

TESE  
185



ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

"ESCOAMENTO POTENCIAL EM GRADES  
RADIAIS DE MÁQUINAS DE FLUXO."

Nelson Manzanares Filho

ORIENTADOR: Euclides Carvalho Fernandes

CO-ORIENTADOR: José Eugênio Rios Ricci



ITAJUBÁ, 1982.



(S. Pa.) 1954  
1954  
1954

AGRADECIMENTOS

À Professor Euclides Carvalho Fernandes, pelo seu  
legítimo espírito científico e notável capacidade de trabalho, ao  
qual, não somente me procurei auxílio para a realização deste  
trabalho mas, também, me encorajaram a ingressar no campo de  
pesquisa.

À Professor José Eugênio Reis Siqueira, pelo constante  
apoio dispensado no dia a dia da elaboração deste trabalho.

À Professor Jerry Tedesco Siqueira, pela valiosa ajuda  
prestada ao se apresentar o texto e revisão de alguns  
detalhes.

Muito obrigado a todos.

Seu filho  
José Eugênio Reis Siqueira

Aos meus pais e  
à minha esposa.

CLASS. 532.537:62-13(043.2)

CUTT. *M. g. e.*

TOMBO 185

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Euclides Carvalho Fernandes, pelo seu contagiante espírito científico e notável capacidade de trabalho, os quais, não somente me trouxeram estímulo para a realização deste trabalho mas, também, me encorajaram a ingressar no campo da pesquisa.

Ao Professor José Eugênio Rios Ricci, pelo constante apoio dispensado no dia a dia da elaboração deste trabalho.

Ao Professor Jerzy Tadeusz Sielawa, pela valiosa colaboração prestada ao me apresentar o método dos painéis, usado nesta dissertação.

Meus sinceros agradecimentos.

Nelson Manzanares Filho

## RESUMO

Neste trabalho, é proposto um método para a solução do escoamento potencial incompressível através de grades radiais com pás infinitamente finas, conhecida a geometria (problema direto). A formulação é efetuada segundo o modelo clássico das singularidades, e a solução das equações concernentes é obtida através do Método dos Painéis.

A finalidade do método proposto é possibilitar a solução do problema para pás de formato arbitrário, superando as dificuldades matemáticas existentes em outros métodos.

Alguns exemplos de aplicação do método são apresentados, mostrando o efeito de parâmetros geométricos da grade radial nas características aerodinâmicas obtidas.

Conclui-se que o presente método possibilita a determinação das características básicas de aceleração e desaceleração do escoamento relativo ao rotor. O conhecimento destas características poderia ser aplicado em análises futuras de perdas e rendimentos.

## ABSTRACT

A method for the solution of the incompressible potential flow through radial cascades with infinitely thin blades is proposed, being given the geometry (direct problem). The formulation is based on the singularities classical model, and the solution of the concerning equations is obtained by means of the Panels Method.

The aim of the proposed method is to make possible the solution of the problem for blades of arbitrary shape, eliminating the mathematical difficulties of other methods.

Examples of application showing the geometric parameters effect on the aerodynamic characteristics are given.

One concludes that the present method can give the basic characteristics of acceleration and disacceleration of the relative flow. The knowledge of these characteristics could be used in posterior analysis of losses and efficiencies.

## SIMBOLOGIA

### Caracteres Latinos

- A coeficientes reais, eq. (2.35.a)
- Ar coeficientes reais, eqs. (2.17.a) e (2.26.a)
- A $\theta$  coeficientes reais, eqs. (2.17.c) e (2.26.c)
- B coeficientes reais, eq. (2.35.b)
- Br coeficientes reais, eqs. (2.17.b) e (2.26.b)
- B $\theta$  coeficientes reais, eqs. (2.17.d) e (2.26.b)
- c velocidades absolutas (complexas ou componentes)
- C velocidades absolutas adimensionais ( $C = c/\omega r_e$ )
- g densidade complexa de singularidades, eq. (A.2);  
aceleração da gravidade
- h distância entre um ponto genérico e um plano horizontal de referência no sentido de baixo para cima, eq. (2.64.b)
- i unidade imaginária ( $i = \sqrt{-1}$ )
- I coeficientes complexos, eqs. (2.9.a) e (2.19.a)
- J coeficientes complexos, eqs. (2.9.b) e (2.19.b)
- M número de painéis
- N número de pás
- p pressão
- P pressão adimensional, eq. (2.65)
- q intensidade de uma fonte ou sumidouro pontual; densidade de fontes e sumidouros
- Q vazão
- r coordenada radial no plano z, Fig. 2.1
- R coordenada radial adimensional ( $R = r/r_e$ )
- s coordenada natural da pá de referência;  
coordenada da linha de singularidades
- S coordenada adimensional ( $S = s/r_e$ )
- w velocidades relativas
- W velocidades relativas adimensionais ( $W = w/\omega r_e$ )
- x coordenada cartesiana no plano z, Fig. 2.1
- y coordenada cartesiana no plano z, Fig. 2.1
- X coeficientes complexos, eqs. (2.11.a) e (2.23.a)
- Y coeficientes complexos, eqs. (2.11.b) e (2.23.b);  
trabalho específico.

- z variável complexa designativa da posição genérica no plano da grade radial, Fig. 2.1
- Z variável complexa adimensional ( $Z = z/r_e$ )

### Caracteres Gregos

- $\alpha$  ângulo entre a tangente à pá ou painel e o eixo x, Figs. 2.5 e A.1
- $\beta$  ângulo entre a tangente à pá ou painel e a tangente à circunferência, Figs. 2.5 e 2.6
- $\gamma$  densidade de vórtices
- $\Gamma$  circulação; densidade de vórtices adimensional ( $\Gamma = \gamma/\omega r_e$ )
- $\delta$  ângulo de espaçamento das pás, Fig. 2.3
- $\zeta$  variável complexa designativa da posição genérica das singularidades distribuídas, Fig. 2.1
- $\theta$  coordenada polar, Fig. 2.1
- $\mu$  fator de deficiência de potência ("slip factor")
- $\rho$  massa específica
- $\phi$  coeficiente de vazão, eq. (2.30.a)
- $\psi$  coeficiente de pressão, eq. (2.54)
- $\omega$  velocidade angular da grade radial
- $\Omega$  coeficiente de circulação interna ou pré-rotação, eqs. (2.30.b) e (2.59)

### Índices Inferiores

- 0 grandezas no centro da grade ou do escoamento não perturbado pela grade; referente à pressão total
- $\infty$  grandezas consideradas longe da grade; número infinito de pás
- c grandezas referentes ao ponto de controle
- e externo ou saída
- F final
- i interno ou entrada
- j ponto de controle genérico
- k grade elementar genérica ou painel correspondente
- $\ell$  pá genérica
- m ponto médio
- OT ótimo ou de projeto

pã	referente a uma pã ou ao rotor	
r	componente radial	
s	induzido	
T	teórico	
$\gamma$	referente a uma distribuição de vórtices	
$\theta$	componente circunferencial	

### Índices Superiores

-	conjugado; lado de sucção	
+	lado de pressão	
'	derivada	
*	referente à pressão de movimento	

### Operadores

d	diferencial total	
$\partial$	diferencial parcial	
$\Delta$	diferença finita	

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA	PÁG.	
2.1	Representação do escoamento potencial em grades radiais através da superposição de escoamentos mais simples	9
2.2	Idéia do método dos painéis: aproximação do corpo por meio de elementos de superfície (painéis)	12
2.3	Nomenclatura de referência para a geometria da grade radial	15
2.4	Discretização da pá de referência em painéis	15
2.5	Grade elementar $k$ e detalhamento do painel $k$ situado na pá de referência ( $\ell = 1$ )	17
2.6	Condição de contorno para o escoamento em grades radiais móveis geradoras	25
2.7	Notação para as circulações na grade radial móvel	34
2.8	Representação dos valores da densidade de vórtices nos pontos extremos dos painéis	34
4.1	Influência do número de pás na característica teórica $\psi_T \times \phi$	45
4.2	Influência do número de pás na distribuição de pressões sobre a pá logarítmica com $\beta = 25^\circ$ , $r_i/r_e = 0,3$	47
4.3	Influência do choque na distribuição de pressões sobre a pá logarítmica com $\beta = 25^\circ$ , $r_i/r_e = 0,3$ , $N = 8$	48
4.4	Fator de deficiência de potência	50
4.5	Distribuição de pressão sobre a pá logarítmica- $\beta = 25^\circ$ , $r_i/r_e = 0,3$ , $N = 6$	52
4.6	Distribuição de pressões sobre a pá logarítmica- $\beta = 22,5^\circ$ , $r_i/r_e = 0,43$ , $N = 7$	53

4.7	Influência da forma da pá nas características aerodinâmicas da grade radial com $N = 6$ , $r_i/r_e=0,3$ , $\Omega = 0$ , $\phi = \phi_{0T}$	55
A.1	Linha genérica no plano complexo $z$	63
A.2	Descontinuidade imposta por uma linha de vórtices genérica sobre o campo de velocidades	63

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO PARA O PROBLEMA MISTO DO ESCORRIMENTO POTENCIAL EM GRADDES RADIAIS 7

2.1 - Método Clássico de Escorramento Potencial através de Grades Radiais segundo o Método das Singularidades 7

2.2 - Características do Método dos Painéis 11

2.3 - Campo de Velocidades Induzidas por uma Grade Radial segundo o Método dos Painéis 15

2.4 - Condição de Continuidade para o Escorramento através de Grades Radiais Móveis Giratórias 24

2.5 - Sistema de Equações Lineares. Solução do problema segundo o Método dos Painéis 27

2.6 - Trabalho Específico - Fator de eficiência da Potência 31

2.7 - Distribuições de velocidades e pressões 35

CAPÍTULO 3 - ANÁLISE NUMÉRICA 39

3.1 - Matriz de Entrada 39

3.1.1 - Montagem da Matriz de Coeficientes 41

3.1.2 - Solução do Sistema de Equações 42

3.1.3 - Comentários a respeito da discretização 42

CONTEÚDO

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
SIMBOLOGIA	iii
LISTA DE FIGURAS	vi
ÍNDICE	PÁG.
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO PARA O PROBLEMA DIRETO DO ESCOAMENTO POTENCIAL EM GRADES RADIAIS	7
2.1 - Modelo Clássico de escoamento Potencial através de Grades Radiais segundo o Método das Singularidades	7
2.2 - Características do Método dos Painéis	11
2.3 - Campo de Velocidades Induzidas por uma Grade Radial segundo o Método dos Painéis	14
2.4 - Condição de Contorno para o escoamento através de Grades Radiais Móveis Geradoras	24
2.5 - Sistema de Equações Lineares. Solução do problema segundo o Método dos Painéis	27
2.6 - Trabalho Específico - Fator de Deficiência de Potência	32
2.7 - Distribuições de velocidades e pressões	36
CAPÍTULO 3 - SOLUÇÃO NUMÉRICA	39
3.1 - Dados de Entrada	39
3.2 - Montagem da Matriz de Coeficientes	41
3.3 - Solução do Sistema de Equações	41
3.4 - Comentários a respeito da discretização	42

CAPÍTULO 4 - EXEMPLOS	44
4.1 - Influência do Número de Pás na Característica Teórica $\psi_T \times \phi$	44
4.2 - Influência do Número de Pás na distribuição de Pressão sobre a Pá	46
4.3 - Influência do Choque na Distribuição de Pressões sobre a Pá	46
4.4 - Fator de Deficiência de Potência	49
4.5 - Comparação da Distribuição Teórica de Pressões sobre a pá com Resultados Experimentais	51
4.6 - Influência da Forma das Pás nas Características Aerodinâmicas da Grade Radial	54
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	57
APÊNDICE A - Algumas Formas Particulares de distribuição de Singularidades	61
A.1 - Distribuição de Singularidades Uniforme	64
A.2 - Distribuição de Singularidades Linear	66
APÊNDICE B - Fluxograma e Programa Computacional	69
B.1 - Fluxograma	69
B.2 - Programa Computacional	72
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	78

## CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

O desempenho das máquinas de fluxo sofre a influência de diversos parâmetros geométricos e aerodinâmicos. A análise comparativa desta influência é de suma importância no dimensionamento correto das referidas máquinas.

Numa primeira aproximação, a análise dos parâmetros geométricos e aerodinâmicos das máquinas de fluxo pode ser efetuada com base na teoria do escoamento unidimensional, utilizando-se a equação de Euler para número infinito de pás. No entanto, esta teoria isoladamente não permite uma previsão da influência de alguns parâmetros geométricos importantes, tais como a forma e o número das pás. O campo de ação da teoria unidimensional isolada fica restrito à análise qualitativa dos ângulos construtivos na entrada e na saída do rotor.

Devido às limitações da equação de Euler para um número infinito de pás, grande parte da pesquisa tem sido conduzida no sentido de se corrigir experimentalmente a teoria unidimensional. Note-se, porém, que, mesmo com o auxílio da análise dimensional, a correlação experimental de todos os parâmetros relevantes das máquinas de fluxo é praticamente impossível. Isto é particularmente verdadeiro para o caso das máquinas de fluxo radiais.

A partir das observações anteriores, verifica-se a necessidade de uma teoria de base mais refinada, com a qual seja possível prever de uma forma mais completa a influência dos parâmetros das máquinas de fluxo. Diversos esforços tem sido realizados em busca de um aperfeiçoamento da teoria.

Numa aproximação mais elaborada, pode-se considerar o escoamento nas máquinas de fluxo como potencial, bidimensional, incompressível e permanente (grades). Tal consideração permite um tratamento analítico bastante eficiente, e possibilita a solução clássica de dois tipos de problemas: análise das características aerodinâmicas decorrentes de uma dada configura

ção geométrica (problema direto), e determinação da configuração geométrica adequada para a obtenção de certas características aerodinâmicas pretendidas (problema indireto).

Dentre os métodos de formulação destes problemas, destacam-se o método de transformação conforme e o método das singularidades. [ Ambos foram inicialmente aplicados no estudo da asa isolada, sendo posteriormente estendidos para os casos de máquinas de fluxo axiais e radiais.

Lu Segundo o método de transformação conforme, procura-se, através da teoria da variável complexa, um mapeamento que transforme a geometria do problema, em geral complicada, numa geometria mais simples, para a qual já existe solução potencial. Conhecida a lei de transformação e aplicando-se as condições necessárias, é possível determinar a solução para a geometria original.

lu No método das singularidades, utiliza-se uma distribuição adequada de fontes, sumidouros e vórtices para se representar o campo de velocidades induzidas pelos obstáculos. Esta distribuição pode ser feita sobre a superfície dos obstáculos ou no interior dos mesmos e deve satisfazer as condições de continuidade e de contorno.

O escoamento potencial através de grades radiais foi inicialmente analisado por Schulz [18] e Busemann [4]. Nestes trabalhos, empregou-se o método da transformação conforme na solução do problema direto. A análise se restringiu a pás infinitamente finas traçadas em espiral logarítmica. Notadamente Busemann tratou de determinar a relação entre os trabalhos específicos para número finito e infinito de pás (fator de deficiência de potência). Seus resultados foram apresentados para uma larga faixa de variação dos parâmetros geométricos, visando a aplicação em bombas centrífugas.

Posteriormente, na análise de grades radiais, a aplicação do método das singularidades se difundiu. Este método se mostrou mais conveniente que o método de transformação conforme, em virtude da sua maior facilidade de aplicação a casos gerais, e maior eficácia na solução.

Neste sentido, os primeiros trabalhos realizados foram os de Staufer [19] e Betz e Flügge - Lotz [3]. Estes autores restringiram suas análises a pás infinitamente finas, utilizando uma distribuição de vórtices como função da coordenada radial, e atacaram o problema de determinar a forma das pás (problema indireto).

Isay [10] propôs soluções para o problema direto, cobrindo os casos de pás infinitamente finas e pás com espessura finita. Em ambos os casos, foram consideradas as situações de grade móvel isolada e grade móvel precedida de sistema diretor. Em todas as suas análises, Isay empregou uma distribuição única de vórtices sobre o contorno da pá.

Schilhansl [15] estendeu a teoria das grades radiais na análise de rotores de fluxo misto (diagonais), abordando o problema direto. No trabalho de Schilhansl, as superfícies de corrente do escoamento foram consideradas superfícies de revolução. As intersecções destas superfícies com as pás foram mapeadas em planos normais ao eixo de rotação através de uma transformação conforme adequada. Analisou-se, desta forma, o escoamento potencial através de cada plano transformado, cuja geometria era a de uma grade radial de pás com espessura finita (em geral). Neste ponto, Schilhansl fez modificações em relação ao trabalho de Isay: utilizou uma distribuição conjugada de vórtices e fontes ao longo da linha de esqueleto da pá, ao invés de somente vórtices no contorno. Schilhansl introduziu ainda modificações na forma de se determinar as distribuições de singularidades. Ao contrário de outros trabalhos, onde se estabelecia uma equação integral para as distribuições de singularidades a partir da condição de tangência, estas distribuições foram escritas desde o início na forma de séries, analogamente ao tratamento de grades axiais. Os coeficientes destas séries foram determinados a partir das condições de tangência e continuidade para um número finito de pontos.

Mais recentemente, Salomon [14], utilizando critérios análogos ao de Isay [10], apresentou um método para a solução do problema. Da mesma forma que Isay, utilizou uma distribuição única de vórtices sobre o contorno da pá. O método foi gene

realizado para cobrir todos os casos de interesse: pás infinitamente finas ou com espessura finita, problema direto ou indireto, um ou vários estágios com sistema diretor ou não. Em termos de aplicação, no entanto, Salomon se restringiu ao problema direto de grades isoladas com pás infinitamente finas, de traçado logarítmico. Os resultados obtidos foram comparados com os de Isay [10] e Busemann [4]. Desta comparação, observou-se boa concordância entre os resultados de Salomon e Busemann, e discrepâncias nos resultados de Isay. Salomon, através do método proposto, obteve a distribuição de pressão no contorno da pá e as distribuições de velocidade e pressão nos canais formados pelas pás. Os resultados teóricos deste caso foram comparados com alguns resultados experimentais, observando-se boa concordância, principalmente para a distribuição de pressão no contorno da pá.

Henn [3] estudou a influência do número finito de pás nas máquinas de fluxo, notadamente as radiais. Comparou diversos métodos para o cálculo do fator de deficiência de potência (relação entre os trabalhos específicos para número finito e infinito de pás), incluindo entre eles o método das singularidades. Com relação a este método, Henn [3] baseou-se no trabalho de Salomon [14] e, considerando pás infinitamente finas de traçado logarítmico, calculou o fator de deficiência de potência para os casos de vazão nula e condição de entrada sem choque.

Seguindo sugestões do trabalho de Salomon, Ferreira [7] atacou o problema indireto, isto é, de determinar a forma das pás dadas certas características aerodinâmicas pretendidas: coeficiente de vazão e de pressão para entrada sem choque. Considerou somente o caso de pás infinitamente finas e, através de alguns exemplos, obteve formas de pás bastante próximas à forma logarítmica.

É importante salientar algumas características relacionadas com o método das singularidades, não só no que se refere ao caso de grades radiais, mas em todas as aplicações. Através do método das singularidades, as expressões para o campo de velocidades induzidas são escritas invariavelmente na forma de integrais. Os integrandos destas expressões constituem funções analíticas em todos os pontos do escoamento, com exceção dos

pontos em que se localizam as singularidades, normalmente sobre o contorno dos obstáculos. No entanto, o cálculo das velocidades induzidas deve ser efetuado exatamente nestes pontos, visando a aplicação da condição de contorno. Verificam-se, desta forma, grandes dificuldades numéricas na computação do campo de velocidades induzidas. Como exemplo, pode-se tomar o trabalho de Schilhansl [15], do qual boa parte se dedica ao estabelecimento de um método de cálculo das referidas integrais nos pontos não analíticos dos integrandos.

Algumas simplificações poderiam ser introduzidas visando contornar as dificuldades numéricas. Cita-se, por exemplo, a teoria clássica dos perfis delgados, onde se admite a linearização da condição de contorno e a distribuição de singularidades sobre a corda dos perfis. Tais simplificações permitem escrever as distribuições de singularidades na forma de séries de Fourier, resultando para as velocidades induzidas formas conjugadas. Este procedimento foi estendido para o caso de grades axiais, ficando restrito porém às situações de pequena curvatura dos perfis.

Visando superar as dificuldades matemáticas e aplicar o método das singularidades na solução exata do escoamento potencial sobre obstáculos de formato arbitrário, Hess-Smith [9] desenvolveram um método numérico apropriado, referido como "método dos painéis". Segundo este método, a superfície dos obstáculos é discretizada em elementos, ou painéis, sobre os quais se distribuem singularidades de intensidade a se determinar, porém de forma conhecida (uniforme, linear, etc.). Com esse procedimento, as dificuldades numéricas ficam superadas, e as intensidades das singularidades são determinadas resolvendo-se um sistema de equações lineares. O método dos painéis foi extensivamente aplicado nas mais diversas situações: corpos tridimensionais, perfis isolados, grades axiais, etc.. Com relação às referências mais importantes, porém, verifica-se que o método dos painéis ainda não foi estendido na análise de grades radiais, pelo menos aparentemente. Cumpre notar, por outro lado, que o método dos painéis só pode ser eficientemente aplicado na solução do problema direto.

Considerando-se todas as observações e referências anteriores, decidiu-se, no presente trabalho, analisar o escoamento potencial em grades radiais utilizando o conceito de singularidades na formulação e estendendo o método dos painéis na solução. Têm-se como objetivos principais superar as dificuldades matemáticas e possibilitar a solução exata do problema para pás de formato arbitrário. De início a análise ficará restrita a uma grade móvel isolada com pás infinitamente finas, salientando-se porém a possibilidade de extensão para outras situações importantes: pás de espessura finita, sistema estator-rotor, etc.

No capítulo 2 são desenvolvidas as equações fundamentais do método, visando a implantação de um programa computacional para a solução do problema. No capítulo 3 discutem-se alguns aspectos importantes ligados à elaboração do referido programa computacional. Em seguida, no capítulo 4, apresentam-se alguns exemplos de aplicação do método na determinação de características importantes do escoamento potencial em grades radiais. Apresentam-se resultados que mostram a influência do número de pás e entrada com choque nas características aerodinâmicas das grades radiais: coeficiente de pressão versus coeficiente de vazão, distribuição de pressões sobre uma pá e fator de deficiência de potência. Algumas comparações com outros métodos teóricos e resultados experimentais são efetuadas. Finalmente, no capítulo 5, conclusões e sugestões são feitas. De mais importante conclui-se da validade do presente método na determinação das características básicas de aceleração e desaceleração do escoamento relativo ao rotor. A partir destas características seria possível atacar o problema da avaliação teórica das perdas nos canais de um rotor radial, através de um estudo posterior de camada limite.

## CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO PARA O PROBLEMA DIRETO DO ESCOAMENTO POTENCIAL EM GRADES RADIAIS

### 2.1 - Modelo Clássico de escoamento Potencial através de Grades Radiais segundo o Método das Singularidades.

O escoamento potencial bidimensional incompressível e permanente através de grades radiais é tradicionalmente representado pela superposição dos seguintes escoamentos mais simples (Fig. 2.1):

- fonte ou sumidouro disposto no centro da grade (origem do sistema), simulando a vazão do escoamento;
- vórtice disposto no centro da grade simulando a circulação do escoamento não perturbado (sem o efeito da grade);
- fontes, sumidouros e vórtices distribuídos sobre as pás, simulando o efeito da grade.

A expressão da velocidade complexa conjugada devida a uma fonte ou sumidouro de intensidade  $q_0$  e um vórtice de intensidade  $\Gamma_0$  colocados na origem de um plano complexo  $z = re^{i\theta}$  é a seguinte:

$$\bar{c}_0(z) = \frac{1}{2\pi z} (q_0 - i\Gamma_0). \quad (2.1.a)$$

Nesta expressão,  $q_0$  é positiva para uma grade geradora (fonte) e negativa para uma grade motora (sumidouro);  $\Gamma_0$  é positiva no sentido anti-horário e negativa no sentido horário. Considerando  $c_{0r}$  e  $c_{0\theta}$  as componentes radial e circunferencial da velocidade complexa  $c_0$ , respectivamente, tem-se que

$$c_0(z) = (c_{0r} + i c_{0\theta}) e^{i\theta}. \quad (2.1.b)$$

Comparando as equações (2.1.a) e (2.1.b), resulta, naturalmente, que



$$c_{0r} = \frac{q_0}{2\pi r} \tag{2.2.a}$$

e

$$c_{0\theta} = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \tag{2.2.b}$$

A velocidade complexa conjugada induzida no ponto  $z$  por uma distribuição contínua de singularidades sobre as pás de uma grade radial é dada, segundo a referência [6], pela expressão

$$\bar{c}_s(z) = \frac{N}{2\pi} \int_{s_i}^{s_e} g(s) \frac{z^{N-1}}{z^{N-\zeta}} ds \tag{2.3}$$

Nesta expressão,  $g(s) = q + i\gamma$  é a densidade complexa de singularidades, representando o efeito combinado das distribuições de fontes com densidade  $q$  e vórtices com densidade  $\gamma$ ;  $N$  é o número de pás da grade;  $s_i$  e  $s_e$  representam, respectivamente, os bordos de ataque e de fuga de uma pá de referência, desde que se admita a distribuição de singularidades sobre toda a pá;  $\zeta$  indica a posição genérica das singularidades e representa, no caso mais geral, o contorno de uma pá de referência.

*stop here*  


Desta forma, a velocidade complexa conjugada do escoamento através de uma grade radial pode ser obtida pela superposição das velocidades complexas conjugadas das equações (2.1.a) e (2.3), ou seja

$$\bar{c}(z) = \bar{c}_0(z) + \bar{c}_s(z) = \frac{1}{2\pi z} (q_0 - i\Gamma_0) + \frac{N}{2\pi} \int_{s_i}^{s_e} g(s) \frac{z^{N-1}}{z^{N-\zeta}} ds \tag{2.4}$$

Convém observar que as velocidades referidas até agora são velocidades absolutas, isto é, vistas de um referencial inercial. No caso de grades radiais móveis é sabido que o escoamento relativo é rotacional. Neste caso, somente o escoamento absoluto pode ser considerado potencial, sendo possível representá-lo por meio de singularidades.

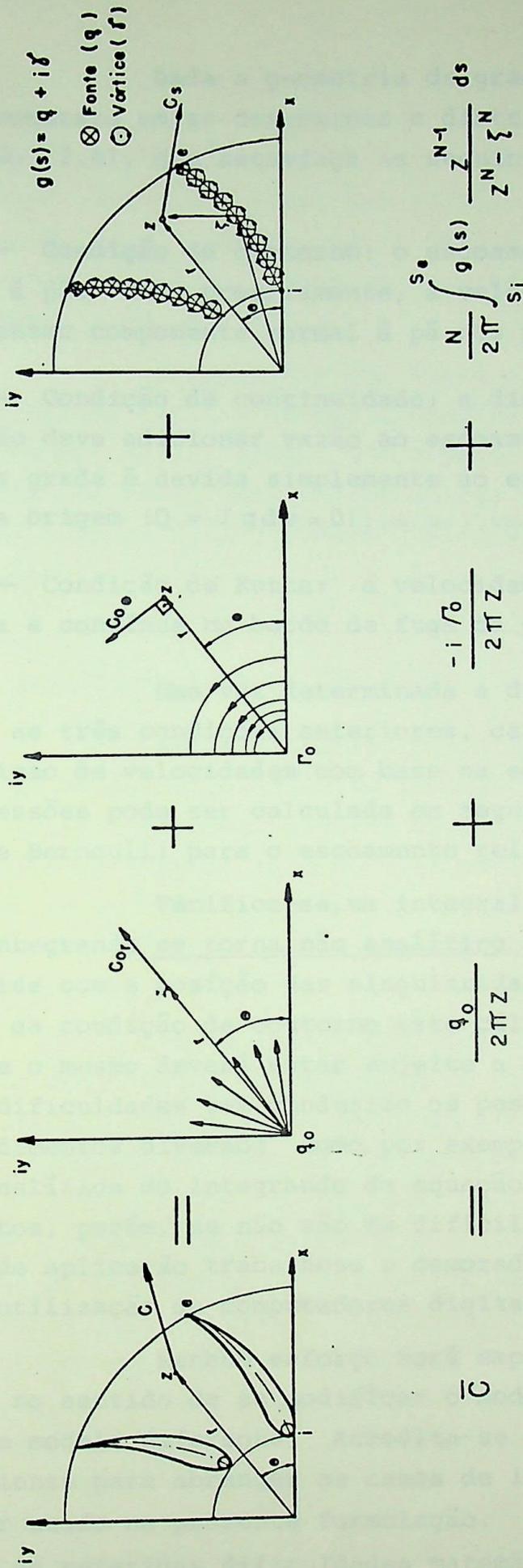


FIGURA 2.1 - REPRESENTAÇÃO DO ESCOAMENTO POTENCIAL EM GRADES RADIAIS ATRAVÉS DA SUPERPOSIÇÃO DE ESCOAMENTOS MAIS SIMPLES.

Dada a geometria da grade radial, o problema direto consiste em se determinar a distribuição  $g(s)$ , segundo a equação (2.4), que satisfaça as seguintes condições do escoamento:

— Condição de contorno: o escoamento relativo deve ser tangente à pá. Mais propriamente, a velocidade relativa não deve apresentar componente normal à pá nos pontos da mesma ( $w_n = 0$ );

— Condição de continuidade: a distribuição de singularidades não deve adicionar vazão ao escoamento. A vazão total através da grade é devida simplesmente ao efeito da fonte (ou sumidouro) na origem ( $Q = \int q ds = 0$ );

— Condição de Kutta: a velocidade do escoamento deve ser finita e contínua no bordo de fuga da pá (op.cit.[11]).

Uma vez determinada a distribuição  $g(s)$  que verifique as três condições anteriores, calcula-se diretamente a distribuição de velocidades com base na equação (2.4). A distribuição de pressões pode ser calculada em seguida de acordo com a equação de Bernoulli para o escoamento relativo.

Verifica-se, na integral da equação (2.3), que o seu integrando se torna não analítico quando o ponto de cálculo coincide com a posição das singularidades ( $z = \zeta$ ). Como na imposição da condição de contorno este cálculo é necessário, conclui-se que o mesmo deverá estar sujeito a dificuldades numéricas. Tais dificuldades tem conduzido os pesquisadores a lançar mão de procedimentos diversos como, por exemplo, a separação da parte não analítica do integrando da equação (2.3) [10]. Esses procedimentos, porém, se não são de difícil formulação, são, pelo menos, de aplicação trabalhosa e demorada, mesmo tendo-se em vista a utilização de computadores digitais.

Nenhum esforço será empreendido no presente trabalho no sentido de se modificar o modelo clássico ou se utilizar um modelo diferente. Acredita-se que o modelo clássico seja suficiente para abranger os casos de interesse e, portanto, deva ser usado na presente formulação. Por outro lado, visando superar as referidas dificuldades matemáticas e tornar o cálculo

menos trabalhoso, será proposto nos itens a seguir um procedimento alternativo para a solução do problema direto do escoamento potencial em grades radiais. Esse procedimento se baseia num método conhecido como Método dos Painéis e visa, em primeiro lugar, substituir a equação (2.4) para o cálculo da velocidade induzida por uma expressão de cálculo mais simples, sem no entanto alterar o seu efeito.

A análise a ser feita neste trabalho se restringirá a grades radiais móveis geradoras com pás infinitamente finas. Cumpre notar, porém, que o procedimento a ser apresentado pode ser estendido para cobrir outros casos de interesse: grades motoras, grades fixas, grades quaisquer com pás de espessura finita, etc..

## 2.2 - Características do Método dos Painéis.

Antes de se aplicar o Método dos Painéis na formulação do campo de velocidades induzidas por uma grade radial, é conveniente discutir algumas características próprias do método. Isto se deve ao fato de o Método dos Painéis poder ser aplicado na solução do escoamento potencial em torno de corpos de formato arbitrário: deseja-se aqui apenas estendê-lo para um caso particular.

Desta forma, considere na Figura 2.2 um corpo de formato arbitrário, sobre o qual se deseja conhecer o escoamento potencial devido a uma corrente inicial uniforme ( $c_\infty$ ). Segundo o Método dos Painéis, divide-se a superfície do corpo em  $M$  elementos de superfície, ou painéis, de forma genérica. Sobre cada painel  $k$  admite-se a existência de uma distribuição de singularidades  $g_k$  perturbando o escoamento ( $k = 1, 2, \dots, M$ ). A forma desta distribuição é fixada: uniforme, linear, etc. Admita-se, só para efeito de exemplificação, que a mesma seja uniforme. Sendo assim, a velocidade induzida num certo ponto do escoamento é dada pela soma das contribuições de cada painel, combinando-se linearmente as intensidades  $g_k$ . Se em cada painel  $j$  for escolhido um determinado "ponto de controle"  $j$ , a velocidade induzida nesse ponto devida ao conjunto de painéis  $k$  pode ser escrita na

$C_{\infty}$  ■ VELOCIDADE DA CORRENTE NÃO PERTURBADA

J, K ≡ PONTOS DE CONTROLE

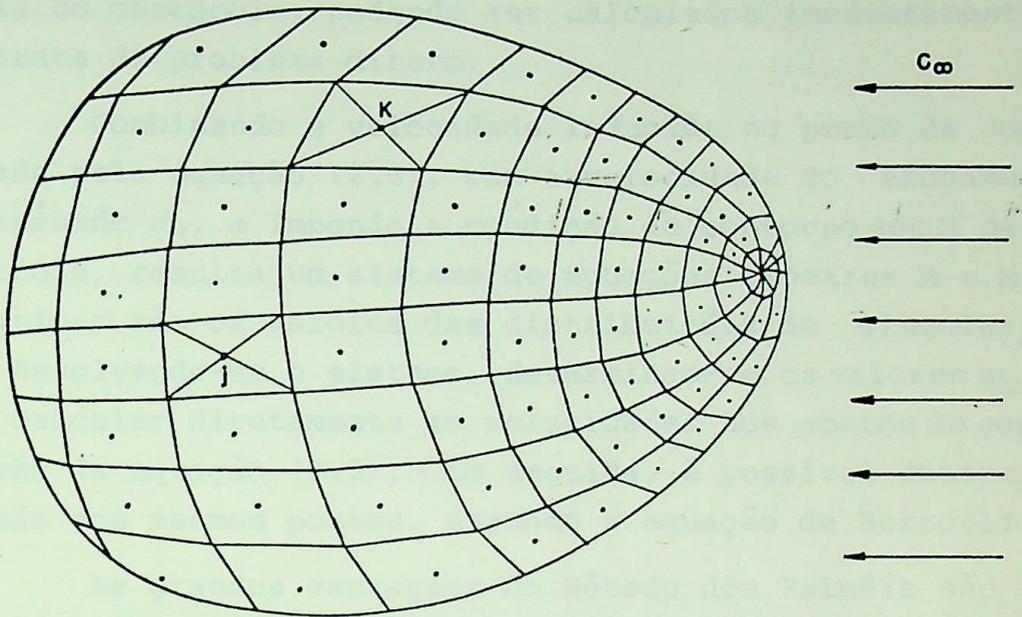


FIGURA 2.2 - IDÉIA DO MÉTODO DOS PAINÉIS:

APROXIMAÇÃO DO CORPO POR MEIO DE ELE-

MENTOS DE SUPERFÍCIE (PAINÉIS).

forma de

$$c_{sj} = \sum_{k=1}^M A_{jk} g_k, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (2.5)$$

$A_{jk}$  são coeficientes numéricos que dependem do tipo de singularidade empregada, das distâncias entre os pontos de controle, e da geometria do obstáculo, podendo ser calculados imediatamente quando se trata do problema direto.

Combinando a velocidade induzida no ponto de controle  $j$ , dada pela equação (2.5), com a velocidade do escoamento não perturbado  $c_\infty$ , e impondo a condição de contorno aos  $M$  pontos de controle, resulta um sistema de equações lineares  $M \times M$ , cujas incógnitas são os valores das distribuições de singularidades  $g_k$ . Resolvendo-se o sistema, determinam-se os valores  $g_k$ , podendo-se calcular diretamente as velocidades nos pontos de controle através da equação (2.5). Em seguida, é possível determinar a pressão nos mesmos pontos, segundo a equação de Bernoulli.

As grandes vantagens do Método dos Painéis são a simplicidade conceitual e a facilidade de adaptação a casos bastante gerais. Além do mais, o método pode ser considerado exato, uma vez que a qualidade numérica dos resultados irá depender apenas da adoção de alguns critérios, e não de simplificações que se façam nas equações que regem o escoamento potencial. Os critérios citados dizem respeito a

- número, distribuição e forma dos painéis;
- tipo de singularidade empregada;
- escolha dos pontos de controle.

Por outro lado, o Método dos Painéis só pode ser eficientemente aplicado na solução do problema direto.

Hess-Smith contribuíram decisivamente para o desenvolvimento do Método dos Painéis. Na referência [9] apresentam um sumário da aplicação do método na solução do escoamento potencial para diversos casos de interesse: corpos tridimensionais, aerofólios, hidrofólios, grades axiais, entradas de ar, etc.. Nada é feito ou discutido, porém, visando a aplicação em

grades radiais. Tal aplicação é proposta nos itens seguintes.

### 2.3 - Campo de Velocidades Induzidas por uma Grade Radial segundo o Método dos Painéis.

Neste item é apresentado um procedimento para a determinação do campo de velocidades induzidas por uma grade radial, com base no Método dos Painéis descrito no item anterior. Considera-se aqui somente o caso de pás infinitamente finas, salientando-se porém a possibilidade de extensão do procedimento para o caso de pás com espessura finita.

Considere-se, portanto, a Figura 2.3 onde se representa uma grade radial no plano complexo  $z = r e^{i\theta}$ . A grade é formada por N pás infinitamente finas, idênticas e igualmente espaçadas. Uma destas pás (pá de referência) está melhor esquematisada na Figura 2.4. Seguindo a sistemática do Método dos Painéis, adotam-se os seguintes critérios para a pá de referência:

- a linha representativa da pá é especificada pela localização de M+1 pontos, incluindo os bordos de ataque e de fuga, no caso definidos pelos raios de entrada e saída da pá, respectivamente;

- a linha é aproximada por M segmentos de reta ou painéis, unindo os M+1 pontos localizados;

- sobre cada painel assim formado é admitida a existência de uma distribuição de vórtices linear; a escolha do tipo de singularidade vórtice se deve ao fato de se tratar com pás infinitamente finas. A forma linear visa facilitar a aplicação futura da condição de Kutta;

- escolhe-se, sobre cada painel, um ponto de controle correspondente ao ponto médio do painel; os pontos de controle são aqueles para os quais se aplica a condição de contorno.

É importante observar que os três primeiros critérios adotados aplicam-se a todas as pás da grade, de uma for

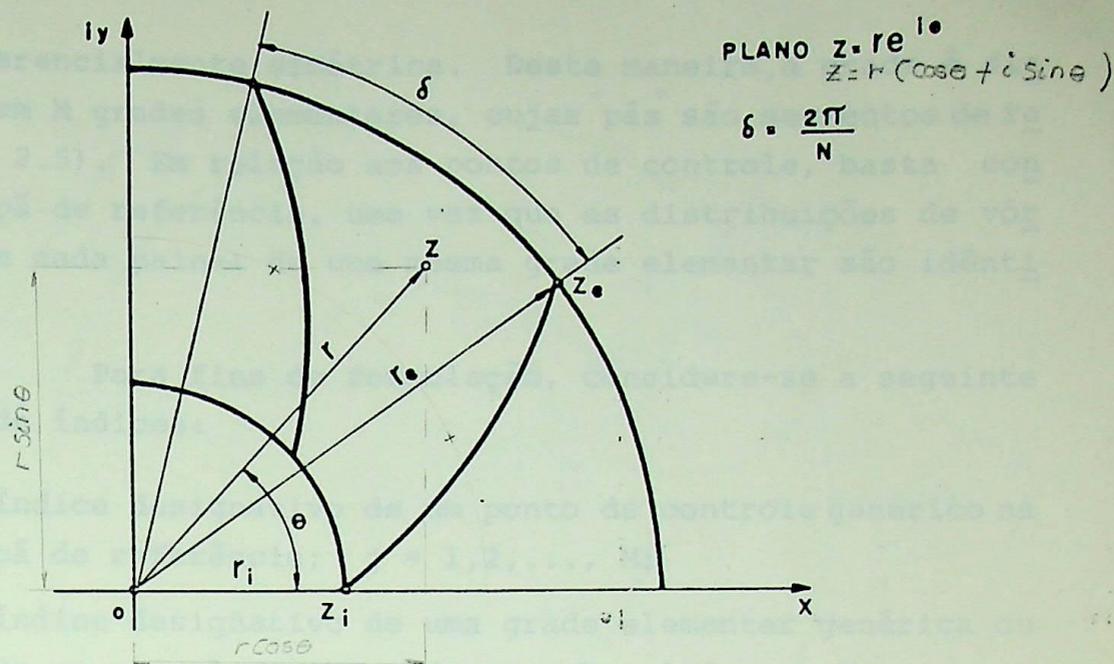


FIGURA 2.3 - NOMENCLATURA DE REFERÊNCIA PARA A GEOMETRIA DA GRADE RADIAL

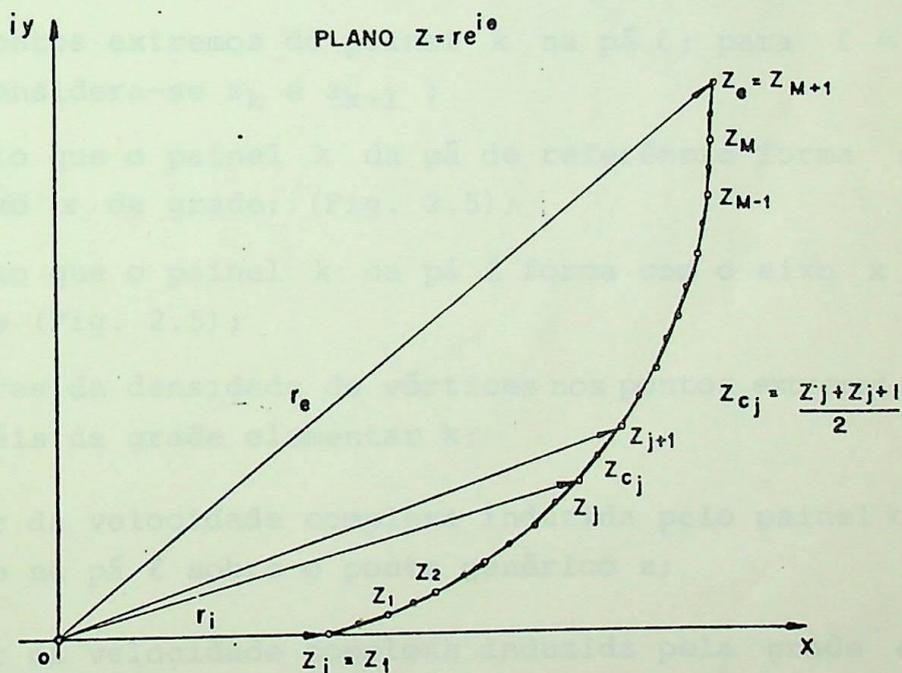


FIGURA 2.4 - DISCRETIZAÇÃO DA PÁ DE REFERÊNCIA EM PAINÉIS

- PONTOS EXTREMOS DOS PAINÉIS ( $z_1, z_2, \dots, z_{M+1}$ )
- PONTOS DE CONTROLE ( $z_{c_1}, z_{c_2}, \dots, z_{c_M}$ )

ma circunferencialmente simétrica. Desta maneira, a grade é discretizada em M grades elementares, cujas "pás" são segmentos de reta (Figura 2.5). Em relação aos pontos de controle, basta considerar a pá de referência, uma vez que as distribuições de vórtices sobre cada painel de uma mesma grade elementar são idênticas.

Para fins de formulação, considere-se a seguinte convenção de índices:

$j \equiv$  índice designativo de um ponto de controle genérico na pá de referência;  $j = 1, 2, \dots, M$ ;

$k \equiv$  índice designativo de uma grade elementar genérica ou de um painel correspondente;  $k = 1, 2, \dots, M$ ;

$\ell \equiv$  índice designativo de uma pá genérica;  $\ell = 1, 2, \dots, N$ .

Resulta, portanto, a seguinte simbologia:

$z_{c_j} \equiv$  ponto de controle  $j$  na pá de referência;

$z_k$  e  $z_{k+1} \equiv$  pontos extremos do painel  $k$  na pá de referência ( $\ell=1$ );

$z_{\ell k}$  e  $z_{\ell k+1} \equiv$  pontos extremos do painel  $k$  na pá  $\ell$ ; para  $\ell = 1$ , considera-se  $z_k$  e  $z_{k+1}$ ;

$\alpha_k \equiv$  ângulo que o painel  $k$  da pá de referência forma com o eixo  $x$  da grade; (Fig. 2.5);

$\alpha_{\ell k} \equiv$  ângulo que o painel  $k$  da pá  $\ell$  forma com o eixo  $x$  da grade (Fig. 2.5);

$\gamma_k$  e  $\gamma_{k+1} \equiv$  valores da densidade de vórtices nos pontos extremos dos painéis da grade elementar  $k$ ;

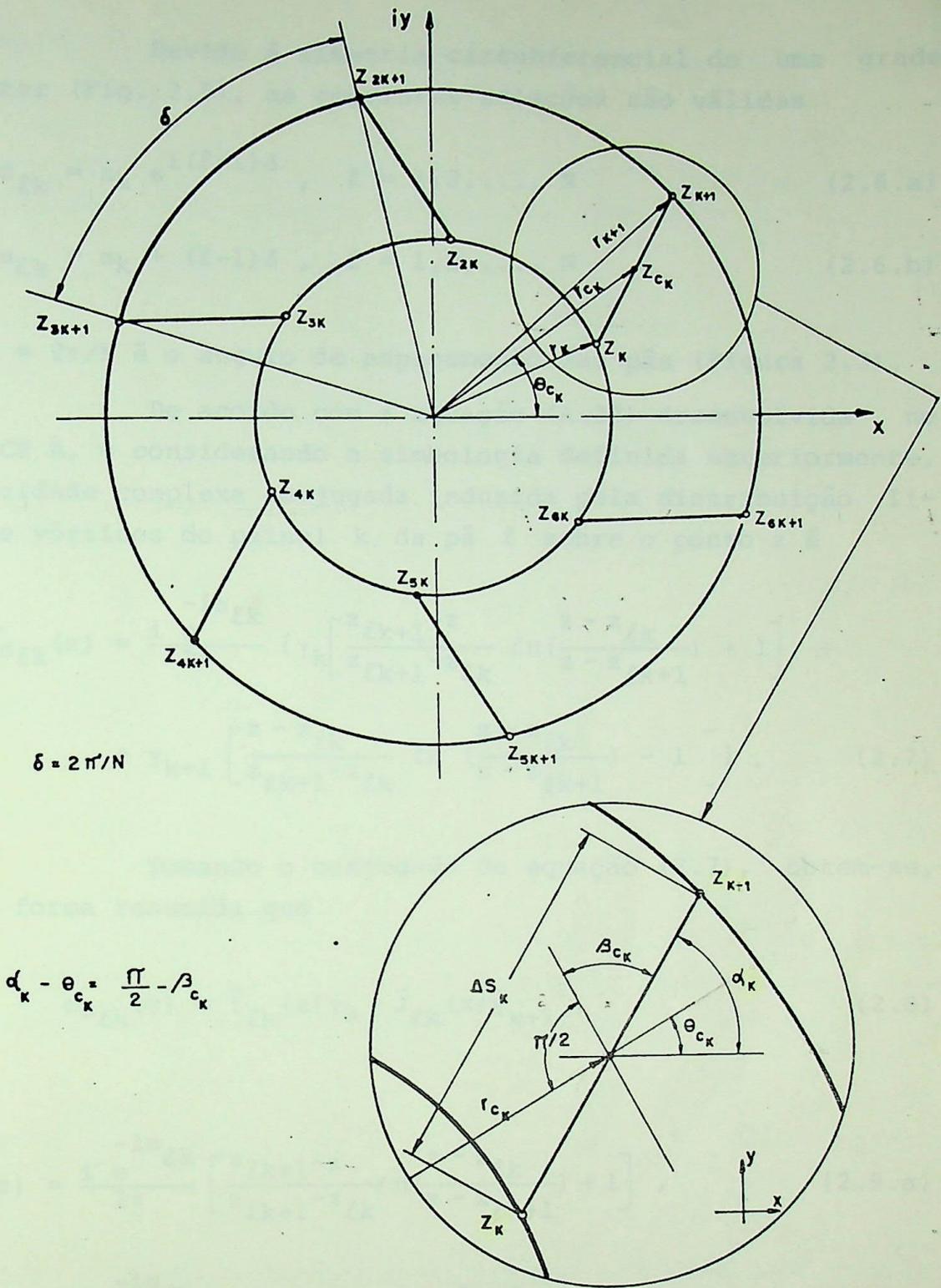
$c_{s_{\ell k}}(z) \equiv$  valor da velocidade complexa induzida pelo painel  $k$  situado na pá  $\ell$  sobre o ponto genérico  $z$ ;

$c_{s_k}(z) \equiv$  valor da velocidade complexa induzida pela grade elementar  $k$  sobre o ponto genérico  $z$ ; por superposição,

$$c_{s_k}(z) = \sum_{\ell=1}^N c_{s_{\ell k}}(z);$$

$c_s(z) \equiv$  valor da velocidade complexa total induzida pela grade radial sobre o ponto genérico  $z$ ; por superposição,

$$c_s(z) = \sum_{k=1}^M c_{s_k}(z).$$



$$\alpha_k - \theta_{c_k} = \frac{\pi}{2} - \beta_{c_k}$$

FIGURA 2.5 - GRADE ELEMENTAR K E DETALHAMENTO DO PAINEL K SITUADO NA PÁ DE REFERÊNCIA ( $\rho=1$ )

Devido à simetria circunferencial de uma grade elementar (Fig. 2.5), as seguintes relações são válidas

$$z_{\ell k} = z_k e^{i(\ell-1)\delta}, \quad \ell = 1, 2, \dots, N \quad (2.6.a)$$

$$\alpha_{\ell k} = \alpha_k + (\ell-1)\delta, \quad \ell = 1, 2, \dots, N \quad (2.6.b)$$

onde  $\delta = 2\pi/N$  é o ângulo de espaçamento das pás (Figura 2.3).

De acordo com a equação (A.22) desenvolvida no APÊNDICE A, e considerando a simbologia definida anteriormente, a velocidade complexa conjugada induzida pela distribuição linear de vórtices do painel  $k$  da pá  $\ell$  sobre o ponto  $z$  é

$$\begin{aligned} \bar{c}_{s\ell k}(z) = & \frac{i e^{-i\alpha_{\ell k}}}{2\pi} \left\{ \gamma_k \left[ \frac{z_{\ell k+1} - z}{z_{\ell k+1} - z_{\ell k}} \ln \left( \frac{z - z_{\ell k}}{z - z_{\ell k+1}} \right) + 1 \right] + \right. \\ & \left. + \gamma_{k+1} \left[ \frac{z - z_{\ell k}}{z_{\ell k+1} - z_{\ell k}} \ln \left( \frac{z - z_{\ell k}}{z - z_{\ell k+1}} \right) - 1 \right] \right\}. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Tomando o conjugado da equação (2.7), obtem-se, de uma forma resumida que

$$c_{s\ell k}(z) = \bar{I}_{\ell k}(z) \gamma_k + \bar{J}_{\ell k}(z) \gamma_{k+1}, \quad (2.8)$$

onde

$$I_{\ell k}(z) = \frac{i e^{-i\alpha_{\ell k}}}{2\pi} \left[ \frac{z_{\ell k+1} - z}{z_{\ell k+1} - z_{\ell k}} \ln \left( \frac{z - z_{\ell k}}{z - z_{\ell k+1}} \right) + 1 \right], \quad (2.9.a)$$

$$J_{\ell k}(z) = \frac{i e^{-i\alpha_{\ell k}}}{2\pi} \left[ \frac{z - z_{\ell k}}{z_{\ell k+1} - z_{\ell k}} \ln \left( \frac{z - z_{\ell k}}{z - z_{\ell k+1}} \right) - 1 \right]. \quad (2.9.b)$$

A velocidade complexa induzida pela grade elementar  $k$  sobre o ponto genérico  $z$  é dada pela superposição das contribuições de todos os painéis a ela pertencentes. Matematicamente

$$c_{S_k}(z) = \sum_{\ell=1}^N c_{S_{\ell k}}(z) = \gamma_k \sum_{\ell=1}^N \bar{I}_{\ell k}(z) + \gamma_{k+1} \sum_{\ell=1}^N \bar{J}_{\ell k}(z), \quad (2.10)$$

onde se considerou a equação (2.8) e o fato de  $\gamma_k$  e  $\gamma_{k+1}$  serem os mesmos para todos os painéis da grade elementar  $k$ .

Definindo-se

$$X_k(z) = \sum_{\ell=1}^N \bar{I}_{\ell k}(z) \quad (2.11.a)$$

$$Y_k(z) = \sum_{\ell=1}^N \bar{J}_{\ell k}(z), \quad (2.11.b)$$

a equação (2.10) fica na forma de

$$c_{S_k}(z) = X_k(z)\gamma_k + Y_k(z)\gamma_{k+1}. \quad (2.12)$$

A velocidade complexa total induzida pela grade radial sobre o ponto genérico  $z$  é dada pela superposição das contribuições de todas as grades elementares, ou seja

$$c_S(z) = \sum_{k=1}^M c_{S_k}(z) = \sum_{k=1}^M [X_k(z)\gamma_k + Y_k(z)\gamma_{k+1}]. \quad (2.13)$$

Dada a geometria da grade e efetuada uma certa discretização das pás, calcula-se facilmente a velocidade complexa induzida num ponto  $z$  pela equação (2.13), desde que se conheçam os valores da densidade de vórtices nos pontos extremos dos painéis. Os coeficientes complexos  $X_k(z)$  e  $Y_k(z)$  dependem apenas da geometria da grade, da discretização realizada e do ponto  $z$  onde se calcula a velocidade induzida.

Note-se, também, que a expressão obtida ao se to

mar o conjugado da equação (2.13) substitui a equação (2.3), no caso  $g = i\gamma$  (somente vórtices). O conjugado da equação (2.13) tende à forma exata da equação (2.3) para  $g = i\gamma$ , à medida que o número de painéis cresce ( $M \rightarrow \infty$ ).

É de interesse determinar as componentes radial e circunferencial da velocidade induzida no ponto  $z$ . Denominando as referidas componentes por  $c_{s_r}(z)$  e  $c_{s_\theta}(z)$ , respectivamente, e considerando que  $z = re^{i\theta}$ , escreve-se que

$$c_s(z) = [c_{s_r}(z) + ic_{s_\theta}(z)] e^{i\theta}, \quad (2.14)$$

donde obtem-se

$$c_{s_r}(z) = \operatorname{Re} [e^{-i\theta} c_s(z)] \quad (2.15.a)$$

e

$$c_{s_\theta}(z) = \operatorname{Im} [e^{-i\theta} c_s(z)] \quad (2.15.b)$$

$\operatorname{Re} [ ]$  e  $\operatorname{Im} [ ]$  designam, respectivamente, as partes real e imaginária da expressão complexa considerada. Comparando as equações (2.13), (2.15.a) e (2.15.b), resultam

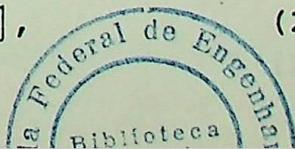
$$c_{s_r}(z) = \sum_{k=1}^M [A_{r_k}(z) \gamma_k + B_{r_k}(z) \gamma_{k+1}] \quad (2.16.a)$$

$$c_{s_\theta}(z) = \sum_{k=1}^M [A_{\theta_k}(z) \gamma_k + B_{\theta_k}(z) \gamma_{k+1}], \quad (2.16.b)$$

sendo que se definem os coeficientes reais

$$A_{r_k}(z) = \operatorname{Re} [e^{-i\theta} X_k(z)] = \sum_{\ell=1}^N \operatorname{Re} [e^{-i\theta} \bar{I}_{\ell k}(z)] \quad (2.17.a)$$

$$B_{r_k}(z) = \operatorname{Re} [e^{-i\theta} Y_k(z)] = \sum_{\ell=1}^N \operatorname{Re} [e^{-i\theta} \bar{J}_{\ell k}(z)], \quad (2.17.b)$$



$$A\theta_k(z) = \text{Im} \left[ e^{-i\theta} X_k(z) \right] = \sum_{\ell=1}^N \text{Im} \left[ e^{-i\theta} \bar{I}_{\ell k}(z) \right], \quad (2.17.c)$$

$$B\theta_k(z) = \text{Im} \left[ e^{-i\theta} Y_k(z) \right] = \sum_{\ell=1}^N \text{Im} \left[ e^{-i\theta} \bar{J}_{\ell k}(z) \right]. \quad (2.17.d)$$

Com vistas à futura formulação da condição de contorno (tangência), torna-se necessário o cálculo da velocidade complexa induzida sobre o ponto de controle  $z_{cj}$  da pá de referência. Neste sentido, a velocidade complexa induzida pelo painel  $k$  da pá  $\ell$  sobre o ponto de controle  $z_{cj}$  é, segundo a equação (2.8)

$$c_{s\ell k}(z_{cj}) = c_{s\ell jk} = \bar{I}_{\ell jk} \gamma_k + \bar{J}_{\ell jk} \gamma_{k+1}, \quad (2.18)$$

onde, de acordo com as equações (2.9.a) e (2.9.b),

$$I_{\ell jk} = I_{\ell k}(z_{cj}) = \frac{i e^{-i\alpha_{\ell k}}}{2\pi} \left[ \frac{z_{\ell k+1} - z_{cj}}{z_{\ell k+1} - z_{\ell k}} \ln \left( \frac{z_{cj} - z_{\ell k}}{z_{cj} - z_{\ell k+1}} \right) + 1 \right], \quad (2.19.a)$$

$$J_{\ell jk} = J_{\ell k}(z_{cj}) = \frac{i e^{-i\alpha_{\ell k}}}{2\pi} \left[ \frac{z_{cj} - z_{\ell k}}{z_{\ell k+1} - z_{\ell k}} \ln \left( \frac{z_{cj} - z_{\ell k}}{z_{cj} - z_{\ell k+1}} \right) - 1 \right]. \quad (2.19.b)$$

Os coeficientes  $I_{\ell jk}$  e  $J_{\ell jk}$  não são univocamente determinados para  $\ell = 1$  e  $k = j$ . Neste caso, deve-se considerar que  $z_{\ell k} = z_j$  e  $z_{\ell k+1} = z_{j+1}$ , segundo a convenção estabelecida. Além disso, como o ponto de controle é o ponto médio do painel, tem-se que  $z_{cj} = (z_j + z_{j+1})/2$ . Logo, para  $\ell = 1$  e  $k = j$ , a equação (2.18) fica

$$c_{s1jj} = \bar{I}_{1jj} \gamma_j + \bar{J}_{1jj} \gamma_{j+1}, \quad (2.20)$$

onde, segundo as equações (2.19.a) e (2.19.b),

$$I_{1jj} = \frac{e^{-i\alpha_j}}{2\pi} \left( \pm \frac{\pi}{2} + i \right) \quad (2.21.a)$$

$$J_{1jj} = \frac{e^{-i\alpha_j}}{2\pi} \left( \pm \frac{\pi}{2} - i \right) \quad (2.21.b)$$

Nas equações (2.21), o sinal (+) se refere ao lado de sucção do painel e o sinal (-) ao lado de pressão. Verifica-se, assim, que a indução que um painel exerce sobre o seu próprio ponto de controle é responsável por uma descontinuidade no valor da velocidade e, portanto, no valor da pressão sobre o painel. Tal descontinuidade é uma característica de toda distribuição de vórtices (V. Apêndice A), sendo de utilidade na simulação do efeito da pá de uma grade radial.

Observa-se, adicionalmente, que para  $\ell \neq 1$  e/ou  $j \neq k$ , o valor de  $c_{s\ell jk}$  na equação (2.18) é univocamente determinado, não contribuindo para o efeito de descontinuidade.

A velocidade complexa induzida pela grade elementar  $k$  sobre o ponto de controle  $z_{cj}$  é, de acordo com a equação (2.12),

$$c_{s_k}(z_{cj}) = c_{s_{jk}} = X_{jk} \gamma_k + Y_{jk} \gamma_{k+1}, \quad (2.22)$$

onde

$$X_{jk} = X_k(z_{cj}) = \sum_{\ell=1}^N \bar{I}_{\ell jk} \quad (2.23.a)$$

e

$$Y_{jk} = Y_k(z_{cj}) = \sum_{\ell=1}^N \bar{J}_{\ell jk}. \quad (2.23.b)$$

Analogamente, a velocidade complexa total induzida pela grade radial sobre o ponto de controle  $z_{cj}$  é, segundo a equação (2.13)

$$c_s(z_{cj}) = \sum_{k=1}^M (X_{jk} \gamma_k + Y_{jk} \gamma_{k+1}). \quad (2.24)$$

Lembre-se que o valor  $c_s(z_{cj})$  não é univocamente determinado ,

devido à contribuição do painel  $j$  sobre o seu próprio ponto de controle ( $z_{Cj}$ ): deve-se ter em mente as equações (2.20) e (2.21) ao se calcular  $c_s(z_{Cj})$ . Por outro lado, as dificuldades matemáticas que adviriam da utilização da equação (2.3) para o cálculo da velocidade induzida sobre os pontos da pá ficam definitivamente superadas quando se utiliza, em contrapartida, a equação (2.24).

Observa-se que a equação (2.24) fornece o valor de  $c_s(z_{Cj})$  em função dos valores  $\gamma_k$ , em princípio desconhecidos. A determinação de  $\gamma_k$  só pode ser feita após a imposição de uma condição de contorno para o escoamento sobre os pontos de controle (pá de referência).

Sendo  $z_{Cj} = r_{Cj} e^{i\theta_{Cj}}$ , as componentes radial e circunferencial da velocidade complexa induzida no ponto  $z_{Cj}$  são, de acordo com as equações (2.16.a) e (2.16.b),

$$c_{sR}(z_{Cj}) = \sum_{k=1}^M (A_{rjk} \gamma_k + B_{rjk} \gamma_{k+1}) \quad (2.25.a)$$

e

$$c_{s\theta}(z_{Cj}) = \sum_{k=1}^M (A_{\theta jk} \gamma_k + B_{\theta jk} \gamma_{k+1}), \quad (2.25.b)$$

onde

$$A_{rjk} = A_{r_k}(z_{Cj}) = \operatorname{Re} [e^{-i\theta_{Cj}} X_{jk}] = \sum_{\ell=1}^N \operatorname{Re} [e^{-i\theta_{Cj}} \bar{I}_{\ell jk}], \quad (2.26.a)$$

$$B_{rjk} = B_{r_k}(z_{Cj}) = \operatorname{Re} [e^{-i\theta_{Cj}} Y_{jk}] = \sum_{\ell=1}^N \operatorname{Re} [e^{-i\theta_{Cj}} \bar{J}_{\ell jk}], \quad (2.26.b)$$

$$A_{\theta jk} = A_{\theta_k}(z_{Cj}) = \operatorname{Im} [e^{-i\theta_{Cj}} X_{jk}] = \sum_{\ell=1}^N \operatorname{Im} [e^{-i\theta_{Cj}} \bar{I}_{\ell jk}], \quad (2.26.c)$$

$$B_{\theta jk} = B_{\theta_k}(z_{Cj}) = \operatorname{Im} [e^{-i\theta_{Cj}} Y_{jk}] = \sum_{\ell=1}^N \operatorname{Im} [e^{-i\theta_{Cj}} \bar{J}_{\ell jk}]. \quad (2.26.d)$$

Para finalizar o presente item, convém afirmar que é possível efetuar uma formulação mais expedita, utilizando-se diretamente a equação (2.3). Neste caso, escreve-se a velocidade induzida por uma grade elementar na forma integral da equação (2.3) e, através de um procedimento análogo ao apresentado neste item, superpõe-se a contribuição das várias grades elementares para produzir o efeito global da grade radial. Verifica-se, porém, que a referida forma integral não admite uma solução analítica simples, pelo menos aparentemente. Sendo assim, para evitar o cálculo numérico de integrais, concluiu-se favoravelmente ao procedimento ora exposto, somando-se o efeito separado de cada painel.

#### 2.4 - Condição de Contorno para o escoamento através de Grades Radiais Móveis Geradoras.

Neste ponto, torna-se necessário equacionar matematicamente a condição de contorno para o escoamento através de grades radiais móveis. A solução do problema direto do escoamento potencial através destas grades depende da aplicação da condição de contorno aos pontos de controle da pá de referência, e da consideração das expressões obtidas anteriormente, conforme o Método dos Painéis.

Considere-se a Figura 2.6, onde se representa uma grade radial móvel geradora com velocidade angular  $\omega$  constante. A condição de contorno exprime o fato da velocidade relativa ser tangente à pá em todos os pontos da mesma. Desta forma, para qualquer ponto da pá  $z = r\bar{e}^{i\theta}$ , escreve-se que

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{w_r}{w_\theta}, \quad r_i \leq r \leq r_e \quad (2.27)$$

sendo  $\beta$  o ângulo entre a tangente à pá e a tangente à circunferência no ponto considerado;  $w_r$  e  $w_\theta$  são, respectivamente, as componentes radial e circunferencial da velocidade relativa resultante.

Superpondo-se os efeitos do escoamento não pertur

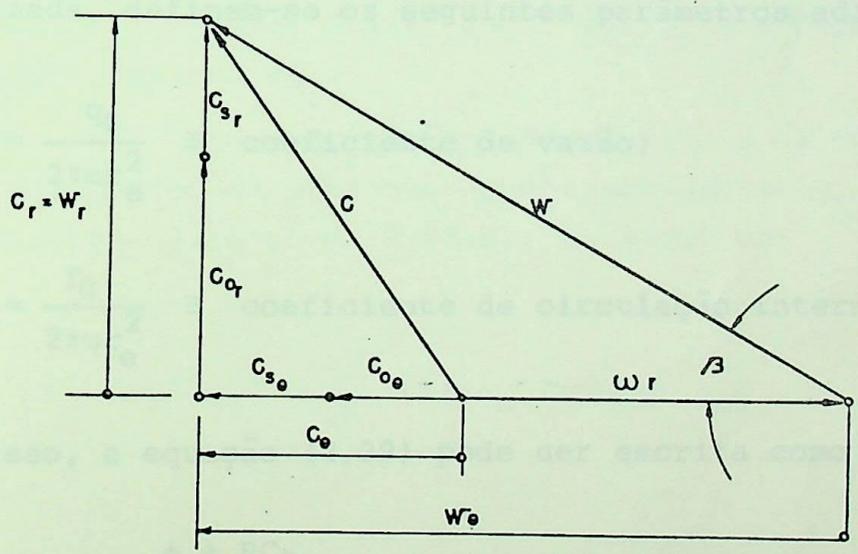
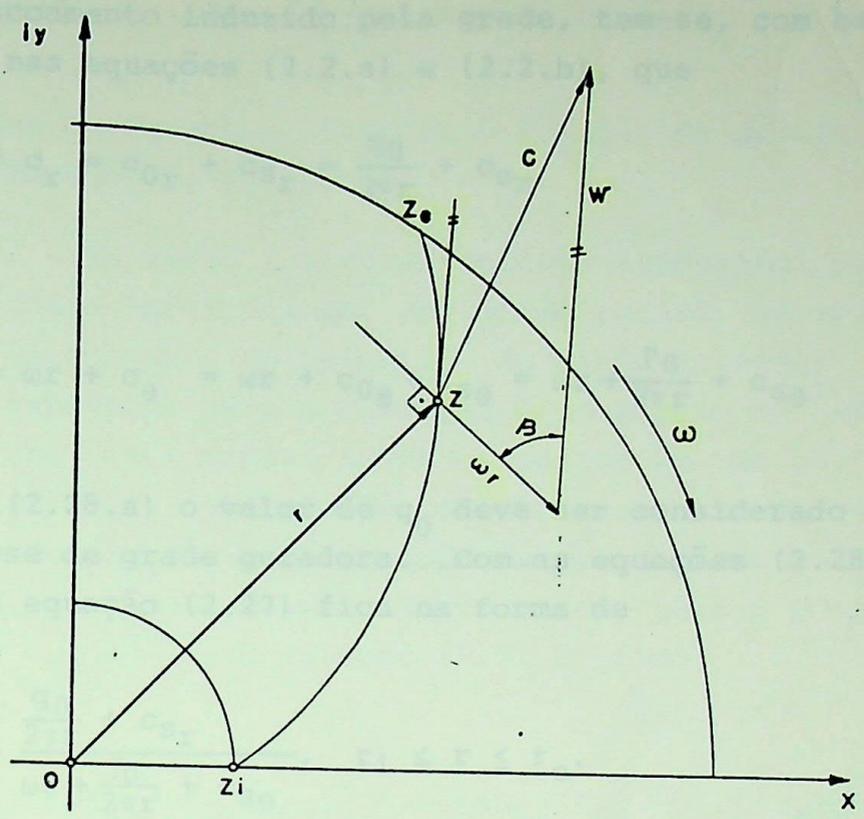


FIGURA 2.6 - CONDIÇÃO DE CONTORNO PARA O ESCOAMENTO EM GRADES RADIAIS MÓVEIS GERADORAS

bado e o escoamento induzido pela grade, tem-se, com base na Figura 2.6 e nas equações (2.2.a) e (2.2.b), que

$$w_r = c_r = c_{0r} + c_{sr} = \frac{q_0}{2\pi r} + c_{sr} \quad (2.28.a)$$

e

$$w_\theta = \omega r + c_\theta = \omega r + c_{0\theta} + c_{s\theta} = \omega r + \frac{\Gamma_0}{2\pi r} + c_{s\theta}. \quad (2.28.b)$$

Na equação (2.28.a) o valor de  $q_0$  deve ser considerado positivo por tratar-se de grade geradora. Com as equações (2.28.a) e (2.28.b), a equação (2.27) fica na forma de

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{q_0}{2\pi r} + c_{sr}}{\omega r + \frac{\Gamma_0}{2\pi r} + c_{s\theta}}, \quad r_i \leq r \leq r_e. \quad (2.29)$$

Com o objetivo de colocar a condição de contorno numa forma parametrizada, definem-se os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\phi = \frac{q_0}{2\pi\omega r_e^2} \equiv \text{coeficiente de vazão}; \quad (2.30.a)$$

$$\Omega = \frac{\Gamma_0}{2\pi\omega r_e^2} \equiv \text{coeficiente de circulação interna}. \quad (2.30.b)$$

Com isso, a equação (2.29) pode ser escrita como

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\phi + RC_{sr}}{R^2 + \Omega + RC_{s\theta}}, \quad R_i \leq R \leq 1 \quad (2.31.a)$$

ou

$$R [C_{s\theta} \cdot \operatorname{tg}\beta - C_{sr}] = \phi - \operatorname{tg}\beta \cdot (R^2 + \Omega), \quad R_i \leq R \leq 1 \quad (2.31.b)$$

sendo que  $R = \frac{r}{r_e}$  e  $C_s = \frac{c_s}{\omega r_e}$ , são formas adimensionais do raio

$r$  e da velocidade induzida  $c_s$ , respectivamente.

## 2.5 - Sistema de Equações Lineares - Solução do problema segundo o Método dos Painéis.

Na seção 2.3, foram obtidas expressões para o campo de velocidade induzidas por uma grade radial, aproximando-se as pás por um conjunto de painéis. Na seção anterior, desenvolveu-se uma expressão para a condição de contorno do escoamento através de uma grade radial sobre os pontos de uma pá. É possível agora aplicar a condição de contorno ao ponto de controle de um determinado painel, considerando-se que o mesmo constitui, em aproximação, um trecho da pá. Sendo assim, para o ponto de controle  $z_{cj} = r_{cj} e^{i\theta_{cj}}$ , a equação (2.31.b) fica:

$$R_{cj} [C_{s\theta}(z_{cj}) \cdot \text{tg}\beta_{cj} - C_{sr}(z_{cj})] = \phi - \text{tg}\beta_{cj} (R_{cj}^2 + \Omega), j=1, 2, \dots, M. \quad (2.32)$$

$\beta_{cj}$  é o ângulo entre o painel  $j$  e a tangente à circunferência no ponto  $z_{cj}$  (Figura 2.5);  $Z_{cj} = z_{cj}/r_e$  é a forma adimensional do valor complexo  $z_{cj}$ .

As componentes adimensionais da velocidade induzida nos pontos de controle podem ser escritas, de acordo com as equações (2.25.a) e (2.25.b), na forma de

$$C_{sr}(z_{cj}) = \sum_{k=1}^M (A_{rjk} \Gamma_k + B_{rjk} \Gamma_{k+1}) \quad (2.33.a)$$

e

$$C_{s\theta}(z_{cj}) = \sum_{k=1}^M (A_{\theta jk} \Gamma_k + B_{\theta jk} \Gamma_{k+1}), \quad (2.33.b)$$

onde  $\Gamma = \gamma/wr_e$  é uma forma adimensional da densidade de vórtices.

Substituindo-se as equações (2.33.a) e (2.33.b)

na equação (2.32), resulta que

$$R_{Cj} \left[ \operatorname{tg} \beta_{Cj} \sum_{k=1}^M (A_{jk} \Gamma_k + B_{jk} \Gamma_{k+1}) - \sum_{k=1}^M (A_{r_{jk}} \Gamma_k + B_{r_{jk}} \Gamma_{k+1}) \right] = \\ = \phi - \operatorname{tg} \beta_{Cj} (R_{Cj}^2 + \Omega), \quad (2.34.a)$$

ou então

$$\sum_{k=1}^M [\Gamma_k R_{Cj} (\operatorname{tg} \beta_{Cj} A_{jk} - A_{r_{jk}})] + \sum_{k=1}^M [\Gamma_{k+1} R_{Cj} (\operatorname{tg} \beta_{Cj} B_{jk} - B_{r_{jk}})] = \\ = \phi - \operatorname{tg} \beta_{Cj} (R_{Cj}^2 + \Omega), \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (2.34.b)$$

Definindo-se os coeficientes

$$A_{jk} = R_{Cj} (\operatorname{tg} \beta_{Cj} A_{jk} - A_{r_{jk}}) \quad (2.35.a)$$

e

$$B_{jk} = R_{Cj} (\operatorname{tg} \beta_{Cj} B_{jk} - B_{r_{jk}}), \quad (2.35.b)$$

a equação (2.34.b) fica

$$\sum_{k=1}^M A_{jk} \Gamma_k + \sum_{k=1}^M B_{jk} \Gamma_{k+1} = \phi - \operatorname{tg} \beta_{Cj} (R_{Cj}^2 + \Omega), \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (2.36)$$

Considerando as regras de agrupamento de somatórias, a expressão (2.36) pode ser convenientemente modificada, resultando que

$$A_{j1} \Gamma_1 + \sum_{k=2}^M (A_{jk} + B_{jk-1}) \cdot \Gamma_k + B_{jM} \Gamma_{M+1} = \phi - \operatorname{tg} \beta_{Cj} (R_{Cj}^2 + \Omega), \\ j = 1, 2, \dots, M \quad (2.37)$$

A expressão (2.37) acima representa um sistema de  $M$  equações lineares algébricas, com  $M+1$  incógnitas  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{M+1}$ . Desta forma o sistema é indeterminado, admitindo infinitas soluções. Pela natureza do problema físico, no entanto, só interessa a solução que produza um escoamento com velocidade finita e contínua no bordo de fuga  $Z_{M+1}$  (condição de Kutta). Como já foi observado, uma distribuição de vórtices produz sempre uma descontinuidade no campo de velocidades, a não ser no caso trivial em que a densidade de vórtices é nula. Conclui-se, portanto, que a solução fisicamente viável do sistema de equações (2.37) exige que  $\Gamma_{M+1} = 0$ . Com tal consideração, obtem-se que

$$A_{j1} \Gamma_1 + \sum_{k=2}^M (A_{jk} + B_{jk-1}) \Gamma_k = \phi - \text{tg} \beta_{cj} (R_{cj}^2 + \Omega); \quad j=1, 2, \dots, M, \quad (2.38)$$

ou seja, um sistema de equações lineares algébricas  $M \times M$ . Dada a geometria da grade radial, através da especificação da equação da pá e do número de pás, e considerando  $\phi$  e  $\Omega$  como parâmetros, calculam-se diretamente os coeficientes  $A_{jk}$  e  $B_{jk}$ , para uma determinada discretização. Em seguida, calculam-se os valores das incógnitas  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_M$ , resolvendo-se o sistema (2.38). Consequentemente, é possível determinar as características aerodinâmicas da grade radial: distribuição de velocidades, distribuição de pressões e trabalho específico.

É importante observar que, apesar dos coeficientes  $A_{rjk}$ ,  $B_{rjk}$ ,  $A_{\theta jk}$  e  $B_{\theta jk}$  não serem univocamente determinados para  $k = j$ , o mesmo não ocorre com os coeficientes  $A_{jk}$  e  $B_{jk}$ . Este fato pode ser demonstrado, considerando inicialmente as equações (2.26), que podem ser escritas, para  $k = j$ , como

$$A_{rjj} = \text{Re} \left[ e^{-i\theta_{cj}} \bar{I}_{1jj} \right] + \sum_{\ell=2}^N \text{Re} \left[ e^{-i\theta_{cj}} \bar{I}_{\ell jj} \right], \quad (2.39.a)$$

$$B_{rjj} = \text{Re} \left[ e^{-i\theta_{cj}} \bar{J}_{1jj} \right] + \sum_{\ell=2}^N \text{Re} \left[ e^{-i\theta_{cj}} \bar{J}_{\ell jj} \right], \quad (2.39.b)$$

$$A_{\theta jj} = \text{Im} \left[ e^{-i\theta_{cj}} \bar{I}_{1jj} \right] + \sum_{\ell=2}^N \text{Im} \left[ e^{-i\theta_{cj}} \bar{I}_{\ell jj} \right], \quad (2.39.c)$$

$$B_{\theta_{jj}} = \text{Im} \left[ e^{-i\theta_{cj}} \bar{J}_{1jj} \right] + \sum_{\ell=2}^N \text{Im} \left[ e^{-i\theta_{cj}} \bar{J}_{\ell jj} \right] . \quad (2.39.d)$$

Com base nas equações (2.21.a) e (2.21.b), pode-se escrever que

$$e^{-i\theta_{cj}} \bar{I}_{1jj} = \frac{e^{i(\alpha_j - \theta_{cj})}}{2\pi} \left( \pm \frac{\pi}{2} - i \right) , \quad (2.40.a)$$

e

$$e^{-i\theta_{cj}} \bar{J}_{1jj} = e^{i(\alpha_j - \theta_{cj})} \left( \pm \frac{\pi}{2} + i \right) . \quad (2.40.b)$$

Observa-se na Figura 2.4, que  $\alpha_j - \theta_{cj} = \pi/2 - \beta_{cj}$ ; sendo assim, as equações (2.40.a) e (2.40.b) ficam

$$\begin{aligned} e^{-i\theta_{cj}} \bar{I}_{1jj} &= \frac{e^{i(\frac{\pi}{2} - \beta_{cj})}}{2\pi} \left( \pm \frac{\pi}{2} - i \right) = \frac{1}{2\pi} \left[ \left( \pm \frac{\pi}{2} \text{sen}\beta_{cj} + \text{cos}\beta_{cj} \right) + \right. \\ &\quad \left. + i \left( \pm \frac{\pi}{2} \text{cos}\beta_{cj} - \text{sen}\beta_{cj} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.41.a)$$

e

$$\begin{aligned} e^{-i\theta_{cj}} \bar{J}_{1jj} &= \frac{e^{i(\frac{\pi}{2} - \beta_{cj})}}{2\pi} \left( \pm \frac{\pi}{2} + i \right) = \frac{1}{2\pi} \left[ \left( \pm \frac{\pi}{2} \text{sen}\beta_{cj} - \text{cos}\beta_{cj} \right) + \right. \\ &\quad \left. + i \left( \pm \frac{\pi}{2} \text{cos}\beta_{cj} + \text{sen}\beta_{cj} \right) \right] . \end{aligned} \quad (2.41.b)$$

Substituindo as equações (2.41.a) e (2.41.b) nas equações (2.39.a) a (2.39.d), resulta que

$$A_{r_{jj}} = \frac{1}{2\pi} \left( \pm \frac{\pi}{2} \text{sen}\beta_{cj} + \text{cos}\beta_{cj} \right) + \sum_{\ell=2}^N \text{Re} \left[ e^{-i\theta_{cj}} \bar{I}_{\ell jj} \right] , \quad (2.42.a)$$

$$B_{r_{jj}} = \frac{1}{2\pi} \left( \pm \frac{\pi}{2} \text{sen}\beta_{cj} - \text{cos}\beta_{cj} \right) + \sum_{\ell=2}^N \text{Re} \left[ e^{-i\theta_{cj}} \bar{J}_{\ell jj} \right] , \quad (2.42.b)$$

$$A_{\theta jj} = \frac{1}{2\pi} (\pm \frac{\pi}{2} \cos \beta_{cj} - \text{sen} \beta_{cj}) + \sum_{\ell=2}^N \text{Im} [e^{-i\theta_{cj}} \bar{I}_{\ell jj}], \quad (2.42.c)$$

$$B_{\theta jj} = \frac{1}{2\pi} (\pm \frac{\pi}{2} \cos \beta_{cj} + \text{sen} \beta_{cj}) + \sum_{\ell=2}^N \text{Im} [e^{-i\theta_{cj}} \bar{J}_{\ell jj}]. \quad (2.42.d)$$

Considerando as equações (2.42.a) a (2.42.d), tem-se para  $k = j$  nas equações (2.35.a) e (2.35.b), que

$$A_{jj} = R_{cj} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \sec \beta_{cj} + \text{tg} \beta_{cj} \sum_{\ell=2}^N \text{Im} [e^{-i\theta_{cj}} \bar{I}_{\ell jj}] + \right. \\ \left. - \sum_{\ell=2}^N \text{Re} [e^{-i\theta_{cj}} \bar{I}_{\ell jj}] \right\}, \quad (2.43.a)$$

e

$$B_{jj} = R_{cj} \left\{ \frac{1}{2\pi} \sec \beta_{cj} + \text{tg} \beta_{cj} \sum_{\ell=2}^N \text{Im} [e^{-i\theta_{cj}} \bar{J}_{\ell jj}] + \right. \\ \left. - \sum_{\ell=2}^N \text{Re} [e^{-i\theta_{cj}} \bar{J}_{\ell jj}] \right\}. \quad (2.43.b)$$

Verifica-se, portanto, que os coeficientes  $A_{jk}$  e  $B_{jk}$  são univocamente determinados, mesmo para  $k = j$ . Isto já era de se esperar, pois a matriz de coeficientes do sistema de equações (2.38) deve ser univocamente determinada para que a solução do sistema seja única. Logo, não importa para que lado da pá se aplique a condição de contorno: a distribuição de vórtices é unívoca.

Sob o ponto de vista da teoria potencial, define-se escoamento com entrada sem choque aquele para o qual a velocidade é finita e contínua no bordo de ataque. Na presente formulação, o efeito de entrada sem choque é obtido igualando-se a zero o valor da densidade de vórtices no bordo de ataque, analogamente ao que se faz no bordo de fuga. Assim, com  $\Gamma_1 = 0$ , o sistema de equações (2.38) fica na forma de

$$-\phi_{0T} + \sum_{k=2}^M (A_{jk} + B_{jk+1}) \Gamma_k = -\text{tg} \beta_{cj} (R_{cj}^2 + \Omega), \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (2.44)$$

onde agora  $\phi_{0T}$  é definido como o coeficiente de vazão ótimo ou de projeto. O valor de  $\phi_{0T}$  não deve ser encarado como parâmetro, mas sim como incógnita do sistema (2.44), juntamente com os valores  $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_M$ . Quando  $\phi \neq \phi_{0T}$ , trata-se de uma situação de entrada com choque ou fora de projeto. Nesta situação o escoamento potencial através de grades radiais com pás infinitamente finas processa-se com uma velocidade infinita em torno do bordo de ataque.

## 2.6 - Trabalho Específico. Fator de Deficiência de Potência.

O trabalho específico de uma grade radial móvel é dado pela equação de Euler na forma de

$$Y_{p\bar{a}} = \omega (r_e c_{\infty\theta} - r_i c_{0\theta}), \quad (2.45)$$

onde  $c_{0\theta}$  e  $c_{\infty\theta}$  são as componentes circunferenciais da velocidade absoluta antes e depois da grade, respectivamente (Figura 2.7).

Nas seções anteriores foram desenvolvidas expressões que permitem o cálculo do trabalho específico de uma dada grade radial com a consideração de escoamento potencial, porém levando em conta a influência teórica do número de pás. Com estas considerações resulta o trabalho específico teórico, que pode ser convenientemente escrito, segundo o presente modelo, como

$$Y_{p\bar{a}T} = \omega [(rc_{\theta})_{r \rightarrow \infty} - (rc_{0\theta})_{r \rightarrow 0}], \quad (2.46)$$

sendo  $c_{0\theta}$  a componente circunferencial da velocidade absoluta do escoamento não perturbado pela grade. Pela equação (2.2.b), tem-se que

$$(rc_{0\theta})_{r \rightarrow 0} = \frac{\Gamma_0}{2\pi}, \quad (2.27)$$

onde  $\Gamma_0$  é a circulação inicial. Analogamente, é possível escrever que

$$(rc_\theta)_{r \rightarrow \infty} = \frac{\Gamma_F}{2\pi}, \quad (2.48)$$

onde  $\Gamma_F$  é a circulação final do escoamento. Com as equações (2.47) e (2.48), a equação (2.46) resulta na forma de

$$Y_{p\bar{a}T} = \frac{\omega}{2\pi} (\Gamma_F - \Gamma_0). \quad (2.49)$$

A diferença de circulação é introduzida pelo efeito da grade radial. Definindo-se  $\Gamma_{p\bar{a}}$  como a circulação em uma das pás da grade (Figura 2.7), escreve-se que

$$\Gamma_F - \Gamma_0 = N\Gamma_{p\bar{a}}, \quad (2.50)$$

e, portanto,

$$Y_{p\bar{a}T} = \frac{\omega}{2\pi} N \Gamma_{p\bar{a}}. \quad (2.51)$$

Segundo o método das singularidades, a circulação num escoamento potencial bidimensional aparece por efeito de vórtices. Na formulação efetuada nas seções anteriores, o efeito de cada pá de uma grade radial foi simulado através da distribuição de vórtices de densidade  $\gamma = d\Gamma_{p\bar{a}}/ds$ . Sendo assim, a circulação em uma pá será

$$\Gamma_{p\bar{a}} = \int_{s_i}^{s_e} \gamma ds, \quad (2.52)$$

onde  $s_i$  e  $s_e$  correspondem aos bordos de ataque e de fuga da pá, respectivamente. A equação (2.51) fica

$$Y_{p\bar{a}T} = \frac{\omega N}{2\pi} \int_{s_i}^{s_e} \gamma ds. \quad (2.53)$$

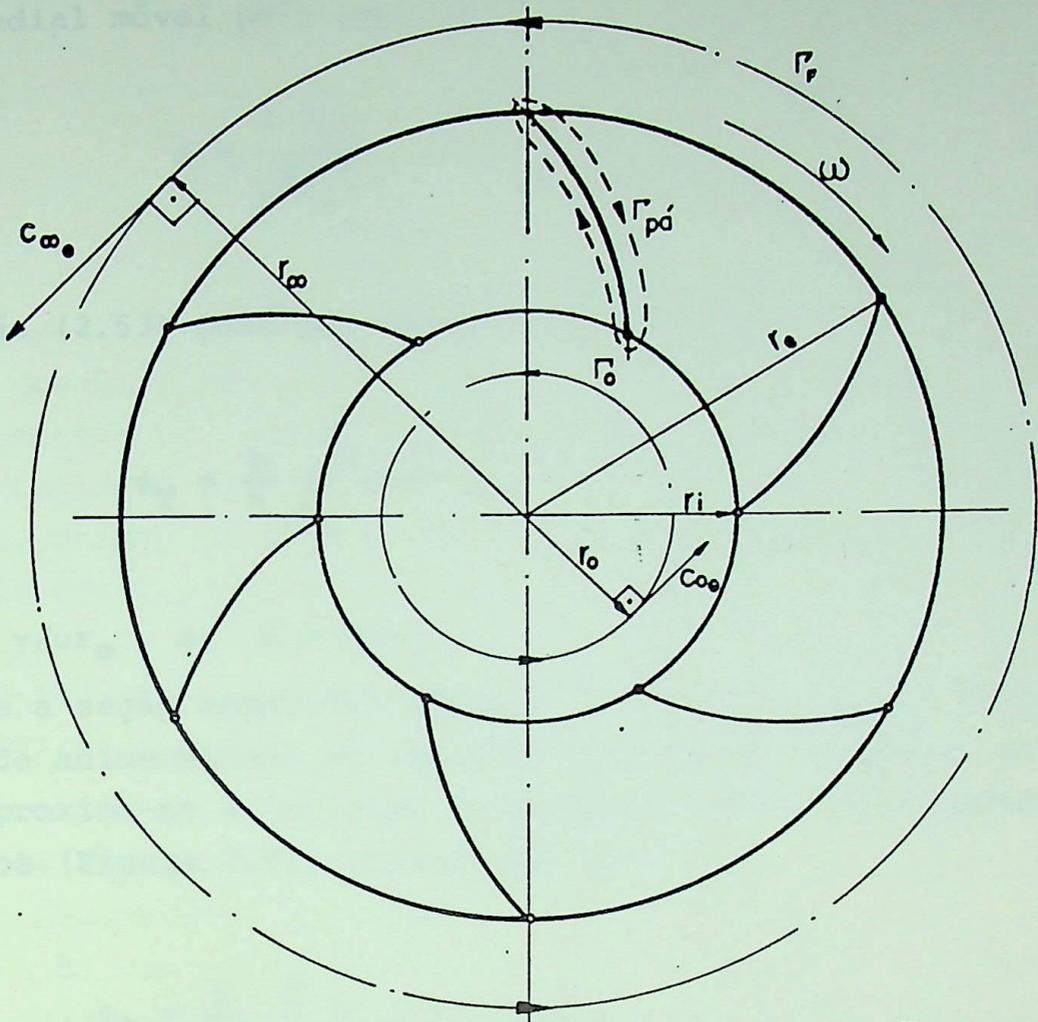


FIGURA 2.7 NOTAÇÃO PARA AS CIRCULAÇÕES NA GRADE RADIAL MÓVEL

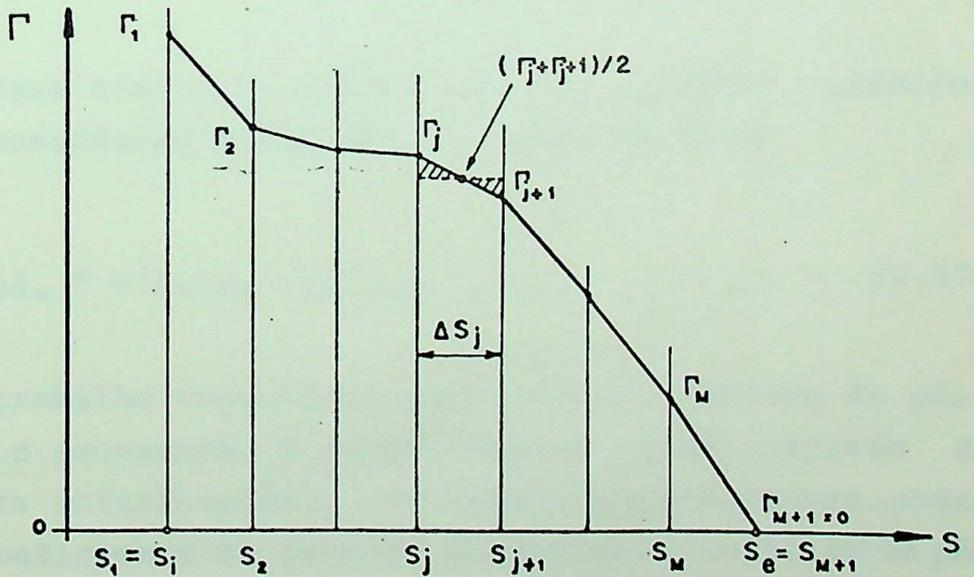


FIGURA 2.8 REPRESENTAÇÃO DOS VALORES DA DENSIDADE DE VÓRTICES NOS PONTOS EXTREMOS DOS PAINÉIS.

Definindo-se o coeficiente de pressão  $\psi$  de uma grade radial móvel pela expressão

$$\psi = \frac{2 Y_{p\bar{a}}}{\omega^2 r_e^2} \quad , \quad (2.54)$$

a equação (2.53) pode ser escrita na forma de

$$\psi_T = \frac{N}{\pi} \int_{S_i}^{S_e} \Gamma ds \quad , \quad (2.55)$$

com  $\Gamma = \gamma/\omega r_e$  e  $S = s/r_e$ .

Conforme a seção anterior, sendo  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{M+1}$  os valores da densidade adimensional de vórtices nos pontos extremos dos painéis, aproxima-se a integral da equação (2.55) pela regra dos trapézios (Figura 2.8), escrevendo que

$$\psi_T = \frac{N}{2\pi} \sum_{j=1}^M (\Gamma_j + \Gamma_{j+1}) \cdot \Delta S_j \quad , \quad (2.56)$$

onde  $\Delta S_j$  é o comprimento adimensional do painel  $j$  na pá de referência.

Para efeito de comparação com a teoria unidimensional, deve-se considerar a equação de Euler na forma

$$Y_{p\bar{a}\infty} = \omega (r_e^{C_{e\theta}} - r_i^{C_{i\theta}}) \quad , \quad (2.57)$$

onde  $Y_{p\bar{a}\infty}$  é o trabalho específico para número infinito de pás, situação em que o escoamento é perfeitamente guiado através de canais de largura infinitesimal. Em termos adimensionais, pode-se escrever o coeficiente de pressão para número infinito de pás como

$$\psi_\infty = 2 [1 - \phi \cdot \cotg \beta_e - \Omega_\infty] \quad , \quad (2.58)$$

onde foram consideradas as relações do triângulo de velocidades (Figura 2.6) e a definição de  $\phi$ ;  $\Omega_\infty$  é um coeficiente de pré-rotação para o caso de número infinito de pás, definido por

$$\Omega_\infty = \frac{r_i c_{i\theta}}{\omega r_e^2} . \quad (2.59)$$

Note-se que  $\Omega_\infty$  pode, conceitualmente, diferir de  $\Omega$ , já que no caso unidimensional ( $N = \infty$ ) a grade não afeta a direção do escoamento anterior à entrada e no caso bidimensional, sim. Em outras palavras, o fato de se colocar  $\Omega = 0$  no sistema de equações (2.38) não impõe que  $c_{i\theta}$  tenha de ser nulo, nem mesmo para entrada sem choque, pois as distribuições de vórtices afetam a direção do escoamento não perturbado; em contrapartida tem-se  $\Omega_\infty = 0$  na equação (2.59) se e somente se  $c_{i\theta} = 0$ .

Observa-se, pelas considerações anteriores, que  $\Omega$  e  $\Omega_\infty$  são ambos parâmetros independentes nas situações respectivas de número finito e número infinito de pás. Logo, dada a geometria de uma pá e o coeficiente de vazão, a comparação entre uma grade com  $N$  pás e outra com número infinito de pás só pode ser efetuada se um critério que relacione  $\Omega$  e  $\Omega_\infty$  for estabelecido. Nas situações a serem analisadas neste trabalho, admite-se tacitamente que  $\Omega = \Omega_\infty$ . Desta forma, define-se o fator teórico de deficiência de potência como sendo

$$\mu_T = \frac{Y_{p\dot{a}_T}}{Y_{p\dot{a}_\infty}} = \frac{\psi_T}{\psi_\infty} \quad (2.60)$$

onde  $\psi_T$  e  $\psi_\infty$  são dados pelas equações (2.56) e (2.58), respectivamente, para o caso  $\Omega = \Omega_\infty$ .

## 2.7 - Distribuições de velocidades e pressões.

Uma vez determinada a distribuição de vórtices sobre as pás, o cálculo da velocidade e pressão em qualquer ponto do escoamento pode ser imediatamente efetuado. As componentes da velocidade relativa resultante podem ser escritas em termos

adimensionais, conforme as equações (2.28.a) e (2.28.b), como sendo

$$W_r(Z) = \frac{w_r(z)}{\omega \cdot r_e} = \frac{\phi}{R} + C_{S_r}(Z) \quad (2.61.a)$$

e

$$W_\theta(Z) = \frac{w_\theta(z)}{\omega \cdot r_e} = R + \frac{\Omega}{R} + C_{S_\theta}(Z), \quad (2.61.b)$$

onde  $Z = \frac{z}{r_e} = R e^{i\theta}$  é a forma adimensional do complexo  $z$ , indicativo da posição onde se calculam as componentes de velocidade relativa;  $C_{S_r}(Z)$  e  $C_{S_\theta}(Z)$  são formas adimensionais das componentes da velocidade absoluta, e podem ser dadas, de acordo com as equações (2.16.a) e (2.16.b), na forma de

$$C_{S_r}(Z) = \frac{c_{S_r}(z)}{\omega r_e} = \sum_{k=1}^M [A r_k(Z) \Gamma_k + B r_k(Z) \Gamma_{k+1}], \quad (2.62.a)$$

e

$$C_{S_\theta}(Z) = \frac{c_{S_\theta}(z)}{\omega r_e} = \sum_{k=1}^M [A \theta_k(Z) \Gamma_k + B \theta_k(Z) \Gamma_{k+1}], \quad (2.62.b)$$

sendo que  $A r_k$ ,  $B r_k$ ,  $A \theta_k$ , e  $B \theta_k$  são os coeficientes adimensionais nas equações (2.17).

O módulo da velocidade relativa resultante é dado por

$$W(Z) = [W_r^2(Z) + W_\theta^2(Z)]^{1/2}. \quad (2.63)$$

Para o cálculo da distribuição de pressões, recorre-se à equação de Bernoulli para o escoamento relativo. Sendo o escoamento absoluto potencial e incompressível, vale escrever para qualquer ponto que

$$p^* + \rho \frac{w^2}{2} - \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} = p_0, \quad (2.64.a)$$

onde  $p_0$  é denominada pressão total, constante em todos os pontos do escoamento;  $p^*$  é a chamada pressão de movimento, dada por

$$p^* = p + \rho g h, \quad (2.64.b)$$

onde  $p$  é a pressão estática do ponto considerado e  $h$  é a distância entre este ponto e um plano horizontal de referência, no sentido de baixo para cima. É conveniente definir uma pressão adimensional  $P$  na forma de

$$P = 2 \frac{(p^* - p_0)}{\rho \omega^2 r_e^2}. \quad (2.65)$$

Combinando as equações (2.64.a) e (2.65), resulta que

$$P(z) = R^2 - W^2(z), \quad (2.66.a)$$

ou ainda, com a consideração das equações (2.61.a), (2.61.b) e (2.63),

$$P(z) = R^2 - \left[ \frac{\phi}{R} + C_{S_r}(z) \right]^2 - \left[ R + \frac{\Omega}{R} + C_{S_\theta}(z) \right]^2. \quad (2.66.b)$$

As equações desenvolvidas para o cálculo das velocidades e pressões podem ser aplicadas a qualquer ponto do escoamento, com exceção da origem da grade  $Z = 0$ , devido às singularidades pontuais ali existentes. Interessa bastante o cálculo das velocidades e pressões sobre a pá ou, de acordo com a presente formulação, nos pontos de controle dos painéis. Neste caso, devem-se considerar as equações (2.33.a) e (2.33.b) para o cálculo das componentes da velocidade induzida. Além disso, deve-se ter em mente a biunivocidade dessas componentes devido à contribuição de um painel da pá de referência sobre seu próprio ponto de controle, calculando-se os coeficientes  $A_{r_{jk}}$ ,  $B_{r_{jk}}$ ,  $A_{\theta_{jk}}$  e  $B_{\theta_{jk}}$ , para  $k = j$ , pelas equações (2.42.a), (2.42.b), (2.42.c), e (2.42.d), respectivamente.

## CAPÍTULO 3 - SOLUÇÃO NUMÉRICA

No capítulo anterior foram desenvolvidas expressões que possibilitam o cálculo das características aerodinâmicas decorrentes de uma certa geometria de grade radial. Verificou-se que, através do método dos painéis, o problema era colocado na forma de um sistema de equações lineares algébricas, tendo por incógnitas os valores da densidade de vórtices nos pontos extremos dos painéis.

Da maneira que as equações foram desenvolvidas, a implantação de uma rotina computacional de solução torna-se praticamente evidente: as providências a serem tomadas para a solução já estão contidas na própria formulação do capítulo anterior, graças à simplicidade conceitual do método dos painéis.

Neste capítulo serão discutidos, brevemente, alguns detalhes importantes para a elaboração de uma rotina computacional específica que, utilizando as equações anteriores, obtenha a solução do problema direto do escoamento potencial para qualquer grade radial móvel geradora com pás infinitamente finas. O fluxograma desta rotina, bem como o programa correspondente, elaborado em linguagem FORTRAN para o computador HP-3000, encontra-se em anexo no APÊNDICE B.

### 3.1 - Dados de Entrada

Conforme o salientado no capítulo anterior, os seguintes parâmetros devem ser fornecidos para o início dos cálculos:

a) Parâmetros geométricos:

- a.1) forma da pá de referência;
- a.2) número de pás (N).

b) Parâmetros cinemáticos:

- b.1) coeficiente de circulação interna ( $\Omega$ );

## b.2) coeficiente de vazão ( $\phi$ ).

É necessário frisar que a condição de entrada sem choque pode ser determinada diretamente, conhecendo-se unicamente a geometria e o coeficiente de circulação interna. Neste caso, impõe-se a condição de escoamento suave no bordo de ataque das pás, resultando o coeficiente de vazão ótimo ou de projeto  $\phi_{0T}$ . Desta forma, as condições de escoamento com choque na entrada podem ser referidas às condições de projeto através da especificação da relação  $\phi/\phi_{0T}$ .

A especificação da forma da pá de referência pode ser feita tanto através da equação  $\theta = \theta(R)$  correspondente, como diretamente através dos pontos extremos dos painéis  $(R_k, \theta_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, M+1$  ( $R_1 = R_i$ ,  $R_{M+1} = R_e$ ). Quando se dispõe da equação, entretanto, é conveniente efetuar automaticamente a discretização da pá de referência através do computador.

No presente trabalho decidiu-se analisar, para efeito de exemplificação, duas formas de pá frequentemente utilizadas em bombas e ventiladores centrífugos de baixa rotação específica:

- em espiral logarítmica;
- em arco de círculo.

Em ambos os casos, a relação de raios  $R_i = r_i/r_e$  entra como parâmetro. No caso da espiral logarítmica, deve-se fornecer ainda o ângulo  $\beta$  da pá, que é constante. No caso do arco de círculo, entra-se com os ângulos  $\beta_i$  e  $\beta_e$ , correspondentes à entrada e à saída, respectivamente. O programa computacional em anexo no APÊNDICE B foi elaborado tendo-se em vista a solução do problema para uma das formas de pá citadas. É óbvio, porém, que esse programa pode ser adaptado para outros casos de forma de pá, com a única restrição de que a mesma seja infinitamente fina.

Os pares de valores  $(R_k, \theta_k)$  fornecidos ou geradores automaticamente, são utilizados para formar os números complexos  $Z_k = R_k e^{i\theta_k}$ , representativos dos pontos extremos dos painéis. Os pontos de controle são determinados considerando-se que  $Z_{c_k} = 1/2(Z_k + Z_{k+1})$ . Devido aos recursos do computador, a forma

complexa é conveniente pois evita o desenvolvimento analítico de todas as expressões complexas, desenvolvidas no capítulo anterior, nas partes real e imaginária.

### 3.2 - Montagem da Matriz de Coeficientes.

Para a montagem da matriz de coeficientes do sistema de equações (2.38), determinam-se inicialmente os coeficientes complexos  $I_{\ell jk}$  e  $J_{\ell jk}$  pelas equações (2.19.a) e (2.19.b), respectivamente. O cálculo é feito diretamente através da álgebra complexa do computador. Em seguida, calculam-se os coeficientes complexos  $X_{jk}$ , equação (2.23.a) e  $Y_{jk}$ , equação (2.23.b). Determinam-se, então, os coeficientes reais  $A_{rjk}$ ,  $B_{rjk}$ ,  $A_{\theta jk}$  e  $B_{\theta jk}$ , pelas equações (2.26.a) a (2.26.d). Finalmente os coeficientes  $A_{jk}$  e  $B_{jk}$  do sistema de equações (2.38) podem ser calculados conforme as equações (2.35.a) e (2.35.b), respectivamente. Cumpre notar que, em todos estes cálculos, a parte biunívoca dos coeficientes  $I_{\ell jk}$  e  $J_{\ell jk}$  para  $j = k$  e  $\ell = 1$  não precisa ser considerada, pois seu efeito será anulado quando do cálculo dos coeficientes  $A_{jj}$  e  $B_{jj}$ .

### 3.3 - Solução do Sistema de Equações.

A solução do sistema de equações lineares algébricas (2.38) fornece os valores da densidade de vórtices  $\Gamma_k$  nos pontos extremos dos painéis. A escolha de um método numérico para solução deste sistema encontra-se ligada a critérios como número e natureza das equações. No presente caso, por se tratar com pás infinitamente finas, não é necessário se utilizar um número excessivamente grande de painéis para que uma precisão razoável seja obtida. Além disso, o sistema de equações não é esparso o que, em geral, contra indica os métodos iterativos de solução, a não ser no caso de um número muito grande de equações. Sendo assim, um método direto de solução é preferível aos métodos iterativos. Neste sentido, o programa computacional em anexo resolve o sistema de equações (2.38) por meio de inversão da matriz de coeficientes, para a qual o computador HP-3000 possui uma sub-rotina interna (INVERT). Esta sub-rotina de inversão de matrizes baseia-se no método de Shipley, conforme comentários do

manual do computador. A inversão da matriz se torna conveniente, neste caso, pois desta forma a solução do sistema (2.38) pode ser obtida para diversos coeficientes de vazão com um mínimo de esforço.

Uma vez determinada a distribuição de vórtices para cada condição de vazão, o cálculo das características aerodinâmicas da grade é facilmente efetuado. O coeficiente de pressão  $\psi_T$  é obtido por meio da equação (2.56). As distribuições de velocidades e pressões são determinadas conforme as equações - (2.61.a), (2.61.b), (2.63) e (2.66.a), para os lados de pressão e sucção da pá. Neste caso considera-se a parte biunívoca dos coeficientes  $I_{1jj}$  e  $J_{1jj}$ .

### 3.4 - Comentários a respeito da discretização.

A discretização das pás da grade radial apresenta dois aspectos que influem nos resultados finais:

- número de painéis;
- distribuição dos painéis.

É óbvio que, quanto maior o número de painéis, mais precisos serão os resultados. No entanto, tendo-se em vista a minimização do tempo de cálculo, não é recomendável aumentar indiscriminadamente o número de painéis: deve-se procurar racionalizar a sua distribuição. Assim, por exemplo, verifica-se que nas extremidades das pás as distribuições de singularidades, velocidades e pressões apresentam maiores variações, em comparação com a região central das pás. É razoável, portanto, proceder-se a um detalhamento maior nas extremidades. Por outro lado, não é desejável que dois painéis contíguos apresentem tamanhos muito diferentes, pois a precisão da solução estaria sendo ditada sempre pelo maior painel, pelo menos na região correspondente.

No programa computacional em anexo, conforme já salientado, a discretização é realizada automaticamente, fazendo com que os painéis cresçam geometricamente a partir dos raios extremos da pá até seu raio médio. A razão deste crescimento depende da geometria da pá, mas em geral pode ser tomada entre 1,05

e 1,3. As maiores razões devem ser usadas quando se trabalha com um número menor de painéis ou se deseja uma precisão maior nos resultados obtidos para as extremidades. Verifica-se, adicionalmente, que um número de painéis em torno de 20 já fornece resultados satisfatórios, já que, ao se dobrar este número, os resultados para os coeficientes de pressão e vazão ótimos so frem alterações inferiores a 1% (Figura 4.6).

De acordo com a referência [9], verifica-se que a aplicação do método dos painéis na solução dos problemas bidimensionais mais simples requer um número de painéis bem maior do que 20. Assim por exemplo, no caso de escoamento em aerofólios sem sustentação, um número satisfatório de painéis fica em torno de 60 a 80. No presente caso é possível se utilizar um número menor de painéis devido ao fato de se tratar com pás infinitamente finas. Além do mais, a distribuição de vórtices utilizada sobre cada painel foi escolhida linear, ao passo que, na referência [9], todos os resultados e comentários apresentados tomam por base distribuições uniformes de singularidades.

Além de alguns parâmetros, como por exemplo o número de painéis, que foram possíveis de serem estudados com outros métodos e resultados experimentais são feitas. Os parâmetros utilizados na obtenção de os resultados obtidos estão indicados na figura correspondente.

4.2 - Influência do Número de Pás na Característica Teórica

Na Figura 4.6 são mostrados os resultados obtidos pelo presente método para a característica teórica  $C_p$  vs  $r/R$  de uma grade radial com pás logarítmicas. Vários números de pás são considerados. A título de comparação com a teoria bidimensional, encontra-se na mesma figura a característica para o número infinito de pás correspondente ao caso de grade. Verifica-se que com o aumento do número de pás a característica teórica tende à posição correspondente ao número infinito de pás. Assim, para o caso de grade, a diferença máxima entre a posição da característica teórica e a posição da característica bidimensional é de 1% e o mesmo vale para o caso de uma grade com pás finas.

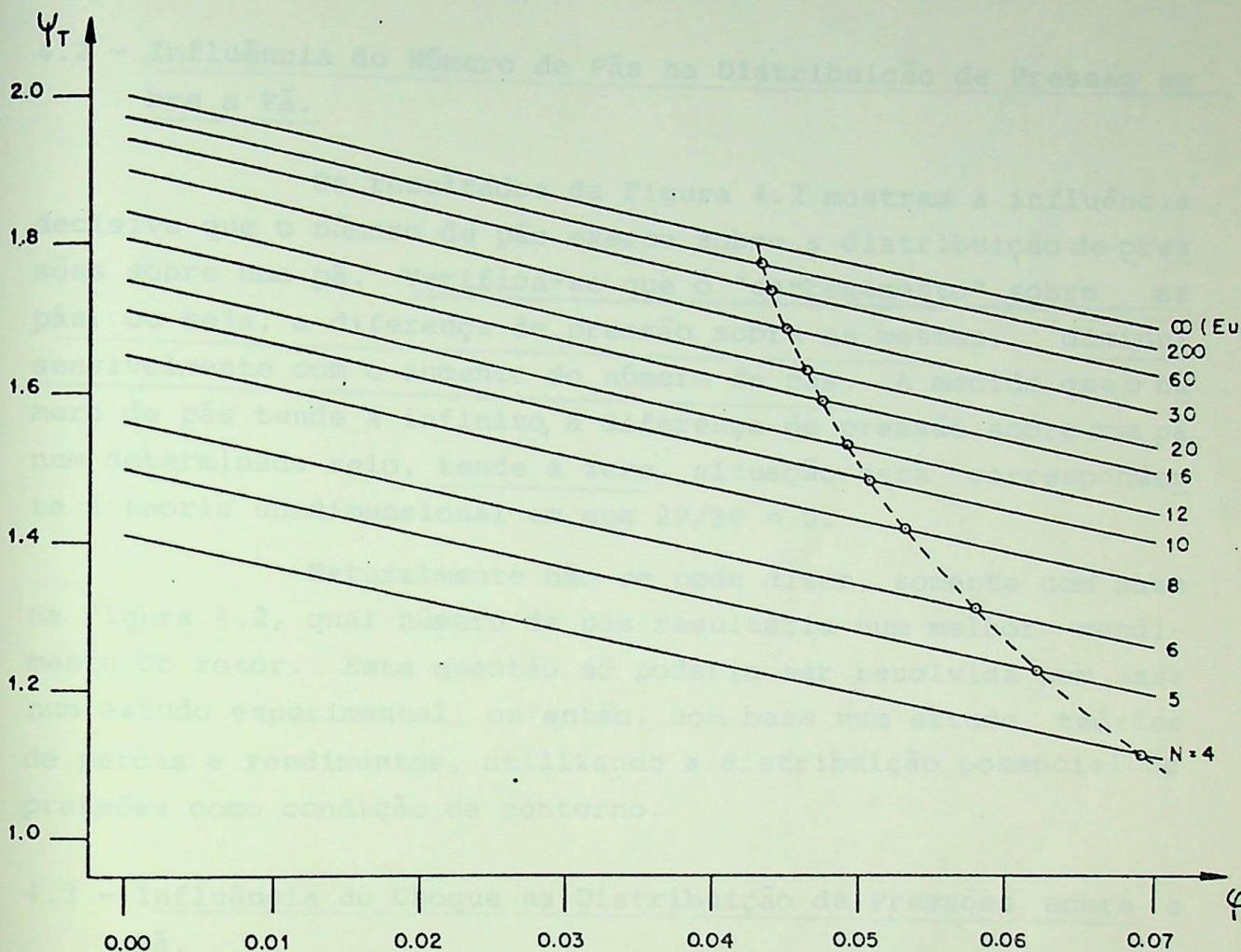
## CAPÍTULO 4 - EXEMPLOS

Neste capítulo pretende-se demonstrar a validade do método desenvolvido no capítulo 2, utilizando o programa computacional em anexo (APÊNDICE 2) na elaboração de alguns exemplos. Os resultados numéricos destes exemplos estão apresentados graficamente. Nenhuma tentativa será feita no sentido de se correlacionar todos os parâmetros importantes na análise do escoamento potencial em grades radiais: propõe-se tal tarefa para uma pesquisa posterior. Conforme o salientado na introdução, o objetivo que se propôs neste trabalho seria simplesmente o de estabelecer um método que tornasse possível a solução exata do problema do escoamento potencial em grades radiais móveis com pás finas de formato arbitrário. Além disso, tal método se encarrugaria de eliminar as dificuldades matemáticas frequentemente encontradas em outros métodos. Sendo assim, os exemplos que se seguem visam principalmente dar uma idéia qualitativa da influência de alguns parâmetros, como por exemplo o número de pás. Sempre que possível, comparações com outros métodos e resultados experimentais são feitas. Os parâmetros utilizados na obtenção de um determinado resultado estão indicados na figura correspondente.

### 4.1 - Influência do Número de Pás na Característica Teórica

$$\psi_T \times \phi$$

Na Figura 4.1 encontram-se os resultados obtidos pelo presente método para a característica teórica  $\psi_T \times \phi$  de uma grade radial com pás logarítmicas. Vários números de pás estão considerados. A título de comparação com a teoria unidimensional, encontra-se na mesma figura a característica para o número infinito de pás correspondente à equação de Euler. Verifica-se que, com o aumento do número de pás, a característica teórica  $\psi_T \times \phi$  tende à solução correspondente ao número infinito de pás. Observa-se, porém, uma diferença acentuada entre a equação de Euler e o presente método à medida que o número de pás diminui, o que já era esperado.



**FIGURA 4.1** - INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE PÁS NA CARACTERÍSTICA TEÓRICA COEFICIENTE DE PRESSÃO ( $\Psi_T$ ) X COEFICIENTE DE VAZÃO ( $\phi$ ) - GRADE RADIAL DE PÁS LOGARÍTMICAS -  $\beta = 25^\circ$ ,  $\eta_1 / r_e = 0,3$ ,  $\Omega = 0$ .

○ — PONTOS CORRESPONDENTES À CONDIÇÃO DE ENTRADA SEM CHOQUE.

Apenas como curiosidade, os pontos correspondentes à condição de entrada sem choque estão indicados. Nota-se que, segundo o presente método, é possível determinar por extrapolação a condição de entrada sem choque mesmo no caso extremamente idealizado do número infinito de pás.

#### 4.2 - Influência do Número de Pás na Distribuição de Pressão sobre a Pá.

Os resultados da Figura 4.2 mostram a influência decisiva que o número de pás exerce sobre a distribuição de pressões sobre uma pá. Verifica-se que o "carregamento" sobre as pás, ou seja, a diferença de pressão sobre as mesmas, diminui sensivelmente com o aumento do número de pás. A medida que o número de pás tende a infinito, a diferença de pressão sobre uma pá, num determinado raio, tende a zero, situação esta correspondente à teoria unidimensional em que  $\partial P / \partial \theta = 0$ .

Naturalmente não se pode dizer, somente com base na Figura 4.2, qual número de pás resultaria num melhor rendimento do rotor. Esta questão só poderia ser resolvida com base num estudo experimental, ou então, com base num estudo teórico de perdas e rendimentos, utilizando a distribuição potencial de pressões como condição de contorno.

#### 4.3 - Influência do Choque na Distribuição de Pressões sobre a Pá.

As condições de escoamento com choque na entrada influem grandemente na distribuição de pressões sobre as pás. Na Figura 4.3 pode-se ter uma idéia de tal influência. Por se tratar de pás infinitamente finas, observam-se, nas condições de entrada com choque, velocidades e pressões infinitas no bordo de ataque das pás, o que não corresponde às condições reais de choque. Este problema só poderia ser contornado se fosse levado em conta o efeito da espessura das pás. Realmente, tal efeito poderia ser analisado num trabalho posterior.

Nota-se, adicionalmente, que para coeficientes de vazão maiores que o coeficiente de vazão ótimo a diferença de

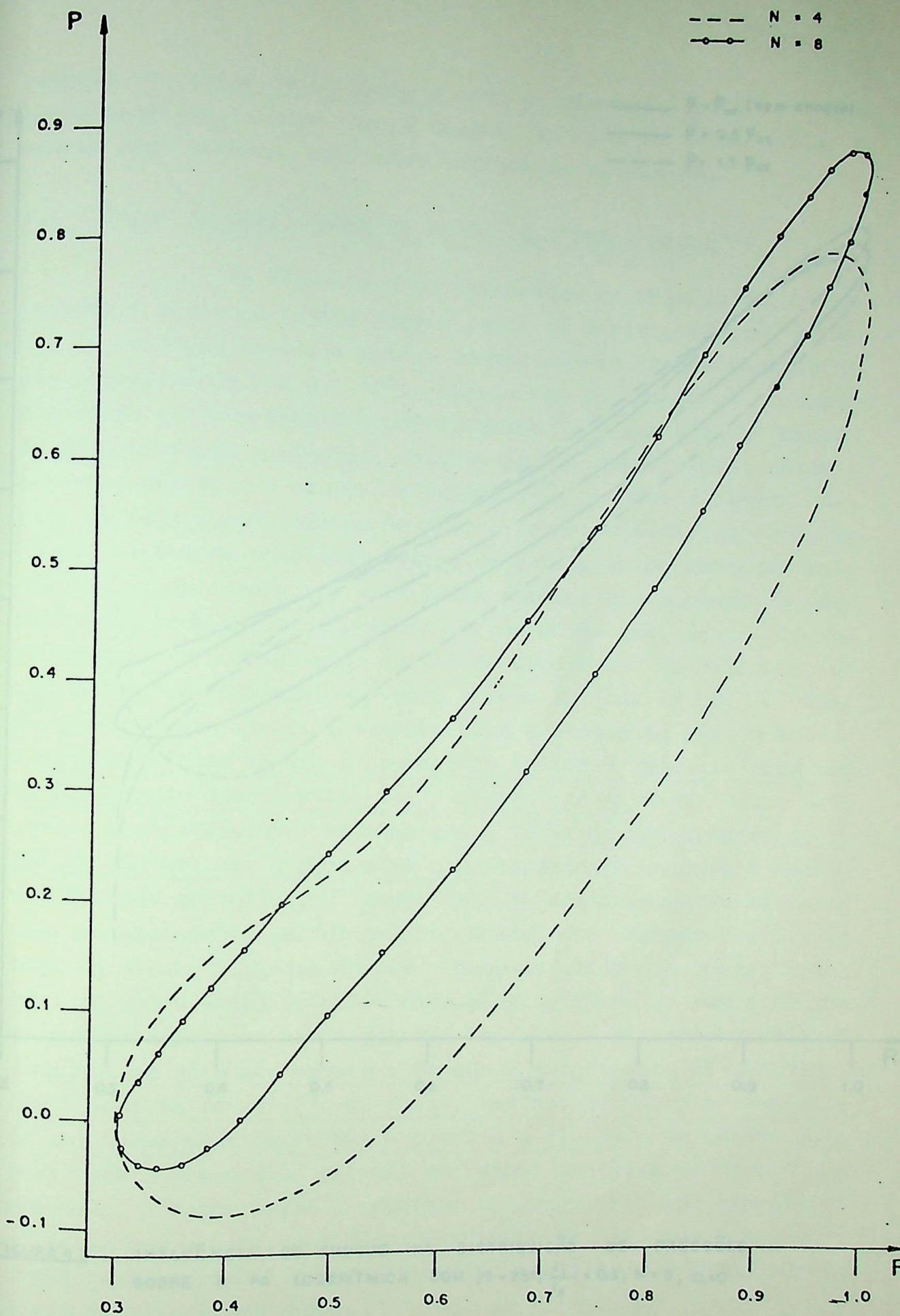


FIGURA 4.2 - INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE PÁS NA DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÕES SOBRE A PÁ LOGARÍTMICA COM  $\beta = 25^\circ$ ,  $\frac{r_i}{r_e} = 0,3$ ,  $\Omega = 0$ .

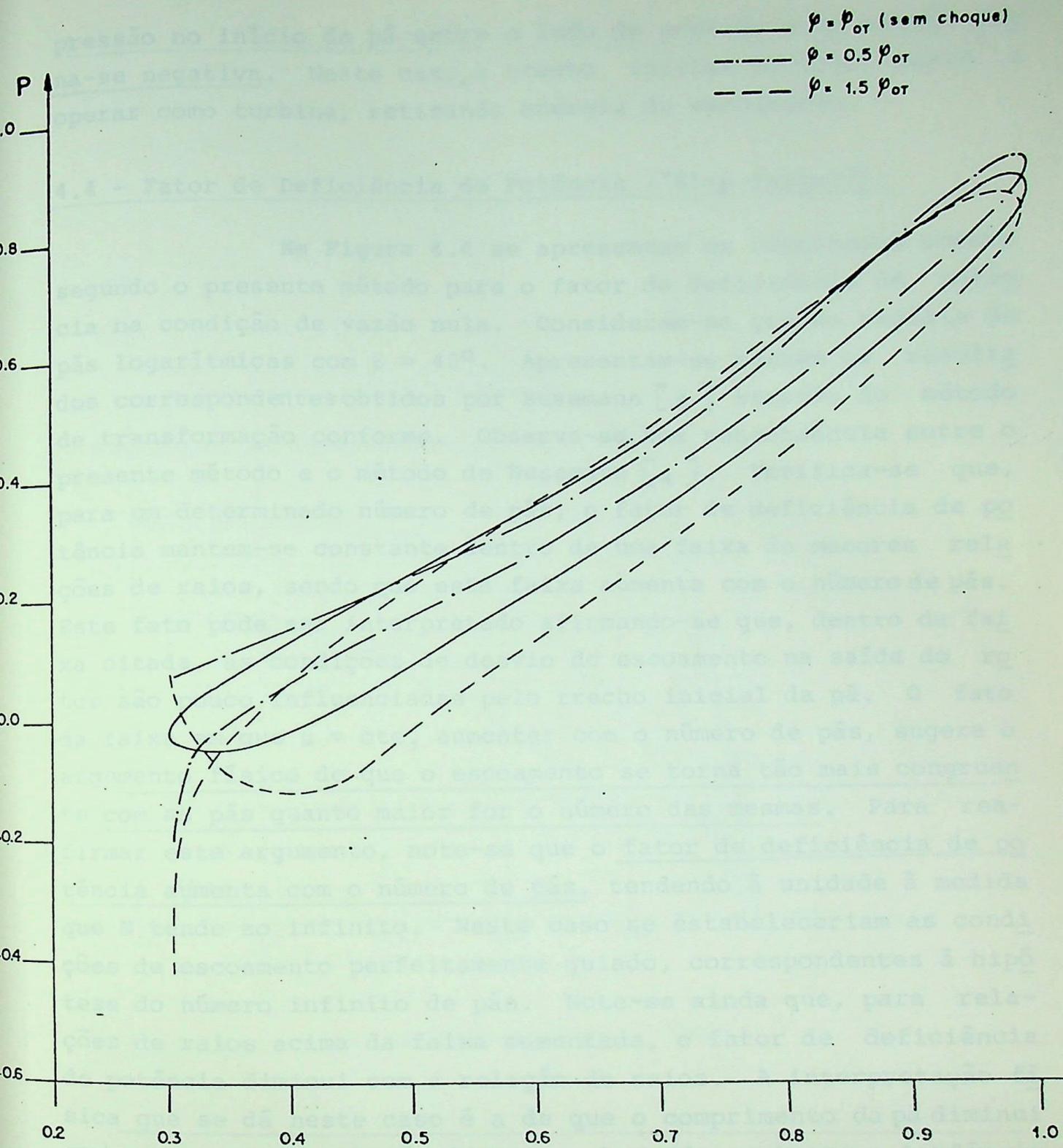


FIGURA 4.3 - INFLUÊNCIA DO CHOQUE NA DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÕES SOBRE A PÁ LOGARÍTMICA COM  $\beta = 25^\circ$ ,  $\frac{r_i}{r_e} = 0.3$ ,  $N = 8$ ,  $\Omega = 0$ .

pressão no início da pá entre o lado de pressão e de sucção torna-se negativa. Neste caso, o trecho inicial do rotor passa a operar como turbina, retirando energia do escoamento.

#### 4.4 - Fator de Deficiência de Potência ("Slip Factor").

Na Figura 4.4 se apresentam os resultados obtidos segundo o presente método para o fator de deficiência de potência na condição de vazão nula. Consideram-se grades radiais de pás logarítmicas com  $\beta = 40^\circ$ . Apresentam-se também os resultados correspondentes obtidos por Busemann [4] através do método de transformação conforme. Observa-se boa concordância entre o presente método e o método de Busemann [4]. Verifica-se que, para um determinado número de pás, o fator de deficiência de potência mantém-se constante dentro de uma faixa de menores relações de raios, sendo que esta faixa aumenta com o número de pás. Este fato pode ser interpretado afirmando-se que, dentro da faixa citada, as condições de desvio do escoamento na saída do rotor são pouco influenciadas pelo trecho inicial da pá. O fato da faixa em que  $\mu = \text{cte}$ , aumentar com o número de pás, sugere o argumento físico de que o escoamento se torna tão mais congruente com as pás quanto maior for o número das mesmas. Para reafirmar este argumento, note-se que o fator de deficiência de potência aumenta com o número de pás, tendendo à unidade à medida que  $N$  tende ao infinito. Neste caso se estabeleceriam as condições de escoamento perfeitamente guiado, correspondentes à hipótese do número infinito de pás. Note-se ainda que, para relações de raios acima da faixa comentada, o fator de deficiência de potência diminui com a relação de raios. A interpretação física que se dá neste caso é a de que o comprimento da pá diminui com o aumento da relação de raios, havendo portanto a tendência de uma menor interação entre o rotor e o fluido. Em outras palavras, com o aumento da relação de raios, mantidos os outros parâmetros, o rotor passa a realizar um menor trabalho específico, ao passo que o rotor com número infinito de pás, teoricamente, continuaria mantendo o mesmo trabalho específico, independentemente da relação de raios.

Ainda na Figura 4.4, os resultados obtidos pelo

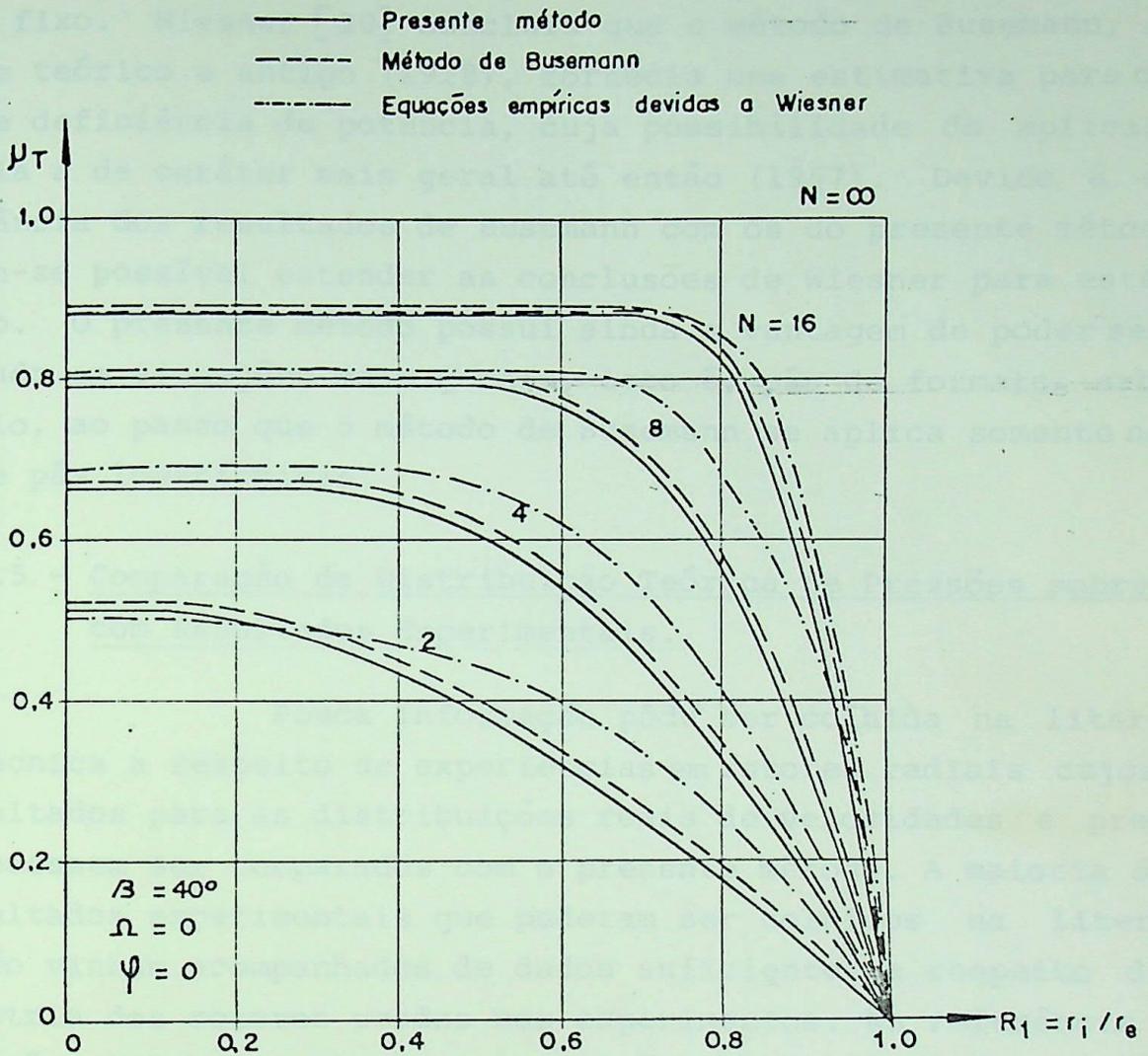


FIGURA 4.4 — FATOR DE DEFICIÊNCIA DE POTÊNCIA

presente método são comparados com os resultados empíricos indicados no trabalho de Wiesner [20]. Verifica-se uma razoável concordância entre ambos os resultados, principalmente na faixa em que o fator de deficiência de potência mantém-se constante com N fixo. Wiesner [20] concluiu que o método de Busemann, apesar de teórico e antigo (1928), fornecia uma estimativa para o fator de deficiência de potência, cuja possibilidade de aplicação seria a de caráter mais geral até então (1967). Devido à concordância dos resultados de Busemann com os do presente método, torna-se possível estender as conclusões de Wiesner para este último. O presente método possui ainda a vantagem de poder ser aplicado em situações mais gerais, isto é, pás de formato arbitrário, ao passo que o método de Busemann se aplica somente no caso de pás logarítmicas.

#### 4.5 - Comparação da Distribuição Teórica de Pressões sobre a Pá com Resultados Experimentais.

Pouca informação pôde ser colhida na literatura técnica a respeito de experiências em rotores radiais cujos resultados para as distribuições reais de velocidades e pressões pudessem ser comparados com o presente método. A maioria dos resultados experimentais que puderam ser colhidos na literatura não vinham acompanhados de dados suficientes a respeito da geometria dos rotores usados nos experimentos. Na referência [14], porém, Salomon apresenta comparações entre o método teórico por ele desenvolvido e alguns resultados experimentais. Não é desejo aqui comparar o presente método com o método de Salomon [14]. Observa-se apenas que, para os exemplos contidos na referência [14], os dois métodos concordam bem. Por outro lado, os resultados experimentais para a distribuição de pressões sobre a pá em duas situações indicadas na referência [14] estão mostradas nas Figuras 4.5 e 4.6 em comparação com os resultados do presente método. Verifica-se que em ambos os casos os resultados experimentais concordam bem com os resultados do presente método em algumas regiões da pá, havendo por outro lado um desvio sensível em outras regiões. Apesar de tudo, os resultados teóricos do presente método dão uma idéia razoável da distribuição real de pres

— PRESENTE MÉTODO.  
 ○ ● MEDIDAS FEITAS POR GIESE E HELLMANN (OP. CIT. [14])  
 ○ LADO DE PRESSÃO  
 ● LADO DE SUCCÃO

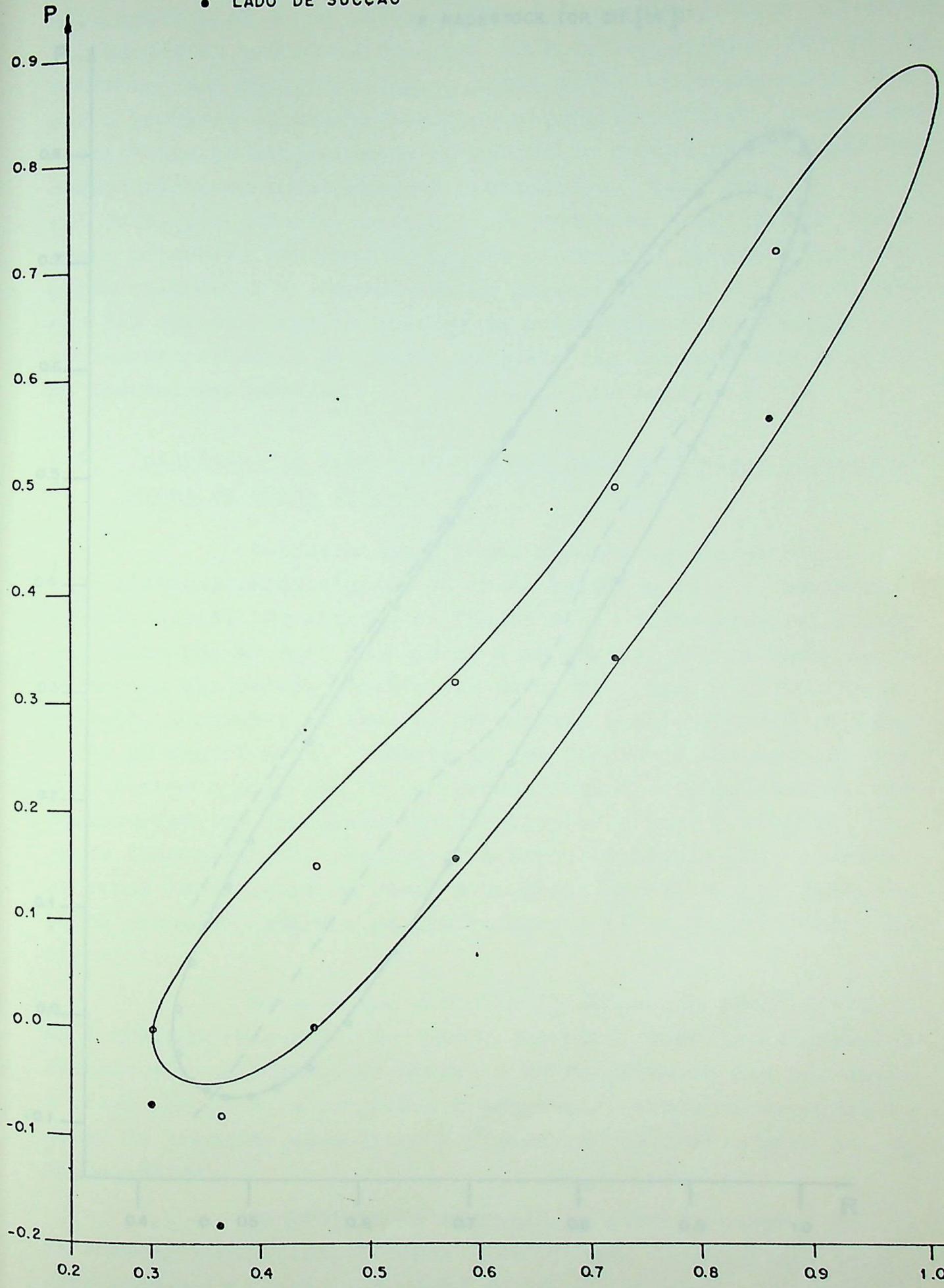


FIGURA 4.5 - DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO SOBRE A BÂ LÓGARÍTMICA

○ ○ ○ PRESENTE MÉTODO - 20 PAINÉIS.  $\psi = 0.0978$ .  $\psi_T =$   
 — PRESENTE MÉTODO - 40 PAINÉIS.  $\psi = 0.0974$ .  $\psi_T =$   
 - - - MEDIDAS EFETUADAS POR DOMM.HERGT  
 E RADESTOCK. (OP. CIT. [14 ])

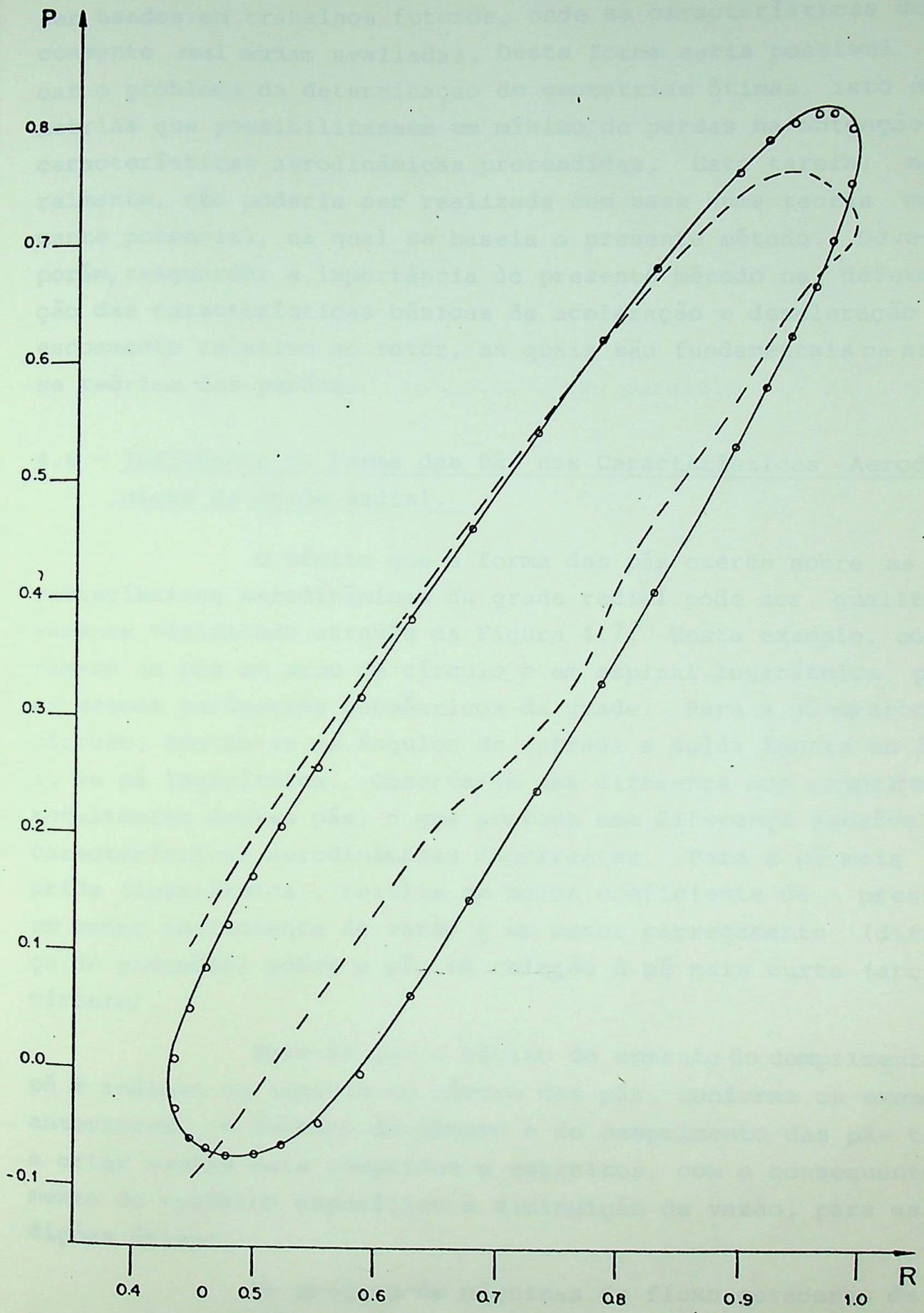


FIGURA 1.0

sões sobre a pá de um rotor radial. Estes resultados poderiam ser usados em trabalhos futuros, onde as características do escoamento real seriam avaliadas. Desta forma seria possível atacar o problema da determinação de geometrias ótimas, isto é, geometrias que possibilitassem um mínimo de perdas na obtenção das características aerodinâmicas pretendidas. Esta tarefa, naturalmente, não poderia ser realizada com base numa teoria meramente potencial, na qual se baseia o presente método. Deve-se, porém, resguardar a importância do presente método na determinação das características básicas de aceleração e desaleração do escoamento relativo ao rotor, as quais são fundamentais na análise teórica das perdas.

#### 4.6 - Influência da Forma das Pás nas Características Aerodinâmicas da Grade Radial.

O efeito que a forma das pás exerce sobre as características aerodinâmicas da grade radial pode ser qualitativamente verificado através da Figura 4.7. Neste exemplo, compararam-se as pás em arco de círculo e em espiral logarítmica para os mesmos parâmetros geométricos da grade. Para a pá em arco de círculo, adotam-se os ângulos de entrada e saída iguais ao ângulo da pá logarítmica. Observa-se uma diferença nos comprimentos resultantes destas pás, o que provoca uma diferença sensível nas características aerodinâmicas decorrentes. Para a pá mais comprida (logarítmica), resulta um maior coeficiente de pressão, um menor coeficiente de vazão e um menor carregamento (diferença de pressões) sobre a pá, em relação à pá mais curta (arco de círculo).

Nota-se que o efeito do aumento do comprimento da pá é análogo ao aumento do número das pás, conforme os exemplos anteriores. O aumento do número e do comprimento das pás tende a criar canais mais compridos e estreitos, com o conseqüente aumento do trabalho específico e diminuição da vazão, para as condições ótimas.

No projeto de máquinas de fluxo geradoras de baixa rotação específica, é comum a utilização de pás finas de simples curvatura. Após a fixação do número de pás, segundo equa

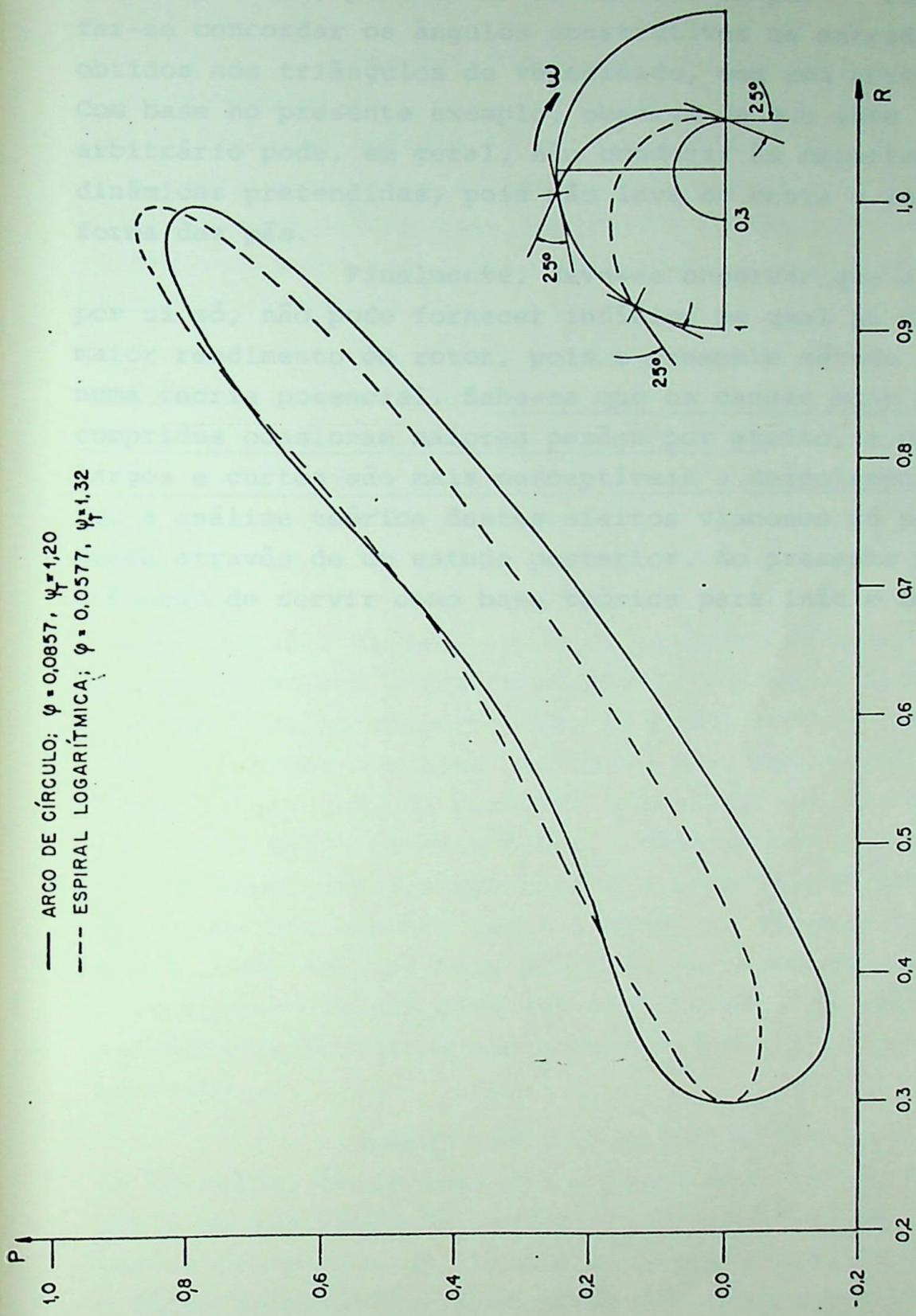


FIGURA 4.7 - INFLUÊNCIA DA FORMA DA PÁ NAS CARACTERÍSTICAS AERODINÂMICAS DA GRADE RADIAL COM  $N=6, r_1/r_0=0.3, \Omega=0, \psi=\psi_{ot}$ .

ções empíricas, procede-se ao traçado da pá. Frequentemente, faz-se concordar os ângulos construtivos na entrada e na saída, obtidos nos triângulos de velocidade, com uma curva arbitrária. Com base no presente exemplo, observa-se que esse procedimento arbitrário pode, em geral, não conduzir às características aerodinâmicas pretendidas, pois não leva em conta a influência da forma das pás.

Finalmente, deve-se observar que a Figura 4.7, por si só, não pode fornecer indícios de qual pá resultaria num maior rendimento do rotor, pois o presente método fundamenta-se numa teoria potencial. Sabe-se que os canais mais estreitos e compridos ocasionam maiores perdas por atrito, e os canais mais largos e curtos são mais susceptíveis a descolamentos. No entanto, a análise teórica destes efeitos viscosos só poderia ser efetuada através de um estudo posterior. Ao presente método caberia a função de servir como base teórica para início deste estudo.



## CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Através dos exemplos apresentados no capítulo anterior, conclui-se que o método dos painéis pode ser efetivamente aplicado na solução do problema direto do escoamento potencial em grades radiais, independentemente do formato da pá. As dificuldades matemáticas inerentes a outros métodos puderam ser definitivamente superadas, principalmente no que se refere à convergência numérica.

Com a utilização sistemática do presente método é possível correlacionar diversos parâmetros relevantes do escoamento potencial em rotores puramente radiais: geometria da pá (ângulos e relação de raios), número de pás, coeficiente de vazão, coeficiente de pressão, etc.. Sem dúvida, esta possibilidade representa um avanço expressivo em relação à teoria unidimensional. Por outro lado, deve-se acentuar o caráter meramente potencial e bidimensional do presente método. Obviamente, os efeitos viscosos e tridimensionais, os quais desempenham um papel decisivo no comportamento das máquinas de fluxo, não podem ser analisados com base exclusiva no presente método. Deve-se ainda frisar que, no presente trabalho, analisou-se apenas o caso de pás infinitamente finas. Verifica-se que a desconsideração da espessura das pás conduz a velocidades infinitas no bordo de ataque das mesmas, nas situações de entrada com choque. Portanto, numa análise mais profunda do escoamento através do rotor, a espessura das pás deve ser considerada, já que, naturalmente, velocidades infinitas não correspondem a situações reais de escoamento.

Apesar das restrições do método desenvolvido neste trabalho, observa-se que o mesmo pode ser aplicado imediatamente na avaliação de certas grandezas úteis no projeto de máquinas de fluxo radiais geradoras de pás finas. Exemplo típico é o fator de deficiência de potência, cuja estimativa é de grande valia na fase de verificação do referido projeto. Adicionalmente, por meio do presente método, verifica-se que a distribuição de pressões potencial sobre as pás de uma grade radial pode ser usada como uma estimativa da distribuição real de pressões. Sendo assim, o presente método possibilita a determinação das caracte-

terísticas básicas de aceleração e desaceleração do escoamento relativo ao rotor. Através do conhecimento destas características torna-se possível atacar o problema da avaliação das perdas e analisar teoricamente a influência dos parâmetros geométricos e aerodinâmicos no rendimento do rotor.

Em suma, este trabalho pode ser considerado como passo inicial para estudos mais detalhados do escoamento no interior das máquinas de fluxo centrífugas. Dentro deste enfoque, inúmeros trabalhos de pesquisa podem ser efetuados, dentre os quais os seguintes são sugeridos:

a - Análise do escoamento potencial em grades radiais compás de espessura finita.

Através de uma pesquisa deste tipo, seria possível estabelecer a posição do ponto de estagnação relativa sobre a pá, bem como as características de aceleração e desaceleração do escoamento relativo na região próxima ao bordo de ataque da pá, em qualquer condição de funcionamento (com ou sem choque). Este procedimento é de vital importância em estudos posteriores de crescimento de camada limite. O problema poderia ser atacado de maneira análoga à adotada no presente trabalho, utilizando-se uma distribuição única de vórtices ao longo do contorno da pá. A intensidade desta distribuição seria determinada por meio do método dos painéis.

b - Correlação teórica dos parâmetros geométricos e aerodinâmicos das grades radiais.

Ainda mantendo a hipótese de escoamento potencial, este trabalho visaria fornecer equações para correlacionar os diversos parâmetros relevantes das grades radiais. Desta forma a grande parte do trabalho de computação seria feita apenas uma vez, sendo que nas aplicações futuras bastaria utilizar as equações de correlação. Para uma determinada família de pás (ou perfis), uma correlação importante seria a do coeficiente de pressão, coeficiente de vazão e dos parâmetros geométricos da pá e da grade. Visando a aplicação futura na análise de efeitos viscosos, seriam apresentadas equações para as distribuições de velocidades e pressões em função da coordenada radial, do coeficien

te de vazão e dos parâmetros geométricos. Duas formas de atacar o problema da correlação são sugeridas:

- aplicação sistemática de um programa computacional análogo ao desenvolvido no presente trabalho onde, eventualmente, o efeito da espessura já estaria considerado;

- análise simplificada do escoamento potencial, considerando pás delgadas de pequena curvatura. Desta forma o estudo poderia ser conduzido de maneira semelhante ao que se faz no caso de grades lineares (ver, por exemplo, o trabalho de Mellor [12]). As equações de correlação seriam obtidas de resultados aproximados e, eventualmente, necessitariam de correções.

c - Análise das perdas e rendimentos em grades radiais.

Partindo do conhecimento das características básicas de aceleração e desaceleração do fluxo relativo, fornecidas pelo escoamento potencial, pode-se atacar o importante problema da avaliação das perdas nos canais de um rotor radial. Tal avaliação consistiria, inicialmente, de um cálculo de crescimento de camada limite, normalmente turbulenta, e das perdas por atrito causadas por este crescimento. Vários métodos convenientes para este cálculo são disponíveis [16]. Consequentemente seria possível estimar a posição de descolamento da camada limite e avaliar as perdas concernentes. Deve-se observar que, no caso específico de grades radiais, as forças de Coriolis ocasionam importantes fenômenos de estratificação de camada limite. Estes fenômenos também deveriam ser estudados, pois eles podem modificar substancialmente as características básicas fornecidas pelo escoamento potencial, influenciando, portanto, nas perdas.

A respeito do problema de crescimento, descolamento e estratificação de camada limite nos canais de um rotor centrífugo, sugere-se a consulta dos trabalhos de Baljé, referências [1] e [2]. Nestes trabalhos as características de aceleração e desaceleração do escoamento relativo são admitidas arbitrariamente. Este procedimento arbitrário poderia ser evitado,

se as características corretas do escoamento potencial fossem utilizadas. Sugere-se, portanto, uma análise semelhante à efetuada por Baljé, utilizando-se, porém, a solução do escoamento potencial obtida pelo método desenvolvido no presente trabalho (ou extensões do mesmo, para levar em consideração o efeito da espessura das pás).

Através do estudo de camada limite sugerido, torna-se possível analisar teoricamente a influência dos parâmetros geométricos e aerodinâmicos no rendimento do rotor, e prever, de uma forma racional, geometrias otimizadas para a obtenção das características aerodinâmicas pretendidas.

Não se pode deixar de sugerir a construção de modelos e estudos experimentais sistemáticos das perdas nos rotores radiais. Propõe-se, no entanto, que estes estudos sejam conduzidos não no sentido de se correlacionar experimentalmente os parâmetros relevantes, mas sim no sentido de se verificar, ajustar e limitar a validade das teorias existentes para a avaliação das perdas.

d - Análise do escoamento potencial em rotores de fluxo misto (diagonais).

Um trabalho deste tipo teria por objetivo avaliar certos efeitos tridimensionais inerentes ao escoamento em rotores diagonais. A sugestão que se faz é a da aplicação do conceito de escoamento quasi-tridimensional contida no trabalho de Schilhansl [15]. Desta forma, as superfícies de corrente do escoamento seriam consideradas superfícies de revolução, e suas intersecções com as pás seriam mapeadas em planos normais ao eixo de rotação. Neste ponto, diferentemente de Schilhansl, o escoamento potencial em cada plano transformado seria analisado através de um método análogo ao desenvolvido no presente trabalho, utilizando-se uma distribuição única de vórtices sobre o contorno da pá, de intensidade determinada pelo método dos painéis. Por conseguinte, as dificuldades numéricas na computação do campo de velocidades induzidas seriam bem menores do que as que teve Schilhansl, uma vez que os problemas decorrentes de indeterminações e não analiticidades estariam superados.

## APÊNDICE A - Algumas Formas Particulares de Distribuição de Singularidades

O método das singularidades se baseia na distribuição adequada de fontes, sumidouros e vórtices sobre a superfície do obstáculo através do qual se analisa o escoamento potencial. Essa distribuição simula o efeito do obstáculo, introduzindo um campo de velocidades induzidas que depende da forma, da intensidade e do tipo das singularidades que se distribuem.

Ao se empregar o método dos painéis, a superfície do obstáculo é discretizada em elementos de superfície (painéis) de geometria arbitrária sobre os quais se admite uma distribuição de singularidades de forma e tipo fixados, sendo a intensidade estabelecida através das condições de contorno e de continuidade.

É necessário, pois, que se analise algumas formas particulares de distribuição de singularidades, antes que se formule efetivamente o problema do escoamento potencial através de um obstáculo, pelo método dos painéis. Este anexo se propõe a isto, com relação aos escoamentos potenciais bidimensionais.

Segundo a referência [6], a velocidade complexa conjugada induzida por uma linha de singularidades  $s$  de intensidade complexa  $g(s)$ , desde A até B, é dada por (Figura A.1)

$$\bar{c}_s(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{s_A}^{s_B} \frac{g(s)}{z - \zeta} ds, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\zeta$  é o ponto genérico da singularidade e  $z$  é o ponto onde se calcula a velocidade induzida. A intensidade complexa de singularidades  $g(s)$  é dada por

$$g(s) = q + i\gamma, \quad (\text{A.2})$$

com  $q$  representando a densidade de fontes e sumidouros e  $\gamma$  a densidade de vórtices. Convém lembrar ainda das definições destas densidades, isto é:

$$q = \frac{dQ}{ds} , \quad (\text{A.3})$$

corresponde à vazão local ( $Q$ ) por unidade de comprimento de linha, e

$$\gamma = \frac{d\Gamma}{ds} , \quad (\text{A.4})$$

corresponde à circulação local ( $\Gamma$ ) por unidade de comprimento de linha. A condição de continuidade e o cálculo da circulação total introduzida pelos vórtices ao longo da linha AB decorrem destas definições; respectivamente

$$Q = \int_A^B q ds = 0 \quad (\text{A.5})$$

e

$$\Gamma = \int_A^B \gamma ds . \quad (\text{A.6})$$

O cálculo da integral da equação (A.1) pode ser literalmente efetuado desde que se conheçam as formas da linha  $s$  e da distribuição  $g(s)$ . Da Figura A.1 observa-se que, de uma maneira geral, é válido escrever que

$$ds = d\zeta e^{-i\alpha} .$$

Desta forma, a equação (A.1) pode ser escrita como

$$\bar{c}_s(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{z_A}^{z_B} \frac{g(\zeta) e^{-i\alpha} d\zeta}{z - \zeta} . \quad (\text{A.8})$$

Se a linha onde se distribuem as singularidades for um segmento de reta, Figura A.1,  $\alpha$  é um valor constante, resultando que

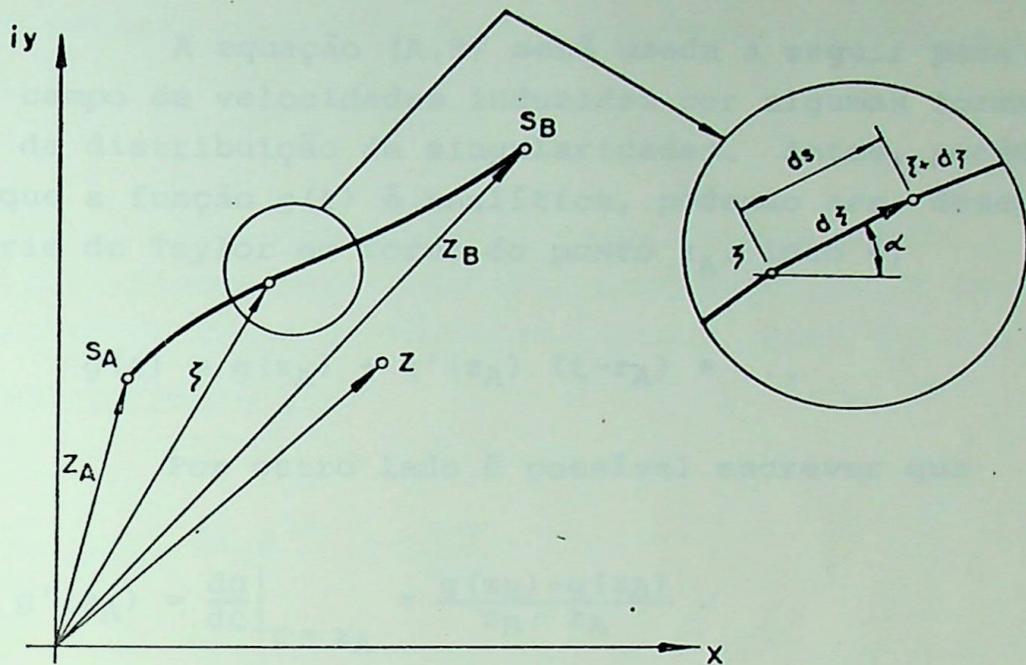


FIGURA A.1 - LINHA GENÉRICA NO PLANO COMPLEXO Z

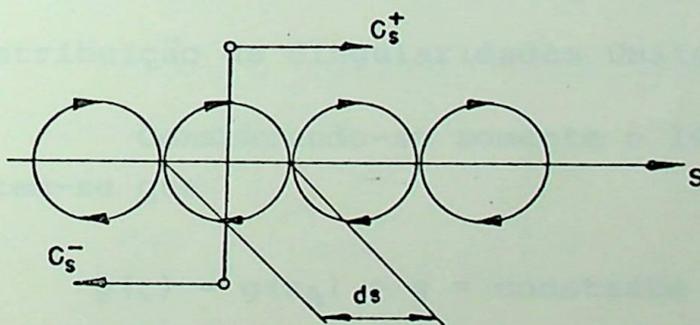


FIGURA A.2 DESCONTINUIDADE IMPOSTA POR UMA LINHA DE VÓRTICES GENÉRICA SOBRE O CAMPO DE VELOCIDADES

$$\bar{c}_S(z) = \frac{e^{-i\alpha}}{2\pi} \int_{z_A}^{z_B} \frac{g(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta. \quad (\text{A.9})$$

A equação (A.9) será usada a seguir para se determinar o campo de velocidades induzidas por algumas formas particulares da distribuição de singularidades. Antes, porém, lembre-se que a função  $g(\zeta)$  é analítica, podendo ser desenvolvida numa série de Taylor em torno do ponto  $z_A$ , isto é,

$$g(\zeta) = g(z_A) + g'(z_A) (\zeta - z_A) + \dots \quad (\text{A.10})$$

Por outro lado é possível escrever que

$$g'(z_A) = \left. \frac{dg}{d\zeta} \right|_{\zeta = z_A} \approx \frac{g(z_B) - g(z_A)}{z_B - z_A}. \quad (\text{A.11})$$

Combinando as equações (A.10) e (A.11), obtém-se, como aproximação, que

$$g(\zeta) \approx g(z_A) + \frac{g(z_B) - g(z_A)}{z_B - z_A} (\zeta - z_A). \quad (\text{A.12})$$

#### A.1 - Distribuição de Singularidades Uniforme

Considerando-se somente o 1º termo da equação (A.12), tem-se que

$$g(\zeta) = g(z_A) = g = \text{constante},$$

isto é, considera-se uma distribuição de singularidades uniforme.

Assim, a equação (A.9) fica na forma

$$\bar{c}_S(z) = \frac{g e^{-i\alpha}}{2\pi} \int_{z_A}^{z_B} \frac{d\zeta}{z-\zeta} = \frac{g e^{-i\alpha}}{2\pi} \ln \left( \frac{z-z_A}{z-z_B} \right). \quad (\text{A.13})$$

Observa-se que a velocidade complexa pode assumir valores múltiplos, pela própria definição do logaritmo natural complexo. Para o problema físico em questão, consideram-se so mente os valores compreendidos no intervalo correspondente a

$$-\pi \leq \arg \bar{c}_s \leq \pi . \quad (\text{A.14})$$

Para exemplificar este aspecto com mais propriedade, é conveniente particularizar a equação (A.13) para o caso de distribuição única de vórtices, isto é, para  $g = i\gamma$ .

Neste caso obtem-se que:

$$\bar{c}_{s\gamma}(z) = \frac{i\gamma \bar{e}^{-i\alpha}}{2\pi} \ln \left( \frac{z-z_A}{z-z_B} \right). \quad (\text{A.15})$$

No centro do segmento de reta, isto é, no ponto médio  $z_m = \frac{z_A+z_B}{2}$ , tem-se que

$$\bar{c}_{s\gamma}(z_m) = \frac{i\gamma \bar{e}^{-i\alpha}}{2\pi} \ln(-1) = \frac{i\gamma \bar{e}^{-i\alpha}}{2\pi} \ln[e^{\mp i(2k+1)\pi}], \quad \text{com} \\ k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.16})$$

Para o problema físico, porém, interessa somente o caso  $k = 0$ , que fornece

$$\bar{c}_{s\gamma}(z_m) = \frac{i\gamma \bar{e}^{-i\alpha}}{2\pi} \ln[e^{\mp i\pi}] = \frac{i\gamma \bar{e}^{-i\alpha}}{2\pi} (\mp i\pi) = \pm \frac{\gamma}{2} \bar{e}^{-i\alpha} \quad (\text{A.17})$$

Logo, a velocidade complexa no ponto  $z_m$  é dada por

$$c_{s\gamma}(z_m) = \pm \frac{\gamma}{2} e^{i\alpha}. \quad (\text{A.18})$$

A equação (A.18) mostra que a velocidade induzida por uma distribuição uniforme de vórtices  $\gamma$  sobre um segmento

to de reta assume, no centro do mesmo, o valor  $\pm \gamma/2$  na direção do segmento. O sinal (+) corresponde ao lado superior do segmento e o sinal (-) ao lado inferior. Este é o resultado conhecido correspondente à descontinuidade tangencial imposta por uma linha de vórtices genérica sobre a velocidade do escoamento, e é a representação matemática do desequilíbrio dinâmico que ocorre em problemas deste tipo.

Com referência à Figura A.2, o resultado da equação (A.18) poderia ser obtido diretamente, considerando a circulação introduzida por uma linha de vórtices genérica de densidade  $\gamma$  ao longo do comprimento infinitesimal  $ds$ . Segundo a equação (A.4) e da definição de circulação, vem que:

$$d\Gamma = \gamma ds = (c_s^+ - c_s^-) ds . \quad (\text{A.19})$$

Considerando ainda que  $c_s^+ = -c_s^-$ , resulta da equação (A.19) que

$$c_s^+ = -c_s^- = \frac{\gamma}{2} , \quad (\text{A.20})$$

resultado que concorda com as observações feitas anteriormente.

## A.2 - Distribuição de Singularidades Linear

Considerando agora os dois termos da equação (A.12), emprega-se uma distribuição referida neste trabalho como linear. Substituindo a equação (A.12) na equação (A.9), obtém-se que

$$\begin{aligned} \bar{c}_s(z) &= \frac{e^{-i\alpha}}{2\pi} \int_{z_A}^{z_B} \left[ g(z_A) + \frac{g(z_B) - g(z_A)}{z_B - z_A} (\zeta - z_A) \right] \left( \frac{1}{z - \zeta} \right) d\zeta = \\ &= \frac{e^{-i\alpha}}{2\pi} \left\{ g(z_A) \left[ \frac{z_B - z}{z_B - z_A} \ln \left( \frac{z - z_A}{z - z_B} \right) + 1 \right] + g(z_B) \left[ \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \ln \left( \frac{z - z_A}{z - z_B} \right) - 1 \right] \right\} . \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Analogamente ao caso da distribuição uniforme, con

sidere a particularização de distribuição única de vórtices, isto é,  $g = i\gamma$ . Tem-se que

$$\begin{aligned} \bar{c}_{s\gamma}(z) = & \frac{i\bar{e}^{-i\alpha}}{2\pi} \left\{ \gamma(z_A) \left[ \frac{z_B - z}{z_B - z_A} \ln \left( \frac{z - z_A}{z - z_B} \right) + 1 \right] + \right. \\ & \left. + \gamma(z_B) \left[ \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \ln \left( \frac{z - z_A}{z - z_B} \right) - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

No ponto médio,  $z_m = \frac{z_A + z_B}{2}$ , obtém-se que

$$\bar{c}_{s\gamma}(z_m) = \bar{e}^{-i\alpha} \left\{ \pm \frac{1}{4} [\gamma(z_A) + \gamma(z_B)] + \frac{i}{2\pi} [\gamma(z_A) - \gamma(z_B)] \right\}, \quad (\text{A.23})$$

onde foram feitas as mesmas considerações a respeito do intervalo (A.14).

A velocidade complexa induzida no ponto  $z_m$  é, portanto,

$$c_{s\gamma}(z_m) = e^{i\alpha} \left\{ \pm \frac{1}{4} [\gamma(z_A) + \gamma(z_B)] + \frac{i}{2\pi} [\gamma(z_B) - \gamma(z_A)] \right\}. \quad (\text{A.24})$$

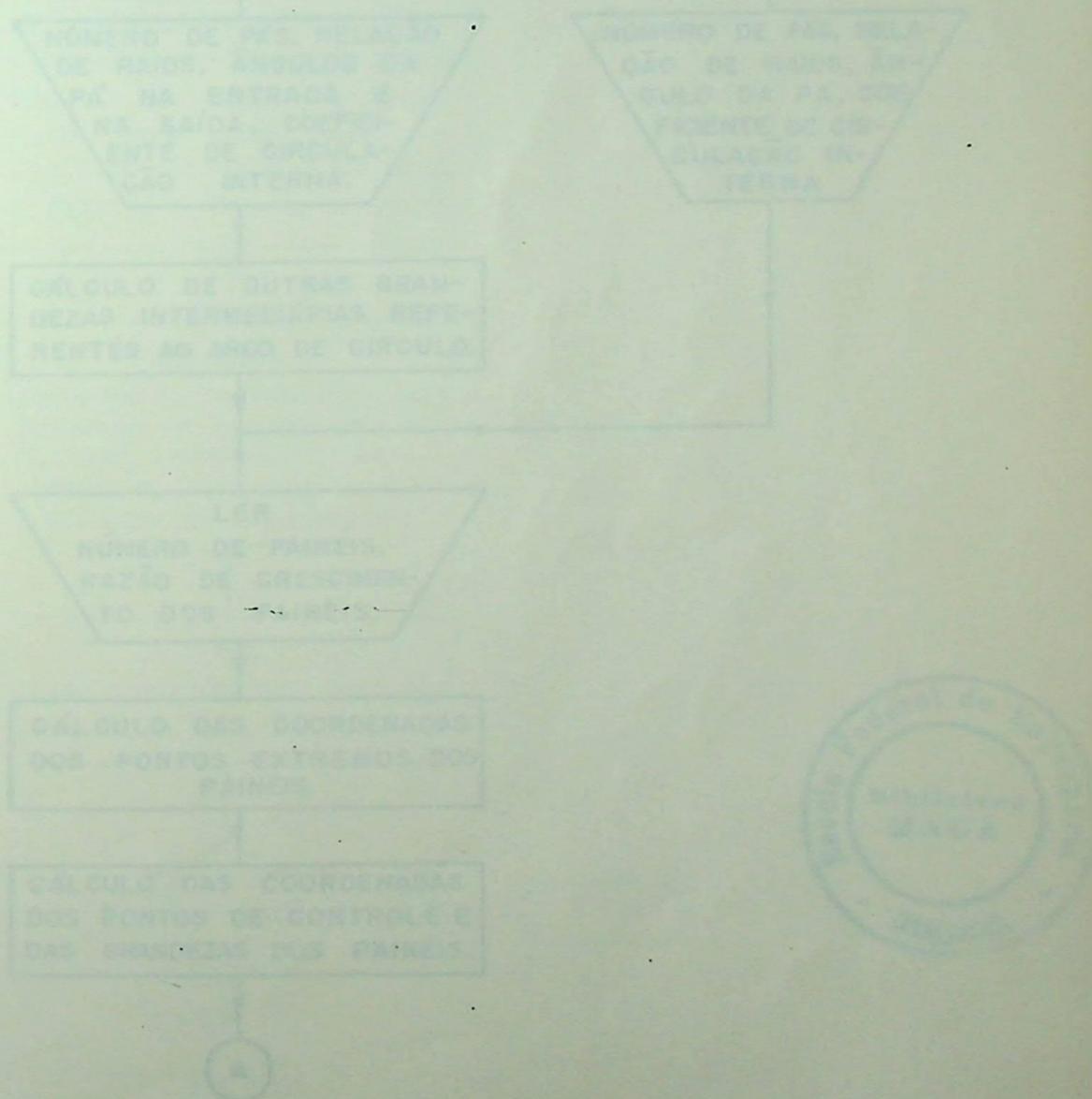
Observa-se na equação (A.24) o mesmo efeito de descontinuidade no campo de velocidade que foi observado no caso da distribuição de vórtices uniforme. Considerando que no ponto médio  $z_m$  o valor da densidade de vórtices é  $\gamma_m = (\gamma_A + \gamma_B)/2$ , verifica-se que

$$c_{s\gamma}(z_m) = e^{i\alpha} \left\{ \pm \frac{\gamma_m}{2} + \frac{i}{2\pi} [\gamma(z_B) - \gamma(z_A)] \right\}. \quad (\text{A.25})$$

Existe, portanto, uma descontinuidade tangencial de valor  $\gamma_m$  sobre o campo de velocidades. O termo tangencial se refere à linha de singularidades, isto é, tangente à linha.

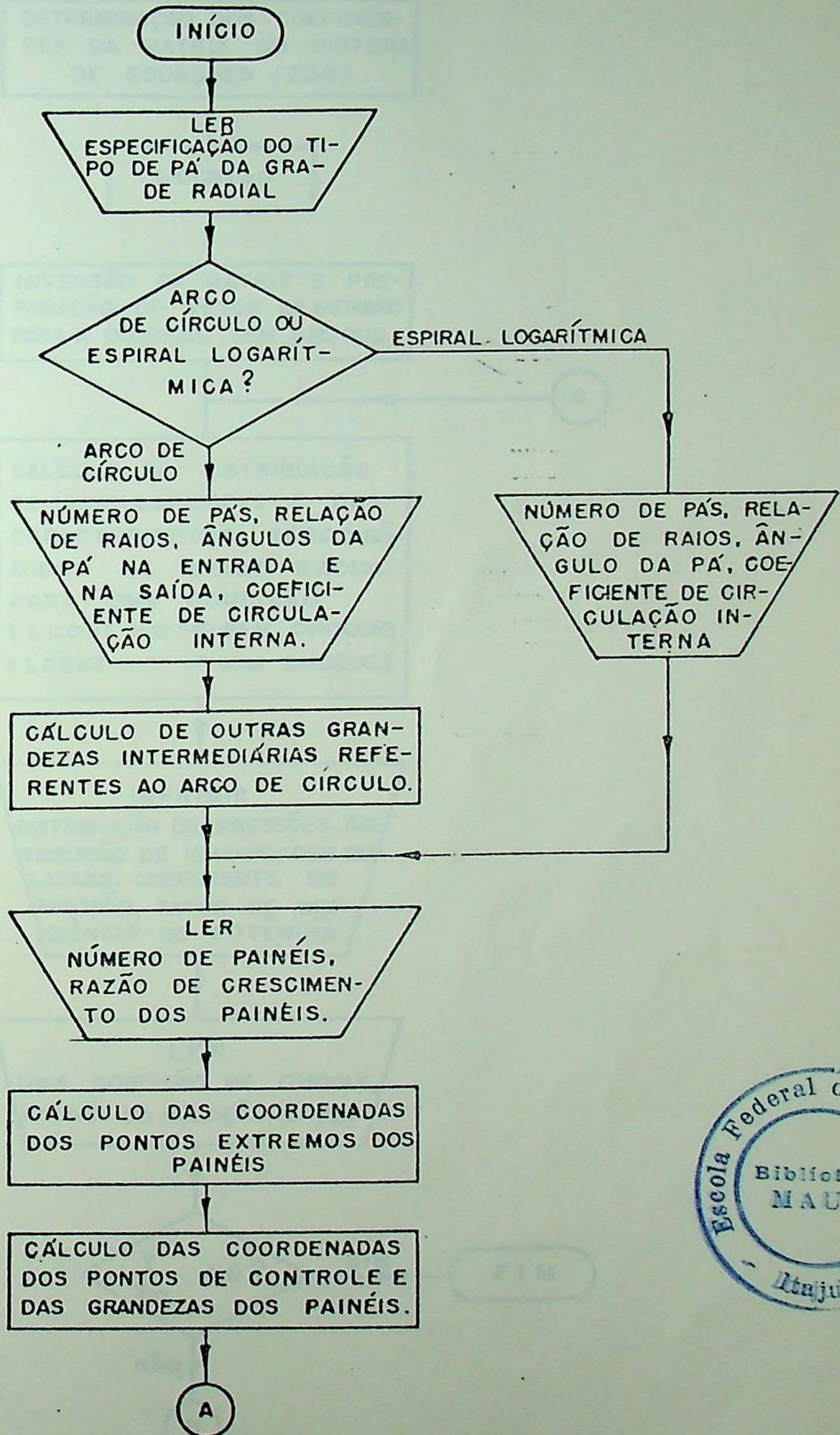
NOTA: Verifica-se que, para qualquer forma de distribuição que se utilize, os pontos extremos do segmento de reta onde se distribuem as singularidades são pontos não analíticos. Isso pode ser observado fazendo  $z = z_A$  ou  $z = z_B$  nas equações (A.13) e (A.21).

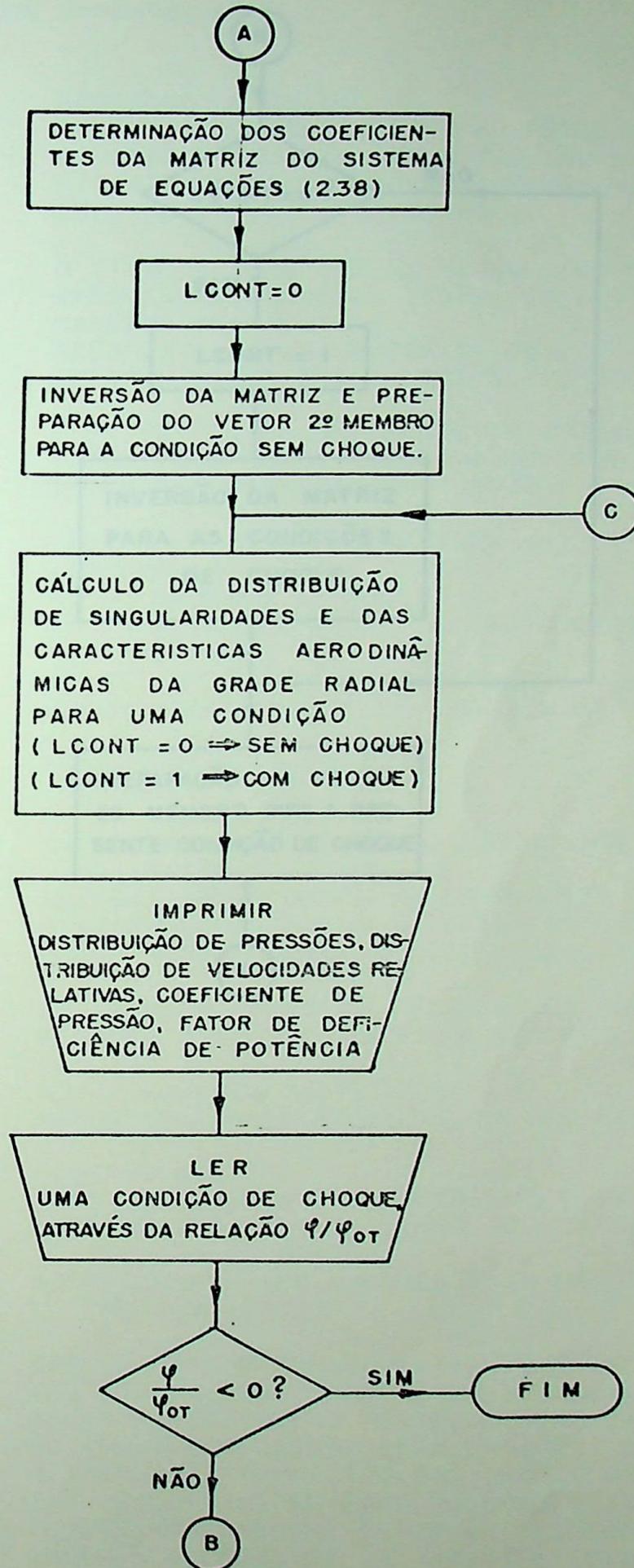
A não analiticidade só não é verificada se o valor da densidade de singularidades for nulo nestes pontos. Nesta condição, não só desaparece a singularidade como deixa de existir o efeito da descontinuidade, já citado. Esta é uma condição que deve ser imposta nos bordos de fuga de perfis aerodinâmicos, conhecida como condição de Kutta (op. cit. [11]). Desta forma, garante-se uma circulação única, necessária para que o escoamento possua velocidade finita e contínua no bordo de fuga.



## APÊNDICE B - Fluxograma e Programa Computacional

## B.1 - Fluxograma







## B.2 - Programa Computacional

```
1 C PROGRAMA GRADRAD
2 C CALCULA AS CARACTERISTICAS AERODINAMICAS
3 C DE GRADES RADIAIS GERADORAS COM PAS INFI-
4 C NITAMENTE FINAS TRACADAS EM ARCO DE CIR-
5 C CULO OU ESPIRAL LOGARITMICA.
6 C
7 C O TIPO DE PA E ESPECIFICADO LOGO NO INICIO
8 C ATRAVES DA VARIAVEL ITIPO, DA SEGUINTE
9 C MANEIRA:
10 C ARCO DE CIRCULO- FAZER ITIPO=1
11 C ESPIRAL LOGARITMICA- FAZER ITIPO=0
12 C
13 C PARA INICIO DOS CALCULOS OS SEGUINTE
14 C PARAMETROS GEOMETRICOS DA GRADE E DA PA
15 C DEVEM SER FORNECIDOS:
16 C
17 C PARA A ESPIRAL LOGARITMICA
18 C (DECLARACAO 131 )
19 C N =NUMERO DE PAS
20 C R4 =RELACAO ENTRE OS RAIOS INTERNO E
21 C EXTERNO
22 C BETAG =ANGULO DA PA EM GRAUS
23 C OMEGA =COEFICIENTE DE CIRCULACAO INTERNA
24 C
25 C PARA O ARCO DE CIRCULO
26 C (DECLARACAO 105 )
27 C N =NUMERO DE PAS
28 C R4 =RELACAO ENTRE OS RAIOS INTERNO E
29 C EXTERNO
30 C BETAG4=ANGULO DA PA NA ENTRADACEM GRAUS)
31 C BETAG5=ANGULO DA PA NA SAIDACEM GRAUS)
32 C OMEGA =COEFICIENTE DE CIRCULACAO INTERNA
33 C
34 C EM SEGUIDA, DEVE-SE FORNECER OS PARANE-
35 C TROS DA DISCRETIZACAO DAS PAS(DECLARA-
36 C CAO 134 ), OU SEJA:
37 C M =NUMERO DE PAINES
38 C FATOR =RAZAO DE CRESCIMENTO DOS PAINES
39 C
40 C OBSERVACOES:
41 C 1) O VALOR DE M DEVE SEMPRE SER IGUAL A
42 C DIMENSAO DADA A MATRIZ DE COEFICIEN-
43 C TES, NO PROGRAMA
44 C 2) RECOMENDAM-SE VALORES PARA FATOR EN-
45 C TRE 1.05 E 1.3
46 C
47 C COM OS PARAMETROS GEOMETRICOS E DE DIS-
48 C CRETIZACAO, CALCULAN-SE E IMPRIMEN-SE
49 C AS CARACTERISTICAS AERODINAMICAS PARA
50 C AS CONDICoes UTINAS (SEM CHOQUE). PARA
51 C O CALCULO E IMPRESSAO DAS CARACTERISTI-
52 C CAS AERODINAMICAS PARA AS CONDICoes COM
53 C CHOQUE NA ENTRADA, DEVEM-SE FORNECER OS
54 C VALORES SUCESSIVOS DA VARIAVEL "CHOQUE"
55 C (CHOQUE=RELACAO ENTRE O COEFICIENTE DE
56 C VAZAO GENERICO E O COEFICIENTE DE VAZAO
57 C PARA ENTRADA SEM CHOQUE).
```

```

58 C APOS O CALCULO DE TODAS AS CONDICÕES DE
59 C CHOQUE DESEJADAS, FAZ-SE CHOQUE=-1.,FIN-
60 C DANDO O PROCESSAMENTO.
61 C
62 C PARA CADA CONDIÇÃO (COM OU SEM CHOQUE),
63 C OS SEGUINTE RESULTADOS SÃO IMPRESSOS:
64 C
65 C R =RAIO DOS PONTOS EXTREMOS DOS
66 C PAINÉIS
67 C TETA =ÂNGULO POLAR CORRESPONDENTE AOS
68 C PONTOS EXTREMOS DOS PAINÉIS
69 C GAMA =VALOR DA DENSIDADE DE VORTICES
70 C NOS PONTOS EXTREMOS DOS PAINÉIS
71 C RC =RAIO DOS PONTOS DE CONTROLE
72 C PP =PRESSÃO NOS PONTOS DE CONTROLE-
73 C LADO DE PRESSÃO
74 C PS =PRESSÃO NOS PONTOS DE CONTROLE-
75 C LADO DE SUCCÃO
76 C WP =VELOCIDADE RELATIVA NOS PONTOS
77 C DE CONTROLE-LADO DE PRESSÃO
78 C WS =VELOCIDADE RELATIVA NOS PONTOS
79 C DE CONTROLE-LADO DE SUCCÃO
80 C FI =COEFICIENTE DE VAZÃO
81 C PSI =COEFICIENTE DE PRESSÃO
82 C MU =FATOR DE DEFICIÊNCIA DE
83 C POTÊNCIA
84 C
85 C
86 C INICIO DO PROGRAMA
87 C
88 C SYSTEM INTRINSIC INVERT
89 C TIPO E DIMENSÃO DAS VARIÁVEIS
90 C COMPLEX DPI,AUX4,Z(21),ZC(20),CLOG,AUX,ZCK,Z1,Z2,
91 C *SOMAX,SOMAY,AUX2,CENP,AUX1,XKJ,YKJ
92 C REAL CABS,MU
93 C DIMENSION R(21),TETA(21),X(21),Y(21),XC(20),
94 C *TETAC(20),DS(20),ALFAC(20),BETAC(20),AR(20,20),
95 C *ATETA(20,20),BTETA(20,20),A(20,20),B(20,20),
96 C *GAMA(21),YC(20),RC(20),BR(20,20),V(20,20),C(20)
97 C CONSTANTES IMPORTANTES
98 C PI=3.1415927
99 C DPI=(6.2831853,0.)
100 C IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE PA
101 C ACCEPT ITIPO
102 C IF(ITIPO.EQ.0) GO TO 512
103 C LEITURA DE DADOS PARA A GRADE RADIAL
104 C COM PAS EM ARCO DE CÍRCULO
105 C ACCEPT N,R4,BETAG4,BETAG5,OMEGA
106 C CÁLCULO DOS PARÂMETROS DO
107 C ARCO DE CÍRCULO
108 C BETA4=BETAG4*PI/180.
109 C BETAS=BETAG5*PI/180.
110 C BETAE=BETAS
111 C TGAMA=(SIN(BETA4)+SIN(BETAS)/R4)/
112 C *(COS(BETAS)/R4-COS(BETA4))
113 C IF(TGAMA.GT.0.)GO TO 414
114 C TGAMA=-TGAMA

```

```

115 414 AGAMA=ATAN(TGAMA)
116 TETAS=PI+BETAS-2.*AGAMA-BETA4
117 TLAMBDA=SIN(TETAS)/(COS(TETAS)-R4)
118 ALAMBDA=ATAN(TLAMBDA)
119 IF(ALAMBDA.GE.0.)GO TO 888
120 ALAMBDA=ALAMBDA+PI
121 888 AL=SQRT(1.+R4*R4-2.*R4*COS(TETAS))
122 RBARRA=0.5*AL/COS(AGAMA)
123 EPSILON=PI-(AGAMA+ALAMBDA)
124 XAST=R4-RBARRA*COS(EPSILON)
125 YAST=RBARRA*SIN(EPSILON)
126 CSI=ATAN(XAST/YAST)
127 RAST=SQRT(XAST*XAST+YAST*YAST)
128 GO TO 417
129 C LEITURA DE DADOS PARA A GRADE RADIAL
130 C COM PAS EM ESPIRAL LOGARITIMICA
131 512 ACCEPT N,R4,BETAG,OMEGA
132 BETA=BETAG*PI/180.
133 BETAE=BETA
134 417 ACCEPT M,FATOR
135 S=0.5*(1.-R4)
136 AJU=S*(FATOR-1.)/(FATOR**((M/2)-1.))
137 MM=M+1
138 DELTA = 2.*PI/N
139 AUX4 = CMPLX(0.,DELTA)
140 AUX4=CEXP(AUX4)
141 C CALCULO DAS COORDENADAS DOS
142 C PONTOS EXTREMOS DOS PAINEIS
143 DO 1 I=1,MM
144 IF(I.EQ.1) GO TO 400
145 IF(I-(M/2+1))100,100,200
146 100 R(I)=R(I-1)+AJU*FATOR**(I-2)
147 GO TO 300
148 200 R(I)=R(I-1)+AJU*FATOR**(MM-I)
149 GO TO 300
150 400 R(I)=R4
151 300 IF(ITIPO.EQ.0) GO TO 313
152 COSFIA=(RAST*RAST+R(I)*R(I)-RBARRA*RBARRA)/
153 *(2.*RAST*R(I))
154 TANFIA=SQRT(1.-COSFIA**2)/COSFIA
155 IF(COSFIA.GE.0.)GO TO 999
156 TETA(I)=-0.5*PI-CSI-ATAN(TANFIA)
157 GO TO 777
158 999 TETA(I)=0.5*PI-CSI-ATAN(TANFIA)
159 GO TO 777
160 313 TETA(I)=1./TAN(BETA)*ALOG(R(I)/R4)
161 777 X(I)=R(I)*COS(TETA(I))
162 Y(I)=R(I)*SIN(TETA(I))
163 Z(I)=CMPLX(X(I),Y(I))
164 1 CONTINUE
165 C CALCULO DAS COORDENADAS DOS PONTOS DE
166 C CONTROLE E DAS GRANDEZAS DOS PAINEIS
167 DO 2 I=1,M
168 XC(I)=0.5*(X(I)+X(I+1))
169 YC(I)=0.5*(Y(I)+Y(I+1))
170 ZC(I)=CMPLX(XC(I),YC(I))
171 RC(I)=CABS(ZC(I))

```

```

172     AUX=CLOG(ZC(I))
173     TETAC(I)=AIMAG(AUX)
174     AUX=Z(I+1)-Z(I)
175     DS(I)=CABS(AUX)
176     AUX=CLOG(AUX)
177     ALFAC(I)=AIMAG(AUX)
178     BETAC(I)=0.5*PI-ALFAC(I)+TETAC(I)
179     2 CONTINUE
180 C     MONTAGEM DA MATRIZ
181     DO 3 K=1,M
182     DO 3 J=1,M
183     ZC=ZC(K)
184     Z1=Z(J)
185     Z2=Z(J+1)
186     ALFA=ALFAC(J)
187     SOMAX=(0.,0.)
188     SOMAY=(0.,0.)
189     DO 9 L=1,N
190     IF(L.EQ.1 AND.K.EQ.J) GO TO 8
191     AUX8=-ALFA
192     AUX1=CMPLX(0.,AUX8)
193     AUX1=CEXP(AUX1)
194     AUX2=CLOG((ZC-Z1)/(ZC-Z2))
195     SOMAX=SOMAX + AUX1*((Z2-ZC)/(Z2-Z1))*AUX2
196     *+(1.,0.)
197     SOMAY=SOMAY + AUX1*((ZC-Z1)/(Z2-Z1))*AUX2
198     *-(1.,0.)
199     8 Z1=Z1*AUX4
200     Z2=Z2*AUX4
201     ALFA=ALFA+DELTA
202     9 CONTINUE
203     AUX8=-TETAC(K)
204     AUX=CMPLX(0.,AUX8)
205     AUX=CEXP(AUX)
206     SOMAX=((0.,1.)/DPI)*SOMAX
207     SOMAY=((0.,1.)/DPI)*SOMAY
208     XKJ=AUX * CONJG(SOMAX)
209     YKJ=AUX * CONJG(SOMAY)
210     AR(K,J)=REAL(XKJ)
211     BR(K,J)=REAL(YKJ)
212     ATETAC(K,J)=AIMAG(XKJ)
213     BTETAC(K,J)=AIMAG(YKJ)
214     A(K,J)=(1./RC(K))*(TAN(BETAC(K))*ATETAC(K,J)
215     *-AR(K,J))
216     B(K,J)=(1./RC(K))*(TAN(BETAC(K))*BTETAC(K,J)
217     *-BR(K,J))
218     IF(K.NE.J) GO TO 3
219     AR(K,J)=AR(K,J)+1./(2.*PI)*COS(BETAC(K))
220     BR(K,J)=BR(K,J)-1./(2.*PI)*COS(BETAC(K))
221     ATETAC(K,J)=ATETAC(K,J)-1./(2.*PI)*SIN(BETAC(K))
222     BTETAC(K,J)=BTETAC(K,J)+1./(2.*PI)*SIN(BETAC(K))
223     AUX8=1./(2.*PI*RC(K))*COS(BETAC(K))
224     A(K,J)=A(K,J)-AUX8
225     B(K,J)=B(K,J)+AUX8
226     3 CONTINUE
227     DO 4 K=1,M
228     VK(1)=(-1./RC(K))/RC(K)

```

```

229      4 CONTINUE
230      DO 5 K=1,M
231      DO 5 J=2,M
232      V(K,J)=A(K,J)+B(K,J-1)
233      5 CONTINUE
234      C      INVERSAO DA MATRIZ
235      CALL INVERT(M,V,KK)
236      DISPLAY KK
237      GAMA(M+1)=0.
238      DO 6 K=1,M
239      C(K)=-TAN(BETAC(K))*(1.+(OMEGA/RO(K))/RO(K))
240      6 CONTINUE
241      LCONT=0
242      C      CALCULO DA DISTRIBUICAO DE SINGULARIDADES
243      C      E DAS CARACTERISTICAS AERODINAMICAS DA
244      C      GRADE RADIAL E IMPRESSAO DOS RESULTADOS
245      112 IF(ITEPO.EQ.0) GO TO 218
246      C      ARCO DE CIRCULO
247      DISPLAY "GRADE RADIAL COM PAS EM ARCO DE CIRCULO"
248      DISPLAY "      RESULTADOS PARA R4/R5=",R4," BETA4=",
249      *BETA4," BETA5=",BETA5,"BETA6=",BETA6,"N=",N,"OMEGA=",OMEGA
250      GO TO 718
251      C      ESPIRAL LOGARITMICA
252      218 DISPLAY "GRADE RADIAL COM PAS EM ESPIRAL LOGARITMICA"
253      DISPLAY "      RESULTADOS PARA R4/R5=",R4," BETA=",
254      *BETA,"N=",N,"OMEGA=",OMEGA
255      718 WRITE(6,703)
256      703 FORMAT(1X, //25X,"R",11X,"TETA",9X,"GAMA",11X,"RO",
257      *10X,"PP",11X,"PS",11X,"WP",11X,"WS",//)
258      DO 10 K=1,M
259      GAMA(K)=0.
260      DO 11 J=1,M
261      GAMA(K)=GAMA(K)+V(K,J)*C(J)
262      11 CONTINUE
263      10 CONTINUE
264      IF(LCONT.EQ.1) GO TO 116
265      FIOT=GAMA(1)
266      FI=GAMA(1)
267      GAMA(1)=0.
268      CHOQUE=1.
269      116 DO 91 K=1,M
270      CSR=0.
271      CSTETA=0.
272      DO 90 J=1,M
273      CSR=CSR + AR(K,J)*GAMA(J) + BR(K,J)*GAMA(J+1)
274      CSTETA=CSTETA+ATETA(K,J)*GAMA(J)+BTETA(K,J)*
275      *GAMA(J-1)
276      90 CONTINUE
277      ADR=0.25*SIN(BETAC(K))*(GAMA(K)+GAMA(K+1))
278      ADTETA=0.25*COS(BETAC(K))*(GAMA(K)+GAMA(K+1))
279      CSR=CSR-ADR
280      CSRS=CSR+ADR
281      CSTETAP=CSTETA-ADTETA
282      CSTETAS=CSTETA+ADTETA
283      WP=(FI/RO(K)+CSR)**2 + (RO(K)+OMEGA/RO(K)+
284      *CSTETAP)**2
285      WS=(FI/RO(K)+CSRS)**2 + (RO(K)+OMEGA/RO(K)+

```

```

286      *CSTETAS)**2
287      PP=RC(K)*RC(K)-WP
288      PS=RC(K)*RC(K)-WS
289      WP=SQRT(WP)
290      WS=SQRT(WS)
291      DISPLAY R(K),TET(K),GAM(K),R(K),PP,PS,WP,WS
292  91 CONTINUE
293      PSI=0.
294      DO 50 K=1,M
295      PSI=PSI+(GAM(K)+GAM(K+1))*DS(K)
296  50 CONTINUE
297      PSI=0.5*PSI*N/PI
298      PSINF=2.*(1.-1./TAN(BETA)*FI-OMEGA)
299      MU=PSI/PSINF
300      DISPLAY "      PSI= ",PSI,"      FI= ",FI,"      FI/FIOT=",
301      *CHOQUE,"MU=",MU
302      DISPLAY "OBSERVACAO: GAM(R=1)=0 (COND. DE KUTTA)"
303      LEITURA DE UMA CONDICAO DE CHOQUE
304      E TESTE DE FINAL
305      ACCEPT CHOQUE
306      IF(CHOQUE.LT.0.) STOP
307      FI=CHOQUE*FIOT
308      IF(LCONT.EQ.1) GO TO 114
309      LCONT=1
310      DO 20 K=1,M
311      V(K,1)=A(K,1)
312  20 CONTINUE
313      DO 25 K=1,M
314      DO 25 J=2,M
315      V(K,J)=A(K,J)+B(K,J-1)
316  25 CONTINUE
317      INVERSAO DA MATRIZ
318      CALL INVERT(M,V,KK)
319      DISPLAY KK
320  114 DO 30 K=1,M
321      C(K)=-TAN(BETA(C(K)))*(1.+(OMEGA/RC(K))/RC(K))+
322      *(FI/RC(K))/RC(K)
323  30 CONTINUE
324      WRITE(6,57)
325  57 FORMAT(1H1,///)
326      GO TO 112
327      END

```

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BALJÉ, O.E.; Loss and Flow Path Studies on Centrifugal Compressors. Journal of Engineering for Power, Trans. ASME, p. 275-300, july 1970.
- [2] BALJÉ, O.E.; A Flow Model for Centrifugal Compressor Rotors. Journal of Engineering for Power, Trans. ASME, Vol. 100, p. 148-158, 1978.
- [3] BETZ, A.; FLÜGGE-LOTZ, I.; Berechnung der Schaufeln von Kreiselaedern (Cálculo das Pás de Turbomáquinas). Ingenieur - Archiv, vol. 9, p. 486-501, 1938.
- [4] BUSEMANN, A.; Das Foerderhoehenverhæeltnis radialer Kreiselpuapem mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln (Trabalho Específico de Bombas Radiais com Pás em Espiral Logarítmica). Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 8, p. 372-384, 1928.
- [5] DETTMERING, W.; Untersuchung der Strömung an Schaufelgittern mit Hilfe der Singularitätenmethode und deren experimentelle Nachprüfung (Pesquisa do Escoamento através de Grades por meio do Método das Singularidades e Verificação Experimental). Brennstoff-Wärme-Kraft, vol.14, p.409-419, 1962.
- [6] FERNANDES, E.C.; Análise do Escoamento em Máquinas de Fluxo Segundo o Método das Singularidades. ITA-IEME (Publicação Interna), 1978.
- [7] FERREIRA, J. G.; Um Processo para o Cálculo de Máquinas Geradoras Radiais. Tese de Mestrado, EFEI-Itajubá, 1973.
- [8] HENN, E.L.; Influência do Número Finito de Pás em Máquinas de Fluxo. Tese de Mestrado, EFEI-Itajubá, 1972.
- [9] HESS, J.L.; SMITH, A.M.O.; Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies. Progress in Aeronautical Sciences, vol. 8, p.1-138, 1966.

- [10] ISAY, W.H.; Beitrag zur Potentialströmung durch radiale Schaufelgitter. (Contribuição para o Escoamento Potencial em Grades Radiais). Ingenier-Archiv, vol. 32, p. 203-210, 1954.
- [11] KARAMCHETI, K.; Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics. John Wiley, New York, 1966.
- [12] MELLOR, G.L.; An Analysis of Axial Compressor Cascade Aerodynamics, Part I: Potential Flow Analysis with Complete Solutions for Symmetrically Cambered Airfoils Families. Journal of Basic Engineering, Trans. ASME, vol. 81, p. 362-378, 1959.
- [13] RIEGELS, F.; WEBER, J.; Beitrag zur Berechnung von Kreiselrädern mit nichtstoßfreiem Eintritt (Contribuição ao Cálculo de Rotores Radiais nas Condições de Entrada com Choque). Ingenieur-Archiv, vol.12, p.63-70, 1941.
- [14] SALOMON, L.B.R.; Cálculo Teórico do Escoamento em Máquinas de Fluxo Radiais. Tese de Mestrado, EFEI-ITAJUBÁ, - 1972.
- [15] SCHILHANSL, M.J.; Three-Dimensional Theory of Incompressible and Inviscid Flow Through Mixed Flow Turbomachines. Journal of Engineering for Power, Trans. ASME, p. 361-373, oct. 1965.
- [16] SCHLICHTING, H.; Boundary-Layer Theory, Mc Graw-Hill, New York, 1968.
- [17] SCHOLZ, N.; On the Calculation of Potential Flow Around Airfoils in Cascade. Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 18, nº 1, p. 68-69, 1951.
- [18] SCHULZ: W.; Das Foerderhoehenverhältniss radialer Kreiselumpen mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln (Trabalho Específico de Bombas Radiais com Pás em Espiral Logarítmica). Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 8, p. 10-17, 1928.

- [19] STAUFER, F.; Verfahren zur Bestimmung der Schaufel-Form um Laufender Kreisfoermiger Schaufelgitter (Método de Determinação da Forma das Pás de Grades Radiais Móveis). Wasserkraft und Wasserwirtschaft, vol. 31, p. 212, 1936.
- [20] WIESNER, F.J.; A Review of Slip Factors for Centrifugal Impellers. Journal of Engineering for Power, Trans.ASME, p. 558-572, oct. 1967.



DATA 26/08 / 1982  
PROC. \_\_\_\_\_  
PED. \_\_\_\_\_  
LIV. CPG/EFEE  
NCr\$ Jacinto

EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ  
8200185



NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA