

TESE

— EFEI —

25



INFLUÊNCIA DE UM PLASMA NAS
CARACTERÍSTICAS DE IRRADIAÇÃO
DE UM DIPOLO ELÉTRICO

TESE

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

EFEI

RINALDO QUEIROZ DE AQUINO

FELIPE RINALDO QUEIRÓZ DE AQUINO

INFLUÊNCIA DE UM PLASMA NAS CARACTERÍSTICAS DE IRRADIAÇÃO
DE UM DIPOLO ELÉTRICO



Tese apresentada à Comissão de Pós-Graduação da Escola Federal de Engenharia de Itajubá, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "MESTRE EM CIÊNCIAS".

Itajubá

Estado de Minas Gerais-Brasil

1974

537.87:533.9 (043.2)

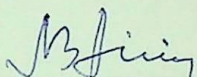
A657i

25

II

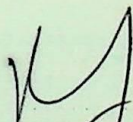
Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de "Mestre em Ciências" e aprovada em sua forma 62nal pelo Orientador e pela Comissão de Pós-Graduação.

Orientador:

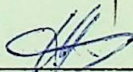


Prof. Dr. Aroldo Borges Diniz
Orientador

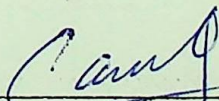
Comissão de Pós-Graduação:



Prof. Fernando José Costanti



Prof. Czesław Lubomiro Barzack



Prof. Amadeu Casal Caminha
Coordenador dos Cursos de Pós-Graduação

S U M Á R I O

Neste trabalho, apresentou-se um estudo sobre a irradiação de ondas eletromagnéticas, por um dipolo elétrico, em um plasma, sob a ação de um campo magnetostático, utilizando-se a Função Diádica de Green.

Desenvolveu-se inicialmente alguns tópicos da Física do Plasma e, determinou-se seus parâmetros constitutivos.

Discutiu-se a propagação de Ondas Transversais em um plasma homogêneo e isotrópico, e a propagação de onda plana, em um plasma anisotrópico, devido a presença de um campo magnetostático.

A irradiação de um dipolo elétrico em um plasma anisotrópico foi estudada e, determinou-se a solução geral para os campos elétrico e magnético, sendo vários casos particulares analisados. Entre eles, discutiu-se o problema, quando se despreza o movimento dos íons do plasma, quando a frequência de operação no dipolo é alta, baixa ou muito baixa, tal que o movimento dos íons não possa ser desprezado e, quando o campo magnetostático do plasma é infinito.

Finalmente, analisou-se a irradiação do dipolo, quando o efeito colisões dos elétrons do plasma é considerado, sendo o campo magnetostático infinito.

Apresentou-se os diagramas de irradiação quando as colisões dos elétrons são desprezados e, quando as mesmas são consideradas.

Comparou-se os dois casos e mostrou-se a influência das colisões nas características de irradiação do dipolo elétrico.

A B S T R A C T

This work presents a study about electromagnetic waves irradiation, caused by an electric dipole, in a plasma, under the action of a magnetostatic field using Green's Dyadic Function.

Firstly, some topics on Physics of Plasma were developed and its constitutive parameters were determined.

The propagation of Transversal Waves in an isotropical homogeneous plasma, as well as Plain Wave Propagation in an anisotropic plasma, due to the presence of a magnetostatic field were discussed.

The electric dipole irradiation in an anisotropic plasma was studied, and the general solution for magnetic and electric field was determined, several particular cases being analysed. Among, them, we discussed the problem when the plasma ion movement is neglected, when the dipole operation frequency is high, low or very low, so that ion movement cannot be neglected, and when the plasma magnetostatic field is infinite.

Finally, we analysed the dipole irradiation when the collision effect of plasma electrons is considered, the with an infinite magnetostatic field.

Diagrams of irradiation when collision of electrons are neglected or not were presented.

Comparision of these two cases were made, and the collision influence over irradiation characteristics of electric dipole was presented.

AGRADECIMENTOS

Desejo agradecer ao prof. Dr. Aroldo Borges Diniz, pelo seu interesse e participação neste trabalho, a cuja orientação e incentivo devo o sucesso.

Agradeço, outrossim a todos que, de alguma forma, tenham contribuído nesta pesquisa.

A meus pais

À minha esposa Maria Zila

Ao nosso filho Mateus

ÍNDICE DA MATÉRIA

	pag.
1. INTRODUÇÃO.....	1.1
2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS.....	2.1
2.1. Equações de Maxwell.....	2.1
2.2. O Vetor Potencial Magnético.....	2.2
2.3. O Vetor de Poynting e Fluxo de Potência.....	2.4
2.4. Ondas Eletromagnéticas.....	2.4
2.5. O Dipolo Elétrico Curto. Características de Irradiação no Espaço Livre.....	2.7
2.6. Resistência de Irradiação.....	2.11
2.7. Intensidade de Irradiação.....	2.11
2.8. Diretividade.....	2.12
2.9. Irradiação de um Dipolo Elétrico Longo com Distribuição Senoidal de Corrente.....	2.13
2.10. Irradiação de Fontes Monocromáticas em Regiões limitadas Analisadas pela Função Diádica de Green	2.18
2.11. Função Diádica de Green.....	2.18
2.12. Relações Fundamentais para um Meio Anisotrópico..	2.22
3. O PLASMA.....	3.1
3.1. Descrição Alternativa de Meios Contínuos.....	3.1
3.2. Parâmetros Constitutivos de um Plasma.....	3.7
4. PROPAGAÇÃO DE ONDAS TRANSVERSAIS EM UM PLASMA HOMOGENEO ISOTRÓPICO.....	4.1
5. TENSOR DIELÉTRICO DE UM PLASMA EM UM CAMPO MAGNETOSTÁTICO.....	5.1
6. ONDA PLANA EM UM PLASMA SOB UM CAMPO MAGNETOSTÁTICO...	6.1
7. IRRADIAÇÃO DE UM DIPOLO ELÉTRICO EM UM PLASMA ANISOTRÓPICO.....	7.1

7.1 - Solução Geral para o Campo de um Dipolo Elétrico no Plasma Anisotrópico	7.1
7.2 - Campo do Dipolo quando o Movimento dos Ions é desprezado	7.14
7.3 - Campo do Dipolo quando a Frequência de Operação é Alta	7.18
7.4 - Campo do Dipolo quando o Campo Magnetostático no Plasma é infinito	7.19
7.5 - Campo do Dipolo quando a Frequência de Operação é Baixa	7.24
7.6 - Campo de Dipolo quando a Frequência de Operação é muito Baixa	7.29
8 - INFLUÊNCIA DAS COLISÕES DOS ELETRONS DO PLASMA NA IRRADIAÇÃO DO DIPOLO	8.1
9 - RESUMO E CONCLUSÕES	9.1
APÊNDICE	
A - Diagramas de irradiação do dipolo para as direções x e z para diversos valores das relações w_c/w e w_p/w	A.1
B - Programação correspondente à intensidade de irradiação do dipolo, para as direções x e z	A.25
C - Diagrama de Blocos correspondente à intensidade de irradiação do dipolo nas direções x e z	A.28
D - Referências Bibliográficas	A.31

LISTA DE FIGURAS

Fig.	pag.
2.1 - Dipolo curto.....	2.8
2.2 - Dipolo elétrico longo com uma distribuição senoidal de corrente.....	2.14
6.1 - Direção arbitrária \hat{n} de propagação da onda em um plasma sob um campo magnetostático \vec{B}_0	6.2
6.2 - Vetores \vec{K} , \vec{E} , \vec{D} e \vec{S} mostrados no plano do papel e \vec{H} perpendicular ao mesmo. \vec{D} e \vec{H} são vetores perpendiculares a \vec{K} . \vec{S} é perpendicular a \vec{E} e \vec{H} . \vec{S} não é, em geral, paralelo a \vec{K}	6.6
6.3 - Polarização elíptica das ondas ordinária e extraordinária caminhando perpendicularmente ao plano do papel, para dentro.....	6.14
7.1 - Ondas normais N_1 e N_2 para uma onda ordinária e uma onda extraordinária.....	7.7
7.2 - Sistema de Coordenadas obtido por rotação do sistema esférico sobre \vec{e}_θ . A frente de ondas é perpendicular à página.....	7.7
7.3 - Diagramas de irradiação no plano x-z, para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{B}_0) com $w_p/w < 1$ e um campo magnetostático infinito.....	7.22
7.4 - Diagramas de irradiação no plano x-z para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{B}_0) com $w_p/w > 1$, e um campo magnetostático infinito.....	7.22
7.5 - Diagramas de irradiação no plano x-z para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{B}_0) com $w_p/w < 1$ e um campo magnetostático infinito.....	7.26

Fig.	pag.
7.6 - Diagramas de irradiação no plano x-z para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{B}_0) com $w_p/w > 1$ e um campo magnetostático infinito.....	7.26 7.26
8.1 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{B}_0) com a relação $w_p/w = 0,5$ e w_c/w tomando os valores 0,5-0,8-0,9 e 1,4.....	8.6 8.6
8.2 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{B}_0) com a relação $w_p/w = 0,6$ e w_c/w tomando os valores 0,5-0,8-1,0 e 1,4.....	8.6 8.6
8.3 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{B}_0) com a relação $w_p/w = 0,7$ e w_c/w tomando os valores 0,5-0,7-0,9-1,1-1,3.....	8.7 8.7
8.4 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{B}_0) para $w_p/w = 0,8$ e w_c/w variando de 0,5 a 1,2.....	8.8 8.8
8.5 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{B}_0) com $w_p/w = 0,5$ e w_c/w com os valores 0,5-0,7-0,9 e 1,3.....	8.9 8.9
8.6 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{B}_0) com $w_p/w = 0,6$ e w_c/w com os valores 0,5-0,7-0,9-1,2 e 1,3.....	8.9 8.9
8.7 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{B}_0) com $w_p/w = 0,8$ e w_c/w com os valores 0,5-0,9 e 1,4.....	8.10 8.10
8.8 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{B}_0) com $w_p/w = 0,7$ e w_c/w com os valores 0,5-0,7-0,9 e 1,3.....	8.7 8.7
A.1 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{B}_0) com $w_p/w = 0,8$ e w_c/w com os valores 0,6-0,7-0,9-1,1-1,3 e 1,4.....	A.1 A.1

- A.2 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{B}_0) com $w_p/w=0,9$ e w_c/w com os valores 0,5-0,6-0,7-0,8-0,9-1,0-1,2 e 1,3..... A.2
- A.3 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{B}_0) com $w_p/w=1,0$ e w_c/w com os valores 0,5-0,6-0,7-0,8-0,9-1,1-1,2 e 1,3.... A.3
- A.4 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{B}_0) com $w_p/w=1,1$ e w_c/w com os valores 0,5-0,6-0,7-0,8-1,0-1,1-1,2-1,3 e 1,4... A.4
- A.5 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{B}_0) sendo $w_p/w=1,2$ e w_c/w tomando os valores 0,5-0,6-0,7-0,8-0,9-1,1-1,2 e 1,3..... A.5
- A.6 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{B}_0) com $w_p/w=1,3$ e w_c/w com os valores 0,5-0,6-0,7-0,8-0,9-1,0-1,1-1,2-1,3 e 1,4 A.7
- A.7 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{B}_0) com $w_p/w=1,4$ e w_c/w tomando os valores 0,5-0,7-0,8-0,9-1,1-1,2-1,3..... A.9
- A.8 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{B}_0) com $w_p/w=0,8$ e w_c/w com os valores 0,6-0,7-1,0-1,1-1,2 e 1,3..... A.11
- A.9 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{B}_0) com $w_p/w=0,9$ e w_c/w com os valores 0,5-0,7-0,9-1,1-1,2-1,3 e 1,4..... A.12
- A.10 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{B}_0) com $w_p/w=1,0$ e w_c/w com os valores 0,5-0,6-0,7-0,8-0,9-1,1 e 1,3..... A.13

Fig.

Pág.

A.11- Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{B}_0) com $w_p/w=1,1$ e w_c/w com os valores 0,5-0,6-0,7-0,9-1,0-1,1 e 1,3..... A.15

A.12- Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{B}_0) com $w_p/w=1,2$ e w_c/w com os valores 0,5-0,7-0,8-0,9-1,0-1,1-1,2-1,4..... A.17

A.13--Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{B}_0) com $w_p/w=1,3$ e w_c/w com os valores 0,5-0,7-0,9-1,0-1,1-1,2-1,3 e 1,4..... A.20

A.14- Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{B}_0) com $w_p/w=1,4$ e w_c/w com os valores 0,5-0,7-0,9-1,0-1,1-1,2 e 1,4..... A.23

LISTA DE SÍMBOLOS

\bar{a}, \bar{A}	Vetor Potencial Magnético instantâneo e complexo.	com
B.....	Área de feixe.	
\bar{b}, \bar{B}	Densidade de fluxo Magnético instantâneo e complexo.	com
\bar{E}_0	Densidade de fluxo magnético constante.	
c	Velocidade da luz no meio.	
c_0	Velocidade da luz no vácuo.	
$C=0,5772$.	Constante de Euler.	
C_1	Cosseno integral.	
\bar{d}, \bar{D}	Densidade de fluxo elétrico instantâneo e complexo.	com
$D(\theta, \phi)$...	Função diretividade na direção (θ, ϕ) .	
D	Diretividade da antena. Valor máximo de $D(\theta, \phi)$.	
\bar{e}, \bar{E}	Vetor campo elétrico instantâneo e complexo.	
\bar{E}_0	Vetor campo elétrico constante no tempo.	
\bar{E}_0^*	Cônjugado de \bar{E}_0	
\bar{E}', \bar{E}''	Campo elétrico de uma onda circularmente polarizada à esquerda e à direita, respectivamente.	pol
$\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$	Vetores unitários nas direções x, y e z respectivamente.	respec
$\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\phi$	Vetores unitários nas direções r, θ e ϕ respectivamente.	respec
e.....	Base do logaritmo neperiano.	
f.....	Frequência.	
$G(\bar{r}, \bar{r}')$	Função de Green escalar..	
\bar{G}	Vetor ganho de momento devido às colisões.	
\bar{h}, \bar{H}	Vetor campo magnético instantâneo e complexo.	

\vec{H}_0	Vetor magnético constante no tempo.
\vec{H}_0^*	Conjugado de \vec{H}_0 .
\mathbf{I}	Matriz unidade.
I_0	Valor máximo da corrente no dipolo,
\vec{J}, \vec{J}	Densidade de corrente elétrica instantânea e complexa.
\vec{J}_m, \vec{J}_m	Densidade de corrente magnética instantânea e complexa.
\vec{K}	Vetor de propagação da onda.
K	Constante de propagação da onda.
K'_0, K''_0	Constante de propagação das ondas ordinárias e extraordinária, respectivamente.
l	Comprimento do dipolo elétrico.
\vec{M}	Multiplo magnético.
m	Massa do eletrón
\vec{m}, \vec{M}	Vetor de Magnetização, instantâneo e complexo.
m_i	Massa do ion.
\hat{n}	Vetor unitário na direção de propagação.
$n_m^2 (m=1,2)$.	Índice de refração para as ondas ordinária e extraordinária, respectivamente.
\vec{N}_1, \vec{N}_2	Vetores unitários nas direções normais às ondas ordinária e extraordinária respectivamente.
\vec{N}_m	Vetor unitário perpendicular à frente de ondas.
\vec{p}	Momento de dipolo elétrico.
\vec{P}	Multipolo elétrico.
\vec{p}, \vec{P}	Vetor de polarização instantâneo e complexo.
P_x, P_y, P_z	Componentes retangulares do momento de dipolo elétrico.
\vec{Q}	Multipolo elétrico.
q	Carga do eletrón.
q_1	Carga do ion.

R_I	Resistência de irradiação
\vec{s}, \bar{s}	Vetor de Poynting instantâneo e complexo.
$\langle \bar{s} \rangle, \langle \bar{S} \rangle$	Valor médio do vetor de Poynting instantâneo e complexo.
S_i	Seno integral.
\hat{S}	Diádica tensão.
\hat{u}	Diádica unitária
$U(\theta, \phi)$.	Intensidade de irradiação na direção (θ, ϕ)
U_m	Intensidade de irradiação máxima.
U_o	Intensidade de irradiação média.
\bar{v}	Velocidade dos elétrons do plasma.
v	Volume de integração.
v_f	Velocidade de fase.
v_{en}	Velocidade de transporte de energia.
v_g	Velocidade de grupo.
\bar{v}_i	Velocidade de ions.
x_e	Susceptibilidade elétrica.
x_m	Susceptibilidade magnética.
\hat{x}_e, \hat{x}_m ..	Tensor susceptibilidade elétrica e magnética.
\bar{w}	Fluxo médio total de energia.
w	Frequência angular.
w_p	Frequência angular do plasma.
w_c	Frequência angular de colisões dos elétrons do plasma.
w_g	Frequência angular de giro dos eletrons do plasma.
w_{pi}	Frequência angular dos ions do plasma.
w_{g1}	Frequência angular de giro dos ions do plasma.
\bar{w}	Densidade média de energia.
\bar{w}_1	Potência média de alimentação da antena.
Z	Impedância da onda.

α ::.....	Constante de atenuação.
β	Constante de fase.
$\hat{\Gamma} (\vec{r}, \vec{r}')$	Função diádica de Green.
$\bar{\Gamma} (\vec{n}, \vec{r})$..	Transformada de Fourier de $\hat{\Gamma} (\vec{r}, \vec{r}')$.
$\delta (\vec{r}-\vec{r}')$..	Função Delta de Dirac.
ϵ_0	Permissividade elétrica do vácuo.
ϵ	Permissividade elétrica do meio.
$\hat{\epsilon}$	Tensor permissividade elétrica do plasma.
η	Impedância intrínseca.
λ	Comprimento de onda.
μ_0	Permeabilidade magnética do vácuo.
μ	Permeabilidade magnética do meio.
$\hat{\mu}$	Tensor permeabilidade magnética.
$\xi_m (m=1, 2)$	Ângulo entre as ondas normais ao campo magnético, para as ondas ordinária e extraordinária respectivamente.
\vec{e}_m	Vetor unitário no plano tangente à frente de ondas.
\vec{F}	Vetor potencial de Hertz.
ρ_{σ}	Densidade volumétrica de cargas.
σ	Condutividade elétrica.
τ	Rotação de Faraday.
∇	Operador nabla.
$\nabla_w f$	Gradiente em relação a w .

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

As características de irradiação dos tipos mais comuns de irradiadores de ondas eletromagnéticas (dipolo de meia onda, dipolo magnético, irradiador cilíndrico, etc.) no espaço livre já são conhecidas. Porém, em outros meios, particularmente anisotrópicos, as características de irradiação destes irradiadores devem se modificar, e ainda não são totalmente conhecidos.

O meio anisotrópico é aquele em que suas propriedades básicas (permissividade elétrica, permeabilidade magnética, etc.) dependem da direção considerada, mudando de uma para outra direção tomada no meio.

Desta forma, a velocidade de propagação de uma onda qualquer, nesse meio, não é a mesma em todas as direções. A polarização do meio, sob a ação de campos nele aplicado, não é paralela aos mesmos, e não é independente da direção desses campos. Por exemplo, um gás com um gradiente de temperatura, um sólido sob certas tensões ou um cristal grande, podem ter propriedades elásticas diferentes em direções diferentes, ocasionando uma velocidade de propagação para cada direção. Estes são meios anisotrópicos. Eles podem ser divididos em duas classes, dependendo da polarização das ondas que nele se propagam, linear ou circular. No caso da polarização ser circular, este recebe o nome de girotrópico. Por exemplo, um plasma sob a ação de um campo magnético constante, como acontece na ionosfera, é um meio anisotrópico.

O plasma é um gás ionizado na qual a concentração dos ions e elétrons pode ser considerada constante. O termo plasma foi empregado por Tonks e Longmuir¹, para gases ionizados no qual a densidade de elétrons e ions são substancialmente iguais.

Há vários anos, considerável atenção tem sido voltada para a teoria das propagações de ondas eletromagnéticas em um plasma. Em grande escala, o interesse por esta teoria tem sido estimulado, principalmente por suas aplicações nos problemas, de telecomunicações, rádio astronomia, e fusão termonuclear controlada. Por exemplo, esta teoria tem sido empregada para explicar fenômenos como a propagação de ondas de rádio na ionosfera², a propagação de ondas de rádio cósmico na atmosfera solar, na nebulosa, no espaço interplanetário, a reflexão de ondas de rádio dos rastros dos meteoritos, e dos gases ionizados, que envolvem uma espaçonave quando ela penetra na atmosfera, e a propagação de microondas em plasma de laboratório.

Nessas aplicações, o meio através do qual a onda eletromagnética deve se propagar é, formalmente o mesmo: um plasma, ou mais detalhadamente, um gás ionizado microscopicamente neutro, consistindo principalmente de elétrons livres, ions livres e átomos ou moléculas neutras. De uma aplicação para outra, a natureza do problema não muda essencialmente, a despeito da grande variação que o meio deve ter, como seu grau de ionização e sua temperatura.

Devido, então, a estas importantes aplicações, os irradiadores eletromagnéticos, no plasma, tem sido estudados com grande interesse. Muito se sabe sobre a propagação das

ondas eletromagnéticas em um plasma isotrópico, onde as características do meio são as mesmas em todas as direções. Nos meios anisotrópicos, entretanto, e particularmente no plasma anisotrópico, as características de irradiação, propagação e absorção das ondas eletromagnéticas, não são totalmente conhecidas. Essas propriedades eletromagnéticas, nestes meios, tem despertado como já dissemos, grande interesse há vários anos.

As primeiras investigações nos meios anisotrópicos homogêneos foram consideradas com as propriedades de ondas planas em cristais, na qual a característica do meio é dada por uma permissividade, que é um tensor simétrico. Em 1940, Ginsburg³ considerou o caso especial da irradiação de uma carga pontual movendo em um cristal inativo, em 1953 Komolerskiĭ⁹ considerou a mesma irradiação em um cristal giratório. Para tais estudos, ambos empregaram o método de Hamilton, expandindo, o campo da onda, em uma região, em série de Fourier espacial de funções harmônicas e $e^{(i\vec{k}_\lambda \vec{r})}$. Os coeficientes da série variando com o tempo, são determinados, no caso geral, por um sistema de equações diferenciais lineares não homogêneas. No caso particular, de um campo de irradiação monocromática, o sistema de equações diferenciais se reduz a um sistema de equações algébricas lineares, e o problema torna-se consideravelmente mais fácil. Em princípio, ele pode ser, então, resolvido para um meio arbitrariamente anisotrópico e uma distribuição arbitrária de fontes de campos, porém, este problema apresenta uma solução difícil em virtude dos harmônicos espaciais e $e^{(i\vec{k}_\lambda \vec{r})}$, sendo desta forma não empregado nos estudos mais recentes.

Em 1957 o problema da irradiação de uma dada

distribuição de correntes externas, em um meio anisotrópico homogêneo foi estudado por F.V.Bunkin¹⁰, até então sem ter recebido uma solução geral. Bunkin, ao invés de fazer uso da série de Fourier espacial, para determinar o campo produzido por uma dada distribuição de correntes, fez uso do vetor potencial retardado de Hertz, encontrando uma solução mais fácil para o problema, ilustrando o método para um meio qualquer, magneticamente ativado. Em 1962 Hans H.Kuell¹¹ estudou a irradiação monocromática de um dipolo elétrico em um plasma infinito e anisotrópico devido a presença de um campo magnético constante, além de fazer uma breve consideração sobre o caso de um cristal uniaxial. O plasma é considerado ter densidade, temperatura e grau de ionização suficientemente baixos, tal que velocidades e colisões térmicas possam ser desprezadas.

Além disso, é assumido que o campo elétrico no meio é bastante fraco para o plasma ser linear, tal que suas propriedades são caracterizadas por um tensor permissividade. Usando a solução matemática para a irradiação de um dipolo elétrico em um meio linear homogêneo, giroelétrico, dada por Bunkin, Kuell estuda mais detalhadamente o mesmo problema para o plasma anisotrópico magneticamente ativado.

As características gerais do campo elétrico são primeiramente examinadas e, então, os casos particulares de baixa frequência, alta frequência, campo magnetostático infinito são investigados em detalhes. Conclui-se que, em geral, várias ondas existem na região de irradiação, propagando-se em diferentes direções com diferentes índices de refração. Para certos tipos de plasma, de frequências de giro e frequên

cia de operação da onda, o campo torna-se muito grande em certas direções comparadas com outras, produzindo grande diretividade. Em geral a expressão para o campo é bastante complexa, embora, vários casos especiais são tratados, os quais tem soluções simples.

Para grande frequência de operação é encontrado que o modelo de irradiação é idêntico ao caso isotrópico, embora uma rotação de Faraday seja aplicada. Na solução dada para baixa e muito baixa frequências de operação, evidencia-se que a irradiação é confinada a um cone com um semi-ângulo, de $19,5^\circ$, isto é, as ondas são guiadas naturalmente pelo campo magnetostático. Para o caso de um forte campo magnetostático é mostrado que somente duas ondas existem e que o fluxo de potência médio é puramente radial.

O objetivo do nosso trabalho é colher todas estas informações citadas até aqui e, estudar o caso em que se considera, no plasma anisotrópico, sob ação de um campo magnetostático infinito, as colisões nele existentes, que não são consideradas até então.

Inicialmente, apresentamos a teoria eletromagnética básica para estudarmos a irradiação eletromagnética. Em seguida, estudaremos o plasma anisotrópico com seus parâmetros constitutivos. Numa terceira etapa veremos a irradiação de um dipolo elétrico no plasma sem considerar o efeito colisões e depois considerando-as.

Finalmente, comparando estes dois casos, apresenta-se as conclusões finais.

CAPÍTULO 2

CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Neste capítulo apresentamos um resumo da teoria eletromagnética básica, que será usada em um tratamento da irradiação de ondas eletromagnéticas.

2.1. EQUAÇÕES DE MAXWELL

As equações de Maxwell, juntamente com a equação de Lorentz,

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{e} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.1)$$

constituem a base de toda a teoria eletromagnética. Podemos resumir as equações de Maxwell na forma diferencial como segue:

a) Leis de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{d} = \rho \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

b) Lei de Ampère e Hipótese de Maxwell

$$\nabla \times \vec{h} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{d}}{\partial t} \quad (2.4)$$

c) Lei de Faraday

$$\nabla \times \vec{e} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.5)$$

No caso em que as quantidades variam sinusoidalmente no tempo, na forma:

$$\bar{e} = \text{Re} \left[\bar{E} e^{i\omega t} \right] \quad (2.6)$$

as equações de Maxwell são escritos como:

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + i\omega \bar{D} \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \bar{E} = -i\omega \bar{B} \quad (2.10)$$

2.2. VETOR POTENCIAL MAGNÉTICO

A partir da Lei de Biot-Sarvat pode-se mostrar que:

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{a} \quad (2.11)$$

onde:

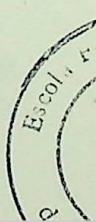
$$\bar{a} = \mu \int_l \frac{i d\mathbf{l}}{4 \pi r} \quad (2.12)$$

no caso de uma distribuição linear de corrente,

$$\bar{a} = \mu \int_V \frac{\bar{J} dv}{4 \pi r} \quad (2.13)$$

no caso de uma distribuição volumétrica de corrente.

A quantidade vetorial \bar{a} é chamada de vetor potencial magnético, sendo muito útil para se determinar o campo magnético em um ponto do espaço, devido a uma dada distribuição de corrente.



No caso dos campos elétrico e magnético variarem senoidalmente no tempo, teremos para o vetor potencial magnético, em um ponto qualquer do espaço, a expressão:

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\bar{J} e^{-ikr}}{r} dv \quad (2.14)$$

onde V é o volume onde a densidade de corrente existe.

Uma função potencial comumente usada em teoria eletromagnética é o vetor potencial de Hertz \bar{II} definido de tal modo que os campos elétricos e magnéticos são derivados dele como se segue, para um meio homogêneo com constantes μ e ϵ .

$$\bar{H} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \bar{II}) \quad (2.15)$$

$$\bar{E} = \nabla (\nabla \cdot \bar{II}) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{II}}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

onde,

$$\nabla^2 \bar{II} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{II}}{\partial t^2} = - \frac{\bar{p}}{\epsilon} \quad (2.17)$$

o \bar{p} o vetor polarização associado às fontes é definido como

$$\bar{J} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} \quad \rho = - \nabla \cdot \bar{p} \quad (2.18)$$

O vetor de Hertz \bar{II} é uma função vetorial unívoca cuja taxa de variação no tempo é proporcional ao potencial \bar{a} . Assim, num meio com constantes μ e ϵ , o vetor de Hertz satisfaz a:

$$\bar{a} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{II}}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

2.3. VETOR DE POYNTING E FLUXO DE POTÊNCIA

Quando ondas eletromagnéticas se propagam no espaço de uma fonte para pontos distantes, há transferência de energia da fonte para estes pontos. A quantidade de energia transferida depende da amplitude, fase e distribuição dos campos elétricos e magnéticos da onda eletromagnética.

Sabemos que o vetor de Poynting

$$\vec{s} = \vec{e} \times \vec{h} \quad (2.20)$$

em qualquer ponto, é uma medida do fluxo de potência por unidade de área neste ponto. A direção do fluxo é então perpendicular a \vec{e} e \vec{h} é tem a direção do vetor \vec{s} .

O valor instantâneo do vetor de Poynting é dado por:

$$\vec{s} = \vec{e} \times \vec{h} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\vec{E} \times \vec{H}^* + \vec{E} e^{i\omega t} \times \vec{H} e^{i\omega t} \right] \quad (2.21)$$

e para o vetor de Poynting complexo temos:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \left[\vec{E} \times \vec{H}^* \right] \quad (2.22)$$

Para o valor médio do vetor de Poynting instantâneo tem-se :

$$\langle \vec{s} \rangle = \operatorname{Re}(\vec{S}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\vec{E} \times \vec{H}^* \right] \quad (2.23)$$

2.4. ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Podemos imaginar as ondas eletromagnéticas produzidas pelo movimento das partículas carregadas. O movimento das cargas produz uma perturbação no campo que, em certas condições, pode tomar a forma de uma onda eletromagnética

se propagando para fora da fonte com uma velocidade igual à velocidade da luz no meio.

As equações de Maxwell mostram que um campo elétrico e, inversamente, um campo magnético, variando no tempo, produz um campo elétrico. Devido a esta dependência, os campos elétrico e magnético podem propagar-se na forma de uma onda eletromagnética.

Para um meio homogêneo, isotrópico e linear, sem cargas, com permissividade elétrica ϵ e permeabilidade magnética μ e, com corrente de condução $\vec{j} = \sigma \vec{e}$, os campos satisfazem às seguintes equações de onda tridimensional:

$$\nabla^2 \vec{e} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = 0 \quad (2.24)$$

$$\nabla^2 \vec{h} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = 0 \quad (2.25)$$

A equação de onda é mais simples quando os campos variam, senoidalmente no tempo. Neste caso, podemos substituir $\partial/\partial t$ por $i\omega$, resultando:

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu\epsilon \left(1 + \frac{\sigma}{i\omega\epsilon}\right) \vec{E} = 0 \quad (2.26)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \mu\epsilon \left(1 + \frac{\sigma}{i\omega\epsilon}\right) \vec{H} = 0 \quad (2.27)$$

As equações (2.26) e (2.27) são as equações de onda para um meio mais geral comumente encontrado, no caso em que as quantidades variam senoidalmente no tempo, que é um caso suficientemente geral para a maioria das aplicações. Suas

luções são:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{+i\vec{K}\cdot\vec{r}} \quad (2.28)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cdot e^{+i\vec{K}\cdot\vec{r}} \quad (2.29)$$

onde \vec{E}_0 , \vec{H}_0 e \vec{K} são vetores constantes no tempo e no espaço. O vetor \vec{K} é o vetor de propagação; sua direção dá a direção de propagação da onda e sua intensidade é a constante de propagação da onda, uma propriedade do meio dada por:

$$K = \sqrt{-w^2 \mu \epsilon \left(1 + \frac{\sigma}{iw\epsilon}\right)} \quad (2.30)$$

que pode ser escrita como:

$$K = \sqrt{iw\mu (\sigma + iw\epsilon)} = \alpha + i\beta \quad (2.31)$$

com :

$$\alpha = w \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{w^2\epsilon^2}} - 1 \right)} \quad (2.32)$$

$$\beta = w \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{w^2\epsilon^2}} + 1 \right)} \quad (2.33)$$

onde:

α é a constante de atenuação

e

β é a constante de fase

As soluções em ondas planas das equações (2.26)

e (2.27) são da forma:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{+\vec{K} \cdot \vec{r}} e^{i\omega t} \quad (2.34)$$

e

$$H(t) = H_0 e^{+\vec{K} \cdot \vec{r}} e^{i\omega t} \quad (2.35)$$

cujo comprimento de onda é dado por:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (2.36)$$

e a velocidade de propagação dada por:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \lambda f \quad (2.37)$$

onde f é a frequência.

Neste caso a onda eletromagnética é uma onda puramente transversal, denominada onda TEM, cuja impedância de onda na direção \vec{K} é dada por;

$$Z = \frac{E}{H} = \frac{K}{K + i\omega\epsilon} \quad (2.38)$$

e cuja impedância intrínseca (η), que analogamente à constante de propagação é uma propriedade do meio, é dada por:

$$\eta = \frac{K}{\sigma + i\omega\epsilon} \quad (2.39)$$

Nota-se que para uma onda plana propagando-se em um meio ilimitado as impedâncias de onda e intrínseca incidem.

2.5 - DIPOLO ELÉTRICO CURTO. CARACTERÍSTICAS DE IRRADIAÇÃO NO ESPAÇO LIVRE.

Consideremos um dipolo elétrico de comprimento elementar Δl isolado no espaço, no qual circula uma corrente alternada $i(t) = I_0 \cos \omega t$. Calculemos os campos elétrico e magnético em um ponto P à distância r da antena:

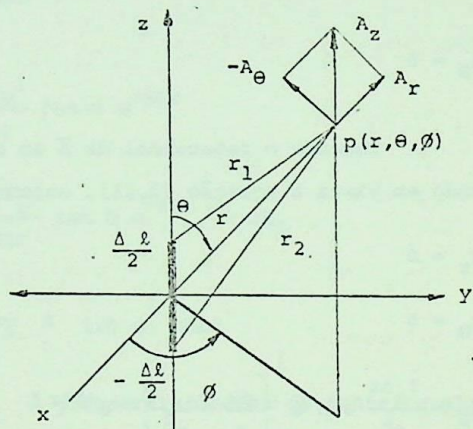


Fig. 2.1 - Dipolo Curto

No caso particular da corrente estar na direção z o vetor potencial \vec{A} terá uma única componente na direção z . Como $\Delta l \ll r$, então $r_1 \approx r \approx r_2$, e r pode ser considerado constante na integração.

Logo:

$$\vec{A} = A_z \hat{z}$$

onde:

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\Delta l/2}^{\Delta l/2} \frac{I_0 e^{-ikr}}{r} dx$$

ou

$$A_z = \frac{\mu_0 I_0 \Delta l}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (2.40)$$

Resulta portanto:

$$A_r = A_z \cos \theta = \frac{\mu_0 I_0 \Delta l}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \cos \theta$$

$$A_\theta = -A_z \sin \theta = -\frac{\mu_0 I_0 \Delta l}{4\pi} \frac{e^{-ikr} \sin \theta}{r} \quad (2.41)$$

$$A_\phi = 0$$

Tomando o rotacional de \vec{A} em coordenadas esféricas e tendo em vista a equação (2.11), encontramos:

$$H_r = 0$$

$$H_\theta = 0$$

$$H_\phi = \frac{I_0 \Delta l}{4\pi} \sin \theta \left[\frac{ik}{r} + \frac{1}{r^2} \right] e^{-ikr} \quad (2.42)$$

Para o campo elétrico resulta:

$$E_r = \frac{I_0 \Delta l}{4\pi} \cos \theta \left[\frac{2\eta}{r^2} + \frac{2}{i\omega \epsilon r^3} \right] e^{-ikr}$$

$$E_\theta = \frac{I_0 \Delta l}{4\pi} \sin \theta \left[\frac{i\omega\mu}{r} + \frac{\eta}{r^2} + \frac{1}{i\omega \epsilon r^3} \right] e^{-ikr} \quad (2.43)$$

$$E_\phi = 0$$

onde:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad e \quad k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (2.44)$$

Na região muito próxima da antena (r pequeno) H_{ϕ} pode ser obtido da lei de Ampère e o campo elétrico pode ser identificado como no dipolo eletrostático.

À grandes distâncias da antena, os únicos termos importantes na expressão de \vec{E} e \vec{H} são os que variam com $1/r$. Assim temos:

$$H_{\phi} = \frac{ikI_0 l}{4\pi r} \sin \theta e^{-ikr}$$

$$E_{\theta} = \frac{i\omega\mu I_0 l}{4\pi r} \sin \theta e^{-ikr} = \eta H_{\phi} \quad (2.45)$$

$$\eta = \sqrt{\mu/\epsilon} \approx 120 \pi \text{ ohms}$$

À grandes distâncias da fonte, qualquer porção da superfície de uma onda esférica é essencialmente uma onda plana. O vetor de Poynting está, então, completamente na direção radial. Assim o fluxo médio de energia é dado por:

$$\langle \vec{s} \rangle = \langle \vec{E} \times \vec{H} \rangle = \frac{1}{2} |E_{\theta}| |H_{\phi}| = \frac{\eta k^2 I_0^2 (\Delta l)^2}{32 \pi^2 r^2} \sin^2 \theta \quad (\text{watts/m}^2) \quad (2.46)$$

O fluxo total de energia será a integral de superfície do vetor de Poynting sobre qualquer superfície envolvente da fonte. Por simplicidade, esta superfície será tomada como uma esfera de raio r . Assim, da figura (2.1):

$$\bar{W} = \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} = \int_0^{\pi} \bar{S} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\eta k^2 I_0^2 (\Delta l)^2}{16} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\
 \bar{W} &= \frac{\eta \pi I_0^2}{3} \left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2 = 40\pi^2 I_0^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2 \text{ (watts)} \quad (2.47)
 \end{aligned}$$

2.6. RESISTÊNCIA DE IRRADIAÇÃO

A resistência de irradiação é definida como sendo a resistência ôhmica que consumiria a mesma potência que a antena irradia, se por ela circulasse a mesma corrente que circula pela antena, isto é,

$$R_r = \frac{2 \bar{W}}{I_0^2} \quad (2.48)$$

Para o dipolo curto temos:

$$R_r = 80 \pi^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2 \text{ (ohm)} \quad (2.49)$$

2.7. INTENSIDADE DE IRRADIAÇÃO

A densidade de potência irradiada nas direções θ, ϕ é chamada de Intensidade de Irradiação U . Assim,

$$U(\theta, \phi) = \frac{1}{2} r^2 R_e (\bar{E} \times \bar{H}^* \cdot \hat{r}) = \langle S \rangle r^2 \quad (2.50)$$

Em face da definição de intensidade de irradiação, a potência total irradiada por uma antena pode ser escrita como:

$$W = \int_S U d\Omega \quad (2.51)$$

onde,

$$d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\phi \text{ (esfero-radiano)}$$

é o elemento de ângulo sólido.

Para o dipolo curto temos:

$$U(\theta, \phi) = \frac{\eta K^2 I_0^2 (\Delta l)^2}{32 \pi^2} \sin^2 \theta = U_m \sin^2 \theta \text{ (watt/esfero radiano)} \quad (2.52)$$

onde,

U_m = intensidade de irradiação máxima.

Para campos distantes, de uma maneira geral, a função de irradiação pode ser escrita na forma:

$$U(\theta, \phi) = U_a f(\theta, \phi) \quad (2.53)$$

onde,

U_a = constante

2.8. DIRETIVIDADE

A função diretividade $D(\theta, \phi)$ na direção (θ, ϕ) é definida como a razão entre a intensidade de irradiação $U(\theta, \phi)$ e a intensidade de irradiação média U_0 , dá uma idéia quantitativa da efetividade da antena em concentrar energia em uma dada direção:

$$D(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{U_0} \quad (2.54)$$

Pode-se mostrar que:

$$D(\theta, \phi) = 4\pi \frac{f(\theta, \phi)}{\int_S f(\theta, \phi) \, d\Omega} \quad (2.55)$$

O valor máximo de $D(\theta, \phi)$ é comumente chamado de diretividade da antena, sendo representado por D . Assim,

$$D = \frac{U_m}{U_o} = 4\pi \frac{f(\theta, \phi)_{\max}}{\int_S f(\theta, \phi) d\Omega} = \frac{4\pi}{B} \quad (2.56)$$

onde,

$$B = \frac{\int_S f(\theta, \phi) d\Omega}{f(\theta, \phi)_{\max}} \quad (2.57)$$

é a área de feixe.

Como,

$$P = U_m B \quad (2.58)$$

conclue-se que a área de feixe B corresponde ao ângulo sólido dentro do qual a potência total irradiada fluiria totalmente, se a intensidade de irradiação tivesse valor máximo uniforme dentro deste ângulo.

Para o dipolo curto, temos:

$$D(\theta, \phi) = 1,5 \operatorname{sen}^2 \theta \quad (2.59)$$

$$D = 1,5 \quad (2.60)$$

2.9. IRRADIAÇÃO DE UM DIPOLO ELÉTRICO LONGO COM DISTRIBUIÇÃO SENOIDAL DE CORRENTE

Se o comprimento do dipolo é apreciável comparado com o comprimento da onda, a corrente não pode ser considerada constante em toda a extensão do dipolo. O mesmo pode, entretanto, ser dividido em um grande número de elementos diferenciais do tipo analisado anteriormente, e os campos de todos eles superpostos.

O dipolo longo com voltagem aplicada no seu ponto médio é mostrado na figura 2.2 com uma distribuição senoidal de corrente da forma:

$$I = \begin{cases} I_0 \text{ sen } K(\ell - z) & z > 0 \\ I_0 \text{ sen } K(\ell + z) & z < 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

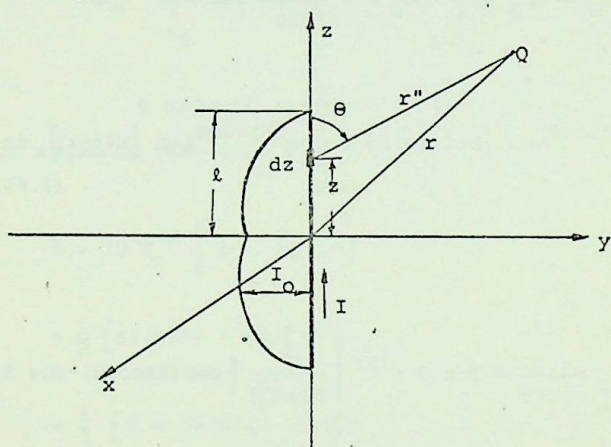


Fig. 2.2 - Dipolo elétrico longo com uma distribuição senoidal de corrente.

Da equação (2.45) as contribuições de \vec{H}_θ e \vec{E}_θ a grandes distâncias r'' de um elemento diferencial dz são:

$$dE_\theta = \eta dH_\theta = \frac{j\eta K I dz}{4\pi r''} e^{jkr''} \text{ sen } \theta'' \quad (2.62)$$

onde r'' é a distância de um elemento a Q, enquanto r é a distância da origem a Q. Elas podem ser consideradas tão grande, de modo que a diferença entre elas seja insignificante em seu efeito. Da mesma forma a diferença entre θ e θ'' será pequena e desprezada. Assim,

$$r'' = \sqrt{r^2 + z^2} = 2rz \cos\theta \approx r - z \cos\theta \quad (2.63)$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{r''} \cong \frac{1}{r'} \quad \theta'' \cong \theta \quad (2.64)$$

$$E_{\theta} = \eta H_{\phi} = \int_{-\ell}^{\ell} dE_{\theta} = - \frac{i\eta K I_0}{4\pi r} \operatorname{sen} \theta e^{iKr} .$$

$$\left\{ \int_{-\ell}^0 e^{iKz \cos \theta} \operatorname{sen} [K(\ell+z)] dz + \int_0^{\ell} e^{iKz \cos \theta} \operatorname{sen} [K(\ell-z)] dz \right\} \quad (2.65)$$

Assim,

$$E_{\theta} = \eta H_{\phi} = \frac{-i\eta K I_0}{4\pi r} \operatorname{sen} \theta e^{iKr} \left\{ \frac{2}{K \operatorname{sen}^2 \theta} [\cos(K\ell \cos \theta) - \cos K\ell] \right\}$$

$$E_{\theta} = \frac{-i\eta I_0}{2\pi r} e^{iKr} \left[\frac{\cos(K\ell \cos \theta) - \cos K\ell}{\operatorname{sen} \theta} \right] \quad (2.66)$$

$$H_{\phi} = \frac{-i I_0}{2\pi r} e^{iKr} \left[\frac{\cos(K\ell \cos \theta) - \cos K\ell}{\operatorname{sen} \theta} \right] \quad (2.67)$$

\vec{E} e \vec{H} total a grandes distâncias da antena, fazem ângulos retos um com o outro e com a direção de propagação, e são relacionados por η :

O valor médio do vetor de Poynting é dado por :

$$\langle s \rangle = \frac{1}{2} |E_{\theta}| |H_{\phi}| = \frac{\eta I_0^2}{8\pi^2 r^2} \left[\frac{\cos(K\ell \cos \theta) - \cos K\ell}{\operatorname{sen} \theta} \right]^2 \quad (2.68)$$

A potência média total irradiada é dada por:

$$\begin{aligned}\bar{W} &= \oint_S \bar{S} \cdot \bar{d}s = \int_0^\pi S \cdot 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = \\ &= 30 I_0^2 \int_0^\pi \frac{[\cos(K\ell \cos \theta) - \cos K\ell]^2}{\sin \theta} d\theta \quad (2.69)\end{aligned}$$

A solução da integral da equação (2.69) conduz-nos ao seguinte resultado para a potência média total irradiada:

$$\begin{aligned}\bar{W} &= 30 I_0^2 \left\{ C + \ln(2K\ell) - Ci(2K\ell) + \right. \\ &+ \frac{1}{2} [Si(4K\ell) - 2Si(2K\ell)] \sin 2K\ell + \\ &+ \left. \frac{1}{2} [C + \ln(K\ell) + Ci(4K\ell) - 2Ci(2K\ell)] \cos 2K\ell \right\} \quad (2.70)\end{aligned}$$

onde,

$$C = 0,5772$$

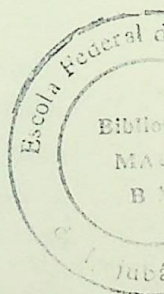
$$Si(x) = \text{seno integral de } x = \int_0^x \frac{\text{sen } x}{x} dx$$

$$Ci(x) = \text{cosseno integral de } x = - \int_x^\infty \frac{\text{cos } x}{x} dx$$

É importante observar-se que no caso particular do dipolo de meia onda ($\ell = \frac{\lambda}{2}$) a potência média irradiada tem o seguinte valor:

$$P = 38,56 I_0^2 \text{ (watt)} \quad (2.71)$$

Da equação (2.70) encontramos para a resistên -



cia de irradiação

$$\begin{aligned}
 R_r &= \frac{2\bar{W}}{I_0^2} \\
 &= 60 \left\{ C + \text{Ei}(2Kl) - \text{Ci}(2Kl) + \right. \\
 &+ \frac{1}{2} [\text{Si}(4Kl) - 2\text{Si}(2Kl)] \text{sen } 2Kl + \\
 &+ \left. \frac{1}{2} [C + \text{Ei}(Kl) + \text{Ci}(4Kl) - 2\text{Ci}(2Kl)] \cos 2Kl \right\} \quad (2.72)
 \end{aligned}$$

No caso do dipolo de meia onda ($l = \frac{\lambda}{2}$), resulta:

$$R_r = 73 \text{ (ohms)}$$

Da equação (2.66) resulta para a componente E_θ do campo elétrico, a uma distância constante da antena:

$$E_\theta = E_0 \frac{\cos(Kl \cos \theta) - \cos Kl}{\text{sen } \theta} \quad (2.73)$$

onde

$$E_0 = \frac{-i\eta I_0 e^{ikr}}{2\pi r}$$

Para a intensidade de irradiação $U(\theta, \phi)$ temos:

$$U(\theta, \phi) = U_m \frac{[\cos(Kl \cos \theta) - \cos Kl]^2}{\text{sen}^2 \theta} \quad (2.74)$$

onde,

$$U_m = \frac{15}{\pi} I_0^2$$

No caso do dipolo de meia onda ($l = \frac{\lambda}{2}$), a intensidade de irradiação toma o valor:

$$U(\theta, \phi) = U_m \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \right] \quad (2.75)$$

e para a diretividade, resulta:

$$D(\theta, \phi) = 1,64 \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]^2 \quad (2.76)$$

O valor máximo de diretividade é 1,64 que é ligeiramente superior aquele obtido para o dipolo curto.

2.10. IRRADIAÇÃO DE FONTES MONOCROMÁTICAS EM REGIÕES ILIMITADAS ANALISADAS PELA FUNÇÃO DIÁDICA DE GREEN

O problema da determinação do campo eletromagnético, irradiado por uma dada fonte monocromática, em um meio simples e ilimitado, é usualmente tratado, primeiramente determinando-se os potenciais da fonte e, então, calculando o campo, do conhecimento desses potenciais. Porém, este não é o único método de determinação do campo. Há um método, em que usando a função diádica de Green, encontramos o campo diretamente, em função da fonte de corrente.

Analisaremos a seguir este método.

2.11. FUNÇÃO DIÁDICA DE GREEN

Derivaremos a função diádica de Green diretamente das equações de Maxwell.

denotamos os campos da corrente elétrica por \vec{E}' e \vec{H}' e os da corrente magnética por \vec{E}'' e \vec{H}'' . Os campos resultantes \vec{E} e \vec{H} são obtidos por superposição, isto é, $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}''$ e $\vec{H} = \vec{H}' + \vec{H}''$. Vamos primeiro considerar os campos \vec{E}' e \vec{H}' os quais satisfazem as equações de Maxwell.

$$\nabla \times \vec{H}' = \vec{J} - iw_c \vec{E}'$$

$$\text{e} \tag{2.77}$$

$$\nabla \times \vec{E}' = iw_\mu \vec{H}'$$

Destas equações segue-se que \vec{E}' satisfaz a equação vetorial de Helmholtz

$$\nabla^2 \vec{E}' + k^2 \vec{E}' = \mu \vec{J} \tag{2.78}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}' - k^2 \vec{E}' = iw_\mu \vec{J} \tag{2.79}$$

Nesta equação, \vec{E}' é linearmente relacionado a \vec{J} e portanto podemos escrever

$$\vec{E}'(\vec{r}) = iw_\mu \int \hat{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}') dv' \tag{2.80}$$

Onde $\hat{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}')$ é uma função diádica, desconhecida, de \vec{r} e \vec{r}' .

Para deduzir a equação diferencial que $\hat{\Gamma}$ deve satisfazer substituímos esta expressão na equação vetorial de Helmholtz. Assim obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \int \hat{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}') dv' - k^2 \int \hat{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}') dv' &= \\ = \int \hat{\mu} \cdot \vec{J}(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') dv' & \end{aligned} \tag{2.81}$$

Notando que o duplo operador rotacional pode ser tomado sob o sinal de integração e observando que,

$$\nabla \times \nabla \times (\hat{\Gamma} \cdot \bar{J}) = (\nabla \times \nabla \times \hat{\Gamma}) \cdot \bar{J}$$

chegamos a seguinte equação:

$$\int [\nabla \times \nabla \times \hat{\Gamma}(\bar{r}, \bar{r}') - k^2 \hat{\Gamma}(\bar{r}, \bar{r}') - \hat{\mu} \delta(\bar{r} - \bar{r}')] \cdot \bar{J}(\bar{r}') dV' = 0 \quad (2.82)$$

Como esta equação é válida para qualquer distribuição de corrente $\bar{J}(\bar{r}')$, segue-se que $\hat{\Gamma}(\bar{r}, \bar{r}')$ deve satisfazer a:

$$(\nabla \times \nabla \times - k^2) \hat{\Gamma}(\bar{r}, \bar{r}') = \hat{\mu} \delta(\bar{r} - \bar{r}') \quad (2.83)$$

Agora, construiremos uma função diádica $\hat{\Gamma}$ tal que a equação (2.83) seja satisfeita e a expressão (2.80) tenha comportamento próprio para pontos distantes da fonte. Uma maneira de conseguir isto é usando a identidade $\nabla \times \nabla \times = \nabla(\nabla \cdot) - \nabla^2$ e escrever a equação (2.83) na forma:

$$(\nabla^2 + k^2) \hat{\Gamma}(\bar{r}, \bar{r}') = -\hat{\mu} \delta(\bar{r} - \bar{r}') + \nabla \nabla \cdot \hat{\Gamma}(\bar{r}, \bar{r}') \quad (2.84)$$

Da equação (2.83) segue que:

$$\nabla \cdot \hat{\Gamma}(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{k^2} \nabla \delta(\bar{r} - \bar{r}') \quad (2.85)$$

Com o auxílio desta relação, a equação (2.84) toma a forma:

$$(\nabla^2 + k^2) \hat{\Gamma}(\bar{r}, \bar{r}') = -\left(\hat{\mu} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot\right) \delta(\bar{r} - \bar{r}') \quad (2.86)$$

Esta equação é satisfeita para,

$$\hat{\Gamma}(\bar{r}, \bar{r}') = \left(\hat{\mu} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot\right) G(\bar{r}, \bar{r}') \quad (2.87)$$

onde $G(\bar{r}, \bar{r}')$ satisfaz à equação:

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.88)$$

Para satisfazer a condição de irradiação, a solução da equação (2.87) deve ser:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (2.89)$$

chamada função de Green escalar para o espaço livre.

Assim, a função diádica de Green desejada é:

$$\hat{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}') = \left(\hat{\mu} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (2.90)$$

Os campos \vec{E}'' e \vec{H}'' satisfazem as equações de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H}'' = -i\omega\epsilon\vec{E}'' \quad \text{e} \quad \nabla \times \vec{E}'' = -\vec{J}_m + i\omega\mu\vec{H}'' \quad (2.91)$$

das quais segue que \vec{H}'' satisfaz a equação vetorial de Helmholtz com \vec{J}_m como seu termo de corrente,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H}'' - k^2 \vec{H}'' = i\omega\epsilon\vec{J}_m \quad (2.92)$$

Como antes, se escrevermos:

$$\vec{H}'' = i\epsilon\omega \int \hat{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}_m(\vec{r}') dv' \quad (2.93)$$

então, a equação (2.92) e a condição de irradiação, serão satisfeitas quando $\hat{\Gamma}$ é dada pela expressão (2.90). Isto é, as funções diádicas nos integrandos das equações (2.80) e (2.93) são idênticas.

Como,

$$\vec{H}' = \frac{1}{i\omega\mu} \nabla \times \vec{E}' \quad \text{e} \quad \vec{E}'' = -\frac{1}{i\omega\epsilon} \nabla \times \vec{H}'' \quad (2.94)$$

segue das expressões (2.80) e (2.93) que:

$$\vec{H}' = \nabla \times \int \hat{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}') dv' = \int [\nabla \times \hat{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}')] \cdot \vec{J}(\vec{r}') dv' \quad (2.95)$$

mas

$$\vec{E}'' = -\nabla \times \int \hat{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}_m(\vec{r}') dv' = - \int [\nabla \times \hat{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}')] \cdot \vec{J}_m(\vec{r}') dv' \quad (2.96)$$

e conseqüentemente, da equação (2.87) :

$$[\nabla \times \hat{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}')] \cdot \vec{J}(\vec{r}') = \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{J}(\vec{r}') \quad (2.97)$$

Em vista disso, as equações (2.95) e (2.96) tomam a forma :

$$\vec{H}' = \int \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{J}(\vec{r}') dv' \quad (2.98)$$

$$\vec{E}'' = - \int \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{J}_m(\vec{r}') dv' \quad (2.99)$$

Combinando as expressões (2.80) e (2.93) com (2.99) e (2.98) respectivamente, temos:

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}'' = i\omega\mu \int \hat{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}') dv' - \int \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{J}_m(\vec{r}') dv' \quad (2.100)$$

$$\vec{H} = \vec{H}' + \vec{H}'' = i\omega\epsilon \int \hat{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}_m(\vec{r}') dv' + \int \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{J}(\vec{r}') dv' \quad (2.101)$$

Estas relações expressam o campo irradiado \vec{E}, \vec{H} em termos das fontes de corrente \vec{J} e \vec{J}_m .

2.12. RELAÇÕES FUNDAMENTAIS PARA UM MEIO ANISOTRÓPICO

Já dissemos anteriormente que a polarização de um meio anisotrópico não é paralela aos campos aplicados e,

não é independente da direção destes campos.

Para um campo elétrico, aplicado em um material anisotrópico, ao longo de um eixo de um sistema de coordenadas arbitrariamente orientado, o vetor polarização tem componentes em todas as direções coordenadas. Estamos supondo um material que não tenha polarização espontânea.

Se $\vec{E} = E_x \hat{x}$ então:

$$\vec{P} = \epsilon_0 (X_{e11} E_x \hat{x} + X_{e12} E_x \hat{y} + X_{e13} E_x \hat{z})$$

onde X_e é a susceptibilidade elétrica e os sub-índices se referem as componentes x, y e z de \vec{P} e \vec{E} respectivamente. Então, se \vec{E} tem todas as três componentes,

$$P_x = \epsilon_0 (X_{e11} E_x + X_{e12} E_y + X_{e13} E_z) \quad (2.102)$$

$$P_y = \epsilon_0 (X_{e21} E_x + X_{e22} E_y + X_{e23} E_z)$$

$$P_z = \epsilon_0 (X_{e31} E_x + X_{e32} E_y + X_{e33} E_z)$$

Se usarmos as relações entre \vec{D} e \vec{P} , dada por:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.103)$$

obteremos de (2.102)

$$D_x = \epsilon_{11} E_x + \epsilon_{12} E_y + \epsilon_{13} E_z$$

$$D_y = \epsilon_{21} E_x + \epsilon_{22} E_y + \epsilon_{23} E_z \quad (2.104)$$

$$D_z = \epsilon_{31} E_x + \epsilon_{32} E_y + \epsilon_{33} E_z$$

onde:

$$\epsilon_{11} = \epsilon_0 (1 + X_{e11}) \quad \epsilon_{12} = \epsilon_0 X_{e12} \text{ etc.} \quad (2.105)$$

É interessante escrever as equações (2.104) com matrizes, como se segue:

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{21} & \epsilon_{31} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{32} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

Podemos compactar nossa notação, representando cada uma das matrizes por um símbolo. Uma maneira é

$$[D] = [\epsilon] [E] \quad (2.107)$$

ou poderemos manter a notação do vetor para \bar{D} e \bar{E} , e escrever:

$$\bar{D} = \hat{\epsilon} \bar{E} \quad (2.108)$$

Assim, podemos escrever as equações (2.106) como:

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_0 [\hat{I} + X_e] \quad (2.109)$$

onde \hat{I} é a matriz unidade

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

Para dielétricos anisotrópicos reais, pode ser mostrado que $\hat{\epsilon}$ é simétrico, tal que $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$. Uma transformação de coordenadas, particularmente importante é, então, possível desde que todo tensor simétrico de ordem dois pode

ser transformado, por rotação do sistema de coordenadas, a uma forma diagonal,

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

Quando o sistema de coordenadas \hat{e} é escolhido para ter $\hat{\epsilon}$ na forma diagonal (2.111) os eixos do sistema de coordenadas são chamados de eixos principais do meio.

Fórmulas semelhantes são aplicadas para as propriedades magnéticas, isto é:

$$\bar{B} = \hat{\epsilon} \bar{H} \quad (2.112)$$

$$\hat{\mu} = \mu_0 [\hat{I} + \hat{X}_m] \quad (2.113)$$

Com a notação introduzida em (2.108) e (2.112) as equações de Maxwell tomam a forma:

$$\nabla \times \bar{E} = -i \omega \hat{\mu} \bar{H} \quad (2.114)$$

$$\nabla \times \bar{H} = i \omega \hat{\epsilon} \bar{E} + \bar{J} \quad (2.115)$$

Materiais tecnicamente importantes, muitas vezes possuem tensor permissividade ou permeabilidade, raramente ambos.

A equação básica de uma onda se propagando em um meio com tensor permissividade, considerando μ um escalar, é dada por:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E} = \omega^2 \mu \hat{\epsilon} \bar{E} - i \omega \mu \bar{J} \quad (2.116)$$

ou

$$\nabla^2 \bar{E} - \nabla(\nabla \cdot \bar{E}) + i\omega\mu \bar{J} - \omega^2\mu \epsilon \bar{E} = 0 \quad (2.117)$$



CAPÍTULO 3

O PLASMA

3.1. DESCRIÇÃO ALTERNATIVA DE MEIOS CONTÍNUOS

Sabemos da teoria eletromagnética que para um meio contínuo em repouso as equações de Maxwell podem ser escritas na seguinte forma diferencial,

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{E} = \vec{J}_t + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_t \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.4)$$

as quais descrevem o campo eletromagnético microscópico, no meio, pelos vetores \vec{E} e \vec{B} e caracteriza o meio pela densidade total de cargas ρ_t e a densidade total de correntes \vec{J}_t .

A densidade total de cargas ρ_t consiste da densidade de cargas livres ρ e da densidade de cargas não livres ρ_b ; da mesma forma a densidade total de corrente \vec{J}_t consiste da densidade de corrente livre \vec{J} e da densidade de corrente não livre \vec{J}_b isto é,

$$\rho_t = \rho + \rho_b \quad (3.5)$$

$$\bar{J}_t = \bar{J} + \bar{J}_b \quad (3.5)$$

A carga livre \bar{e} a parte da carga total que existe independente do campo. Por outro lado, a carga não livre \bar{e} atribuída aos multipolos que são induzidos, no meio, pelo campo eletromagnético. Sabe-se que ρ_b e \bar{J}_b são dados pelas séries:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \bar{P} + \frac{1}{2} \nabla \nabla \cdot \bar{Q} + \dots \quad (3.7)$$

$$\bar{J}_b = \frac{\partial}{\partial t} \bar{P} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \bar{Q} + \nabla \times \bar{M} + \dots \quad (3.8)$$

Mantivemos apenas os termos principais das séries. Quando as séries são terminadas em um certo grau de aproximação, o número de multipolos elétricos excede o número de multipolos magnéticos. Mantivemos dois multipolos elétricos \bar{P} e \bar{Q} e um multipolo magnético \bar{M} onde \bar{P} , \bar{M} , \bar{Q} denotam respectivamente, a densidade volumétrica de dipolos elétricos, dipolos magnéticos, e quadripolos elétricos que são produzidos pela ação do campo eletromagnético sobre as moléculas neutras do meio. Em outras palavras, \bar{P} , \bar{M} , \bar{Q} são funções de \bar{E} e \bar{B} .

Tendo em vista as séries (3.7) e (3.8) as equações de Maxwell (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4) tornam-se:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \bar{B} = \bar{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \bar{Q} + \nabla \times \bar{M} + \dots \quad (3.9)$$

$$\nabla \times \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (3.10)$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho - \nabla \cdot \vec{P} + \frac{1}{2} \nabla \nabla : \vec{Q} + \dots \quad (3.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.12)$$

Se definirmos o vetor deslocamento elétrico \vec{D} por $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ (3.13)

comparando esta relação com (3.11) vemos que esta definição leva-nos a:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \vec{Q} + \dots \quad (3.14)$$

Além disso, se definirmos o vetor \vec{H} por:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (3.15)$$

então, a equação (3.9) leva-nos a:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad (3.16)$$

Assim, quando \vec{D} é definido pela equação (3.13) e \vec{H} pela equação (3.15), as equações de Maxwell (3.9), (3.10) (3.11), (3.12), assumem sua forma convencional:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad (3.17)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.18)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (3.19)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.20)$$

Para aplicar estas considerações ao caso de uma onda eletromagnética passando através de um plasma, notamos que a onda, em princípio, interage com todos os três componentes do plasma, os elétrons livres, os ions livres e as moléculas neutras. Entretanto, a interação da onda com as partículas neutras é tão pequena, em comparação com as partículas carregadas, que ela pode ser desprezada. Isto significa que, \bar{P} , \bar{M} , \bar{Q} , os quais constituem a medida da interação entre a onda e as partículas neutras, podem ser consideradas iguais a zero. Além do mais, como os ions tem muito mais massa que os elétrons, a velocidade imprimida ao ion, pela onda, é bastante pequena, comparada com a velocidade imprimida aos elétrons. Isto é, quando uma onda eletromagnética passa através de um plasma, suficientemente ionizado, somente os elétrons livres do plasma influenciam apreciavelmente a transmissão da onda.

A interação entre a onda e os elétrons é introduzida nas equações de Maxwell através da densidade de corrente \bar{J} . Como será mostrado adiante, na equação (3.42), a densidade de corrente eletrônica \bar{J} , produzida no plasma, pela onda, é relacionada no estado estacionário, ao vetor elétrico \bar{E} da onda, pela relação linear da forma:

$$\bar{J} = a\bar{E} + iwb\bar{E} \quad (a, b = \text{real positivo}) \quad (3.21)$$

a menos, que \bar{E} exceda um valor, para o qual a não linearidade tome lugar. Portanto, segue-se que quando uma onda eletromagnética, cujo vetor \bar{E} fica dentro do contorno de linearidade, passa através de um plasma, suficientemente ionizado, as equações de Maxwell, para fenômenos no estado estacionário, tor

nam-se,

$$\nabla \times \vec{H} = a\vec{E} + iwb\vec{E} - iw\epsilon_0\vec{E} \quad (3.22)$$

$$\nabla \times \vec{E} = iw\mu_0\vec{H} \quad (3.23)$$

Vamos escrever a equação (3.22) na forma:

$$\nabla \times \vec{H} = (a + iwb)\vec{E} - iw\epsilon_0\vec{E} \quad (3.24)$$

onde $(a+iwb)\vec{E}$ aparece como uma corrente de condução e $-iw\epsilon_0\vec{E}$ como uma corrente de deslocamento. Isto sugere que tomemos o fator complexo $(a+iwb)$ como uma condutividade complexa dada por:

$$\sigma_c = \sigma_r + i\sigma_i \quad (3.25)$$

e então descrevemos o plasma como um condutor tendo uma permeabilidade μ_0 , uma constante dielétrica ϵ_0 , e uma condutividade complexa σ_c . Porém, não usaremos este modo de descrição aqui. Interpretaremos o termo $iwb\vec{E}$ da equação (3.22) como uma corrente de polarização e, então, consideramos o plasma como um dielétrico com perdas.

Para fazer isto, sabemos que, para um dielétrico com perdas, por definição, temos:

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma\vec{E} - iw\vec{P} - iw\epsilon_0\vec{E} \quad (3.26)$$

onde σ é a condutividade do dielétrico e \vec{P} é a polarização das moléculas neutras do dielétrico. Também para o dielétrico temos:

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E} \quad (3.27)$$

Como a relação:

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} = \epsilon \bar{E} \quad (3.28)$$

define a constante dielétrica do dielétrico, segue-se que a constante dielétrica do dielétrico é dada por:

$$\epsilon = \epsilon_0 + X_e \quad (3.29)$$

Para um dielétrico, ϵ é sempre maior de que ϵ_0 , porque $X_e \geq 0$.

Se formos descrever o plasma como um dielétrico com perdas, devemos identificar a equação (3.22) com a equação (3.28), resultando:

$$a\bar{E} = \sigma\bar{E} \quad e \quad iw\bar{E} = -iw\bar{P} = -iwX_e\bar{E}$$

Isto significa que a condutividade do dielétrico deve ser igual a a , e sua susceptibilidade elétrica X_e deve ser igual a b , isto é, $\sigma = a$ e $X_e = -b$.

Como b é positivo, X_e deve ser negativo. Então, se o efeito de movimento de eletrons deve ser considerado por uma condutividade e por uma polarização, então devemos tomar o plasma como um dielétrico com perdas, cuja susceptibilidade elétrica é negativa. Os parâmetros constitutivos do dielétrico são dados por:

$$\sigma = a \quad \mu = \mu_0 \quad \epsilon = \epsilon_0 - b \quad (3.30)$$

Aqui notamos que, em contraste com um dielétrico real, ϵ é menor que ϵ_0 .

Devemos também, combinar a condutividade com a

constante dielétrica e, então, obter uma constante dielétrica complexa ϵ_c . Se isto é feito, o plasma é descrito pelos parâmetros constitutivos,

$$\mu = \mu_0 \quad \epsilon_c = -\frac{a}{i\omega} + \epsilon_0 - b \quad (3.31)$$

3.3. PARÂMETROS CONSTITUTIVOS DE UM PLASMA

Quando uma onda eletromagnética de alta frequência, passa através de um plasma, somente a interação entre a onda e os elétrons livres, precisa ser considerada. Assim, de um ponto de vista estatístico, o estado macroscópico do plasma pode ser descrito em termos de uma função de distribuição $f(\vec{r}, \vec{w}, t)$, a qual determina o número provável de elétrons que, em um tempo t , fica dentro de um volume $dx dy dz$ centrado em \vec{r} , e tem velocidade dentro de um intervalo dw_x, dw_y, dw_z centrado em \vec{w} .

Esta função do vetor posição \vec{r} , o vetor velocidade \vec{w} , e o tempo t , deve satisfazer a equação de Boltzmann (ou cinética).

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{w} \cdot \nabla f + \left(\frac{d}{dt} \vec{w} \right) \cdot \nabla_w f = C \quad (3.32)$$

onde $\nabla_w f$ é o gradiente de f em velocidade espaço, ∇f é o gradiente de f em coordenadas espaciais, e C é a taxa temporal de mudança em f , causada pelas colisões. A aceleração $d\vec{w}/dt$ é relacionada a \vec{B} e \vec{E} da onda, de acordo com a equação de força, de Lorentz (2.1).

$$m \frac{d\vec{w}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{w} \times \vec{B})$$

onde q e m denotam respectivamente, a carga e a massa do elétron.

Substituindo a expressão (2.1) na equação (3.32)

obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{w} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} (\bar{E} \times \bar{w} \times \bar{B}) \cdot \nabla_w f = C \quad (3.33)$$

que mostra explicitamente que a força diretora é o campo eletromagnético, \bar{E} , \bar{B} . Multiplicando esta equação por $n\bar{w}$ e integrando sobre todas as velocidades, obtemos a equação do movimento,

$$nm \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{v} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) = nq (\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) - \nabla \cdot \bar{S} + \bar{G} \quad (3.34)$$

Nesta equação a densidade de partículas $n(\bar{r}, t)$ e a velocidade $\bar{v}(\bar{r}, t)$ são definidas respectivamente por:

$$n(\bar{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\bar{r}, \bar{w}, t) \, dw_x \, dw_y \, dw_z \quad (3.35)$$

$$\bar{v}(\bar{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{w}}{n} f(\bar{r}, \bar{w}, t) \, dw_x \, dw_y \, dw_z \quad (3.36)$$

A diádica \bar{S} é a tensão definida por:

$$\bar{S} = m \iiint_{-\infty}^{\infty} (\bar{w} - \bar{v})(\bar{w} - \bar{v}) f(\bar{r}, \bar{w}, t) \, dw_x \, dw_y \, dw_z \quad (3.37)$$

e o vetor \bar{G} é ganho de momento devido às colisões.

No presente caso todos os termos não lineares,

assim como o termo $\vec{V} \times \vec{B}$, são tirados da equação (3.34) e, então a equação do movimento é reduzida, no estado estacionário, à seguinte forma:

$$-in\omega\vec{V} = nq\vec{E} + \vec{G} \quad (3.38)$$

Além disso, desde que \vec{G} é o ganho de momento por unidade de volume, por unidade de tempo, podemos escrever:

$$\vec{G} = -nm\vec{V}w_c \quad (3.39)$$

onde a constante de proporcionalidade w_c é a frequência de colisões, e mede o número de colisões efetivas que um elétron sofre, por unidade de tempo.

A densidade de corrente eletrônica \vec{J} e a frequência do plasma w_p são definidas por:

$$\vec{J} = nq\vec{V} \quad (3.40)$$

$$w_p^2 = \frac{nq^2}{m\epsilon_0} \quad (3.41)$$

Assim, da equação do movimento (3.36) e as expressões (3.39), (3.40), (3.41) encontramos que a densidade de corrente eletrônica \vec{J} é relacionada a \vec{E} como segue:

$$\vec{J} = \frac{\epsilon_0 w_p^2}{-i\omega + w_c} \vec{E} = \frac{\epsilon_0 w_c w_p^2}{w^2 + w_c^2} \vec{E} + i\omega \frac{\epsilon_0 w_p^2}{w^2 + w_c^2} \vec{E} \quad (3.42)$$

Comparando a expressão (3.42) com a equação (3.21) que dá a dependência da densidade de corrente \vec{J} , produzida no plasma, pela onda, no estado estacionário, com

vetor elétrico \vec{E} da mesma, determinamos os coeficientes \underline{a} e \underline{b} , e então, usando a relação (3.32), determinamos os parâmetros constitutivos do plasma.

Se tomamos o plasma como um dielétrico com perdas, sua condutividade é dada por:

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \omega_c \omega_p^2}{\omega^2 + \omega_c^2} \quad (3.43)$$

Sua constante dielétrica por:

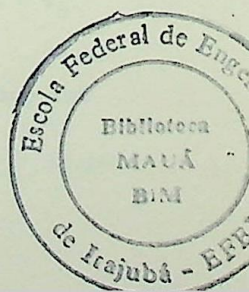
$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_c^2} \right) \quad (3.44)$$

e sua permeabilidade por:

$$\mu = \mu_0 \quad (3.45)$$

constante no todo.

Portanto, as expressões (3.43) e (3.44) com ω_c tomado como constante, adequadamente descrevem o plasma para o nosso caso.



CAPÍTULO 4

PROPAGAÇÃO DE ONDAS TRANSVERSAIS EM UM PLASMA HOMOGÊNEO
ISOTRÓPICO

Para se determinar as propriedades de propagação de uma onda eletromagnética transversal em um plasma homogêneo e isotrópico, consideraremos uma onda plana transversal, linearmente polarizada, cujo vetor elétrico $\vec{E}(t)$ tem a forma:

$$E(t) = R_e \left[E_0(t) e^{iKz} e^{-i\omega t} \right] \quad (4.1)$$

Em um meio cujos parâmetros constituídos são ϵ , μ_0 , σ , o vetor elétrico deve satisfazer à equação:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \mu_0 \sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0 \quad (4.2)$$

Como no caso presente $\vec{E}(t)$ é transversal, a quantidade $\nabla \times \nabla \times \vec{E}$ pode ser substituída por $-\nabla^2 \vec{E}$. Além disso $\vec{E}(t)$ varia vagarosamente com o tempo em comparação com $e^{-i\omega t}$ e, podemos substituir $\frac{\partial}{\partial t}$ por $i\omega$ e $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ por $-\omega^2$. Então, quando a expressão (4.1) é substituída na equação (4.2) achamos que a constante de propagação é dada por:

$$K^2 = \omega^2 \mu_0 \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \quad (4.3)$$

Por outro lado

$$K = \beta + i\alpha = \frac{\omega}{c} \eta + i\alpha \quad (4.4)$$

Substituindo a relação (4.4) em (4.3) concluímos:

$$\beta = w \sqrt{\mu_0} \left[\frac{\epsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2w}\right)^2} \right]^{1/2} \quad (4.5)$$

$$\alpha = w \sqrt{\mu_0} \left[-\frac{\epsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2w}\right)^2} \right]^{1/2} \quad (4.6)$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \left[\frac{\epsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2w}\right)^2} \right]^{1/2} \quad (4.7)$$

Aplicando as expressões (4.5), (4.6) e (4.7) para um plasma sem perdas cujos parâmetros constituídos são:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{w_p^2}{w^2}\right); \quad \mu = \mu_0; \quad \sigma = 0$$

temos:

$$\beta = \frac{w}{c} \sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w^2}} \quad \alpha = 0 \quad n = \sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w^2}} \quad \text{para } w > w_p \quad (4.8)$$

$$\beta = 0 \quad \alpha = \frac{w}{c} \sqrt{\frac{w_p^2}{w^2} - 1} \quad n = 0 \quad \text{para } w < w_p \quad (4.9)$$

$$\beta = 0 \quad \alpha = 0 \quad n = 0 \quad \text{para } w = w_p \quad (4.10)$$

Estas expressões mostram uma diferença marcante no comportamento de uma onda, cuja frequência de operação é maior do que a frequência do plasma, e, uma onda, cuja frequência de operação é menor que a frequência do plasma.

Quando $\omega > \omega_p$, a onda caminha sem atenuação com uma velocidade de fase maior que a da luz no vácuo. Por outro lado, quando $\omega < \omega_p$ a onda é evanescente e não carrega potência.

Para $\omega = \omega_p$ a onda é cortada, o campo magnético é zero e o campo elétrico deve satisfazer a relação $\nabla_x \bar{E}(t) = 0$. Então, neste caso, uma onda eletromagnética transversal não pode existir. Para se examinar as propriedades de tal onda, a dispersão espacial deve ser levada em consideração.

Há tres tipos de velocidade para uma onda transversal: a velocidade de fase v_f cujo valor é $v_f = c/\eta$; a velocidade de grupo v_g , definida como sendo igual a $\partial\omega/\partial\beta$ e a velocidade de transporte e energia v_{en} , que é definida pela razão $\langle \bar{S}_z \rangle / \bar{w}$.

Novamente restringindo a discussão para um plasma sem perdas, vemos das expressões (4.8) que a velocidade de fase e de grupo são dadas por:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad (\omega \geq \omega_p) \quad (4.11)$$

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial\beta} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (\omega \geq \omega_p) \quad (4.12)$$

Para determinar v_{en} notamos que o vetor de Poynting da onda é dirigido na direção z , e temos para seu valor médio:

$$\langle \bar{S}_z \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\bar{e}_z \cdot (\bar{E} \times \bar{H}^*) \right] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} \bar{E}_0 \cdot \bar{E}_0^* \right] \quad (4.13)$$

Além disso, notamos que a densidade média de energia, dada por:

$$\bar{W} = \frac{1}{4} \mu_0 \bar{H} \cdot \bar{H}^* + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \epsilon) \bar{E} \cdot \bar{E}^* \quad (4.14)$$

se reduz a:

$$\bar{W} = \frac{1}{4} \epsilon \bar{E}_0 \cdot \bar{E}_0^* + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \epsilon) \bar{E}_0 \cdot \bar{E}_0^* \quad (4.15)$$

Portanto, a velocidade de transporte de energia assume a forma:

$$v_{en} = \frac{\langle \bar{S}_z \rangle}{\bar{W}} = \frac{(1/2) \text{Re} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}}}{(1/2) \epsilon + \frac{1}{4} \omega \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega}} \quad (4.16)$$

Substituindo $\epsilon = \epsilon_0 (1 - \omega_p^2/\omega^2)$ nesta forma, encontramos que a velocidade de transporte de energia, para um plasma sem perdas, é dado por:

$$v_{en} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (\omega \geq \omega_p) \quad (4.17)$$

a qual é idêntica a expressão (4.12) para a velocidade de grupo.

Vamos considerar agora o plasma com pequenas perdas. No caso limite onde $\epsilon \gg \sigma/\epsilon$ as perdas são incidentais e as expressões (4.8), (4.9) e (4.10) reduzem a:

$$\beta = w \sqrt{\mu_0 \epsilon} \quad \alpha = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \quad \eta = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0} \quad (w \geq w_p) \quad (4.18)$$

Usando as relações:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{w_p^2}{w^2 + w_c^2}\right) \quad \sigma = \frac{\epsilon_0 w_c w_p^2}{w^2 + w_c^2}$$

a expressão (4.18) torna-se:

$$\beta = \frac{w}{c} \sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w^2 + w_c^2}} \quad (4.19)$$

$$\alpha = \frac{w_c w_p^2}{c (w^2 + w_c^2) \sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w^2 + w_c^2}}} \quad (4.20)$$

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w^2 + w_c^2}} \quad (4.21)$$

e as correspondentes velocidades de fase e de grupo são dadas por:

$$v_f = c / \sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w^2 + w_c^2}} \quad (4.22)$$

$$v_g = \frac{c \sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w^2 + w_c^2}}}{\frac{1 - w_p^2 w_c^2}{(w^2 + w_c^2)^2}} \quad (4.23)$$

Comparando (4.11) com (4.22) vemos que a velocidade de fase é diminuída pela presença das perdas.

Por outro lado, comparando (4.12) com (4.23), vemos que a velocidade de grupo é aumentada pela presença das perdas.

CAPÍTULO 5

TENSOR DIELÉTRICO DE UM PLASMA EM UM CAMPO MAGNETOSTÁTICO

Quando um campo magnetostático \vec{B}_0 é aplicado em um plasma, o plasma torna-se eletricamente anisotrópico para ondas eletromagnéticas. Isto é, a permeabilidade do plasma permanece igual a do vácuo, μ_0 , enquanto que a permissividade elétrica do plasma é transformada em um tensor $\hat{\epsilon}$ (ou diádica) mostrada por C.H.Papas¹², como sendo:

$$\hat{\epsilon} \equiv \begin{bmatrix} \epsilon & -ig & 0 \\ ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Para derivar o tensor dielétrico de um plasma, sob a ação de um campo magnético, o qual por simplicidade é assumido, no momento, ser sem perdas, usaremos a equação do movimento (3.32).

No presente instante esta equação reduz-se a :

$$-inm\vec{v} = nq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0) \quad (5.2)$$

e leva-nos a seguinte expressão para a velocidade dos elétrons do plasma:

$$\vec{v} = \frac{-w^2 (q/m) \vec{E} - iw (q^2/m^2) \vec{E} \times \vec{B}_0 + (q^3/m^3) (\vec{E} \cdot \vec{B}_0) \vec{B}_0}{-iw \left[\left(\frac{q}{m} \vec{B}_0 \right) \cdot \left(\frac{q}{m} \vec{B}_0 \right) - w^2 \right]} \quad (5.3)$$

Como a densidade de corrente de convecção eletrônica \vec{J} , por definição é igual a $nq\vec{v}$, segue-se da expres-

são (5.3) que \bar{J} é dado por:

$$\bar{J} = -i\omega \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{(\bar{\omega}_g \cdot \bar{\omega}_g - \omega^2)} \bar{E} + \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{(\bar{\omega}_g \cdot \bar{\omega}_g - \omega^2)} \bar{E} \times \bar{\omega}_g - \frac{1}{i\omega} \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{(\bar{\omega}_g \cdot \bar{\omega}_g - \omega^2)} (\bar{E} \cdot \bar{\omega}_g) \bar{\omega}_g \quad (5.4)$$

onde ω_p é a frequência do plasma ($\omega_p^2 = nq^2/m\epsilon_0$) e onde a amplitude de do vetor $\bar{\omega}_g$

$$\bar{\omega}_g = \frac{q}{m} \bar{E}_0 \quad (5.5)$$

representa a girofrequência dos eletrons.

Do conhecimento de \bar{J} , podemos determinar a permissividade elétrica do plasma, notando que a densidade da corrente total é a soma da densidade da corrente de convecção \bar{J} e a densidade de corrente de deslocamento do vácuo $-i\omega\epsilon_0\bar{E}$ e, então, considerando esta densidade de corrente total como uma corrente de deslocamento, num meio dielétrico, cuja permissividade elétrica $\hat{\epsilon}$ é fixada pela relação:

$$\bar{J} - i\omega\epsilon_0\bar{E} = -i\omega\hat{\epsilon} \cdot \bar{E} \quad (5.6)$$

De acordo com a expressão (5.4), vemos que \bar{J} não é geralmente paralelo a \bar{E} , a quantidade $\hat{\epsilon}$ deve ser um tensor (diádica) para que isto se dê.

Como, por definição, o vetor deslocamento \bar{D} é calculado de $\bar{D} = \hat{\epsilon} \cdot \bar{E}$, o tensor caracterizador de $\hat{\epsilon}$ também significa que \bar{D} não é geralmente paralelo a \bar{E} .

Embora um tensor seja independente das coordenadas, suas componentes não são. Se temos as componentes de um tensor em um sistema de coordenadas, podemos encontrar suas

componentes com relação a outro sistema de coordenadas, aplicando a lei de transformação que liga as coordenadas de um sistema com aquelas do outro. Portanto, estamos livres para escolher algum sistema de coordenadas, sem correr o risco da perda de generalização.

No momento, por simplicidade, escolhemos o sistema de coordenadas (x, y, z) , cujo eixo z é paralelo a \vec{B}_0 , isto é, $\vec{B}_0 = \hat{e}_z B_0$; \hat{e}_z é o vetor unitário na direção z . Quando $B_0 > 0$, o vetor \vec{B}_0 é paralelo ao eixo z , e quando $B_0 < 0$, o vetor \vec{B}_0 é antiparalelo ao eixo z . As componentes ϵ no sistema cartesiano são denotadas por ϵ_{ik} com $i, k = x, y, z$.

Substituindo a expressão (5.4) na equação (5.6) temos as seguintes expressões para as componentes ϵ_{ik} de $\hat{\epsilon}$ no sistema cartesiano no qual o eixo z , é paralelo a \vec{B}_0 ,

$$\epsilon = \epsilon_{xx} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{w^2 p^2}{w^2 - w_g^2} \right) = \epsilon_{yy} \quad (5.7)$$

$$g = \epsilon_{xy} = -i \epsilon_0 \frac{w^2 w_g q}{w(x^2 - w_g^2)} = -\epsilon_{yx} \quad (5.8)$$

$$\eta = \epsilon_{zz} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{w^2 p^2}{w^2} \right) \quad (5.9)$$

As componentes restantes ϵ_{xz} , ϵ_{zx} , ϵ_{zy} são idênticamente nulas. Notamos que quando o campo magnético \vec{B}_0 desaparece, w_g desaparece e os termos da diagonal tornam-se iguais, isto é:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{w^2 p^2}{w^2} \right) \quad (5.10)$$

e os termos fora da diagonal desaparecem. Isto é, quando $\bar{B}_0 = 0$ o plasma torna-se isotrópico.

As expressões (5.7), (5.8) e (5.9), para as componentes do tensor dielétrico, podem ser generalizadas, se quisermos considerar as perdas de colisões. Para o caso em que as perdas de colisões são apreciáveis, devemos adicionar no termo direito da equação (5.2), um termo devido às colisões. Assim, para a equação de movimento dos elétrons teremos:

$$-inm\bar{v} = nq(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}_0) - nm\bar{v}w_c \quad (5.11)$$

onde w_c é a frequência de colisões. Reescrevendo esta equação na forma,

$$-inm(w + iw_c)\bar{v} = nq(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}_0) \quad (5.12)$$

e comparando com a equação (5.2), vemos que a expressão resultante para \bar{J} é a mesma que a expressão (5.4) com w substituindo por $w + w_c$. Então, segue-se da equação (5.6), que as componentes cartesianas do tensor dielétrico, de um dielétrico com perdas, são dados por:

$$\epsilon' = \epsilon'_{xx} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{w_p^2 (w + iw_c)}{w [(w + iw_c)^2 - w_g^2]} \right) = \epsilon'_{yy} \quad (5.13)$$

$$g' = \epsilon'_{xy} = -i\epsilon_0 \frac{w_p^2 w_g}{w(w + iw_c + w_g)(w + iw_c - w_g)} = -\epsilon'_{yx} \quad (5.14)$$

$$\eta' = \epsilon'_{zz} = \epsilon_0 \left[1 - \frac{w_p^2}{w(w + iw_c)} \right] \quad (5.15)$$

onde a linha $\bar{\cdot}$ é usada para distinguir as componentes com perdas das componentes sem perdas.

Quando a frequência das ondas eletromagnéticas que estão passando pelo plasma magnetizado, é muito baixa, o movimento dos ions do plasma deve ser incluído na análise. Podemos determinar a permissividade elétrica para esta frequência baixa, calculando a corrente de convecção como a soma da corrente iônica e a corrente eletrônica, previamente determinada, e depois, determinando $\bar{\epsilon}$ do conhecimento de \bar{J} , usando a relação (5.6).

Para continuação dos cálculos, notamos que a equação do movimento para os ions $\bar{\epsilon}$, formalmente, a mesma equação do movimento para os eletrons.

Desta forma, como temos para o caso sem perdas,

$$-inm\bar{w}\bar{V} = nq (\bar{E} + \bar{V} \times \bar{B}_0) \quad (5.16)$$

como a equação do movimento para os eletrons, então, para os ions a equação do movimento deve ser:

$$-in_1m_1w_1\bar{V}_1 = n_1q_1 (\bar{E} + \bar{V}_1 \times \bar{B}_0) \quad (5.17)$$

Aqui m_1 representa a massa iônica, q_1 a carga iônica, n_1 a densidade de ions, e \bar{V}_1 a velocidade dos ions. Sabemos dos cálculos anteriores que a corrente de convecção $nq\bar{V}$ é dada pela equação (5.4). Então, segue-se, analogamente das equações (5.16) e (5.17) que, a corrente de convecção iônica $n_1q_1\bar{V}_1$ é dada pela mesma expressão (5.4), mas com w_p substituído pela frequência angular iônica do plasma w_{p1} e, w_g substituída pela girofrequência iônica,

$$\omega_{pi}^2 = \frac{n_i q_i^2}{m_i \epsilon_0} \quad \text{e} \quad \bar{\omega}_{gi} = \frac{q_i}{m} \bar{B}_0 \quad (5.18)$$

Superpondo $nq\bar{v}$ e $n_i q_i \bar{v}_i$ obtemos \bar{J} , isto é

$$\bar{J} = nq\bar{v} + n_i q_i \bar{v}_i \quad (5.19)$$

e, então, substituindo \bar{J} na relação (5.6), encontramos que, as componentes, distintas de zero, de $\bar{\epsilon}$, para um plasma magnetizado com perdas, são dadas por:

$$\epsilon = \epsilon_{xx} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_g^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega - \omega_{gi}} \right) = \epsilon_{yy} \quad (5.20)$$

$$g = \epsilon_{xy} = -i\epsilon_0 \left[\frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega(\omega^2 - \omega_g^2)} + \frac{\omega_{pi}^2 \omega_{gi}}{\omega(\omega^2 - \omega_{gi}^2)} \right] = -\epsilon_{yx} \quad (5.21)$$

$$\eta = \epsilon_{zz} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \right) \quad (5.22)$$

CAPÍTULO 6

ONDA PLANA EM UM PLASMA SOB UM CAMPO MAGNETOSTÁTICO

Nesta seção estudaremos as propriedades de propagação e polarização das ondas planas monocromáticas em um plasma homogêneo magnetizado, por simplicidade, assumido sem perdas. Consideraremos o plasma como um meio contínuo, cuja permissividade elétrica é o tensor $\hat{\epsilon}$ dado pelas equações (5.7), (5.8) e (5.9) da seção anterior.

Por definição, o vetor elétrico de uma onda monocromática tem a forma:

$$\vec{E}(\mathbf{r}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (6.1)$$

Podemos escrever \vec{k} como:

$$\vec{k} = \hat{n} \frac{\omega}{v} \quad (6.2)$$

onde \hat{n} é o vetor unitário na direção de propagação. Nosso problema é determinar o vetor \vec{k} que descreve a propagação da onda, e o vetor \vec{E}_0 , que descreve a sua polarização.

O vetor \vec{E} deve satisfazer a equação de Helmholtz

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \omega^2 \mu_0 \hat{\epsilon} \cdot \vec{E} \quad (6.3)$$

Como podemos ver das equações de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega \mu_0 \vec{H} \quad \nabla \times \vec{H} = -i\omega \hat{\epsilon} \cdot \vec{E} \quad (6.4)$$

Substituindo a equação (6.1) na equação (6.3) e, usando a relação (6.2) temos:

$$\vec{E}_0 - \hat{n} (\hat{n} \cdot \vec{E}_0) = \frac{1}{c^2} \frac{v^2}{c^2} \hat{\epsilon} \cdot \vec{E} \quad (6.5)$$

Sem a perda da generalização, tomaremos um sistema de coordenadas cartesianas, orientado de tal modo que, o eixo z é paralelo a \vec{B}_0 e o plano yz contém \hat{n} . Como mostra a figura (6.1) o ângulo entre \hat{n} e \vec{B}_0 , é θ .

Assim, as componentes x , y e z da equação (6.5) são dadas por:

$$E_{Ox} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_0}\right) - E_{Oy} \left(\frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_0}\right) + 0 = 0$$

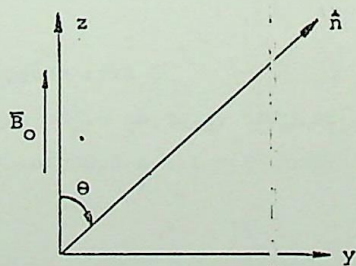
$$E_{Ox} \left(-\frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{yx}}{\epsilon_0}\right) + E_{Oy} (\cos^2 \theta - \frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_0}) + E_{Oz} (-\cos \theta \sin \theta) = 0 \quad (6.6)$$

$$0 + E_{Oy} (-\cos \theta \sin \theta) + E_{Oz} (\sin^2 \theta - \frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_0}) = 0$$

onde E_{Ox} , E_{Oy} , E_{Oz} são as componentes cartesianas de \vec{E}_0 . Como estas três equações simultâneas, são homogêneas, elas possuem uma solução não trivial somente quando:

Fig. 6.1

Dirção arbitrária \hat{n} de propagação de uma onda no plasma, sob um campo magnetostático.



$$\begin{vmatrix}
 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_0}\right) & -\frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_0} & 0 \\
 -\frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{yx}}{\epsilon_0} & \left(\cos^2 \theta - \frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_0}\right) & -\operatorname{sen} \theta \cos \theta \\
 0 & -\operatorname{sen} \theta \cos \theta & \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_0}
 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.7)$$

Com o auxílio das quantidades ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_3 , as quais são definidas como:

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_0} - i \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_0} \quad \epsilon_2 = \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_0} + i \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_0} \quad \epsilon_3 = \frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_0} \quad (6.8)$$

encontramos que a equação (6.7) pode ser escrita como:

$$-\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{\left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{\epsilon_1}\right) \left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{\epsilon_2}\right)}{\left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{\epsilon_3}\right) \left[\frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2}\right)\right]} \quad (6.9)$$

Esta equação determina dois valores de v^2/c^2 para cada valor de θ . No caso em que a propagação é paralela a \vec{B}_0 temos $\theta = 0$ e a equação (6.9) nos dá duas soluções:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\epsilon_1} = \frac{1}{\frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_0} - i \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_0}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{1+y}} \quad (6.10)$$

e

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\epsilon_2} = \frac{1}{\frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_0} + i \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_0}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{1-y}} \quad (6.11)$$

onde $x = (w_p/w)^2$ e $y = -w_g/w$. Destas expressões, segue-se que, a constante de propagação das duas ondas, que caminham paralela-mente a \vec{B}_0 , são dadas por:

$$k'_0 = \frac{w}{c} \sqrt{1 - \frac{x}{1+y}} = \frac{w}{c} \sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w(w-w_g)}} \quad (6.12)$$

e

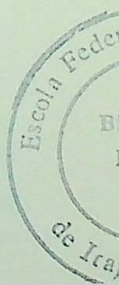
$$k''_0 = \frac{w}{c} \sqrt{1 - \frac{x}{1-y}} = \frac{w}{c} \sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w(w+w_g)}} \quad (6.13)$$

Quando a propagação é ao longo do eixo y , isto é, perpendicular a \vec{B}_0 , $\theta = \frac{\pi}{2}$ e neste caso as duas soluções da equação (6.9) são:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\epsilon_3} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{zz}} = \frac{1}{1-x} \quad (6.14)$$

e

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right) = \frac{1}{1 - \frac{x}{1-y^2/(1-x)}} \quad (6.15)$$



Para a constante de propagação das duas ondas correspondentes, temos:

$$k'_{\Pi/2} = \frac{w}{c} \sqrt{1-x} = \frac{w}{c} \sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w^2}} \quad (6.16)$$

e

$$k''_{\Pi/2} = \frac{w}{c} \sqrt{1 - \frac{x}{1-y^2/(1-x)}} = \frac{w}{c} \sqrt{1 - \frac{w_p^2/w^2}{1-w_g^2/(w^2-w_p^2)}} \quad (6.17)$$

Em geral, θ é arbitrário, e temos as duas soluções:

$$\frac{v^2}{c^2} = \left[1 - \frac{x}{1 - \frac{1}{2} \frac{x_T^2}{1-x} + \sqrt{\frac{1}{4} \frac{x_T^4}{(1-x)^2} + y_L^2}} \right]^{-1} \quad (6.18)$$

e assim,

$$k'_{\theta} = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{x}{1 - \frac{1}{2} \frac{x_T^2}{1-x} + \sqrt{\frac{1}{4} \frac{y_T^4}{(1-x)^2} + y_L^2}} \right]^{1/2} \quad (6.19)$$

$$k''_{\theta} = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{x}{1 - \frac{1}{2} \frac{x_T^2}{1-x} - \sqrt{\frac{1}{4} \frac{y_T^4}{(1-x)^2} + y_L^2}} \right]^{1/2} \quad (6.20)$$

sendo $x_T = y \sin \theta$ e $y_L = y \cos \theta$. Como uma função de x , a constante de propagação k'_{θ} assemelha-se à constante de propagação de uma onda, em uma plasma isotrópico, mais do que

k_θ'' . A onda cuja constante de propagação é k_θ' é, às vezes, denominada como a onda ordinária, enquanto que, a onda cuja constante de propagação é k_θ'' , como a onda extraordinária.

Cada um dos campos da onda é proporcional a $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$. Portanto, as equações de Maxwell,

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \quad \text{e} \quad \nabla \times \vec{H} = -i\omega\vec{D}$$

reduzem-se às relações:

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega\mu_0\vec{H} \quad \text{e} \quad i\vec{k} \times \vec{H} = i\omega\vec{D} \quad (6.21)$$

mostrando que os vetores \vec{k} , \vec{E} e \vec{D} estão em um plano perpendicular a \vec{H} . Fig. (6.2).

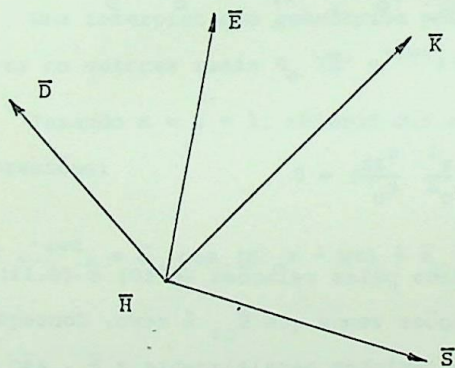


Fig. 6.2

Os vetores \vec{K} , \vec{E} , \vec{D} e \vec{S} estão no plano do papel e \vec{H} em um plano perpendicular a este. \vec{D} e \vec{H} são perpendiculares a \vec{K} . \vec{S} é perpendicular a \vec{E} e \vec{H} . \vec{S} não é, em geral, paralelo a \vec{K} .

Como \bar{H} é perpendicular a \bar{K} , a onda não pode ser TE. Em geral, a onda pode ser TM, mas em certas direções especiais, a onda é uma onda TEM. O vetor de Poyting da onda, não é paralelo a \bar{K} , exceto, naquelas direções de propagação, onde a onda é TEM.

Vamos, novamente, considerar o caso especial, onde a propagação é paralela a \bar{B}_0 . Neste caso, $\theta = 0$ e as equações (6.6) reduzem-se a:

$$E_{Ox} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_0}\right) - E_{Oy} \left(\frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_0}\right) = 0$$

$$E_{Ox} \left(-\frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{yx}}{\epsilon_0}\right) + E_{Oy} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_0}\right) = 0 \quad (6.22)$$

$$E_{Oz} \left(-\frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_0}\right) = 0$$

onde v^2/c^2 é dado pelas relações (6.10) e (6.11). Da terceira dessas equações vemos que \bar{E}_{Oz} é zero. Consequentemente, as duas ondas que caminham paralelamente a \bar{B}_0 , são ondas TEM. Quando v^2/c^2 é dado pela relação (6.10), a primeira e a segunda das equações (6.22) dão:

$$\frac{E_{Ox}}{E_{Oy}} = 1 \quad (6.23)$$

e quando v^2/c^2 é dada pela equação (6.11), encontramos que:

$$\frac{E_{Ox}}{E_{Oy}} = -i$$

Portanto, os vetores elétricos, das duas ondas, caminhando paralelamente a \vec{B}_O , são escritos como:

$$\vec{E}' = (\vec{e}_x - i \vec{e}_y) A e^{i\vec{k}'_O z} \quad (6.24)$$

e

$$\vec{E}'' = (\vec{e}_x + i \vec{e}_y) C e^{i\vec{k}''_O z} \quad (6.25)$$

onde A e C são amplitudes arbitrárias.

\vec{E}' é uma onda circularmente polarizada à esquerda e, \vec{E}'' é uma onda circularmente polarizada à direita.

Uma interpretação geométrica pode ser obtida, considerando-se os vetores reais $R_e(\vec{E}' e^{-i\omega t})$ e $R_e(\vec{E}'' e^{-i\omega t})$.

Fazendo $A = C = 1$, obtemos das equações (6.24) e (6.25) as expressões:

$$R_e(\vec{E}' e^{-i\omega t}) = \vec{e}_x \cos(k'_O z - \omega t) + \vec{e}_y \sin(k'_O z - \omega t) \quad (6.26)$$

$$R_e(\vec{E}'' e^{-i\omega t}) = \vec{e}_x \cos(k''_O z - \omega t) - \vec{e}_y \sin(k''_O z - \omega t) \quad (6.27)$$

Em um determinado tempo, a extremidade do vetor $R_e(\vec{E}' e^{-i\omega t})$, está em uma espiral à direita. Quando o tempo aumenta, esta espiral gira no sentido anti-horário.

Por outro lado, a localização da extremidade do vetor $R_e(\bar{E}''e^{-i\omega t})$ está em uma espiral à esquerda, a qual gira no sentido horário.

A soma dessas duas ondas dá uma onda composta,

$$\bar{E} = \bar{E}' + \bar{E}'' = \bar{e}_x (Ae^{iK'_O z} + Ce^{iK''_O z}) + \bar{e}_y (-iAe^{iK'_O z} + iCe^{iK''_O z}) \quad (6.28)$$

Para estudar a polarização desta onda composta, consideraremos a razão E_x/E_y . Da relação (6.28) temos:

$$\frac{E_x}{E_y} = i \frac{1 + (C/A)e^{i(K''_O - K'_O)z}}{1 - (C/A)e^{i(K''_O - K'_O)z}} \quad (6.29)$$

Se as ondas \bar{E}' e \bar{E}'' são escolhidas com amplitudes iguais, então, as constantes A e C ficam iguais.

Como consequência desta escolha, a equação (6.29) reduz-se a:

$$\frac{E_x}{E_y} = \cotg\left(\frac{K''_O - K'_O}{2}z\right) \quad (6.30)$$

Como esta relação é real, a onda composta, em qualquer posição, é linearmente polarizada, entretanto, o ângulo de orientação deste plano de polarização (o plano contendo \bar{E} e \bar{K}) dependem de z e, giram, quando z aumenta ou diminui. Em outras palavras, a onda composta sofre uma rotação de Faraday. O ângulo τ a qual o vetor resultante E gira, quando a onda caminha uma distância unitária, é dado por:

$$\tau = \frac{K''_O - K'_O}{2} \quad (6.31)$$

A rotação é horária, porque $K'_0 > K''_0$ sempre. Com o auxílio das relações (6.12) e (6.13) vemos que τ é dado na forma:

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{w}{c} \left[\sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w(w-w_g)}} - \sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w(w+w_g)}} \right] \quad (6.32)$$

que dá a dependência da rotação de Faraday τ , com a frequência.

Se a onda caminha paralelamente a \vec{E}_0 , ela sofre uma rotação de Faraday horária. Por outro lado, se a onda caminha antiparalelamente a \vec{E}_0 , ela sofre uma rotação de Faraday no sentido oposto. Isto é, com a inversão da direção de propagação, a onda horária torna-se anti horária e, vice-versa.

Para campos fracos, a rotação Faraday, depende linearmente de \vec{E}_0 . Para deduzir este fato da relação (6.32), a qual em termos dos parâmetros $X = (w_p/w)^2$ e $Y = -w_g/w$ pode ser escrita como:

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{w}{c} \left(\sqrt{1 - \frac{X}{1+Y}} - \sqrt{1 - \frac{X}{1-Y}} \right) \quad (6.33)$$

expandiremos as raízes quadradas e, manteremos apenas os dois primeiros termos, de acordo com a suposição de que $X \ll 1$. Assim, obtemos a relação:

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{w}{c} XY = - \frac{1}{2c} \left(\frac{w_p}{w} \right)^2 w_g \quad (6.34)$$

que mostra que a rotação de Faraday τ , para campos fracos ($X \ll 1$) e frequências altas ($Y \ll 1$), é linearmente proporcional a w_g e, então, linearmente proporcional a \vec{E}_0 . Como w_g é negativo para

eletrons, vemos que τ é positivo (rotação horária) no caso de propagação paralela a \vec{B}_0 .

Em outro caso especial, a propagação sendo perpendicular a \vec{B}_0 , isto é, ao longo do eixo Y, temos $\theta = \frac{\pi}{2}$ e as equações (6.6) reduzem-se a:

$$E_{Ox} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{XX}}{\epsilon_0}\right) - E_{Oy} \left(\frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{XY}}{\epsilon_0}\right) = 0 \quad (6.35)$$

$$E_{Ox} \left(-\frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{YX}}{\epsilon_0}\right) + E_{Oy} \left(-\frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{YY}}{\epsilon_0}\right) = 0 \quad (6.36)$$

$$E_{Oz} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{ZZ}}{\epsilon_0}\right) = 0 \quad (6.37)$$

De acordo com a relação (6.14) escolhemos:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{XX}} \quad (6.38)$$

e então, das equações (6.35), (6.36) e (6.37) segue-se que E_{Ox} e E_{Oy} são identicamente nulos e, a única componente do vetor elétrico é E_{Oz} . Assim, vemos que uma das duas ondas, caminhando na direção y é uma onda TEM, linearmente polarizada, cujo vetor elétrico é paralelo a \vec{B}_0 e, tem a forma:

$$\vec{E}' = \vec{e}_z A e^{iK' \Pi/2} \quad (6.39)$$

onde A é uma constante arbitrária, como a constante de propagação $K' \Pi/2$, como é dada na equação (6.16), é independente de

\bar{B}_0 e, igual à constante de propagação de uma onda, em um plasma isotrópico, esta onda TEM (a onda ordinária) é independente de \bar{B}_0 em suas propriedades de propagação e, comporta-se como se fosse uma onda TEM em um plasma isotrópico.

Para obtermos a onda extraordinária propagando-se perpendicularmente a \bar{B}_0 , o outro valor possível de v^2/c^2 dado pela relação (6.15) é usado, Isto é,

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\epsilon_{xx}/\epsilon_0}{(\epsilon_{xx}/\epsilon_0)^2 + (\epsilon_{xy}/\epsilon_0)^2} \quad (6.40)$$

é substituído nas equações (6.35), (6.36) e (6.37). Assim, concluimos que, E_{Oz} desaparece e, temos:

$$\frac{E_{Ox}}{E_{Oy}} = -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{yx}} = i \frac{1-X-Y^2}{XY} \quad (6.41)$$

Portanto, o vetor elétrico da onda extraordinária, tem a forma:

$$\bar{E}'' = (i\bar{e}_x \frac{1-X-Y^2}{XY} + \bar{e}_y) C e^{iK''\pi/2Y} \quad (6.42)$$

onde C é uma constante arbitrária. O vetor magnético \bar{H}'' é obtido, substituindo-se \bar{E}'' na primeira das equações (6.21). Assim,

$$\bar{H}'' = -i\bar{e}_z \frac{K''\pi/2}{w\mu_0} \frac{1-X-Y^2}{XY} C e^{iK''\pi/2Y} \quad (6.43)$$

Das equações (6.42) e (6.43), vemos que a onda extraordinária, que caminha perpendicularmente a \bar{B}_0 , é uma onda TM, com seu vetor magnético paralelo a \bar{B}_0 .

Para propagação em uma direção arbitrária θ , segue-se da equação (6.6) que a razão ρ entre as componentes do vetor elétrico, perpendiculares a \hat{n} , é dada por:

$$\rho' = \frac{E'_X}{E'_\theta} = -\frac{i}{Y_L} \left[\frac{1}{2} \frac{Y_T^2}{1-X} - \sqrt{\frac{1}{4} \frac{Y_T^4}{(1-X)^2} + Y_L^2} \right] \quad (6.44)$$

para a onda ordinária, cuja constante de propagação é K'_θ ; e por:

$$\rho'' = \frac{E''_X}{E''_\theta} = -\frac{i}{Y_L} \left[\frac{1}{2} \frac{Y_T^2}{1-X} + \sqrt{\frac{1}{4} \frac{Y_T^4}{(1-X)^2} + Y_L^2} \right] \quad (6.45)$$

para a onda extraordinária, cuja constante de propagação é K''_θ . Aqui \bar{E}_θ é a componente de \bar{E} na direção do vetor unitário \bar{e}_θ ; o qual é definido por $\bar{e}_x \times \bar{e}_\theta = \hat{n}$.

Isto é $E_\theta = -E_z \sin \theta + E_y \cos \theta$. A razão E_x/E_θ é uma medida da polarização, da parte de \bar{E} , que é transversal à direção de propagação \hat{n} e, é, muitas vezes, chamada de fator de polarização.

A projeção da extremidade de \bar{E} sobre um plano transversal a \hat{n} , descreve uma elipse e, a onda é dita elipticamente polarizada. Vemos que $\rho' \rho'' = 1$ e, conseqüentemente, as ondas ordinária e extraordinária são opostamente polarizadas. No caso da onda ordinária, o sentido de polarização é anti-horário e, no caso da onda extraordinária, é horário. Veja figura (6.3).

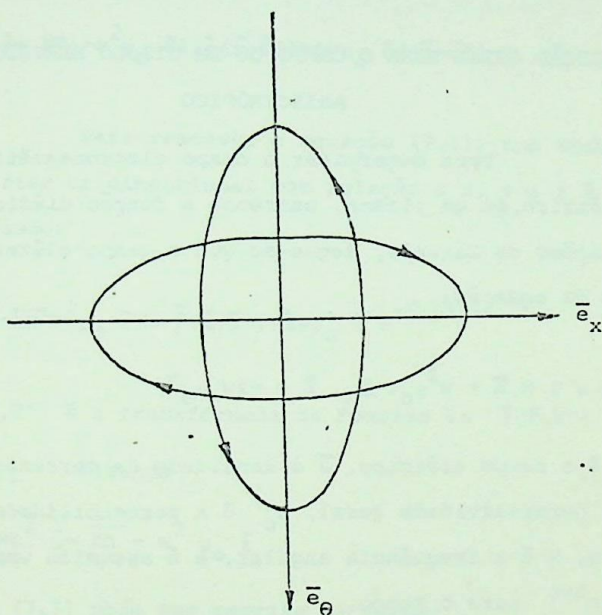


Fig. 6.3

Polarização elíptica das ondas ordinárias e extraordinária caminhando perpendicularmente ao plano do papel, para dentro.

CAPÍTULO 7

IRRADIAÇÃO DE UM DIPOLO ELÉTRICO EM UM PLASMA ANISOTRÓPICO

7.1. SOLUÇÃO GERAL PARA O CAMPO DE UM DIPOLO ELÉTRICO NO PLASMA ANISOTRÓPICO

Para determinar o campo eletromagnético de um dipolo elétrico, em um plasma, usaremos a função diádica de Green. Das equações de Maxwell, segue-se que o campo elétrico é uma solução da equação:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - w^2 \mu_0 \cdot \hat{\epsilon} \cdot \vec{E} = -iw \mu_0 \vec{J} \quad (7.1)$$

onde \vec{E} é o campo elétrico, \vec{J} a densidade de corrente, $\hat{\epsilon}$ é uma diádica permissividade geral, μ_0 é a permeabilidade do espaço livre, w é a frequência angular, e é assumido uma dependência de e^{iwt} para o tempo.

Devido a linearidade da equação (7.1), uma solução geral pode ser expressa como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_v \hat{f}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}') dv' \quad (7.2)$$

onde $\hat{f}(\vec{r}, \vec{r}')$ é a função diádica de Green e a integração é realizada sobre todo o volume v que contém correntes. Substituindo o valor de $\vec{E}(\vec{r})$ dado pela relação (7.2) na equação (7.1) e, invertendo a ordem de integração e diferenciação, obtemos:

$$\int_v [\nabla \times \nabla \times \hat{f}(\vec{r}, \vec{r}') - w^2 \mu_0 \hat{\epsilon} \cdot \hat{f}(\vec{r}, \vec{r}') + iw \mu_0 \hat{u} \delta(\vec{r} - \vec{r}')] \cdot \vec{J}(\vec{r}') dv' = 0 \quad (7.3)$$

onde $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ é a função Delta de Dirac tridimensional e \hat{u} é a diádica unitária. Esta equação é satisfeita se a quantidade entre colchetes é zero, a qual pode ser escrita como:

$$(-\nabla^2 \hat{u} + \nabla \nabla - w^2 \mu_0 \hat{\epsilon}) \cdot \hat{f}(\vec{r}, \vec{r}') = iw\mu_0 \hat{u} \delta(\vec{r}-\vec{r}') \quad (7.4)$$

Para resolver a equação (7.4), uma transformada de Fourier tridimensional com relação a x , y e z é utilizada, fornecendo:

$$(\hat{\lambda}^2 - \hat{h}\hat{h} - w^2 \mu_0 \hat{\epsilon}) \cdot \hat{f}(\vec{h}, \vec{r}') = iw\mu_0 \hat{u} e^{i\vec{h} \cdot \vec{r}'} \quad (7.5)$$

onde $\hat{f}(\vec{h}, \vec{r}')$ é a transformada de Fourier de $\hat{f}(\vec{r}, \vec{r}')$.

Fazendo

$$\hat{\lambda}(\vec{h}) = \hat{h}^2 - \hat{h}\hat{h} - w^2 \mu_0 \hat{\epsilon} \quad (7.6)$$

a equação (7.5) pode ser escrita na forma:

$$\hat{\lambda}(\vec{h}) \cdot \hat{f}(\vec{h}, \vec{r}') = iw\mu_0 \hat{u} e^{i\vec{h} \cdot \vec{r}'} \quad (7.7)$$

Multiplicando a equação (7.7) pela diádica inversa $\hat{\lambda}^{-1}$, teremos:

$$\hat{f}(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{iw\mu_0}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\lambda}^{-1} e^{-i\vec{h} \cdot (\vec{r}-\vec{r}')} d\vec{h} \quad (7.8)$$

A equação (7.8) é uma solução da equação (7.4); outra solução pode ser obtida somando-se soluções das equações homogêneas, mas como a equação (7.8) satisfaz a condição de

irradiação, esta é a solução desejada para a função diádica de Green em um meio ilimitado.

O campo de um dipolo elétrico na origem pode ser encontrado diretamente da função diádica de Green através da relação dada por C.H.Papús,⁷

$$\vec{E}(\vec{r}) = iw \hat{p}(\vec{r}, 0) \cdot \vec{p} \quad (7.9)$$

onde \vec{p} é o momento de dipolo. Como o campo distante do dipolo é de interesse, a integral da relação (7.8) deve ser avaliada para $|r-r'| \gg 1$. Isto foi feito por Bunkin¹⁰, por meio de um ponto de sela de aproximação e, uma forma modificada deste resultado será usado adiante. Para o caso de um plasma anisotrópico com o campo magnetostático na direção z positiva, a permissividade tem a forma:

$$\vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon & -ig & 0 \\ ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

onde ϵ , g e η são quantidades reais. Com esta forma para a permissividade, determinamos que o campo dado pela equação (7.9), em um ponto particular na região de radiação, é composta em geral, de várias ondas, caminhando em direções diferentes.

Como é mostrado por Bunkin¹⁰, em um meio caracterizado pela relação (5.1), uma onda ordinária e uma onda extraordinária, se propagam, com índices de refração dados por:

$$\eta_m^2 = \frac{[\epsilon(\epsilon-\eta)-g^2] \sin^2 \xi_m + 2\epsilon\eta + \{[\epsilon(\epsilon-\eta)-g^2]^2 \sin^4 \xi_m + 4\eta^2 g^2 \cos^2 \xi_m\}^{1/2}}{2\epsilon_0 (\epsilon \sin^2 \xi_m + \eta \cos^2 \xi_m)} \quad (7.10)$$

onde os índices inferior e superior, correspondem para $n=1, 2$ respectivamente. ϵ é a permissividade do espaço livre, e, ξ_1, ξ_2 são os ângulos entre as ondas normais e o campo magnético, para as ondas ordinária e extraordinária. Entretanto, pode haver mais de duas ondas em um ponto da região de radiação, correspondente a diferentes valores de ξ_1 e ξ_2 , isto é, pode haver mais de uma onda ordinária e uma onda extraordinária para o campo distante da fonte. Os valores considerados de ξ_1 e ξ_2 surgem, da avaliação de um ponto de sela e, são determinados da equação transcendental dada por Bunkin¹⁰,

$$t_g(\xi_m - \theta) = \frac{-\sin \xi_m \cos \xi_m \{n_m^2 \epsilon_0 (\epsilon - \eta) - [\epsilon(\epsilon - \eta) - g^2]\}}{2\eta_m^2 \epsilon_0 (\epsilon \sin^2 \xi_m + \eta \cos^2 \xi_m) - [\epsilon(\epsilon - \eta) - g^2] \sin^2 \xi_m - 2\epsilon\eta} \quad (7.11)$$

onde θ é o ângulo polar de um ponto, medido do eixo z positivo, no qual o campo é desejado (o ponto de observação). A equação (7.11) não está na forma dada por Bunkin¹⁰, mas pode ser derivada de seu resultado.

O número de valores considerados de ξ_1 e ξ_2 , para um valor particular de θ , como determinado pela equação (7.11), depende dos valores de ϵ , η e g . A figura (7.1) mostra a situação, no caso em que somente um valor de ξ_1 e ξ_2 é conside-

rado. As coordenadas esféricas do ponto de observação P, são r , θ e ϕ , o vetor unitário na direção r é \bar{e}_r e \bar{N}_1 e \bar{N}_2 são os vetores unitários nas direções normais às duas ondas.

Os vetores unitários \bar{N}_1 e \bar{N}_2 e o vetor unitário \bar{e}_r , são considerados no plano ϕ constante, mas, não são, em geral, paralelos. Para os casos nos quais mais de dois valores de ξ_1 e ξ_2 são considerados, a situação é análoga à da figura (7.1), exceto que, outras ondas normais podem estar presentes, embora, todas devam estar no plano ϕ constante.

Como é evidente da equação (7.11), ξ_1 e ξ_2 são funções de θ mas não de ϕ . O índice de refração para uma onda particular, é obtido colocando-se o valor apropriado de ξ_1 e ξ_2 na equação (7.10).

Bunkin¹⁰ dá as expressões para o campo do dipolo elétrico em termos de coordenadas cartesianas. Expressões mais compactas podem ser obtidas se, o campo de cada onda, na região de radiação, é expresso em termos de um vetor unitário perpendicular à frente de ondas, \bar{N}_m (a onda normal) e dois vetores unitários no plano tangente à frente de ondas, \bar{e}_ϕ e $\bar{\xi}_m = \bar{e}_\phi \times \bar{N}_m$. O vetor unitário \bar{e}_ϕ é o vetor unitário angular azimutal no sistema de coordenadas esféricas e, os vetores unitários \bar{N}_m e $\bar{\xi}_m$, são obtidos por rotação dos vetores unitários \bar{e}_r e \bar{e}_θ , sobre o vetor \bar{e}_ϕ , de um ângulo $(\theta - \xi_m)$, como mostrado na figura (7.2) para $m=1$. Então, cada onda na região de radiação, tem seu próprio sistema de coordenadas; \bar{e}_ϕ é comum para todos, embora \bar{N}_m e $\bar{\xi}_m$ são generalizados, nas diferentes direções, para cada onda. Em termos destes valores, o campo é dado por H.H. Kuehl¹¹, na forma:

$$\bar{E} = \frac{K^2}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{S.P.} \sum_{m=1}^2 A_m e^{-i\Psi_m Kr} \cdot (\bar{N}_m B_m + \bar{\xi}_m C_m + \bar{\epsilon}_m D_m) \quad (7.12)$$

onde A_m , Ψ_m , B_m , C_m e D_m são dados por

$$A_m = \frac{\cos\theta}{\cos\xi_m} \left\{ \frac{\text{sen}\xi_m (d\xi_m/d\theta)}{[(\epsilon-\eta)^2 n_m^4 \epsilon_0^2 \text{sen}^4 \xi_m - 4\eta g^2 (\eta_m^2 \epsilon_0 \text{sen}^2 \xi_m - \eta)] - \cos(\xi_m - \theta) \text{sen}\theta} \right\}^{1/2} \quad (7.13)$$

$$\Psi_m = n_m \cos(\xi_m - \theta) \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} B_m &= \text{sen}\xi_m (n_m^2 \epsilon_0 - \eta) [(n_m^2 \epsilon_0 - \epsilon) \cos \varphi + i g \text{sen} \varphi] p_x \\ &+ \text{sen} \xi_m (n_m^2 \epsilon_0 - \eta) [(n_m^2 \epsilon_0 - \epsilon) \text{sen} \varphi - i g \cos \varphi] p_y \\ &+ \cos \xi_m (n_m^2 \epsilon_0 - \epsilon - g) (n_m^2 \epsilon_0 - \epsilon + g) p_z \end{aligned} \quad (7.15)$$

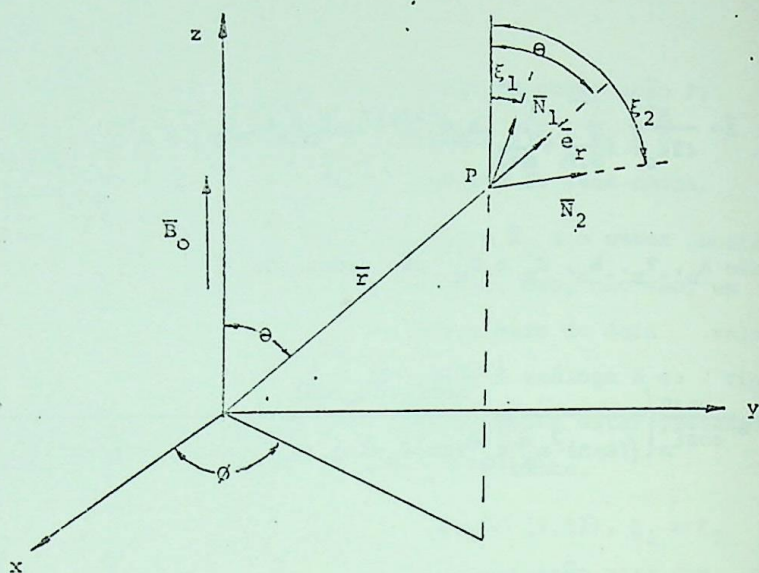


Fig. 7.1

Mostrando os vetores unitários $\bar{\Pi}_1$ e $\bar{\Pi}_2$ normais a uma onda ordinária e a uma onda extraordinária.

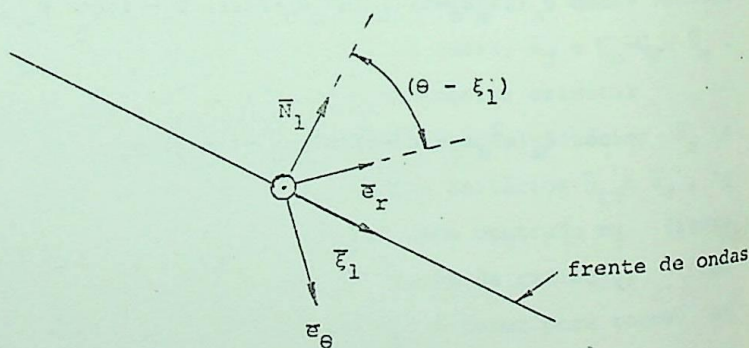


Fig. 7.2

Sistema de coordenadas, obtido por notação de um sistema esférico sobre \bar{e}_θ . A frente de ondas \bar{c} perpendicular a página.

$$C_m = - \frac{\eta \cos \xi_m}{\sin \xi_m (n_m^2 \epsilon_0 - \eta)} B_m \quad (7.16)$$

$$D_m = \frac{-ig(n_m^2 \epsilon_0 \sin^2 \xi_m - \eta)}{\eta(n_m^2 \epsilon_0 - \epsilon) \cos \xi_m} C_m \quad (7.17)$$

Na expressão (7.12) $K^2 = w^2 \mu_0 \epsilon_0$ e as letras S.P. sob o primeiro somatório, denotam a soma sobre todos os pontos de sela determinados da equação (7.11).

Na expressão (7.15) as quantidades p_x, p_y e p_z , são as componentes do momento de dipolo nas direções x, y , e z , respectivamente.

Podemos observar das equações precedentes que, as componentes do campo elétrico da emésima onda, ao longo de \bar{N}_m e $\bar{\xi}_m$, estão em fase (ou defasados de 180°) e que, a componente ao longo de \bar{e}_ϕ é 90° defasada com as outras duas componentes. Então, o campo de cada onda é, em geral, elipticamente polarizada, no plano de sua frente de ondas.

Pode-se notar que o sinal da amplitude da função A_m , dada pela relação (7.13), não é determinado, por causa das duas escolhas possíveis para o sinal da raiz quadrada no termo da direita. Esta diferença de 180° na fase, corresponde a duas posições possíveis do cruzamento dos pontos de sela determinados pela equação (7.11).

A quantidade $d\xi_m/d\theta$ que aparece na equação (7.13) é obtida pela diferenciação da equação (7.11), e o resultado é dado por H.H.Kuehl¹¹.

É evidente das equações (7.13) a (7.17) que, t_0 do campo distante da fonte, depende dos ângulos ξ_1 e ξ_2 , os quais são soluções da equação (7.11). Infelizmente, no caso geral não é possível resolver a equação (7.11) explicitamente para ξ_m , em termos de θ . Porém, algumas soluções podem ser obtidas para certos casos especiais. Um caso importante é aquele em que $g=0$ o qual ocorre, por exemplo, em um cristal uniaxial e, em um plasma com um campo magnetostático infinito. Para $g=0$, resulta da equação (7.10):

$$n_1^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad ; \quad n_2^2 = \frac{\eta}{\epsilon_0 (\epsilon \sin^2 \xi_2 + \eta \cos^2 \xi_2)} \quad (7.18)$$

e com estes valores, n_1 e n_2 , temos da equação (7.11):

$$\text{tg}(\xi_1 - \theta) = 0 \quad (7.19)$$

$$\text{tg}(\xi_2 - \theta) = - \frac{(\epsilon - \eta) \text{sen} \xi_2 \cos \xi_1}{\epsilon \text{sen}^2 \xi_2 + \eta \cos^2 \xi_2} \quad (7.20)$$

Resolvendo a equação (7.19) obtemos:

$$\xi_1 = \theta \quad ; \quad \text{tg} \xi_2 = (\eta/\epsilon) \text{tg} \theta \quad (7.21)$$

A equação (7.13) nos dá:

$$A_1 = \frac{1}{\epsilon (\epsilon - \eta) \text{sen}^2 \theta} \quad (7.22)$$

$$A_2 = \frac{(\epsilon \cos^2 \theta + \eta \sin^2 \theta)^{1/2}}{\eta \epsilon^{1/2} (\epsilon - \eta) \sin^2 \theta} \quad (7.22)$$

Usando as equações (7.15), (7.16) e (7.17), obtemos para um di polo na direção x

$$B_1 = 0 \quad ; \quad C_1 = 0 \quad ; \quad D_1 = \epsilon(\epsilon - \eta) p_x \sin^2 \theta \sin \phi \quad (7.23)$$

Analogamente, para a segunda onda temos:

$$B_2 = p_x (\eta_2^2 \epsilon_o - \eta) (\eta_2 \epsilon_o - \epsilon) \sin \xi_2 \cos \phi$$

$$C_2 = -p_x \eta (\eta_2^2 \epsilon_o - \epsilon) \cos \xi_2 \cos \phi \quad (7.24)$$

$$D_2 = 0$$

Assim, da equação (7.12) obtemos:

$$\bar{E} = (-K^2/4\epsilon_o r) \{ A_1 D_1 \bar{e}_\phi \bar{e}^{-i\psi_1 Kr} - A_2 p_x (\eta_2^2 \epsilon_o - \epsilon) \cos \phi \bar{e}^{-i\psi_2 Kr} \cdot [(\eta_2^2 \epsilon_o - \eta) \sin \xi_2 \bar{N}_2 - \eta \cos \xi_2 \bar{\xi}_2] \} \quad (7.25)$$

Esta equação pode ser expressa em coordena das esféricas usando as seguintes relações:

$$\bar{e}_r \cdot \bar{N}_m = \cos (\xi_m - \theta) \quad (7.26)$$

$$\bar{e}_r \cdot \bar{\xi}_m = \sin (\xi_m - \theta) \quad (7.27)$$

$$\bar{e}_{\theta} \cdot \bar{N}_m = \text{sen}(\xi_m - \theta) \quad (7.28)$$

$$\bar{e}_{\theta} \cdot \bar{\xi}_m = \cos(\xi_m - \theta) \quad (7.29)$$

Usando estas equações, juntamente com as equações (7.18) e (7.20) obtemos:

$$\bar{E} = - \frac{K^2 p_x}{4\pi \epsilon_0 r} \text{sen} \theta \bar{e}_{\theta} \bar{e}^{i\psi_1 Kr} - \frac{\eta \cos \theta \cos \theta \bar{e}_{\theta} \bar{e}^{i\psi_2 Kr}}{\epsilon [\cos^2 \theta + (\eta/\epsilon) \text{sen}^2 \theta]^{3/2}} \quad (7.30)$$

onde, como podemos mostrar das equações (7.18) e (7.20):

$$\psi_1 = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/2} ; \quad \psi_2 = \left[\frac{\epsilon}{\epsilon_0} (\cos^2 \theta + \frac{\eta}{\epsilon} \text{sen}^2 \theta) \right]^{1/2} \quad (7.31)$$

Os sinais corretos dos dois termos da equação (7.30) foram colocados por se notar que, se $\epsilon = \eta$, o campo deve reduzir-se ao campo conhecido de um meio isotrópico. Pode ser mostrado que o campo magnético associado é dado por:

$$\bar{H} = \frac{K^2 p_x}{4\pi \epsilon_0 r} \left(\frac{\epsilon}{\mu_0}\right)^{1/2} \left\{ \text{sen} \theta \bar{e}_{\theta} \bar{e}^{i\psi_1 Kr} + \frac{\eta \cos \theta \cos \theta \bar{e}_{\theta} \bar{e}^{i\psi_2 Kr}}{\epsilon [\cos^2 \theta + (\frac{\eta}{\epsilon}) \text{sen}^2 \theta]} \right\} \quad (7.32)$$

O valor médio do vetor de Poynting é puramente radial se ψ_1 e ψ_2 são reais, e é dado por:

$$\langle \bar{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [\bar{E} \times \bar{H}^*] = \bar{e}_r \cdot \frac{K^4 p_x^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^2} \left(\frac{\epsilon}{\mu_0}\right)^{1/2}$$

$$\left\{ \frac{\eta^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{\epsilon^2 [\cos^2 \theta + (\eta/\epsilon) \sin^2 \theta]} + \sin^2 \varphi \right\} \quad (7.33)$$

A solução para um dipolo na direção z é obtida de uma maneira análoga, com os seguintes resultados:

$$\vec{E} = \frac{-K^2 p_x n \sin \theta \bar{e}_\theta \bar{e}^{-i\psi} 2Kr}{4\pi \epsilon_0 r [\cos^2 \theta + (\eta/\epsilon) \sin^2 \theta]^{3/2}} \quad (7.34)$$

$$\vec{H} = \frac{K^2 p_x n \sin \theta \bar{e}_\varphi \bar{e}^{-i\psi} 2Kr}{4\pi \epsilon_0 r (\epsilon \mu_0)^{1/2} [\cos^2 \theta + (\eta/\epsilon) \sin^2 \theta]} \quad (7.35)$$

$$\langle \vec{s} \rangle = \bar{e}_r \frac{K^4 p_z^2 \eta^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^2 \epsilon (\epsilon \mu_0)^{1/2} [\cos^2 \theta + (\eta/\epsilon) \sin^2 \theta]^{5/2}} \quad (7.36)$$

Das equações anteriores é evidente que, para $g=0$, duas ondas podem existir na região de radiação. Cada uma delas é linearmente polarizada, embora as direções de polarização sejam perpendiculares. O dipolo na direção x excita ambas as ondas, produzindo uma, elipticamente polarizada, enquanto o dipolo na direção z excita somente uma onda, linearmente polarizada.

O vetor de Poynting médio é radial em ambos os

CASOS.

As equações precedentes são aplicáveis para um cristal ou para um plasma com um campo magnetostático infinito, que é o nosso caso.

As equações de (7.12) a (7.17) se mantêm para um meio tendo uma permissividade da forma dada pela equação (7.9).

Para um plasma, os valores apropriados de ϵ , η e g devem ser usados. Para o campo magnetostático na direção z e, um campo eletromagnético fraco já vimos que:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_g^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega - \omega_{gi}} \right) = \epsilon_{yy} \quad (5.20)$$

$$g = \epsilon_{xy} = -i\epsilon_0 \left[\frac{\omega_p^2 \omega_{gi}}{\omega(\omega^2 - \omega_g^2)} + \frac{\omega_{pi}^2 \omega_{gi}}{\omega(\omega^2 - \omega_{gi}^2)} \right] = -\epsilon_{yx} \quad (5.21)$$

$$\eta = \epsilon_{zz} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \right) \quad (5.22)$$

onde ω_p e ω_{pi} são as frequências angulares do elétron e do íon, do plasma, e, ω_g e ω_{gi} são as girofrequências angulares do elétron e do íon, respectivamente (ambas tomadas como positivas).

7.2 - CAMPO DO DIPOLO QUANDO O MOVIMENTO DOS IONS É DESPREZADO

Em muitos casos importantes, a frequência de operação é suficientemente alta, podendo-se desprezar o movimento de ions. Podemos verificar nas equações (5.20), (5.21) e (5.22) que, os termos surgidos dos ions, podem ser desprezados se assumirmos simplesmente ions carregados.

$$\omega^2 \gg \omega_{ki}^2 (M/m) = \omega_g^2 (m/M) \quad (7.37)$$

onde m e M são as massas do eletron e do ion respectivamente.

Com a condição da equação (7.37), as equações (5.20), (5.21) e (5.22) se transformam em:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 (1 - \omega_g^2/\omega^2)} \right] \quad (7.38)$$

$$n = \epsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right] \quad (7.39)$$

$$g = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2 \omega_g}{\omega^3 (1 - \omega_g^2/\omega^2)} \quad (7.40)$$

Substituindo-se as relações (7.38), (7.39) e (7.40) na equação (7.10), a expressão para os índices de refração fica:

$$n_m^2 = \frac{\frac{\omega_p^2 \omega_g^2}{\omega^4} \sin^4 \xi_m + 2 \left(1 - \frac{\omega_g^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) + \frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega^3} \left[\frac{\omega_g^2}{\omega^2} \sin^4 \xi_m + \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \cos^2 \xi_m \right]^{1/2}}{2 \left(1 - \frac{\omega_g^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2 \omega_g^2}{\omega^4} \cos \xi_m\right)} \quad (7.41)$$

Usando as equações (7.38) até (7.41), a equação (7.11) torna-se:

$$\operatorname{tg}(\xi_m - \theta) = \frac{-(-1)^m \operatorname{sen} \xi_m \cos \xi_m (n_m^2 - 1)}{\left[(w_g^2/w) \operatorname{sen}^4 \xi_m + 4(1-w_p^2) \cos^2 \xi_m \right]^{1/2}} \quad (7.42)$$

Infelizmente, esta equação não pode ser, em geral, resolvida explicitamente para ξ_1 e ξ_2 , em termos de θ . Há porém, alguns casos limites para os quais uma solução explícita é possível; esta será considerada adiante. Soluções obtidas com o auxílio de um computador digital para w_p/w e w_g/w entre zero e 2,0 são dadas por H.H.Kuehl(11).

É evidente da equação (7.37) que, se

$$(\xi_m - \theta) = \pm 90^\circ \quad (7.43)$$

o termo da esquerda possui um polo. O termo da direita deve ser, então, ilimitado também, o que pode ocorrer, somente se n_m^2 tem um polo, pois o denominador do termo da direita nunca é zero. O valor de ξ_m , para o qual n_m^2 é ilimitado, é determinado pela relação:

$$\cos^2 \xi_m = \frac{w^4}{w_p^2 w_g w^2} \left(-\frac{w_g}{w} + \frac{w_p^2}{w^2} - 1 \right) \quad (7.44)$$

assim o denominador da equação (7.41) é, então, zero. n_1^2 ou n_2^2 tem um polo (nunca ambos) quando ξ_1 ou ξ_2 satisfazem (7.44),

o numerador de (7.41) desaparece, simultaneamente, para o caso ordinário ou extraordinário, dependendo dos valores de w_p/w e w_g/w . Combinando (7.43) e (7.44), temos que, um polo de n_1^2 ou n_2^2 ocorre, quando a condição:

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{w^4}{w_p^2 w_g^2} \left(\frac{w_p}{w^2} + \frac{w_g}{w^2} - 1 \right) \quad (7.45)$$

é satisfeita, a qual define um cone de semi ângulo θ . Nas vizinhanças deste cone, concluímos da equação (7.13) que, a amplitude da função A_m satisfaz a relação:

$$I_m \propto \left[n_m^2 \cos(\xi_m - \theta) \right]^{-1} \quad (7.46)$$

onde m corresponde a uma onda que possui o polo.

Analogamente, das equações (7.15) a (7.17) obtemos:

$$E_m \propto n_m^4 ; \quad C_m \propto n_m^2 ; \quad D_m \propto n_m^2 \quad (7.47)$$

Usando estas expressões na equação (7.12), encontramos que, as três componentes do campo elétrico, da onda, são proporcionais às três quantidades:

$$n_m^2 / [\cos(\xi_m - \theta)]^{1/2} ; \quad 1/\cos(\xi_m - \theta) \quad \text{e} \quad 1/[\cos(\xi_m - \theta)]^{1/2}$$

Estas três quantidades divergem sobre o cone dado pela relação (7.6), tal que $\bar{E} \rightarrow \infty$.

Encontramos que, o fluxo total de potência do dipolo, também diverge. Este comportamento é considerado em detalhe por Arbel¹⁶, que mostra que esta divergência é devida à consideração de um dipolo infinitesimal, enquanto qualquer fonte prática, com dimensões não nulas, não poderia ter um fluxo de potência ilimitado, embora, o campo torna-se muito grande, perto do cone dado pela equação (7.46).

O comportamento exato do campo, perto deste cone, não será considerado aqui, desde que, a consideração prévia de um campo eletromagnético fraco seja violada, tal que o plasma não possa ser mais representado pelo tensor permissividade, dado pelas equações (7.38), (7.39) e (7.40).

É suficiente para a presente análise, notar que o campo perto do cone, definido pela equação (7.46), torna-se grande, comparado com aquele em outras direções.

Outra divergência aparente no campo, ocorre, quando $\frac{d}{d\theta} = \infty$, desde que para este caso a equação (7.13) dá $A_m = \infty$. Portanto, a equação (7.13) não é válida sob esta condição, pois ela foi derivada usando o método do ponto de sela de primeira ordem, o qual requer que $\frac{d}{d\theta} \neq \infty$.

Para obter o campo, neste caso, o método do ponto de sela de segunda ordem deve ser usado.

Arbel¹⁶ achou que o campo não diverge, mas varia com $1/r^{5/6}$ ao invés de $1/r$.

Em geral, o campo calculado das equações (7.12) e (7.42) é muito complicado. A natureza do campo depende dos valores relativos de w , w_g e w_p e é encontrado que, muitas con

figurações diferentes de campos são possíveis, dependendo dos valores desses parâmetros¹¹. Em uma região particular, na zona de radiação, é possível haver de zero a quatro ondas presentes caminhando em direções diferentes, com velocidades diferentes.

Pode ser mostrado que o vetor de Poynting médio de uma onda particular, na região de radiação, é puramente radial e, é dado por¹¹:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{-k^5 n_A^2 B^2 \eta \cos \xi}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \mu_0 w r^2 \sin \xi (n^2 \epsilon_0 - n) \sin(\zeta - \theta)} \vec{e}_r \quad (7.48)$$

onde os subíndices foram tirados, desde que a equação (7.48) se mantém, para qualquer onda na região de radiação. Tem sido mostrado¹⁷ que, o vetor de Poynting médio e a velocidade de grupo, de uma onda plana, são paralelos, em um meio girotrópico arbitrário, tal que a velocidade de grupo de uma onda particular no plano é também na direção radial. Se mais de uma onda existe, a expressão para $\langle \vec{S} \rangle$ torna-se mais complicada, existindo componentes em outras direções, além da radial.

7.3 - CAMPO DO DIPOLO QUANDO A FREQUÊNCIA DE OPERAÇÃO É ALTA

Sob as condições:

$$w_F/w^2 \ll 1; \quad w_G^2/w^2 \ll 1 \quad (7.49)$$

é fácil avaliar as expressões para o campo, explicitamente. Para um dipolo na direção z , \vec{E} é dado por:

$$\vec{E} = - \frac{K^2 p_z \text{sen} \theta \vec{e}}{4 \pi \epsilon_0 r} \cdot (\vec{e}_\theta \cos \beta r - \vec{e}_\phi \text{sen} \beta r)$$

onde:

$$\beta = (w_p^2 w_g^2 / 2w^3) \cos \theta \quad (7.51)$$

É evidente, que a amplitude é idêntica para o caso isotrópico, mas, uma rotação de Faraday, para o campo elétrico, toma lugar. A rotação de \vec{E} por unidade de comprimento é dada pela equação (7.51). Para um dipolo na direção x obtemos:

$$\vec{E} = \frac{K^2 p_x \vec{e}}{4 \pi \epsilon_0 r} \cdot (1 - \text{sen}^2 \theta \cos^2 \phi)^{1/2}$$

$$\cdot \vec{e}_\theta \cos(\beta r + \alpha) - \vec{e}_\phi \text{sen}(\beta r + \alpha) \quad (7.52)$$

onde:

$$\alpha = \text{tg}^{-1} (\text{sen} \phi / \cos \theta \cos \phi) \quad (7.53)$$

A amplitude é, da mesma forma, igual à do caso isotrópico, mas, a rotação de Faraday é outra vez presente.

7.4 - CAMPO DO DIPOLO QUANDO O CAMPO MAGNETOSTÁTICO NO PLASMA É INFINITO

Para esta situação é possível determinar o cam

po distante do dipolo, explicitamente. Embora esta condição, é claro, não possa ser obtida na prática, o resultado dado aqui pode ser usado com uma aproximação, sob as condições:

$$w_g \gg w ; \quad w_g \gg w_p \quad (7.54)$$

Com a condição:

$$w_g^2/w^2 \rightarrow \infty \quad (7.55)$$

as equações (7.38), (7.39) e (7.40) tornam-se

$$\epsilon = \epsilon_0 \quad (7.56)$$

$$\eta = \epsilon_0 \left(1 - \frac{w_p^2}{w^2}\right) \quad (7.57)$$

$$g = 0 \quad (7.58)$$

Desde que $g=0$, a solução dada anteriormente pode ser usada. Substituindo as relações (7.56), (7.57) e (7.58), nas equações (7.30), (7.31) e (7.32), obtemos para um dipolo na direção x :

$$\vec{E} = \frac{k^2 p_x}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \frac{(1-w_p^2/w^2) \cos\theta \cos\theta e^{-i\psi} 1^{Kr}}{[1-(w_p^2/w^2) \sin^2\theta]^{3/2}} \vec{e}_\theta - \sin\theta e^{-iKr} \vec{e}_\phi \right\} \quad (7.59)$$

$$\vec{H} = \frac{k^2 p_x}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \left\{ \sin\theta e^{-iKr} \vec{e}_\theta + \frac{(1-w_p^2/w^2) \cos\theta \cos\theta e^{-i\psi} 1^{Kr}}{[1-(w_p^2/w^2) \sin^2\theta]} \vec{e}_\phi \right\} \quad (7.60)$$

onde

$$\psi_1 = \left[1 - (w_p/w)^2 \sin^2 \theta \right]^{1/2} \quad (7.61)$$

Da equação (7.38) tiramos para o vetor de Poynting médio:

$$\langle \bar{S} \rangle = \bar{e}_r \frac{K^4 p_x^2}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 r^2} \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\left[1 - (w_p/w)^2 \right]^2 \cos^2 \theta \cos^2 \theta}{\left[1 - (w_p/w)^2 \sin^2 \theta \right]^{5/2}} + \sin^2 \theta \right\} \quad (7.62)$$

para $\psi_1^2 > 0$. Se $\psi_1^2 < 0$, a primeira onda não contribui à grandes distâncias, porque ela é atenuada e, obtemos então:

$$\langle \bar{S} \rangle = \bar{e}_r \frac{K^4 p_x^2}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 r^2} \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \sin^2 \theta \quad (7.63)$$

Os diagramas de irradiação correspondente às equações (7.62) e (7.63) são mostradas nas figuras (7.3) e (7.4) para $w_p/w < 1$ e $w_p/w > 1$, respectivamente, no plano x-z, para vários valores de w_p/w . Para $w_p/w < 1$ é observado que, quando w_p/w aproxima-se de um, a intensidade irradiação diminui, enquanto, diminui consideravelmente a diretividade.

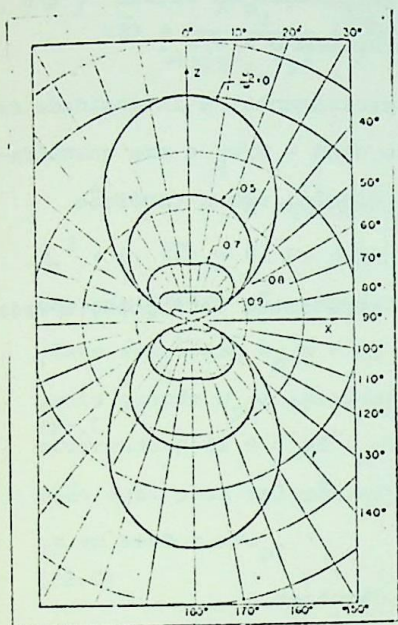
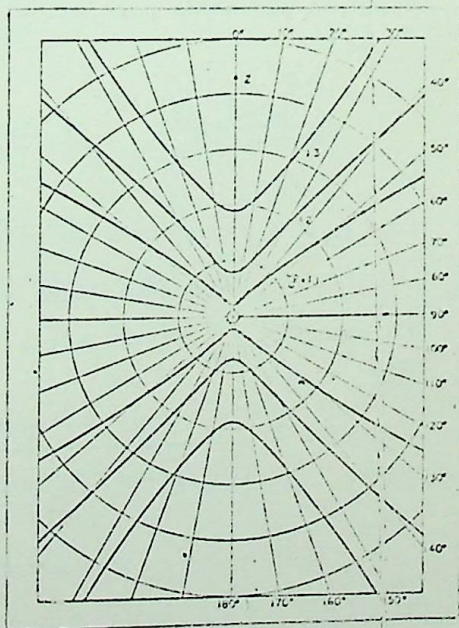


Fig. 7.3 - Diagramas de irradiação no plano x-z para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{B}_0) com $w_p/w < 1$, desprezando-se o efeito colisões.

Fig. 7.4 - Diagramas de irradiação no plano x-z para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{B}_0) com $w_p/w > 1$, desprezando-se o efeito colisões.



Para $w_p/w > 1$ e $\vartheta = 0$ não há irradiação na região $\psi_1^2 < 0$, a qual corresponde à região angular $\text{sen } \theta > w/w_p$.

Como foi notado previamente, a intensidade de $\langle \bar{S} \rangle$ aumenta, sem limite, perto de $\text{sen } \theta = w/w_p$ e uma quantidade infinita de potência emana do dipolo, sob a condição $w/w_p > 1$.

A resistência de irradiação do dipolo, é dada por:

$$R_r = 2\bar{W}/I^2 \quad (7.64)$$

onde,

$$I = \frac{w_p x}{\ell} \quad (7.65)$$

sendo ℓ o comprimento do dipolo. Se $w_p/w < 1$, a equação (7.62) pode ser usada para calcular R_r , com o seguinte resultado:

$$R_r = \frac{\pi \ell^2}{\epsilon \lambda_o^2} \left(\frac{\mu_o}{\epsilon_o} \right)^{1/2} \left[3 + \left(1 - \frac{w_p^2}{w^2} \right)^2 \right] \quad (7.66)$$

onde λ_o é o comprimento de onda no espaço livre.

O campo para um dipolo na direção z é obtido das equações (7.39), (7.40) e (7.41). Os resultados são:

$$\bar{E} = - \frac{K^2 P_z^2 (1 - w_p^2/w^2) \text{sen } \theta e^{-i\psi} l^{Kr}}{4 \pi \epsilon_o r [1 - (w_p^2/w^2) \text{sen}^2 \theta]^{1/2}} \bar{e}_\theta \quad (7.67)$$

$$\bar{H} = - \frac{K^2 P_z^2}{4 \pi \epsilon_o r} \left(\frac{c_o}{\mu_o} \right)^{1/2} \frac{(1 - w_p^2/w^2) \text{sen}^2 \theta}{[1 - (w_p^2/w^2) \text{sen}^2 \theta]} \bar{e}_\vartheta \quad (7.68)$$

$$\langle \bar{S} \rangle = \frac{K^4 p_z^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^2} \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{(1 - w_p^2/w^2)^2 \sin^2 \theta}{\left[1 - (w_p^2/w^2) \sin^2 \theta \right]^{5/2}} \bar{e}_r \quad (7.69)$$

A equação (7.69) é válida para $\psi_1^2 > 0$; para $\psi_1^2 < 0$, $\langle \bar{S} \rangle = 0$. Os diagramas de irradiação correspondentes à equação (7.69) são mostrados nas figuras (7.5) e (7.6) para o plano x-z. Para $w_p/w < 1$, a diretividade aumenta consideravelmente quando w_p/w aproxima-se de um, com a irradiação máxima ocorrendo para $\theta = 90^\circ$. Se $w_p/w > 1$, não há irradiação na região dada pela relação $\sin \theta > w/w_p$ e, o campo novamente diverge em $\sin \theta = w/w_p$.

A resistência de irradiação para $w_p/w < 1$ é dada por:

$$R_r = (2\pi \lambda^2 / 3\lambda_0^2) \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (7.70)$$

7.5 - CAMPO DO DIPOLO QUANDO A FREQUÊNCIA DE OPERAÇÃO É BAIXA

Baixas frequências de operação, serão tomadas aqui, no intervalo de frequências bastante baixas, tal que as condições:

$$w_g/w \gg 1; \quad w_p/w \gg 1 \quad (7.71)$$

são satisfeitas, mas, suficientemente altas para que o movimento dos ions possa ser desprezado, isto é, a equação (7.37) é satis

feita, Sob estas condições e, se $\cos \xi \neq 0$, a equação (7.41) torna-se:

$$n_{1,2}^2 = \pm w_p^2 / w w_{\phi} \cos \xi_{1,2} \quad (7.72)$$

Como somente n_1^2 é positivo, a equação (7.42) torna-se:

$$\text{tg}(\xi_1 - \theta) = \frac{1}{2} \text{tg} \xi_1 \quad (7.73)$$

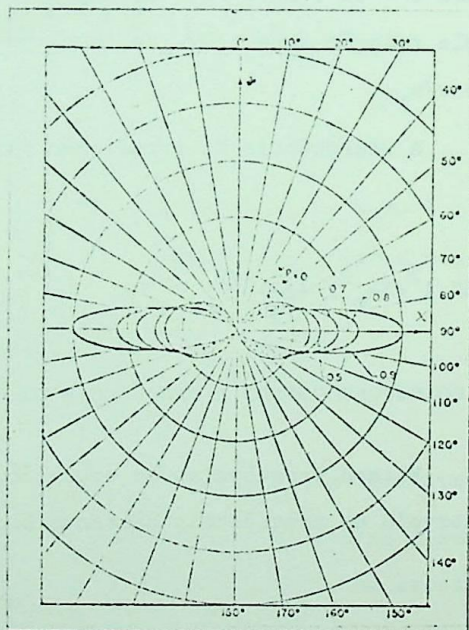


Fig. 7.5 - Diagramas de irradiação no plano $x - z$ para o dipolo na direção z (paralelo a B_0) com $w_p/w < 1$, desprezando-se as colisões dos eletrons do plasma.

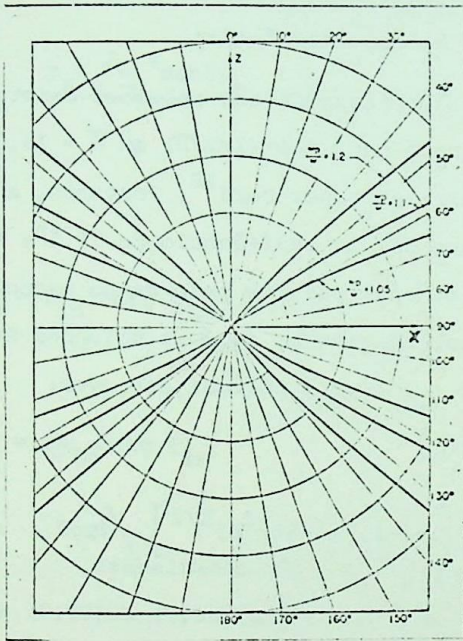


FIG. 7.6 - Diagramas de irradiação no plano $x-z$ para o dipolo na direção z (paralelo a B_0) com $\omega_p/\omega > 1$, desprezando-se as colisões dos elétrons do plasma.

Resolvendo esta equação para ξ_1 , encontramos:

$$\operatorname{tg} \xi_1 = \left[1 \pm (1 - 8 \operatorname{tg}^2 \theta)^{1/2} \right] / 2 \operatorname{tg} \theta \quad (7.74)$$

A equação (7.74) mostra que duas soluções para ξ_1 existem para baixas frequências.

Além disso, estas soluções existem somente dentro de um cone para o qual $\operatorname{tg} \theta = (1/2\sqrt{2})$ ou $\theta = 19,5^\circ$, um resultado obtido primeiramente por Ford¹⁸. Portanto, a irradiação é confinada a um cone com um semi-ângulo de $19,5^\circ$; isto é, as ondas são essencialmente guiadas pelo campo magnetostático em baixas frequências. Denotando, as duas soluções dadas pela equação (7.74) por ξ_{11} e ξ_{12} , podemos escrever:

$$\operatorname{tg} \xi_{1m} = \left[1 - (-1)^m (1 - 8 \operatorname{tg}^2 \theta)^{1/2} \right] / 2 \operatorname{tg} \theta \quad m=1,2 \quad (7.75)$$

Usando a relação (7.71), as equações (7.38), (7.34) e (7.40), tornam-se:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + w_p^2 / w_g^2) \quad (7.76)$$

$$\eta = - \varepsilon_0 w_p^2 / w^2 \quad (7.77)$$

$$g = - \varepsilon_0 w_p^2 / w w_g \quad (7.78)$$

Da equação (7.13) obtemos:

$$A_{1m} = \frac{(-1)^m w_g^2 w_p^3}{\epsilon_0^2 w_p^4 2^{3/4} \sin \theta} \left[\frac{1 - 4 \operatorname{tg}^2 \theta - (-1)^m (1 - 8 \operatorname{tg}^2 \theta)^{1/2}}{1 - 8 \operatorname{tg}^2 \theta} \right]^{1/4} \quad (7.79)$$

Para um dipolo dirigido na direção x, as equações (7.15), (7.16) e (7.17) nos fornecem:

$$B_{1m} = \frac{p_x \epsilon_0^2 w_p^4 \sin \xi_{1m}}{w^3 w_g} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \xi_{1m}} + i \sin \theta \right) \quad (7.80)$$

$$C_{1m} = B_{1m} \operatorname{cotg} \xi_{1m} \quad (7.81)$$

$$D_{1m} = i B_{1m} \operatorname{cotg} \xi_{1m} \quad (7.82)$$

Trabalhando com estas equações, juntamente com as equações (7.12) e (7.26) até (7.29), encontramos a seguinte equação para o campo elétrico:

$$\vec{E} = \frac{-K^2 p_x \epsilon_0 w_p^2}{4 \pi r w_g w^3} \sum_{m=1}^2 A_{1m} e^{-i \psi_{1m} K r} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \xi_{1m}} + i \sin \theta \right) \cdot (\vec{e}_r \sin \theta + \vec{e}_\theta \cos \theta + \vec{e}_\phi i \cos \xi_{1m}) \quad (7.33)$$

onde

$$\cos \xi_{1m} = \frac{\sqrt{1 - 8 \operatorname{tg}^2 \theta}}{[1 - 2 \operatorname{tg}^2 \theta - (-1)^m (1 - 8 \operatorname{tg}^2 \theta)^{1/2}]^{1/2}} \quad (7.34)$$

e

$$\psi_{1m}^2 = n_{1m}^2 (\xi_{1m}) \cos^2 (\xi_{1m} - \theta) =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}w_p^2 \text{tg}\theta \left[1 - 2\text{tg}^2\theta - (-1)^m (1 - 8\text{tg}^2\theta)^{1/2} \right]^{1/2}}{w_g \left[1 + 4\text{tg}^2\theta - (-1)^m (1 - 8\text{tg}^2\theta) \right]^{1/2}} \quad (7.85)$$

O campo, devido ao dipolo na direção z, pode ser obtido de uma maneira análoga, com o resultado:

$$\bar{E} = \frac{-K^2 p_z \xi_0 w_p^2}{4\pi r w_g^2 w^2} \sum_{m=1}^2 A_{1m} \bar{e}^{iY_{1m} Kr} \text{tg}\xi_{1m} (\bar{e}_r \text{sen}\theta + \bar{e}_\theta \text{cos}\theta + \bar{e}_\phi \text{icos}\xi_{1m})$$

(7.86)

onde $\text{tg}\xi_{1m}$ é dada pela relação (7.75). Comparando as equações anteriores, para o dipolo orientado nas direções x e z, vemos que, o campo do dipolo na direção z é menor que o campo do dipolo na direção x de um fator w/w_g , tal que, para w muito pequeno, o campo anterior será geralmente abandonado.

7.6 - CAMPO DO DIPOLO QUANDO A FREQUÊNCIA DE OPERAÇÃO É MUITO BAIXA.

Se a frequência de operação é mais baixa que no caso anterior, o movimento dos ions deve ser incluído e, o campo distante do dipolo, torna-se muito complicado. Entretanto se a condição,

$$w^2 \ll w_{gi}^2$$

se mantêm, as equações (5.20), (5.21) e (5.22) tornam-se:

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + w_p^2/w^2 + w_{pi}^2/w_{gi}^2) \quad (7.88)$$

$$g = (\epsilon_0/w) (-w_p^2/w_g + w_{pi}^2/w_{gi}^2) = 0 \quad (7.89)$$

$$n = \epsilon_0 (1 - w_p^2/w^2) \quad (7.90)$$

tal que o termo diagonal da matriz permissividade desaparece. O campo pode ser encontrado da solução para $g=0$, apresentada na seção 7.4. A razão n/ϵ é dada por:

$$\frac{\epsilon}{n} = \frac{(1 - \frac{w_p^2}{w^2})}{(1 + \frac{w_p^2}{w_g^2} + \frac{w_{pi}^2}{w_{gi}^2})} = \frac{(1 - \frac{w_p^2}{w^2})}{(1 + \frac{w_p^2 M}{w_g^2 m})} \quad (7.91)$$

pois $M \gg m$. Se além disso, as condições:

$$w_p^2/w^2 \gg 1 \quad (7.92)$$

$$w_p^2 M/w_g^2 m \gg 1 \quad (7.93)$$

se mantem, a equação (7.91) torna-se,

$$\frac{n}{\epsilon} \approx -\frac{w_g^2 m}{w^2 M} = -\frac{w_{gi}^2 M}{w_m^2} \quad (7.94)$$

Devido à equação (7.87), a razão η/ϵ é um número negativo grande. Substituindo a equação (7.94) na equação (7.30), obtemos para o dipolo na direção x:

$$\bar{E} = - \frac{K^2 p_x}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \frac{\sin\theta \bar{e}_\theta e^{-i\psi_1 Kr} + \frac{w_{gi}^2 M \cos\theta \cos\theta \bar{e}_\theta e^{-i\psi_2 Kr}}{w_m^2 [\cos^2\theta - (w_{gi}^2 M/w_m^2) \sin^2\theta]^{3/2}}}{w_m^2 [\cos^2\theta - (w_{gi}^2 M/w_m^2) \sin^2\theta]^{3/2}} \right\} \quad (7.95)$$

onde

$$\psi_1 = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/2} = \left(1 + \frac{w_p^2}{w_g^2} + \frac{w_{pi}^2}{w_{gi}^2}\right)^{1/2} \approx \left(1 + \frac{w_p^2}{w_g^2}\right)^{1/2} = \left(1 + \frac{\rho_0}{\epsilon_0 B_0}\right)^{1/2} = \frac{c}{v_A} \quad (7.96)$$

onde ρ_0 é a densidade de massa

$c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ e v_A é a velocidade de Alfvén.

Analogamente obtemos

$$\psi_2 = (c/v_A) \left[\cos^2\theta - (w_{gi}^2 M/w_m^2) \sin^2\theta \right]^{1/2} \quad (7.97)$$

Da equação (7.97) vemos que, o segundo termo da equação (7.95) contribui somente na região dada por:

$$\text{tg}^2\theta < \frac{w_m^2}{w_{gi}^2 M} \quad (7.98)$$

pois ψ_2 é imaginário fora da região.

Como $w_m^2/w_{gi}^2 M \ll 1$, a segunda onda contribui somente na vizinhança do eixo polar. Portanto, a amplitude da segunda onda é muito maior que a da primeira onda, perto do eixo polar, tal que a maior porção de irradiação é concentrada em um cone de um pequeno semi-ângulo dado por:

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{w_m^2}{w_{gi}^2 M} \quad (7.99)$$

tal que a intensidade de irradiação na direção do campo magnético estático é mais forte do que na baixa frequência, como estudado anteriormente.

Usando a equação (7.39), o campo para o dipolo na direção z , pode ser determinado, para o qual é encontrado que, somente a segunda onda é excitada e a irradiação é também concentrada a um cone dada pela relação (7.99).

CAPÍTULO 8

INFLUÊNCIA DAS COLISÕES NA IRRADIAÇÃO DO DIPOLO

No caso de considerarmos as colisões dos elétrons do plasma, vimos que ϵ , g e η são dados pelas equações (5.13), (5.14) e (5.15) respectivamente.

Para o campo magnetostático do plasma, considerado infinito, as condições,

$$w_g \gg w ; \quad w_g \gg w_p ; \quad w_g^2/w^2 \rightarrow \infty \quad (8.1)$$

dão às equações (5.13), (5.14) e (5.15) a forma:

$$\epsilon = \epsilon_0 \quad (8.2)$$

$$g = 0 \quad (8.3)$$

$$\eta = \epsilon_0 \left[1 - \frac{w_p^2}{w(w+iw_c)} \right] \quad (8.4)$$

Então, temos das equações (7.30), (7.31) e (7.32) para o dipolo na direção x :

$$\vec{E} = \frac{k^2 p_x}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \frac{\left[1 - \frac{w_p^2}{w(w+iw_c)} \right] \cos\phi \cos\theta e^{-i\psi} e^{-iKr}}{\left[1 - \frac{w_p^2}{w(w+iw_c)} \sin^2\theta \right]^{3/2}} \vec{e}_\theta - \sin\phi e^{-iKr} \vec{e}_\phi \right\} \quad (8.5)$$

$$\bar{H} = \frac{K^2 P_X}{4\pi \epsilon_0 r} \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1 - \frac{w_p^2}{w(w+iw_c)}}{\left[1 - \frac{w_p^2}{w(w+iw_c)} \right]} \cos \vartheta \cos \theta e^{-i\psi_1 Kr} \right] \bar{e}_\vartheta + \\ & \left[\frac{1 - \frac{w_p^2}{w(w+iw_c)} \sin^2 \theta}{\left[1 - \frac{w_p^2}{w(w+iw_c)} \right]} \right] \bar{e}_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

onde

$$\psi_1 = \left[1 - \frac{w_p^2}{w(w+iw_c)} \sin^2 \theta \right]^{1/2} \quad (8.7)$$

O valor médio do vetor de Poynting será:

$$\langle \bar{S} \rangle = \frac{K^4 P_X}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^2} \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \left[\frac{\cos \gamma - 2\rho \cos(\alpha - \gamma) + \rho^2 \cos(\gamma - 2\alpha)}{(1 - 2\rho \cos \alpha \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^4 \theta)^{5/4}} \cos^2 \theta \cdot \cos^2 \vartheta + \right. \\ \left. + \sin^2 \vartheta \right] \bar{e}_r \quad (8.8)$$

onde:

$$\alpha = \arctg \frac{w_c}{w} \quad (8.9)$$

$$\rho = \left(\frac{w_p}{w} \right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{w_c}{w} \right)^2} \quad (8.10)$$

$$\delta = \text{arc tg } \frac{\rho \text{ sen} \alpha \text{ sen}^2 \theta}{1 - \rho \text{ cos} \alpha \text{ sen}^2 \theta} \quad (8.11)$$

$$\gamma = \frac{5 \delta}{2} \quad (8.12)$$

Para a intensidade de irradiação do dipolo, temos:

$$U(\theta, \varphi) = \langle S \rangle r^2 =$$

$$= \frac{K^4 p_x^2}{32 \pi^2 \epsilon_0^2} \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \frac{1}{2} \left[\frac{\cos \gamma - 2 \rho \cos(\alpha - \gamma) + \rho^2 \cos(\gamma - 2\alpha)}{(1 - 2 \rho \cos \alpha \text{ sen}^2 \theta + \rho^2 \text{ sen}^4 \theta)^{5/4}} \cdot \right. \\ \left. \cdot \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \text{sen}^2 \varphi \right] \quad (8.13)$$

Para o dipolo na direção z o campo é obtido, substituindo-se as relações (8.2), (8.3) e (8.4) nas equações (7.39) (7.40) e (7.41). Os resultados obtidos são:

$$\vec{E} = - \frac{K^2 p_z}{4 \pi \epsilon_0 r} \frac{\left[1 - \frac{w_p^2}{w(w+iw_c)} \right] \text{sen} \theta \cdot e^{-i\psi} \cdot 1^{Kr}}{\left[1 - \frac{w_p^2}{w(w+iw_c)} \text{ sen}^2 \theta \right]^{3/2}} \vec{e}_\theta \quad (8.14)$$

$$\bar{H} = - \frac{K^2 p_z}{4\pi \epsilon_0 r} \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\left[1 - \frac{w_p^2}{w(w+iw_c)} \right] \text{sen}\theta \cdot e^{-i\psi} \bar{e}_1 Kr}{\left[1 - \frac{w_p^2}{w(w+iw_c)} \text{sen}^2 \theta \right]} \bar{e}_e \quad (8.15)$$

Para valor médio do vetor de Poynting, temos:

$$\langle \bar{S} \rangle = \frac{K^4 p_z^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^2} \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\left[\cos\gamma - 2\rho \cos(\alpha - \gamma) + \rho^2 \cos(\gamma - 2\alpha) \right] \text{sen}^2 \theta}{\left[1 - 2\rho \cos\alpha \text{sen}^2 \theta + \rho^2 \text{sen}^4 \theta \right]^{5/4}} \bar{e}_r \quad (8.16)$$

onde, α , ρ , δ e γ são dados pelas expressões (9.9), (9.10), (9.11) e (9.12) respectivamente.

Para a intensidade de irradiação do dipolo, temos:

$$U(\theta, \varphi) = \langle S \rangle r^2$$

$$= \frac{K^4 p_z^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2} \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\left[\cos\gamma - 2\rho \cos(2-\gamma) + \rho^2 \cos(\gamma - 2) \right] \text{sen}^2 \theta}{\left[1 - 2\rho \cos\alpha \text{sen}^2 \theta + \rho^2 \text{sen}^4 \theta \right]^{5/4}}$$

$$(8.17)$$

As figuras (8.1) a (8.4) mostram os diagramas de irradiação para o dipolo colocado na direção x, para alguns valores das relações w_p/w e w_c/w .

Observamos que, em geral, aumentando o valor da relação w_p/w , e mantendo o valor da relação w_c/w , a intensidade de irradiação diminui em todas as direções, ao mesmo tempo que aumenta a diretividade.

Quando a relação w_c/w aumenta para um mesmo valor da relação w_p/w , notamos, em geral, que a intensidade de irradiação, aumenta em todas as direções ao mesmo tempo que aumenta a diretividade.

As figuras (8.5) a (8.8) mostram os diagramas de irradiação, para o dipolo colocado na direção z , para alguns valores das relações w_p/w e w_c/w .

Quando cresce o valor da relação w_p/w , enquanto w_c/w se mantém fixo, observa-se que, em geral, a intensidade de irradiação diminui de valor e, a diretividade aumenta.

Ao mantermos constante a relação w_p/w , enquanto aumentamos o valor da relação w_c/w , nota-se que a variação da intensidade de irradiação e a variação da diretividade, não obedecem a uma homogeneidade, como podemos observar nas figuras citadas.

Cabe ressaltar aqui que, para ambas as posições do dipolo, x e z , as variações da intensidade de irradiação e, a variação da diretividade, em função da variação dos valores das relações $\frac{w_p}{w}$ e $\frac{w_c}{w}$, não obedecem a uma lei geral, não se podendo chegar a uma conclusão que abranja a todos os casos. Para que o leitor possa ter uma visão melhor da situação, apresentamos no apêndice A, uma série de diagramas de irradiação, para ambas as posições do dipolo x e z , para vários valores das relações $\frac{w_c}{w}$ e $\frac{w_p}{w}$.

Fig. 8.1 - Diagramas de irradiação para o dipolo colocado na direção x (perpendicular a \vec{B}_0), sendo a relação

$$\frac{\omega p}{w} = 0,5 \quad \text{e} \quad \frac{\omega c}{w} \text{ tomando}$$

os valores 0,5-0,8-0,9-1,4. A intensidade de irradiação aumenta quando a frequência de colisões wc aumenta.

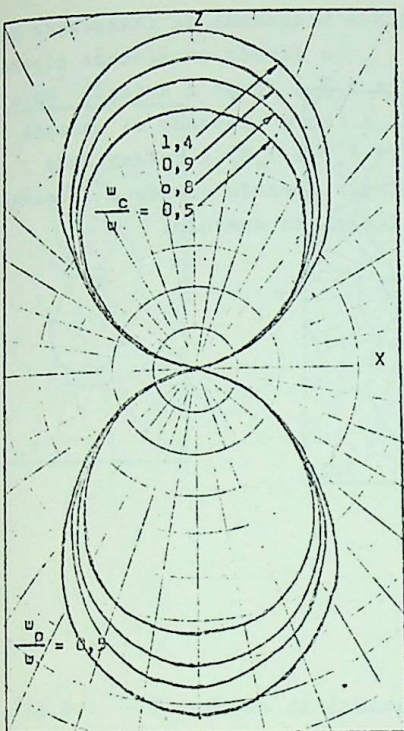


Fig. 8.2 - Diagramas de irradiação para o dipolo colocado na direção x (perpendicular a \vec{B}_0) sendo a relação

$$\frac{\omega p}{w} = 0,6 \quad \text{e} \quad \frac{\omega c}{w}$$

tomando os valores 0,5-0,8-1,0-1,4. A intensidade de irradiação aumenta quando a frequência de colisões wc aumenta.

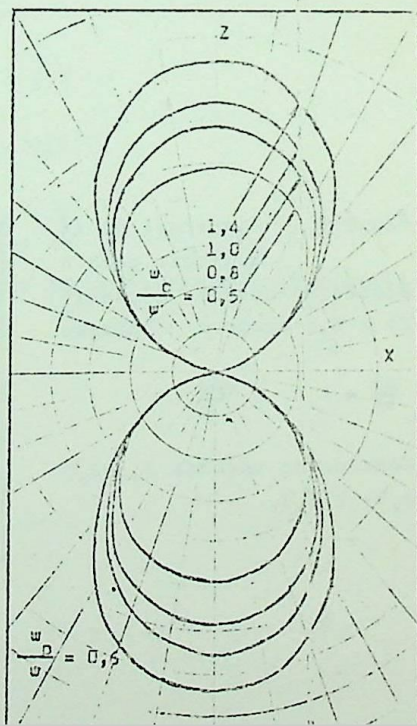


Fig.8.3 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{B}_0) sendo a relação $\frac{\omega p}{w} = 0,7$ e $\frac{\omega c}{w}$ tomando os valores 0,5, 0,7-0,9-1,1 e 1,3. A intensidade de irradiação aumenta quando a frequência de colisões ωc aumenta.

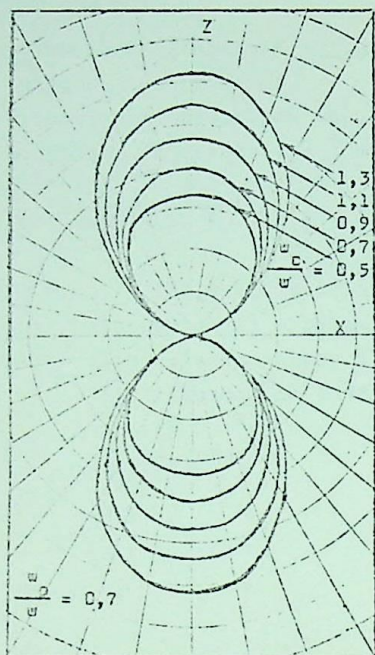
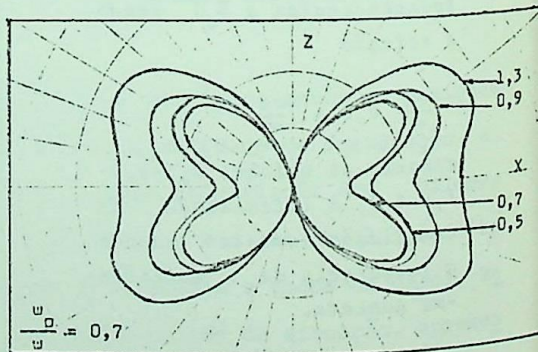
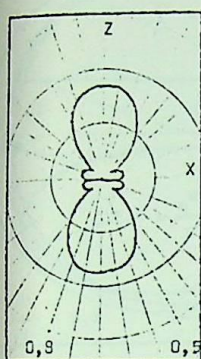


Fig.8.8 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{B}_0) sendo a relação

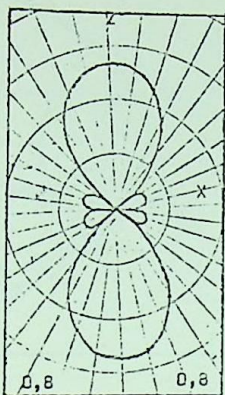
$$\frac{\omega p}{w} = 0,7 \text{ e } \frac{\omega c}{w}$$

tomando os valores 0,5-0,7, 0,9- e 1,3.

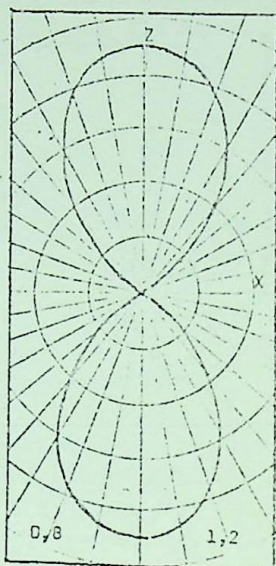




(a)



(b)



(c)

Fig.8.4 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a B_0)

$$(a) \quad \frac{\omega p}{\omega} = 0,8 \quad e \quad \frac{\omega c}{\omega} = 0,5$$

$$(b) \quad \frac{\omega p}{\omega} = 0,8 \quad e \quad \frac{\omega c}{\omega} = 0,8$$

$$(c) \quad \frac{\omega p}{\omega} = 0,8 \quad e \quad \frac{\omega c}{\omega} = 1,2$$

A intensidade de irradiação aumenta quando a frequência de colisões ωc aumenta.

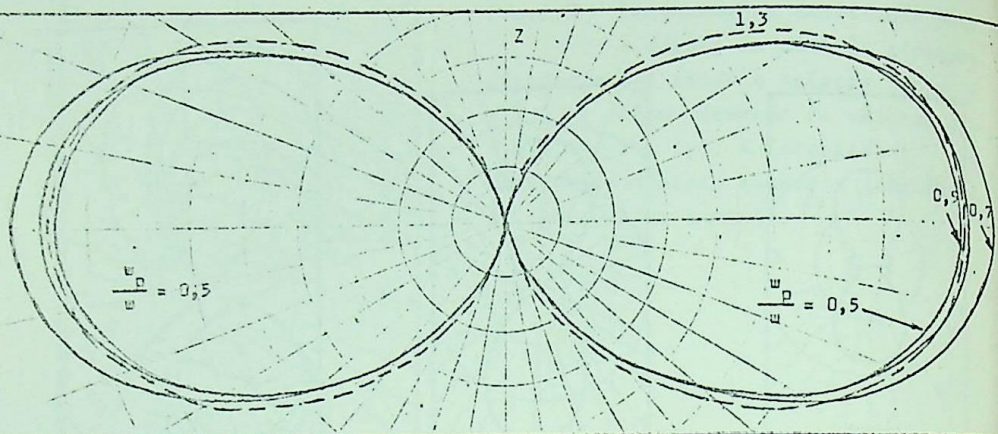


Fig. 8.5 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a B_0) sendo a relação $wp/w = 0,5$ e wc/w tomando os valores $0,5-0,7-0,9$ e $1,3$. A intensidade de irradiação varia de maneira desuniforme quando a frequência de colisões wc aumenta.

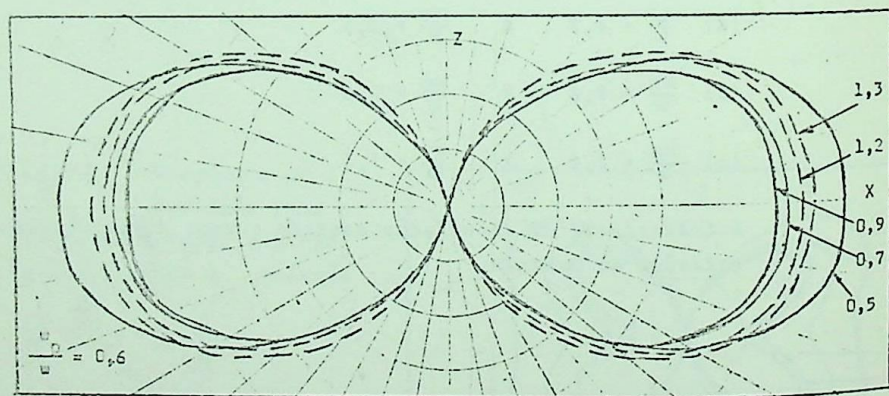
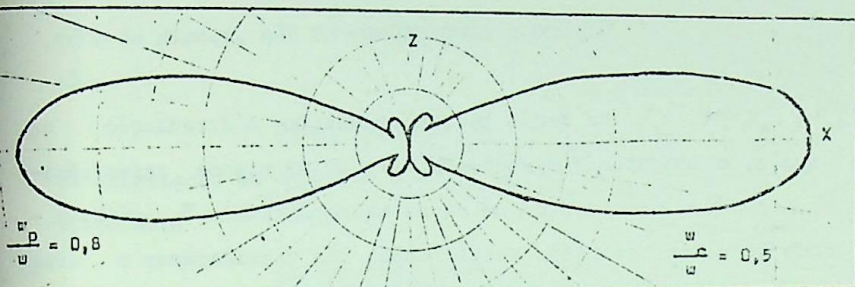
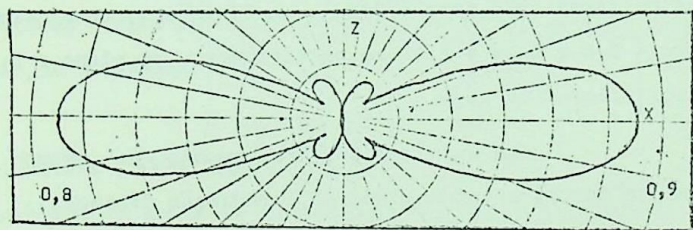


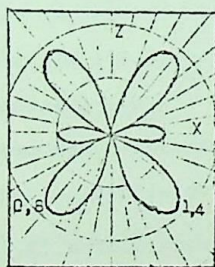
Fig. 8.6 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a B_0) sendo $wp/w = 0,6$ e wc/w tomando os valores $0,5-0,7-0,9-1,2$ e $1,3$. A intensidade de irradiação varia de maneira desuniforme quando a frequência de colisões aumenta.



(a)



(b)



(c)

Fig. 8.7 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{B}_0) sendo a relação $\omega p/w = 0,8$ fixa e

(a) $\frac{\omega c}{w} = 0,5$ (b) $\frac{\omega c}{w} = 0,9$ (c) $\frac{\omega c}{w} = 1,4$

CAPÍTULO 9

RESUMO E CONCLUSÕES

Na seção 7,4, apresentamos a irradiação do dipolo, colocado nas direções x e z , em um plasma anisotrópico, devido a presença de um campo magnetostático \vec{B}_0 , considerado de valor infinito. Nesta seção, não consideramos o efeito das colisões dos elétrons do plasma.

Nas figuras (7.3) e (7.4) mostramos os diagramas de irradiação para o dipolo na direção x , considerando-se $w_p/w < 1,0$ e $w_p/w > 1,0$ respectivamente, no plano $x-z$, para vários valores de w_p/w .

Para $w_p/w < 1,0$, é observado que, quando w_p/w aproxima-se de um, a intensidade de irradiação diminui, da mesma forma que a diretividade, isto é, a direção de irradiação máxima, aproxima-se do eixo do dipolo.

Para $w_p/w > 1,0$ e $\theta=0$ não há irradiação na região angular, onde $\text{sen}\theta > w/w_p$. A intensidade de irradiação aumenta, sem limite, próximo de $\text{sen}\theta = w/w_p$ e, uma quantidade infinita de potência emana do dipolo.

Nas figuras (7.5) e (7.6) mostramos os diagramas de irradiação, para o dipolo colocado na posição z , para o plano $x-z$.

Para $w_p/w < 1$, observamos que a diretividade aumenta consideravelmente, quando w_p/w aproxima-se de um, com a irradiação máxima ocorrendo para $\theta=90^\circ$. Se $w_p/w > 1$, não há irradiação na região dada por $\text{sen}\theta > w/w_p$ e o campo novamente

diverge em $\text{sen}\theta = w/w_p$.

Para $w_p/w = 1,0$ vimos que, para ambas as posições do dipolo, não há condição de irradiação em qualquer direção.

No capítulo 8, analisamos o mesmo problema da irradiação do dipolo, considerando-se porém, a presença das colisões.

Verificamos que, se tomarmos $w_c/w = 0$ (ausência de colisões), a equação (8.8) se reduz à equação (7.2) e, a equação (8.17) se reduz à equação (7.69), que fornecem os valores médios do vetor de Poynting, quando consideramos, ou não, as colisões.

A consideração das colisões, afeta substancialmente a intensidade de irradiação e a diretividade do dipolo, colocado em ambas as direções, x e z. Como já vimos, não há uma homogeneidade na variação da irradiação em função da variação das frequências angulares do plasma e das colisões. Para o dipolo na posição x, isto é, perpendicular a \vec{E}_0 , observa-se que, em vários casos, quando cresce o valor da relação w_p/w , mantendo-se constante o valor de w_c/w , a intensidade de irradiação diminui em todas as direções, enquanto que, a diretividade aumenta. Quando a relação w_c/w aumenta, para um mesmo valor de w_p/w , nota-se para vários casos que, a intensidade de irradiação e a diretividade aumentam de valor.

Para o dipolo na direção z, nota-se que, ao crescer o valor de w_p/w , quando w_p/w é fixo, para vários casos, a intensidade de irradiação diminui, enquanto a diretividade aumenta,

Ao se manter constante w_p/w , aumentando w_c/w , a variação da intensidade de irradiação e da diretividade, não apresentam uma homogeneidade, que possibilite uma conclusão fácil do problema.

Para $w_p/w = 1,0$ vimos que, ao se desprezar as colisões, não há irradiação em qualquer direção; com a presença destas, a irradiação existe, aumentando de valor, de maneira geral, com o aumento da frequência de colisões.

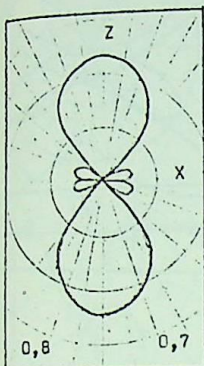
Se as colisões são desprezadas, para $w_p/w > 1,0$ a intensidade de irradiação aumenta, quando esta relação aumenta, até tomarem um valor infinito, nas direções próximas a $\text{sen}\theta = w/w_p$. Com as colisões, a intensidade de irradiação é atenuada e, não mais tende a infinito. Observamos no apêndice A que, os diagramas de irradiação tomam aspectos variados, em função da variação da frequência do plasma ou das colisões.

Enfim, a presença das colisões altera substancialmente a intensidade de irradiação e a diretividade, para o dipolo irradiando em ambas as direções x e z , como vemos no apêndice A.

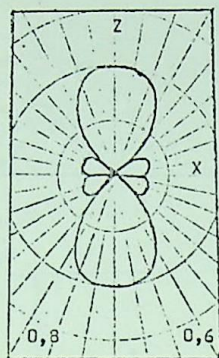
Nos apêndices B, C e D, deixamos a programação, diagrama de blocos e computação realizadas, correspondentes a intensidade de irradiação U , a fim de que, o leitor possa refazer o problema, para os valores das relações w_c/w e w_p/w , que lhe interesse.

Desta forma, a análise pode ser feita de uma maneira mais fácil e objetiva, computando-se os valores da intensidade de irradiação para os valores das frequências angulares do plasma e das colisões.

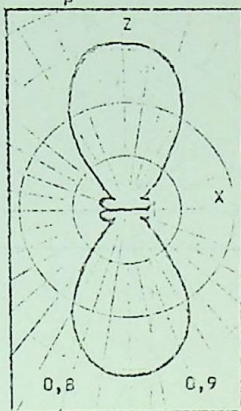
Diagramas de irradiação para diversos valores de ω_c/ω e ω/ω_p .



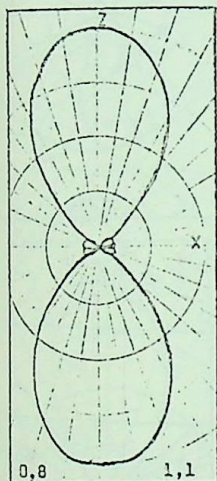
(a)



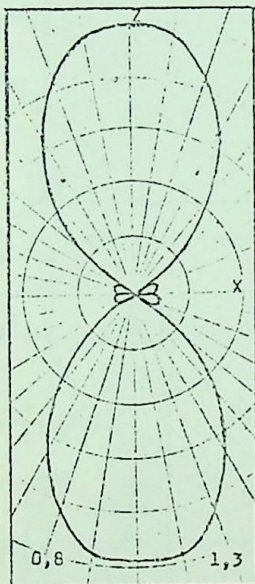
(b)



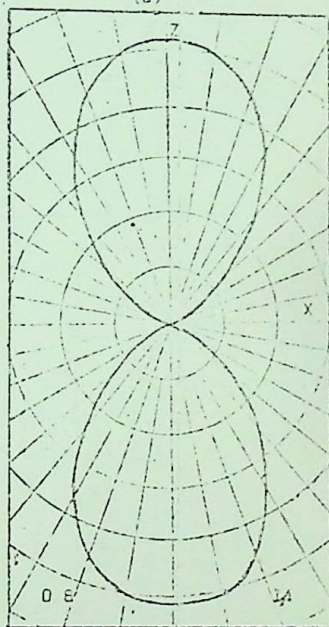
(c)



(d)



(e)



(f)

Fig. A.1 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{B}_0) sendo a relação $\omega_p/\omega = 0,8$ fixa.

(a) $\frac{\omega_c}{\omega} = 0,6$

(b) $\frac{\omega_c}{\omega} = 0,7$

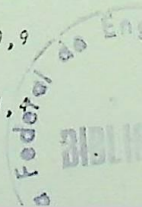
(c) $\frac{\omega_c}{\omega} = 0,9$

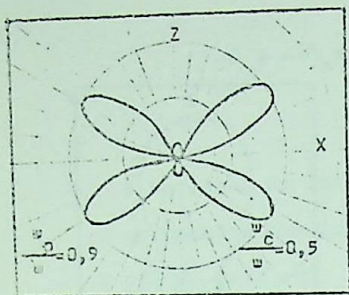
(d) $\frac{\omega_c}{\omega} = 1,1$

(e) $\frac{\omega_c}{\omega} = 1,3$

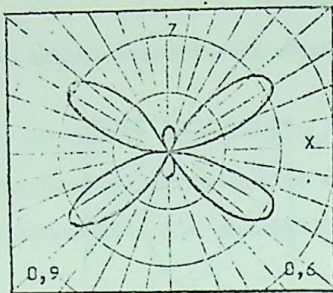
(f) $\frac{\omega_c}{\omega} = 1,4$

A intensidade de irradiação aumenta com ω_c .

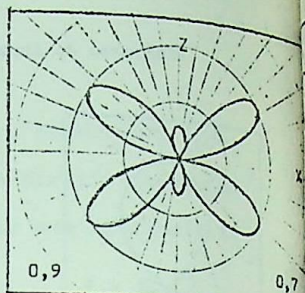




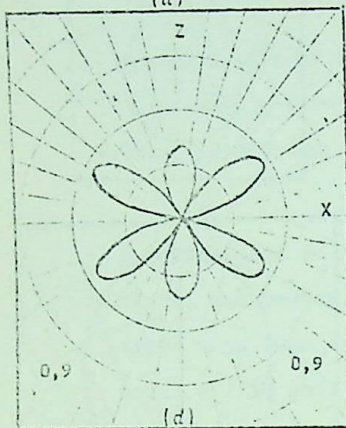
(a)



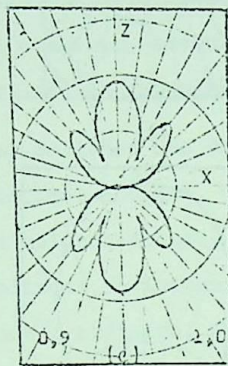
(b)



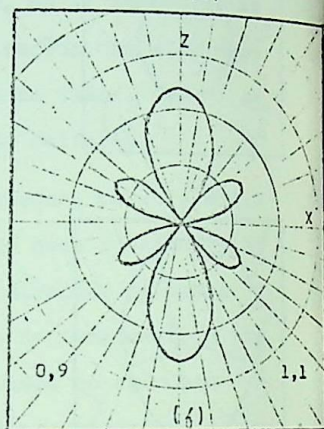
(c)



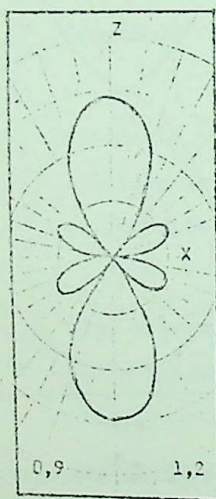
(d)



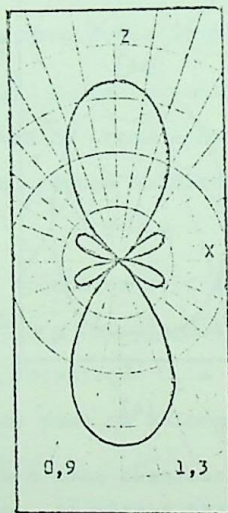
(e)



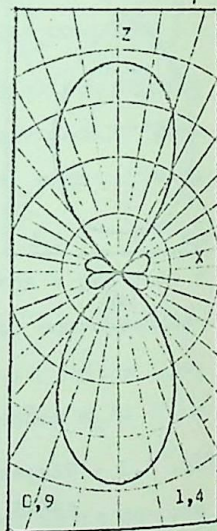
(f)



(g)



(h)



(i)

Fig.A.2 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a B_0) sendo a relação $w_p/w = 0,9$ fixa.

- (a) $w_c/w = 0,5$ (b) $w_c/w = 0,6$ (c) $w_c/w = 0,7$ (d) $w_c/w = 0,9$
 (e) $w_c/w = 1,0$ (f) $w_c/w = 1,1$ (g) $w_c/w = 1,2$ (h) $w_c/w = 1,3$
 (i) $w_c/w = 1,4$ A diretividade aumenta com o aumento da frequência

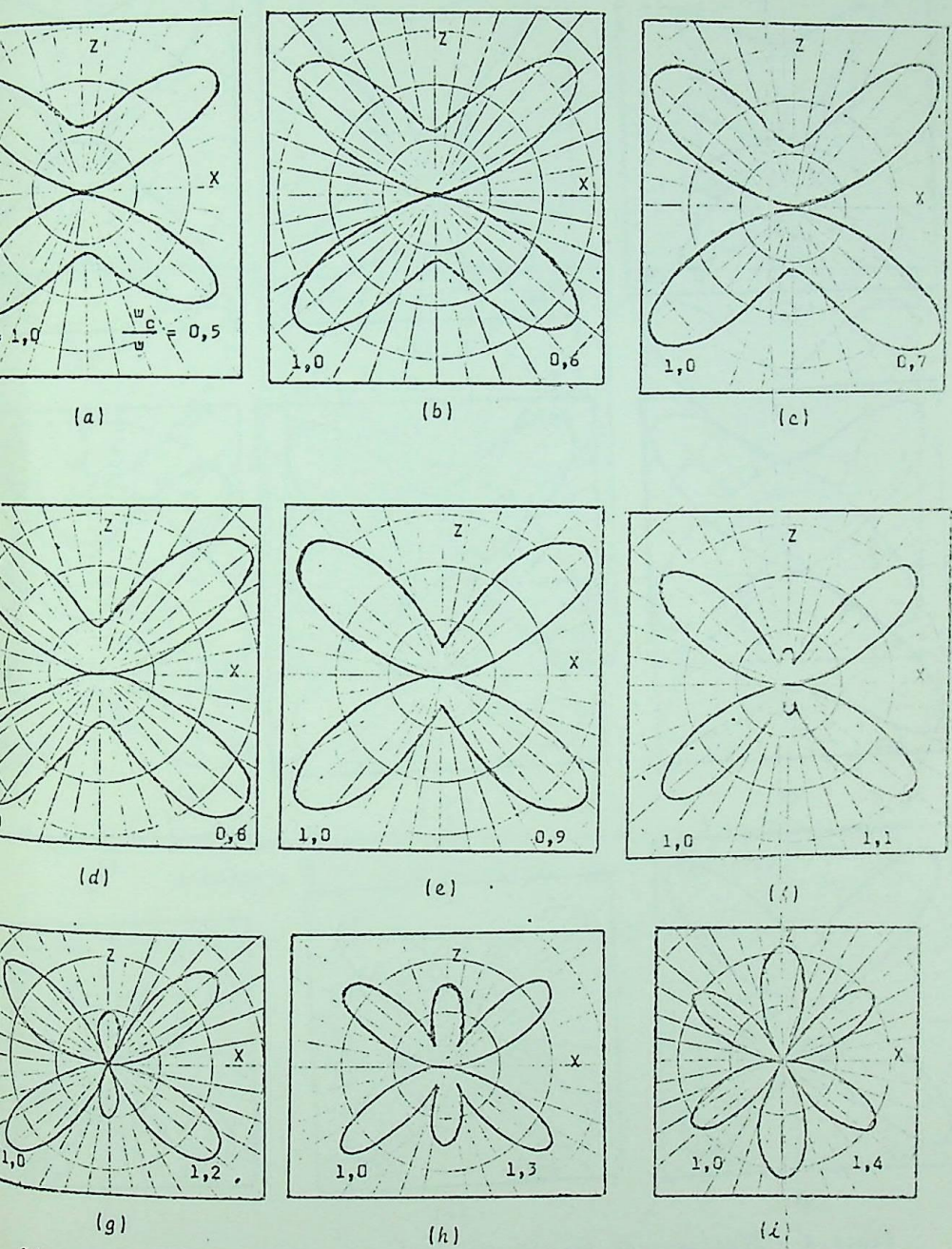


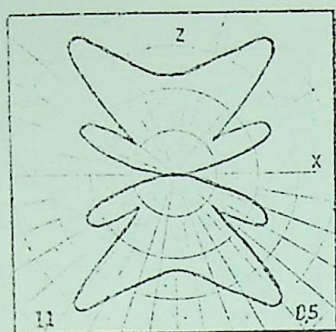
Fig.A.3 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{B}_0), sendo a relação $w_p/w = 1,0$ fixa.

(a) $w_c/w = 0,5$ (b) $w_c/w = 0,6$ (c) $w_c/w = 0,7$ (d) $w_c/w = 0,8$

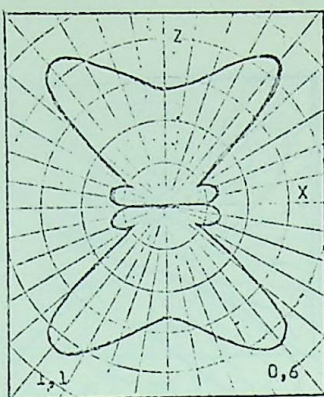
(e) $w_c/w = 0,9$ (f) $w_c/w = 1,1$ (g) $w_c/w = 1,2$ (h) $w_c/w = 1,3$

(i) $w_c/w = 1,4$

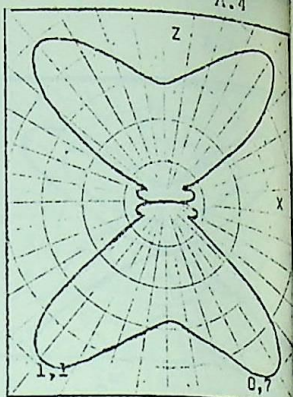
Aumenta a irradiação na direção z e a diretividade, em quanto aumenta a frequência de colisões w_c .



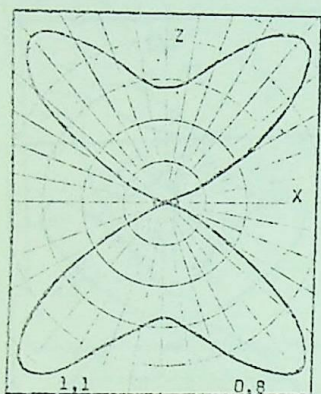
(a)



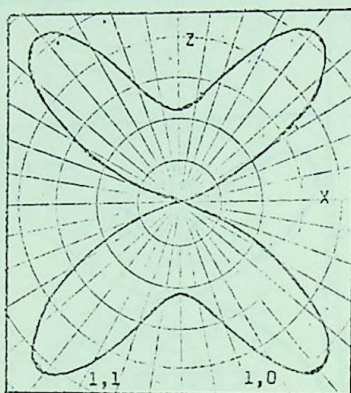
(b)



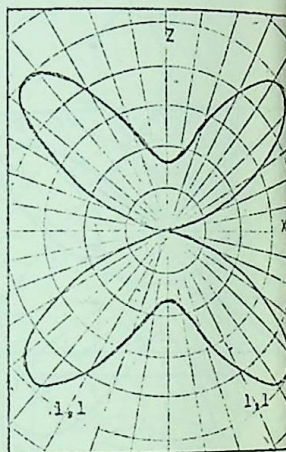
(c)



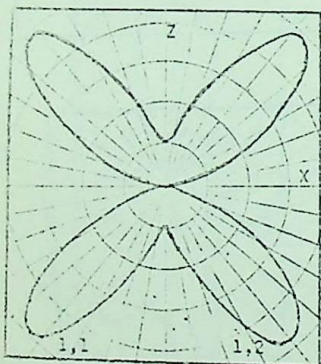
(d)



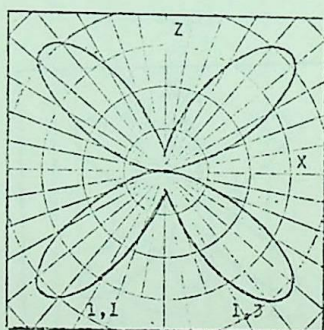
(e)



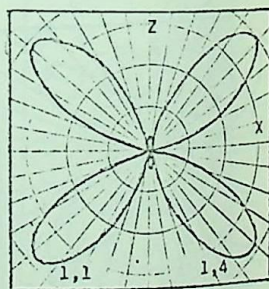
(f)



(g)



(h)



(i)

Fig. A.4 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{E}_0) sendo a relação $w_p/w = 1,1$ fixa.

- | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| (a) $w_c/w = 0,5$ | (b) $w_c/w = 0,6$ | (c) $w_c/w = 0,7$ | (d) $w_c/w = 0,8$ |
| (e) $w_c/w = 1,0$ | (f) $w_c/w = 1,1$ | (g) $w_c/w = 1,2$ | (h) $w_c/w = 1,3$ |
| (i) $w_c/w = 1,4$ | | | |

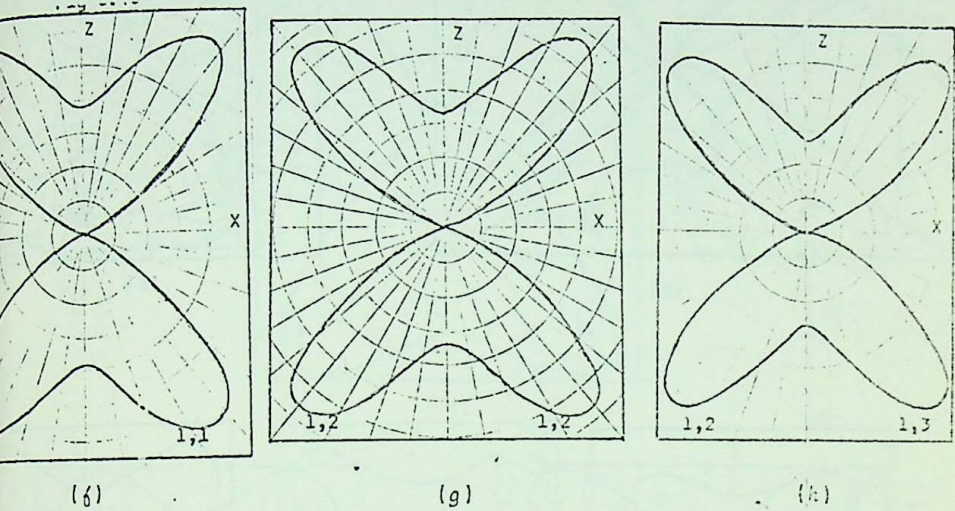
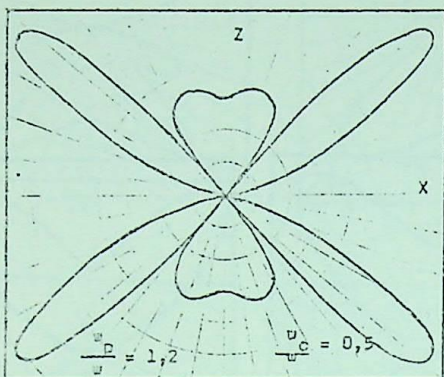
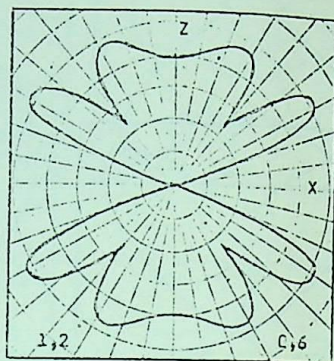


Fig. A.5 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{B}_0) sendo a relação $\omega p/\omega = 1,2$ fixa.

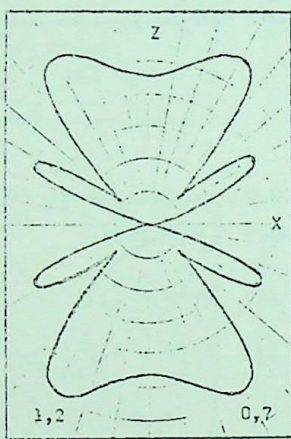
- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| (a) $\omega c/\omega = 0,5$ | (b) $\omega c/\omega = 0,6$ | (c) $\omega c/\omega = 0,7$ |
| (d) $\omega c/\omega = 0,8$ | (e) $\omega c/\omega = 0,9$ | (f) $\omega c/\omega = 1,1$ |
| (g) $\omega c/\omega = 1,2$ | (h) $\omega c/\omega = 1,3$ | |



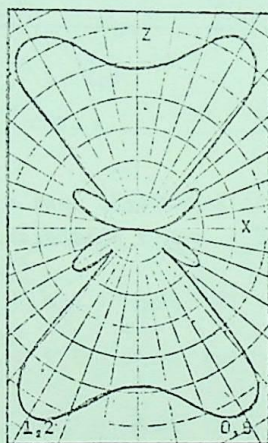
(a)



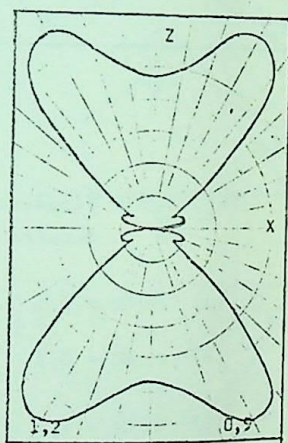
(b)



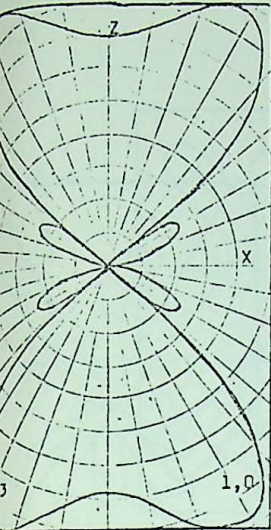
(c)



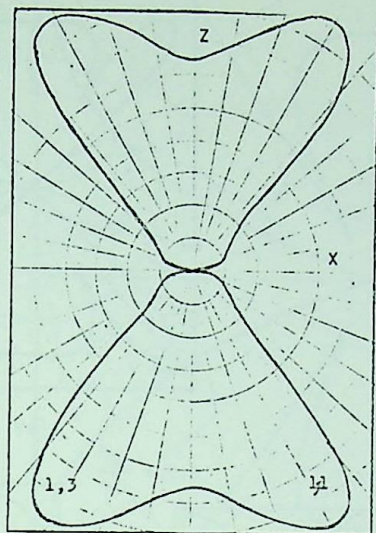
(d)



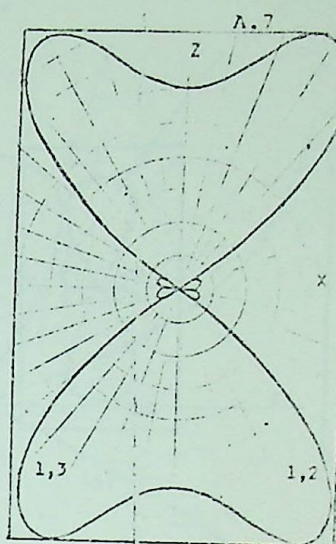
(e)



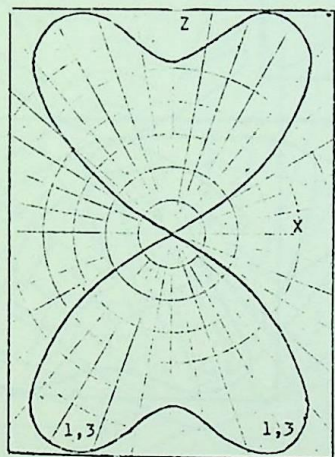
(e)



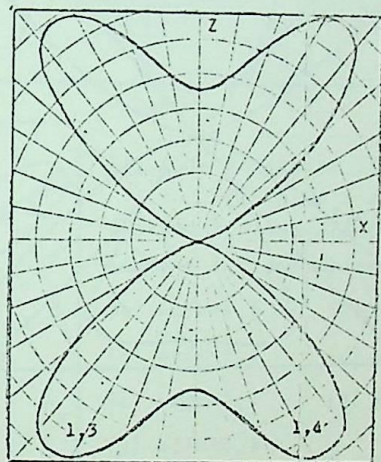
(f)



(g)



(h)



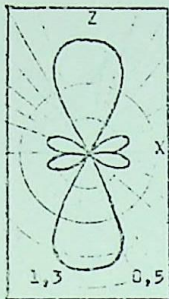
(i)

Fig. A.6 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a \vec{E}_0) sendo a relação $w_p/w = 1,3$ fixa.

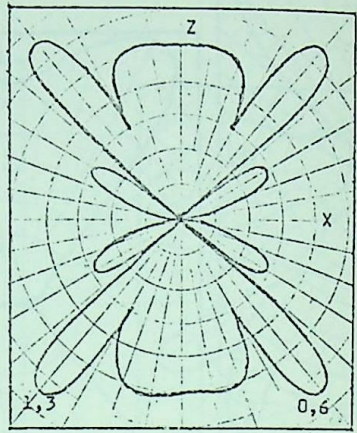
(a) $w_c/w = 0,5$ (b) $w_c/w = 0,6$ (c) $w_c/w = 0,7$

(d) $w_c/w = 0,9$ (e) $w_c/w = 1,0$ (f) $w_c/w = 1,1$

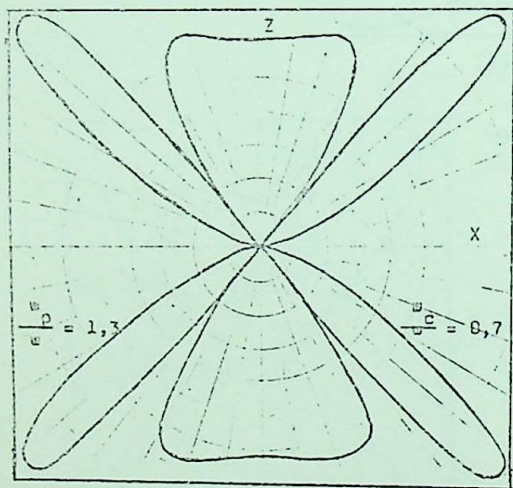
(g) $w_c/w = 1,2$ (h) $w_c/w = 1,3$ (i) $w_c/w = 1,4$



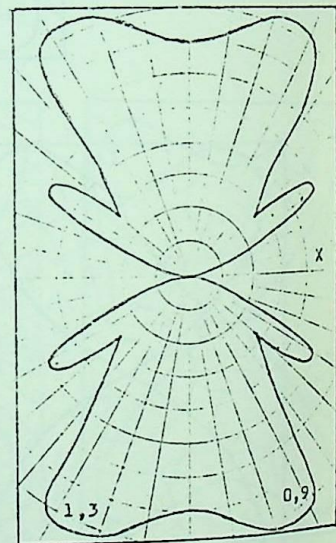
(a)



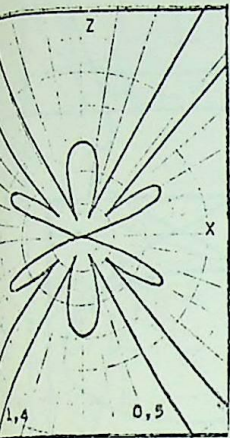
(b)



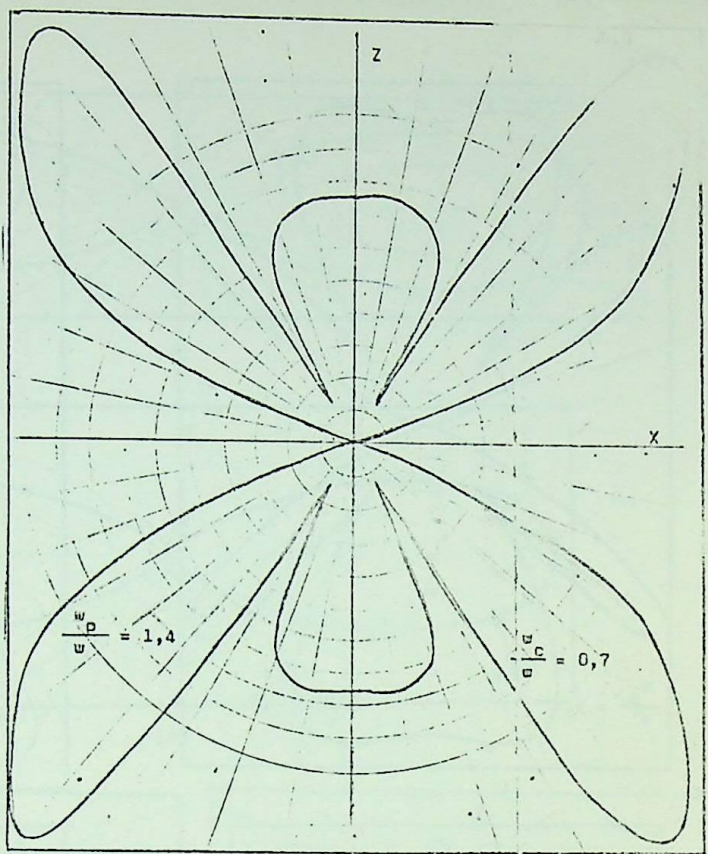
(c)



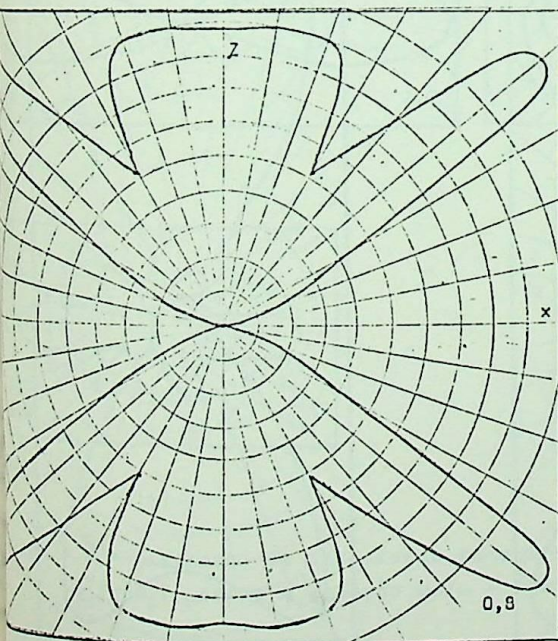
(d)



(a)



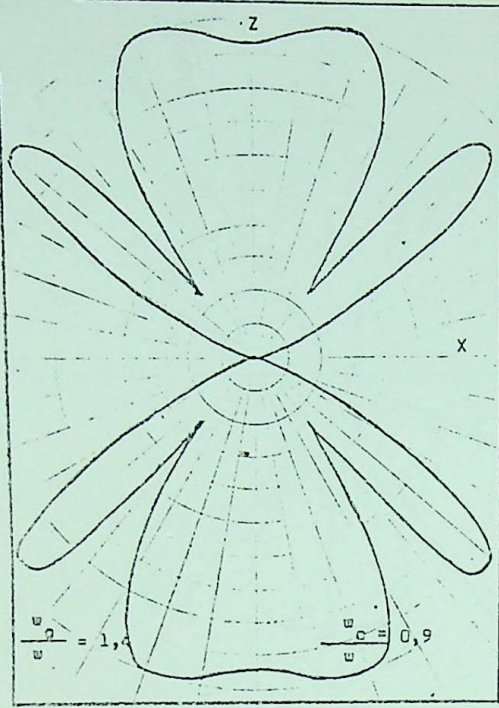
(b)



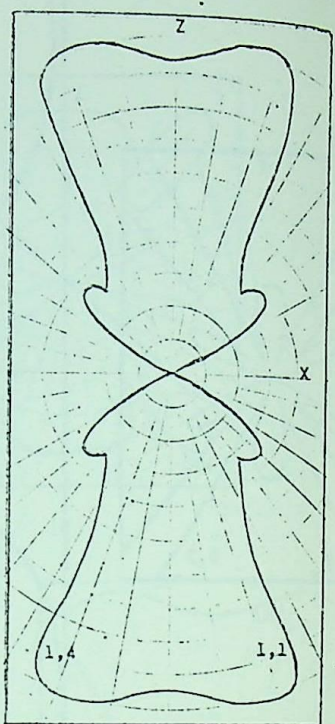
(c)

Fig.A.7- Diagramas de irradiação para o dipolo na direção x (perpendicular a B_0) sendo a relação $w_p/w = 1,4$ fixa.

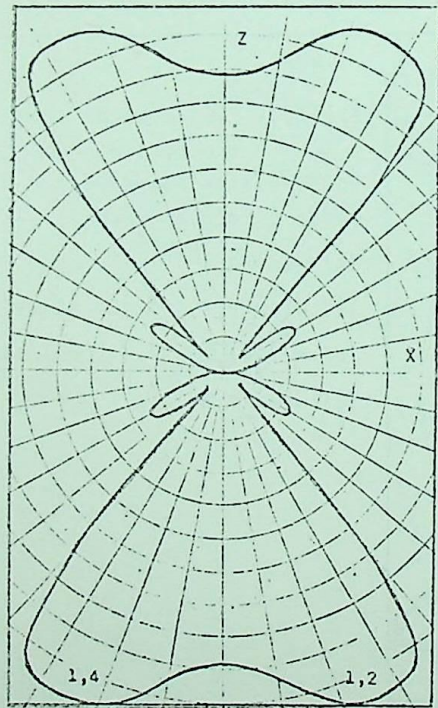
- | | |
|-------------------|-------------------|
| (a) $w_c/w = 0,5$ | (b) $w_c/w = 0,7$ |
| (c) $w_c/w = 0,8$ | (d) $w_c/w = 0,9$ |
| (e) $w_c/w = 1,1$ | (f) $w_c/w = 1,2$ |
| (g) $w_c/w = 1,3$ | |



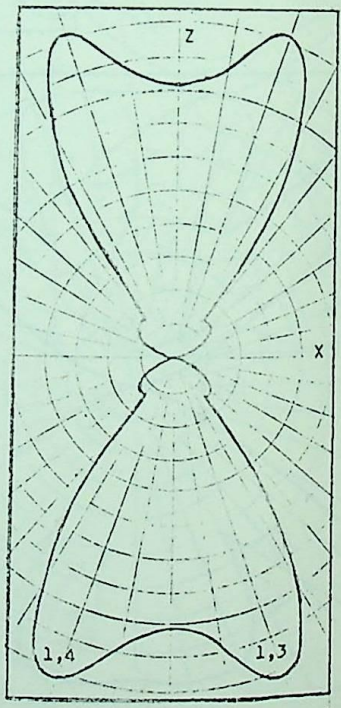
(d)



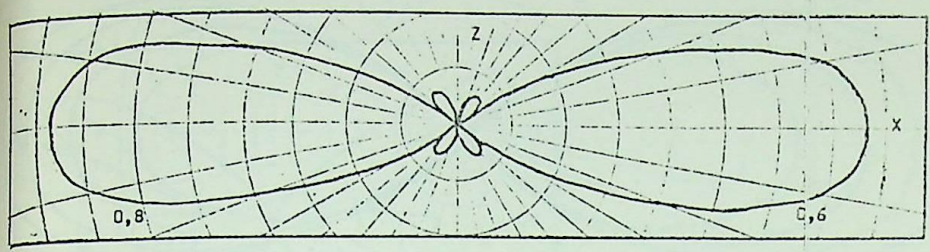
(e)



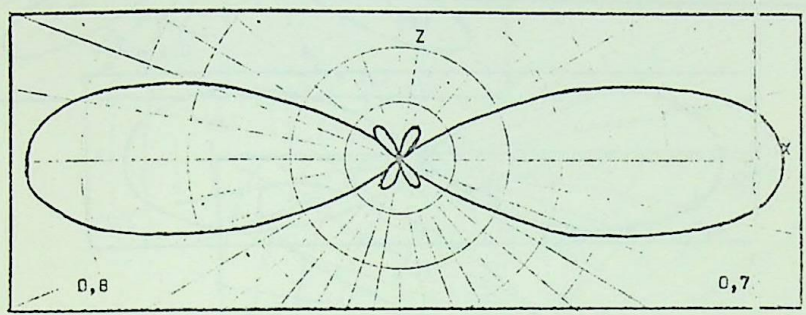
(f)



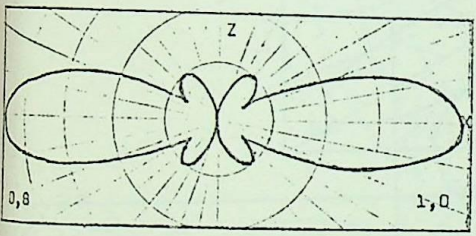
(g)



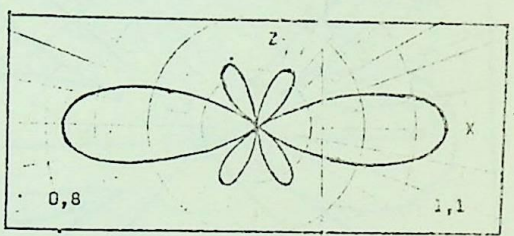
(a)



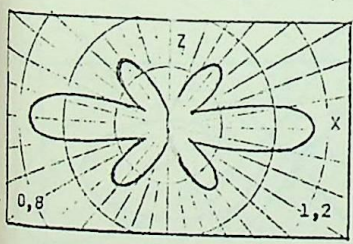
(b)



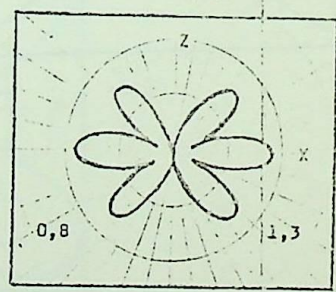
(c)



(d)



(e)

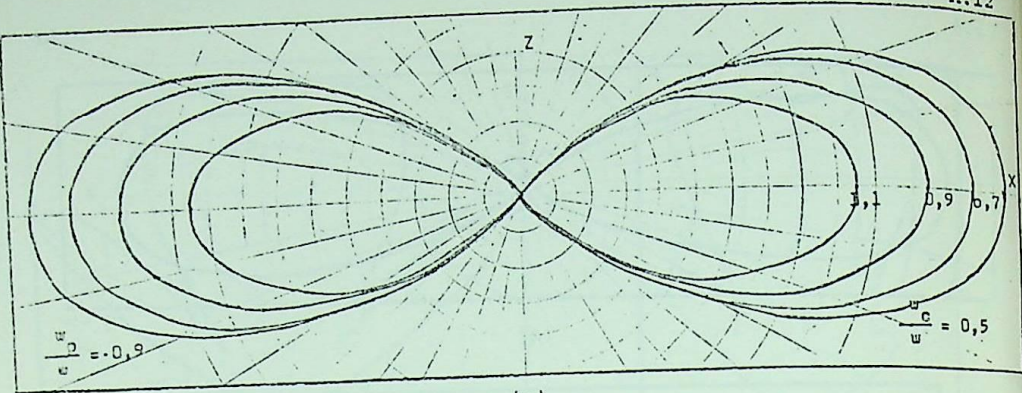


(f)

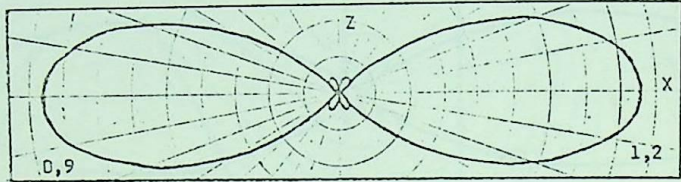
Fig. A.8 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a B_0) sendo a relação $wp/w = 0,8$ fixa.

(a) $wc/w = 0,6$ (b) $wc/w = 0,7$ (c) $wc/w = 1,0$

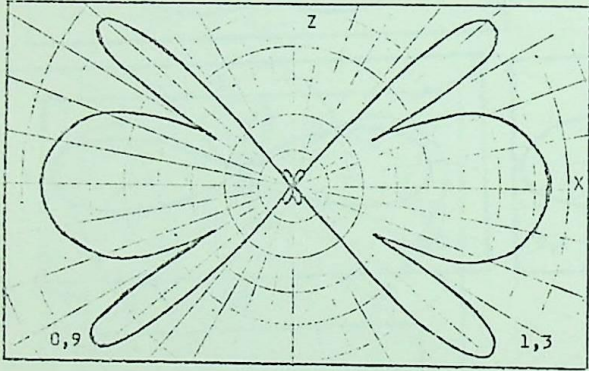
(d) $wc/w = 1,1$ (e) $wc/w = 1,2$ (f) $wc/w = 1,3$



(a)



(b)



(c)

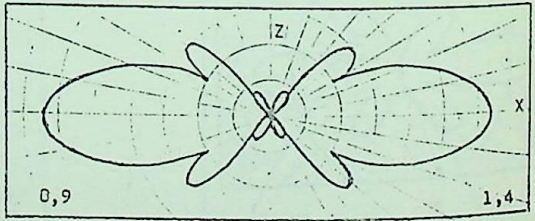


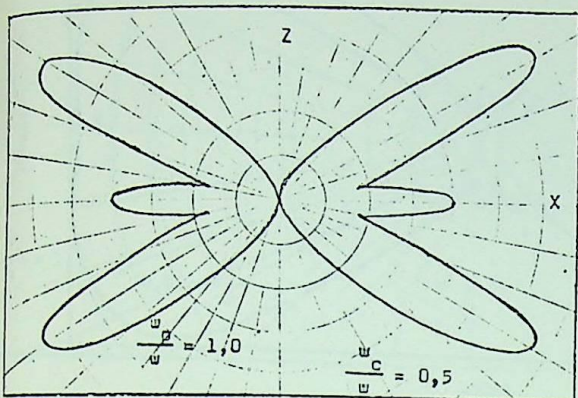
Fig.A.9 - Diagramas de irradiação para o dipolo^(d) na direção z (paralelo \vec{E}_0) sendo a relação $w_p/w = 0,9$ fixa.

(a) w_c/w tomando os valores 0,5-0,7-0,9 e 1,1

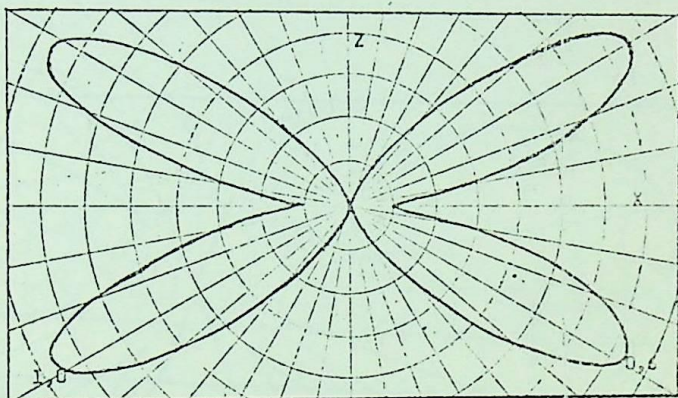
(b) $w_c/w = 1,2$

(c) $w_c/w = 1,3$

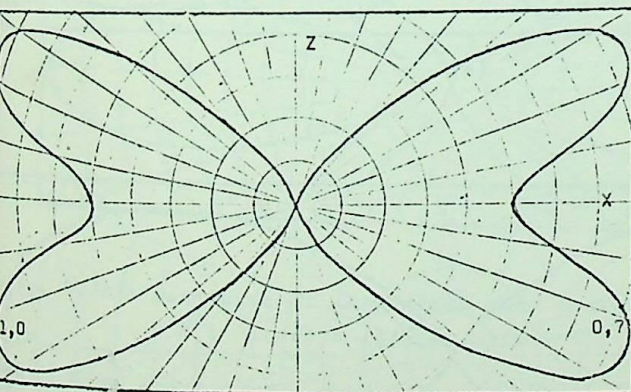
(d) $w_c/w = 1,4$



(a)



(b)

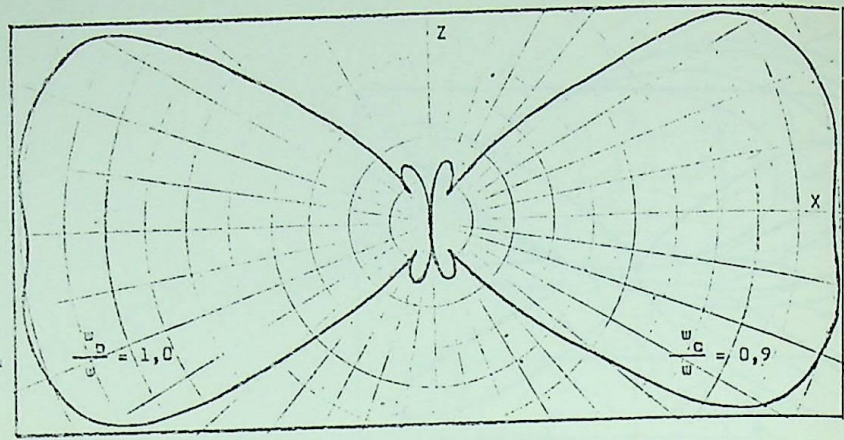


(c)

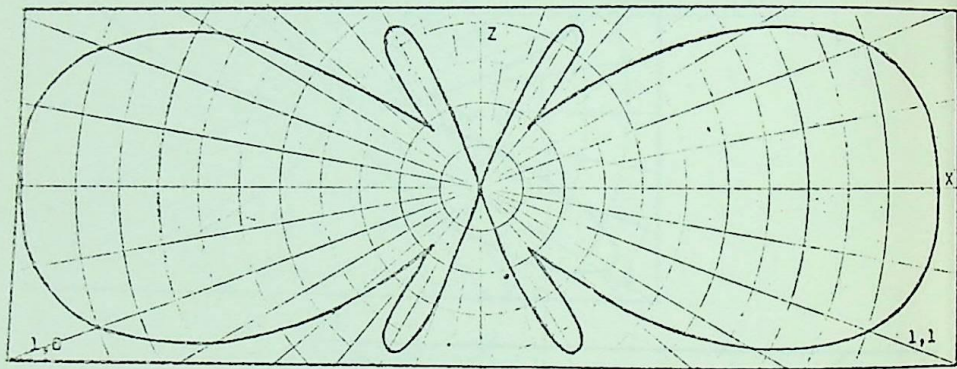
Fig.A.10 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{B}_0) sendo a relação $\omega p/\omega = 1,0$ fixa.

(a) $\omega c/\omega = 0,5$ (b) $\omega c/\omega = 0,6$ (c) $\omega c/\omega = 0,7$

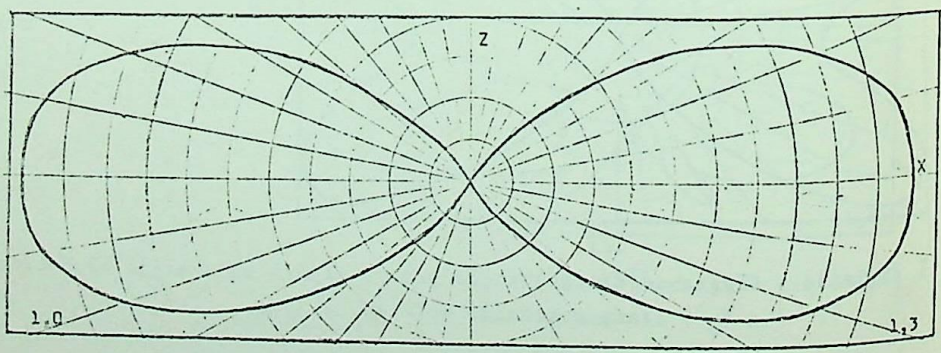
(d) $\omega c/\omega = 0,9$ (e) $\omega c/\omega = 1,1$ (f) $\omega c/\omega = 1,3$



(d)



(e)



(f)

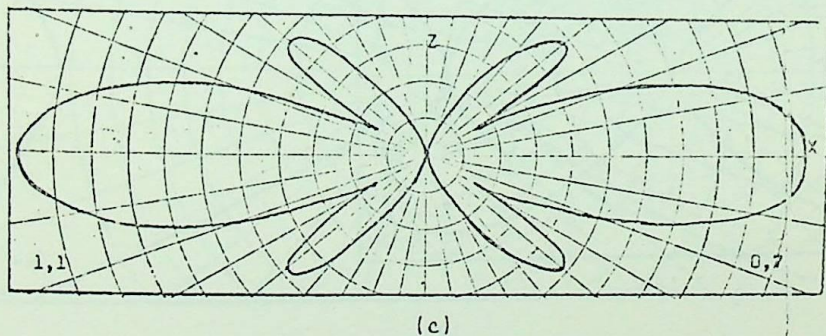
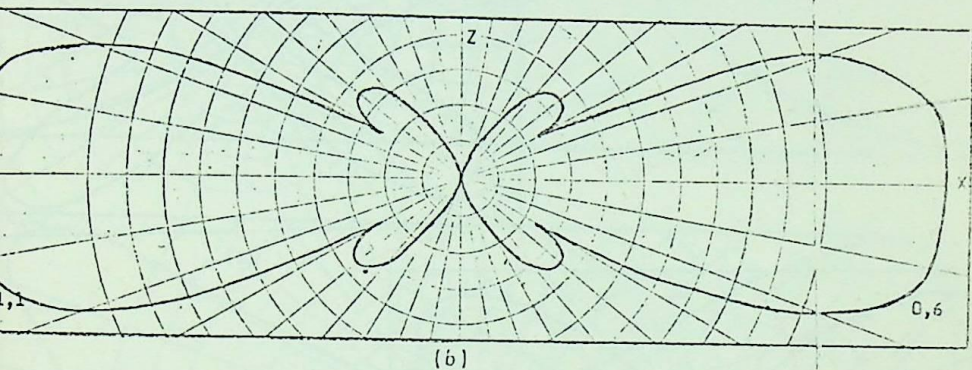
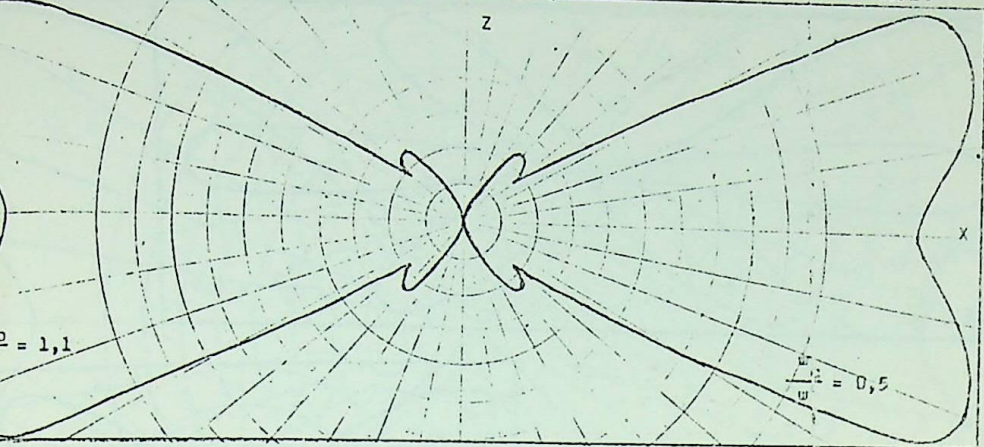
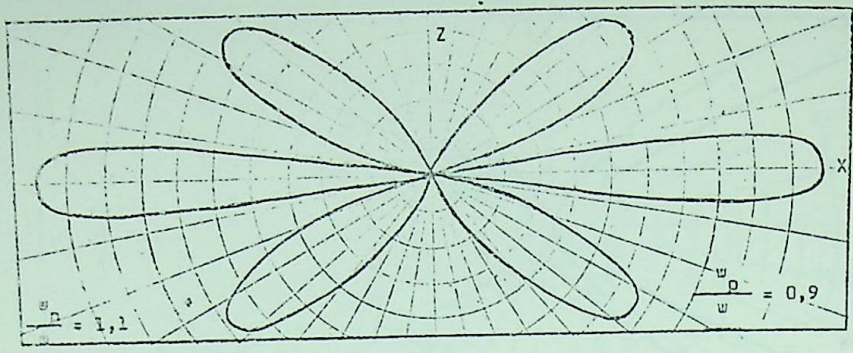
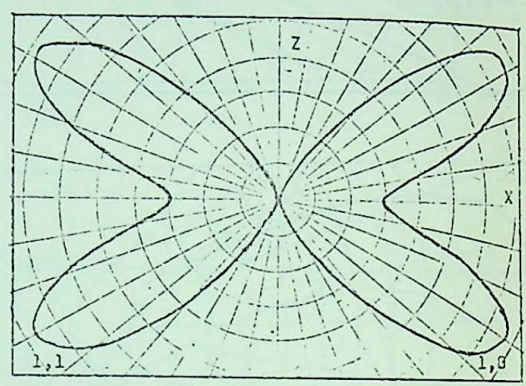


Fig. A.11 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{E}_0) sendo a relação $\omega p/w = 1,1$ fixa.

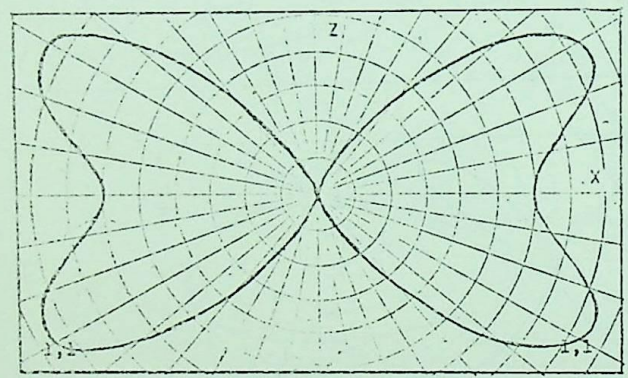
- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| (a) $\omega c/w = 0,5$ | (b) $\omega c/w = 0,6$ | (c) $\omega c/w = 0,7$ |
| (d) $\omega c/w = 0,9$ | (e) $\omega c/w = 1,0$ | (f) $\omega c/w = 1,1$ |
| (g) $\omega c/w = 1,3$ | | |



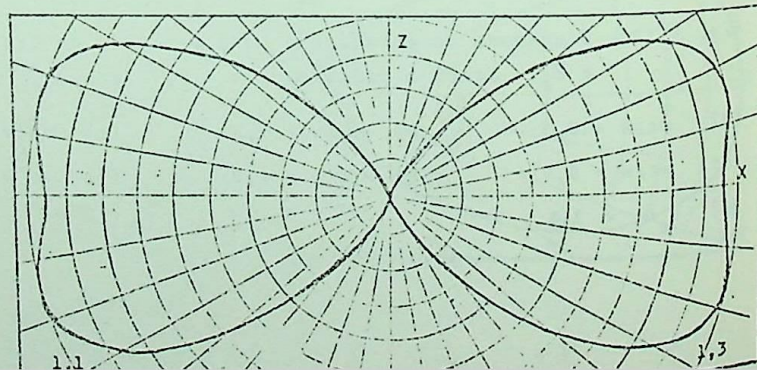
(d)

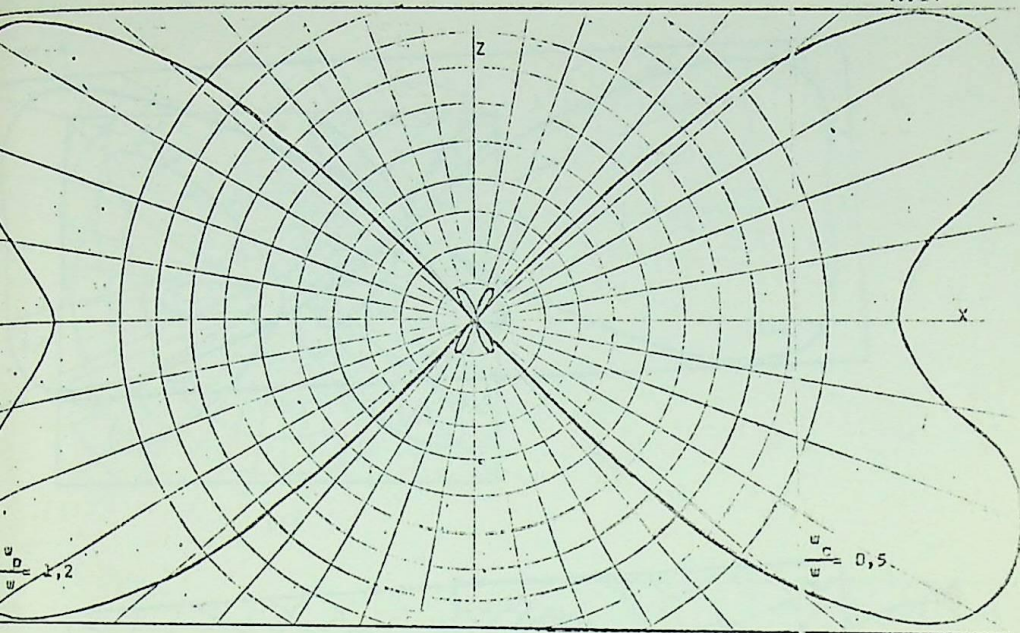


(e)

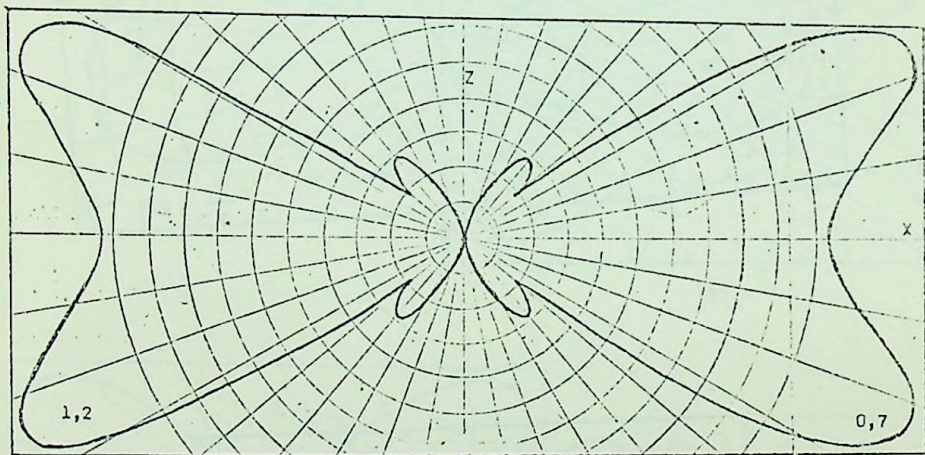


(g)





(a)



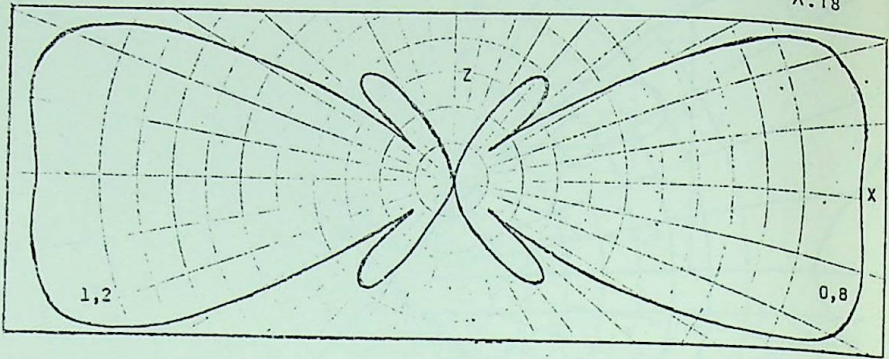
(b)

Fig.A.12 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{B}_0) sendo a relação $\omega p/w = 1,2$ fixa.

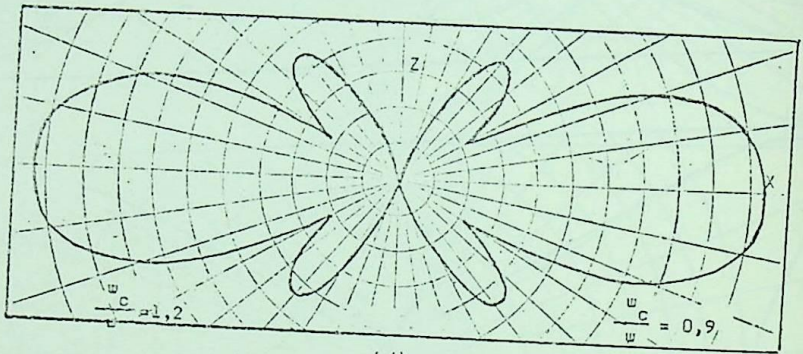
(a) $\omega c/w = 0,5$ (b) $\omega c/w = 0,7$ (c) $\omega c/w = 0,8$

(d) $\omega c/w = 0,9$ (e) $\omega c/w = 1,0$ (f) $\omega c/w = 1,1$

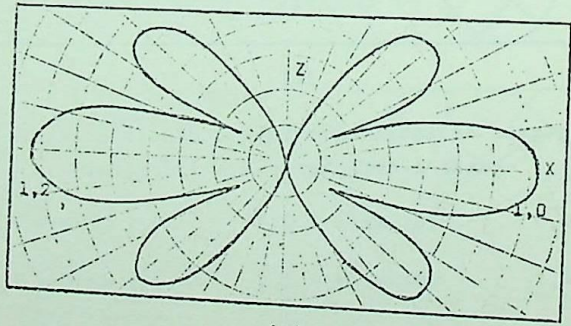
(g) $\omega c/w = 1,2$ (h) $\omega c/w = 1,4$



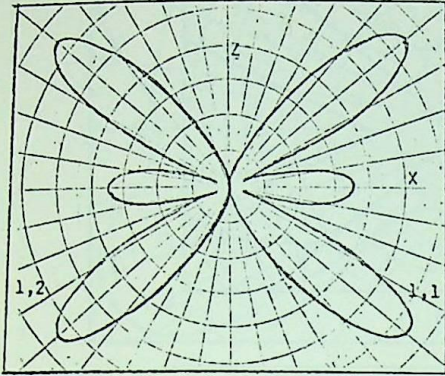
(c)



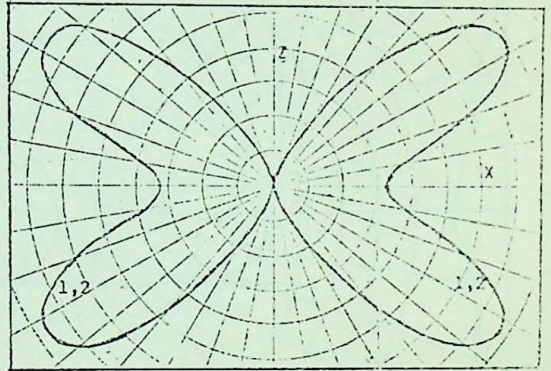
(d)



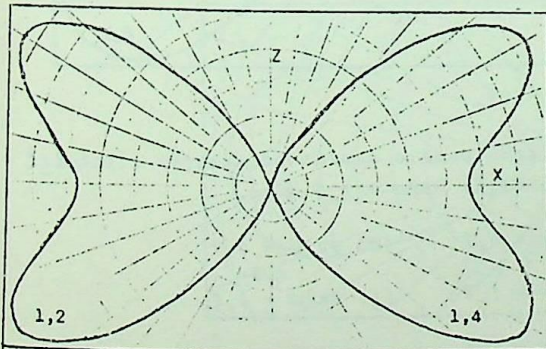
(e)



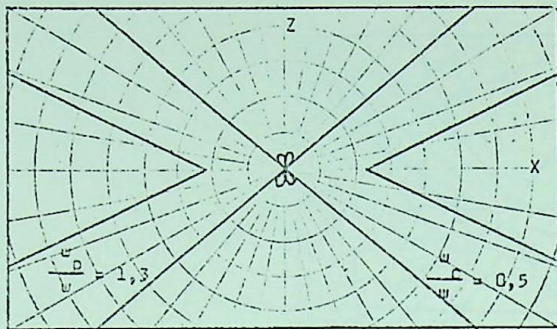
(f)



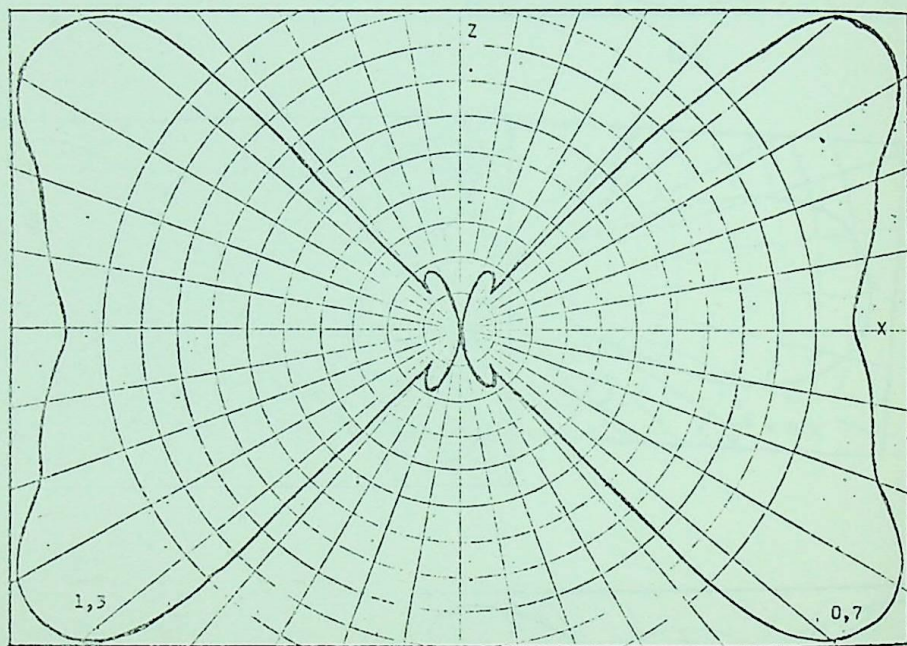
(g)



(h)



(a)



(b)

Fig. A.13 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{E}_0) sendo a relação $\omega p'/\omega = 1,3$ fixa.

(a) $\omega c/\omega = 0,5$

(b) $\omega c/\omega = 0,7$

(c) $\omega c/\omega = 0,9$

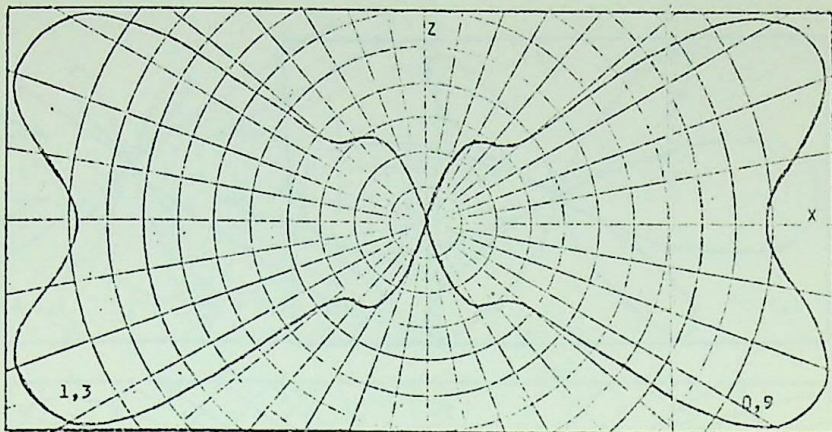
(d) $\omega c/\omega = 1,0$

(e) $\omega c/\omega = 1,1$

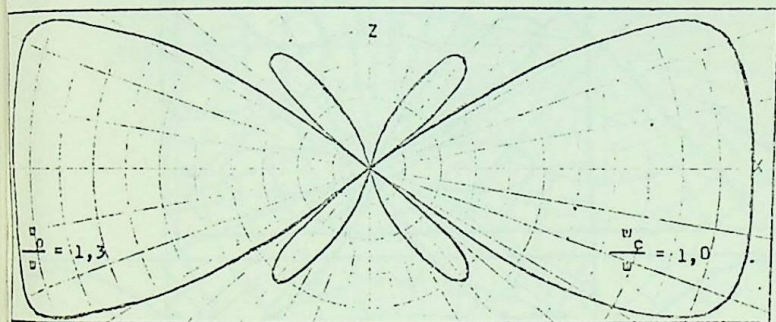
(f) $\omega c/\omega = 1,2$

(g) $\omega c/\omega = 1,3$

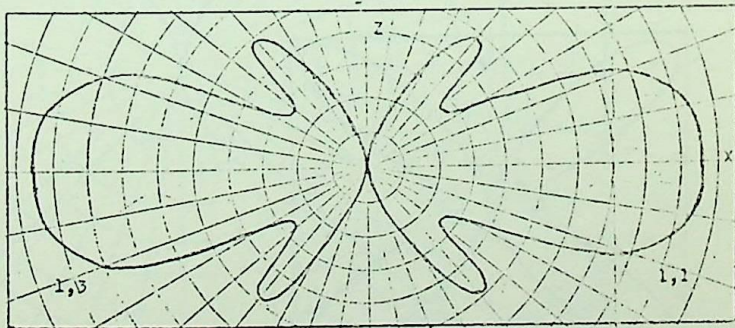
(h) $\omega c/\omega = 1,4$



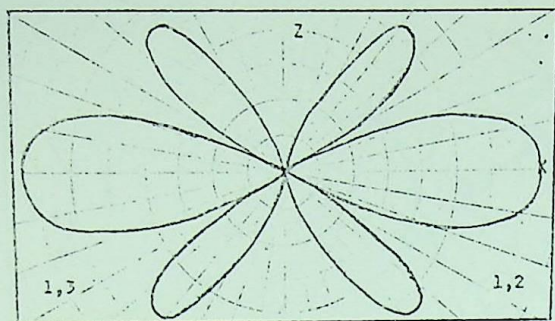
(c)



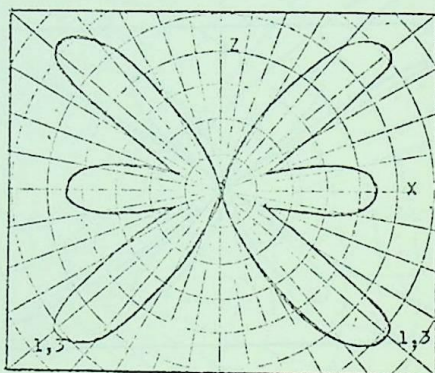
(d)



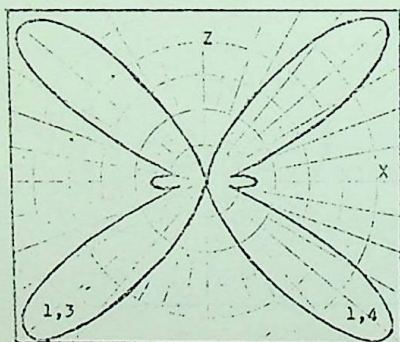
(e)



(f)



(g)



(h)

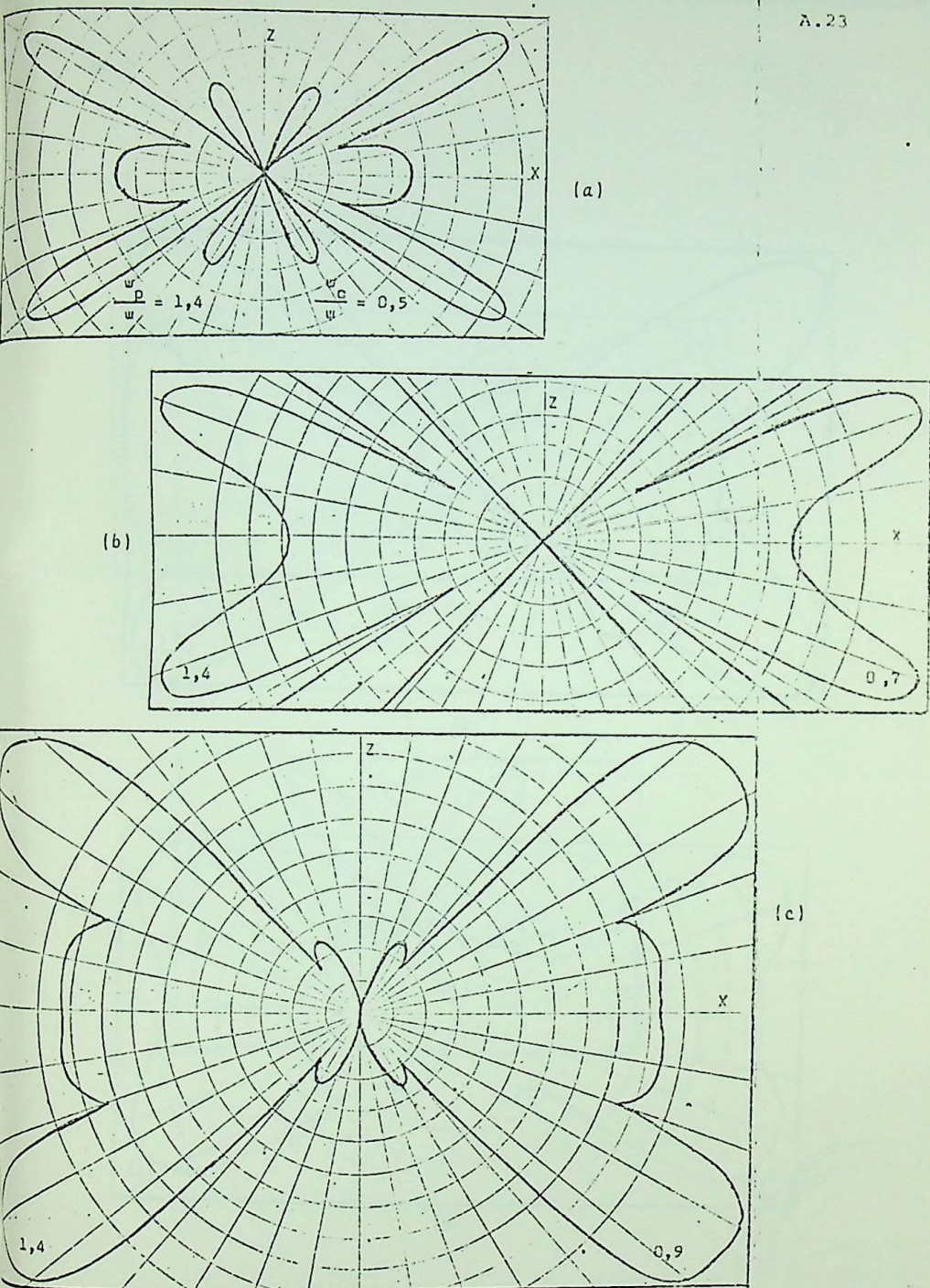
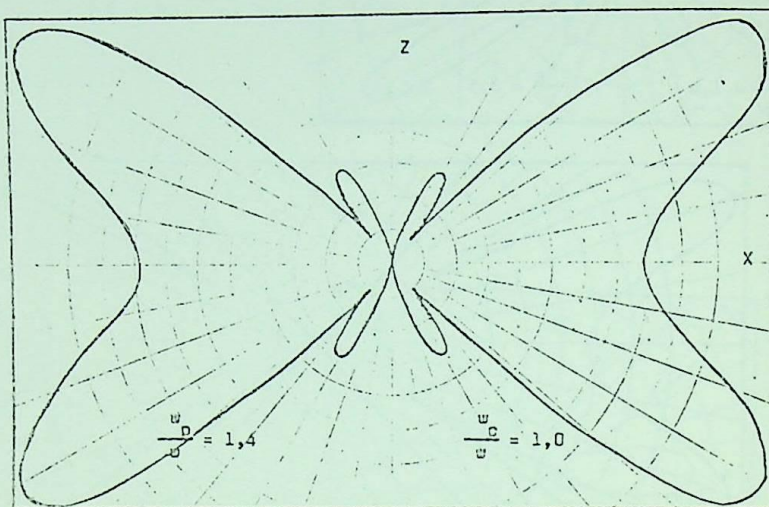
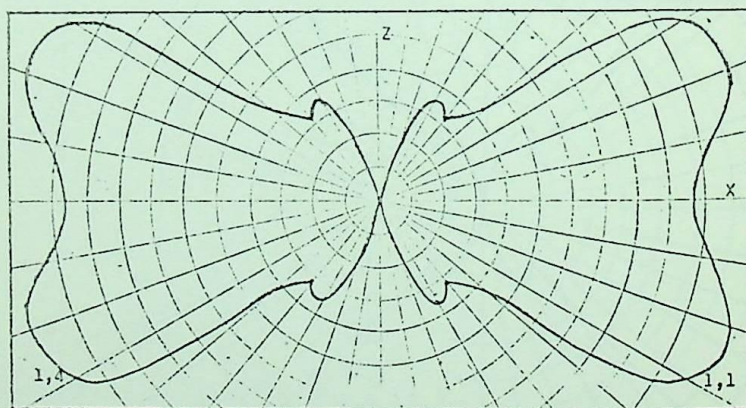


Fig.A.14 - Diagramas de irradiação para o dipolo na direção z (paralelo a \vec{B}_0) sendo a relação $\omega_p/\omega = 1,4$ fixa.

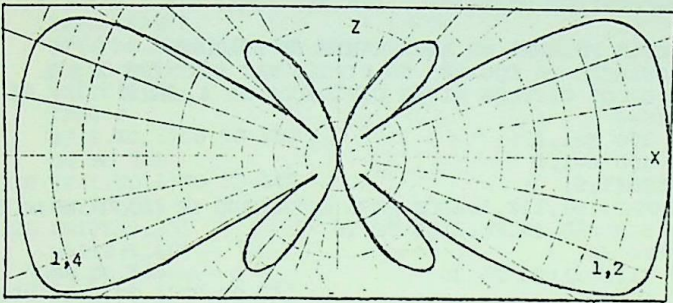
- (a) $\omega_c/\omega = 0,5$ (b) $\omega_c/\omega = 0,7$ (c) $\omega_c/\omega = 0,9$
 (d) $\omega_c/\omega = 1,0$ (e) $\omega_c/\omega = 1,1$ (f) $\omega_c/\omega = 1,2$ (g) $\omega_c/\omega = 1,4$



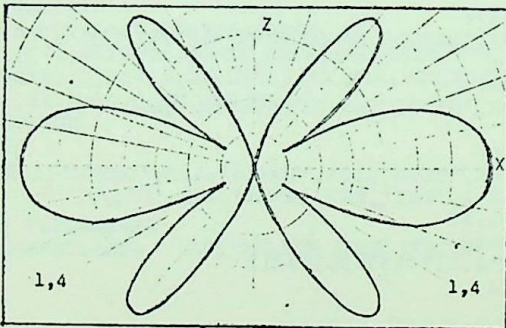
(d)



(e)



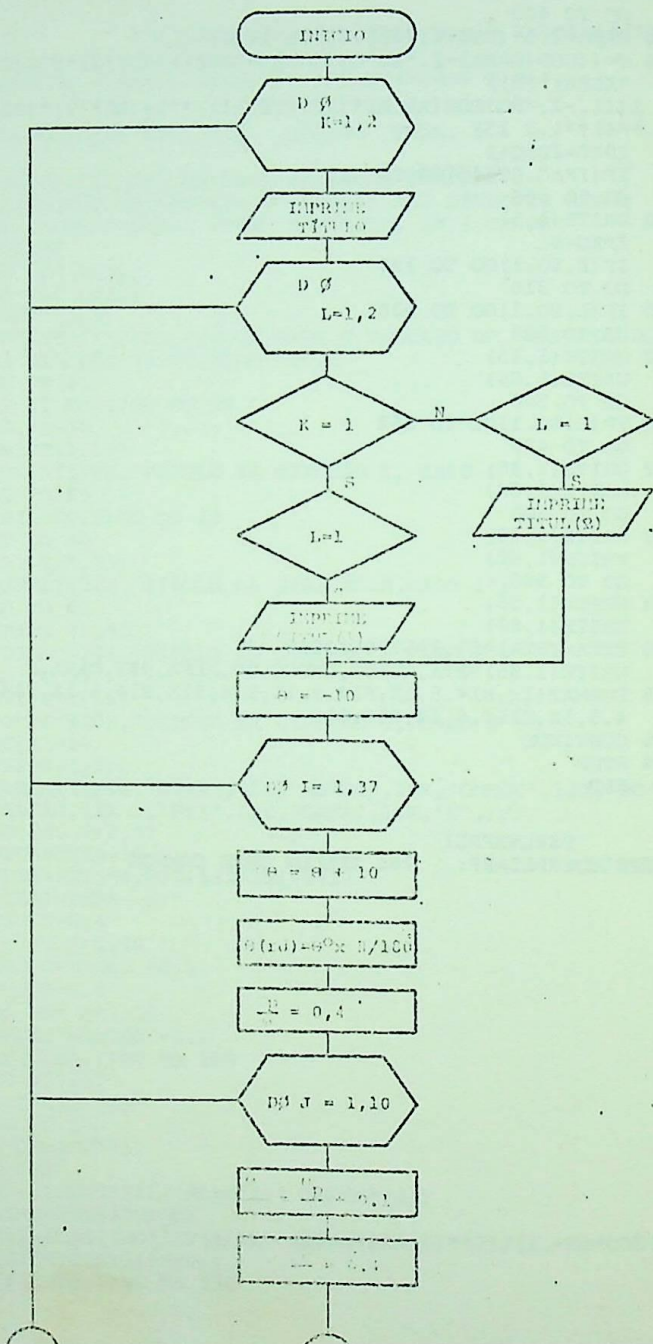
(f)



(g)



APENDICE C
DIAGRAMA DE BLOCOS



2

1

DO N = 1, 10

$$\frac{u_c}{u} = \frac{u_c}{u} + 0.1$$

K = 1

$$E = \cos \theta$$

$$R = \sin \theta$$

$$B = R * D$$

$$p = \frac{m \sqrt{y^2}}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$$

$$m = \text{ARCTAN } (u_c/u)$$

$$Y = \text{ARCTAN } \frac{\text{ARCTAN } (u_c/u)}{\text{ARCTAN } (u_c/u)}$$

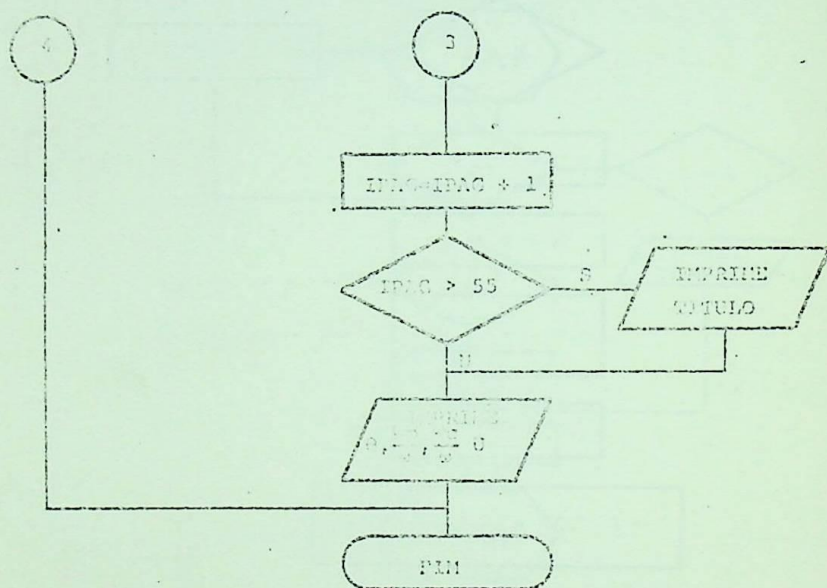
L = 1

$$Y = L * Y$$

$$U = \frac{\sqrt{(-2pc \sin^2 \theta + p^2 \cos^2 \theta - 2) \pm \sqrt{(-2pc \sin^2 \theta + p^2 \cos^2 \theta - 2)^2 - 4p^2 \cos^2 \theta}}}{2}$$

2

3



TITUL(1) Caso em que $B = \operatorname{sen} \theta$ e $\gamma = \frac{5}{2} \sqrt{}$

TITUL(2) Caso em que $B = \operatorname{cos}(\theta)$ e $\gamma = \frac{5}{2} \sqrt{}$

IPAG = variável introduzida para contar o nº de linhas
imprimidas em uma página.

APÊNDICE D

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. L.Tonks and I.Langmiur, Phys.Res. 33,195, 990(1929)
2. K.G.Budden, "Radio Waves in the Ionosphere", Cambridge University Press, New York, 1961; also; J.A.Ratcliffe, "The Magneto-ionic Theory", Cambridge University Press New York, 1961 .
3. V.L.Ginsburg, "Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma"; Gordon and Breach, Science Publishers, Inc. New York, 1961, also I.S.Shklovsky, "Cosmic Radio Waves" , "Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1960.
4. N.Herlofson, Plasma Resonance in Ionospheric Irregularities, Arkiv Fysik, 3 - 247(1951) also, J.L.Hentage, S. Weisbrod, and W.J.Pay, "Experimental Studies of Meteor Echoes at 200 Megacycles in Electromagnetic Wave Propagation", in M. Desirant and J.L.Michiels (eds.) Academic Press Inc., New York, 1960.
5. Proc. Symp.Plasma Sheath, vol. 1, U.S. Dir Force, Cambridge Research Center, December, 1959.
6. V.E.Goland, Microwaves Plasma Diagnostic Techniques, J. Tech. Phys, U.S.S.R. 30: 1265(1960)
7. C.H.Papas, "Theory of Electromagnetic Wave Propagation" McGraw-Hill Book Company - 1965
8. V.L.Ginsburg, J.Exptl. Theoret. Phys (U.S.S.R.) 10,601(1940)
9. A.A.Kolomenskii, J.Exptl.Theoret.Phys(U.S.S.R.) 24,167 (1953)

10. F.V.Bunkin, "On Radiation in Anisotropic Media", J. Exptl., Theoret Phys (U.S.S.R.) 32,338 - 346 (February, 1957) Soviet Physics Jsept.
11. H.H.Kuehl, "Electromagnetic Radiation Dipole in an Plasma Anisotropic, "USCEC Rept. 79-203, University of Southern California, Los Angeles, California(1961)
12. C.H.Papas, A Note Concerning a Gyroelectric Medium, Caetech Tech. Rept 4, prepared for the Office of Naval Research , May, 1954.
13. Fields and Waves in Communication Electronics, Simon Ramo , John R.Whinnery, Theodore Van Duzer. John Wiley and Sons , Inc. New York.
14. Fundamentals of Electric Waves, Hugh Hildreth Skilling, John Wiley and Sons, New York
15. E.Astrom, On Waves in an Ionized Gas, Arkiv Fysik, 2:443 (1950)
16. E.Arbel "Radiation from a Point Source in a Anisotropic Medium" Research Report PIBMRI - 861 - 60, Polytechnic Institute of Brooklyn, New York (1960)
17. S.M.Rytov, J.Exptl. Theoret Phys. (U.S.S.R.) 17, 930 (1947)
18. G.W.Ford, Ann. Phys. 16,185 (1961)

