

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# O Problema da Estabilidade Assintótica Global: Algumas Soluções

Renner Augusto Pereira da Silva

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando Mello

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da  
FAPEMIG

ITAJUBÁ, 3 DE MARÇO DE 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# O Problema da Estabilidade Assintótica Global: Algumas Soluções

**Renner Augusto Pereira da Silva**

**Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando Mello**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Ciências em Matemática

**Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias**

ITAJUBÁ – MG

3 DE MARÇO DE 2023

*Dedico este trabalho à minha querida mãe.*

# Agradecimentos

Agradeço aos professores do Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Itajubá pelos ensinamentos ofertados. Em especial, o meu agradecimento ao meu orientador Prof. Dr. Luis Fernando Mello por toda ajuda, inspiração e suporte na construção deste trabalho.

Agradeço, também, aos meus pais, Geraldo Carlos da Silva e Laura Donizete Pereira Silva, aos meus irmãos Rafael, Rosana, Ricardo, Rosimara, Rafaela e Raquel por tudo o que já fizeram e fazem por mim. Agradeço minha namorada Luana dos Santos Marques pelo companheirismo.

Aos companheiros do PMAT, fica registrado o meu agradecimento. E, por fim, agradeço a FAPEMIG pelo auxílio financeiro ao longo do curso.

*“Por muito tempo tem sido um dos meus axiomas que as pequenas coisas são  
infinitamente mais importantes.”  
(Arthur Conan Doyle)*

# Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar a Estabilidade Assintótica Global de campos de vetores. Após a apresentação e o esclarecimento do problema, é feita uma breve revisão de alguns tópicos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. O ponto de partida deste trabalho é a conexão da Conjectura de Markus–Yamabe com o tema principal de estudo. Algumas outras classes de campos de vetores Globalmente Assintoticamente Estáveis são estudadas também.

**Palavras–chave:** Estabilidade Assintótica Global, Conjectura de Markus–Yamabe, Equação Diferencial Ordinária.

# Abstract

The objective of this dissertation is to study the Global Asymptotic Stability Problem of vector fields. After presenting and clarifying the problems, a brief review of some topics of the Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations is made. The starting point of this work is the connection of the Markus–Yamabe Conjecture with the main subject of study. Some other classes of Globally Asymptotically Stable vector fields are also studied.

**Keywords:** Global Asymptotic Stability, Markus–Yamabe Conjecture, Ordinary Differential Equation.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>ii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Sumário</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 O problema da estabilidade assintótica global . . . . .	1
<b>2 Considerações iniciais</b>	<b>5</b>
2.1 Revisão de tópicos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais . . . . .	5
2.2 Pontos de equilíbrio semi-hiperbólicos . . . . .	18
2.3 Compactificação de Poincaré . . . . .	21
2.4 Problema foco-centro no plano . . . . .	29
<b>3 Problemas propostos</b>	<b>38</b>
3.1 Markus–Yamabe no plano . . . . .	38
3.2 Condições enfraquecidas de Markus–Yamabe . . . . .	51
3.2.1 Sistemas quadráticos . . . . .	52
3.2.2 Sistemas de Liénard . . . . .	72
3.2.3 Sistemas Kukles de grau 3 . . . . .	73



3.3 Markus–Yamabe em dimensões maiores ou iguais que três . . . . .	85
<b>Conclusões</b>	<b>89</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>90</b>

# Lista de Figuras

2.1	Interpretação geométrica de uma curva integral de $F$ . . . . .	6
2.2	Ilustração da transformação de Poincaré. . . . .	13
2.3	Ciclos limites: Estável (esquerda), instável (centro) e semi-estável (direita). . . . .	15
2.4	Sela topológica. . . . .	20
2.5	Nó instável topológico. . . . .	20
2.6	Sela-nó topológica. . . . .	21
2.7	Projeções centrais. . . . .	22
2.8	Cartas locais $U_1$ , $U_2$ e $U_3$ da esfera de Poincaré. . . . .	25

# Capítulo 1

## Introdução

O problema da estabilidade assintótica global consiste em dar condições, se possível verificáveis, para que a bacia de atração de um ponto de equilíbrio de um campo de vetores, associado a uma equação diferencial, seja todo o seu domínio. Este é um problema de grande importância da teoria de estabilidade, onde grandes nomes da história passada e presente da matemática dedicaram e dedicam esforços e tempo na busca por respostas.

Equações diferenciais, as quais associamos aos campos de vetores, que tenham um único ponto de equilíbrio e a bacia de atração deste ponto é todo o domínio do campo de vetores, são o interesse de estudo desta dissertação. Tais pontos de equilíbrios são chamados de globalmente assintoticamente estáveis. Foge do interesse deste texto a aplicação dessas equações diferenciais, nosso objetivo é puramente matemático. Neste primeiro capítulo, os conceitos e resultados estão apresentados de maneira informal.

### 1.1 O problema da estabilidade assintótica global

Considere uma equação diferencial ordinária em  $\mathbb{R}^n$

$$X' = \frac{dX}{dt} = F(X), \quad (1.1)$$

sendo  $t$  a variável independente e

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.2)$$

um campo de vetores de classe  $C^1$ . De modo usual, identificamos a equação diferencial ordinária (1.1) com o campo de vetores  $F$ .

Suponha que a equação diferencial ordinária (1.1) tenha um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável  $P_0 \in \mathbb{R}^n$ , o qual, sem perda de generalidade, assumimos ser a origem. Está bem definida a bacia de atração de  $P_0$ , denotada por  $B(P_0)$ , como o conjunto das condições iniciais cujas soluções tendem a  $P_0$ .

Neste cenário, temos um importante problema da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, conhecido como PEAG, o qual, consiste em: dar condições, se possível verificáveis, para a estabilidade assintótica global de  $P_0 = 0$ , isto é, para que  $B(0) = \mathbb{R}^n$ . Estudar este problema é o objetivo central deste trabalho.

Quando  $B(0) = \mathbb{R}^n$ , dizemos que a equação diferencial (1.1), ou o campo de vetores  $F$  em (1.2), é globalmente assintoticamente estável (GAE). Subentende-se que este problema esteja resolvido com a teoria de Lyapunov, porém, encontrar uma função de Lyapunov estrita própria não é uma tarefa fácil.

Relacionado ao problema da estabilidade assintótica global (PEAG), podemos citar a desafiadora Conjectura de Markus–Yamabe [17].

**Conjectura 1** (Markus–Yamabe). *Se, para todo  $X \in \mathbb{R}^n$ , os autovalores de  $DF(X)$  têm partes reais negativas, então a origem é globalmente assintoticamente estável.*

A Conjectura de Markus–Yamabe no plano, isto é, em  $\mathbb{R}^2$ , foi resolvida afirmativamente no início dos anos 1990 independentemente por Fešler [8], Glutsyuk [10] e Gutiérrez [11].

Brilhantemente, Fešler, Glutsyuk e Gutiérrez provaram, independentemente, a injetividade de  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e usaram esse resultado na prova da Conjectura de Markus–Yamabe no plano, pois, já era conhecido desde o início dos anos 1960, por Olech [18], que, sob as hipóteses da Conjectura de Markus–Yamabe no plano,  $F$  é globalmente assintoticamente estável se, e somente se,  $F$  é globalmente injetora.

Para a solução da Conjectura de Markus–Yamabe no plano, dada por Gutiérrez, considere  $\rho \in [0, \infty)$  e  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação  $C^1$ . Dizemos que  $F$  satisfaz a  $\rho$  condição nos autovalores se:

- Para cada  $X \in \mathbb{R}^2$ , o determinante de  $DF(X)$  é positivo.
- Para cada  $X \in \mathbb{R}^2$  com  $\|X\| \geq \rho$ , os autovalores de  $DF(X)$  não pertencem ao intervalo  $[0, \infty)$ .

**Observação 1.1.1.** *Se  $F$  satisfaz as hipóteses da Conjectura de Markus–Yamabe, então  $F$  satisfaz a  $\rho$  condição nos autovalores, para todo  $\rho \in [0, \infty)$ .*

Com isso, temos o seguinte Teorema de Gutiérrez solucionando a Conjectura 1.

**Teorema 1.1.1** (Gutiérrez). *Se  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma aplicação  $C^1$  satisfazendo a  $\rho$  condição nos autovalores, para algum  $\rho \in [0, \infty)$ , então  $F$  é injetora.*

Dez anos depois, Fernandes, Gutiérrez e Rabanal, em [7], provaram o seguinte teorema. Usaremos a notação “Spec” para representar o espectro de uma matriz.

**Teorema 1.1.2** (Fernandes, Gutiérrez e Rabanal). *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação  $C^1$ . Se, para algum  $\varepsilon > 0$ ,*

$$\text{Spec}(DF(X)) \cap [0, \varepsilon) = \emptyset, \quad \forall X \in \mathbb{R}^2,$$

*então  $F$  é injetora.*

Não entraremos nas demonstrações desses dois teoremas precedentes. Elas podem ser encontradas nas referências citadas.

No geral, ainda em  $\mathbb{R}^2$ , as condições sobre os autovalores da matriz Jacobiana são condições muito difíceis de serem verificadas. No Capítulo 3 apresentamos um exemplo de uma equação diferencial que é GAE, porém não satisfaz as condições da Conjectura de Markus–Yamabe. Deste modo, as condições de Markus–Yamabe são suficientes, mas não são necessárias para a estabilidade assintótica global.

Outro objetivo desta dissertação é exibir classes de campos de vetores no plano que sejam globalmente assintoticamente estáveis e que não estejam nas hipóteses da Conjectura de Markus–Yamabe. Também no Capítulo 3, enfraquecemos as hipóteses da Conjectura 1, com o intuito de podermos alcançar este objetivo.

Aumentando a dimensão, analisando em  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 3$ , sabe-se que a Conjectura 1 é falsa. Porém, para campos de vetores gradientes em  $\mathbb{R}^n$ , que satisfazem as hipóteses da Conjectura 1, a resposta é afirmativa, isto é, são GAE. Portanto, o terceiro objetivo é exibir classes de campos de vetores em  $\mathbb{R}^n$  para as quais a conjectura é verdadeira.

Para realizarmos o estudo sintetizado nesta dissertação, usamos ferramentas e técnicas da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. No próximo capítulo discutimos este assunto em linhas gerais, apresentamos as definições e notações que são usadas ao longo do texto, desde teoremas clássicos deste campo da matemática, até técnicas “modernas”.

Por fim, nas Conclusões, são apresentadas as considerações finais e planos para futuros estudos. Em seguida, as referências bibliográficas usadas para a elaboração deste trabalho são exibidas.

# Capítulo 2

## Considerações iniciais

Neste capítulo trazemos uma breve revisão de alguns tópicos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais que são utilizadas ao longo desta dissertação. Tais temas podem ser obtidos com mais detalhes nos livros [6] e [20]. Buscamos seguir o mesmo roteiro de [6]. Além destas referências, usamos também as notas de aulas do professor Luis Fernando Mello, usadas na disciplina Tópicos Avançados em Matemática II, do Programa de Mestrado em Matemática na Universidade Federal de Itajubá.

Neste capítulo fixamos a notação que será usada ao longo do trabalho. Apresentamos algumas demonstrações, porém, o objetivo nesta parte do trabalho é reunir ferramentas e técnicas para auxiliar no estudo da estabilidade global. Assim, omitimos algumas demonstrações, citando as referências onde podem ser encontradas.

### 2.1 Revisão de tópicos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais

Análogo ao capítulo anterior, considere um campo de vetores de classe  $C^1$

$$F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

sendo  $U$  um subconjunto aberto. Em muito do que faremos,  $U = \mathbb{R}^n$ .

A partir do campo de vetores  $F$ , definimos a equação diferencial ordinária em  $U$  por

$$X' = \frac{dX}{dt} = F(X), \quad (2.2)$$

sendo  $t$  a variável independente.

Identificamos a equação diferencial ordinária (2.2) com o campo de vetores  $F$  em (2.1).

Um ponto  $X \in U$  é um ponto de equilíbrio se  $F(X) = 0$ . Caso contrário,  $X \in U$  é um ponto regular de  $F$ .

Uma solução de (2.2) é uma função diferenciável  $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ , tal que

$$\phi'(t) = \frac{d\phi}{dt}(t) = F(\phi(t)), \quad (2.3)$$

para todo  $t \in I$ .

Na literatura, também temos que uma solução pode ser chamada de trajetória ou curva integral do campo de vetores  $F$ .

Podemos interpretá-la, geometricamente, da seguinte forma:  $\phi$  é uma curva integral de  $F$  se, e somente se, seu vetor velocidade  $\phi'(t)$  em  $t$  coincidir com o valor do campo  $F$  em  $\phi(t)$ , para todo  $t \in I$ . A Figura 2.1 a seguir ilustra essa ideia.

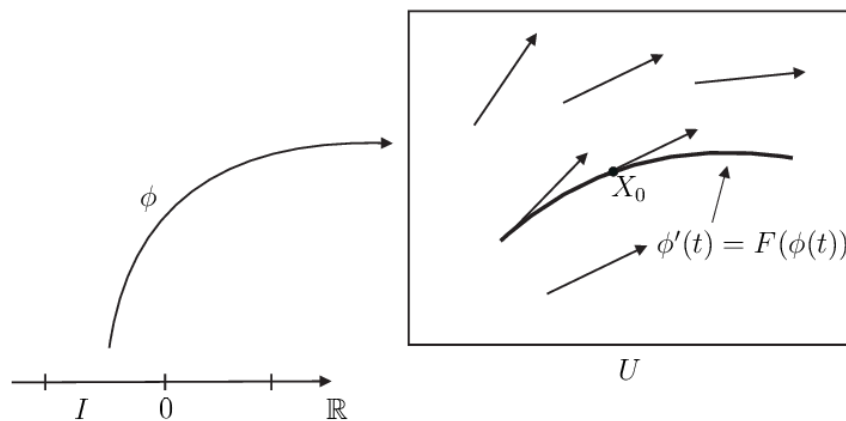


Figura 2.1: Interpretação geométrica de uma curva integral de  $F$ .

Considere o problema de valor inicial (PVI) ou problema de Cauchy

$$X' = \frac{dX}{dt} = F(X), \quad X(t_0) = X_0. \quad (2.4)$$



Chama-se  $X_0$  de condição inicial.

Uma solução de (2.4) é uma função diferenciável  $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ , tal que

$$\phi'(t) = \frac{d\phi}{dt}(t) = F(\phi(t)), \forall t \in I \quad \text{e} \quad \phi(t_0) = X_0, t_0 \in I. \quad (2.5)$$

Não há perda de generalidade em considerar  $t_0 = 0$ .

Uma solução  $\phi : I \rightarrow U$  de (2.4) chama-se máxima se para toda solução  $\zeta : J \rightarrow U$  tal que  $I \subset J$  e  $\phi = \zeta|_I$  se tenha  $I = J$  e, conseqüentemente,  $\phi = \zeta$ . Neste caso, o intervalo aberto  $I$  é chamado de intervalo máximo.

O próximo teorema reúne algumas das principais propriedades relacionadas ao problema de valor inicial (2.4).

**Teorema 2.1.1.** *Considere  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de vetores de classe  $C^1$ .*

**i)** *(Existência e unicidade de soluções máximas). Para cada  $X_0 \in U$  existe um intervalo aberto  $I_{X_0}$  onde está definida a única solução máxima  $\phi_{X_0}$  de (2.4),*

**ii)** *(Propriedade de grupo). Se  $Y = \phi_{X_0}(t_1)$  e  $t_1 \in I_{X_0}$ , então*

$$I_Y = I_{X_0} - t_1 = \{r - t_1 : r \in I_{X_0}\}$$

*e  $\phi_Y(s) = \phi_{X_0}(t_1 + s)$ , para todo  $s \in I_Y$ ,*

**iii)** *(Regularidade com relação às condições iniciais). O conjunto*

$$\Omega = \{(t, X) : X \in U, t \in I_X\}$$

*é aberto em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e a aplicação  $\phi : \Omega \rightarrow U$  dada por  $\phi(t, X) = \phi_X(t)$  é de classe  $C^1$  em  $\Omega$ .*

O Teorema 2.1.1 pode ser encontrado em [6], página 3. O próximo teorema complementa o anterior.

**Teorema 2.1.2.** *Considere  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de vetores de classe  $C^1$ ,  $X_0 \in U$  e  $\phi_{X_0} : I_{X_0} \rightarrow U$  a solução máxima de  $F$  por  $X_0 = \phi_{X_0}(0)$ . Suponha que*

$I_{X_0} = (a, b)$ , com  $b$  finito. Então, dado qualquer conjunto compacto  $K \subset U$ , existe  $t_0 \in (a, b)$  tal que

$$\phi_{X_0}(t_0) \notin K.$$

Resultado análogo vale para o caso em que  $a$  é finito.

A demonstração do Teorema 2.1.2 pode ser encontrada em [6], página 4.

A aplicação  $\phi : \Omega \rightarrow U$  definida no Teorema 2.1.1 é chamada fluxo (gerado) por  $F$ . Para cada  $P \in U$ , o conjunto

$$\Phi(P) = \{\phi(t, P) : t \in I_P\},$$

isto é, a imagem da curva integral de  $F$  pelo ponto  $P$ , é chamada órbita de  $F$  pelo ponto  $P$ . Temos, então, que

$$Q \in \Phi(P) \iff \Phi(P) = \Phi(Q),$$

pois, se  $Q \in \Phi(P)$ , então  $Q = \phi(t_1, P)$ , com  $t_1 \in I_P$  e

$$\phi(t, Q) = \phi(t, \phi(t_1, P)) = \phi(t + t_1, P), \quad \text{com } I_P - t_1 = I_Q.$$

Portanto, duas órbitas de  $F$  coincidem ou são disjuntas. Assim, temos a decomposição de  $U$  numa união disjunta de curvas diferenciáveis, podendo cada uma ser:

- Imagem bijetora de um intervalo de  $\mathbb{R}$ ;
- Um ponto;
- Homeomorfa a um círculo.

No segundo caso,  $\{P\} = \Phi(P)$ , a órbita chama-se singular. Neste caso,  $P$  é um ponto de equilíbrio de  $F$  e vale  $F(P) = 0$ . Recordando, se  $F(P) \neq 0$ , dizemos que  $P$  é um ponto regular de  $F$ .

No terceiro caso, a órbita chama-se fechada (ou periódica). Tendo essas informações, podemos avançar para o seguinte teorema.

**Teorema 2.1.3.** *Se  $\phi$  é uma solução máxima de (2.2) em  $I$ , ocorre uma das seguintes alternativas:*

- a)  $\phi$  é bijetora;
- b)  $I = \mathbb{R}$  e  $\phi$  é constante;
- c)  $I = \mathbb{R}$  e  $\phi$  é periódica, isto é, existe um  $k > 0$  tal que

$$\phi(t + k) = \phi(t),$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ , e  $\phi(t_1) \neq \phi(t_2)$ , se  $|t_1 - t_2| < k$ .

A demonstração do Teorema 2.1.3 pode ser encontrada em [6], página 5.

O conjunto aberto  $U$ , munido da decomposição em órbitas de  $F$ , chama-se retrato de fase de  $F$ . As órbitas são orientadas no sentido das curvas integrais do campo  $F$  e os pontos de equilíbrio são munidos da orientação trivial. Os retratos de fase nos ajudam a ter uma intuição geométrica do comportamento do campo de vetores.

Alguns campos de vetores são mais simples de compreender, ainda mais quando se trata de informações locais, além disso, seus retratos de fase são bastante conhecidos. Portanto, nosso próximo esforço será como relacionar dois campos de vetores segundo os seus retratos de fase. Para isso, recordamos algumas “equivalências” entre dois campos de vetores, as quais permitem comparar seus retratos de fase.

Considere

$$F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad G : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

campos de vetores de classe  $C^1$  definidos nos abertos  $U$  e  $V$ , respectivamente. Dizemos que o campo de vetores  $F$  é topologicamente equivalente ao campo  $G$  se existe um homeomorfismo

$$H : U \longrightarrow V$$

que aplica órbitas de  $F$  em órbitas de  $G$  preservando as orientações. Mais precisamente, se  $P \in U$  e  $\Phi(P)$  é a órbita orientada de  $F$  passando por  $P$ , então  $H(\Phi(P))$  é a órbita orientada  $\Psi(H(P))$  de  $G$  passando por  $H(P)$ . Neste caso,  $H$  é uma equivalência topológica entre  $F$  e  $G$ .

Considere

$$\phi_1 : \Omega_1 \longrightarrow U \quad \text{e} \quad \phi_2 : \Omega_2 \longrightarrow V$$

os fluxos gerados pelos campos  $F$  e  $G$ , respectivamente. Dizemos que  $F$  é topologicamente conjugado a  $G$  se existe um homeomorfismo

$$H : U \longrightarrow V,$$

tal que

$$H(\phi_1(t, X)) = \phi_2(t, H(X)),$$

para todo  $(t, X) \in \Omega_1$ . O homeomorfismo  $H$  é uma conjugação topológica entre  $F$  e  $G$ .

Considere  $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  e  $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$  um aberto. Uma aplicação  $G : B \longrightarrow U$  de classe  $C^1$  chama-se seção transversal (local) de  $F$  quando, para todo  $P \in B$ ,

$$DG(P)(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ e } F(G(P))$$

geram o espaço  $\mathbb{R}^n$ .

Considere  $\Sigma = G(B)$  munido da topologia induzida. Se  $G : B \longrightarrow \Sigma$  for um homeomorfismo, dizemos que  $\Sigma$  é uma seção transversal de  $F$ .

Em uma vizinhança de um ponto regular, o retrato de fase de um campo de vetores  $F$  está completamente determinado, como nos mostra o teorema a seguir.

**Teorema 2.1.4** (Fluxo Tubular). *Considere  $P \in U$  um ponto regular de um campo de vetores  $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . Então, existe um difeomorfismo que conjuga  $F$ , em uma vizinhança de  $P$ , com o campo constante*

$$(1, 0, 0, \dots, 0)$$

*restrito a uma vizinhança da origem.*

A demonstração do Teorema 2.1.4 pode ser encontrada em [6], página 9.

Considere um campo de vetores  $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  e  $P \in U$  um ponto de equilíbrio de  $F$ . Dizemos que  $P$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico se a linearização  $DF(P)$  possui todos os autovalores com partes reais não nulas. Caso contrário, diremos que o ponto é não hiperbólico.

O Teorema de Hartman–Grobman a seguir nos informa que, em uma vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico  $P$ , o comportamento do campo de vetores  $F$  é o “mesmo”

que o da sua linearização  $DF(P)$ . Portanto, quando estamos interessados em saber a natureza de determinado ponto de equilíbrio, fazemos uso deste teorema.

**Teorema 2.1.5** (Hartman–Grobman). *Considere  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de vetores de classe  $C^1$  e  $P \in U$  um ponto de equilíbrio hiperbólico. Então, existem vizinhanças  $V \subset U$  de  $P$  e  $W \subset \mathbb{R}^n$  de  $0$  tais que  $F|_V$  é topologicamente conjugado a  $DF(P)|_W$ .*

A demonstração do Teorema 2.1.5 pode ser encontrada em [20], página 290.

Agora, considere  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetores de classe  $C^1$  e  $P \in U$  um ponto de equilíbrio de  $F$ . O ponto de equilíbrio  $P$  é estável, se dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que

$$\|X - P\| < \delta \implies \|\phi(t, X) - P\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

O ponto de equilíbrio  $P$  é instável se não for estável. O ponto de equilíbrio  $P$  é assintoticamente estável se é estável e, além disso,  $\delta > 0$  puder ser escolhido tal que

$$\|X - P\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, X) = P.$$

Sendo  $P$  assintoticamente estável, está bem definida a bacia de atração de  $P$ , denotada por  $B(P)$ , como o conjunto das condições iniciais cujas soluções tendem a  $P$ .

Considere um campo de vetores  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  e  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . A derivada de  $V$  na direção do campo  $F$  no ponto  $X \in U$  é definida por

$$\dot{V}(X) = \nabla V(X) \cdot F(X).$$

Suponha que  $P \in U$  é um ponto de equilíbrio de  $F$ . Uma função  $V : W \subset U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $P \in W$ , é uma função de Lyapunov (para o ponto de equilíbrio  $P$ ) se:

- $V(X) \geq 0$ , para todo  $X \in W$  e  $V(X) = 0$  se, e somente se,  $X = P$ .
- $\dot{V}(X) \leq 0$ , para todo  $X \in W$ .

A função  $V$  é uma função de Lyapunov estrita (para o ponto de equilíbrio  $P$ ) se  $V$  é uma função de Lyapunov e, além disso,

$$\dot{V}(X) < 0, \quad \forall X \in W \setminus \{P\}.$$

Com a teoria de Lyapunov, temos o seguinte teorema sobre a estabilidade de um ponto de equilíbrio.

**Teorema 2.1.6** (Lyapunov). *Considere  $P$  um ponto de equilíbrio isolado do campo  $F$ .*

- a) *Se existir um função de Lyapunov  $V$  definida em alguma vizinhança  $W \subset U$  contendo  $P$ , então  $P$  é um ponto de equilíbrio estável.*
- b) *Se  $V$  for uma função de Lyapunov estrita, então  $P$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.*

A demonstração do Teorema 2.1.6 pode ser encontrada em [20], página 272.

Quanto ao teorema acima, temos uma ferramenta muito poderosa para estudar a estabilidade de um ponto de equilíbrio. Porém, não há um método para se obter uma função de Lyapunov para um dado campo de vetores  $F$ . Assim, o seu uso fica restrito e em alguns casos não há proveito imediato.

Note que o Teorema 2.1.6, nos fornece uma resposta local. Para termos uma resposta global, exige-se que a função de Lyapunov  $V$  seja própria. Uma aplicação  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^q$  é chamada própria se  $F^{-1}(K) \subset \mathbb{R}^k$  é um compacto, sempre que  $K \subset \mathbb{R}^q$  for um compacto. Equivalentemente, a aplicação contínua  $F$  é própria se

$$\|F(X)\| \rightarrow \infty, \text{ sempre que } \|X\| \rightarrow \infty.$$

O próximo teorema é conhecido como Princípio de Invariância de Lasalle. Considere um campo de vetores  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ .

Um conjunto  $W \subset U$  é positivamente invariante se, para todo  $X \in W$ ,

$$\phi_X(t) \in W, \quad \forall t \geq 0.$$

De modo análogo, pode-se definir conjunto negativamente invariante. Por outro lado,  $W$  é invariante se, para todo  $X \in W$ ,

$$\phi_X(t) \in W, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Uma órbita inteira de  $F$  é um conjunto da forma

$$\{\phi_X(t) : X \in U, t \in \mathbb{R}\}.$$

**Teorema 2.1.7** (Lasalle). *Considere um campo de vetores  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  e  $P \in U$  um ponto de equilíbrio de  $F$ . Considere  $L : W \subset U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Lyapunov (para o ponto de equilíbrio  $P$ ), de modo que  $P \in W$ . Considere ainda  $\mathcal{P} \subset W$  uma vizinhança fechada de  $P$ . Suponha que  $\mathcal{P}$  é positivamente invariante e que não exista órbita inteira em  $\mathcal{P} \setminus \{P\}$  sobre a qual  $L$  é constante. Então,  $P$  é assintoticamente estável e  $\mathcal{P}$  está contido na bacia de atração de  $P$ .*

A demonstração do Teorema 2.1.7 pode ser encontrada em [12], página 201.

Definimos, a seguir, a transformação de Poincaré, ou transformação de primeiro retorno, de um campo de vetores. Essa transformação descreve o comportamento de um campo de vetores em uma vizinhança de uma órbita fechada no plano.

Considere um campo de vetores  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$  e uma órbita fechada  $\gamma$  de período  $\tau_0$ . Considere uma seção transversal  $\Sigma$  de  $F$  em  $P \in \gamma$ .

A continuidade do fluxo  $\phi$  de  $F$  garante que, para todo ponto  $Q \in \Sigma$ , suficientemente próximo de  $P$ , a trajetória  $\phi_Q(t)$  permanece próxima de  $\gamma$ , para  $t$  pertencente a um intervalo compacto.

Tomando  $\Sigma_0 \subset \Sigma$  adequado, podemos definir

$$\begin{aligned} \pi : \Sigma_0 &\longrightarrow \Sigma \\ X &\longmapsto \pi(X) \end{aligned}$$

em que  $\pi(X)$  é a primeira interseção de  $\phi_X(t)$  com  $\Sigma$  para  $t > 0$ .

A Figura 2.2 a seguir ilustra a definição da transformação de Poincaré.

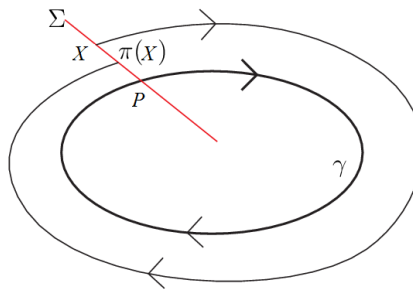


Figura 2.2: Ilustração da transformação de Poincaré.

Note que  $P \in \Sigma_0$  e  $\pi(P) = P$ . Temos a seguinte proposição.

**Proposição 2.1.1.** *Considere a construção descrita acima. Então, a transformação de Poincaré  $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \pi(\Sigma_0)$  é um difeomorfismo de classe  $C^1$ .*

A demonstração da Proposição 2.1.1 pode ser encontrada em [20], página 227.

Considere um campo de vetores  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$ , uma órbita fechada  $\gamma$  de  $F$  e  $Q$  numa vizinhança de  $\gamma$ .

Para cada  $t \in I_Q$  fixado, a distância de  $\phi_Q(t)$  a  $\gamma$  é dada por

$$d(\phi_Q(t), \gamma) = \inf\{\|\phi_Q(t) - R\| : R \in \gamma\}.$$

Se  $\gamma$  é uma órbita fechada isolada, isto é, se existe uma vizinhança  $V \subset U$  de  $\gamma$  tal que  $\gamma$  é a única órbita fechada, dizemos que  $\gamma$  é um ciclo limite.

Pode-se mostrar que existem somente os seguintes tipos de ciclos limites:

- Estável: se, para todo  $Q$  numa vizinhança  $V$  de  $\gamma$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_Q(t), \gamma) = 0.$$

- Instável: se, para todo  $Q \in V$ ,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi_Q(t), \gamma) = 0.$$

- Semi-estável: se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_Q(t), \gamma) = 0,$$

para todo  $Q \in V \cap \text{Ext}\gamma$  e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi_Q(t), \gamma) = 0,$$

para todo  $Q \in V \cap \text{Int}\gamma$ , ou vice-versa.

Na Figura 2.3 são apresentadas ilustrações dos três tipos de ciclos limites.



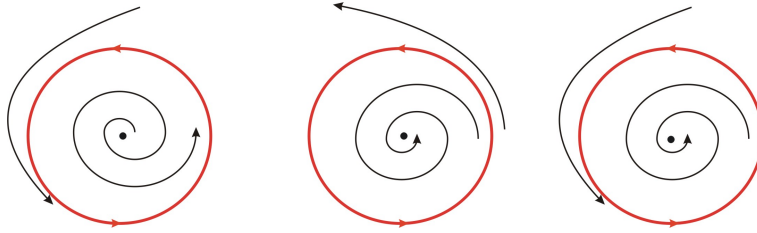


Figura 2.3: Ciclos limites: Estável (esquerda), instável (centro) e semi-estável (direita).

Podemos observar que os ciclos limites correspondem aos pontos fixos isolados da aplicação de Poincaré  $\pi$ .

Identificando a seção transversal  $\Sigma$  com um intervalo da reta real e considerando  $P = 0$ , segue que a aplicação de Poincaré tem uma expansão da forma

$$\pi(X) = \pi(0) + \pi'(0)X + \cdots = \pi'(0)X + \cdots,$$

sendo que os pontinhos acima significam termos de ordens mais altas no desenvolvimento de Taylor.

O próximo teorema estabelece uma expressão para a derivada da aplicação de Poincaré e condições para que uma órbita fechada  $\gamma$  seja um ciclo limite hiperbólico, ou seja, quando  $\pi'(P) \neq 1$ , para algum  $P \in \gamma$ .

**Teorema 2.1.8.** *Considere um campo de vetores  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$  e uma órbita fechada  $\gamma$  de  $F$  de período  $\tau_0$ . Considere  $\Sigma$  uma seção transversal em  $P \in \gamma$  e  $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  a aplicação de Poincaré. Então, a derivada da aplicação de Poincaré é dada por*

$$\pi'(P) = \exp\left(\int_0^{\tau_0} \operatorname{div}F(\gamma(t)) dt\right), \quad (2.6)$$

em que  $\operatorname{div}F$  é a divergência de  $F$ .

A demonstração do Teorema 2.1.8 pode ser encontrada em [20], página 229.

Em particular, se

$$\int_0^{\tau_0} \operatorname{div}F(\gamma(t)) dt < 0,$$

então  $\gamma$  é estável e, se

$$\int_0^{\tau_0} \operatorname{div}F(\gamma(t)) dt > 0,$$

então  $\gamma$  é instável.

Recordamos, agora, as definições de conjuntos limites a fim de estudarmos o comportamento assintótico das órbitas de campos de vetores.

Considere  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de vetores de classe  $C^1$ . Considere  $\phi_P(t)$  a trajetória de  $F$  passando pelo ponto  $P \in U$  definida em seu intervalo máximo  $I_P = (a, b)$ .

Se  $b = \infty$ , define-se o conjunto

$$\omega(P) = \{Q \in U : \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}, t_n \rightarrow \infty \text{ e } \phi_P(t_n) \rightarrow Q, n \rightarrow \infty\},$$

chamado conjunto  $\omega$ -limite de  $P$ .

Analogamente, se  $a = -\infty$ , podemos definir

$$\alpha(P) = \{Q \in U : \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}, t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \phi_P(t_n) \rightarrow Q, n \rightarrow \infty\},$$

chamado conjunto  $\alpha$ -limite de  $P$ .

Por um conjunto limite entendemos um conjunto  $\alpha$ -limite ou  $\omega$ -limite de algum ponto  $P \in U$ .

É imediato que, se  $S$  é um ponto da órbita de  $P$ , então

$$\omega(S) = \omega(P) \quad \text{e} \quad \alpha(S) = \alpha(P),$$

ou seja, estão bem definidos conjuntos limites de órbitas.

Considere os campos de vetores  $F$  e  $-F$ . Notemos que o conjunto  $\omega(P)$  do campo  $F$  coincide com o conjunto  $\alpha(P)$  do campo  $-F$  e reciprocamente. Assim, basta estudarmos propriedades gerais de conjuntos  $\omega$ -limites. As mesmas são válidas para conjuntos  $\alpha$ -limites, com as devidas modificações.

O teorema a seguir reúne as principais propriedades dos conjuntos limites e será enunciado para um conjunto  $\omega$ -limite.

O conjunto

$$\gamma^+(P) = \{\phi_P(t) : 0 \leq t \in I_P\}$$

é chamado semiórbita positiva do campo  $F$  pelo ponto  $P$ .

A seguir é apresentada uma lista com teoremas clássicos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. Suas demonstrações se encontram no livros citados no início do capítulo. A presença deles sustentará algumas argumentações ao longo do texto.

**Teorema 2.1.9.** *Considere  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de vetores de classe  $C^1$ . Se  $\gamma^+(P) = \{\phi_P(t) : t \geq 0\}$  está contida num subconjunto compacto  $K \subset U$ , então:*

- i)  $\omega(P) \neq \emptyset$ .
- ii)  $\omega(P)$  é compacto.
- iii)  $\omega(P)$  é invariante por  $F$ , isto é, se  $Q \in \omega(P)$ , então  $\phi_Q(t) \in \omega(P)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
- iv)  $\omega(p)$  é conexo.

A demonstração do Teorema 2.1.9 pode ser encontrada em [6], página 13.

**Teorema 2.1.10** (Poincaré–Bendixson). *Considere  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo de vetores de classe  $C^1$ . Suponha que  $\gamma^+(P)$  está contida num subconjunto compacto  $K \subset U$ . Suponha, ainda, que o campo  $F$  possui um número finito de pontos de equilíbrio em  $\omega(P)$ . Então:*

- i) *Se  $\omega(P)$  contém somente pontos regulares, então  $\omega(P)$  é uma órbita fechada.*
- ii) *Se  $\omega(P)$  contém pontos regulares e pontos de equilíbrio, então  $\omega(P)$  consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos de equilíbrio quando  $t \rightarrow \pm\infty$ .*
- iii) *Se  $\omega(P)$  não contém pontos regulares, então  $\omega(P)$  é um ponto de equilíbrio.*

A demonstração do Teorema 2.1.10 pode ser encontrada em [6], página 28.

**Teorema 2.1.11** (Bendixson). *Considere  $U \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto simplesmente conexo e  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo de vetores de classe  $C^1$ . Se a divergência de  $F$  tem sinal constante em  $U$ , então o campo  $F$  não tem órbita fechada em  $U$ .*

A demonstração do Teorema 2.1.11 pode ser encontrada em [6], página 188.

**Teorema 2.1.12** (Dulac). *Considere  $U \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto simplesmente conexo,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo de vetores de classe  $C^1$  e  $B : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . Se a divergência de  $BF$  tem sinal constante em  $U$ , então o campo  $F$  não tem órbita fechada em  $U$ .*

A demonstração do Teorema 2.1.12 pode ser encontrada em [6], página 189.

O campo de vetores  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é integrável em  $U$  se existe uma função diferenciável não constante  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ , chamada integral primeira de  $F$ , constante em todas as soluções  $(x(t), y(t))$  da equação diferencial definida por  $F$ .

Deste modo,  $h$  é uma integral primeira de  $F$  se, e somente se,

$$\frac{dh}{dt}(x(t), y(t)) = \nabla h(x(t), y(t)) \cdot F(x(t), y(t)) \equiv 0.$$

A existência de uma integral primeira  $h$  para o campo de vetores  $F$  implica no conhecimento do seu retrato de fase, uma vez que as suas órbitas estão contidas nos conjuntos de nível de  $h$ .

Existe uma vasta teoria a respeito da existência ou não de integrais primeiras (integração) para campos de vetores. Aqui, estamos interessados em aspectos dessa teoria e, na medida que precisarmos, os apresentamos.

Considere  $I : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ , não identicamente nula em  $U$ . A função  $I$  é um fator integrante de  $F$  em  $U$  se

$$\operatorname{div}(IF)(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in U.$$

Resulta que o campo de vetores  $IF$  é integrável. Se a função  $I$  tem sinal constante em  $U$ , resulta que os retratos de fase de  $F$  e de  $IF$  são os mesmos.

## 2.2 Pontos de equilíbrio semi-hiperbólicos

Considere o campo de vetores (2.1), agora definido no plano. Assim, seja

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

um campo de vetores, de classe  $C^1$  e  $P$  um ponto de equilíbrio deste campo.

Como vimos,  $P$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico se  $DF(P)$  possui todos os autovalores com partes reais não nulas. Caso contrário, diremos que o ponto é não hiperbólico.

Pelo Teorema de Hartman–Grobman, numa vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico  $P$ , o comportamento do campo de vetores  $F$  é o “mesmo” que o da sua linearização  $DF(P)$ .

Discutimos, agora, o retrato de fase de  $F$  numa vizinhança de um ponto de equilíbrio não hiperbólico do tipo semi-hiperbólico.

O ponto de equilíbrio  $P$  é semi-hiperbólico se

$$\det(DF(P)) = 0 \quad \text{e} \quad \text{traço}(DF(P)) \neq 0.$$

O próximo teorema diz respeito a um ponto de equilíbrio do tipo semi-hiperbólico. Para mais detalhes, veja [6], página 74.

**Teorema 2.2.1** (Ponto de equilíbrio semi-hiperbólico). *Seja  $P = (0, 0) \in U$  um ponto de equilíbrio isolado do campo de vetores  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que define a equação diferencial*

$$\dot{x} = A(x, y), \quad \dot{y} = \lambda y + B(x, y), \quad (2.7)$$

*sendo  $\lambda > 0$  (o caso  $\lambda < 0$  pode ser estudado considerando  $-F$  em vez de  $F$ ),  $A$  e  $B$  funções analíticas em uma vizinhança de  $(0, 0)$  com desenvolvimentos de Taylor, começando, pelo menos, com termos quadráticos em  $x$  e  $y$ . Considere*

$$y = f(x)$$

*uma solução da equação*

$$\lambda y + B(x, y) = 0$$

*em uma vizinhança do ponto  $(0, 0)$  e suponha que a função*

$$g(x) = A(x, f(x)) = a_m x^m + O(m+1), \quad \text{sendo} \quad m \geq 2, \quad a_m \neq 0.$$

*Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

**Caso 1.** Se  $m$  é ímpar e  $a_m < 0$ , então  $(0, 0)$  é uma sela topológica. A equação diferencial (2.7) é  $C^\infty$ -conjugada à

$$\dot{x} = -x^m(1 + ax^{m-1}), \quad \dot{y} = \lambda y, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

e  $C^0$ -conjugada à

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = y. \quad (2.9)$$

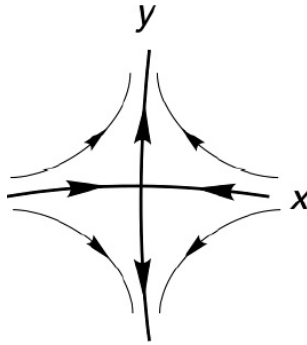


Figura 2.4: Sela topológica.

**Caso 2.** Se  $m$  é ímpar e  $a_m > 0$ , então  $(0, 0)$  é um nó instável topológico. A equação diferencial (2.7) é  $C^\infty$ -conjugada à

$$\dot{x} = x^m(1 + ax^{m-1}), \quad \dot{y} = \lambda y, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (2.10)$$

e  $C^0$ -conjugada à

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y. \quad (2.11)$$

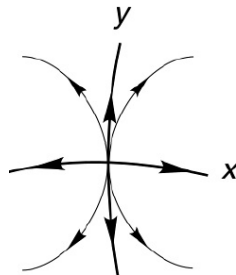


Figura 2.5: Nó instável topológico.

**Caso 3.** Se  $m$  é par, então  $(0,0)$  é uma sela-nó topológica. A equação diferencial (2.7) é  $C^\infty$ -conjugada à

$$\dot{x} = x^m(1 + ax^{m-1}), \quad \dot{y} = \lambda y, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

e  $C^0$ -conjugada à

$$\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = y. \quad (2.13)$$

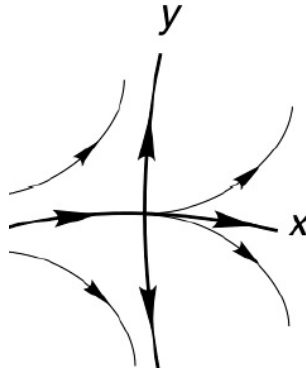


Figura 2.6: Sela-nó topológica.

## 2.3 Compactificação de Poincaré

Para estudar o PEAG é preciso estudar o comportamento assintótico das órbitas. Porém, com este grau de generalidade, este problema é muito difícil. Nosso próximo assunto, é construir a Compactificação de Poincaré de um campo de vetores polinomial em  $\mathbb{R}^2$ . Essa compactificação é uma técnica muito útil que pode ajudar na compreensão do retrato de fase global de um campo de vetores polinomial no plano.

A construção apresentada aqui pode ser estendida para campos de vetores polinomiais em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ . São utilizados  $(x_1, x_2)$  como coordenadas no plano  $\mathbb{R}^2$  e  $(y_1, y_2, y_3)$  como coordenadas no espaço  $\mathbb{R}^3$ .

Considere  $X(x_1, x_2) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$  um campo de vetores polinomial no plano. Considere, também, a esfera

$$\mathbb{S}^2 = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\},$$

chamada de esfera de Poincaré e o plano com coordenadas  $(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, 1)$ , que é tangente à esfera  $\mathbb{S}^2$  no polo norte  $PN = (0, 0, 1)$ .

Decompomos  $\mathbb{S}^2$  em três conjuntos:

O primeiro sendo o hemisfério norte

$$H_+ = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 > 0\}.$$

O segundo sendo hemisfério sul

$$H_- = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 < 0\}.$$

E por fim, o equador

$$\mathbb{S}^1 = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 = 0\}.$$

Dado  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , considere a reta passando por  $(0, 0, 0)$  e  $(x_1, x_2, 1)$  que intersecta  $\mathbb{S}^2$  em exatamente dois pontos antípodas (veja a Figura 2.7 a seguir)

$$y^+ = \left( \frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) \in H_+,$$

$$y^- = - \left( \frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) \in H_-,$$

sendo

$$\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}.$$

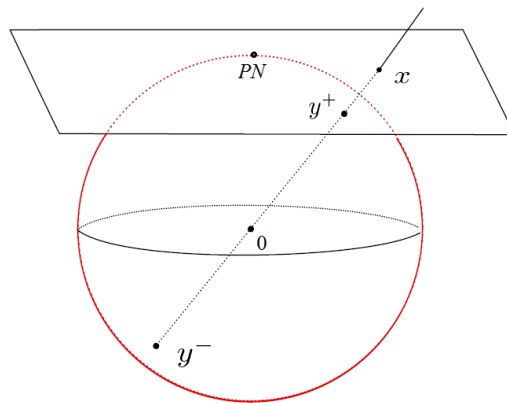


Figura 2.7: Projeções centrais.



Podemos, assim, definir as projeções centrais, as quais, são, de fato, difeomorfismos de  $\mathbb{R}^2$  nos hemisférios norte e sul de  $\mathbb{S}^2$ , por

$$f^+ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow H_+ \subset \mathbb{S}^2, \quad f^- : \mathbb{R}^2 \longrightarrow H_- \subset \mathbb{S}^2,$$

sendo

$$f^+(x) = y^+ \quad \text{e} \quad f^-(x) = y^-.$$

A partir desses difeomorfismos, podemos obter campos de vetores induzidos em cada hemisfério de  $\mathbb{S}^2$ .

Considere o campo de vetores induzido

$$\bar{X} : H_+ \cup H_- \longrightarrow H_+ \cup H_-,$$

definido por

$$\bar{X}(y) = \begin{cases} Df^+(x)X(x), & \text{se } y = f^+(x) \in H_+, \\ Df^-(x)X(x), & \text{se } y = f^-(x) \in H_-. \end{cases}$$

Observe que  $\bar{X}$  é um campo de vetores em  $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ , tangente a  $\mathbb{S}^2$  em cada ponto.

Pode-se verificar que, para  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2$ ,

$$(f^+)^{-1}(y) = \left( \frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right), \quad \text{se } y_3 > 0,$$

$$(f^-)^{-1}(y) = \left( \frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right), \quad \text{se } y_3 < 0,$$

fazendo-se uso da identificação  $(x_1, x_2) \approx (x_1, x_2, 1)$ .

Podemos escrever o campo  $\bar{X}$  explicitamente como

$$\bar{X}(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} Df^+ \left( \frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) X \left( \frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right), & \text{se } y_3 > 0, \\ Df^- \left( \frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) X \left( \frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right), & \text{se } y_3 < 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Assim, tendo em conta que

$$\Delta(x) = \frac{1}{|y_3|},$$

segue que

$$Df^+ \left( \frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) X \left( \frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) = y_3 \begin{pmatrix} y_2^2 + y_3^2 & -y_1y_2 \\ -y_1y_2 & y_1^2 + y_3^2 \\ -y_3y_1 & -y_3y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \left( \frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \\ Q \left( \frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \end{pmatrix},$$

$$Df^- \left( \frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) X \left( \frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) = y_3 \begin{pmatrix} y_2^2 + y_3^2 & -y_1y_2 \\ -y_1y_2 & y_1^2 + y_3^2 \\ -y_3y_1 & -y_3y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \left( \frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \\ Q \left( \frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \end{pmatrix}.$$

Desta forma, tanto em  $H_+$  quanto em  $H_-$ , o campo  $\bar{X}$  tem a mesma expressão.

Considerando a projeção  $\Pi_3(y_1, y_2, y_3) = y_3$ , segue que,

$$\|x\| \rightarrow \infty \implies \Pi_3(f^+(x)) = \frac{1}{\Delta(x)} \rightarrow 0.$$

Neste sentido, o equador de  $\mathbb{S}^2$  representa o “infinito” de  $\mathbb{R}^2$ .

Para estudarmos o comportamento do campo  $X$  fora de partes compactas do plano, gostaríamos de definir o campo  $\bar{X}$  em toda a esfera  $\mathbb{S}^2$ .

Em geral, este campo próximo ao equador é não limitado. Para contornarmos isto, multiplica-se o campo de vetores  $\bar{X}$  pelo fator

$$\rho(y) = y_3^{d-1},$$

sendo

$$d = \text{grau}(X) = \max \{ \text{grau}(P), \text{grau}(Q) \}.$$

Assim, o campo de vetores pode ser estendido a  $y_3 = 0$ , visto que cada componente de

$$\begin{pmatrix} y_3^d P \left( \frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \\ y_3^d Q \left( \frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \end{pmatrix}$$

está bem definida.

O novo campo de vetores  $\mathcal{P}(X)$ , sendo

$$\mathcal{P}(X)(y) = \rho(y)\overline{X}(y),$$

é chamado de compactificação de Poincaré do campo de vetores  $X$ .

Continuando com a construção, notemos que  $\mathbb{S}^2$  é uma superfície compacta que pode ser coberta pelas seguintes seis cartas locais, denotadas por  $(U_k, \phi_k)$  e  $(V_k, \psi_k)$ , e definidas por

$$\phi_k : U_k \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_k(y) = \left( \frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k} \right), \quad m < n, \quad m, n \neq k,$$

em que,

$$U_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k > 0\}$$

e

$$\psi_k : V_k \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi_k(y) = -\phi_k(y), \quad V_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k < 0\}$$

com  $k \in \{1, 2, 3\}$ .

Denotamos por  $z = (u, v)$  a imagem de  $\phi_k(y)$  ou  $\psi_k(y)$  para  $k \in \{1, 2, 3\}$ .

Assim, segue que  $(u, v)$  dependerá da carta local que se está estudando. Geometricamente, as coordenadas  $(u, v)$  podem ser visualizadas na Figura 2.8 a seguir.

Os pontos de  $\mathbb{S}^1$ , nas cartas  $U_1, U_2, V_1$  e  $V_2$ , são dados por  $v = 0$ .

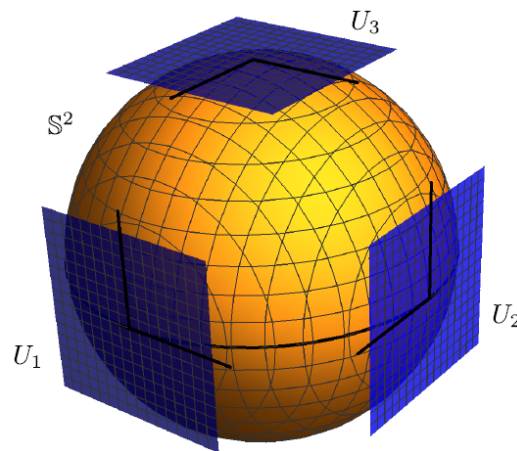


Figura 2.8: Cartas locais  $U_1, U_2$  e  $U_3$  da esfera de Poincaré.

Descrevemos, a seguir, as expressões de  $\mathcal{P}(X)$  nas cartas locais. Os cálculos são apresentados apenas para a carta local  $U_1$ . Nas demais cartas, os cálculos são semelhantes.

Visto que  $X(x) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$ , então,

$$\bar{X}(y) = Df^+(x)X(x), \text{ com } y = f^+(x)$$

e

$$D\phi_1(y)\bar{X}(y) = D\phi_1(y)Df^+(x)X(x) = D(\phi_1 \circ f^+)(x)X(x).$$

Seja  $\bar{X}|_{U_1}$  o campo definido por  $D\phi_1(y)\bar{X}(y)$ . Como

$$(\phi_1 \circ f^+)(x) = \left( \frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right) = (u, v),$$

temos que

$$\begin{aligned} \bar{X}|_{U_1} &= \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ -\frac{1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_1^2} (-x_2P(x_1, x_2) + x_1Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)) \\ &= v^2 \left( -\frac{u}{v}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v}Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right). \end{aligned}$$

Agora, como

$$\rho(y) = y_3^{d-1} = \frac{1}{\Delta(x)^{d-1}} = \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}} = v^{d-1}m(z),$$

sendo

$$m(z) = (1 + u^2 + v^2)^{(1-d)/2},$$

segue que

$$\rho(\bar{X}|_{U_1})(z) = v^{d+1}m(z) \left( -\frac{u}{v}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v}Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right).$$

A fim de provarmos que a extensão de  $\rho\bar{X}$  para  $\mathcal{P}(X)$  está definida em todo  $\mathbb{S}^2$ , notamos que enquanto  $\bar{X}|_{U_1}$  não está bem definido em  $v = 0$ ,

$$\mathcal{P}(X)|_{U_1} = \rho\bar{X}|_{U_1}$$

está bem definido em  $v = 0$ , pois multiplicando-o por  $v^{d+1}$  cancelamos qualquer fator de  $v$  que apareça no denominador.

Argumentos semelhantes podem ser aplicados às outras cartas locais.

Para simplificarmos o campo de vetores estendido, fazemos uma reparametrização da variável independente (tempo) a fim de removermos o fator  $m(z)$ .

Obtemos ainda um campo de vetores em  $\mathbb{S}^2$  que é topologicamente equivalente a  $X$  em quaisquer dos hemisférios  $H_+$  e  $H_-$ .

As expressões para  $\mathcal{P}(X)$ , nas cartas locais, são as seguintes:

1. Na carta  $(U_1, \phi_1)$ :

$$\begin{cases} u' = v^d \left[ -uP \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + Q \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right], \\ v' = -v^{d+1} P \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right). \end{cases} \quad (2.15)$$

2. Na carta  $(U_2, \phi_2)$ :

$$\begin{cases} u' = v^d \left[ P \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) - uQ \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) \right], \\ v' = -v^{d+1} Q \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right). \end{cases} \quad (2.16)$$

3. Na carta  $(U_3, \phi_3)$ :

$$\begin{cases} u' = P(u, v), \\ v' = Q(u, v). \end{cases}$$

As expressões para  $\mathcal{P}(X)$ , nas cartas  $(V_k, \psi_k)$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$ , são as mesmas de  $(U_k, \phi_k)$  multiplicadas por

$$(-1)^{d-1}.$$

Observemos de (2.15) e (2.16) que o eixo  $v$  das cartas  $U_1$  e  $U_2$  é invariante e, conseqüentemente, o mesmo ocorre com as cartas  $V_1$  e  $V_2$ . Deste modo, o equador da esfera é invariante pelo fluxo da compactificação de Poincaré.

Para estudarmos o comportamento do campo de vetores  $X$ , incluindo seu comportamento fora de partes compactas do plano, é suficiente trabalhar em  $H_+ \cup \mathbb{S}^1$ .

A projeção de  $H_+ \cup \mathbb{S}^1$  em  $\mathbb{R}^2$  é chamada de disco de Poincaré.

Em resumo, da construção acima, temos o seguinte teorema.

**Teorema 2.3.1.** *Considere  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo de vetores polinomial de grau  $d$ . Considere  $\rho : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função  $\rho(y_1, y_2, y_3) = y_3^{d-1}$ , e  $\bar{X}$  o campo induzido em  $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ , definido em (2.14). Então,  $\rho\bar{X}$  pode ser estendido a um campo de vetores analítico em  $\mathbb{S}^2$  com o equador  $\mathbb{S}^1$  invariante.*

O Teorema 2.3.1, juntamente com a construção da Compactificação de Poincaré pode ser encontrado em [6], capítulo 5, a partir da página 149.

Chamamos de ponto de equilíbrio finito de  $X$  ou de  $\mathcal{P}(X)$ , o ponto de equilíbrio de  $\mathcal{P}(X)$  em  $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ .

Chamamos de ponto de equilíbrio infinito de  $X$  ou  $\mathcal{P}(X)$ , o ponto de equilíbrio de  $\mathcal{P}(X)$  em  $\mathbb{S}^1$ .

A seguir, estudamos os pontos de equilíbrio infinitos de  $X$ . Já observamos que os pontos de equilíbrio infinitos são da forma  $(u, 0)$ .

Denotemos por  $P_i$  e  $Q_i$  os polinômios homogêneos de grau  $i$  de  $P$  e  $Q$ . Podemos escrever  $P$  e  $Q$  da seguinte forma

$$P(x, y) = P_m(x, y) + \cdots + P_d(x, y),$$

$$Q(x, y) = Q_m(x, y) + \cdots + Q_d(x, y),$$

sendo  $P_j$  e  $Q_j$  polinômios homogêneos de grau  $j$  de  $P$  e  $Q$ , com  $j = m, \dots, d$ , e  $P_m$  e  $Q_m$ , com  $m > 0$ , os polinômios homogêneos não nulos de menor grau.

Vale a seguinte proposição.

**Proposição 2.3.1.** *Considere  $X = (P, Q)$  um campo de vetores polinomial em  $\mathbb{R}^2$ . Então,  $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$  é um ponto de equilíbrio infinito de  $\mathcal{P}(X)$  se, e somente se,*

$$F(u) := Q_d(1, u) - uP_d(1, u) = 0.$$

De modo análogo,  $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$  é um ponto de equilíbrio infinito de  $\mathcal{P}(X)$  se, e somente se,

$$G(u) := P_d(u, 1) - uQ_d(u, 1) = 0.$$

Assim como o último teorema, a Proposição 2.3.1, também pode ser encontrada em [6], capítulo 5, a partir da página 149.

## 2.4 Problema foco–centro no plano

Considere um campo de vetores  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)), \quad (2.17)$$

ou, equivalentemente, a seguinte equação diferencial em  $U$

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y). \quad (2.18)$$

Um ponto de equilíbrio  $(x_0, y_0) \in U$  de (2.18) é chamado centro se existe uma vizinhança  $V$  de  $(x_0, y_0)$  preenchida por órbitas fechadas.

Um ponto de equilíbrio  $(x_0, y_0) \in U$  de (2.18) é chamado foco se existe uma vizinhança  $V$  de  $(x_0, y_0)$  tal que as órbitas de (2.18) espiralam ou se aproximando de  $(x_0, y_0)$  (foco estável) ou se afastando de  $(x_0, y_0)$  (foco instável).

Um ponto de equilíbrio  $(x_0, y_0) \in U$  de (2.18) é chamado monodrômico se não existe órbita de (2.18) (tendo  $(x_0, y_0)$  como  $\alpha$  ou  $\omega$ -limite) tendendo para  $(x_0, y_0)$  com direção (tangente) bem definida.

**Teorema 2.4.1.** *Considere  $F$  um campo de vetores analítico. Se  $(x_0, y_0) \in U$  é ponto de equilíbrio monodrômico de (2.18), então  $(x_0, y_0)$  é um foco ou um centro.*

A demonstração do Teorema 2.4.1 pode ser encontrada em [14]. De fato, o Teorema 2.4.1 é uma consequência do “Teorema de finitude” de ciclos limites para campos de vetores analíticos no plano.

Uma condição suficiente para que  $(x_0, y_0) \in U$  seja monodrômico é que a linearização de  $F$  em  $(x_0, y_0)$  tenha autovalores da forma  $\pm i\omega_0$ , com  $\omega_0 \neq 0$ .

Porém, tendo um ponto de equilíbrio monodrômico, como decidir se é um centro ou um foco? A resposta para esta pergunta é conhecida como problema foco–centro, um dos

grandes problemas da Teoria Qualitativa da Equações Diferenciais. Nosso objetivo aqui é apenas apresentar uma ferramenta que nos possibilita responder esta pergunta.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que (2.18) tem a forma

$$x' = P(x, y) = y + \tilde{P}(x, y), \quad y' = Q(x, y) = -x + \tilde{Q}(x, y), \quad (2.19)$$

sendo  $\tilde{P}$  e  $\tilde{Q}$  funções analíticas com expansões de Taylor na origem iniciando com, pelo menos, termos quadráticos.

Considere o campo de vetores analítico

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left( y + \tilde{P}(x, y), -x + \tilde{Q}(x, y) \right)$$

que define (2.19).

Uma integral primeira local de (2.19) é uma função diferenciável não constante

$$\Psi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

a qual é constante sobre as trajetórias de (2.19), ou seja,

$$F \Psi = F \cdot \nabla \Psi = P\Psi_x + Q\Psi_y \equiv 0. \quad (2.20)$$

Uma integral primeira formal de (2.19) é uma série de potências formal  $\Psi$ , nas variáveis  $x$  e  $y$ , tal que quando  $P$  e  $Q$  são expandidos em séries de potências em torno da origem, todo coeficiente em (2.20) é zero.

O problema foco–centro não degenerado foi resolvido por Poincaré e Lyapunov em termos da existência ou não de uma integral primeira local.

A notação  $O(k)$  refere–se aos termos de ordens maiores ou iguais a  $k$  nos desenvolvimentos de Taylor.

**Teorema 2.4.2** (Teorema do Centro de Poincaré–Lyapunov). *A equação diferencial analítica (2.19) tem um centro na origem se, e somente se, ela admite uma integral primeira analítica local da forma*

$$\Psi(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + O(3).$$

*Ademais, a existência de uma integral primeira formal  $\Psi$  implica a existência de uma integral primeira local analítica da mesma forma.*



A demonstração do Teorema 2.4.2 pode ser encontrada no capítulo XI a partir da página 95 de [19] e uma adaptação da prova foi feita em [1], página 26.

Considere

$$\Psi(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \sum_{n \geq 3} \Psi_n(x, y),$$

sendo  $\Psi_n$  um polinômio homogêneo de grau  $n$  nas variáveis  $x$  e  $y$ .

Resulta que

$$\dot{\Psi} = F \Psi = \sum_{k \geq 2} \eta_{2k}(x^2 + y^2)^k = \eta_4(x^2 + y^2)^2 + \eta_6(x^2 + y^2)^3 + \dots.$$

As quantidades  $\eta_{2k}$  são chamadas de coeficientes de Lyapunov ou valores focais.

É comum reindexarmos os coeficientes de Lyapunov, de modo que

$$L_1 = \eta_4, \quad L_2 = \eta_6, \quad \dots, \quad L_k = \eta_{2k+2}.$$

Assim, o Teorema do Centro de Poincaré–Lyapunov pode ser reescrito da seguinte forma.

**Teorema 2.4.3** (Teorema do Centro de Poincaré–Lyapunov). *A equação diferencial analítica (2.19) tem um centro na origem se, e somente se, os coeficientes de Lyapunov*

$$L_j = 0, \quad \text{para todo } j \geq 1.$$

Das considerações acima, é simples ver que, se existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$L_1 = \dots = L_{k_0} = 0, \quad L_{k_0+1} \neq 0,$$

então a origem é um foco estável se  $L_{k_0+1} < 0$  e um foco instável se  $L_{k_0+1} > 0$ .

Considere as funções  $\tilde{P}$  e  $\tilde{Q}$  em (2.19) escritas como somas de polinômios homogêneos, isto é,

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x, y) &= \sum_{k=2}^m P_k(x, y) + O(m+1), \\ \tilde{Q}(x, y) &= \sum_{k=2}^m Q_k(x, y) + O(m+1), \end{aligned}$$

sendo

$$P_k(x, y) = \sum_{j=0}^k p_{k-j,j} x^{k-j} y^j,$$

$$Q_k(x, y) = \sum_{j=0}^k q_{k-j,j} x^{k-j} y^j.$$

O conjunto dos polinômios homogêneos de grau  $n$  em duas variáveis, juntamente com o polinômio nulo, será munido da adição e multiplicação por números reais, tornando-se um espaço vetorial real e será denotado por

$$\mathbb{P}_n = \left\{ p(x, y) = \sum_{j=0}^n a_{n-j,j} x^{n-j} y^j : a_{n-j,j} \in \mathbb{R} \right\}.$$

O espaço vetorial  $\mathbb{R}^{n+1}$  será denotado por

$$\mathbb{R}^{n+1} = \left\{ u = \sum_{j=0}^n u_{n-j,j} e_{j+1} : u_{n-j,j} \in \mathbb{R} \right\},$$

sendo

$$B_{\mathbb{R}^{n+1}} = \{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}\}$$

a base canônica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Uma base de  $\mathbb{P}_n$  é dada por

$$B_{\mathbb{P}_n} = \{x^n, x^{n-1}y, \dots, xy^{n-1}, y^n\}.$$

Considere o isomorfismo linear

$$S_n : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$p(x, y) = \sum_{j=0}^n a_{n-j,j} x^{n-j} y^j \longmapsto u = \sum_{j=0}^n a_{n-j,j} e_{j+1}. \quad (2.21)$$

Considere agora a seguinte transformação linear

$$T_n : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n$$

$$p(x, y) \longmapsto T_n(p(x, y)) = y \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial p}{\partial y}(x, y). \quad (2.22)$$

**Teorema 2.4.4.** *Valem as seguintes afirmações:*

1. *A transformação linear  $T_3$  é um isomorfismo.*

2. O núcleo da transformação linear  $T_4$  tem dimensão 1 e a imagem tem dimensão 4.
3. Uma base para o núcleo de  $T_4$  é  $\{(x^2 + y^2)^2\}$ .

A demonstração do Teorema 2.4.4 pode ser encontrada em [13], página 294.

Considere a função

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{k=3}^{m+1} V_k(x, y) + O(m+2), \quad (2.23)$$

com

$$V_k(x, y) = \sum_{j=0}^k V_{k-j,j} x^{k-j} y^j$$

um polinômio homogêneo de grau  $k$  nas variáveis  $x$  e  $y$ .

Tomando a expansão em série de Taylor até os termos de ordem três, a equação diferencial (2.19) assume a forma

$$x' = y + P_2(x, y) + P_3(x, y) + O(4), \quad y' = -x + Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + O(4), \quad (2.24)$$

com

$$P_2(x, y) = p_{20}x^2 + p_{11}xy + p_{02}y^2,$$

$$P_3(x, y) = p_{30}x^3 + p_{21}x^2y + p_{12}xy^2 + p_{03}y^3,$$

$$Q_2(x, y) = q_{20}x^2 + q_{11}xy + q_{02}y^2,$$

$$Q_3(x, y) = q_{30}x^3 + q_{21}x^2y + q_{12}xy^2 + q_{03}y^3.$$

Tomando  $m = 3$ , a função (2.23) tem a forma

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V_3(x, y) + V_4(x, y) + O(5), \quad (2.25)$$

com

$$V_3(x, y) = V_{30}x^3 + V_{21}x^2y + V_{12}xy^2 + V_{03}y^3,$$

$$V_4(x, y) = V_{40}x^4 + V_{31}x^3y + V_{22}x^2y^2 + V_{13}xy^3 + V_{04}y^4.$$

Derivando (2.25) ao longo das órbitas de (2.24) segue que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) = & R_3(x, y) + \underbrace{\left( y \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y) \right)}_{T_3(V_3(x, y))} + \\ & R_4(x, y) + \underbrace{\left( y \frac{\partial V_4}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial V_4}{\partial y}(x, y) \right)}_{T_4(V_4(x, y))} + O(5), \end{aligned} \quad (2.26)$$

com

$$R_3(x, y) = xP_2(x, y) + yQ_2(x, y) \in \mathbb{P}_3,$$

$$R_4(x, y) = xP_3(x, y) + yQ_3(x, y) + P_2(x, y) \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y) + Q_2(x, y) \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y) \in \mathbb{P}_4.$$

Resulta do Teorema 2.4.4 que  $V_3(x, y) \in \mathbb{P}_3$  pode ser escolhido de maneira única de forma a cancelar os termos de grau 3 de (2.26).

Tal escolha é feita resolvendo-se o sistema linear

$$A_3(S_3(V_3(x, y))) = -S_3 \underbrace{(xP_2(x, y) + yQ_2(x, y))}_{R_3(x, y)},$$

sendo

$$S_3(V_3(x, y)) = (V_{30}, V_{21}, V_{12}, V_{03}),$$

$$S_3(xP_2(x, y) + yQ_2(x, y)) = (p_{20}, p_{11} + q_{20}, p_{02} + q_{11}, q_{02}).$$

Segue que

$$(V_{30}, V_{21}, V_{12}, V_{03}) = \left( -\frac{p_{11} + q_{20} + 2q_{02}}{3}, p_{20}, -q_{02}, \frac{p_{02} + 2p_{20} + q_{11}}{3} \right).$$

Esta metodologia não pode ser aplicada para a escolha dos coeficientes de  $V_4(x, y) \in \mathbb{P}_4$ , pois  $T_4$  não é isomorfismo. Contudo,  $V_4(x, y)$  pode ser procurado de forma que  $\dot{V}$  em (2.26) possa ter um sinal bem definido.

Isto pode ser feito impondo que os termos de grau 4 de (2.26) pertençam ao núcleo de  $T_4$ . Assim, os coeficientes de  $V_4(x, y)$  podem ser obtidos através de

$$A_4 \left( S_4(R_4(x, y)) + A_4(S_4(V_4(x, y))) \right) = 0,$$

sendo

$$S_4(V_4(x, y)) = (V_{40}, V_{31}, V_{22}, V_{13}, V_{04}),$$

$$S_4(R_4(x, y)) = (s_{40}, s_{31}, s_{22}, s_{13}, s_{04}),$$

com

$$s_{40} = p_{11}p_{20} + p_{30} + 2p_{20}q_{02},$$

$$s_{31} = p_{11}^2 - 2p_{20}^2 + p_{21} - p_{20}q_{11} + 2q_{20}q_{02} + p_{11}(q_{20} + 2q_{02}) + q_{30},$$

$$s_{22} = p_{12} - 2p_{20}p_{11} + p_{02}(p_{11} + 2q_{02}) + 2q_{11}q_{02} - 2p_{20}q_{20} - q_{11}q_{20} + q_{21},$$

$$s_{13} = p_{03} + p_{11}q_{02} + 2q_{02}^2 - 2p_{20}q_{11} - q_{11}^2 - p_{02}(2p_{20} + q_{11}) + q_{12},$$

$$s_{04} = -2p_{20}q_{02} - q_{11}q_{02} + q_{03}.$$

Logo,

$$V_{40} = \frac{1}{4}(2q_{02}q_{20} - q_{12} - 3p_{20}q_{11} - q_{30} - 2p_{20}^2 + p_{11}^2 + 3q_{02}p_{11} + p_{11}q_{20} - p_{21} + 2q_{02}^2 - q_{11}p_{02} - q_{11}^2 - p_{03} - 2p_{20}p_{02}) + 1,$$

$$V_{31} = \frac{1}{8}(5p_{30} - 7p_{20}p_{11} - 16q_{02}p_{20} - 3q_{03} - q_{21} - q_{02}q_{11} - 2p_{20}q_{20} - q_{20}q_{11} + p_{02}p_{11} + 2q_{02}p_{02} - p_{12}),$$

$$V_{22} = \frac{1}{2}(2q_{02}^2 - q_{11}p_{02} - 2p_{20}q_{11} - q_{11}^2 + q_{02}p_{11} - q_{12} - p_{03} - 2p_{20}p_{02}) + 2,$$

$$V_{13} = \frac{1}{8}(3p_{30} - p_{20}p_{11} - 16q_{02}p_{20} - 5q_{03} + q_{21} - 7q_{02}q_{11} + 2p_{20}q_{20} - p_{02}p_{11} + q_{20}q_{11} - 2q_{02}p_{02} + p_{12}),$$

$$V_{04} = 1.$$

Com essas escolhas para  $V_3(x, y)$  e  $V_4(x, y)$ , segue que

$$\dot{V}(x, y) = \eta_4(x^2 + y^2)^2 + O(5), \quad (2.27)$$

com

$$8\eta_4 = 3p_{30} + p_{12} + 3q_{03} + q_{21} + q_{02}q_{11} - p_{20}p_{11} + 2p_{20}q_{20} + q_{20}q_{11} - p_{02}p_{11} - 2q_{02}p_{02}. \quad (2.28)$$

A estabilidade do ponto de equilíbrio na origem segue de (2.27). Assim, dos comentários em seguida ao Teorema 2.4.3, obtemos:

1. Se  $L_1 = \eta_4 < 0$ , então a origem é assintoticamente estável.
2. Se  $L_1 = \eta_4 > 0$ , então a origem é instável.
3. Se  $L_1 = \eta_4 = 0$ , ainda não podemos determinar a estabilidade da origem.

O processo esboçado acima para estudar a estabilidade da origem da equação diferencial (2.19), é um processo puramente algébrico. A ideia é construir recursivamente funções  $V$  da forma (2.23). Primeiramente, vale uma generalização do Teorema 2.4.4.

**Teorema 2.4.5.** *Valem as seguintes afirmações:*

1. *Se  $n$  é ímpar, então  $T_n$  é um isomorfismo.*
2. *Se  $n$  é par, então  $T_n$  possui um núcleo de dimensão 1 gerado por*

$$(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}.$$

A demonstração do Teorema 2.4.5 pode ser encontrada em [13], página 294.

Desta forma, se  $\eta_4 = 0$ , podemos proceder de forma análoga ao que já foi feito e construir uma nova função  $V$ , tal que o desenvolvimento de Taylor de  $\dot{V}$  inicia-se com  $\eta_6(x^2 + y^2)^3$ , e assim por diante.

Em resumo, de (2.28), o primeiro coeficiente de Lyapunov, para uma equação diferencial escrita na forma

$$x' = y + \tilde{P}(x, y), \quad y' = -x + \tilde{Q}(x, y),$$

é dado por

$$L_1 = 3p_{30} + p_{12} + 3q_{03} + q_{21} + q_{02}q_{11} - p_{20}p_{11} + 2p_{20}q_{20} + q_{20}q_{11} - p_{02}p_{11} - 2q_{02}p_{02}. \quad (2.29)$$

De forma análoga, refazendo as análises anteriores, o primeiro coeficiente de Lyapunov para uma equação diferencial escrita na forma

$$x' = -y + \tilde{P}(x, y) \quad y' = x + \tilde{Q}(x, y),$$

é dado por

$$L_1 = 3p_{30} + p_{12} + 3q_{03} + q_{21} - q_{02}q_{11} + p_{20}p_{11} - 2p_{20}q_{20} - q_{20}q_{11} + p_{02}p_{11} + 2q_{02}p_{02}. \quad (2.30)$$

# Capítulo 3

## Problemas propostos

Neste capítulo, vamos considerar uma equação diferencial ordinária em  $\mathbb{R}^n$

$$X' = \frac{dX}{dt} = F(X), \quad (3.1)$$

sendo  $t$  a variável independente e

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (3.2)$$

um campo de vetores de classe  $C^1$ . De modo usual, novamente, identificamos a equação diferencial ordinária (3.1) com o campo de vetores  $F$ .

### 3.1 Markus–Yamabe no plano

Neste capítulo, procuramos respostas para a Conjectura 1, conhecida como Conjectura de Markus–Yamabe . Primeiramente, apresentamos um estudo para o caso  $n = 2$ .

**Proposição 3.1.1.** *Considere  $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  um campo de vetores de classe  $C^1$ . Suponha que  $F$  tem um ponto de equilíbrio na origem. Suponha, ainda, que as seguintes três condições são satisfeitas:*

- (i) *Para cada  $X \in \mathbb{R}^2$ , o traço de  $DF(X)$  é negativo.*
- (ii) *Para cada  $X \in \mathbb{R}^2$ , o determinante de  $DF(X)$  é positivo.*



(iii) Para cada  $X \in \mathbb{R}^2$ , a semiórbita positiva de  $X$ ,

$$\gamma^+(X) = \{\phi_X(t) : 0 \leq t \in I_X\}$$

é limitada.

Então o ponto de equilíbrio na origem é globalmente assintoticamente estável.

Antes da demonstração, note que a proposição acima é um caso especial da Conjectura de Markus–Yamabe no plano. De fato, as duas primeiras condições acima são equivalentes à hipótese dos autovalores de  $DF(X)$  terem partes reais negativas, para todo  $X \in \mathbb{R}^2$ . Como sabemos, a conclusão é válida sem a terceira condição.

**Demonstração.** Pelas duas primeiras condições, se  $X \in \mathbb{R}^2$  é um ponto de equilíbrio do campo de vetores  $F$ , então  $X$  é localmente assintoticamente estável e, além disso, hiperbólico. Assim,  $X$  é um ponto de equilíbrio isolado.

Dado  $X \in \phi_X(t)$ , temos que  $I_X = (a, b)$ , com  $b$  infinito. Temos também, que existe um compacto  $K_X$  tal que  $\gamma^+(X) \subset K_X$ . Pelo Teorema 2.1.9, segue que  $\omega(X) \neq \emptyset$ .

Como o traço de  $DF(X)$  é negativo para cada  $X \in \mathbb{R}^2$ , pelo Teorema 2.1.11, o campo de vetores  $F$  não possui órbita fechada.

Seguindo, para todo  $X \in \mathbb{R}^2$ ,  $\omega(X)$  é não vazio e contém um número finito de pontos de equilíbrio de  $F$ . De fato, contém exatamente um ponto de equilíbrio.

Seja  $B(0, 0)$  a bacia de atração do ponto de equilíbrio  $(0, 0)$ . Segue que  $B(0, 0)$  é aberto. Suponha, ainda, que  $B(0, 0) \neq \mathbb{R}^2$ . Logo,  $\partial B(0, 0) \neq \emptyset$ .

Tome  $P \in \partial B(0, 0)$ , temos que  $\gamma^+(P) \subset K_P \subset \mathbb{R}^2$ , com  $K_P$  um compacto, novamente  $\omega(P) \neq \emptyset$ . Segue que,  $P$  é um ponto regular. Assim,  $\omega(P)$  contém exatamente um ponto de equilíbrio, no qual denotaremos por  $Q$ .

Temos que  $Q$  é localmente assintoticamente estável. Considere  $B(Q)$  a bacia de atração do ponto  $Q$ . Pela continuidade das soluções com respeito às condições iniciais, existe uma vizinhança  $V_P$  de  $P$  tal que  $V_P \subset B(Q)$ . Por outro lado,  $P \in \partial B(0, 0)$ , assim, resulta que  $V_P \cap B(0, 0) \neq \emptyset$ . Absurdo. Uma vez que todo  $Z \in V_P \cap B(0, 0)$  pertence a  $B(Q)$  e a  $B(0, 0)$ .

Logo, temos que  $B(0, 0) = \mathbb{R}^2$ . ■

Seguindo com o texto, o próximo resultado foi retirado de [9]. Denote por  $\mathcal{F}^2$  o conjunto de todos os campos de vetores  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$ , tais que:

- A origem é um ponto de equilíbrio, isto é,  $F(0) = 0$ ;
- Para cada  $X \in \mathbb{R}^2$ , os autovalores de  $DF(X)$  têm partes reais negativas.

A seguir, temos cinco problemas envolvendo os campos de vetores contidos nesta classe  $\mathcal{F}^2$ .

**Problema 1** ( $P_1$ : Problema da Estabilidade Assintótica Global).  $F \in \mathcal{F}^2$  implica que  $P_0 = 0$  é globalmente assintoticamente estável.

**Problema 2** ( $P_2$ : Problema da Injetividade Global).  $F \in \mathcal{F}^2$  implica que a aplicação  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é globalmente injetiva.

**Problema 3** ( $P_3$ ).  $F \in \mathcal{F}^2$  implica a existência de um número inteiro positivo  $K$  tal que para cada  $Y \in \mathbb{R}^2$  o número de soluções de  $F(X) = Y$  é limitado por  $K$ .

**Problema 4** ( $P_4$ ).  $F \in \mathcal{F}^2$  implica a existência de duas constantes positivas  $\rho$  e  $r$  tais que

$$\|F(X)\| \geq \rho > 0, \quad \text{para } \|X\| \geq r > 0.$$

**Problema 5** ( $P_5$ ).  $F \in \mathcal{F}^2$  implica que

$$\int_0^\infty \left[ \min_{\|X\|=r} \|F(X)\| \right] dr = \infty.$$

Note que o Problema 1 acima é a Conjectura de Markus–Yamabe no plano.

Para o próximo teorema, o Problema  $P_i$  tem uma resposta afirmativa para todo  $F \in \mathcal{F}^2$  se, e somente se, o Problema  $P_j$  tem uma resposta afirmativa para todo  $F \in \mathcal{F}^2$ . Neste contexto, dizemos que o Problema  $P_i$  é equivalente ao Problema  $P_j$ , para  $i \neq j$ ,

**Teorema 3.1.1** (Gasull, Llibre, Sotomayor).  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$  são equivalentes.

**Demonstração.** Começamos a prova mostrando que o Problema 4 implica no Problema 5. Fixe arbitrariamente  $F \in \mathcal{F}^2$ . Por hipótese, existem  $\rho > 0$  e  $r' > 0$ , tais que, se

$$\|X\| \geq r' > 0,$$

então

$$\|F(X)\| \geq \rho > 0.$$

Queremos mostrar que

$$I = \int_0^\infty \left[ \min_{\|X\|=r} \|F(X)\| \right] dr = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \left[ \min_{\|X\|=r} \|F(X)\| \right] dr = \infty.$$

Como  $a \rightarrow \infty$ , podemos considerar  $a > r'$ . Assim, se

$$r' \leq \|X\| \leq a,$$

então

$$\|F(X)\| \geq \rho.$$

Logo,

$$\int_0^a \left[ \min_{\|X\|=r} \|F(X)\| \right] dr \geq \int_0^a \rho dr = a\rho.$$

Portanto,

$$I = \int_0^\infty \left[ \min_{\|X\|=r} \|F(X)\| \right] dr = \lim_{a \rightarrow \infty} a\rho = \infty,$$

como queríamos mostrar.

A segunda parte da prova consiste em mostrar que o Problema 5 implica no Problema 1.

Considere  $F = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}^2$  com

$$\int_0^\infty \left[ \min_{\|X\|=r} \|F(X)\| \right] dr = \infty.$$

Queremos mostrar que  $X = 0$  é ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Denote por  $A$ , a bacia de atração de  $X = 0$ . Temos que  $A \subset \mathbb{R}^2$  é um conjunto aberto e não vazio. Vamos mostrar que  $A = \mathbb{R}^2$ . Suponha que  $A \neq \mathbb{R}^2$ . Assim, existe  $X_0 \in \partial A$ .

Denote por

$$\varphi : (t_{X_0}^-, t_{X_0}^+) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

a solução máxima do problema de valor inicial

$$\begin{cases} X' = F(X) \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

**Afirmção 1.**  $X_0$  é um ponto de regular do campo de vetores  $F$ .

De fato, suponha que  $X_0$  seja um ponto de equilíbrio de  $F$ . Como  $F \in \mathcal{F}^2$ ,  $X_0$  é localmente assintoticamente estável, assim, existe uma vizinhança  $V_{X_0}$  de  $X_0$  formada por pontos tendo  $X_0$  como  $\omega$ -limite, isto é,  $V_{X_0}$  é a bacia de atração de  $X_0$ . Logo,  $V_{X_0} \cap A \neq \emptyset$ , uma contradição.

Denote por  $\Theta(X_0)$  a órbita de  $X_0$ ,

$$\Theta(X_0) = \{\varphi_t(X_0) \in \mathbb{R}^2 : t \in (t_{X_0}^-, t_{X_0}^+)\}.$$

**Afirmção 2.**  $\Theta(X_0) \subset \partial A$ .

Seja

$$\varphi_{t_0}(X_0) \in \Theta(X_0), \quad t_0 \in (t_{X_0}^-, t_{X_0}^+),$$

arbitrário fixo, com  $\varphi_{t_0}(X_0) \notin \partial A$ . Como  $\varphi_{t_0}(X_0) \notin A$ , segue que existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$B(\varphi_{t_0}(X_0), \epsilon) \cap A = \emptyset.$$

Como a aplicação do tempo  $t_0$  é contínua, existe  $\delta > 0$  tal que

$$\varphi_{t_0}(B(X_0, \delta)) \subset B(\varphi_{t_0}(X_0), \epsilon),$$

mas então, existe  $Z_0 \in B(X_0, \delta) \cap A$  com  $\varphi_{t_0}(Z_0) \in B(\varphi_{t_0}(X_0), \epsilon)$ , ou seja,  $\varphi_{t_0}(Z_0) \notin A$ , o que nos leva a uma contradição.

**Afirmção 3.**  $\Theta(X_0)$  é um conjunto fechado e  $\omega(X_0) = \emptyset$ .

De fato, suponha que  $\Theta(X_0)$  não seja fechado, isto é, existe uma sequência  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tal que

$$t_n \in (t_{X_0}^-, t_{X_0}^+), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

com

$$\varphi_{t_n}(X_0) \in \Theta(X_0) \longrightarrow Y \notin \Theta(X_0).$$

Assim,  $t_{X_0}^+ = \infty$  e  $Y \in \omega(X_0)$ . Pelo Teorema de Poincaré–Bendixson 2.1.10,  $\omega(X_0)$  é um ponto de equilíbrio, um gráfico ou uma órbita periódica. Veja que não é possível ser um gráfico, pois os pontos de equilíbrio de  $F \in \mathcal{F}^2$  são localmente assintoticamente

estáveis.  $E$ , não é possível ser um ponto de equilíbrio ou uma órbita periódica, pois este seria atrator e teria uma vizinhança de  $X_0$  em sua bacia de atração. Logo, está provada a afirmação acima.

Defina  $E = \Theta(X_0) \cup A$ .  $E$  é conexo por caminhos. Assim, dados  $X, Y \in E$  existe uma curva

$$\alpha : [a, b] \longrightarrow E,$$

$C^1$ , unindo  $X$  a  $Y$ , isto é,

$$\alpha(a) = X, \quad \alpha(b) = Y$$

e

$$\alpha(s) \in E, \quad \forall s \in [a, b].$$

Defina o  $F$ -comprimento de  $\alpha$  entre  $X$  e  $Y$  por

$$l_{X,Y}(\alpha) = \int_a^b \|F(\alpha(s))\| \|\alpha'(s)\| ds.$$

Se  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, então

$$l_{X,Y}(\alpha) = \int_a^b \|F(\alpha(s))\| ds.$$

Considere  $Z, W \in E$ , com  $0 \leq \|Z\| \leq \|W\|$ . Tome

$$\alpha : [a, b] \longrightarrow E,$$

$C^1$ , com

$$\alpha(a) = Z, \quad \alpha(b) = W \quad \text{e} \quad \alpha(s) \neq 0, \quad \forall s \in [a, b].$$

Defina

$$r = r(s) = \|\alpha(s)\| = \sqrt{\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle}.$$

Assim,

$$\frac{dr}{ds} = \frac{1}{2\|\alpha(s)\|} [2\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle] = \left\langle \frac{\alpha(s)}{\|\alpha(s)\|}, \alpha'(s) \right\rangle \leq \|\alpha'(s)\|,$$

ou seja,

$$dr \leq \|\alpha'(s)\| ds.$$

Para  $s = a$ , temos  $r = \|\alpha(a)\| = \|Z\|$  e para  $s = b$ , temos  $r = \|\alpha(b)\| = \|W\|$ . Portanto,

$$l_{Z,W}(\alpha) = \int_{s=a}^{s=b} \|F(\alpha(s))\| \|\alpha'(s)\| ds \geq \int_{r=\|Z\|}^{r=\|W\|} \min_{\|u\|=r} \|F(u)\| dr. \quad (3.3)$$

**Observação 3.1.1.** *Pelo Problema 5,  $l_{Z,W}(\alpha) \rightarrow \infty$ , quando  $\|W\| \rightarrow \infty$ , para  $\|Z\|$  fixada.*

Considere  $F^\perp = (-f_2, f_1)$  ou  $F^\perp = (f_2, -f_1)$  de modo que a escolha seja feita para que  $\psi_t(X_0) \in A$  para  $t \in (0, a)$ ,  $a > 0$  suficientemente pequeno, onde  $\psi$  denota o fluxo de

$$X' = F^\perp(X). \quad (3.4)$$

Como  $0 \in \Theta(X_0)$  e  $\Theta(X_0)$  é um conjunto fechado pela Afirmação 3, segue que

$$d(\Theta(X_0), 0) > 0,$$

sendo

$$d(\Theta(X_0), 0) = \inf\{d(\varphi_t(X_0), 0) : t \in (t_{X_0}^-, t_{X_0}^+)\}.$$

Temos então,

$$\theta = \int_0^{d(\Theta(X_0), 0) > 0} \min_{\|u\|=r} \|F(u)\| dr > 0.$$

Para cada  $t \in [0, t_{x_0}^+)$ , denote por

$$\gamma_t = \{\psi_s(\varphi_t(X_0)) : s \in [0, \beta_t)\}$$

a órbita positiva maximal de (3.4) por  $\varphi_t(X_0)$ .

Fixe  $Y \in \gamma_0 \cap A$  tal que

$$l_{X_0, Y}(\gamma_0) \leq \frac{\theta}{2}, \quad (3.5)$$

e denote por  $M$  a órbita positiva de  $F$  por  $Y$ , isto é,

$$M = \Theta^+(Y) = \{\varphi_t(Y) : t \in [0, \infty)\}.$$

A seguir temos dois lemas que são utilizados para finalizar esta parte da prova.

**Lema 3.1.1.** *Seja  $t \in [0, t_{x_0}^+)$  tal que  $\gamma_t$  intersecta  $M$  em  $Y_t$ . Então*

$$l_{X_0, Y}(\gamma_0) \geq l_{\varphi_t(X_0), Y_t}(\gamma_t). \quad (3.6)$$

**Lema 3.1.2.**  *$\gamma_t$  intersecta  $M$ , para cada  $t \in [0, t_{X_0}^+)$ , em um ponto denotado por  $Y_t = \varphi_{\tau(t)}(Y)$ . Além disso,*

$$\tau(t) \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad t \rightarrow t_{X_0}^+. \quad (3.7)$$

Os lemas acima foram enunciados no decorrer da demonstração para utilizar as definições e resultados apresentados ao longo deste texto. Antes de demonstrá-los, vejamos suas consequências. Ao terminarmos a prova deste teorema, apresentamos suas demonstrações. De (3.5) e (3.6), resulta que

$$l_{\varphi_t(X_0), Y_t}(\gamma_t) \leq l_{X_0, Y}(\gamma_0) \leq \frac{\theta}{2}, \quad \forall t \in [0, t_{X_0}^+]. \quad (3.8)$$

Por (3.7), quando  $t \rightarrow t_{X_0}^+$ ,  $\tau(t) \rightarrow \infty$ , de onde

$$Y_t = \varphi_{\tau(t)}(Y) \rightarrow 0,$$

isto é,

$$\|Y_t\| \rightarrow 0,$$

pois  $Y \in A$ . Por (3.3),

$$l_{\varphi_t(X_0), Y_t}(\gamma_t) \geq \int_{r=\|Y_t\|}^{r=\|\varphi_t(X_0)\|} \min_{\|u\|=r} \|F(u)\| dr \rightarrow \infty,$$

quando  $t \rightarrow t_{X_0}^+$ .

Em particular,

$$l_{\varphi_t(X_0), Y_t} > \frac{\theta}{2}$$

para  $t \in [0, t_{X_0}^+)$ ,  $t$  suficientemente próximo de  $t_{X_0}^+$ . Mas isso é uma contradição com (3.8), provando que  $A = \mathbb{R}^2$ .

Nesta terceira parte, vamos mostrar que o Problema 1 implica no Problema 2. Faremos por contrapositiva, isto é, a existência de  $F \in \mathcal{F}^2$  não globalmente injetora implica na existência de  $G \in \mathcal{F}^2$  para a qual a origem não é globalmente assintoticamente estável. Considere  $F \in \mathcal{F}^2$  não globalmente injetora. Assim, existem  $X_0 \neq Y_0$  tais que  $F(X_0) = F(Y_0) = A$ . Defina

$$G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad G(X) = F(X + X_0) - A.$$

Logo,  $G \in C^1$ , pois  $F \in C^1$ . Além disso,

$$G(0) = F(0 + X_0) - A = F(X_0) - A = A - A = 0.$$

Como  $DG(X) = DF(X + X_0)$ , para todo  $X \in \mathbb{R}^2$  e como  $DF(Z)$  tem autovalores com partes reais negativas para todo  $Z \in \mathbb{R}^2$ , tomando  $Z = X + X_0$ , segue que  $DG(X)$  tem autovalores com partes reais negativas, para todo  $X \in \mathbb{R}^2$ . Portanto, temos que  $G \in \mathcal{F}^2$ . Como  $Y_0 \neq X_0$ , considere

$$Z_0 = Y_0 - X_0 \neq 0.$$

Assim,

$$G(Z_0) = F(Z_0 + X_0) - A = F(Y_0 - X_0 + X_0) - A = F(Y_0) - A = 0.$$

Portanto,  $G \in \mathcal{F}^2$  tem dois pontos de equilíbrio distintos  $0$  e  $Z_0$ , o que implica que o ponto de equilíbrio na origem não é globalmente assintoticamente estável, como queríamos mostrar.

A quarta parte da prova consiste em mostrar que o Problema 2 implica no Problema 3. Fixe arbitrariamente  $F \in \mathcal{F}^2$  globalmente injetora. Queremos mostrar que existe  $K \in \mathbb{N}$ , tal que, para cada  $Y \in \mathbb{R}^2$ , o número de soluções de  $F(X) = Y$  é limitado por  $K$ . Para isso, basta tomar  $K = 1$  e a prova desta implicação está completa.

Seguindo, a última parte da prova, falta mostrar que o Problema 3 implica no Problema 4. Fixe arbitrariamente  $F \in \mathcal{F}^2$  para a qual existe  $K \in \mathbb{N}$ , tal que, para cada  $Y \in \mathbb{R}^2$ , o número de soluções de  $F(X) = Y$  é limitado por  $K$ . Mostraremos que existem  $\rho > 0$  e  $r > 0$ , tais que, se

$$\|X\| \geq r > 0,$$

então,

$$\|F(X)\| \geq \rho > 0.$$

Por hipótese inicial, sem perda de generalidade, diminuindo  $K$  se necessário, podemos supor que existe  $P \in \mathbb{R}^2$  para o qual o número de soluções de  $F(X) = P$  é exatamente  $K$ . Em outras palavras, existem  $X_1, \dots, X_k \in \mathbb{R}^2$ , dois a dois distintos, tais que

$$F(X_i) = P, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Como  $F \in \mathcal{F}^2$  é um difeomorfismo local, existem  $\rho > 0$  e vizinhanças abertas limitadas  $V_i$  para cada  $X_i$ , tais que,  $F$  restrito a  $V_i$  é um difeomorfismo, com

$$V_i \cap V_j = \emptyset, \quad \text{para } i \neq j,$$



e

$$F(V_i) = B(P, \rho) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \|X - P\| < \rho\}, \quad (3.9)$$

para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Afirmamos que

$$F^{-1}(B(P, \rho)) = \bigcup_{i=1}^k V_i.$$

De fato, primeiro,

$$\bigcup_{i=1}^k V_i \subset F^{-1}(B(P, \rho)).$$

Tome

$$X \in \bigcup_{i=1}^k V_i,$$

isto é,  $X \in V_j$ , para algum  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Assim, por (3.9),  $F(X) \in B(P, \rho)$ , de onde

$$X \in F^{-1}(B(P, \rho)).$$

Segundo,

$$F^{-1}(B(P, \rho)) \subset \bigcup_{i=1}^k V_i.$$

Suponha que isto não ocorra, isto é, existe  $Y \in F^{-1}(B(P, \rho))$ , mas

$$Y \notin \bigcup_{i=1}^k V_i.$$

Como  $Y \in F^{-1}(B(P, \rho))$ , segue que  $Z = F(Y) \in B(P, \rho)$ . Tendo  $F|_{V_i}$  um difeomorfismo, existem  $Y_i \in V_i$ , tais que  $F(Y_i) = Z$ . Por construção,  $Y \neq Y_i$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Mas, então, existem  $k + 1$  soluções  $Y, Y_1, \dots, Y_k$  da equação  $F(X) = Z$ , o que é uma contradição. Temos então, a igualdade de conjuntos afirmada anteriormente. Como as vizinhanças  $V_i$  são limitadas, segue que

$$\bigcup_{i=1}^k V_i$$

é limitada. Escolha  $r' > 0$  de modo que

$$\bigcup_{i=1}^k V_i \subset B(0, r').$$

Deste modo,

$$\|X\| \geq r' > 0 \implies \|F(X) - P\| \geq \rho > 0. \quad (3.10)$$

Defina

$$G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad G(X) = F(X + X_1) - P.$$

Segue que  $G \in \mathcal{F}^2$  e que

$$\|X\| \geq r = r' + \|X_1\| \implies \|G(X)\| \geq \rho > 0.$$

Em outras palavras,  $G$  está nas hipóteses do Problema 4. Como já mostramos que o Problema 4 implica no Problema 5, e este implica no Problema 1, isto é,  $X = 0$  é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável (de  $G$ ). Em particular,  $G$  não tem pontos de equilíbrio diferentes de  $X = 0$ . Mas, para

$$Y_i = X_i - X_1, \quad i \in \{2, \dots, k\},$$

temos,

$$G(Y_i) = G(X_i - X_1) = F(X_i - X_1 + X_1) - P = F(X_i) - P = P - P = 0.$$

Assim,

$$X_1 = X_2 = \dots = X_k,$$

isto é,  $K = 1$ , o que implica que  $F$  é globalmente injetora e não há perda de generalidade em considerar  $P = 0$  na hipótese inicial. De (3.10), existem números reais  $r' > 0$  e  $\rho > 0$ , tais que

$$\|F(X)\| \geq \rho > 0, \quad \text{para } \|X\| \geq r' > 0$$

como queríamos provar.

Concluimos, portanto, a prova do Teorema 3.1.1. ■

Antes de seguirmos com o texto, vejamos as demonstrações do Lema 3.1.1 e do Lema 3.1.2, respectivamente.

**Demonstração.** Para  $t \in [0, t_{X_0}^+)$ , a aplicação de transição (Poincaré)

$$\pi_t : \Sigma_0 \subset \gamma_0 \longrightarrow \Sigma_t \subset \gamma_t, \quad \pi_t(v) = v_t,$$

está bem definida pelo fluxo de  $F$ , onde  $\Sigma_0$  é o arco da trajetória de  $\gamma_0$  entre  $X_0$  e  $Y$ , e  $\Sigma_t$  é o arco da trajetória de  $\gamma_t$  entre  $\varphi_t(X_0)$  e  $Y_t$ .

Parametrize  $\Sigma_0$  por  $s_0$  e  $\Sigma_t$  por  $s_t$  ambos parametrizados pelo comprimento de arco.

Então,

$$\frac{ds_t}{ds_0} = \frac{\|F(v)\|}{\|F(v_t)\|} \exp \int_0^{t(v)} \operatorname{tr} DF(\varphi_t(v)) dt.$$

Como o  $\operatorname{tr} DF(\varphi_t(v)) < 0$ , temos que

$$\exp \int_0^{t(v)} \operatorname{tr} DF(\varphi_t(v)) dt < 1.$$

Portanto,

$$\frac{ds_t}{ds_0} < \frac{\|F(v)\|}{\|F(v_t)\|}.$$

Logo, temos que,

$$\|F(v_t)\| ds_t \leq \|F(v)\| ds_0,$$

de onde (3.6) segue por integração, provando o lema. ■

**Demonstração.** Seja  $\tau(t) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow t_{X_0}^+$ . Suponha que  $t_n \in [0, t_{X_0}^+)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , seja tal que  $t_n \rightarrow t_{X_0}^+$  mas  $\tau(t_n) \rightarrow T < \infty$ .

Considere as órbitas  $\gamma_{t_n}$  unindo  $\varphi_{t_n}(X_0) \in \Theta(X_0)$  com  $Y_n \in M$ . Assim temos

$$\int_{r=\|Y_{t_n}\|}^{r=\|\varphi_{t_n}(X_0)\|} \min_{\|v\|=r} \|F(v)\| dr \leq l_{\varphi_{t_n}(X_0), Y_{t_n}}(\gamma_{t_n}) \leq l_{X_0, Y}(\gamma_0) \leq \frac{\theta}{2}.$$

As desigualdades acima resultam, respectivamente, de (3.3), (3.6) e (3.5).

Tomando  $n \rightarrow \infty$ , temos

$$\|\varphi_{t_n}(X_0)\| \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad \|Y_{t_n}\| \rightarrow \|\varphi_T(Y)\|,$$

de onde,

$$\underbrace{\int_{r=\|\varphi_T(Y)\|}^{r=\infty} \min_{\|v\|=r} \|F(v)\|}_{\rightarrow \infty} \leq \frac{\theta}{2},$$

uma contradição. ■

Na Conjectura de Markus–Yamabe no plano, a condição sobre os autovalores de  $DF(x, y)$  é equivalente a

$$\operatorname{tr} DF(x, y) < 0 \quad \text{e} \quad \det DF(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Em geral, as condições acima são muito difíceis de serem verificadas e, certamente, não são necessárias para a estabilidade assintótica global, como mostra o exemplo a seguir.

Considere o campo de vetores

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (-x + xy, -y).$$

A origem é o único ponto de equilíbrio, além disso, é localmente assintoticamente estável, pois os autovalores de  $DF(0, 0)$  são

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Porém, para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , os autovalores de  $DF(x, y)$  são

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -1 + y, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Portanto, se  $y \geq 1$ , então  $\lambda_2 \geq 0$ , ou seja, não estamos nas hipóteses da Conjectura de Markus–Yamabe. Por outro lado, considere a função

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, y) = \ln(1 + x^2) + y^2,$$

uma função de Lyapunov estrita própria. De fato, que  $L$  é uma função de Lyapunov estrita segue de

$$L(0, 0) = 0, \quad L(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

$$\dot{L}(x, y) = - \left( \frac{x^2 + 2y^2 + x^2y^2 + (x - xy)^2}{1 + x^2} \right) < 0,$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Para vermos que é própria, tome  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  de modo que

$$\|(x, y)\| \longrightarrow \infty,$$

isto é,

$$|x| \longrightarrow \infty \quad \text{ou} \quad |y| \longrightarrow \infty.$$

Lembrando que logaritmo natural é uma função crescente, além disso,  $\ln(1 + x^2) \geq 0$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , e que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^2 = \infty,$$

temos, então,

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} \ln(1+x^2) + y^2 = \infty.$$

Logo, é, de fato, própria.

Portanto, temos um exemplo de um campo de vetores globalmente assintoticamente estável, o qual não está nas hipóteses de Markus–Yamabe.

Concluimos, então, que as hipóteses explicitadas na Conjectura de Markus–Yamabe no plano são condições suficientes, porém não necessárias para a estabilidade assintótica global.

## 3.2 Condições enfraquecidas de Markus–Yamabe

Ainda em  $\mathbb{R}^2$ , o objetivo agora é enfraquecer as hipóteses da Conjectura 1, de modo que possamos obter novas classes de campos de vetores que são GAE.

Considere três condições naturais, que nos auxiliarão na busca por classes de campos de vetores globalmente assintoticamente estáveis:

- (C1) A origem é o único ponto de equilíbrio;
- (C2) A origem é localmente assintoticamente estável;
- (C3) O traço de  $DF(x, y)$  é negativo, para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , exceto, possivelmente, na origem.

O próximo exemplo, enfatiza o fato destas três condições não serem suficientes para a estabilidade assintótica global.

Considere a equação diferencial

$$x' = -\frac{x(x+1)}{(1+y^2)^{3/2}}, \quad y' = 4x + \frac{(2x-1)y}{(1+y^2)^{1/2}},$$

ou equivalentemente, o campo de vetores

$$F(x, y) = \left( -\frac{x(x+1)}{(1+y^2)^{3/2}}, 4x + \frac{(2x-1)y}{(1+y^2)^{1/2}} \right).$$

Temos que a origem é o único ponto de equilíbrio, portanto,  $F$  satisfaz a condição (C1). Os autovalores de  $DF(0, 0)$  são

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Logo, a origem é localmente assintoticamente estável, assim, a condição (C2) também é satisfeita. Por fim, a divergência de  $F$  ou o traço de  $DF(x, y)$  tem a forma

$$\operatorname{div} F(x, y) = -\frac{2}{(1 + y^2)^{3/2}} < 0,$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , satisfazendo a condição (C3). Porém, o equilíbrio na origem não é globalmente assintoticamente estável, visto que a reta

$$x = -1$$

é invariante.

### 3.2.1 Sistemas quadráticos

O sistema de equações diferenciais (1.1) é chamado de sistema diferencial polinomial quadrático ou simplesmente um sistema quadrático, se as componentes do campo de vetores são funções polinomiais de grau menor ou igual a 2 e pelo menos uma delas tem grau 2. Estudamos os sistemas quadráticos que satisfazem as condições naturais (C1), (C2) e (C3), e em seguida analisamos se esses são globalmente assintoticamente estáveis. Os próximos resultados podem ser encontrados em [2].

**Teorema 3.2.1.** *Os sistemas quadráticos satisfazendo condições naturais (C1), (C2) e (C3), módulo mudança afim de coordenadas e reescalonamento da variável independente, têm as seguintes duas formas:*

$$x' = -x, \quad y' = -by - lx^2, \tag{3.11}$$

e

$$x' = -x, \quad y' = -x - y - lx^2, \tag{3.12}$$

com  $b > 0$  e  $l \in \mathbb{R}$ ,  $l \neq 0$ .

**Demonstração.** A chave para a demonstração deste teorema está na seguinte classificação dos sistemas quadráticos com um único ponto de equilíbrio, módulo mudança afim de coordenadas e reescalonamento da variável independente. Em [4], encontram-se mais detalhes desta classificação.

Considerando

$$P_2(x, y) = Lx^2 + Mxy + Ny^2 \quad \text{e} \quad Q_2(x, y) = lx^2 + mxy + ny^2,$$

os autores obtiveram a seguinte classificação:

1.  $x' = y - x^2 + xy, \quad y' = ax + by + Q_2(x, y),$

com  $a \neq 0$ ;

2.  $x' = y - x^2 + xy, \quad y' = by + Q_2(x, y),$

com  $b \neq 0$ ;

3.  $x' = y - x^2 + xy, \quad y' = Q_2(x, y);$

4.  $x' = xy, \quad y' = ax + by + Q_2(x, y),$

com  $a \neq 0$ ;

5.  $x' = xy, \quad y' = by + Q_2(x, y),$

com  $b \neq 0$ ;

6.  $x' = xy, \quad y' = Q_2(x, y);$

7.  $x' = y + x^2, \quad y' = \pm x + by + Q_2(x, y),$

com  $n = 0, m \neq 0$  e  $(l - b)^2 \pm 4m < 0$ , ou  $m = 0$  e  $l = b$ ;

8.  $x' = y + x^2, \quad y' = y + Q_2(x, y),$

com  $n \neq 0$  e  $m^2 - 4n(l - 1) < 0$ , ou  $n \neq 0, m = 0$  e  $l = 1$ , ou  $n = 0, m \neq 0$  e  $l = 1$ ,  
ou  $n = m = 0$  e  $l \neq 1$ ;

9.  $x' = y + x^2, \quad y' = Q_2(x, y),$

com  $n \neq 0$  e  $m^2 - 4nl < 0$ , ou  $n \neq 0$  e  $m = l = 0$ , ou  $n = l = 0$  e  $m \neq 0$ , ou  $n = m = 0$  e  $l \neq 0$ ;

10.  $x' = y, \quad y' = \pm x + by + Q_2(x, y),$

com  $b \geq 0$  e  $l = 0$ ;

11.  $x' = y, \quad y' = y + Q_2(x, y),$

com  $l \neq 0$ ;

12.  $x' = y, \quad y' = Q_2(x, y),$

com  $l \neq 0$ ;

13.  $x' = x^2 - 1, \quad y' = d + by + lx^2 + mxy,$

com  $m \neq 0$  e  $d + l \neq 0$ ;

14.  $x' = x^2 - 1, \quad y' = d + ax + by + lx^2 + mxy + y^2,$

com  $(b + m)^2 - 4(d + a + l) = 0$  e  $(b - m)^2 - 4(d - a + l) < 0$ ;

15.  $x' = x^2, \quad y' = y + Q_2(x, y),$

com  $n = 0$ ;

16.  $x' = x^2, \quad y' = x + Q_2(x, y),$

com  $n = 1$ ;

17.  $x' = x, \quad y' = by + Q_2(x, y),$

com  $b \neq 0$  e  $n = 0$ ;

18.  $x' = x, \quad y' = x + y + Q_2(x, y),$

com  $n = 0$ ;

19.  $x' = x, \quad y' = Q_2(x, y),$

com  $n \neq 0$ ;



$$20. \quad x' = P_2(x, y), \quad y' = Q_2(x, y).$$

Agora, devemos analisar cada uma das EDO's acima.

**Caso 1.** Associamos esta EDO ao campo de vetores

$$F(x, y) = (y - x^2 + xy, ax + by + Q_2(x, y)),$$

com  $a \neq 0$ . Podemos calcular a matriz Jacobiana, isto é,

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} -2x + y & 1 + x \\ a + 2lx + my & b + mx + 2ny \end{pmatrix}.$$

Assim, o traço é dado por

$$\text{tr } DF(x, y) = (m - 2)x + (2n + 1)y + b.$$

Logo, a condição (C3) é satisfeita se, e somente se,  $m = 2$ ,  $n = -1/2$  e  $b < 0$ . Assim, o campo de vetores fica na forma

$$G(x, y) = \left( y - x^2 + xy, ax + by + lx^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 \right).$$

Se  $(x_0, y_0)$  é um ponto de equilíbrio, a primeira componente do novo campo de vetores resulta em

$$y_0 = \frac{x_0^2}{1 + x_0}.$$

Aplicando na segunda componente, temos

$$x_0 \left( a + \frac{bx_0}{1 + x_0} + lx_0 + \frac{2x_0^2}{1 + x_0} - \frac{x_0^3}{2(1 + x_0)^2} \right) = 0. \quad (3.13)$$

Se  $x_0 = 0$ , então  $y_0 = 0$ .

Se  $x_0 \neq 0$ , então a equação (3.13) pode ser escrita como

$$x_0^3(2l + 3) + 2x_0^2(a + b + 2l + 2) + 2x_0(2a + b + l) + 2a = 0. \quad (3.14)$$

Para cumprir com a condição (C1), tomamos  $l = -3/2$ . Assim, temos

$$2x_0^2(a + b - 1) + x_0(4a + 2b - 3) + 2a = 0. \quad (3.15)$$

A condição (C2) implica que  $a < 0$ , pois, assumindo  $a \neq 0$  temos que o determinante da matriz Jacobiana aplicada na origem é igual a  $-a$ . Resolvendo para  $x_0$  em (3.15), temos o discriminante igual a

$$(4a + b - 1)^2 - 16a(a + b - 1) = (3 - 2b)^2 - 8a > 0,$$

portanto, a condição (C1) é violada, a menos que  $a + b - 1 = 0$ . Assumindo isso, é necessário, também, que  $4a + 2b - 3 = 0$ . Resolvendo para  $a$  e  $b$ , temos que  $a = 2/3$ . Contradizendo o fato de  $a$  ser menor que zero. Logo, este caso não satisfaz todas as condições.

**Caso 2.** Temos o seguinte campo de vetores associado

$$F(x, y) = (y - x^2 + xy, by + Q_2(x, y))$$

com  $b \neq 0$ . A matriz Jacobiana é dada por

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} -2x + y & 1 + x \\ 2lx + my & b + mx + 2ny \end{pmatrix}.$$

O traço desta matriz é

$$\text{tr } DF(x, y) = (m - 2)x + (2n + 1)y + b.$$

Assim, a condição (C3) é satisfeita se, e somente se,  $m = 2$ ,  $n = -1/2$  e  $b < 0$ . Substituindo estes valores, o campo de vetores resulta em

$$G(x, y) = \left( y - x^2 + xy, by + lx^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 \right).$$

Fazendo uma mudança de variáveis  $X = y - bx$  e  $Y = y$ , temos

$$G(X, Y) = (G_1(X, Y), G_2(X, Y)),$$

sendo

$$G_1(X, Y) = (l + b) \frac{(Y - X)^2}{b^2} + (2 - b)Y \frac{(Y - X)}{b} - \frac{Y^2}{2}$$

e

$$G_2(X, Y) = bY + l \frac{(Y - X)^2}{b^2} + 2Y \frac{(Y - X)}{b} - \frac{Y^2}{2}.$$

Note que a mudança de variáveis é uma mudança linear, isto é, um difeomorfismo, portanto não muda a natureza do ponto de equilíbrio. A matriz Jacobiana de  $G$  aplicada na origem é dada por

$$DG(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Então, a origem é um ponto de equilíbrio semi-hiperbólico. Vamos fazer uso do Teorema 2.2.1.

Note que o desenvolvimento de Taylor de  $G_1$ , próximo da origem, começa com termos quadráticos em  $X$  e  $Y$ .

Seja

$$G_1^{-1}(\{0\}) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 : G_1(X, Y) = 0\}$$

e

$$G_2^{-1}(\{0\}) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 : G_2(X, Y) = 0\}.$$

Temos que

$$G(0,0) = (0,0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial G_2}{\partial Y}(0,0) = b \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existe  $\epsilon > 0$  e

$$f : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$$

com

$$f(X) = Y \quad \text{e} \quad f(0) = 0.$$

Além disso, temos

$$h(X) = G_2(X, f(X)) = 0, \quad \forall X \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Então,

$$h(0) = h'(0) = h''(0) = \dots = h^{(k)}(0) = \dots = 0.$$

Assim, fazemos o desenvolvimento de Taylor da função  $h$  para obtermos o desenvolvimento de Taylor da função  $f$ , para podermos aplicar o Teorema 2.2.1. Temos que

$$h(X) = h(0) + h'(0)X + h''(0)\frac{X^2}{2} + \dots$$

e

$$f(X) = f(0) + f'(0)X + f''(0)\frac{X^2}{2} + \dots,$$

para todo  $X \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Temos que

$$h(0) = 0.$$

Seguindo,

$$h'(X) = \frac{\partial G_2}{\partial X}(X, f(X)) + \frac{\partial G_2}{\partial Y}(X, f(X)) f'(X),$$

aplicando em  $X = 0$ , temos

$$h'(0) = \frac{\partial G_2}{\partial X}(0, 0) + \frac{\partial G_2}{\partial Y}(0, 0) f'(0) = 0 + b f'(0),$$

o que implica em

$$h'(0) = b f'(0).$$

Como

$$h'(0) = 0 \quad \text{e} \quad b \neq 0,$$

resulta que

$$f'(0) = 0.$$

Para a derivada de segunda ordem, temos

$$\begin{aligned} h''(X) &= \frac{\partial^2 G_2}{\partial X^2}(X, f(X)) + 2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial X \partial Y}(X, f(X)) f'(X) + \frac{\partial^2 G_2}{\partial Y^2}(X, f(X)) (f'(X))^2 + \\ &\quad + \frac{\partial G_2}{\partial Y}(X, f(X)) f''(X), \end{aligned}$$

aplicando em  $X = 0$ , temos

$$h''(0) = \frac{\partial^2 G_2}{\partial X^2}(0, 0) + 2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial X \partial Y}(0, 0) f'(0) + \frac{\partial^2 G_2}{\partial Y^2}(0, 0) (f'(0))^2 + \frac{\partial G_2}{\partial Y}(0, 0) f''(0),$$

logo,

$$h''(0) = \frac{2l}{b^2} + b f''(0).$$

Como

$$h''(0) = 0 \quad \text{e} \quad b \neq 0,$$

segue que

$$f''(0) = -\frac{2l}{b^3}.$$

Portanto,

$$f(X) = -\frac{l}{b^3}X^2 + \dots.$$

Por fim

$$G_1(X, f(X)) = G_1\left(X, -\frac{2l}{b^3}X^2 + \dots\right) = \left(\frac{b+l}{b^2}\right)X^2 + \dots.$$

Pelo Teorema 2.2.1, temos que a origem é uma sela-nó topológica, contradizendo (C2).

**Caso 3.** Seja o campo de vetores

$$F(x, y) = (y - x^2 + xy, lx^2 + mxy + ny^2).$$

A matriz Jacobiana deste campo é

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} -2x + y & 1 + x \\ 2lx + my & mx + 2ny \end{pmatrix}.$$

Logo, o traço desta matriz é

$$\text{tr } DF(x, y) = (m - 2)x + (2n + 1)y.$$

Assim, a condição (C3) não é satisfeita.

**Caso 4.** Para este caso, temos o seguinte campo de vetores

$$F(x, y) = (xy, ax + by + lx^2 + mxy + ny^2),$$

com  $a \neq 0$ . Calculando a matriz Jacobiana, temos

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ a + 2lx + my & b + mx + 2ny \end{pmatrix}.$$

Encontramos que o traço é

$$\text{tr } DF(x, y) = (2n + 1)y + mx + b.$$

Assim, a condição (C3) é satisfeita se, e somente se,  $m = 0$ ,  $n = -1/2$  e  $b < 0$ . Substituindo esses valores, temos o campo de vetores,

$$F(x, y) = \left(xy, ax + by + lx^2 - \frac{1}{2}y^2\right),$$

onde os pontos  $(0, 0)$  e  $(0, 2b)$  são pontos de equilíbrio. Logo, a condição (C1) é satisfeita somente quando  $b = 0$ , uma contradição.

**Caso 5.** Temos

$$F(x, y) = (xy, by + lx^2 + mxy + ny^2),$$

com  $b \neq 0$ , um campo de vetores associado à EDO deste caso. A matriz Jacobiana é da forma

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2lx + my & b + mx + 2ny \end{pmatrix}.$$

Assim, o traço é

$$\text{tr } DF(x, y) = (2n + 1)y + mx + b,$$

e a condição (C3) é satisfeita somente quando  $m = 0$ ,  $n = -1/2$  e  $b < 0$ . Assim, análogo ao caso anterior,  $(0, 0)$  e  $(0, 2b)$  são pontos de equilíbrio. Logo, a condição (C1) é satisfeita somente quando  $b = 0$ , uma contradição.

**Caso 6.** Considere

$$F(x, y) = (xy, lx^2 + mxy + ny^2).$$

A matriz Jacobiana é da forma

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2lx + my & mx + 2ny \end{pmatrix}.$$

Assim, o traço é

$$\text{tr } DF(x, y) = mx + (2n + 1)y,$$

e a condição (C3) não é satisfeita.

**Caso 7.** Neste caso, dividimos em duas partes. Na primeira parte, considere

$$F_{\pm}(x, y) = (y + x^2, \pm x + by + lx^2 + mxy),$$

com  $m \neq 0$  e  $(l - b)^2 \pm 4m < 0$ . A divergência de  $F$  ou o traço de  $DF(x, y)$  tem a forma

$$\text{div } F(x, y) = 2x + b + mx,$$

assim, a condição (C3) é satisfeita somente para  $m = -2$  e  $b < 0$ , portanto escolhamos  $F_+$ . Assim, o campo de vetores é dado por

$$F(x, y) = (y + x^2, x + by + lx^2 - 2xy).$$

A matriz Jacobiana, aplicada na origem é

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix},$$

e

$$\det DF(0, 0) = -1.$$

Logo, a condição (C2) não é satisfeita.

Para a segunda parte, considere

$$F(x, y) = (y + x^2, \pm x + by + bx^2).$$

A divergência de  $F$  é da forma

$$\operatorname{div} F(x, y) = 2x + b.$$

Logo, a condição (C3) não é satisfeita.

**Caso 8.** Associamos a EDO ao campo

$$F(x, y) = (y + x^2, y + lx^2 + mxy + ny^2),$$

com  $n \neq 0$  e  $m^2 - 4n(l - 1) < 0$ , ou  $n \neq 0$ ,  $m = 0$  e  $l = 1$ , ou  $n = 0$ ,  $m \neq 0$  e  $l = 1$ , ou  $n = m = 0$  e  $l \neq 1$ . A divergência de  $F$  é da forma

$$\operatorname{div} F(x, y) = (m + 2)x + 2ny + 1.$$

Assim, a condição (C3) é satisfeita se, e somente se,  $m = -2$ ,  $n = 0$ , além disso, é necessário inverter a orientação do campo de vetores. Logo, apenas uma das quatro condições dos coeficientes é satisfeita, implicando que  $l = 1$ .

Como o  $\operatorname{tr} DF(x, y) = 1$ , consideramos o campo  $-F$ . Fazendo a mudança de variável  $X = x - y$  e  $Y = y$ , temos o seguinte campo

$$G(X, Y) = -F(X, Y) = (2XY - 2Y^2, Y + X^2 - Y^2).$$

Para fins de notação,

$$G(X, Y) = (G_1(X, Y), G_2(X, Y)),$$

sendo

$$G_1(X, Y) = 2XY - 2Y^2 \quad \text{e} \quad G_2(X, Y) = Y + X^2 - Y^2.$$

A mudança linear de coordenadas é um difeomorfismo, e multiplicando por  $-1$ , apenas invertemos a orientação do campo de vetores. Portanto, mantemos o retrato de fase com a orientação contrária.

A matriz Jacobiana de  $G$  aplicada na origem é dada por

$$DG(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então, a origem é um ponto de equilíbrio semi-hiperbólico. Novamente fazemos uso do Teorema 2.2.1 análogo à solução do **Caso 2**.

Note que o desenvolvimento de Taylor de  $G_1$ , próximo da origem, começa com termos quadráticos em  $X$  e  $Y$ .

Seja

$$G_1^{-1}(\{0\}) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 : G_1(X, Y) = 0\}$$

e

$$G_2^{-1}(\{0\}) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 : G_2(X, Y) = 0\}.$$

Temos que

$$G(0, 0) = (0, 0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial G_2}{\partial Y}(0, 0) = 1.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existe  $\epsilon > 0$  e

$$f : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$$

com

$$f(X) = Y \quad \text{e} \quad f(0) = 0.$$

Além disso, temos

$$h(X) = G_2(X, f(X)) = 0, \quad \forall X \in (-\epsilon, \epsilon).$$



Então,

$$h(0) = h'(0) = h''(0) = \dots = h^{(k)} = \dots = 0.$$

Assim, fazemos o desenvolvimento de Taylor da função  $h$  para obtermos o desenvolvimento de Taylor da função  $f$ , e por fim aplicar o Teorema 2.2.1. Temos que

$$h(X) = h(0) + h'(0) + h''(0)\frac{X^2}{2} + \dots$$

e

$$f(X) = f(0) + f'(0) + f''(0)\frac{X^2}{2} + \dots,$$

para todo  $X \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Temos que

$$h(0) = 0.$$

Seguindo,

$$h'(X) = \frac{\partial G_2}{\partial X}(X, f(X)) + \frac{\partial G_2}{\partial Y}(X, f(X)) f'(X),$$

aplicando em  $X = 0$ , temos

$$h'(0) = \frac{\partial G_2}{\partial X}(0, 0) + \frac{\partial G_2}{\partial Y}(0, 0) f'(0) = 0 + f'(0),$$

o que implica em

$$h'(0) = f'(0).$$

Como

$$h'(0) = 0,$$

resulta que

$$f'(0) = 0.$$

Para a derivada de segunda ordem, temos

$$\begin{aligned} h''(X) &= \frac{\partial^2 G_2}{\partial X^2}(X, f(X)) + 2\frac{\partial^2 G_2}{\partial X \partial Y}(X, f(X))f'(X) + \frac{\partial^2 G_2}{\partial Y^2}(X, f(X))(f'(X))^2 + \\ &\quad + \frac{\partial G_2}{\partial Y}(X, f(X))f''(X), \end{aligned}$$

aplicando em  $X = 0$ , temos

$$h''(0) = \frac{\partial^2 G_2}{\partial X^2}(0, 0) + 2\frac{\partial^2 G_2}{\partial X \partial Y}(0, 0)f'(0) + \frac{\partial^2 G_2}{\partial Y^2}(0, 0)(f'(0))^2 + \frac{\partial G_2}{\partial Y}(0, 0)f''(0),$$

logo,

$$h''(0) = 2 + f''(0).$$

Como

$$h''(0) = 0,$$

resulta que

$$f''(0) = -2.$$

Portanto

$$f(X) = -X^2 + \dots .$$

Por fim

$$G_1(X, f(X)) = G_1(X, -2X^2 + \dots) = -4X^3 + \dots .$$

Pelo Teorema 2.2.1, temos que a origem é uma sela topológica, contradizendo (C2).

**Caso 9.** Temos o seguinte campo de vetores

$$F(x, y) = (y + x^2, lx^2 + mxy + ny^2),$$

com  $n \neq 0$  e  $m^2 - 4nl < 0$ , ou  $n \neq 0$  e  $m = l = 0$ , ou  $n = l = 0$  e  $m \neq 0$ , ou  $n = m = 0$  e  $l \neq 0$ . A divergência de  $F$  é da forma

$$\operatorname{div} F(x, y) = (m + 2)x + 2ny,$$

e a condição (C3) não é satisfeita.

**Caso 10.** Temos o seguinte campo de vetores

$$F(x, y) = (y, \pm x + by + lx^2 + mxy + ny^2),$$

com  $b \geq 0$  e  $l = 0$ . A divergência de  $F$  é da forma

$$\operatorname{div} F(x, y) = b + mx + 2ny,$$

assim, a condição (C3) é satisfeita somente quando  $m = n = 0$  e  $b < 0$ . Por hipótese, temos que  $b \geq 0$ , assim, devemos considerar o campo  $-F$ .

Seguindo, temos que substituindo esses valores em  $-F$ , obtemos um novo campo de vetores dado por

$$G(x, y) = (-y, \pm x - by),$$

um sistema linear, no qual a origem não é localmente assintoticamente estável.

**Caso 11.** Seja

$$F(x, y) = (y, y + lx^2 + mxy + ny^2),$$

com  $l \neq 0$ . A divergência de  $F$  é da forma

$$\operatorname{div} F(x, y) = 1 + mx + 2ny.$$

A condição (C3) é satisfeita somente para  $m = n = 0$ , além disso, é necessário invertermos a orientação do campo de vetores. Substituindo estes valores e mudando a orientação, temos que o novo campo de vetores é dado por

$$G(x, y) = (-y, -y - lx^2).$$

Fazendo a mudança de variáveis  $X = y - x$  e  $Y = y$ , temos o seguinte campo

$$L(X, Y) = (l(Y - X)^2, Y + l(Y - X)^2).$$

Para fins de notação, considere

$$L_1(X, Y) = l(Y - X)^2 \quad \text{e} \quad L_2(X, Y) = Y + l(Y - X)^2.$$

A matriz Jacobiana de  $L$  aplicada na origem é dada por

$$DL(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então, a origem é um ponto de equilíbrio semi-hiperbólico. Faremos então, uso do Teorema 2.2.1 análogo à solução do **Caso 2**.

Seja

$$L_1^{-1}(\{0\}) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 : L_1(X, Y) = 0\}$$

e

$$L_2^{-1}(\{0\}) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 : L_2(X, Y) = 0\}.$$

Temos que

$$L(0, 0) = (0, 0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial L_2}{\partial Y}(0, 0) = l \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existe  $\epsilon > 0$  e

$$f : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$$

com

$$f(X) = Y \quad \text{e} \quad f(0) = 0.$$

Além disso, temos

$$h(X) = L_2(X, f(X)) = 0, \quad \forall X \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Então,

$$h(0) = h'(0) = h''(0) = \dots = h^{(k)}(0) = \dots = 0.$$

Assim, fazendo o desenvolvimento de Taylor da função  $h$  para obtermos o desenvolvimento de Taylor da função  $f$ , para podermos aplicar o Teorema 2.2.1. Temos que

$$h(X) = h(0) + h'(0) + h''(0) \frac{X^2}{2} + \dots$$

e

$$f(X) = f(0) + f'(0) + f''(0) \frac{X^2}{2} + \dots,$$

para todo  $X \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Temos que

$$h(0) = 0.$$

Seguindo,

$$h'(X) = \frac{\partial L_2}{\partial X}(X, f(X)) + \frac{\partial L_2}{\partial Y}(X, f(X)) f'(X),$$

aplicando em  $X = 0$ , temos

$$h'(0) = \frac{\partial L_2}{\partial X}(0, 0) + \frac{\partial L_2}{\partial Y}(0, 0) f'(0) = 0 + f'(0),$$

o que implica em

$$h'(0) = f'(0).$$

Como

$$h'(0) = 0,$$

resulta que

$$f'(0) = 0.$$

Para a derivada de segunda ordem, temos

$$\begin{aligned} h''(X) &= \frac{\partial^2 L_2}{\partial X^2}(X, f(X)) + 2\frac{\partial^2 L_2}{\partial X \partial Y}(X, f(X))f'(X) + \frac{\partial^2 L_2}{\partial Y^2}(X, f(X))(f'(X))^2 + \\ &\quad + \frac{\partial L_2}{\partial Y}(X, f(X))f''(X), \end{aligned}$$

aplicando em  $X = 0$ , temos

$$h''(0) = \frac{\partial^2 L_2}{\partial X^2}(0, 0) + 2\frac{\partial^2 L_2}{\partial X \partial Y}(0, 0)f'(0) + \frac{\partial^2 L_2}{\partial Y^2}(0, 0)(f'(0))^2 + \frac{\partial L_2}{\partial Y}(0, 0)f''(0),$$

logo,

$$h''(0) = 2l + f''(0).$$

Como

$$h''(0) = 0 \quad \text{e} \quad l \neq 0,$$

implica que

$$f''(0) = -2l.$$

Portanto,

$$f(X) = -2lX^2 + \dots .$$

Por fim

$$L_1(X, f(X)) = L_1(X, -2lX^2 + \dots) = lX^2 + \dots .$$

Pelo Teorema 2.2.1, temos que a origem é uma sela-nó topológica, contradizendo (C2).

**Caso 12.** Seja

$$F(x, y) = (y, lx^2 + mxy + ny^2),$$

com  $l \neq 0$ . A divergência de  $F$  é da forma

$$\operatorname{div} F(x, y) = mx + 2ny.$$

Logo, a condição (C3) não é satisfeita.

**Caso 13.** Considere

$$F(x, y) = (x^2 - 1, d + by + lx^2 + mxy),$$

com  $m \neq 0$  e  $d + l \neq 0$ . A divergência de  $F$  é da forma

$$\operatorname{div} F(x, y) = (2 + m)x + b.$$

A condição (C3) é satisfeita se, e somente se,  $m = -2$  e  $b < 0$ . Pela condição (C1), devemos tomar  $b = -2$ , com a coordenada  $x$  do ponto de equilíbrio sendo  $\mp 1$ . Em ambos os casos o determinante da matriz Jacobiana é negativo, assim a condição (C2) é violada.

**Caso 14.** Seja

$$F(x, y) = (x^2 - 1, d + ax + by + lx^2 + mxy + y^2),$$

com  $(b + m)^2 - 4(d + a + l) = 0$  e  $(b - m)^2 - 4(d - a + l) < 0$ . A divergência de  $F$  é da forma

$$\operatorname{div} F(x, y) = (m + 2)x + 2y + b.$$

Logo, a condição (C3) não é satisfeita.

**Caso 15.** Considere

$$F(x, y) = (x^2, y + lx^2 + mxy).$$

A divergência de  $F$  é da forma

$$\operatorname{div} F(x, y) = 2x + 1 + mx.$$

Pela condição (C3),  $m = -2$ , além disso, é necessário invertermos a orientação do campo. Substituindo e invertendo a orientação, temos o campo de vetores da forma

$$G(x, y) = (-x^2, -y - lx^2 + 2xy).$$

Para fins de notação, considere

$$G_1(x, y) = -x^2 \quad \text{e} \quad G_2(x, y) = -y - lx^2 + 2xy.$$

A matriz Jacobiana de  $G$  aplicada na origem é dada por

$$DG(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Então, a origem é um ponto de equilíbrio semi-hiperbólico. Para fazermos uso do Teorema 2.2.1, invertermos novamente o sentido do campo. Note que o campo de vetores  $-G$  satisfaz as condições do teorema.

Considere

$$y = f(x) = \frac{lx^2}{2x - 1},$$

uma solução da equação

$$y + lx^2 - 2xy = 0.$$

Então, temos que

$$-G_1(x, f(x)) = x^2.$$

Pelo Teorema 2.2.1, temos que a origem é uma sela-nó topológica, contradizendo (C2).

**Caso 16.** Temos o seguinte campo de vetores

$$F(x, y) = (x^2, x + lx^2 + mxy + y^2).$$

A divergência de  $F$  é da forma

$$\operatorname{div} F(x, y) = (2 + m)x + 2y.$$

Logo, a condição (C3) não é satisfeita.

**Caso 17.** Considere

$$F(x, y) = (x, by + lx^2 + mxy),$$

com  $b \neq 0$ . A divergência de  $F$  é da forma

$$\operatorname{div} F(x, y) = 1 + b + mx.$$

Temos que a condição (C3) é satisfeita somente quando  $m = 0$  e  $1 + b < 0$ . Substituindo e invertendo a orientação do campo de vetores, temos

$$F_1(x, y) = -F(x, y) = (-x, -by - lx^2).$$

Note que a origem é o único ponto de equilíbrio deste campo, além disso, a matriz Jacobiana aplicada neste ponto é da forma

$$DF_1(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Logo, temos que a origem é localmente assintoticamente estável se  $b > 0$ . Portanto, nestas condições o sistema satisfaz (C1), (C2) e (C3).

**Caso 18.** Seja o campo de vetores dado por

$$F(x, y) = (x, x + y + lx^2 + mxy).$$

A divergência de  $F$  é da forma

$$\operatorname{div} F(x, y) = 2 + mx.$$

Análogo ao caso anterior, temos que a condição (C3) é satisfeita somente para  $m = 0$  e se considerarmos o campo de vetores com a orientação invertida. Substituindo e invertendo a orientação do campo de vetores, temos

$$F_1(x, y) = -F(x, y) = (-x, -x - y - lx^2).$$

A origem é o único ponto de equilíbrio deste campo, além disso,

$$DF_1(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Segue que  $-1$  é autovalor de multiplicidade dois. Temos então, que a origem é localmente assintoticamente estável. Portanto, nestas condições a EDO satisfaz (C1), (C2) e (C3).

**Caso 19.** Considere o campo de vetores

$$F(x, y) = (x, lx^2 + mxy + ny^2),$$

com  $n \neq 0$ . A divergência de  $F$  é da forma

$$\operatorname{div} F(x, y) = 1 + mx + 2ny.$$

Assim, a condição (C3) é satisfeita somente quando  $m = n = 0$ , além disso, é necessário inverter a orientação do campo de vetores. Porém, por hipótese,  $n \neq 0$ . Absurdo.

**Caso 20.** Considere o seguinte campo de vetores

$$F(x, y) = (Lx^2 + Mxy + Ny^2, lx^2 + mxy + ny^2).$$



A divergência de  $F$  é da forma

$$\operatorname{div} F(x, y) = (2L + m)x + (2n + M)y.$$

Temos que a divergência do campo  $F$  não tem sinal constante. Portanto, a condição (C3) não é satisfeita. ■

**Teorema 3.2.2.** *Todos os sistemas quadráticos satisfazendo as condições naturais (C1), (C2) e (C3) são globalmente assintoticamente estáveis.*

**Demonstração.** De fato, a seguir temos as soluções dos sistemas (3.11) e (3.12), e assim segue que são GAE.

Para o sistema (3.11) associamos o campo de vetores

$$F(x, y) = (-x, -by - lx^2), \quad \text{com } b > 0.$$

Considere  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  uma condição inicial qualquer. Para  $b \neq 2$ , temos

$$x(t) = x_0 e^{-t}$$

e

$$y(t) = -\frac{2y_0 e^{-bt}}{b-2} + \frac{y_0 b e^{-bt}}{b-2} + \frac{lx_0^2 e^{-bt}}{b-2} - \frac{lx_0^2 e^{-2t}}{b-2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Cada fator acima tem limite zero quando  $t$  tende ao infinito, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Para  $b = 2$ , temos

$$x(t) = x_0 e^{-t}$$

e

$$y(t) = e^{-2t}(y_0 - lx_0^2 t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Novamente, cada fator acima tem limite zero quando  $t$  tende ao infinito. Temos então que o sistema (3.11) é GAE.

Para o sistema (3.12), procedemos de modo análogo. Assim,

$$G(x, y) = (-x, -x - y - lx^2).$$

Considere  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  uma condição inicial qualquer. Temos que

$$x(t) = x_0 e^{-t}$$

e

$$y(t) = -e^{-2t}(x_0 t e^t - y_0 e^t - l x_0^2 + l x_0^2 e^t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Novamente, cada fator acima tem limite zero quando  $t$  tende ao infinito. Isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Temos que o sistema (3.12) é GAE. ■

Outra classe de campo de vetores GAE, satisfazendo as condições naturais (C1), (C2), e (C3), é apresentada no próximo teorema.

### 3.2.2 Sistemas de Liénard

**Teorema 3.2.3.** *Todos os sistemas de Liénard da forma*

$$x' = y - f(x), \quad y' = -x, \tag{3.16}$$

com

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_d x^d,$$

satisfazendo as condições (C1), (C2) e (C3) são globalmente assintoticamente estáveis.

**Demonstração.** Primeiro, associamos a EDO (3.16) ao seguinte campo de vetores

$$F(x, y) = (y - f(x), -x),$$

com

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_d x^d.$$

A matriz Jacobiana de  $F$  é

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} -f'(x) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicada na origem, temos

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, se  $a_1 \neq 0$  temos um equilíbrio hiperbólico. Como estamos trabalhando com sistemas de Liénard que satisfazem as condições naturais (C1), (C2) e (C3), temos que a divergência de  $F$ , dada por

$$\operatorname{div} F(x, y) = -a_1 - 2a_2x - 3a_3x^2 - \dots - da_dx^{d-1},$$

é menor que zero, para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , exceto, possivelmente, na origem. Se  $d$  é par, então  $\operatorname{div} F$  é um polinômio de uma variável de grau ímpar, contradizendo a condição (C3). Assim,  $d$  é ímpar e o coeficiente  $a_d > 0$ , além disso, o gráfico da função  $f$  está contido no conjunto formado pelo primeiro e terceiro quadrantes abertos do plano com a origem.

Considere a função

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Esta é uma função de Lyapunov estrita própria. De fato,

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{2} = \infty,$$

portanto,  $L$  é própria, e

$$\dot{L}(x, y) = \nabla L(x, y) \cdot F(x, y) = -xf(x), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Como  $d$  é ímpar,  $a_d > 0$  e temos informações sobre o gráfico da função  $f$ , segue que

$$\dot{L}(x, y) = -xf(x) < 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Logo, a origem é globalmente assintoticamente estável. ■

### 3.2.3 Sistemas Kukles de grau 3

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais

$$x' = y, \quad y' = -x + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3. \quad (3.17)$$

Este sistema é conhecido como sistema Kukles ou sistema Kukles de grau 3. O objetivo de Kukles em seu estudo foi dar condições, em termos dos coeficientes  $a_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 7\}$ , de modo que o ponto de equilíbrio na origem fosse um centro. Nosso objetivo será o estudo dos sistemas Kukles do ponto de vista da estabilidade assintótica global. O primeiro passo é escrever todos os sistemas Kukles após uma mudança linear de variáveis e um reescalonamento da variável independente, como é feito no teorema a seguir. Este material foi inspirado e retirado de [5].

**Teorema 3.2.4.** *Todos os sistemas Kukles (3.17) após uma mudança linear de variáveis e um reescalonamento da variável independente  $t$ , pode ser escrito como um dos sete sistemas a seguir:*

$$1. \quad x' = y, \quad y' = -x + x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3;$$

$$2. \quad x' = y, \quad y' = -x + xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3;$$

$$3. \quad x' = y, \quad y' = -x + y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3;$$

$$4. \quad x' = y, \quad y' = -x \pm x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3;$$

$$5. \quad x' = y, \quad y' = -x + x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3;$$

$$6. \quad x' = y, \quad y' = -x \pm xy^2 + a_7y^3;$$

$$7. \quad x' = y, \quad y' = -x + y^3.$$

**Demonstração.** Considere a mudança linear de variáveis e um reescalonamento da variável independente  $t$ , da forma

$$x \mapsto \alpha X, \quad y \mapsto \beta Y, \quad t \mapsto \gamma \tau. \quad (3.18)$$

**Caso 1.** Assuma  $a_1 \neq 0$ . Usando (3.18) com  $\alpha = \beta = 1/a_1$ ,  $\gamma = 1$ , o sistema (3.17) pode ser escrito como

$$X' = Y, \quad Y' = -X + X^2 + \frac{a_2}{a_1}XY + \frac{a_3}{a_1}Y^2 + \frac{a_4}{a_1^2}X^3 + \frac{a_5}{a_1^2}X^2Y + \frac{a_6}{a_1^2}XY^2 + \frac{a_7}{a_1^2}Y^3.$$

Após uma mudança de notação, temos a forma normal 1.

**Caso 2.** Assuma  $a_1 = 0$  e  $a_2 \neq 0$ . Usando (3.18) com  $\alpha = \beta = 1/a_2$ ,  $\gamma = 1$ , o sistema (3.17) pode ser escrito como

$$X' = Y, \quad Y' = -X + XY + \frac{a_3}{a_2}Y^2 + \frac{a_4}{a_2^2}X^3 + \frac{a_5}{a_2^2}X^2Y + \frac{a_6}{a_2^2}XY^2 + \frac{a_7}{a_2^2}Y^3.$$

Após uma mudança de notação, temos a forma normal 2.

**Caso 3.** Assuma  $a_1 = a_2 = 0$  e  $a_3 \neq 0$ . Usando (3.18) com  $\alpha = \beta = 1/a_3$ ,  $\gamma = 1$ , o sistema (3.17) pode ser escrito como

$$X' = Y, \quad Y' = -X + Y^2 + \frac{a_4}{a_3^2}X^3 + \frac{a_5}{a_3^2}X^2Y + \frac{a_6}{a_3^2}XY^2 + \frac{a_7}{a_3^2}Y^3.$$

Após uma mudança de notação, temos a forma normal 3.

**Caso 4.** Assuma  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$  e  $a_4 \neq 0$ . Usando (3.18) com  $\alpha = \beta = 1/\sqrt{a_4}$ ,  $\gamma = 1$  se  $a_4 > 0$ , e  $\alpha = \beta = 1/\sqrt{-a_4}$ ,  $\gamma = 1$  se  $a_4 < 0$ , o sistema (3.17) pode ser escrito como

$$X' = Y, \quad Y' = -X \pm X^3 + \frac{a_5}{a_4}X^2Y + \frac{a_6}{a_4^2}XY^2 + \frac{a_7}{a_4}Y^3.$$

Após uma mudança de notação, temos a forma normal 4.

**Caso 5.** Assuma  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$  e  $a_5 \neq 0$ . Usando (3.18) com  $\alpha = \beta = 1/\sqrt{a_5}$ ,  $\gamma = 1$  se  $a_5 > 0$ , e  $\alpha = -\beta = 1/\sqrt{-a_5}$ ,  $\gamma = -1$  se  $a_5 < 0$ , o sistema (3.17) pode ser escrito como

$$X' = Y, \quad Y' = -X + X^2Y \pm \frac{a_6}{a_5^2}XY^2 + \frac{a_7}{a_5}Y^3.$$

Após uma mudança de notação, temos a forma normal 5.

**Caso 6.** Assuma  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$  e  $a_6 \neq 0$ . Usando (3.18) com  $\alpha = \beta = 1/\sqrt{a_6}$ ,  $\gamma = 1$  se  $a_6 > 0$ , e  $\alpha = \beta = 1/\sqrt{-a_6}$ ,  $\gamma = 1$  se  $a_6 < 0$ , o sistema (3.17) pode ser escrito como

$$X' = Y, \quad Y' = -X \pm XY^2 + \frac{a_7}{a_6}Y^3.$$

Após uma mudança de notação, temos a forma normal 6.

**Caso 7.** Assuma  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$  e  $a_7 \neq 0$ . Usando (3.18) com  $\alpha = \beta = 1/\sqrt{a_7}$ ,  $\gamma = 1$  se  $a_7 > 0$ , e  $\alpha = -\beta = 1/\sqrt{-a_7}$ ,  $\gamma = -1$  se  $a_7 < 0$ , o sistema (3.17) pode ser escrito como

$$X' = Y, \quad Y' = -X + Y^3.$$

Após uma mudança de notação, temos a forma normal 7. ■

Agora, podemos classificar os sistemas Kukles satisfazendo as condições (C1), (C2) e (C3), isto é, mostrar quais dos sete sistemas listados no Teorema 3.2.4, satisfazem as condições naturais (C1), (C2) e (C3).

**Teorema 3.2.5.** *Os sistemas Kukles (3.17) satisfazendo as condições (C1), (C2) e (C3), módulo mudança afim de coordenadas e reescalonamento da variável independente, têm as seguintes duas formas:*

$$x' = y, \quad y' = -x - x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3, \quad (3.19)$$

sendo

$$a_7 < 0 \quad e \quad a_6^2 - 3a_5a_7 < 0,$$

e

$$x' = y, \quad y' = -x + x^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3, \quad (3.20)$$

sendo

$$a_4 < -1/4, \quad a_7 < 0 \quad e \quad a_6^2 - 3a_5a_7 < 0.$$

**Demonstração.** Para provarmos este teorema devemos analisar cada caso na classificação do Teorema 3.2.4.

**Caso 1.** Temos que o sistema Kukles neste caso pode ser associado ao campo de vetores dado por

$$F(x, y) = (y, -x + x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3).$$

A divergência de  $F$  é dada por

$$\operatorname{div} F(x, y) = a_2x + 2a_3y + a_5x^2 + 2a_6xy + 3a_7y^2.$$

Assim, a condição (C3) é satisfeita, se, e somente se,  $a_2 = a_3 = 0$  e  $a_6^2 - 3a_5a_7 < 0$ . Temos então um novo campo de vetores da forma

$$G(x, y) = (y, -x + x^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3).$$

A divergência de  $G$  é dada por

$$\operatorname{div} G(x, y) = a_5 x^2 + 2a_6 xy + 3a_7 y^2,$$

a qual é uma forma quadrática, definida pela matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} a_5 & a_6 \\ a_6 & 3a_7 \end{pmatrix}.$$

O determinante e o traço de  $A$  são dados por

$$\det(A) = 3a_5 a_7 - a_6^2 > 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{tr}(A) = a_5 + 3a_7 < 0.$$

Portanto, os autovalores de  $A$  são reais e negativos, ou seja, a forma quadrática definida pela matriz  $A$  é negativa definida. Assim, a divergência de  $G$  é negativa em todo ponto de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , logo, a condição (C3) é satisfeita.

Se  $(x_0, 0)$  for um ponto de equilíbrio de  $G$ , então

$$x_0(a_4 x_0^2 + x_0 - 1) = 0.$$

Assim,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  é um ponto de equilíbrio e os pontos  $(-1 \pm \sqrt{1 + 4a_4}/2a_4, 0)$  também serão se  $a_4 \geq -1/4$ . Logo, para satisfazermos a condição (C1) é necessário que  $a_4 < -1/4$ . Finalmente, a origem é localmente assintoticamente estável, satisfazendo (C2). De fato, temos que a matriz Jacobiana deste campo aplicada na origem é da forma

$$G(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que este ponto de equilíbrio é não-hiperbólico, estamos no problema Foco-Centro. Pelo primeiro coeficiente de Lyapunov, temos

$$L_1 = 3a_7 + a_5 < 0.$$

Logo, neste caso, obtemos o sistema (3.20).

**Caso 2.** Associamos a EDO ao campo de vetores

$$F(x, y) = (y, -x + xy + a_3 y^2 + a_4 x^3 + a_5 x^2 y + a_6 x y^2 + a_7 y^3).$$

A divergência de  $F$  é dada por

$$\operatorname{div} F(x, y) = x + 2a_3y + a_5x^2 + 2a_6xy + 3a_7y^2,$$

implicando que a condição (C3) não é satisfeita.

Os **Casos 3**, **Caso 5**, **Caso 6** e **Caso 7** são análogos ao caso anterior.

**Caso 4.** Neste caso, dividimos a análise em duas partes. Para a primeira parte, temos o sistema

$$x' = y, \quad y' = -x + x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3,$$

contendo três pontos de equilíbrio. Portanto, a condição (C1) não é satisfeita.

Para a segunda parte, seja

$$x' = y, \quad y' = -x - x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3.$$

Este sistema tem apenas a origem como ponto de equilíbrio. Associamos este sistema ao campo de vetores

$$F(x, y) = (y, -x - x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3).$$

A divergência de  $F$  é dada por

$$\operatorname{div} F(x, y) = a_5x^2 + 2a_6xy + 3a_7y^2,$$

a qual é uma forma quadrática, definida pela matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} a_5 & a_6 \\ a_6 & 3a_7 \end{pmatrix}.$$

O determinante e o traço de  $A$  são dados por

$$\det(A) = 3a_5a_7 - a_6^2 > 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{tr}(A) = a_5 + 3a_7 < 0.$$

Portanto, os autovalores de  $A$  são reais e negativos, ou seja, a forma quadrática definida pela matriz  $A$  é negativa definida. Assim, a divergência de  $F$  é negativa em todo ponto de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , logo, a condição (C3) é satisfeita.



A matriz Jacobiana deste campo aplicada na origem é da forma

$$F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segue que este ponto de equilíbrio é não-hiperbólico, e novamente, estamos no problema Foco-Centro. O primeiro coeficiente de Lyapunov é dado por

$$L_1 = 3a_7 + a_5 < 0.$$

Logo, a origem é um foco atrator, localmente assintoticamente estável. Portanto, obtemos o sistema (3.19). ■

Com os Teoremas 3.2.4 e 3.2.5, temos um grande resultado a respeito dos sistemas Kukles, enunciado no próximo teorema.

**Teorema 3.2.6.** *Todos os sistemas Kukles (3.17) satisfazendo as condições (C1), (C2) e (C3) são globalmente assintoticamente estáveis.*

**Demonstração.** Primeiro mostramos que a família de equações diferenciais (3.19) é globalmente assintoticamente estável, em seguida faremos o mesmo para (3.20).

Seja

$$x' = y, \quad y' = -x - x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3,$$

com

$$a_7 < 0 \quad \text{e} \quad a_6^2 - 3a_5a_7 < 0.$$

A família de equações diferenciais (3.19) tem quatro pontos de equilíbrio infinitos, sendo duas selas e dois nós instáveis. Para provarmos esta afirmação fazemos a Compactificação de Poincaré.

Na carta  $U_1$ , a equação (3.19) tem a forma

$$u' = a_7u^3 + a_6u^2 + a_5u - 1 - v(v + u^2v), \quad v' = -uv^3. \quad (3.21)$$

Fazendo  $v = 0$ , um ponto de equilíbrio de (3.21) tem a forma  $(u_0, 0)$ , sendo  $u_0$  uma raiz real do polinômio cúbico

$$\mathcal{C}_1(u) = a_7u^3 + a_6u^2 + a_5u - 1.$$

Como

$$a_7 < 0 \quad \text{e} \quad a_6^2 - 3a_5a_7 < 0,$$

segue

$$\mathcal{C}'_1(u) = 3a_7u^2 + 2a_6u + a_5 < 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Assim,  $\mathcal{C}_1$  é uma função monótona decrescente e sua única raiz real  $u_0$  é negativa. De fato, visto que  $a_7 < 0$ , temos

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \mathcal{C}_1(u) = \infty, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \mathcal{C}_1(u) = -\infty \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_1(0) = -1 < 0.$$

A matriz Jacobiana do campo de vetores  $G$  que define (3.21) no ponto de equilíbrio  $(u_0, 0)$  é dada por

$$DG(u_0, 0) = \begin{pmatrix} 3a_7u_0^2 + 2a_6u_0 + a_5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}'_1(u_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de  $DG(u_0, 0)$  são

$$\lambda_1 = \mathcal{C}'_1(u_0) < 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 0.$$

Deste modo,  $(u_0, 0)$  é semi-hiperbólico. Precisamos colocar o campo de vetores na forma normal do Teorema 2.2.1, para sabermos a sua natureza.

Começemos com uma mudança de variáveis, tomando

$$u = y \quad \text{e} \quad v = x.$$

Segue que

$$v' = x' = -yx^3, \quad u' = y' = a_7y^3 + a_6y^2 + a_5y - 1 - x(x + y^2x).$$

O novo ponto de equilíbrio é da forma  $(0, y_0)$ , onde  $y_0$  é raiz do polinômio

$$P_1(y) = a_7y^3 + a_6y^2 + a_5y - 1.$$

Ainda, precisamos transladar o ponto de equilíbrio para a origem, isto é, fazemos outra mudança de variáveis da forma

$$X = x \quad \text{e} \quad Y = y - y_0.$$

Temos que

$$X' = x' = -yx^3 = -(Y + y_0)X^3$$

e

$$Y' = y' = a_7(Y + y_0)^3 + a_6(Y + y_0)^2 + a_5(Y + y_0) - 1 - X(X + (Y + y_0)^2X).$$

Para facilitar a escrita, mudamos novamente a notação, tomando

$$x = X \quad \text{e} \quad y = Y,$$

resultando em

$$x' = A(x, y) = -y_0x^3 - yx^3$$

e

$$y' = a_7(y^3 + 3y^2y_0 + 3yy_0^2) + a_6(y^2 + 2yy_0 + y_0^2) + a_5(y + y_0) - 1 - x(x + (y^2 + 2yy_0 + y_0^2)x).$$

Seja  $H$ , o campo associado ao sistema acima. Colocando  $y$  em evidência e multiplicando o campo por  $-1$ , temos que  $-H$ , está nas hipóteses do Teorema 2.2.1, isto é,

$$-H(x, y) = (y_0x^3 + yx^3, -(3a_7y_0^2 + 2a_6y_0 + a_5)y - B(x, y)).$$

Considere

$$y = f(x),$$

tal que

$$-(3a_7y_0^2 + 2a_6y_0 + a_5)f(x) - B(x, f(x)) = 0,$$

para todo  $x$  suficientemente próximo de 0.

Temos então

$$g(x) = A(x, f(x)) = y_0x^3 + \dots$$

Portanto, como as mudanças lineares de coordenadas são difeomorfismos, e multiplicação por  $-1$  apenas inverte a orientação do campo de vetores, resulta que temos o mesmo retrato de fase com a orientação contrária.

Em outras palavras, pelo Teorema 2.2.1, concluímos que  $(u_0, 0)$  é uma sela topológica com a curva estável em  $\mathbb{S}^1$ .

Como a família de campos de vetores que define (3.19) é cúbica, isto é,  $d = 3$ , segue que  $d - 1 = 2$ , de onde o ponto de equilíbrio na carta  $V_1$  tem a mesma estabilidade do estudado acima, ou seja, é uma sela com a curva estável em  $\mathbb{S}^1$ .

Na carta  $U_2$ , a equação (3.19) tem a forma

$$u' = -a_7u + v^2 - a_6u^2 - a_5u^3 + u^4 + u^2v^2, \quad (3.22)$$

$$v' = -v(a_7 + a_6u + a_5u^2 - uv^2 - u^3).$$

Segue que  $(0, 0)$  é ponto de equilíbrio. A matriz Jacobiana do campo de vetores  $H$  que define (3.22) no ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  é dada por

$$DH(0, 0) = \begin{pmatrix} -a_7 & 0 \\ 0 & -a_7 \end{pmatrix}.$$

Como  $a_7 < 0$ , os autovalores de  $DH(0, 0)$  são positivos, de onde a origem é um nó instável. Novamente, como a família de campos de vetores que define (3.19) é cúbica, isto é,  $d = 3$ , segue que  $d - 1 = 2$ , de onde o ponto de equilíbrio na carta  $V_2$  tem a mesma estabilidade do estudado acima, ou seja, é um nó instável.

Para finalizar, falta mostrar que a família de equações diferenciais (3.19) não tem órbita fechada e, em particular, não tem ciclo limite.

Suponha que  $\gamma$  é uma órbita fechada de período  $T$  de (3.19) em torno da origem.

Denotando por  $F$  o campo de vetores que define (3.19), e como

$$\exp\left(\int_0^T \operatorname{div}F(\gamma(t)) dt\right) < 1,$$

pois, a divergência de  $F$  em  $\gamma$  é negativa, segue do Teorema 2.1.8 que  $\gamma$  é uma órbita fechada hiperbólica estável.

Mas, isso é um absurdo, uma vez que o ponto de equilíbrio na origem é localmente assintoticamente estável.

Portanto, o sistema (3.19) é GAE.

Para o sistema (3.20), a demonstração é análoga.

Seja

$$x' = y, \quad y' = -x + x^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3,$$

sendo

$$a_4 < -1/4, \quad a_7 < 0 \quad \text{e} \quad a_6^2 - 3a_5a_7 < 0.$$

A família de equações diferenciais (3.20) tem quatro pontos de equilíbrio infinitos, sendo duas selas e dois nós instáveis. Para provarmos esta afirmação fazemos a Compactificação de Poincaré.

Na carta  $U_1$ , a equação (3.20) tem a forma

$$u' = a_7u^3 + a_6u^2 + a_5u + a_4 + v - v^2 - u^2v^2, \quad v' = -uv^3. \quad (3.23)$$

Fazendo  $v = 0$ , um ponto de equilíbrio de (3.23) tem a forma  $(u_0, 0)$ , sendo  $u_0$  uma raiz real do polinômio cúbico

$$\mathcal{C}_2(u) = a_7u^3 + a_6u^2 + a_5u + a_4.$$

Como

$$a_7 < 0, \quad a_4 < -1/4 \quad \text{e} \quad a_6^2 - 3a_5a_7 < 0,$$

segue

$$\mathcal{C}'_2(u) = 3a_7u^2 + 2a_6u + a_5 < 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Assim,  $\mathcal{C}_2$  é uma função monótona decrescente e sua única raiz real  $u_0$  é negativa. De fato, visto que  $a_7 < 0$ , temos

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \mathcal{C}_2(u) = \infty, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \mathcal{C}_2(u) = -\infty \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_2(0) = a_4 < -1/4.$$

A matriz Jacobiana do campo de vetores  $G$  que define (3.23) no ponto de equilíbrio  $(u_0, 0)$  é dada por

$$DG(u_0, 0) = \begin{pmatrix} 3a_7u_0^2 + 2a_6u_0 + a_5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}'_2(u_0) & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de  $DG(u_0, 0)$  são

$$\lambda_1 = \mathcal{C}'_2(u_0) < 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 0.$$

Deste modo,  $(u_0, 0)$  é semi-hiperbólico. Análogo ao caso anterior, temos o resultado pelo Teorema 2.2.1, assim, concluímos que  $(u_0, 0)$  é uma sela com a curva estável em  $\mathbb{S}^1$ .

Como a família de campos de vetores que define (3.20) é cúbica, isto é,  $d = 3$ , segue que  $d - 1 = 2$ , de onde o ponto de equilíbrio na carta  $V_1$  tem a mesma estabilidade do estudado acima, ou seja, é uma sela com a curva estável em  $\mathbb{S}^1$ .

Na carta  $U_2$ , a equação (3.20) tem a forma

$$u' = -a_7u - a_6u^2 - a_5u^3 - a_4u^4 - u^2v + v^2 + u^2v^2, \quad (3.24)$$

$$v' = -a_7v - a_6uv - a_5u^2v - a_4u^3v - u^2v^2 + uv^3.$$

Segue que  $(0, 0)$  é ponto de equilíbrio. A matriz Jacobiana do campo de vetores  $H$  que define (3.24) no ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  é dada por

$$DH(0, 0) = \begin{pmatrix} -a_7 & 0 \\ 0 & -a_7 \end{pmatrix}.$$

Como  $a_7 < 0$ , os autovalores de  $DH(0, 0)$  são positivos, de onde a origem é um nó instável. Novamente, como a família de campos de vetores que define (3.20) é cúbica, isto é,  $d = 3$ , segue que  $d - 1 = 2$ , de onde o ponto de equilíbrio na carta  $V_2$  tem a mesma estabilidade do estudado acima, ou seja, é um nó instável.

Para finalizar, falta mostrar que a família de equações diferenciais (3.20) não tem órbita fechada e, em particular, não tem ciclo limite.

Suponha que  $\gamma$  é uma órbita fechada de período  $T$  de (3.20) em torno da origem.

Denotando por  $F$  o campo de vetores que define (3.20), e como

$$\exp\left(\int_0^T \operatorname{div}F(\gamma(t)) dt\right) < 1,$$

pois, a divergência de  $F$  em  $\gamma$  é negativa, segue do Teorema 2.1.8 que  $\gamma$  é uma órbita fechada hiperbólica estável.

Mas, isso é um absurdo, uma vez que o ponto de equilíbrio na origem é localmente assintoticamente estável.

Portanto, o sistema (3.20) é GAE. ■

Importante enfatizar que os sistemas Kukles (3.19) e (3.20) não estão necessariamente na classe dos sistemas de Markus–Yamabe. Por exemplo, tomando  $a_5 = a_7 = -1$  e  $a_6 = 1$ , o sistema (3.19) tem a forma

$$x' = y, \quad y' = -x - x^3 - x^2y + xy^2 - y^3. \quad (3.25)$$

A matriz Jacobiana do campo de vetores  $F$  que define (3.25) é dada por

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 3x^2 - 2xy + y^2 & -x^2 + 2xy - 3y^2 \end{pmatrix},$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Se aplicarmos no ponto  $(1, -2)$ , obtemos

$$DF(1, -2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -17 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de  $DF(1, -2)$  são

$$\frac{1}{2} \left( -17 - \sqrt{305} \right) < 0, \quad \frac{1}{2} \left( -17 + \sqrt{305} \right) > 0.$$

Logo, não satisfaz as hipóteses de Markus–Yamabe, porém o sistema é globalmente assintoticamente estável.

### 3.3 Markus–Yamabe em dimensões maiores ou iguais que três

A Conjectura de Markus–Yamabe no plano tem uma resposta afirmativa como mostrado por Gutiérrez e outros. Porém, para  $\mathbb{R}^n$  com  $n \geq 3$  a resposta é negativa. Agora, o objetivo é apresentar contraexemplos explícitos, simples e polinomiais à Conjectura de Markus–Yamabe em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ . Além disso, investigar classes de campos de vetores em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , para os quais a conjectura é verdadeira.

O próximo teorema, retirado de [3] nos mostra a resposta negativa comentada no parágrafo anterior: uma função polinomial de  $n$  variáveis que satisfaz as hipóteses de Markus–Yamabe, mas para a qual a origem não é GAE.

**Teorema 3.3.1.** *Considere  $n \geq 3$ ,  $X = (x_1, \dots, x_n)$  e  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por*

$$F(X) = (-x_1 + x_3(d(X))^2, -x_2 - (d(X))^2, -x_3, \dots, -x_n),$$

sendo

$$d(X) = x_1 + x_2x_3.$$

As seguintes afirmações são verdadeiras:

- i)  $F$  satisfaz as hipóteses da Conjectura de Markus–Yamabe;
- ii) Existe uma solução não limitada (quando  $t \rightarrow \infty$ ) da EDO definida por  $F$ .

**Demonstração.** Primeiro, vamos mostrar que  $F$  satisfaz as condições de Markus–Yamabe. É imediato que  $F(0) = 0$ . Para cada  $X \in \mathbb{R}^n$ , a matriz Jacobiana de  $F$  tem a forma

$$DF(X) = \begin{pmatrix} A & B \\ O & -I \end{pmatrix},$$

sendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 + 2x_3(x_1 + x_2x_3) & 2x_3^2(x_1 + x_2x_3) \\ -2(x_1 + x_2x_3) & -1 - 2x_3(x_1 + x_2x_3) \end{pmatrix}_{2 \times 2},$$

$B$  uma matriz de ordem  $2 \times (n-2)$ ,  $O$  a matriz nula  $(n-2) \times 2$  e  $I$  a matriz identidade  $(n-2) \times (n-2)$ . Assim, para cada  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $DF(X)$  é triangular por blocos e, portanto, os seus autovalores são os autovalores dos blocos  $A$  e  $-I$ . Segue, imediatamente, que  $-1$  é autovalor de multiplicidade  $n-2$ , devido ao bloco  $-I$ . Por outro lado,

$$\text{tr}A = -2 \quad \text{e} \quad \det A = 1,$$

de onde o polinômio característico de  $A$  tem a forma

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1,$$

cujas raízes são  $-1$  de multiplicidade 2.



Em resumo, para cada  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $-1$  é autovalor de  $DF(X)$  com multiplicidade  $n$ . Assim,  $F$  satisfaz as hipóteses da Conjectura de Markus–Yamabe.

A solução do problema de valor inicial

$$X' = F(X), \quad X(0) = (18, -12, 1, 1, \dots, 1),$$

dada por

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi(t) = (18e^t, -12e^{2t}, e^{-t}, \dots, e^{-t}),$$

tem a seguinte propriedade:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t)\| = \infty,$$

terminando a prova do teorema. ■

Portanto, temos de fato, que a Conjectura de Markus–Yamabe é falsa em  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 3$ . Por outro lado, existem classes de campos de vetores em  $\mathbb{R}^n$  para as quais a conjectura é verdadeira. Por exemplo, os campos gradientes em  $\mathbb{R}^n$  que satisfazem as hipóteses de Markus–Yamabe são globalmente assintoticamente estáveis, como nos mostra o teorema a seguir retirado de [15] e sua correção em [16].

Antes ainda de enunciarmos e provarmos tal teorema, apresentamos junto com sua prova um lema, ferramenta necessária na demonstração do teorema.

**Lema 3.3.1.** *Suponha que  $F = \nabla f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , sendo  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , satisfaz as hipóteses da Conjectura de Markus–Yamabe. Então*

$$\left( \int_{s=0}^{s=1} D^2 f(sX) ds \right) X = \nabla f(X).$$

*Aqui,  $D^2 f(Z)$  representa a matriz Hessiana de  $f$  aplicada em um ponto  $Z \in \mathbb{R}^n$ .*

**Demonstração.** Considere a mudança de variáveis  $Y = sX$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} \left( \int_{s=0}^{s=1} D^2 f(sX) ds \right) X &= \int_{s=0}^{s=1} D^2 f(sX) X ds = \int_{Y=0}^{Y=X} D^2 f(Y) dY \\ &= \int_{Y=0}^{Y=X} D \nabla f(Y) dY = \nabla f(X) - \nabla f(0) = \nabla f(X). \end{aligned}$$

■

Tendo este lema em mãos, podemos seguir para o próximo resultado.

**Teorema 3.3.2** (Mañosas, Peralta–Salas). *Suponha que  $F = \nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sendo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , satisfaz as hipóteses da Conjectura de Markus–Yamabe. Então, a origem é globalmente assintoticamente estável.*

**Demonstração.** Seja  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$V(X) = \frac{1}{2} \|X\|^2 = \frac{1}{2} (x_1^2 + \cdots + x_n^2). \quad (3.26)$$

Temos que esta função é uma função de Lyapunov estrita própria para o campo de vetores  $F = \nabla f$ , isto é:

- $V(0) = 0$  e  $V(X) > 0$ , para todo  $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ;
- $\dot{V}(X) < 0$ , para todo  $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ;
- $\lim_{\|X\| \rightarrow \infty} V(X) = \infty$ .

O primeiro e o terceiro itens são imediatos, portanto, nos resta apenas o segundo. Usando o Lema 3.3.1, temos

$$\dot{V}(X) = \nabla V(X) \cdot \nabla f(X) = X \cdot \nabla f(X) = X \cdot \left( \int_{s=0}^{s=1} D^2 f(sX) ds \right) X < 0,$$

para todo  $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , visto que a matriz na expressão integral é negativa definida. De fato, por hipótese, os autovalores da matriz simétrica  $D^2 f(Z) = \text{Hess} f(Z)$ ,  $Z \in \mathbb{R}^n$ , são negativos. ■

# Conclusões

A Conjectura de Markus–Yamabe é um excelente ponto de partida para o estudo da estabilidade assintótica global. No plano ela tem uma resposta afirmativa. No entanto, as suas hipóteses fornecem condições suficientes, mas não necessárias para que um sistema seja GAE. Ao longo do texto, enfraquecemos as hipóteses desta conjectura e apresentamos classes de campos de vetores em  $\mathbb{R}^2$  que são GAE.

Utilizamos ferramentas da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais para fazermos análises de campos de vetores que são GAE. Como ainda não temos na literatura um teorema, que forneça as condições suficientes e necessárias para a estabilidade assintótica global, a solução dependerá dos clássicos teoremas desta área.

Na última parte do trabalho, mostramos que a Conjectura de Markus–Yamabe é falsa em  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 3$ . No entanto, mostramos também, que para campos gradientes que satisfazem as hipóteses da conjectura, a resposta é afirmativa.

Apresentamos no texto alguns sistemas GAE. Como exemplo, temos os sistemas Kulkles que inicialmente teve uma proposta de estudo diferente da estabilidade global. Porém, acrescentando algumas hipóteses, obteve uma resposta positiva. Assim, quais outros sistemas conhecidos, ou não, da literatura podemos analisar na esperança que seja GAE?

Tendo uma maior variedade de diferentes classes de campos de vetores globalmente assintoticamente estáveis, seria possível estabelecer uma relação entre elas e, além disso, esta relação ser condição suficiente e necessária para que o sistema seja GAE?

As duas últimas perguntas foram os dois caminhos que esta dissertação seguiu e, como estamos longe, ou não, da resposta, servem como motivação para futuros estudos.

# Referências Bibliográficas

- [1] L. Q. ARAKAKI, *Teoria dos centros e ciclicidade de pontos de Hopf para campos de vetores planares e tridimensionais*, Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista (IBILCE), (2019).
- [2] M. CHAMBERLAND, J. LLIBRE, G. SWIRSZCZ, *Weakened Markus–Yamabe conditions for 2-dimensional global asymptotic stability*, *Nonlinear Analysis*, **59** (2004), 951–958.
- [3] A. CIMA, A. VAN DEN ESSEN, A. GASULL, E. HUBBERS, F. MAÑOSAS, *A polynomial counterexample to the Markus–Yamabe conjecture*, *Advances in Mathematics*, **131** (1997), 453–457.
- [4] B. COLL, A. GASULL, J. LLIBRE, *Quadratic systems with a unique finite rest point*, *Publicacions Matemàtiques*, **32** (1988), 199–259.
- [5] F. S. DIAS, L. F. MELLO, *Globally asymptotically stable equilibrium points in Kukles systems*, *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, **19** (2020), 1–7.
- [6] F. DUMORTIER, J. LLIBRE, J. C. ARTÉS, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Universitext, Springer–Verlag, New York, 2006.
- [7] A. FERNANDES, C. GUTIÉRREZ, R. RABANAL, *Global asymptotic stability for differentiable vector fields of  $\mathbb{R}^2$* , *Journal Differential Equations*, **206** (2004), 470–482.
- [8] R. FEßLER, *A proof of the two–dimensional Markus–Yamabe stability conjecture and a generalization*, *Annales Polonici Mathematici*, **62** (1995), 45–74.

- [9] A. GASULL, J. LLIBRE, J. SOTOMAYOR, *Global asymptotic stability of differential equations in the plane*, Journal Differential Equations, **91** (1991), 327–335.
- [10] A. A. GLUTSYUK, *The asymptotic stability of the linearization of a vector field on the plane with a singular point implies global stability*, Funktsional’nyi Analiz i ego Prilozheniya, **29** (1995), 17–30; translation in Functional Analysis and Its Applications, **29** (1995), 238–247.
- [11] C. GUTIÉRREZ, *A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture*, Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse Non Linéaire, **12** (1995), 627–671.
- [12] M. HIRSCH, S. SMALE, R. DEVANEY, *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, 3rd edition, Elsevier Academic Press, 2013.
- [13] J. H. HUBBARD, B. H. WEST, *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach. Higher-Dimensional Systems*, Texts in Applied Mathematics 18, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [14] YU. ILYASHENKO, *Finiteness Theorems For Limit Cycles*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.
- [15] F. MAÑOSAS, D. PERALTA-SALAS, *Note on the Markus–Yamabe conjecture for gradient dynamical systems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **322** (2006), 580–586.
- [16] F. MAÑOSAS, D. PERALTA-SALAS, *Corrigendum to “Note on the Markus–Yamabe conjecture for gradient dynamical systems” [Journal of Mathematical Analysis and Applications **322** (2006) 580–586]*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **342** (2008), 1492.
- [17] L. MARKUS, H. YAMABE, *Global stability criteria for differential systems*, Osaka Journal of Mathematics, **12** (1960), 305–317.
- [18] C. OLECH, *On the global stability of an autonomous system on the plane*, Contributions to Differential Equations, **1** (1963), 389–400.

- [19] H. POINCARÉ, Œuvres, Paris: Gauthier–Villars, **1** (1928).
- [20] J. SOTOMAYOR, Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Projetos Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.