns exemplos.
- Capítulo 4, apresentamos a demonstração do Teorema 0.5.

# Capítulo 1

## Conjecturas Jacobianas

Neste capítulo apresentaremos as Conjecturas Jacobianas e algumas respostas encontradas na literatura. Daremos enfoque na Conjectura Jacobiana Real em  $\mathbb{R}^2$ , que é nosso principal interesse.

### 1.1 Injetividade global e as Conjecturas Jacobianas

Um problema bastante abordado em matemática é, dada uma aplicação, em que condições ela admite uma inversa? Se admite, essa inversa é global? Sabemos que a definição de aplicação exige que cada ponto do domínio esteja associado a um único ponto na imagem, assim a injetividade da aplicação garante que possamos calcular a inversa. Para existir uma inversa global temos que garantir a injetividade global.

Mas, o problema assim colocado é muito geral e difícil. Deste modo, para tentar responder essa questão, utilizam-se estruturas da Análise. É usual trabalhar com condições relacionadas ao Jacobiano da função ou aplicação. Temos as seguintes definições.

**Definição 1.1 (Matriz Jacobiana).** *Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação, com domínio e imagem no espaço euclidiano  $n$  e  $m$  dimensionais, respectivamente. Tal aplicação é definida por um vetor de  $m$  componentes, sendo cada componente uma aplicação  $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . As derivadas parciais dessas funções em um dado ponto  $x_0$  do domínio podem ser organizadas numa matriz  $m \times n$ , que é denominada matriz Jacobiana da aplicação  $F$*

no ponto  $x_0$ . Ao longo da dissertação denotaremos a matriz Jacobiana da aplicação  $F$  no ponto  $x_0$  por  $DF(x_0)$ .

$$DF(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_0) \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(x_0) \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}.$$

**Definição 1.2 (Jacobiano).** *Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^1$ . Chamamos de Jacobiano o determinante da matriz Jacobiana da aplicação no ponto  $x_0$ .*

$$\det(DF(x_0)) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_0) \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(x_0) \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, supondo que a aplicação tem Jacobiano não nulo em cada ponto, o que pode ser dito em relação à injetividade?

Neste contexto, a passagem do pontual para o local é dada pelo Teorema da Função Inversa, isto é, se uma aplicação  $F$  possui Jacobiano não nulo num ponto, então a injetividade é garantida pelo menos numa vizinhança  $U$  desse ponto. Uma demonstração do Teorema 1.1 pode ser encontrada na página 239 do livro [14].

**Teorema 1.1 (Teorema da Função Inversa).** *Considere  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , e  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Suponha que a transformação linear*

$$DF(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*seja um isomorfismo. Então, existem vizinhanças  $U_0$  e  $V_0$  de  $x_0$  e de  $F(x_0)$ , respectivamente, tais que  $F|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$ .*

Porém, sabemos que a condição anterior não é suficiente para garantir injetividade global. Considere o seguinte exemplo.

**Exemplo 1.1.** *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicação definida por*

$$F(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)).$$

*Calculando o Jacobiano temos*

$$\det \begin{bmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{bmatrix} = e^{2x} \cos^2(y) + e^{2x} \sin^2(y) = e^{2x} > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

*Segue do Teorema 1.1 que a função  $F$  é localmente injetora, mas não é globalmente injetora. De fato, tome  $(0, 0) \neq (0, 2\pi)$  e note que  $F(0, 0) = (1, 0) = F(0, 2\pi)$ .*

A partir dos comentários anteriores, podemos formular a seguinte pergunta: quais são os mecanismos que influenciam a passagem da invertibilidade local para a invertibilidade global? No caso de aplicações polinomiais definidas em  $\mathbb{C}^n$ , Ott-Heinrich Keller introduziu em 1939, no artigo [11], a Conjectura Jacobiana.

**Conjectura 1.1 (Conjectura Jacobiana).** *Considere  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  uma aplicação polinomial com Jacobiano constante não nulo. Então,  $F$  é invertível e a sua inversa é uma aplicação polinomial.*

No espaço  $\mathbb{R}^n$  esta conjectura é enunciada da seguinte maneira.

**Conjectura 1.2 (Conjectura Jacobiana em  $\mathbb{R}^n$  (CJ)).** *Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação polinomial com Jacobiano constante não nulo. Então,  $F$  é invertível e a sua inversa é uma aplicação polinomial.*

Se for exigido apenas que o Jacobiano seja não nulo, mas não necessariamente constante, na Conjectura Jacobiana Real temos o seguinte.

**Conjectura 1.3 (Conjectura Jacobiana Real (CJR)).** *Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto. Então,  $F$  é invertível.*

Nessa dissertação, o foco principal é a Conjectura Jacobiana Real em  $\mathbb{R}^2$ , enunciada a seguir.

**Conjectura 1.4 (Conjectura Jacobiana Real (CJR) no plano).** *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto. Então,  $F$  é invertível.*



As Conjecturas Jacobianas são consideradas como um dos principais problemas matemáticos do século XX e XXI. Desde que a Conjectura Jacobiana foi introduzida por Ott-Heinrich Keller, em 1939, muitos matemáticos têm se interessado por ela. Como veremos na próxima seção, há algumas respostas encontradas na literatura.

## 1.2 Respostas às Conjecturas Jacobianas

Temos que se uma aplicação polinomial é injetora, então ela é sobrejetora. Isto é, basta garantir injetividade de uma aplicação e a sobrejetividade será uma consequência. Esse resultado, já conhecido anteriormente, foi provado, em 1995, por W. Rudin em [13]. Apresentamos ele como um lema, apenas para os casos reais, mas vale também em  $\mathbb{C}^n$ .

**Lema 1.1.** *Nas hipóteses das Conjecturas Jacobianas Reais, se  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação polinomial globalmente injetora, então ela é sobrejetora.*

Vejamos a seguinte definição.

**Definição 1.3.** *Uma aplicação  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é chamada própria se  $F^{-1}(K) \subset \mathbb{R}^n$  (imagem inversa de  $K$ ) é um compacto sempre que  $K \subset \mathbb{R}^m$  for um compacto ou, equivalentemente, a aplicação contínua  $F$  é própria se  $\|F(X)\| \rightarrow \infty$  sempre que  $\|X\| \rightarrow \infty$ .*

Uma resposta afirmativa à Conjectura Jacobiana Real foi dada pelo Teorema de Hadamard. O Teorema a seguir pode ser encontrado no artigo [9], de Gordon.

**Teorema 1.2 (Teorema de Hadamard).** *Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^1$  com Jacobiano não nulo em todo ponto. Então  $F$  é um difeomorfismo global se, e somente se,  $F$  é própria.*

Contudo, de maneira geral, é difícil checar se uma aplicação é própria. Em 1994, S. Pinchuk provou, no artigo [12], que a Conjectura Jacobiana Real é falsa em  $\mathbb{R}^2$ , ele exibiu uma classe de exemplos de aplicações  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto, que não é injetora.

**Teorema 1.3 (Teorema de Pinchuk).** *Existe  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto, que não é injetora. A função  $f$  é dada por*

$$f(x, y) = (x^2y - x + 1)(x^4y^3 - 3x^3y^2 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 2xy - x + y),$$

e tem grau 10. A função  $g$  é mais extensa e possui grau 40.

$$\begin{aligned} g(x, y) = & \frac{33}{4} - 61x + \frac{381}{2}x^2 - 385x^3 + 478x^4 - 357x^5 + \frac{363}{2}x^6 - 75x^7 + \frac{75}{4}x^8 + 50y + \\ & 1352x^2y - 3512x^3y + 6201x^4y - 7262x^5y + 5616x^6y - 3078x^7y + 1275x^8y - \\ & 300x^9y + 91y^2 - 758xy^2 + 3575x^2y^2 - 11564x^3y^2 + \frac{53551}{2}x^4y^2 - 44241x^5y^2 + \\ & 51247x^6y^2 - 41400x^7y^2 + \frac{48033}{2}x^8y^2 - 9975x^9y^2 + 2250x^{10}y^2 + 69y^3 - 696xy^3 + \\ & 4224x^2y^3 - 17440x^3y^3 + 52156x^4y^3 - 115356x^5y^3 + 187781x^6y^3 - 221654x^7y^3 + \\ & 187785x^8y^3 - 114180x^9y^3 + 47775x^{10}y^3 - 10500x^{11}y^3 + \frac{71}{4}y^4 - 225xy^4 + \\ & \frac{4017}{2}x^2y^4 - 11625x^3y^4 + \frac{94875}{2}x^4y^4 - 142133x^5y^4 + \frac{635821}{2}x^6y^4 - 530121x^7y^4 + \\ & \frac{2605285}{4}x^8y^4 - 581115x^9y^4 + \frac{739035}{2}x^{10}y^4 - 156975x^{11}y^4 + 34125x^{12}y^4 + \\ & 225x^2y^5 - 2550x^3y^5 + 17109x^4y^5 - 77112x^5y^5 + 248804x^6y^5 - 591740x^7y^5 + \\ & 1045365x^8y^5 - 1362782x^9y^5 + 1290249x^{10}y^5 - 861498x^{11}y^5 + 375375x^{12}y^5 - \\ & 81900x^{13}y^5 + \frac{2475}{2}x^4y^6 - 13125x^5y^6 + 75096x^6y^6 - 283248x^7y^6 + \\ & \frac{1511655}{2}x^8y^6 - 1465801x^9y^6 + 2072917x^{10}y^6 - 2109312x^{11}y^6 + \frac{2986137}{2}x^{12}y^6 - \\ & 675675x^{13}y^6 + 150150x^{14}y^6 + 4125x^6y^7 - 40500x^7y^7 + 203094x^8y^7 - \\ & 653940x^9y^7 + 1457301x^{10}y^7 - 2302442x^{11}y^7 + 2567250x^{12}y^7 - 1955448x^{13}y^7 + \\ & 933075x^{14}y^7 - 214500x^{15}y^7 + \frac{37125}{4}x^8y^8 - 83250x^9y^8 + 366219x^{10}y^8 - \\ & 1004346x^{11}y^8 + \frac{3699443}{2}x^{12}y^8 - 2324835x^{13}y^8 + \frac{3892185}{2}x^{14}y^8 - 997425x^{15}y^8 + \\ & \frac{482625}{2}x^{16}y^8 + 14850x^{10}y^9 - 119700x^{11}y^9 + 456216x^{12}y^9 - 1047060x^{13}y^9 + \\ & 1546890x^{14}y^9 - 1465530x^{15}y^9 + 825825x^{16}y^9 - 214500x^{17}y^9 + 17325x^{12}y^{10} - \\ & 122850x^{13}y^{10} + 396234x^{14}y^{10} - 735192x^{15}y^{10} + \frac{1645083}{2}x^{16}y^{10} - 525525x^{17}y^{10} + \\ & 150150x^{18}y^{10} + 14850x^{14}y^{11} - 90000x^{15}y^{11} + 236421x^{16}y^{11} - 333828x^{17}y^{11} + \\ & 252525x^{18}y^{11} - 81900x^{19}y^{11} + \frac{37125}{4}x^{16}y^{12} - 46125x^{17}y^{12} + \frac{185313}{2}x^{18}y^{12} - \\ & 88725x^{19}y^{12} + 34125x^{20}y^{12} + 4125x^{18}y^{13} - 15750x^{19}y^{13} + 21525x^{20}y^{13} - \\ & 10500x^{21}y^{13} + \frac{2475}{2}x^{20}y^{14} - 3225x^{21}y^{14} + 2250x^{22}y^{14} + 225x^{22}y^{15} - \end{aligned}$$

$$300x^{23}y^{15} + \frac{75}{4}x^{24}y^{16} - 346yx.$$

Em 2011, em [6], Campbell mostrou que o grau da segunda componente da aplicação polinomial de Pinchuk pode ser reduzido a 25.

Embora, em geral, a CJR no plano seja falsa, é de grande interesse encontrar condições para que ela seja verdadeira para classes específicas de aplicações. Há algumas maneiras de abordar esse problema em  $\mathbb{R}^2$ . Vejamos a seguir alguns teoremas que fornecem respostas analisando os conjuntos de nível das funções coordenadas da aplicação  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Teorema 1.4.** *Seja  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação de classe  $C^\infty$  com Jacobiano não nulo em todo ponto. Se os conjuntos de nível de  $f$  ou de  $g$  são conexos, então  $F$  é injetora.*

**Prova do Teorema 1.4:**

Como o Jacobiano de  $F = (f, g)$  é não nulo em todo ponto, segue que  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são submersões. Defina o campo de vetores Hamiltoniano associado a  $f$  por

$$H_f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad H_f(x, y) = (-f_y(x, y), f_x(x, y)).$$

As curvas de nível de  $f$  definem uma folheação,  $F_f$ , sem singularidades em  $\mathbb{R}^2$ , a qual coincide com as órbitas de  $H_f$ . Assim, cada componente conexa da curva de nível  $f^{-1}(c)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , é composta por uma órbita de  $H_f$ . Suponha que os conjuntos de nível de  $f$  são conexos (para  $g$  é análogo). Seja  $\phi_t(x, y)$  o fluxo do campo de vetores  $H_f$ . Como o Jacobiano de  $F = (f, g)$  é não nulo em todo ponto,

$$\frac{d}{dt}(g(\phi_t(x, y))) = \det(D(f, g)(\phi_t(x, y))) \neq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Assim, a derivada é sempre positiva ou sempre negativa. Isto implica que a função  $g$  é monótona ao longo das órbitas de  $H_f$ . Considere  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$  arbitrários. Queremos mostrar que  $F(x_1, y_1) \neq F(x_2, y_2)$ . Se  $f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2)$ , então  $F(x_1, y_1) \neq F(x_2, y_2)$  e a prova do teorema termina.

Consideremos assim,  $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = a \in \mathbb{R}$  e seja  $L = f^{-1}(a)$ . Por hipótese,  $L \in F_f$  tem apenas uma componente conexa a qual contém  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ . Mas,  $g$  é monótona ao longo da folha  $L$ . Então,  $g(x_1, y_1) \neq g(x_2, y_2)$ , o que implica que  $F(x_1, y_1) \neq F(x_2, y_2)$ . ■

Se considerarmos  $F$  no Teorema 1.4 como aplicação polinomial temos o seguinte resultado.

**Teorema 1.5.** *Seja  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto. Então,  $F$  é injetora se, e somente se, os conjuntos de nível das aplicações  $f$  e  $g$  são conexos.*

**Prova do Teorema 1.5:**

( $\Leftarrow$ ) Suponha que os conjuntos de nível de  $f$  e de  $g$  sejam conexos. Pelo Teorema 1.4,  $F$  é injetora.

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $F$  é injetora. Pelo Lema 1.1, sendo  $F$  polinomial,  $F$  é sobrejetora, logo um difeomorfismo global. Considere  $a \in \mathbb{R}$ , arbitrário. É simples observar que  $f^{-1}(a) = F^{-1}(a \times \mathbb{R})$ , o qual é um conjunto conexo. Raciocínio análogo vale para a função coordenada  $g$ , terminando a prova do teorema. ■

Vejamos no seguinte exemplo que a hipótese de  $F$  ser polinomial no Teorema 1.5 é essencial.

**Exemplo 1.2.** *Considere a aplicação  $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por*

$$F = ((1 - x^2)e^y, -xe^y).$$

*O Jacobiano é dado por*

$$\det(DF(x, y)) = \det \begin{bmatrix} -2xe^y & e^y - x^2e^y \\ -e^y & -xe^y \end{bmatrix} = e^{2y}(x^2 + 1) > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

*Pelo Teorema 1.4, como os conjuntos de nível de  $g$  são conexos, então  $F$  é injetora. No*

entanto,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{0\}) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (1 - x^2)e^y = 0\} \\ &= \{-1, 1\} \times \mathbb{R}, \end{aligned}$$

o qual não é conexo.

Há na literatura algumas respostas afirmativas à Conjectura Jacobiana Real em  $\mathbb{R}^2$  considerando os graus das componentes de  $F = (f, g)$ . Por exemplo, em 2001, Gwozdziwicz provou, em [10], que a CJR no plano é verdadeira se os graus de  $f$  e de  $g$  são menores ou iguais a três.

**Teorema 1.6 (Gwózdziwicz).** *Seja  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto. Então  $F$  é injetora se os graus de  $f$  e  $g$  são menores ou iguais a três.*

Em 2010, F. Braun e J. R. dos Santos, em [1], melhoraram o resultado anterior. Os autores provaram que a CJR no plano é verdadeira se os graus de  $f$  ou de  $g$  são menores ou iguais a três.

**Teorema 1.7 (Braun e dos Santos Filho).** *Seja  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto. Então,  $F$  é injetora se o grau de uma das funções coordenadas de  $F$  seja menor ou igual a três, independentemente do grau da outra.*

Em 2016, F. Braun e B. Oréface-Okamoto, em [5], melhoraram o resultado anterior.

**Teorema 1.8.** *Seja  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto. Então,  $F$  é injetora se o grau de uma das funções coordenadas de  $F$  seja menor ou igual a quatro, independente do grau da outra.*

**Observação 1.1.** *Vimos que, no contra-exemplo apresentado por Pinchuck, uma das funções coordenadas tem grau dez. Diante do que vimos, fica em aberto a seguinte questão.*

**Questão 1.1.** *O que pode ser dito a respeito da Conjectura Jacobiana Real no plano se o grau de uma das funções coordenadas é maior ou igual a cinco e menor ou igual a nove?*

No Capítulo 2 dessa dissertação apresentamos numa maneira de abordar a CJR em  $\mathbb{R}^2$  utilizando a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais.

# Capítulo 2

## Conexão entre injetividade global e centro global em $\mathbb{R}^2$

Neste capítulo veremos como, em 1998, no artigo [15], M. Sabatini estabeleceu a conexão entre a CJR no plano e a existência de um centro global de um campo de vetores Hamiltoniano. Mas, antes, faremos uma breve descrição de centros no plano.

### 2.1 Centro Global

Considere  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dado por  $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  e  $p$  um ponto de equilíbrio de  $X$ . Temos as seguintes definições.

**Definição 2.1.** *Um ponto de equilíbrio  $p$  de  $X$  é dito ser um centro se existir uma vizinhança  $V_p$  preenchida por órbitas periódicas exceto no ponto  $p$ .*

Se  $p$  é um centro, podemos definir o anel periódico.

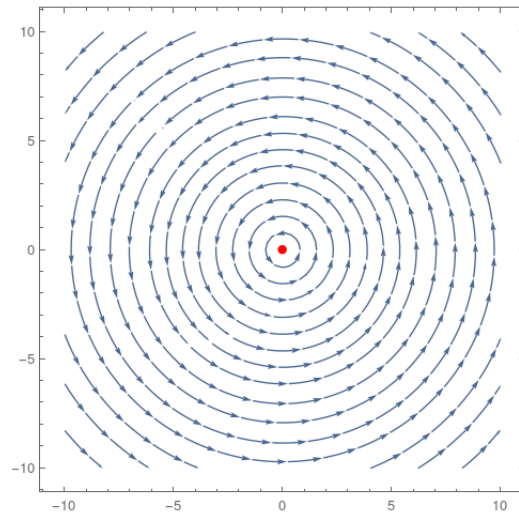
**Definição 2.2.** *O anel periódico do centro  $p$  é a maior (no sentido da inclusão) vizinhança  $V_p$  preenchida por órbitas periódicas exceto no ponto  $p$ .*

**Definição 2.3.** *Dizemos que um centro  $p$  é global se seu anel periódico é  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ .*

**Definição 2.4.** *Dizemos que  $p$  é um centro não degenerado se o Jacobiano de  $X$  em  $p$  é não nulo.*

Vejamos alguns exemplos básicos.

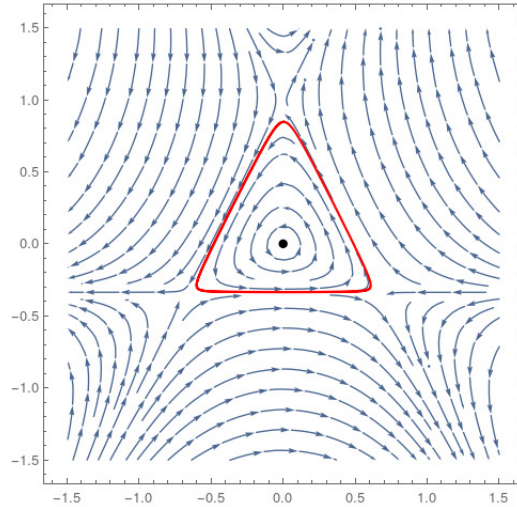
**Exemplo 2.1.** Considere o centro linear  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dado por  $X(x, y) = (-y, x)$  como o primeiro exemplo de centro global. Note que  $H(x, y) = x^2 + y^2/2$  é uma integral primeira do campo  $X$ , assim as curvas de nível de  $H$  coincidem com as órbitas do campo  $X(x, y)$ . Para todo  $k > 0$ , temos que,  $x^2 + y^2/2 = k$  são centros. Logo, o anel periódico da origem do campo  $X$  é  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Veja Figura 2.1.



**Figura 2.1:** Centro linear.

**Exemplo 2.2.** Considere  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dado por  $X(x, y) = (-y - x^2 + y^2, x + 3xy)$  como um exemplo de centro não global. Note que a origem é um ponto singular. Porém, o ponto  $(0, 1)$  também é um ponto singular. Portanto, o centro  $(0, 0)$  não pode ser global. Ou seja, temos que o anel periódico da origem não é o  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Veja Figura 2.2.





**Figura 2.2:** Centro não global.

## 2.2 Teorema de Sabatini

Considere  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação polinomial com  $F(0, 0) = (0, 0)$ . Defina a função  $M_F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$M_F(x, y) = \frac{\|F(x, y)\|^2}{2} = \frac{(f(x, y))^2 + (g(x, y))^2}{2}.$$

**Observação 2.1.** *Note que a imagem de  $M_F$  contém apenas valores reais maiores ou iguais a zero.*

A partir desta função  $M_F$  defina o campo de vetores Hamiltoniano associado à  $M_F$ , ou seja,  $H_{M_F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por

$$H_{M_F}(x, y) = \left( -\frac{\partial M_F(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial M_F(x, y)}{\partial x} \right).$$

Calculando as entradas do campo  $H_{M_F}(x, y)$ , temos que

$$\begin{aligned} -\frac{\partial M_F(x, y)}{\partial y} &= -(f(x, y)f_y(x, y) + g(x, y)g_y(x, y)), \\ \frac{\partial M_F(x, y)}{\partial x} &= f(x, y)f_x(x, y) + g(x, y)g_x(x, y). \end{aligned}$$

Temos as seguintes observações.

**Observação 2.2.** A notação  $p_x(x, y)$  e  $p_y(x, y)$  significa a derivada do polinômio  $p$  com relação às variáveis  $x$  e  $y$ , respectivamente, aplicado no ponto  $(x, y)$ .

**Lema 2.1.** Temos que  $M_F$  é uma integral primeira do campo de vetores  $H_{M_F}$ . Portanto, as órbitas do campo  $H_{M_F}$  estão contidas nas curvas de nível de  $M_F$ .

**Teorema 2.1 (Teorema de Sabatini).** Considere  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação polinomial com  $F(0, 0) = (0, 0)$  e com Jacobiano diferente de zero em todo ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . As seguintes duas afirmações são equivalentes:

1. A origem é um centro global de  $H_{M_F}$ .
2.  $F$  é um difeomorfismo global.

Faremos uso do seguinte lema na prova do Teorema 2.1.

**Lema 2.2.** Considere  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação polinomial com Jacobiano diferente de zero em todo ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Os pontos de equilíbrio de  $H_{M_F}$  são centros, e são os zeros de  $M_F$  ou, equivalentemente, são os zeros de  $F$ . Além disto, esses pontos de equilíbrio são não degenerados, equivalentemente, são pontos de mínimo isolados de  $M_F$ .

**Prova do Lema 2.2:**

Considere  $(x_0, y_0)$  um ponto de equilíbrio do campo  $H_{M_F}$ , isto é

$$\frac{\partial M_F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial M_F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} f(x_0, y_0)f_x(x_0, y_0) + g(x_0, y_0)g_x(x_0, y_0) = 0, \\ f(x_0, y_0)f_y(x_0, y_0) + g(x_0, y_0)g_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Podemos transformar (2.1) no seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & g_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

A matriz que define o sistema linear (2.2) tem determinante igual ao Jacobiano de  $F$  no ponto  $(x_0, y_0)$ , o qual por hipótese, é diferente de zero. Portanto, a única solução do

sistema é a trivial, isto é  $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ , o que implica que  $F(x_0, y_0) = (0, 0)$ , assim  $M_F(x_0, y_0) = 0$ .

Como  $F(x_0, y_0) = (0, 0)$  e  $F$  é localmente injetiva, pelo Teorema 1.1, segue que existem vizinhanças  $V, W$  de  $(x_0, y_0)$  e  $F(x_0, y_0)$ , respectivamente, tais que  $F(x, y) \neq (0, 0)$  para  $(x, y) \neq (x_0, y_0) \in V$ . Assim  $(x_0, y_0)$  é um mínimo local isolado de  $M_F$ , pois  $M_F(x, y) \neq 0$ , para todo  $(x, y) \neq (x_0, y_0) \in V$ .

A parte linear de  $H_{M_F}$  em  $z_0 = (x_0, y_0)$  é

$$D(H_{M_F})(z_0) = \begin{bmatrix} -f_x(z_0)f_y(z_0) - g_x(z_0)g_y(z_0) & -f_y^2(z_0) - g_y^2(z_0) \\ f_x^2(z_0) + g_x^2(z_0) & f_x(z_0)f_y(z_0) + g_x(z_0)g_y(z_0) \end{bmatrix}.$$

Como  $\det(D(H_{M_F})) = (\det(DF))^2 > 0$ , concluímos que  $(x_0, y_0)$  é um ponto de equilíbrio não degenerado do campo  $H_{M_F}$  e que os autovalores de  $D(H_{M_F})(x_0, y_0)$  são imaginários puros, pois  $\text{tr}(D(H_{M_F})) = 0$ . Assim,  $(x_0, y_0)$  é um ponto de equilíbrio do tipo foco ou centro. Como as órbitas de  $H_{M_F}$  estão contidas nos conjuntos de níveis de  $M_F$ , e  $(x_0, y_0)$  é um mínimo isolado de  $M_F$ , concluímos que  $(x_0, y_0)$  é um centro do campo de vetores  $H_{M_F}$ . ■

### Prova do Teorema de Sabatini 2.1:

(1)  $\Rightarrow$  (2) Assumindo que a origem é um centro global de  $H_{M_F}$  queremos mostrar que  $F$  é um difeomorfismo global. Para isto, mostraremos que  $F$  é própria e pelo Teorema de Hadamard, concluímos que  $F$  é um difeomorfismo global.

Como a origem é um centro global de  $H_{M_F}$ , ela é o único ponto de equilíbrio desse campo de vetores. Pelo Lema 2.2,  $(0, 0)$  é o único zero de  $M_F$ , isto é  $M_F(0, 0) = 0$ . Considere uma reta  $L$  passando pela origem, gráfico de uma função da forma  $y = ax, a \in \mathbb{R}$ . Segue que a restrição da  $M_F$  à reta  $L$  é uma função polinomial de uma variável, não constante, o que implica que é não limitada. Logo,  $M_F$  é também não limitada. Como os conjuntos de nível  $h > 0$  de  $M_F$  coincidem com as órbitas fechadas de  $H_{M_F}$ , eles são compactos. Como  $M_F$  é constante ao longo das órbitas do campo  $H_{M_F}$ , temos que, se  $\|(x, y)\|$  tende ao infinito, implica que a imagem de  $M_F$  também tende ao infinito, logo  $\|F(x, y)\|$  tende ao infinito. Ou seja,  $F$  é própria.

(2)  $\Rightarrow$  (1) Assumindo que  $F$  é um difeomorfismo global. Pelo Teorema de Hadamard, temos que  $F$  é própria. Devemos então mostrar que a origem do campo de vetores  $H_{M_F}$  é um centro global. Como  $F$  é própria, temos que,  $M_F$  é própria também. Logo, toda órbita de  $H_{M_F}$  tem fecho compacto, pois está contida em um conjunto de nível de  $M_F$ , e para cada  $h \geq 0 \in \mathbb{R}$ ,  $M_F^{-1}(h)$  é um compacto. Sendo  $F$  um difeomorfismo global, segue que  $F$  é injetora e, por hipótese,  $F(0,0) = (0,0)$ . Assim,  $F(x,y) \neq (0,0)$  para todo  $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , implicando, pelo Lema 2.2, que  $H_{M_F}$  só tem um equilíbrio na origem. Para toda condição inicial diferente da origem, os conjuntos  $\alpha$  e  $\omega$ -limite da órbita de  $H_{M_F}$ , por esta condição inicial são não vazios e não contém pontos de equilíbrio, pois a origem do campo  $H_{M_F}$  é um centro local. Pelo Teorema de Poincaré Bendixson, segue que essa órbita é fechada, de onde  $(0,0)$  é um centro global de  $H_{M_F}$ . ■

Vejamos um exemplo prático do Teorema de Sabatini.

**Exemplo 2.3.** Considere a aplicação polinomial  $F(x,y) = (f,g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$F = (y + y^3, x + xy^2).$$

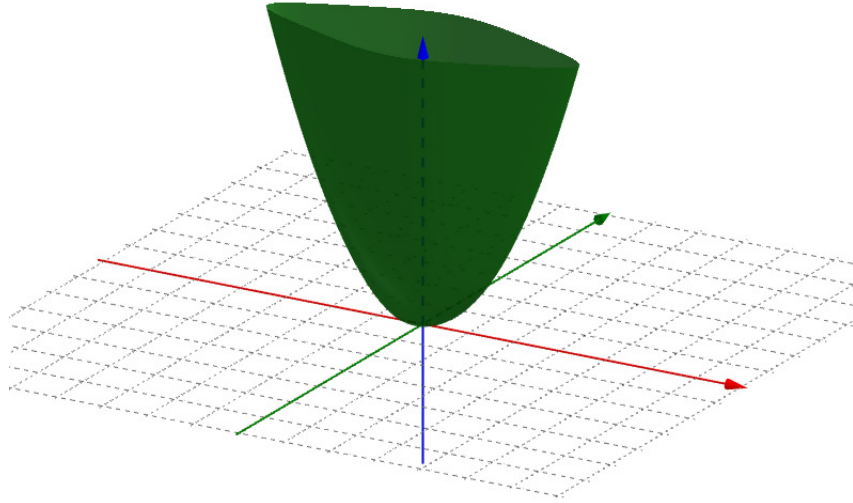
É claro que  $F(0,0) = (0,0)$ . Calculando o Jacobiano temos

$$\det(DF(x,y)) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 + 3y^2 \\ 1 + y^2 & 2xy \end{bmatrix} = -1 - 4y^2 - 3y^4 < 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pelo Teorema 1.7, temos que  $F$  é injetora, como é polinomial, pelo Lema 1.1, é um difeomorfismo global. Pelo Teorema de Sabatini, a origem do campo de vetores  $H_{M_F}$  é um centro global. A função  $M_F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  para este exemplo é dada por

$$M_F(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + x^2y^2 + y^4 + \frac{x^2y^4}{2} + \frac{y^6}{2},$$

cujos gráfico é um parabolóide em  $\mathbb{R}^3$ . Veja Figura 2.3.

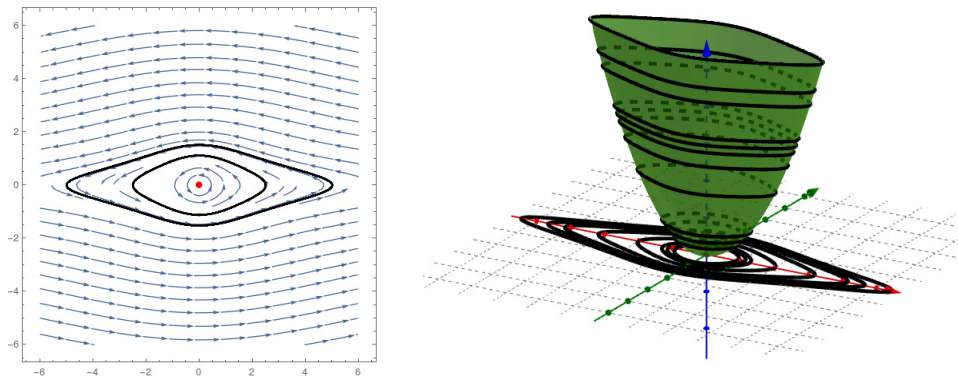


**Figura 2.3:** Parabolóide em  $\mathbb{R}^3$ , dado por  $M_F(x, y)$ .

De posse de  $M_F$ , podemos calcular o campo  $H_{M_F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dado por

$$H_{M_F} = (-(y + 2x^2y + 4y^3 + 2x^2y^3 + 3y^5), x + 2xy^2 + xy^4).$$

Como vimos, a origem do campo de vetores  $H_{M_F}$  é um centro global, pois  $F$  é um difeomorfismo global. Veja, na Figura 2.4, o retrato de fase do campo  $H_{M_F}$  e que as curvas de nível da aplicação  $M_F$  coincidem com as órbitas do campo de vetores de  $H_{M_F}$ .



**Figura 2.4:** Na figura a esquerda temos o retrato de fase do campo  $H_{M_F}$  e na figura da direita, temos as curvas de nível de  $M_F$  juntamente com seu gráfico.

## 2.3 Generalização do Teorema de Sabatini

Nesta seção apresentamos os resultados do artigo [4], no qual, F. Braun e J. Llibre, obtiveram uma generalização do Teorema de Sabatini, no sentido em que não exigem que a aplicação seja polinomial e nem que esteja definida sobre o plano todo, basta um subconjunto aberto  $U$  do plano.

Ao longo desta seção, assumiremos sempre que  $U \subset \mathbb{R}^2$  é um conjunto aberto conexo. Como antes, considere  $F = (f, g) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação de classe  $C^2$ . Defina a função  $M_F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$M_F(x, y) = \frac{\|F(x, y)\|^2}{2} = \frac{(f(x, y))^2 + (g(x, y))^2}{2}.$$

A partir desta função  $M_F$  defina o campo de vetores Hamiltoniano associado à  $M_F$ , ou seja,  $H_{M_F} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por

$$H_{M_F}(x, y) = \left( -\frac{\partial M_F(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial M_F(x, y)}{\partial x} \right).$$

**Teorema 2.2 (Braun, Llibre).** *Considere  $F = (f, g) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação de classe  $C^2$ , com  $F(Z_0) = (0, 0)$ ,  $Z_0 \in U$ , e com Jacobiano diferente de zero em todo ponto de  $U$ . O ponto de equilíbrio  $Z_0$  é um centro global de  $H_{M_F}$  se, e somente se,  $F$  é injetora e  $F(U) = \mathbb{R}^2$  ou  $F(U) = B((0, 0), \delta)$ ,  $\delta > 0$ .*

Para a demonstração do Teorema 2.2 precisamos dos lemas a seguir.

**Lema 2.3.** *Considere  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um difeomorfismo local de classe  $C^2$ . Os pontos de equilíbrio de  $H_{M_F}$  são centros, e são os zeros de  $M_F$  ou, equivalentemente, são os zeros de  $F$ . Além disto, esses pontos de equilíbrio são não degenerados, equivalentemente, são pontos de mínimo isolados de  $M_F$ .*

### Prova do Lema 2.3:

A prova desse lema é completamente análoga a do Lema 2.2, e optamos por omití-la. ■

**Lema 2.4.** *Considere  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um difeomorfismo local de classe  $C^2$ , com  $F(Z_0) = (0, 0)$ ,  $Z_0 \in U$ . Suponha que  $F$  é injetora. Então  $Z_0$  é um centro global de  $H_{M_F}$  se, e somente se,  $F(U) = \mathbb{R}^2$  ou  $F(U) = B((0, 0), \delta)$ , com  $\delta > 0$ .*

**Prova do Lema 2.4:**

Como  $Z_0 \in U$  é tal que  $F(Z_0) = (0, 0)$ , pelo Lema 2.3,  $Z_0$  é pelo menos um centro local de  $H_{M_F}$ . Por hipótese,  $F$  é injetora, novamente, pelo Lema 2.3,  $Z_0$  é o único ponto de equilíbrio de  $H_{M_F}$ .

Temos que  $0 < h \in M_F(U)$  se, e somente se, existe um par  $(x_0, y_0) \in U$  tal que  $M_F(x_0, y_0) = h$ , isto é,

$$h = M_F(x_0, y_0) = \frac{\|F(x_0, y_0)\|^2}{2} = \frac{(f(x_0, y_0))^2 + (g(x_0, y_0))^2}{2},$$

a qual é equivalente a

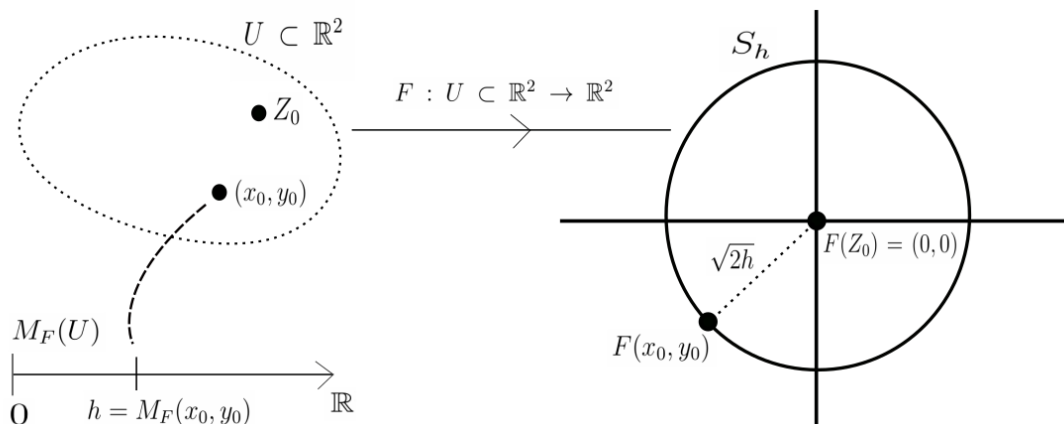
$$(f(x_0, y_0))^2 + (g(x_0, y_0))^2 = (\sqrt{2h})^2.$$

Ou seja, existe um ponto  $(u, v) \in F(U)$  tal que  $(u, v) = F(x_0, y_0)$  e  $\|(u, v)\| = \sqrt{2h}$ . A partir do ponto  $F(x_0, y_0)$  vamos definir a circunferência  $S_h$  centrada em  $(0, 0)$  e de raio  $\sqrt{2h}$ , com  $h > 0$ . Veja a Figura 2.5. Assim, temos

$$S_h = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = (\sqrt{2h})^2 \right\}.$$

Note que  $S_h$  é um subconjunto do contradomínio de  $F$ .

Da discussão acima,  $0 < h \in M_F(U)$  se, e somente se,  $S_h \cap F(U) \neq \emptyset$ .



**Figura 2.5:**  $0 < h \in M_F(U)$  se, e somente se,  $S_h \cap F(U) \neq \emptyset$ .

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $Z_0$  é um centro global de  $H_{M_F}$ . Devemos mostrar que  $F(U) = \mathbb{R}^2$  ou  $F(U) = B((0, 0), \delta)$ ,  $\delta > 0$ .

Como  $U$  é conexo e  $M_F$  é contínua, segue que  $M_F(U) \subset \mathbb{R}$  é conexo. Assim, é um intervalo de uma das formas  $M_F(U) = [0, l)$ , com  $l \geq 0$ ,  $l \in \mathbb{R}$ , ou  $M_F(U) = [0, \infty)$ .

Considere  $q \in F(U)$ ,  $q$  diferente de  $(0, 0)$  arbitrário. Considere  $F^{-1}(q) \in U$  e defina  $h_q = M_F(F^{-1}(q))$ . Por hipótese,  $Z_0$  é um centro global de  $H_{M_F}$ , assim, as órbitas não singulares de  $H_{M_F}$  são periódicas. Logo, as componentes conexas de  $M_F^{-1}(h_q)$  são curvas fechadas. Seja  $\Gamma_{h_q}$  uma dessas componentes conexas. Portanto,  $F(\Gamma_{h_q})$  é uma curva fechada. Para cada  $p \in \Gamma_{h_q}$  temos que  $M_F(p) = h_q \in M_F(U)$ , logo  $F(p) \in F(U) \cap S_{h_q}$ , assim  $F(\Gamma_{h_q})$  está contida em  $F(U)$  e está contida em  $S_{h_q}$ . Como  $F(\Gamma_{h_q})$  é uma curva fechada e contida em  $S_{h_q}$ , temos que  $F(\Gamma_{h_q}) = S_{h_q} \subset F(U)$ . Em outras palavras, se  $q \in F(U)$ , então a circunferência  $S_{h_q}$  está contida em  $F(U)$ . Logo, a imagem de  $F(U)$  é folheada por circunferências, isto é

$$F(U) = \{(0, 0)\} \cup \bigcup_{h \in M_F(U)} S_h.$$

Portanto,  $F(U) = \mathbb{R}^2$  se  $l = \infty$ , enquanto que, se  $l \in \mathbb{R}$ ,  $l \geq 0$ ,  $F(U)$  é o disco aberto com raio  $l$  centrado em  $(0, 0)$ .

( $\Leftarrow$ ) Assumindo que  $F(U) = \mathbb{R}^2$  ou  $F(U) = B((0, 0), \delta)$ , com  $\delta > 0$ . Queremos mostrar que  $Z_0$  é um centro global de  $H_{M_F}$ . Para isto, vamos mostrar que as curvas de nível de  $M_F$ , que coincidem com as órbitas do campo  $H_{M_F}$ , são fechadas.

Fixemos, arbitrariamente,  $h > 0$ . Como vimos,  $h \in M_F(U)$  se, e somente se,  $S_h \cap F(U) \neq \emptyset$ . Por hipótese,  $F(U) = \mathbb{R}^2$  ou  $F(U) = B((0, 0), \delta)$ , com  $\delta > 0$ .

Assim, temos que, se  $F(U) = \mathbb{R}^2$ , então  $S_h \subset \mathbb{R}^2$ . Portanto,  $S_h \subset F(U)$ . Se  $F(U) = B((0, 0), \delta)$  e  $S_h \cap F(U) \neq \emptyset$ , então  $S_h \cap B((0, 0), \delta) \neq \emptyset$ . Portanto,  $S_h \subset B((0, 0), \delta)$ , o que implica que  $S_h \subset F(U)$ . Concluimos que,  $0 < h \in M_F(U)$  se, e somente se,  $S_h \subset F(U)$ .

No que segue, temos que

$$M_F^{-1}(h) = \{(x, y) \in U : M_F(x, y) = h\} = \left\{ (x, y) \in U : (f(x, y))^2 + (g(x, y))^2 = (\sqrt{2h})^2 \right\}.$$

Por outro lado,

$$F^{-1}(S_h) = \{(x, y) \in U : F(x, y) \in S_h\} = \left\{ (x, y) \in U : (f(x, y))^2 + (g(x, y))^2 = (\sqrt{2h})^2 \right\}.$$



Concluindo assim que,  $M_F^{-1}(h) = F^{-1}(S_h)$ .

Note que  $F^{-1}(S_h)$  é um conjunto não vazio, uma vez que,  $S_h \subset F(U)$ . Como  $F$  é contínua, e é um difeomorfismo local,  $F^{-1}(S_h)$  é uma curva de Jordan, isto é, uma curva fechada simples. Logo,  $M_F^{-1}(h)$  é uma curva de Jordan. Como assumimos  $h \in M_F(U)$ ,  $h > 0$  arbitrário, segue que as órbitas não singulares do campo  $H_{M_F}$  são periódicas. Assim, o centro  $Z_0$  é global. ■

**Lema 2.5.** *Considere  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um difeomorfismo local de classe  $\mathbb{C}^2$ , com  $F(Z_0) = (0, 0)$ ,  $Z_0 \in U$ . Suponha que  $Z_0$  é um centro global de  $H_{M_F}$ . Então  $F$  é injetora.*

**Prova do Lema 2.5:**

Temos que  $Z_0$  é um centro global de  $H_{M_F}$ , assim  $Z_0$  é o único ponto de equilíbrio de  $H_{M_F}$ , o qual corresponde à curva de nível  $M_F^{-1}(0)$ . Pelo Lema 2.3,  $Z_0$  é o único zero de  $F$ , isto é,  $F(Z_0) = (0, 0)$ . Portanto, para cada  $0 < h \in M_F(U)$ , o conjunto de nível  $M_F^{-1}(h)$  é uma união de órbitas fechadas.

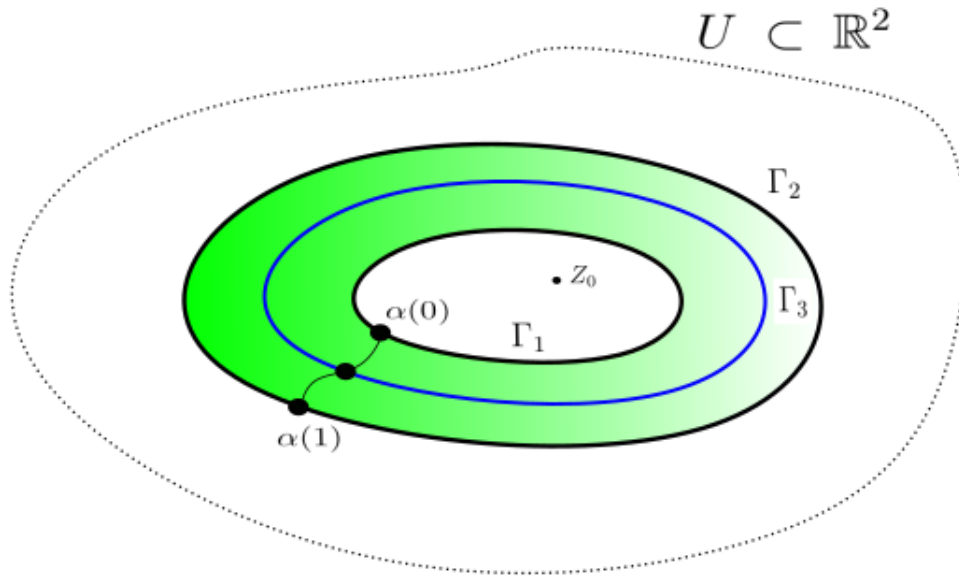
**Afirmção 1.** Para cada  $0 < h \in M_F(U)$ ,  $M_F^{-1}(h) \subset U$  é um conjunto conexo.

Suponha  $0 < h_0 \in M_F(U)$  tal que  $M_F^{-1}(h_0) \subset U$  é não conexo.

Sejam  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset U$  duas órbitas fechadas distintas de  $M_F^{-1}(h_0)$ . Considere o anel aberto  $A$  cujo bordo é  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Considere uma curva  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \bar{A}$ , tal que a aplicação  $\alpha$  seja injetora, de classe  $\mathbb{C}^1$ , com  $\alpha(0) \in \Gamma_1$ ,  $\alpha(1) \in \Gamma_2$  e  $\alpha(s) \subset A$ , para todo  $s \in (0, 1)$ . Veja Figura 2.6.

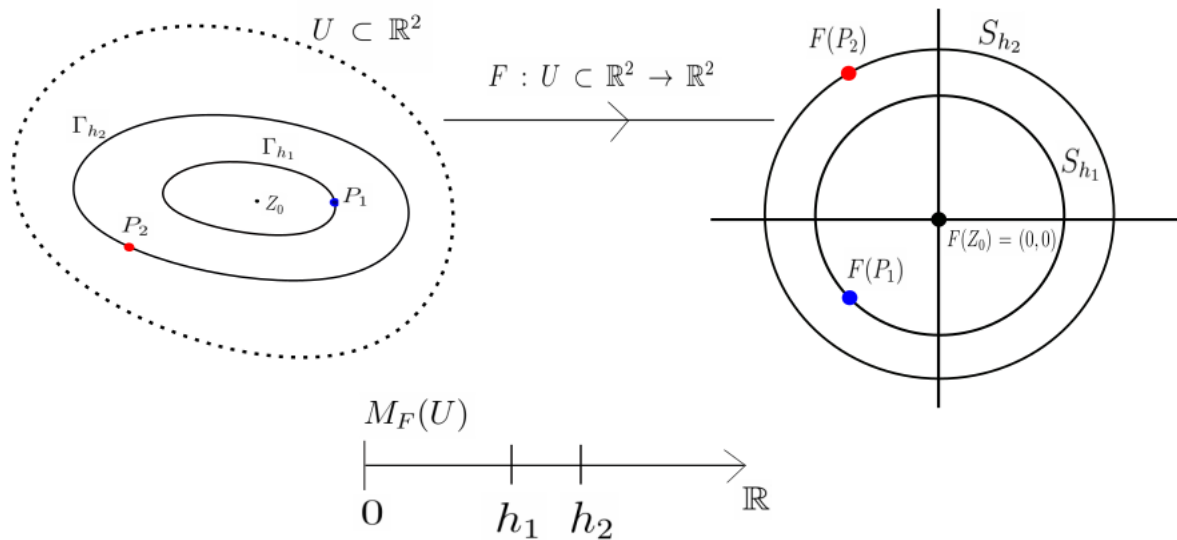
Como  $M_F(\alpha(0)) = M_F(\alpha(1)) = h_0$ , segue que a função  $M_F \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tem um máximo ou um mínimo em  $s_0 \in (0, 1)$ . Considere a órbita  $\Gamma_3 \in U$  passando por  $\alpha(s_0)$ . Veja Figura 2.6.

Localmente,  $\Gamma_3$  decompõe o anel  $A$  em duas regiões  $A_1$  e  $A_2$ . Como  $\nabla M_F$  restrito a  $\Gamma_3$  não se anula e é ortogonal a  $\Gamma_3$  ( $\nabla M_F$  se anula apenas no ponto  $Z_0 = M_F^{-1}(0)$ ), então a curva  $\alpha(0, 1)$  deve estar inteiramente contida numa das duas regiões  $A_1$  ou  $A_2$ . Mas isso é uma contradição, pois a curva  $\alpha$  conecta  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . Provando a Afirmção 1.



**Figura 2.6:** Ilustração do anel  $A$  cujo bordo é  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

Denote por  $\Gamma_h$  a órbita fechada  $M_F^{-1}(h)$ ,  $0 < h \in M_F(U)$ . Segue que, se  $0 < h_1 < h_2 \in M_F(U)$ , então  $\Gamma_{h_1}$  está contido na região limitada por  $\Gamma_{h_2}$ . Do que acabamos de analisar, se  $P_1 \neq P_2$ , com  $P_1 \in \Gamma_{h_1}$  e  $P_2 \in \Gamma_{h_2}$ , então  $F(P_1) \neq F(P_2)$ , pois  $F(P_1) \in S_{h_1}$  e  $F(P_2) \in S_{h_2}$ . Veja Figura 2.7.



**Figura 2.7:**  $F$  é injetora em órbitas  $\Gamma_h$  distintas.

Para concluirmos que  $F$  é injetora em  $U$ , falta-nos mostrar que  $F$  é injetora em  $\Gamma_h$ , para cada  $0 < h \in M_F(U)$ . Considere

$$T = \{0 < h \in M_F(U) : F \text{ não é injetora em } \Gamma_h\}.$$

Para finalizar a demonstração, precisamos mostrar que o conjunto  $T$  é vazio.

Suponha que  $T \neq \emptyset$ . Como a imagem de  $M_F$  é um intervalo da forma  $[0, l), l \geq 0 \in \mathbb{R}$  ou  $l = \infty$ , note que  $T$  é um subconjunto da imagem de  $M_F(U)$ , assim, segue que  $T$  é limitado inferiormente. Portanto,  $T$  é um subconjunto dos reais não vazio e limitado inferiormente, então  $T$  possui ínfimo. Considere  $h_0 = \inf T$ ,  $h_0 > 0$ , pois  $F$  é um difeomorfismo local e, portanto, injetora em uma vizinhança de  $Z_0 = M_F^{-1}(0)$ . Vejamos a afirmação a seguir.

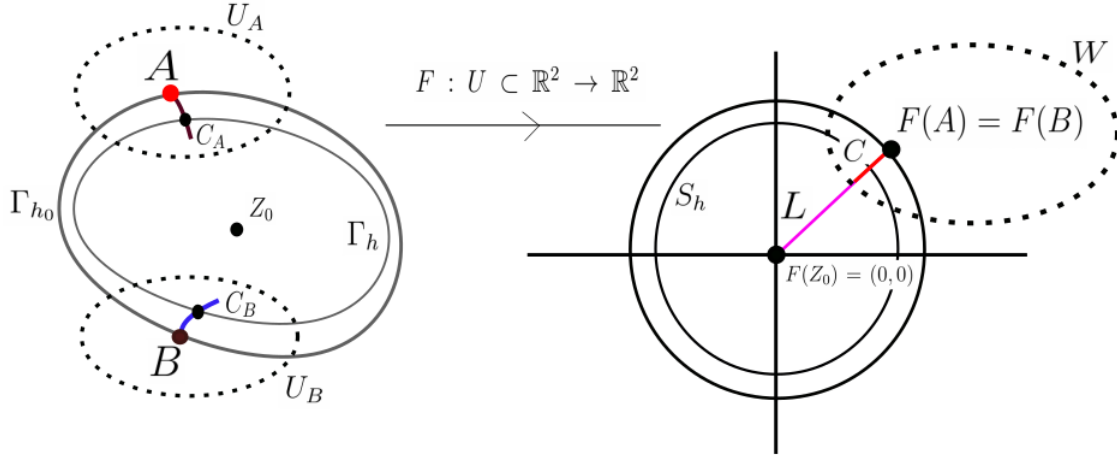
**Afirmção 2.**  $F$  é injetora em  $\Gamma_{h_0}$ .

Vamos demonstrar a Afirmção 2 por contradição. Suponha que existam  $A, B \in \Gamma_{h_0}$ ,  $A \neq B$ , com  $F(A) = F(B)$ .

Como  $F$  é um difeomorfismo local, pelo Teorema 1.1, existem  $U_A, U_B \subset U$ , vizinhanças de  $A$  e  $B$ , respectivamente,  $W \subset \mathbb{R}^2$  vizinhança de  $F(A) = F(B) \neq (0, 0)$ ,  $U_A \cap U_B = \emptyset$  tais que  $F_A = F|_{U_A} : U_A \rightarrow W$  e  $F_B = F|_{U_B} : U_B \rightarrow W$  são difeomorfismos. Note que  $F(A) = F(B) \in S_{h_0}$ . Considere o segmento de reta  $L$  unindo  $F(A) = F(B)$  à origem. Seja  $C = L \cap W$ . Veja Figura 2.8.

Assim ficam bem definidas as curvas  $C_A = F_A^{-1}(C)$  e  $C_B = F_B^{-1}(C)$ , as quais estão contidas na região compacta limitada por  $\Gamma_{h_0}$ . De fato, suponha que a curva  $C_A$  não esteja contida na região compacta limitada por  $\Gamma_{h_0}$ . Logo, existe um ponto  $c \in C_A$  tal que  $c \in \Gamma_{h_1}$ , para algum  $h_1 > h_0$ . Portanto,  $F(c) \in S_{h_1}$  e então  $F(c) \notin C_A$ , o que é um absurdo. O mesmo raciocínio vale para a curva  $C_B$ .

Para  $0 < h < h_0$ , suficientemente próximo de  $h_0$ , a órbita fechada  $\Gamma_h$  tem intersecção não vazia com  $C_A$  e com  $C_B$ . Portanto, existem pontos  $P_A = \Gamma_h \cap C_A$  e  $P_B = \Gamma_h \cap C_B$ , tais que  $P_A \neq P_B$ , pois  $P_A \in U_A$  e  $P_B \in U_B$ . Sabemos que  $F(P_A), F(P_B) \in C$  e  $F(P_A), F(P_B) \in S_h$ , logo  $F(P_A) = F(P_B)$ , concluindo que  $F$  não é injetora em  $\Gamma_h$ . Então,  $h \in T$  e  $0 < h < h_0$ , obtendo uma contradição com o fato de que  $h_0 = \inf T$ , provando a Afirmção 2.



**Figura 2.8:** Ilustração para a prova da afirmação 2.

Da definição de ínfimo, existe uma sequência  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , decrescente, com  $h_n > h_0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $h_n$  converge para  $h_0$  e  $F$  é não injetora em  $\Gamma_{h_n}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Isto significa que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existem  $A_n \neq B_n$ ,  $A_n, B_n \in \Gamma_{h_n}$ , com  $F(A_n) = F(B_n)$ .

Como  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  estão em um conjunto compacto limitado por  $\Gamma_{h_1}$ , existem subsequências, que denotaremos por  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tais que  $a_n$  converge para  $a$  e  $b_n$  converge para  $b$ , com  $a$  e  $b$  pertencentes a  $U$ . Como  $h_n$  converge para  $h_0$ , temos que  $a, b \in \Gamma_{h_0}$  e  $F(a) = F(b)$ , pois  $F(A_n) = F(B_n)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Pela Afirmação 2,  $F$  é injetora em  $\Gamma_{h_0}$ , assim temos que  $a$  é igual a  $b$ .

Por hipótese,  $F$  é um difeomorfismo local em  $a$ , pois  $a \in U$ . Assim, existem vizinhanças  $V$  e  $W$  de  $a$  e  $F(a)$ , respectivamente, tais que  $F|_V : V \rightarrow W$  é um difeomorfismo local, em particular,  $F|_V$  é injetora. Portanto, obtemos uma contradição com a hipótese que  $A_n \neq B_n$  e  $F(A_n) = F(B_n)$ , para  $n$  suficientemente grande. Essa contradição prova que o conjunto  $T$  é vazio, ou seja,  $F$  é injetora em  $\Gamma_h$ , para cada  $0 < h \in M_F(U)$ , concluindo a prova do lema. ■

De posse dos lemas anteriores podemos finalmente provar o Teorema 2.2.

### Prova do Teorema 2.2.

( $\Rightarrow$ ) Primeiro assumindo que  $Z_0$  é um centro global de  $H_{M_F}$ , então, pelo Lema 2.5,  $F$  é injetora. Assim, utilizando o Lema 2.4, concluímos que,  $F(U) = \mathbb{R}^2$  ou  $F(U) =$

$B((0,0), \delta)$ ,  $\delta > 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Assumindo que  $F$  é injetora e  $F(U) = \mathbb{R}^2$  ou  $F(U) = B((0,0), \delta)$ ,  $\delta > 0$ , pelo Lema 2.4,  $Z_0$  é um centro global de  $H_{M_F}$ . ■

Podemos obter os seguintes corolários do Teorema 2.2.

**Corolário 2.1.** *Seja  $F = (f, g) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação de classe  $C^2$ , com  $F(Z_0) = (0,0)$ ,  $Z_0 \in U$ , e com Jacobiano diferente de zero em todo ponto de  $U$ . Então, valem as seguintes afirmações.*

1.  $F$  é injetora em  $\overline{P_{Z_0}}$ , onde  $\overline{P_{Z_0}}$  é o fecho de  $P_{Z_0}$  em  $U$ ,  $P_{Z_0}$  denota o anel periódico de  $Z_0$ .
2.  $F(P_{Z_0}) = \mathbb{R}^2$  ou  $F(P_{Z_0})$  é um disco aberto de centro  $(0,0)$  e raio  $\delta$ ,  $\delta > 0$ .

**Prova do Corolário 2.1:**

Como  $F(Z_0) = (0,0)$ , pelo Lema 2.3,  $Z_0$  é um ponto singular do tipo centro do campo de vetores  $H_{M_F}$ . Pela Definição 2.2,  $P_{Z_0}$  é um aberto conexo contido em  $U$ . Considere  $F|_{P_{Z_0}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , isto é a restrição da aplicação  $F$  ao anel periódico de  $Z_0$ .

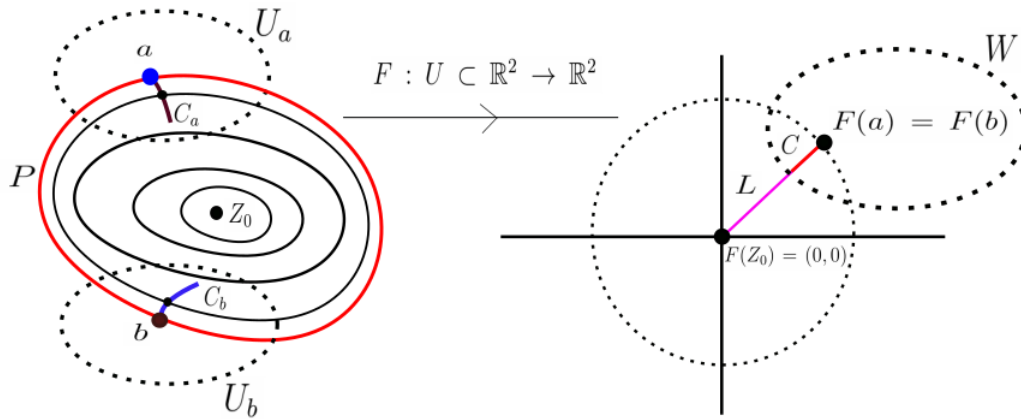
O centro  $Z_0$  do campo de vetores  $H_{M_F}$  definido em  $P_{Z_0}$  é global. Assim, pelo Teorema 2.2,  $F$  é injetora em  $P_{Z_0}$  e  $F(P_{Z_0}) = \mathbb{R}^2$  ou  $F(P_{Z_0}) = B((0,0), \delta)$ , com  $\delta > 0$ . Assim, está provado o item 2. Agora, consideremos  $P = \overline{P_{Z_0}} \setminus P_{Z_0}$ . Para finalizar a prova do corolário basta mostrar que  $F$  é injetora em  $P$ . A prova que se segue é similar à prova feita no Lema 2.5.

Suponha que  $F$  não seja injetora em  $P$ , isto é, existe  $a, b \in P$ ,  $a \neq b$ , com  $F(a) = F(b)$ . Como  $F$  é um difeomorfismo local, existem  $U_a, U_b \subset U$ , vizinhanças de  $a$  e  $b$ , respectivamente,  $W \subset \mathbb{R}^2$  vizinhança de  $F(a) = F(b) \neq (0,0)$ ,  $U_a \cap U_b = \emptyset$  tais que  $F_a = F|_{U_a} : U_a \rightarrow W$  e  $F_b = F|_{U_b} : U_b \rightarrow W$  são difeomorfismos.

Note que para cada  $p \in P$  e cada  $h \in M_F(P_{Z_0})$  temos que  $M_F(p) > h$ . Logo,  $F(a) = F(b) \notin S_h$  para todo  $h \in M_F(P_{Z_0})$ . Considere o segmento de reta  $L$  unindo  $F(a) = F(b)$  à origem. Seja  $C = L \cap W$ . Assim ficam bem definidos as curvas  $C_a = F_a^{-1}(C)$  e  $C_b = F_b^{-1}(C)$ , as quais estão contidas na região limitada por  $P$ . De fato, suponha que  $C_b$

não está contida na região limitada por  $P$ , então existe  $c_b \in C_b$  tal que  $F(c_b) \notin S_h$  para todo  $h \in M_F(P_{Z_0})$ . Portanto,  $F(c_b) \notin C$ , o que é uma contradição. A mesma ideia pode ser aplicada para  $C_a$ . Veja a Figura 2.9.

Para  $h_0 \in M_F(P_{Z_0})$ , existe uma órbita fechada  $\Gamma_0 = M_F^{-1}(h_0) \in P_{Z_0}$ , suficientemente próxima de  $P$ , tal que  $\Gamma_0$  tem intersecção não vazia com  $C_a$  e com  $C_b$ . Portanto, existem pontos  $v_a = \Gamma_0 \cap C_a$  e  $v_b = \Gamma_0 \cap C_b$ , tais que  $v_a \neq v_b$ , pois  $v_a \in U_a$  e  $v_b \in U_b$ . Veja a Figura 2.9. Sabemos que  $F(v_a), F(v_b) \in C$  e  $F(v_a), F(v_b) \in S_{h_0}$ . Portanto,  $F(v_a) = F(v_b)$ , concluindo assim, que  $F$  é não injetora em  $\Gamma_0$ . O que é uma contradição, pois já vimos que  $F$  é injetora em  $P_{Z_0}$ . ■



**Figura 2.9:** Ilustração da prova do Corolário 2.1.

**Corolário 2.2.** *Seja  $F = (f, g) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação de classe  $\mathbb{C}^2$ , com  $F(Z_0) = (0, 0)$ ,  $Z_0 \in U$ , e com Jacobiano diferente de zero em todo ponto de  $U$ . Então, o anel periódico é o maior conjunto aberto e conexo que contém o ponto de equilíbrio  $Z_0$  e tal que satisfaz*

1.  $F$  é injetora nele,
2. Sua imagem por  $F$  é  $\mathbb{R}^2$  ou um disco aberto de centro  $(0, 0)$  e raio  $\delta$ ,  $\delta > 0$ .

**Prova do Corolário 2.2:**

Pelo Corolário 2.1, sabemos que  $P_{Z_0}$  satisfaz 1 e 2. Agora falta mostrar que  $P_{Z_0}$  é o maior conjunto aberto e conexo que contém o ponto de equilíbrio  $Z_0$  satisfazendo 1 e 2.

Suponha que  $V \subset U$  é um aberto conexo satisfazendo que  $F$  é injetora em  $V$  e  $F(V) = \mathbb{R}^2$  ou  $F(V)$  é um disco aberto de centro  $(0, 0)$  e raio  $\delta > 0$ . Seja,  $F|_V \rightarrow \mathbb{R}^2$ , pelo Teorema 2.2, temos que  $Z_0$  é um centro global de  $H_{M_F} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Portanto, temos que as órbitas do campo  $H_{M_F}$  que interceptam  $V$  são periódicas e estão contidas em  $V$ . Assim,  $V \subset P_{Z_0}$ , pois  $P_{Z_0}$  é a maior (no sentido da inclusão) vizinhança de  $Z_0$  preenchida por órbitas periódicas exceto no ponto  $Z_0$ . ■

Finalizamos essa seção com dois exemplos ilustrando a teoria apresentada.

**Exemplo 2.4.** Considere a aplicação  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$F(x, y) = (e^x - 1, y).$$

Temos que  $F$  é analítica,  $F(0, 0) = (0, 0)$  e

$$\det(DF(x, y)) = \det \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e^x > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Além disso,  $F$  é globalmente injetora. De fato, sejam  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ . Temos as seguintes implicações

$$y_1 \neq y_2 \Rightarrow F(x_1, y_1) = (e^{x_1} - 1, y_1) \neq (e^{x_2} - 1, y_2) = F(x_2, y_2).$$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1, y_1) = (e^{x_1} - 1, y_1) \neq (e^{x_2} - 1, y_2) = F(x_2, y_2),$$

uma vez que a função exponencial é injetora.

A imagem de  $F$  é o conjunto  $(-1, \infty) \times \mathbb{R}$ . Assim, a imagem de  $F$  não é o plano todo e nem um disco de centro na origem. Portanto, pelo Teorema 2.2, o centro  $(0, 0)$  de  $H_{M_F}$  não é global. Pelo Corolário 2.2, o anel periódico  $P_{Z_0}$  é o maior conjunto aberto e conexo que contém  $Z_0 = (0, 0)$  e tal que  $F$  é injetora nele. Além disso, a sua imagem por  $F$  é o plano todo ou é um disco aberto com centro em  $(0, 0)$ .

O maior disco aberto com centro na origem contido na imagem de  $F$  que podemos obter é  $B = ((0, 0), 1)$ , o disco aberto de centro na origem e raio um. Então,

$$\begin{aligned} P_{Z_0} = F^{-1}(B = ((0, 0), 1)) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) \in B = ((0, 0), 1)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < e^x(2 - e^x)\}. \end{aligned}$$

Para o exemplo dado temos que

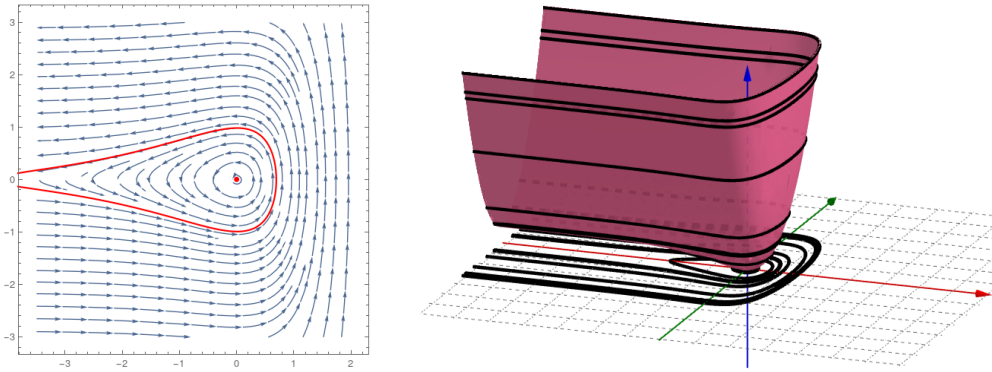
$$M_F(x, y) = \frac{(f(x, y))^2 + (g(x, y))^2}{2} = \frac{(e^x - 1)^2 + y^2}{2} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1 + y^2}{2}.$$

A partir da função  $M_F$  definimos o campo de vetores Hamiltoniano  $H_{M_F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por

$$H_{M_F}(x, y) = \left( -\frac{\partial M_F(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial M_F(x, y)}{\partial x} \right) = \left( -y, \frac{2e^{2x} - 2e^x}{2} \right) = (-y, e^x(e^x - 1)).$$

Veja Figura 2.10.

Como vimos, o centro  $(0, 0)$  de  $H_{M_F}$  não é global. Veja Figura 2.10, a curva em vermelho representa o bordo do anel periódico da origem.



**Figura 2.10:** Retrato de fase do campo  $H_{M_F}$  juntamente com o anel periódico, à esquerda. À direita, gráfico da função  $M_F$  dada no Exemplo 2.4.

**Exemplo 2.5.** Considere a aplicação  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$F(x, y) = \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \frac{x^2 + (1+x^2)^2 y}{\sqrt{1+x^2}} \right).$$

É fácil ver que  $F$  só se anula em  $(0, 0)$ . O Jacobiano é dado por

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} & 0 \\ \frac{x(2+3y+3x^4y+x^2(1+6y))}{(1+x^2)^{3/2}} & (1+x^2)^{3/2} \end{bmatrix} = 1 > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$



Segue do Teorema 1.1 que  $F$  é um difeomorfismo local. Além disso,  $F$  é globalmente injetora. Considere  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ . De fato, se

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \left( \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} \right) \neq \left( \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \right) \Rightarrow F(x_1, y_1) \neq F(x_2, y_2).$$

Por outro lado, se

$$x_1 = x_2, y_1 \neq y_2 \Rightarrow \left( \frac{x_1^2 + (1+x_1^2)^2 y_1}{\sqrt{1+x_1^2}} \right) \neq \left( \frac{x_1^2 + (1+x_1^2)^2 y_2}{\sqrt{1+x_1^2}} \right) \Rightarrow F(x_1, y_1) \neq F(x_2, y_2).$$

Em ambos os casos temos que  $F$  é globalmente injetora. A imagem de  $F$  é dada por

$$F(\mathbb{R}^2) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -1 < u < 1\}.$$

Basta notar que a imagem da aplicação  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x/\sqrt{1+x^2}$  é um intervalo da forma  $(-1, 1)$  e a imagem da aplicação  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x, y) = x^2 + (1+x^2)^2 y/\sqrt{1+x^2}$  é a reta real toda.

Como a imagem de  $F$  não é o plano todo e nem um disco com centro na origem, pelo Teorema 2.2, o centro  $(0, 0)$  de  $H_{M_F}$  não é global.

Podemos encontrar o anel periódico de  $(0, 0)$  utilizando o Corolário 2.2. Temos que  $F$  é injetora, e a imagem de  $F$  não é o plano todo. O maior disco aberto contido na imagem de  $F$  que podemos obter é  $B = ((0, 0), 1)$ . Então,

$$P_{Z_0} = F^{-1}(B = ((0, 0), 1)) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2 + (x^2 + (1+x^2)^2 y)^2}{1+x^2} < 1 \right\}.$$

Segue que a aplicação  $M_F$  relacionada a este exemplo tem a forma

$$M_F(x, y) = \frac{(f(x, y))^2 + (g(x, y))^2}{2} = \frac{x^2 + (x^2 + (1+x^2)^2 y)^2}{2(1+x^2)}.$$

Veja Figura 2.11.

O anel periódico de  $Z_0 = (0, 0)$  é não limitado e seu bordo é o conjunto  $M_F^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$ , o qual é união dos gráficos das duas funções

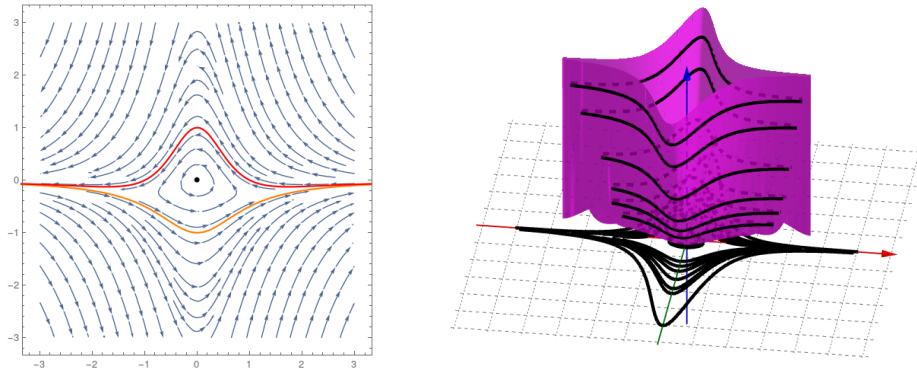
$$y = \frac{-1}{1+x^2} \quad e \quad y = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Segue que  $H_{M_F} = (P, Q)$  relacionado ao exemplo é polinomial e tem a forma

$$P(x, y) = -x^2 - x^4 - y - 3x^2 y - 3x^4 y - x^6 y,$$

$$Q(x, y) = x + 2xy + 4x^3y + 3xy^2 + 6x^3y^2 + 3x^5y^2.$$

Como vimos a origem do campo  $H_{M_F}$  não é global. Veja a Figura 2.11.



**Figura 2.11:** Retrato de fase perto da origem de  $H_{M_F}$ . As curvas destacadas representam o bordo do anel periódico, à esquerda. À direita, temos o gráfico da função  $M_F$  dada no Exemplo 2.5.

# Capítulo 3

## Condições para que a Conjectura Jacobiana Real em $\mathbb{R}^2$ seja verdadeira

Uma maneira de encontrar classes de aplicações  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  nas hipóteses da Conjectura Jacobiana Real no plano, que tornem essa conjectura verdadeira, é impor condições na aplicação  $F$  para que o campo de vetores  $H_{M_F}$  tenha um centro global na origem. Pois, assim, pelo Teorema de Sabatini,  $F$  será um difeomorfismo global, logo  $F$  será injetora. Foi isso que fizeram F. Braun e J. Llibre em 2015 no artigo [3]. Veremos que, em 2016, F. Braun, J. Giné e J. Llibre, no artigo [2] melhoraram o resultado principal de F. Braun e J. Llibre do artigo [3].

Ao longo deste capítulo utilizaremos alguns conceitos, tais como, a compactificação de Poincaré, índice topológico e setores de pontos de equilíbrio. Para mais detalhes sobre quaisquer um desses conceitos, consultar o livro [8].

### 3.1 A Compactificação de Poincaré

Nesta seção apresentaremos a compactificação de Poincaré, que é utilizada para o estudo do comportamento no infinito de campos polinomiais e não somente em vizinhanças de pontos singulares. Considere  $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  um campo vetorial polinomial definido em  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 3.1.** O grau do campo  $X$  é o número máximo entre os graus dos polinômios  $P$  e  $Q$ , ou seja,  $d = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}$ .

Considere a esfera

$$\mathbb{S}^2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\},$$

a qual chamaremos de **Esfera de Poincaré**, e o plano

$$T_{P_N}\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1\}$$

que é tangente a esfera  $\mathbb{S}^2$  em  $P_N = (0, 0, 1)$ . O  $\mathbb{R}^2$  será identificado com  $T_{P_N}\mathbb{S}^2$ .

Nesta seção convencionaremos que as coordenadas  $y_i$  se referirão à esfera  $\mathbb{S}^2$  e as coordenadas  $x_i$  ao plano  $T_{P_N}\mathbb{S}^2$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**Definição 3.2.** *Definimos*

$$H_+ = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 > 0\}$$

como sendo o hemisfério norte,

$$H_- = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 < 0\}$$

como sendo hemisfério sul e

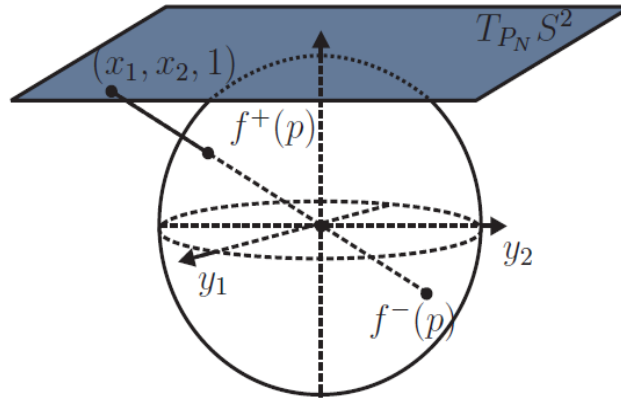
$$\mathbb{S}^1 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 = 0\}$$

como sendo o equador.

A compactificação de Poincaré de  $X$  consiste em fazer duas cópias do fluxo de  $X$ , uma sobre  $H_+$  e outra sobre  $H_-$ , usando a projeção central. Para isso, consideremos uma reta  $L(t)$  que une a origem de  $\mathbb{R}^3$  a um ponto do  $T_{P_N}\mathbb{S}^2$ ,

$$L(t) = (0, 0, 0) + t(x_1, x_2, 1) = t(x_1, x_2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esta reta intercepta a esfera  $\mathbb{S}^2$  em dois pontos, um no hemisfério norte e o outro no hemisfério sul. Ver Figura 3.1.



**Figura 3.1:** Projeção central.

Agora, considerando a projeção do campo vetorial  $X$  de  $\mathbb{R}^2 \approx T_{P_N} \mathbb{S}^2$  para  $\mathbb{S}^2$  dada pelas projeções centrais, temos dois difeomorfismos

$$f^+ : T_{P_n} \mathbb{S}^2 \rightarrow H_+ \quad \text{e} \quad f^- : T_{P_n} \mathbb{S}^2 \rightarrow H_-,$$

isto é,  $f^+(p)$  (resp.  $f^-(p)$ ) é a intersecção da reta que passa pelo ponto  $p = (x_1, x_2, 1)$  ligando a origem com o hemisfério norte (resp. sul) de  $\mathbb{S}^2$ , cujas expressões são dadas por

$$f^+(x_1, x_2, 1) = \frac{(x_1, x_2, 1)}{\Delta(x)} \quad \text{e} \quad f^-(x_1, x_2, 1) = -\frac{(x_1, x_2, 1)}{\Delta(x)},$$

onde  $\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$ .

Sem perda de generalidade, podemos considerar o campo  $X$  definido no plano tangente à esfera, isto é,  $X : T_{P_n} \mathbb{S}^2 \rightarrow T_{P_n} \mathbb{S}^2$  e, assim, é possível definir um novo campo em  $\mathbb{S}^2$ . O campo  $\tilde{X}$  induzido em  $\mathbb{S}^2$ , a partir de  $X$ , através dos difeomorfismos  $f^+$  e  $f^-$  será dado por

$$\tilde{X}(y) = Df^+(x)X(x) \quad \text{se} \quad y = f^+(x) \in H^+$$

e

$$\tilde{X}(y) = Df^-(x)X(x) \quad \text{se} \quad y = f^-(x) \in H^-,$$

respectivamente.

Destacamos que  $\tilde{X}$  é um campo vetorial em  $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ , que é tangente à esfera. Para estudar o comportamento assintótico das órbitas não limitadas de  $X$  analisando  $\tilde{X}$ , é necessário estender  $\tilde{X}$  para o equador  $\mathbb{S}^1$  obtendo, assim, um campo na esfera.

O estudo de  $\tilde{X}$  em uma vizinhança do equador nos dará informações sobre o comportamento do campo  $X$  no infinito. Entretanto, nem sempre é possível estender  $\tilde{X}$  ao equador. Veremos adiante que, quando  $X$  for um campo polinomial, podemos estender  $\tilde{X}$  analiticamente ao equador. Antes de estudar a extensão de  $\tilde{X}$  ao equador, vamos escolher um sistema de coordenadas conveniente para  $\mathbb{S}^2$  e calcular a expressão de  $\tilde{X}$  nessas coordenadas.

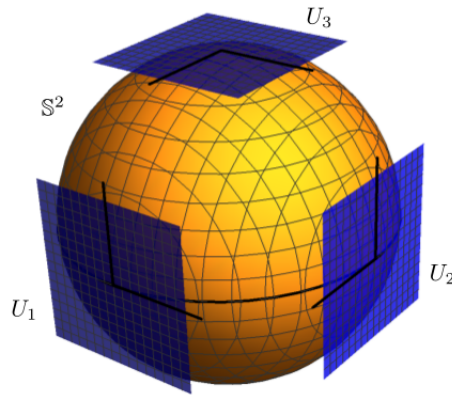
Para  $\mathbb{S}^2$  usaremos seis cartas locais dadas por

$$U_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k > 0\}, \quad V_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k < 0\},$$

para  $k = 1, 2, 3$ . As aplicações locais correspondentes são dadas por  $\phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\psi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2$  e definidas como

$$\phi_k(y) = -\psi_k(y) = \left( \frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k} \right),$$

para  $m < n$  e  $m, n \neq k$ .



**Figura 3.2:** Cartas locais sobre a esfera de Poincaré.

Queremos agora encontrar a expressão do campo na carta local  $(U_1, \phi_1)$ . Seja  $y \in$

$U_1 \cap H_+$ , então  $y = f^+(x)$ ,  $x \in T_{P_N} \mathbb{S}^2$  e

$$\begin{aligned} (\phi_1 \circ f^+)(x) &= \phi_1(f^+(x)) = \phi_1 \left( \frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) \\ &= \left( \frac{x_2}{\Delta(x)} \frac{\Delta(x)}{x_1}, \frac{1}{\Delta(x)} \frac{\Delta(x)}{x_1} \right) \\ &= \left( \frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right). \end{aligned}$$

Portanto  $\phi_1(x_1, x_2, 1) = (u, v)$ , onde  $u = x_2/x_1$  e  $v = 1/x_1$ . Observe que como  $y \in U_1 \cap H_+$ , então  $x_1 \neq 0$ . Como  $\tilde{X}(y) = Df^+(x)X(x)$  quando  $y = f^+(x)$  segue que

$$\begin{aligned} D\phi_1(y)\tilde{X}(y) &= D\phi_1(y) \circ Df^+(x)X(x) \\ &= D(\phi_1 \circ f^+)(x)X(x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Seja  $\tilde{X}(y)|_{U_1 \cap H_+}$  denotando o sistema de coordenadas definido como  $D\phi_1(y)\tilde{X}(y)$  e, portanto, segue da equação (3.1) que

$$\begin{aligned} \tilde{X}(y)|_{U_1 \cap H_+} = D(\phi_1 \circ f^+)(x)X(x) &= \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ \frac{-1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_1^2} (-x_2 P(x_1, x_2) + x_1 Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Esta é a expressão de  $\tilde{X}$  em  $U_1 \cap H_+$  nas coordenadas  $\phi_1$ . Vamos colocá-las em função de  $u$  e  $v$  para facilitar a análise. Usando que  $x_1 = 1/v$ ,  $x_2 = u/v$  e substituindo em (3.2), temos

$$\tilde{X}(y)|_{U_1 \cap H_+} = \left[ -uvP \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + vQ \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right), -v^2P \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right].$$

Em geral,  $\tilde{X}$  não permanece limitado quando nos aproximamos de  $\mathbb{S}^1$ . Mas, se multiplicarmos o campo por um fator  $\rho(y) = y_3^{d-1}$ , onde  $d$  é o grau do campo  $X$ , a extensão se torna possível. Então,

$$\rho(f^+(x)) = \frac{1}{\Delta(x)^{d-1}} = \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}},$$

onde  $z = (u, v)$ . Assim  $\rho\tilde{X}$  nas coordenadas  $(u, v)$  é dado por

$$\begin{aligned} \rho\tilde{X}(u, v) &= \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}} \left( -uvP \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + vQ \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right), -v^2P \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right) \\ &= \frac{v^d}{\Delta(z)^{d-1}} \left( -uP \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + Q \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right), -vP \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Logo, (3.3) é a expressão do campo em  $U_1 \setminus \mathbb{S}^1$ . Verifica-se, facilmente que se  $y \in U_1 \cap H_-$ , obtém-se a mesma expressão.

Faremos algumas considerações a respeito do que foi visto. Inicialmente observamos que os pontos do equador  $\mathbb{S}^1 \cap U_1$  são representados por  $v = 0$  nas coordenadas  $\phi_1$ . Por outro lado, estes pontos correspondem ao infinito do plano  $T_{P_N}\mathbb{S}^2$ .

Observe também, que é possível fazer  $v = 0$  na expressão (3.3), resultando em

$$\rho.\tilde{X}(u, 0) = (-uP_d + Q_d, 0),$$

onde  $P_d$  e  $Q_d$  são os termos de maiores graus em  $P$  e  $Q$ , respectivamente. Na expressão de  $\rho.\tilde{X}(u, 0)$  temos a segunda componente do vetor igual a zero. Isto significa que o vetor  $\rho.\tilde{X}(u, 0)$  é tangente ao equador quando olhado na esfera  $\mathbb{S}^2$ . Podemos concluir então que o equador  $\mathbb{S}^1 \cap U_1$  é invariante pelo campo  $\rho.\tilde{X}$ .

Não é difícil remover o fator  $\frac{1}{\Delta(z)^{d-1}}$  de (3.3) por uma parametrização do tempo. Assim, a expressão para o campo  $\rho.\tilde{X}$  na carta local  $(U_1, \phi_1)$  é dada por

$$\begin{cases} \dot{u} = v^d \left[ -uP \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + Q \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right], \\ \dot{v} = -v^{d+1}P \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right). \end{cases} \quad (3.4)$$

Podemos calcular analogamente, a expressão do campo  $\rho.\tilde{X}$  na carta  $(U_2, \phi_2)$  que será dada por

$$\begin{cases} \dot{u} = v^d \left[ P \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) - uQ \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) \right], \\ \dot{v} = -v^{d+1}Q \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right). \end{cases} \quad (3.5)$$

Finalmente a expressão do campo  $\rho.\tilde{X}$  na carta  $(U_3, \phi_3)$  é dada por

$$\begin{cases} \dot{u} = P(u, v), \\ \dot{v} = Q(u, v). \end{cases} \quad (3.6)$$

**Observação 3.1.** *As expressões para  $\rho.\tilde{X}$  nas cartas  $(V_1, \psi_1)$ ,  $(V_2, \psi_2)$  e  $(V_3, \psi_3)$  terão, respectivamente, as mesmas expressões que (3.4), (3.5) e (3.6) multiplicadas por  $(-1)^{d-1}$ . Observe que o fator  $(-1)^{d-1}$  desempenha um papel fundamental no estudo das estabilidades*



das singularidades em  $\mathbb{S}^1$ . Assim, para conhecermos o comportamento dos pontos do infinito, basta olharmos as cartas  $(U_1, \phi_1)$  e  $(U_2, \phi_2)$ .

**Proposição 3.1.** *Seja  $X$  um campo polinomial em  $\mathbb{R}^2$  de grau  $d$ . Seja  $\rho : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\rho(y) = y_3^{d-1}$ , e seja  $\tilde{X}$  o campo induzido em  $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$  através de  $f^+$  e  $f^-$  como definido acima. Então  $\rho \cdot \tilde{X}$  pode ser estendido a um campo analítico de  $\mathbb{S}^2$  com equador invariante.*

*Demonstração.* Vimos acima que as expressões de  $\rho \cdot \tilde{X}$  nas cartas  $(U_1, \phi_1)$ ,  $(V_1, \psi_1)$ ,  $(U_2, \phi_2)$  e  $(V_2, \psi_2)$  são dadas por (3.4) e (3.5), respectivamente, onde podemos ainda multiplicar pelo fator  $(-1)^{d-1}$  quando for o caso. Vê-se que as expressões (3.4) e (3.5) são perfeitamente definidas para  $v = 0$ , isto é, no equador  $\mathbb{S}^1$  e, como tais expressões são analíticas, podemos estendê-las analiticamente ao equador. Fazendo  $v = 0$  em (3.4) e (3.5) obtemos respectivamente

$$\rho \tilde{X}(u, 0) = (-uP_d + Q_d, 0) \quad \text{e} \quad \rho \tilde{X}(u, 0) = (P_d, 0)$$

e concluímos que o equador será invariante por  $\tilde{X}$ . □

**Definição 3.3.** *O campo vetorial estendido na esfera  $\mathbb{S}^2$  pelas cartas locais  $(U_k, \phi_k)$  e  $(V_k, \psi_k)$ , chama-se **compactificação de Poincaré** de  $X$  e será indicado por  $\mathcal{P}(X)$ .*

**Definição 3.4.** *A projeção de  $H_+ \cup \mathbb{S}^1$  em  $\mathbb{R}^2$  é chamada de **disco de Poincaré**.*

**Definição 3.5.** *Chamamos de **pontos singulares (ou de equilíbrio) finitos** de  $X$ , os pontos de equilíbrio de  $\mathcal{P}(X)$  em  $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ .*

**Definição 3.6.** *Chamamos de **pontos singulares (ou de equilíbrio) infinitos** de  $X$ , os pontos de equilíbrio de  $\mathcal{P}(X)$  em  $\mathbb{S}^1$ .*

Vejamos alguns resultados para singularidades infinitas. Já observamos que os pontos de equilíbrio infinitos são da forma  $(u, 0)$ .

Podemos escrever as componentes  $P$  e  $Q$  do campo  $X$  da seguinte forma

$$P(x, y) = P_m(x, y) + \cdots + P_d(x, y) \quad \text{e} \quad Q(x, y) = Q_m(x, y) + \cdots + Q_d(x, y),$$

sendo  $P_j$  e  $Q_j$  polinômios homogêneos de grau  $j$  de  $P$  e  $Q$ , com  $j = m, \dots, d$  com  $m > 0$ , os polinômios homogêneos não nulos de menor grau.

**Proposição 3.2.** *Seja  $X = (P, Q)$  um campo vetorial polinomial em  $\mathbb{R}^2$ . As seguintes afirmações são verdadeiras.*

a)  $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$  é um ponto singular infinito de  $\mathcal{P}(X)$  se, e somente se,

$$F_1(u) \equiv Q_d(1, u) - uP_d(1, u) = 0.$$

b)  $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$  é um ponto singular infinito de  $\mathcal{P}(X)$  se, e somente se,

$$F_2(u) \equiv Q_d(u, 1) - uP_d(u, 1) = 0.$$

**Prova da Proposição 3.2:**

Considere o campo  $\mathcal{P}(X)$  na carta  $(U_1, \phi_1)$ . Da expressão dada em (3.4) temos que

$$\lim_{v \rightarrow 0} v^d \left[ -uP \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) + Q \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) \right] = Q_d(1, u) - uP_d(1, u).$$

( $\Rightarrow$ ) Assumindo que  $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$  é um ponto singular infinito de  $\mathcal{P}(X)$ , então  $-uP_d(1, u) + Q_d(1, u) = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Agora, assumimos que  $F_1(u) = 0$ , de (3.4) temos que

$$\lim_{v \rightarrow 0} -v^{d+1} P \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) = 0.$$

Logo,  $(u, 0)$  é um ponto singular de  $\mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ .

b) A prova para o caso  $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$  é análoga. ■

**Lema 3.1.** *A compactificação de Poincaré do campo de vetores  $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  polinomial em  $\mathbb{R}^2$  tem pontos de equilíbrio no infinito se existe um fator linear real  $ax + by$  que divide o polinômio  $xQ_d(x, y) - yP_d(x, y)$ , onde  $Q_d$  e  $P_d$  são as partes homogêneas de grau  $d$  de  $Q$  e  $P$ , respectivamente,  $d$  é o grau do campo  $X$ .*

Vejamos um exemplo.

**Exemplo 3.1.** *Considere o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) = x, \\ \dot{y} = Q(x, y) = -y. \end{cases} \quad (3.7)$$

Este sistema tem apenas um ponto singular finito, a origem, o qual é uma sela. Seja  $\tilde{X} = (P(x, y), Q(x, y))$  o campo de vetores associado ao sistema (3.7). Então a expressão de  $\rho.X$  para a carta local  $(U_1, \phi_1)$  é dada por

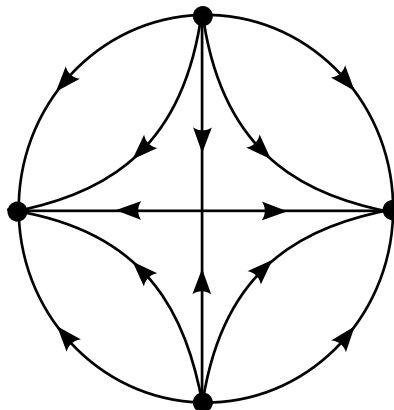
$$\begin{cases} \dot{u} = v \left[ -uP \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + Q \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right] = -2u, \\ \dot{v} = -v^2 P \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) = -v. \end{cases} \quad (3.8)$$

Portanto, existe um único ponto singular em  $U_1$ , a origem, que é um nó estável no infinito e como o grau de  $\tilde{X}$  é ímpar, a origem de  $V_1$  também é outro nó estável. Observe que, neste caso, a curva instável da sela do sistema (3.7) liga a origem com os pontos estáveis no infinito na direção  $y = 0$ . Ver Figura 3.3.

Agora, a expressão de  $\rho.\tilde{X}$  para a carta local  $(U_2, \phi_2)$  é dada por

$$\begin{cases} \dot{u} = v \left[ P \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) - uQ \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) \right] = 2u, \\ \dot{v} = -v^2 Q \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) = v. \end{cases} \quad (3.9)$$

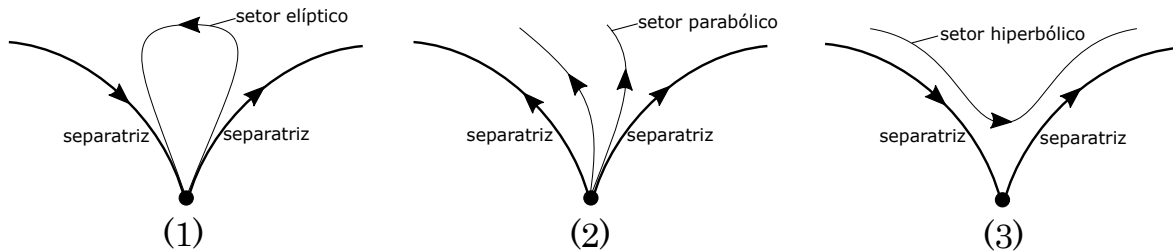
Assim, o único ponto singular em  $U_2$ , a origem, é um nó instável no infinito, o mesmo é válido para a origem de  $V_2$ . Neste caso, a curva estável da sela do sistema (3.7) liga a origem com os pontos instáveis no infinito na direção  $x = 0$ . O retrato de fase do sistema (3.7) no disco de Poincaré está ilustrado na Figura 3.3.



**Figura 3.3:** Retrato de fase no disco de Poincaré do sistema (3.7).

## 3.2 Índice topológico

Chamamos de setor elíptico, setor parabólico e setor hiperbólico um setor que é topologicamente equivalente ao setor mostrado na Figura 3.4 (1), (2) e (3), respectivamente.



**Figura 3.4:** Setores de um ponto singular.

Dizemos que um campo vetorial tem a propriedade da decomposição setorial finita em um ponto singular  $p$  se  $p$  é um centro, foco ou um nó, ou tem uma vizinhança que consiste em uma união finita de setores parabólicos, setores hiperbólicos ou setores elípticos. Observamos que todos os pontos singulares isolados de um sistema diferencial polinomial satisfazem a propriedade de decomposição setorial finita. Em alguns casos mais complicados podemos ter um número infinito de setores, com um único ponto singular. Para mais detalhes ver página 17 de [8].

O índice de um ponto singular pode ser facilmente calculado usando a fórmula do índice de Bendixson, que leva em conta os setores hiperbólicos e os setores elípticos de um ponto singular.

**Teorema 3.1 (Fórmula do Índice de Bendixson).** *Seja  $p$  um ponto singular isolado, tendo a propriedade de decomposição setorial finita, de um campo vetorial  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$ . Denote por  $e$  e  $h$  o número de setores elípticos e setores hiperbólicos, respectivamente, numa vizinhança do ponto  $p$ . Então, o índice de  $p$  é dado por*

$$ind(p) = \frac{(e - h)}{2} + 1.$$

**Proposição 3.3.** *Um ponto singular  $p$  do tipo centro não possui setores hiperbólicos e elípticos numa vizinhança de  $p$ . Assim, pela Fórmula de Bendixson,  $ind(p) = 1$ .*

**Teorema 3.2 (Poincaré-Hopf).** *Seja  $X$  um campo vetorial polinomial. Se a compactificação de Poincaré na esfera tem uma quantidade finita de pontos de equilíbrio, então a soma dos índices desses pontos é dois.*

**Teorema 3.3 (Fórmula de Euler).** *Considere  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ , homogênea de grau  $k > 0$ . Então,  $X \cdot \nabla f(X) = kf(X), \forall X \in \mathbb{R}^m$ .*

### 3.3 Condições suficientes para a CJR em $\mathbb{R}^2$ - parte 1

Nesta seção veremos o resultado principal do artigo [3] apresentado por F. Braun e J. Llibre.

**Teorema 3.4 (Braun, Llibre).** *Considere  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto. Suponha que  $\text{grau}(f) = \text{grau}(g) = m > 1$ . Se os polinômios homogêneos de mais altos graus  $f_m$  e  $g_m$  de  $f$  e de  $g$ , respectivamente, não têm fatores lineares reais comuns, então  $F$  é injetora.*

#### Prova do teorema:

Essencialmente, a prova do teorema consiste em fazer uso do Teorema de Sabatini, ou seja, mostraremos que nessas condições  $H_{M_F}$  tem um centro global na origem, logo  $F$  é um difeomorfismo global. Em particular,  $F$  é injetora. Nas hipótese do Teorema de Sabatini é exigido que  $F(0, 0) = (0, 0)$ , vamos mostrar a seguir que caso isso não ocorra, basta fazer uma translação.

De fato, suponha que  $F(0, 0) = (a, b) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$  com  $a, b \in \mathbb{R}$ . Defina,  $G = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $G(x, y) = F(x, y) - (a, b)$ . É imediato que  $G$  é polinomial,  $G(0, 0) = (0, 0)$ ,  $\text{grau}(g_1) = \text{grau}(g_2) = m$ , o Jacobiano de  $G$  é igual ao de  $F$ , logo é diferente de zero para todo ponto do plano, e as partes homogêneas de maiores graus de  $f$  e  $g$  são as mesmas de  $g_1$  e  $g_2$ .

Note que  $F$  é injetora se, e somente se,  $G$  é injetora.

De fato, se  $F$  é injetora então se  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ , isso implica que  $F(x_1, y_1) \neq F(x_2, y_2)$ , assim temos que  $G(x_1, y_1) = F(x_1, y_1) - (a, b) \neq F(x_2, y_2) - (a, b) = G(x_2, y_2)$ .

Agora se  $G$  é injetora então se  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$  temos  $G(x_1, y_1) \neq G(x_2, y_2)$ . Assim,  $F(x_1, y_1) \neq F(x_2, y_2)$ . De fato, suponha que  $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$ , então  $G(x_1, y_1) = F(x_1, y_1) - (a, b) = F(x_2, y_2) - (a, b) = G(x_2, y_2)$ , o que é uma contradição. Então, sem perda de generalidade, podemos assumir que  $F(0, 0) = (0, 0)$ .

As componentes do campo de vetores  $H_{M_F} = (P, Q)$  são

$$P(x, y) = -\frac{\partial M_F}{\partial y} = -f(x, y)f_y(x, y) - g(x, y)g_y(x, y).$$

$$Q(x, y) = \frac{\partial M_F}{\partial x} = f(x, y)f_x(x, y) + g(x, y)g_x(x, y).$$

Deste modo, denotando por  $n$  o máximo grau de  $P$  e  $Q$ , temos  $n \leq 2m - 1$ . Veremos, a seguir, que  $xQ_n - yP_n = m(f_m^2 + g_m^2)$ . Assim a parte homogênea de grau  $2m - 1$  de  $P$  ou  $Q$  não é zero, provando que  $n = 2m - 1$ . Ou seja, o grau( $H_{M_F}$ ) =  $2m - 1$ . Pois, caso

$$\frac{\partial M_{F(2m)}}{\partial y} = \frac{\partial M_{F(2m)}}{\partial y} = 0,$$

então  $f_m^2 + g_m^2 = \text{constante}$ .

Vamos mostrar que o campo  $H_{M_F}$  tem um centro global na origem, isso decorre das três afirmações a seguir.

**Afirmção 1.** A compactificação de Poincaré de  $H_{M_F}$ , não tem pontos de equilíbrio infinito.

Pelo Lema 3.1, o campo de vetores  $H_{M_F}$  tem pontos de equilíbrio infinito se existir um fator linear da forma  $ax + by$  que divide o polinômio  $xQ_n - yP_n$ . As funções a seguir estão aplicadas em  $(x, y)$ , omitiremos isso para facilitar a notação. Assim, temos

$$\begin{aligned} xQ_n - yP_n &= x \left[ f_m \left( \frac{\partial f_m}{\partial x} \right) + g_m \left( \frac{\partial g_m}{\partial x} \right) \right] + y \left[ f_m \left( \frac{\partial f_m}{\partial y} \right) + g_m \left( \frac{\partial g_m}{\partial y} \right) \right] \\ &= (x, y) \cdot \frac{1}{2} \nabla (f_m^2 + g_m^2) \\ &= \frac{1}{2} 2m (f_m^2 + g_m^2) \\ &= m (f_m^2 + g_m^2). \end{aligned}$$

A terceira igualdade anterior decorre diretamente da Fórmula de Euler. Assim a compactificação de Poincaré de  $H_{M_F}$  não tem pontos de equilíbrio no infinito. Pois, se existisse

um fator linear real  $ax + by$  que dividisse o polinômio  $xQ_n(x, y) - yP_n(x, y)$ , ele dividiria também  $f_m^2 + g_m^2$ , o que implica que dividiria ambos  $f_m$  e  $g_m$ , o que por hipótese, não ocorre.

**Afirmção 2.**  $H_{M_F}$  não tem pontos de equilíbrio finitos diferente da origem.

Sabemos que os pontos de equilíbrio de  $H_{M_F}$  satisfazem  $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ . Vimos que isso é equivalente ao sistema (2.2). Como a matriz que define este sistema linear tem determinante igual ao Jacobiano de  $F$  no ponto  $(x, y)$ , ele é diferente de zero, então não podemos ter uma quantidade infinita de soluções para  $F(x, y) = (0, 0)$ . Pelo, Lema 2.2, todos os pontos de equilíbrios finitos de  $H_{M_F}$  são os zeros de  $F$ , assim temos uma quantidade finita deles. Pelo Teorema de Poincaré-Hopf, o somatório dos índices desses pontos singulares na esfera é dois.

Sabemos que cada ponto de equilíbrio de  $H_{M_F}$  corresponde a dois pontos de equilíbrio na esfera de Poincaré quando compactificado, um no hemisfério norte e outro no hemisfério sul. Além disto, pelo Lema 2.2, os pontos de equilíbrio de  $H_{M_F}$  são centros e, portanto, correspondem a centros na esfera de Poincaré. Temos que a origem do campo  $H_{M_F}$  é um ponto de equilíbrio, pois estamos assumindo que  $F(0, 0) = (0, 0)$ . Este ponto induz dois centros na esfera de Poincaré,  $(0, 0, 1)$  e  $(0, 0, -1)$ , cada um deles tem índice um, pela Proposição 3.3. Portanto, o somatório desses índices na esfera é dois. Se existisse outro ponto de equilíbrio de  $H_{M_F}$  diferente da origem, o somatório dos índices excederia a dois, a menos que, existisse pontos de equilíbrio em  $\mathbb{S}^1$  com índices negativos para compensar a soma, o que não ocorre devido a Afirmção 1. Portanto, a origem de  $H_{M_F}$  é o único ponto de equilíbrio finito.

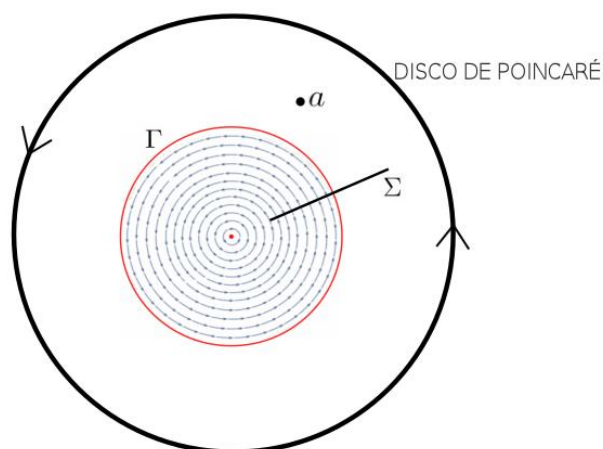
**Afirmção 3.** O anel periódico da origem de  $H_{M_F}$  é o  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Suponha que o anel periódico da origem de  $H_{M_F}$  não é o  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Assim, o anel periódico da origem de  $H_{M_F}$  não é o  $\mathbb{S}^1$  quando consideramos a projeção da compactificação do campo  $H_{M_F}$  sobre o disco de Poincaré.

Então, considere a projeção da compactificação do campo  $H_{M_F}$  sobre o disco de Poincaré. Sabemos que não existe ponto de equilíbrio finito, exceto a origem, e não existe ponto singular no infinito. Considere  $\Gamma$  como o bordo do anel periódico, seja  $a$  um ponto no

exterior da região limitada por  $\Gamma$ , como na Figura 3.5. Analisaremos a órbita  $\gamma_a$ , passando por  $a$ . Temos que  $\gamma_a$  tem  $\Gamma$  como  $\omega$ -limite ou  $\alpha$ -limite, pois caso contrário, contradizemos o Teorema de Existência e Unicidade de soluções de equações diferenciais. Assim, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, temos que  $\Gamma$  é uma órbita fechada, uma vez que possui apenas pontos regulares.

Considere uma seção transversal  $\Sigma$  sobre  $\Gamma$ . A transformação de Poincaré quando restrita à intersecção de  $\Sigma$  com pontos de  $\Gamma$  e a pontos do interior da região limitada por  $\Gamma$  é a aplicação identidade, uma vez que nestas regiões o bordo e pontos do interior do bordo são órbitas periódicas. Veja Figura 3.5. Como a transformação de Poincaré  $\Sigma$  é analítica, pois o campo é polinomial, portanto analítico, veja Proposição 1.21 do livro [8], ela deve ser a identidade também quando restrita a intersecção  $\Sigma$  com pontos do exterior da região limitada por  $\Gamma$ . Isto nos leva a uma contradição com a definição de anel periódico, pois o anel periódico da origem é a maior (no sentido da inclusão) vizinhança de  $(0, 0)$  tal que o interior da vizinhança é preenchida por órbitas periódicas.



**Figura 3.5:** Ilustração da prova da Afirmação 3.

■

Vejamos a seguir uma aplicação do Teorema 3.4.

**Exemplo 3.2.** Considere a seguinte classe de aplicações polinomiais  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow$



$\mathbb{R}^2$ , dada por

$$F(x, y) = (-y + x^k - y^k, x + x^k + y^k),$$

com  $k \geq 1$  ímpar. O Jacobiano de  $F$  é dado por

$$\det(DF(x, y)) = 1 + k(x^{k-1} + y^{k-1}) + 2k^2x^{k-1}y^{k-1} > 0, \quad \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Temos que o grau( $f$ ) = grau( $g$ ) =  $k$ . Os termos  $f_k = x^k - y^k$  e  $g_k = x^k + y^k$  não têm fatores lineares reais em comum. De fato, supondo que exista um fator da forma  $ax + by$  não nulo que divida ambos  $f_k$  e  $g_k$ . Então,  $ax + by$  divide  $f_k + g_k = 2x^k$ , logo  $b = 0$ , e divide também  $f_k - g_k = -2y^k$ , logo  $a = 0$ . Obtemos  $a = 0$  e  $b = 0$ , que é uma contradição. Assim, estamos nas hipóteses do Teorema 3.4. Portanto,  $F$  é injetora, como ela é polinomial,  $F$  é um difeomorfismo global. Consequentemente, podemos obter uma classe de campo de vetores que tenham a origem como um centro global. Calculando a aplicação  $M_F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  para o exemplo dado, obtemos

$$M_F(x, y) = \frac{x^2}{2} + x^{2k} + x^{1+k} - x^k y + \frac{y^2}{2} + xy^k + y^{2k} + y^{1+k}.$$

A partir desta função  $M_F$  obtemos o campo de vetores Hamiltoniano associado à  $M_F$ , o qual é uma classe de campos de vetores que possuem a origem como um centro global, considerando sempre  $k \geq 1$  ímpar. As componentes do campo  $H_{M_F}$  são dadas por

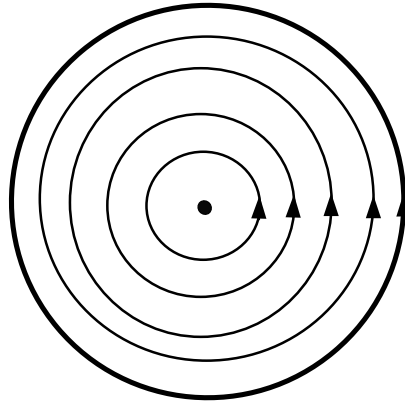
$$P(x, y) = x^k - y - kxy^{-1+k} - (1+k)y^k - 2ky^{-1+2k},$$

$$Q(x, y) = x + (1+k)x^k + 2kx^{-1+2k} - kx^{-1+k}y + y^k.$$

Note que se  $k = 1$  temos um centro linear  $H_{M_F} = (-5y, 5x)$ , para  $k = 3$  temos um centro global na origem para o campo

$$H_{M_F} = (x^3 - 3xy^2 - y(1 + 4y^2 + 6y^4), x + 4x^3 + 6x^5 - 3x^2y + y^3).$$

Veja a Figura 3.6.



**Figura 3.6:** Retrato de fase global de  $H_{M_F}$ .

**Observação 3.2.** Note que a CJR no plano é verdadeira para a classe de aplicações polinomiais  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $F(x, y) = (-y + x^k - y^k, x + x^k + y^k)$ , com  $k \geq 1$  ímpar.

O Teorema 3.4 fornece apenas uma condição suficiente para a injetividade da aplicação  $F$ , mas não uma condição necessária. Vejamos o seguinte exemplo.

**Exemplo 3.3.** Considere a aplicação polinomial  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por:

$$F(x, y) = \left( 2x - y + \frac{(3x + y)^3}{27}, 3x - y + \frac{4(3x + y)^3}{45} \right).$$

Note que  $\text{grau}(f) = \text{grau}(g) = 3$ . Calculando o Jacobiano, obtemos

$$\det(DF(x, y)) = 1 + \left( \frac{2(3x + y)^2}{3} \right) > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Temos  $f_3(x, y) = (3x + y)^3/27$  e  $g_3(x, y) = 4(3x + y)^3/45$ . Logo, não estamos nas hipóteses do Teorema 3.4, pois  $3x + y$  é um fator linear real comum a  $f_3(x, y)$  e  $g_3(x, y)$ .

Por outro lado,  $F$  é injetora, pelo Teorema 1.7. Isso mostra que temos apenas uma condição suficiente para a injetividade da aplicação  $F$ , mas ela não é uma condição necessária.

### 3.4 Condições suficientes para a CJR em $\mathbb{R}^2$ - parte 2

Nesta seção veremos como, em 2016, F. Braun, J. Giné e J. Llibre, no artigo [2] generalizaram o resultado obtido no Teorema 3.4 através do seguinte teorema.

**Teorema 3.5 (Braun, Giné, Llibre).** *Considere  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto,  $F(0,0) = (0,0)$ , e o campo de vetores polinomial  $H_{M_F} = (P(x,y), Q(x,y)) = (-(ff_y + gg_y), ff_x + gg_x)$ . Suponha que os polinômios homogêneos de mais altos graus de  $P$  e  $Q$ , respectivamente, não têm fatores lineares reais comuns. Então,  $F$  é injetora.*

Vejamos primeiramente um exemplo de que nos dá uma pista que o Teorema 3.5 é mais geral que o Teorema 3.4.

**Exemplo 3.4.** *Considere a aplicação polinomial  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por*

$$F(x, y) = (x + x^3 - y, x^3 + y).$$

*É fácil ver que o Jacobiano de  $F$  é dado por  $1 + 6x^2$ , que é maior ou igual a zero para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Além disso, o grau( $f$ ) = grau( $g$ ) = 3,  $f_3(x, y) = x^3$  e  $g_3(x, y) = x^3$ . Assim o fator linear  $x$  é comum a ambos. Portanto, não estamos nas hipóteses do Teorema 3.4. Por outro lado, é fácil ver que  $F(0,0) = (0,0)$  e os termos  $P$  e  $Q$  de  $H_{M_F}$  são dados por*

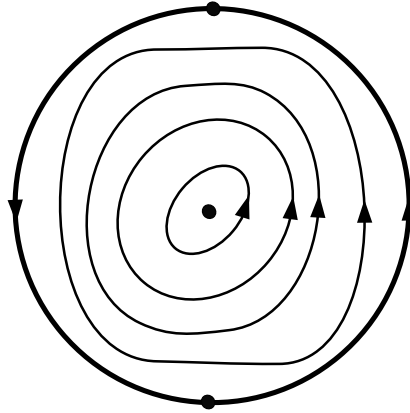
$$P(x, y) = x - 2y, \quad Q(x, y) = x - y + 4x^3 + 6x^5.$$

*O polinômio homogêneo de mais alto grau de  $P$  é  $x - 2y$  e o polinômio homogêneo de mais alto grau de  $Q$  é  $6x^5$ , os quais não possuem fator linear em comum. Portanto, estamos nas hipóteses do Teorema 3.5. Logo,  $F$  é injetora, e como é polinomial, é um difeomorfismo global.*

*Pelo Teorema de Sabatini, a origem do campo  $H_{M_F}$  é um centro global.*

$$H_{M_F}(x, y) = (P, Q) = (x - 2y, x - y + 4x^3 + 6x^5).$$

*Veja a Figura 3.7.*



**Figura 3.7:** Retrato de fase global de  $H_{M_F}$ .

Notemos que o campo  $H_{M_F}$  associado a aplicação  $F$  dada no Exemplo 3.4 tem pontos de equilíbrio infinitos, o que não ocorria com as hipóteses do Teorema 3.4.

A seguinte proposição é uma demonstração de que o Teorema 3.5 é de fato uma generalização do Teorema 3.4.

**Proposição 3.4.** *Considere  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto,  $F(0, 0) = (0, 0)$  e  $H_{M_F} = (P(x, y), Q(x, y)) = (-(ff_y + gg_y), ff_x + gg_x)$ . Suponha que o grau( $f$ ) = grau( $g$ ) =  $m > 1$ . Se os polinômios homogêneos de mais altos graus  $f_m$  e  $g_m$  de  $f$  e de  $g$ , respectivamente, não têm fatores lineares reais comuns, então os polinômios homogêneos de mais altos graus de  $P$  e de  $Q$  também não têm fatores lineares reais comuns.*

**Prova da Proposição 3.4:**

Para facilitar a notação denotaremos  $(P(x, y))_x$  e  $(P(x, y))_y$  para indicar as derivadas parciais do polinômio  $P(x, y)$  com respeito a  $x$  e  $y$ , respectivamente. As funções nessa demonstração estão sempre aplicadas em  $(x, y)$ , omitiremos isso para facilitar a compreensão e a notação.

Primeiramente, note que  $(f_m^2 + g_m^2)_x \not\equiv 0$  e  $(f_m^2 + g_m^2)_y \not\equiv 0$ . De fato, suponha que  $(f_m^2 + g_m^2)_x \equiv 0$ , então  $f_m^2$  e  $g_m^2$  são funções apenas de  $y$ , assim temos que  $f_m(x, y) = a_my^m$  e

$g_m(x, y) = b_my^m$ , o que implica que  $y$  é um fator comum de  $f_m(x, y)$  e  $g_m(x, y)$ , o que não ocorre, por hipótese. De forma análoga provamos que  $(f_m^2 + g_m^2)_y \neq 0$ .

Assim, os termos homogêneos de mais altos graus de  $Q$  e  $P$  são, a menos de sinal, dados respectivamente por

$$\left(\frac{f_m^2 + g_m^2}{2}\right)_x \quad e \quad \left(\frac{f_m^2 + g_m^2}{2}\right)_y.$$

Temos,

$$\left(\frac{f_m^2 + g_m^2}{2}\right)_x = \frac{2f_m(f_m)_x}{2} + \frac{2g_m(g_m)_x}{2} = f_m(f_m)_x + g_m(g_m)_x = Q_n \neq 0,$$

$$\left(\frac{f_m^2 + g_m^2}{2}\right)_y = \frac{2f_m(f_m)_y}{2} + \frac{2g_m(g_m)_y}{2} = f_m(f_m)_y + g_m(g_m)_y = -P_n \neq 0.$$

Faremos a prova da proposição pela contrapositiva. Suponha a existência de um fator linear real da forma  $ax + by$  que divide os termos homogêneos de mais altos graus de  $Q$  e  $P$ . Devemos mostrar que  $ax + by$  divide os polinômios  $f_m$  e  $g_m$ . Deste modo,  $ax + by$  divide qualquer combinação linear dos termos homogêneos de mais altos graus de  $Q$  e  $P$ , em particular divide  $xQ_n - yP_n$ . Agora,

$$\begin{aligned} xQ_n - yP_n &= x \left(\frac{f_m^2 + g_m^2}{2}\right)_x + y \left(\frac{f_m^2 + g_m^2}{2}\right)_y \\ &= x \left(\frac{2f_m(f_m)_x + 2g_m(g_m)_x}{2}\right) + y \left(\frac{2f_m(f_m)_y + 2g_m(g_m)_y}{2}\right) \\ &= x(f_m(f_m)_x + g_m(g_m)_x) + y(f_m(f_m)_y + g_m(g_m)_y) \\ &= (x, y) \cdot \frac{1}{2} \nabla (f_m^2 + g_m^2) \\ &= \frac{1}{2} 2m (f_m^2 + g_m^2) \\ &= m (f_m^2 + g_m^2). \end{aligned}$$

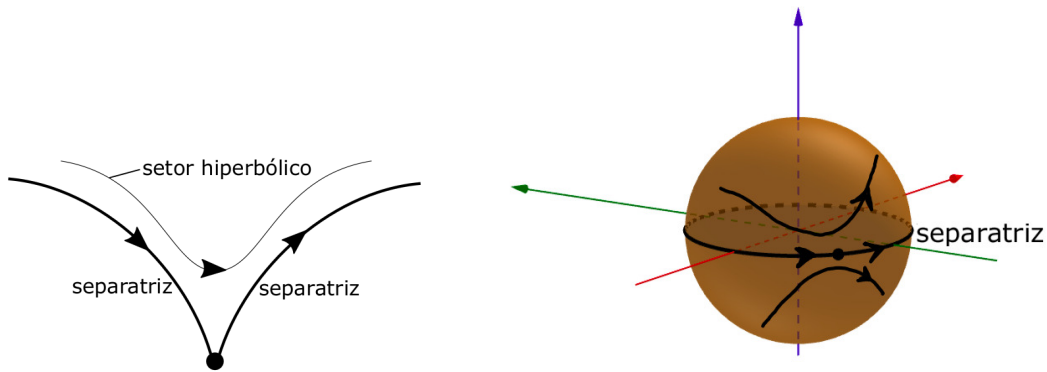
Com isso obtemos que,  $ax + by$  divide  $m(f_m^2 + g_m^2)$ . Portanto, divide  $f_m$  e  $g_m$ . Ou seja, é um fator linear em comum de  $f_m$  e de  $g_m$ , terminando a prova da proposição. ■

Para a prova do Teorema 3.5 precisaremos dos seguintes resultados.

**Definição 3.7.** Denote por  $G_{m,n}$  o conjunto de todos os campos vetoriais polinomiais  $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  com  $\text{grau}(P) = m$  e  $\text{grau}(Q) = n$  tal que os polinômios homogêneos  $P_m$  e  $Q_n$  não têm fatores lineares reais em comum.

**Definição 3.8.** Seja  $F = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo de vetores polinomial. Considere  $P_0 \in \mathbb{S}^1$  um ponto de equilíbrio infinito na compactificação de Poincaré do campo  $F$ . Suponha que  $P_0$  tem um setor hiperbólico. Dizemos que esse setor hiperbólico é degenerado se as duas separatrizes estão contidas em  $\mathbb{S}^1$ . Caso contrário, esse setor hiperbólico é chamado não degenerado.

Veja a Figura 3.8, a qual apresenta uma ilustração da definição anterior.



**Figura 3.8:** Ilustração de um setor hiperbólico e dois setores hiperbólicos degenerados, nos quais as duas separatrizes estão contidas em  $\mathbb{S}^1$ .

O próximo resultado é devido a Cima, Gasull e Mañosas, sua prova pode ser encontrada em [7].

**Teorema 3.6.** Seja  $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação polinomial. Seja  $q$  um ponto de equilíbrio infinito do campo vetorial polinomial Hamiltoniano  $H_M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que

$$H_M = \left( -\frac{\partial M}{\partial y}(x, y), \frac{\partial M}{\partial x}(x, y) \right) = (-M_y, M_x),$$

com  $\text{grau}(M_y) = m$  e  $\text{grau}(M_x) = n$ . As seguintes afirmações são válidas.

1. Se  $m = n$  e  $H_M \in G_{m,m}$ , então  $q$  é um nó e, portanto,  $\text{ind}(q) = 1$ .

2. Se  $q$  tem algum setor hiperbólico não degenerado  $h$ , então  $H_M \notin G_{m,n}$ .
3. Se  $m > n$  e  $H_M \in G_{m,n}$ , então
  - (a) Se  $m$  é par, então  $q$  é um nó e, portanto,  $\text{ind}(q) = 1$ .
  - (b) Se  $m$  é ímpar e  $n$  é par, então  $q$  tem um setor hiperbólico degenerado e um setor elíptico, e, portanto  $\text{ind}(q) = 1$ .
  - (c) Se  $m$  e  $n$  são ímpares, então  $q$  tem dois setores hiperbólicos degenerados e portanto  $\text{ind}(q) = 0$ , ou  $q$  tem dois setores elípticos e, portanto  $\text{ind}(q) = 2$ .

Do Teorema 3.6 segue, o seguinte corolário.

**Corolário 3.1.** *Seja  $q$  um ponto de equilíbrio infinito do campo vetorial Hamiltoniano polinomial  $H_M = (-M_y, M_x)$  tal que  $\text{grau}(M_y) = m$  e  $\text{grau}(M_x) = n$ . Se  $H_M \in G_{m,n}$ , então o  $\text{ind}(q)$  é maior ou igual a zero, e quando é zero o ponto de equilíbrio  $q$  na esfera de Poincaré é formado por dois setores hiperbólicos degenerados.*

Enfim, segue a demonstração do Teorema 3.5.

**Prova do Teorema 3.5:**

Por hipótese, o campo de vetores  $H_{M_F} = (P, Q)$  é Hamiltoniano tal que os polinômios homogêneos de mais altos graus de  $P$  e  $Q$  não têm fatores lineares reais em comum. Sem perda de generalidade, denotando por  $\text{grau}(P) = m$  e  $\text{grau}(Q) = n$ , segue que  $H_{M_F} \in G_{m,n}$ .

A prova do Teorema 3.5 consiste em demonstrar que a origem é um centro global do campo  $H_{M_F}$ , assim, pelo Teorema de Sabatini,  $F$  é um difeomorfismo global, em particular, é injetora, terminando a demonstração.

Então, mostremos que a origem do campo  $H_{M_F}$  é um centro global, isso decorre das três afirmações a seguir.

**Afirmção 1.** A origem do campo de vetores  $H_{M_F}$  é o único ponto de equilíbrio finito. Precisamos garantir que o campo  $H_{M_F}$  quando compactificado possui uma quantidade finita de pontos de equilíbrio na esfera de Poincaré, para utilizarmos o Teorema de Poincaré-Hopf.

A justificativa que garante que  $H_{M_F}$  tem uma quantidade finita de pontos de equilíbrio finito é a mesma utilizada na Afirmação 2 da prova do Teorema 3.4. Os pontos de equilíbrio infinito de  $H_{M_F}$ , se existirem, são isolados. De fato, denote por  $d = \max\{m, n\}$ , então

$$xQ_d(x, y) - yP_d(x, y) \neq 0.$$

Temos que  $P_m$  e  $Q_n$  não são identicamente nulos.

Se  $m > n$ , então  $xQ_d - yP_d = -yP_m \neq 0$ . Se  $n > m$ , então  $xQ_d - yP_d = xQ_n \neq 0$ .

Agora, se  $m = n$ , suponha  $xQ_d(x, y) - yP_d(x, y) = xQ_m - yP_m \equiv 0$ , assim existe um polinômio  $R_m(x, y)$  de grau  $m - 1$  tal que  $P_m = xR_m$  e  $Q_m = yR_m$ , o que contradiz o fato dos polinômios homogêneos de mais altos graus de  $P$  e  $Q$  não possuírem fatores em comum. Portanto, a compactificação do campo  $H_{M_F}$  tem um número finito de pontos de equilíbrio na esfera. Logo, estamos nas hipóteses do Teorema de Poincaré-Hopf. A origem  $(0, 0)$  do campo  $H_{M_F}$  é um centro, assim ele induz dois centros na esfera de Poincaré. Logo a soma desses índices na esfera é dois. Se existisse outro ponto de equilíbrio de  $H_{M_F}$  diferente da origem, o somatório dos índices excederia a dois, a menos que, existisse pontos de equilíbrio em  $\mathbb{S}^1$  com índices negativos para compensar a soma, o que não ocorre devido ao Corolário 3.1. Portanto, a origem de  $H_{M_F}$  é o único ponto de equilíbrio finito.

**Afirmção 2.** Se existir um ponto de equilíbrio infinito de  $H_{M_F}$  ele é formado por dois setores hiperbólicos degenerados.

Como  $H_{M_F} \in G_{m,n}$ , segue do Corolário 3.1, que se  $q$  é um ponto de equilíbrio infinito da compactificação de  $H_{M_F}$ , então o índice topológico de  $q$  é maior ou igual a zero. Como a soma dos índices na esfera já é dois, se existir pontos de equilíbrio infinitos, esses pontos terão índice zero, e pelo Corolário 3.1 serão formado por dois setores hiperbólicos degenerados.

**Afirmção 3.** O anel periódico da origem de  $H_{M_F}$  é o plano todo exceto a origem.

A prova dessa afirmação é idêntica a da Afirmação 3 feita na demonstração do Teorema 3.4, por isso não faremos novamente. ■

Vejamos um exemplo de aplicação do Teorema 3.5.



**Exemplo 3.5.** Considere a aplicação polinomial  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$F(x, y) = \left( \frac{x(x^2 + 3)}{3}, x + y \right).$$

O Jacobiano de  $F$  é dado por  $1 + x^2 > 0$ , para todo ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . As componentes do campo  $H_{M_F}$  são dadas por

$$P(x, y) = -(ff_y + gg_y) = -(x + y), \quad Q(x, y) = ff_x + gg_x = 2x + y + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{3}.$$

Note que,  $x^5/3$  e  $x + y$  não têm fatores lineares reais em comum. Portanto, pelo Teorema 3.5,  $F$  é injetora, como  $F$  é polinomial, é um difeomorfismo global. Portanto, pelo Teorema de Sabatini, a origem do campo  $H_{M_F}$  é um centro global.

Vejamos no exemplo a seguir que o Teorema 3.5 também fornece apenas condições suficientes, mas não necessárias.

**Exemplo 3.6.** Considere a aplicação polinomial  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$F(x, y) = (x + x^3 + y^3, y).$$

O Jacobiano de  $F$  é dado por  $1 + 3x^2 > 0$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

As componentes do campo  $H_{M_F}$  são dadas por

$$P(x, y) = -(y + 3xy^2 + 3y^2(x^3 + y^3)) \quad e \quad Q(x, y) = x + 4x^3 + y^3 + 3x^2(x^3 + y^3).$$

Sabemos que,  $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ , assim, os termos de mais alto grau de  $P$  e  $Q$  possuem o fator linear  $x + y$  em comum. Portanto, não estamos nas hipóteses do Teorema 3.5. Porém,  $F$  é injetora. Basta utilizar o Teorema 1.7.

Veremos no próximo capítulo que qualquer sistema diferencial polinomial de grau par não tem centro global.

# Capítulo 4

## Um sistema diferencial polinomial de grau par não tem centro global

Finalizamos esta dissertação apresentando o resultado do artigo [17]. Nele C. Valls e J. Llibre demonstraram que um campo de vetores polinomial no plano de grau par não possui centro global. As técnicas aplicadas nesse artigo são muito parecidas com as já utilizadas nos capítulos anteriores dessa dissertação.

Considere  $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  um campo de vetores polinomial planar de grau  $d$  e o sistema diferencial polinomial associado ao campo  $X$

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y). \end{cases} \quad (4.1)$$

O principal resultado obtido no artigo [17] é o seguinte.

**Teorema 4.1.** *O sistema diferencial polinomial (4.1) com  $d$  par não tem centro global.*

Antes de iniciarmos a prova do Teorema 4.1, apresentamos duas proposições que nos auxiliarão na prova desse teorema. A primeira dessas proposições é uma simples caracterização de centro global quando a compactificação de Poincaré não possui o infinito formado somente por pontos singulares. A segunda envolve um resultado sobre a matriz Jacobiana de um ponto singular em  $\mathbb{S}^1$  que possui dois setores hiperbólicos degenerados.

**Proposição 4.1.** *Um campo vetorial polinomial  $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  sem ter o infinito formado somente de pontos singulares, tem um centro global se, e somente se, tem um único ponto singular finito que é um centro e todos os pontos singulares infinitos na esfera de Poincaré, se existirem, devem ser formados por dois setores hiperbólicos degenerados.*

**Proposição 4.2.** *Um ponto singular infinito  $q$  formado por dois setores hiperbólicos degenerados tem a matriz Jacobiana no ponto  $q$  identicamente nula.*

**Prova da Proposição 4.2:**

A prova dessa proposição segue da observação que todos os retratos de fase locais de pontos singulares hiperbólicos, semi-hiperbólicos e nilpotentes estão completamente entendidos, veja os Capítulos 2, 3 e os Teoremas 2.5, 2.19 e 3.5 do livro [8]. Como nenhum desses retratos tem um ponto singular formado por dois setores hiperbólicos degenerados, concluímos que a matriz Jacobiana é nula. ■

## 4.1 Prova do Teorema 4.1

Antes de iniciar a prova do teorema fixamos a seguinte notação.

**Definição 4.1.**  $G_d(x, y) = yP_d(x, y) - xQ_d(x, y)$ ,  $G_d$  é um polinômio nas variáveis  $x$  e  $y$ .

**Prova do Teorema 4.1:**

Sabemos, pela Proposição 3.2 que os pontos singulares infinitos do sistema (4.1) correspondem aos fatores lineares que dividem  $G_d(x, y)$ . Separamos a prova do Teorema 4.1 em duas partes tratando dos casos em que  $G_d \not\equiv 0$  e  $G_d \equiv 0$ .

**Caso 1:** Primeiro vamos tratar do caso em que  $G_d$  não é o polinômio identicamente nulo. Faremos a prova por contradição. Assuma que o sistema (4.1) com grau par tem um centro global e  $G_d(x, y) \not\equiv 0$ . Sabemos que todo polinômio homogêneo de grau  $d$  pode ser fatorado como

$$\prod_{i=1}^{r_1} (a_i x + b_i y)^{l_i} \prod_{k=0}^{r_2} (\alpha_k x^2 + \beta_k xy + \gamma_k y^2)^{j_k},$$

onde  $l_i \geq 0$  para todo  $i = 1, \dots, r_1$ ,  $j_k \geq 0$  e  $\beta_k^2 - 4\alpha_k\gamma_k < 0$  para  $k = 0, \dots, r_2$  e  $\sum_{i=1}^{r_1} l_i + \sum_{k=0}^{r_2} 2j_k = d$ .

Como  $G_d(x, y) \not\equiv 0$ , temos que o infinito não é formado somente por pontos singulares. Assim, por uma rotação de coordenada em relação à origem podemos assumir que todos os pontos de equilíbrio no infinito estão nas cartas  $U_1 \cup V_1$ . Introduzimos a seguinte notação

$$G_{d-k}(x, y) = yP_{d-k}(x, y) - xQ_{d-k}(x, y), \quad k = 0, 1, \dots, d.$$

Escrevendo o sistema (4.1) na carta  $U_1$ , obtemos

$$\begin{cases} u' = -G_d(1, u) + vG_{d-1}(1, u) + \dots + v^{d-1}G_0(1, u), \\ v' = -vP_d(1, u) - v^2P_{d-1}(1, u) - \dots - v^dP_0(1, u). \end{cases} \quad (4.2)$$

Considere  $(\bar{u}, 0)$  um ponto singular na carta  $U_1$ , o qual existe pois  $G_d \not\equiv 0$  tem grau  $d+1$  ímpar. Logo,  $G_d(1, \bar{u}) = 0$ . A matriz Jacobiana associada ao sistema (4.2) e aplicada no ponto  $(\bar{u}, 0)$  é dada por

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial G_d}{\partial u}(1, \bar{u}) & G_{d-1}(1, \bar{u}) \\ 0 & -P_d(1, \bar{u}) \end{bmatrix}.$$

Como estamos assumindo que temos um centro global, pela Proposição 4.1, o ponto  $(\bar{u}, 0)$  deve ser formado por dois setores hiperbólicos degenerados e, pela Proposição 4.2, a matriz Jacobiana no ponto deve ser linearmente nula. Dito isto, temos que  $G_d(1, \bar{u}) = 0$  e  $\partial G_d(1, \bar{u})/\partial u = 0$ , o que implica que o ponto  $(\bar{u}, 0)$  deve ter multiplicidade dois como um zero do polinômio  $G_d(1, u)$ . Isso implica que  $G_d$  tem um fator linear real, com pelo menos multiplicidade dois e, assim, podemos reescrever  $G_d$  da seguinte forma

$$G_d = \prod_{i=1}^{r_1} (a_i x + b_i y)^{l_i} \prod_{k=0}^{r_2} (\alpha_k x^2 + \beta_k xy + \gamma_k y^2)^{j_k}, \quad (4.3)$$

onde  $l_i \geq 2$  para todo  $i = 1, \dots, r_1$ ,  $j_k \geq 0$  e  $\beta_k^2 - 4\alpha_k\gamma_k < 0$  para  $k = 0, \dots, r_2$  e  $\sum_{i=1}^{r_1} l_i + \sum_{k=0}^{r_2} 2j_k = d+1$ .

Como o grau de  $G_d$  é ímpar, existe pelo menos um  $i \in \{1, \dots, r_1\}$  tal que  $l_i$  é ímpar. Pois, caso contrário,  $G_d$  teria grau par. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que tal  $l_i$  ocorre para  $i = 1$ , assim devemos ter  $l_1$  ímpar e  $l_1 \geq 3$ . Então

$$G_d(x, y) = (a_1x + b_1y)^{l_1} \prod_{i=2}^{r_1} (a_i x + b_i y)^{l_i} \prod_{k=0}^{r_2} (\alpha_k x^2 + \beta_k xy + \gamma_k y^2)^{j_k}. \quad (4.4)$$

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $b_1 \neq 0$ , caso contrário fazemos uma rotação em relação à origem. Na carta  $U_1$  o polinômio homogêneo  $G_d(x, y)$  dado em (4.4) se escreve como

$$G_d(1, u) = (a_1 + b_1u)^{l_1} \prod_{i=2}^{r_1} (a_i + b_iu)^{l_i} \prod_{k=0}^{r_2} (\alpha_k + \beta_k u + \gamma_k u^2)^{j_k}.$$

Introduzindo uma nova variável,  $a_1 + b_1u = U$  em  $G_d(1, u)$ , obtemos que

$$G_d\left(1, \frac{U - a_1}{b_1}\right) = U^{l_1} \Gamma + \dots, \quad (4.5)$$

onde

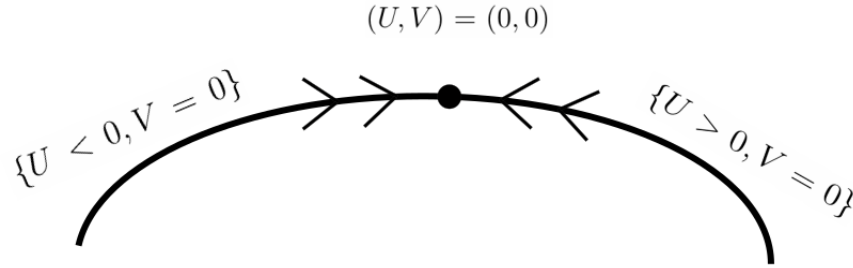
$$\Gamma = \prod_{i=2}^{r_1} \left(\frac{a_i b_1 - b_i a_1}{b_1}\right)^{l_i} \prod_{k=0}^{r_2} \left(\frac{\alpha_k b_1^2 - \beta_k a_1 b_1 + \gamma_k a_1^2}{b_1^2}\right)^{j_k} \neq 0,$$

pois  $U = 0$  tem exatamente multiplicidade  $l_1$  e  $\dots$  representa os termos de ordens superiores na variável  $U$ .

Considerando as novas variáveis  $(U, v = V)$ , segue de (4.2) e (4.5) que o sistema na carta local  $U_1$  restrito a  $V = 0$  pode ser escrito como

$$U'|_{v=0} = -(U^{l_1} \Gamma + \dots), \quad V'|_{v=0} = 0.$$

Temos que o eixo  $U$  é invariante. Lembrando que  $l_1$  é ímpar, assim no semi-eixo positivo  $\{U > 0, V = 0\}$  numa vizinhança de  $(U, V) = (0, 0)$  as órbitas fluem no sentido oposto à órbita no semi-eixo negativo  $\{U < 0, V = 0\}$ . Veja a Figura 4.1. Assim o ponto  $(U, V) = (0, 0)$  não pode ser formado por dois setores hiperbólicos degenerados. Isso contradiz a nossa suposição que o sistema (4.1) tem um centro global.



**Figura 4.1:** Fluxo das órbitas numa vizinhança de  $(U, V) = (0, 0)$ .

**Caso 2:** Considere que  $G_d(x, y)$  é o polinômio identicamente nulo.

Faremos essa parte da prova por contradição novamente. Assuma que o sistema (4.1) tem um centro global e  $G_d(x, y) \equiv 0$ .

Como  $G_d(x, y) \equiv 0$  temos que equador da esfera de Poincaré é formado somente por pontos singulares. Desde que  $G_d(x, y) \equiv 0$  temos  $yP_d(x, y) = xQ_d(x, y)$ , assim existe um polinômio  $R_d(x, y)$  de grau  $d - 1$  ímpar tal que

$$P_d(x, y) = xR_d(x, y) \quad \text{e} \quad Q_d(x, y) = yR_d(x, y).$$

Escrevendo o sistema (4.1) na carta  $U_1$ , obtemos

$$\begin{cases} u' = vG_{d-1}(1, u) + \cdots + v^{d-1}G_0(1, u), \\ v' = -vR_d(1, u) - v^2P_{d-1}(1, u) - \cdots - v^dP_0(1, u). \end{cases} \quad (4.6)$$

Como já sabíamos a curva no infinito  $v = 0$  é formada por pontos singulares. Fazendo uma reparametrização na variável temporal da forma  $ds = vdt$ , obtemos que o sistema (4.6) na nova variável temporal é dado por

$$\begin{cases} u' = G_{d-1}(1, u) + vG_{d-2}(1, u) + \cdots + v^{d-2}G_0(1, u), \\ v' = -R_d(1, u) - vP_{d-1}(1, u) - \cdots - v^{d-1}P_0(1, u). \end{cases} \quad (4.7)$$

Note que a reparametrização na variável temporal não altera o retrato de fase do sistema (4.6), isto é, o sistema (4.7) possui o mesmo retrato de fase do sistema (4.6). A reparametrização na variável temporal faz com que as órbitas sejam percorridas com velocidades diferentes, podendo inverter o sentido das órbitas, no caso anterior, inverter o sentido das órbitas para  $v < 0$ .

Como  $R_d(x, y)$  é um polinômio de grau  $d - 1$ , temos que  $R_d(1, u) \not\equiv 0$ . Assim, existe  $\bar{u}$  tal que  $R_d(1, \bar{u}) \not\equiv 0$ . Em outras palavras, temos que o ponto  $(\bar{u}, 0)$  é um ponto regular do sistema (4.7).

Por outro lado, temos que

$$v'|_{v=0} = -R_d(1, u) \not\equiv 0 \quad \text{e} \quad v'|_{(v=0, u=\bar{u})} = -R_d(1, \bar{u}) \not\equiv 0,$$

tal ponto que é um ponto singular do sistema (4.7) é o  $\alpha$ -limite ou o  $\omega$ -limite de alguma órbita do sistema (4.6). Isso contradiz novamente a nossa suposição que o sistema (4.1) tem um centro global. ■

# Conclusões

Apresentamos, neste trabalho, uma maneira de abordar a Conjectura Jacobiana Real no plano através da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, utilizando o Teorema de Sabatini. Posteriormente, apresentamos maneiras de encontrar classes de aplicações nas hipóteses da CJR no plano que tornem essa conjectura verdadeira. Dentre esses resultados destacamos principalmente os trabalhos de F. Braun, J. Giné e J. Llibre. Finalizamos esse trabalho mostrando que um sistema diferencial polinomial de grau par não tem centro global, esse resultado foi apresentado por C. Valls e J. Llibre.



# Referências Bibliográficas

- [1] F. BRAUN, J. R. DOS SANTOS, *The real Jacobian conjecture on  $\mathbb{R}^2$  is true when one of the components has degree 3*, Discrete and Continuous Dynamical Systems., 26 (2010), 75-87.
- [2] F. BRAUN, J. GINÉ, J. LLIBRE, *A sufficient condition in order that the real Jacobian Conjecture in  $\mathbb{R}^2$  holds*, Journal of Differential Equations., 260 (2016), 5250-5258.
- [3] F. BRAUN, J. LLIBRE, *A new qualitative proof of a result on the real Jacobian Conjecture*, Annals of the Brazilian Academy of Sciences., 87 (2015), 1519-1524.
- [4] F. BRAUN, J. LLIBRE, *On the connection between global centers and global injectivity in the plane*, ArXiv., 1706.02643[math.DS].
- [5] F. BRAUN, B. ORÉFICE-OKAMOTO, *On polynomial submersions of degree 4 and the real Jacobian conjecture in  $\mathbb{R}^2$* , Journal of Mathematical Analysis and Applications., 443 (2016), 688-706.
- [6] L. A. CAMPBELL, *The asymptotic variety of a Pinchuk map as a polynomial curve*, Applied Mathematics Letters., 24 (2011), 62-65.
- [7] A. CIMA, A. GASULL, F. MAÑOSAS, *On polynomial Hamiltonian planar vector fields*, Journal of Differential Equations., 106 (1993), 367-383.
- [8] F. DUMORTIER, J. LLIBRE, J. ARTÉS, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems.*, Springer Verlag., New York, (2006).

- [9] W. GORDON, *On the diffeomorphisms of Euclidean space*, The American Mathematical Monthly., 79 (1972), 755-759.
- [10] J. GWOZDZIEWICZ, *The real Jacobian conjecture for polynomials of degree 3*, Annales Polonici Mathematici., 76 (2001), 121-125.
- [11] O. KELLER, *Ganze Cremona-Transformatione*, Monatshefte für Mathematik und Physik., 47 (1939), 299-306.
- [12] S. PINCHUK, *A counterexample to the strong real Jacobian conjecture*, Mathematische Zeitschrift., 217 (1994), 1-4.
- [13] W. RUDIN, *Injective polynomial maps are automorphisms*, The American Mathematical Monthly., 102 (1995), 540-543.
- [14] W. RUDIN, *Principles of Mathematical Analysis*, Third edition. McGraw Hill. 1980.
- [15] M. SABATINI, *A connection between isochronous Hamiltonian centres and the Jacobian conjecture*, Nonlinear Analysis-theory Methods and Applications., 34 (1998), 829-838.
- [16] J. SOTOMAYOR, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides. IMPA. Rio de Janeiro, (1979).
- [17] C. VALLS, J. LLIBRE, *Polynomial differential systems with even degree have no global centers*, Journal of Mathematical Analysis and Applications., 503 (2021), 125281.