

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Defeitos Secantes e o Teorema de Alexander e  
Hirschowitz**

**Vinicius Marcos Manfredini**  
**Orientador: Prof. Dr. Rick Antônio Rischer**

Itajubá - MG  
15 de Maio de 2023

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Defeitos Secantes e o Teorema de Alexander e  
Hirschowitz**

**Vinicius Marcos Manfredini**  
**Orientador: Prof. Dr. Rick Antônio Rischer**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UNIFEI, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências em Matemática.

**Área de Concentração: Topologia e Geometria**

Itajubá - MG  
15 de Maio de 2023

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família, por sua capacidade de acreditar e investir em mim. Mãe, seu cuidado e dedicação me deram, em alguns momentos, a esperança para seguir em frente. Pai, mesmo não estando mais aqui, carrego seus conselhos em cada escolha que faço. Ao meu irmão e minhas irmãs, obrigado por sempre incentivar e apoiar as minhas escolhas.

Ao meu orientador Rick pelos muitos dias de estudos, pela paciência e pela dedicação. A todos os professores do departamento de matemática que de alguma forma contribuíram nessa caminhada.

Agradeço também a minha companheira, Helen, que de forma especial e carinhosa me deu força e coragem, me apoiando nos momentos de dificuldades. A todos os amigos que fiz durante o curso, em especial, ao Cleilson.

Por fim, a Capes que me permitiu ter dedicação integral durante o mestrado.

## Resumo

Dada uma variedade projetiva, define-se a variedade  $h$ -secante como sendo o fecho da união de todos os espaços gerados por  $h$  pontos da variedade projetiva inicial. É dito que uma variedade projetiva é  $h$ -defeituosa se sua  $h$ -secante não tem a dimensão esperada. O problema central deste trabalho consiste em estudar os defeitos secantes, em especial das variedades de Veronese. Para isso, será apresentado o Teorema de Alexander e Hirschowitz, que classifica quais variedades de Veronese são defeituosas e quais não são defeituosas.

**Palavras-Chaves:** Variedade Projetiva;  $h$ -Secante; Defeitos Secantes; Variedades de Veronese; Teorema de Alexander e Hirschowitz.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Topologia</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Álgebra Comutativa</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Geometria Algébrica Clássica</b>	<b>26</b>
4.1	Variedades Algébricas Afins . . . . .	26
4.2	Variedades Algébricas Projetivas . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Variedades de Segre-Veronese</b>	<b>45</b>
<b>6</b>	<b>Defeitos Secantes</b>	<b>50</b>
6.1	Definições, Exemplos e o Teorema de Alexander e Hirschowitz . . . . .	50
6.2	Lema de Terracini . . . . .	52
<b>7</b>	<b>Polítopos, Simplexos e Algoritmos</b>	<b>62</b>
<b>8</b>	<b>Esquemas</b>	<b>70</b>
8.1	Feixes . . . . .	70
8.2	O Espectro de um Anel como um Feixe . . . . .	73
8.3	Morfismos de Feixes . . . . .	75
8.4	Esquemas . . . . .	79
<b>9</b>	<b>Sistemas Lineares</b>	<b>89</b>
9.1	Definições e Exemplos . . . . .	89
9.2	Relação entre Variedades de Veronese e Sistemas Lineares . . . . .	93
<b>10</b>	<b>Quádricas</b>	<b>97</b>
10.1	Hipersuperfícies Quádricas . . . . .	97
10.2	Relação Posto - Sistema Linear . . . . .	101
10.3	Casos Especiais . . . . .	102
<b>11</b>	<b>Sequências Exatas de Sistemas Lineares</b>	<b>106</b>
11.1	Restrição a um Esquema Finito . . . . .	107
11.2	Sequência Exata de Castelnuovo . . . . .	109
<b>12</b>	<b>Cúbicas</b>	<b>111</b>
<b>13</b>	<b>Vários Pontos Duplos e um Ponto Múltiplo</b>	<b>114</b>
<b>14</b>	<b>Degenerações</b>	<b>126</b>
<b>15</b>	<b>Quárticas</b>	<b>130</b>
<b>16</b>	<b>Prova do Teorema de Alexander e Hirschowitz</b>	<b>135</b>

# 1 Introdução

A Geometria Algébrica é uma área de pesquisa da matemática que utiliza as ferramentas e a linguagem da álgebra para resolver problemas da geometria. Um dos objetos de estudo da Geometria Algébrica são as variedades algébricas, que são dadas por zeros de polinômios, como retas, planos, hiperplanos, círculos e parábolas.

Este trabalho terá o objetivo de apresentar com mais detalhes as variedades algébricas, assim como, à variedade secante de uma variedade algébrica projetiva. A partir disso, o foco será o problema da dimensionalidade da variedade secante, em especial, sobre as variedades de Veronese.

Nos dois primeiros Capítulos serão apresentados conceitos básicos que usaremos durante o trabalho. O Capítulo 2 trata de aspectos topológicos como: espaços topológicos, funções contínuas e espaços topológicos irredutíveis. Já o Capítulo 3 é um estudo sobre Álgebra Comutativa, mais especificamente sobre alguns ideais importantes, módulos, anéis de frações, anéis Noetherianos e espectro de um anel.

As variedades algébricas afins são definidas como sendo os zeros de polinômios em  $k[x_1, \dots, x_n]$ , sendo assim, um subconjunto do espaço afim  $k^n$ , onde  $k$  é um corpo algebricamente fechado de característica zero, quando não especificado. No Capítulo 4, veremos como esses conjuntos especiais se relacionam com os ideais em  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Outra propriedade dos conjuntos algébricos afins é que satisfazem os axiomas de fechados, ou seja, determinam uma topologia em  $k^n$ , chamada de topologia de Zariski. Porém, as variedades algébricas afins são uma construção para apresentar as variedades algébricas projetivas.

O espaço projetivo  $\mathbb{P}^n$  é definido sendo o quociente do conjunto  $k - \{0\}$  pela relação que associa dois pontos múltiplos por um escalar diferente de zero. Dessa forma, se define as variedades algébricas projetivas como sendo os zeros de polinômios homogêneos de  $k[x_0, \dots, x_n]$ . No Capítulo 4, fica claro o motivo de se definir as variedades projetivas a partir de polinômios homogêneos. Exemplos de variedades projetivas são as de Veronese, de Segre e de Segre-Veronese apresentadas no Capítulo 5. Entretanto, a variedade de Veronese terá mais destaque, sendo esta denotada por  $V_d^n$  e definida como sendo a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} v_d^n : \mathbb{P}_x^n &\rightarrow \mathbb{P}_y^N \\ (x_0 : x_1 : \dots : x_n) &\mapsto (M_0, \dots, M_N), \end{aligned}$$

em que  $N = \binom{n+d}{d} - 1$  e  $M_0, \dots, M_N$  são todos os monômios de grau  $d$  nas variáveis  $x_0, \dots, x_n$ .

Dada uma variedade projetiva  $X$ , define-se a variedade  $h$ -secante como sendo o fecho da união de todos os espaços gerados por  $h$  pontos de  $X$ , ou seja,  $Sec_h(X) = \overline{\bigcup_{p_i \in X} \langle p_1, \dots, p_h \rangle}$ . A variedade  $X$  será dita  $h$ -defeituosa se a dimensão da variedade  $Sec_h(X)$  não for a dimensão esperada, mais detalhes no Capítulo 6. O centro da discussão desse trabalho é determinar se uma variedade projetiva é defeituosa, em particular, as variedades de Veronese. Dito isso, o Teorema de Alexander e Hirschowitz, apresentado no Capítulo 6, classifica quais variedades de Veronese são defeituosas e quais não são defeituosas. A partir disto, o foco deste trabalho será provar tal teorema:

**Teorema 1.1** (*Teorema de Alexander e Hirschowitz*) As variedades de Veronese  $V_d^n$  são não defeituosas, exceto os seguintes casos:

$$\begin{array}{c|cccccc} n & \geq 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ \hline d & 2 & 4 & 4 & 4 & 3 \end{array}$$

No Capítulo 7, veremos como as variedades de Segre-Veronese se associam a polítopos e, assim, em alguns casos, poderemos mostrar de forma combinatória que algumas variedades deste tipo não são  $h$ -defeituosas. Com base neste método, desenvolvemos um algoritmo no software *Wolfram Mathematica*.

O Capítulo 8 trata de conceitos sobre esquemas, tais como: pré-feixes, feixes, o espectro de um anel como um feixe, morfismos de feixe e esquemas. Um exemplo de esquemas são os sistemas lineares, denotados por  $\mathcal{L}_{n,d}(m_1, \dots, m_h)$ , sendo o conjunto de todas as hipersuperfícies em  $\mathbb{P}^n$  de grau  $d$  com  $h$  pontos gerais de multiplicidade pelo menos  $m_i$ , onde  $i = 1, \dots, h$ . Os sistemas lineares serão de suma importância por dois motivos principais: há uma relação direta com as variedades de Veronese, que será tratada no Capítulo 9, e também por meio de uma degeneração, apresentada no Capítulo 14, podemos entender uma parte da prova do Teorema de Alexander e Hirschowitz.

Antes de vermos a prova geral do Teorema de Alexander e Hirschowitz no Capítulo 16, precisamos estudar as hipersuperfícies quádricas, cúbicas e quárticas que serão usadas no passo de indução. No Capítulo 10, usando o Lema de Terracini, mostraremos que quase todas as variedades de Veroneses do tipo  $V_2^n$  são 2-defeituosas. Já no Capítulo 12 veremos que apenas a Veronese  $V_3^4$  é defeituosa entre as  $V_3^n$ . As variedades  $V_4^n$  são defeituosas apenas para  $n = 2, 3, 4$ , como veremos no Capítulo 15.

Caso o leitor queira ver um resultado similar ao Teorema de Alexander e Hirschowitz para outra família de Segre-Veronese, neste caso, para os produtos de retas projetivas, pode ser visto em [1], escrito por C. C. Alves. Vale ressaltar que os Capítulos 2, 3, 4, 5, 6 e o 8 foram escritos em conjunto com o C. C. Alves.

## 2 Topologia

Neste Capítulo introduziremos os conceitos básicos de topologia que serão utilizados posteriormente. O livro texto utilizado é [2].

### Espaço Topológico

**Definição 2.1** Seja  $X$  um conjunto qualquer. Uma *topologia* em  $X$  é uma coleção  $\tau$  de subconjuntos de  $X$  com as seguintes propriedades:

- (a)  $\emptyset, X \in \tau$ ;
- (b) A união qualquer de conjuntos de  $\tau$  está em  $\tau$ ;
- (c) A interseção finita de conjuntos de  $\tau$  está em  $\tau$ .

O conjunto  $X$  com uma topologia  $\tau$  é chamado de *espaço topológico*. O conjunto  $X$  com uma topologia  $\tau$  será denotado por  $(X, \tau)$ .

**Definição 2.2** Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico, então os elementos da topologia  $\tau$  são chamados de *conjunto abertos*.

**Exemplo 2.1** Dado um conjunto  $X$ , se definirmos  $\tau = \mathcal{P}(X)$ , o conjunto das partes de  $X$ , então  $(X, \tau)$  é um espaço topológico. Esta topologia é chamada de *topologia discreta*.

**Exemplo 2.2** Dado um conjunto  $X$ . A topologia  $\tau = \{\emptyset, X\}$  é conhecida como *topologia trivial* ou *topologia indiscreta*.

**Exemplo 2.3** Sejam  $X = \{a, b, c, d\}$  e  $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ . Deste modo,  $\tau$  não é uma topologia em  $X$ , pois  $\{a, b\}, \{b, c\} \in \tau$ , porém

$$\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \tau.$$

**Exemplo 2.4** Tome um conjunto  $X$  e  $\tau_f = \{U \subset X \mid X - U \text{ é finito}\} \cup \emptyset$ . Então  $(X, \tau_f)$  é um espaço topológico, de fato

- i -  $X - X = \emptyset$  é finito, logo  $X \in \tau_f$ , e o  $\emptyset$  está em  $\tau_f$  por definição.
- ii - Se  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  é uma família de elementos não vazia de  $\tau_f$ , então

$$X - \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (X - U_\alpha),$$

como cada  $X - U_\alpha$  é finito, então  $X - \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  é finito e, portanto,  $\bigcap_{\alpha \in I} (X - U_\alpha) \in \tau_f$ .

- iii - Se  $U_1, U_2, \dots, U_n$  são elementos de  $\tau_f$ , então

$$X - \bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcup_{i=1}^n (X - U_i),$$

como cada  $X - U_\alpha$  é finito, temos que  $X - \bigcap_{i=1}^n U_i$  é finito e, portanto,  $\bigcup_{i=1}^n (X - U_i) \in \tau_f$ .

Portanto,  $(X, \tau_f)$  é um espaço topológico e  $\tau_f$  é chamada de *topologia cofinita*.

**Definição 2.3** Seja  $X$  um espaço topológico. Dizemos que  $F \subset X$  é *fechado* se  $X - F$  é aberto em  $X$ .

**Proposição 2.1** Seja  $X$  um espaço topológico. Então valem as seguintes condições:

- (a)  $\emptyset$  e  $X$  são fechados;
- (b) União finita de fechados é fechado;
- (c) Interseção arbitrária de fechados é fechado.

*Demonstração:* Como  $\emptyset$  e  $X$  são abertos, então  $\emptyset = X - X$  e  $X = X - \emptyset$  são fechados. Se  $F_1, \dots, F_n$  são fechados, então  $X - F_i$  é aberto para cada  $1 \leq i \leq n$ . Logo,

$$X - \bigcup_{i=1}^n F_i = \bigcap_{i=1}^n (X - F_i).$$

Sendo assim, como  $\bigcap_{i=1}^n (X - F_i)$  é aberto, então  $\bigcup_{i=1}^n F_i$  é fechado.

Por fim, dada uma família  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$  de fechados, temos que

$$X - \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X - F_\alpha).$$

Por um argumento semelhante ao anterior, temos que  $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$  é fechado. ■

**Exemplo 2.5** Dado o conjunto  $X$ . Sabemos que  $\tau = \{\emptyset, X\}$  é uma topologia de  $X$  e os fechados são

$$\begin{aligned} X &= X - \emptyset \\ \emptyset &= X - X. \end{aligned}$$

**Exemplo 2.6** Dado o conjunto  $X = \{a, b, c\}$ . Tome a topologia discreta, isto é

$$\tau = \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}.$$

Os fechados dessa topologia são todos os elementos de  $\tau$ , ou seja, na topologia discreta, todos os elementos abertos são fechados.

Podemos definir uma topologia usando fechados ao invés de abertos, basta definir  $\tau$  tomando como axiomas as propriedades provadas na Proposição 2.1 e chamar os elementos de  $\tau$  de fechados. Neste caso, os abertos são definidos como o complementar dos fechados.

**Definição 2.4** Sejam  $(X, \tau)$  um espaço topológico e  $\mathcal{B} \subset \tau$ . Dizemos que  $\mathcal{B}$  é uma *base* para a topologia  $\tau$  em  $X$  se satisfaz:

- (a) Para cada  $x \in X$  existe um elemento  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B$ .
- (b) Se  $x \in B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ , então existe  $B_0 \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_0 \subset B_1 \cap B_2$ .

Um elemento  $B$  de uma base  $\mathcal{B}$  chamaremos de *elemento básico*.

**Lema 2.2** Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico. Suponha que  $\mathcal{B}$  é uma coleção de conjuntos abertos em  $X$ , tal que para cada subconjunto aberto  $U \subset X$  e cada  $x \in U$ , existe um elemento  $B \in \mathcal{B}$ , tal que  $x \in B \subset U$ . Então  $\mathcal{B}$  é base para a topologia  $\tau$  em  $X$ .

*Demonstração:*

- i - Como  $X$  é um aberto então para todo  $x \in X$ , existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B \subset X$ .
- ii - Se  $x \in B_1 \cap B_2$ , onde  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ . Como  $B_1$  e  $B_2$  são abertos, então  $B_1 \cap B_2$  é aberto. Logo, existe  $B_0 \in \mathcal{B}$ , tal que

$$x \in B_0 \subset B_1 \cap B_2.$$

Portanto,  $\mathcal{B}$  é uma base para a topologia  $\tau$ . ■

**Observação 2.1** Pelo lema anterior, temos que para todo aberto  $U \subset X$ , existe uma família  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$  de elementos básicos tal que

$$U = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha.$$

De fato, seja  $U$  um aberto qualquer de  $X$ . Então, para todo  $x \in U$ , existe  $B_x \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_x \subset U$ . Logo,

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x.$$

**Exemplo 2.7** Seja  $X$  um conjunto, então

$$\mathcal{B} = \{\{x\} | x \in X\}$$

é uma base para topologia discreta em  $X$ .

De fato,

- i - Para todo  $x \in X$ , temos que  $x \in \{x\}$ , onde  $\{x\} \in \mathcal{B}$ .
- ii - Se  $x \in \{x_1\} \cap \{x_2\}$ , então

$$\begin{aligned} x \in \{x_1\} \text{ e } x \in \{x_2\} \\ \Rightarrow x = x_1 \text{ e } x = x_2 \end{aligned}$$

Portanto,  $x \in \{x\} = \{x_1\} \cap \{x_2\}$ .

**Definição 2.5** Dado um subconjunto  $E$  de um espaço topológico  $X$ , o *interior* de  $E$ , denotado por  $\text{int}(E)$ , é a união de todos os subconjuntos abertos contidos em  $E$ . O *fecho* de  $E$ , denotado por  $\overline{E}$ , é a interseção de todos os subconjuntos fechados que contém  $E$ .

**Observação 2.2** Pela definição acima temos que  $\text{int}(E) \subset E \subset \overline{E}$ .

**Exemplo 2.8** Seja  $\mathbb{R}$  a reta real com a topologia usual. Dado o intervalo  $E = [0, 1) \subset \mathbb{R}$ . Temos que

$$\begin{aligned} \text{int}(E) &= (0, 1) \subset \mathbb{R}, \\ \overline{E} &= [0, 1] \subset \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Lema 2.3** Seja  $E$  um subconjunto do espaço topológico  $X$ . Então  $E$  é aberto se, e somente se,  $E = \text{int}(E)$ . E  $E$  é fechado se, e somente se,  $E = \overline{E}$ .

*Demonstração:* Suponha que  $E$  é aberto. Como  $\text{int}(E)$  é a união de todos os subconjuntos abertos contido em  $E$ , então  $E \subset \text{int}(E)$  e, assim,  $\text{int}(E) = E$ . Por outro lado, se  $E = \text{int}(E)$  e sabendo que  $\text{int}(E)$  é aberto por definição, então  $E$  é aberto.

A segunda afirmação segue de forma análoga. ■

**Definição 2.6** O conjunto  $E_1$  intersecta um conjunto  $E_2$  se  $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ . Um conjunto aberto  $U \subset X$  é uma *vizinhança* de  $x \in X$  se  $x \in U$ .

**Proposição 2.4** Seja  $E$  um subconjunto de um espaço topológico  $X$ .

- (a) Então  $x \in \overline{E}$  se, e somente se, toda vizinhança de  $x$  intersecta  $E$ .
- (b) Suponha que a topologia em  $X$  é gerada por uma base, então  $x \in \overline{E}$  se, e somente se, todo elemento básico  $B$  contendo  $x$  intersecta  $E$ .

*Demonstração:*

- (a) Vamos considerar a contra positiva:  $x \notin \overline{E}$  se, e somente se, existe uma vizinhança de  $x$  que não intersecta  $E$ .

Se  $x \notin \overline{E}$ , então o conjunto  $U = X - \overline{E}$  é uma vizinhança de  $x$  que não intersecta  $E$ . Por outro lado, se existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  que não intersecta  $E$ , então  $X - U$  é um conjunto fechado contendo  $E$ , pela definição de fecho, o conjunto  $X - U$  deve conter  $\overline{E}$  e, assim, como  $x \in U$ , então  $x \notin \overline{E}$ .

- (b) Suponha que  $x \in \overline{E}$ . Então pelo item anterior, toda vizinhança de  $x$  intersecta  $E$ , logo todo elemento básico  $B$  contendo  $x$ , intersecta  $E$ . Por outro lado, se todo elemento básico contendo  $x$  intersecta  $E$ , então o mesmo acontece com toda a vizinhança  $U$  de  $x$ , porque  $U$  contém todo elemento básico que contém  $x$ . ■

**Exemplo 2.9** Seja  $\mathbb{R}$  com a topologia usual. Dado o conjunto  $E = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ , pela proposição anterior, temos que  $\overline{E} = E \cup \{0\}$ .

## Funções Contínuas

**Definição 2.7** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. A função  $f : X \rightarrow Y$  é *contínua* se para todo subconjunto aberto  $V$  de  $Y$ , o conjunto  $f^{-1}(V)$  é aberto em  $X$ .

**Proposição 2.5** Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma função e  $\mathcal{B}$  uma base para a topologia em  $Y$ . Então  $f$  é contínua se  $f^{-1}(B)$  é aberto em  $X$ , para todo  $B \in \mathcal{B}$ .

*Demonstração:* Seja  $V \subset Y$  um aberto. Então, existem  $B_\alpha \in \mathcal{B}$ ,  $\alpha \in I$ , tal que

$$V = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha.$$

Logo,

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha),$$

como cada  $f^{-1}(B_\alpha)$  é aberto em  $X$ , temos que  $f^{-1}(V)$  é aberto em  $X$ . Portanto,  $f$  é contínua. ■

**Proposição 2.6** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a)  $f$  é contínua.
- (b) Para todo subconjunto  $E$  de  $X$ , temos  $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$ .
- (c) Para todo subconjunto fechado  $F$  de  $Y$ , o conjunto  $f^{-1}(F)$  é fechado em  $X$ .
- (d) Para cada  $x \in X$  e cada vizinhança  $V$  de  $f(x)$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $f(U) \subset V$ .

*Demonstração:* (a)  $\Rightarrow$  (b). Suponha que  $f$  é contínua. Seja  $E$  um subconjunto de  $X$ . Vamos provar que se  $x \in \overline{E}$ , então  $f(x) \in \overline{f(E)}$ . Seja  $V$  uma vizinhança de  $f(x)$ , então  $f^{-1}(V)$  é um aberto de  $X$  contendo  $x$ , pois  $f$  é contínua. Pelo fato de  $x$  estar em  $\overline{E}$ , segue que existe  $y \in f^{-1}(V) \cap E$ . Portanto,  $f(y) \in V \cap f(E)$  e daí  $f(x) \in \overline{f(E)}$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c). Seja  $F$  um fechado em  $Y$  e tome  $E = f^{-1}(F)$ . Provemos que  $E$  é fechado em  $X$ . Temos que

$$f(E) = f(f^{-1}(F)) \subset F.$$

Portanto, se  $x \in \overline{E}$ , então

$$f(x) \in f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)} \subset \overline{F} = F,$$

segue que  $x \in f^{-1}(F) = E$ . Então,  $\overline{E} \subset E$  e, assim,  $\overline{E} = E$ .

(c)  $\Rightarrow$  (a). Seja  $V$  um aberto de  $Y$ . Seja  $B = Y - V$ , então

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(V) = X - f^{-1}(V).$$

Como  $B$  é fechado em  $Y$ , então por hipótese  $f^{-1}(B)$  é fechado em  $X$ . Assim,  $f^{-1}(V)$  é aberto em  $X$  e isso implica que  $f$  é contínua.

(a)  $\Rightarrow$  (d). Sejam  $x \in X$  e  $V$  uma vizinhança de  $f(x)$ . O conjunto  $U = f^{-1}(V)$  é uma vizinhança de  $x$  tal que  $f(U) \subset V$ .

(d)  $\Rightarrow$  (a). Sejam  $V$  um aberto de  $Y$  e  $x$  um ponto de  $f^{-1}(V)$ , então  $f(x) \in V$ . Por hipótese, existe uma vizinhança  $U_x$  de  $x$  tal que  $f(U_x) \subset V$  e portanto,  $U_x \subset f^{-1}(V)$ . Segue que  $f^{-1}(V)$  pode ser escrito como união dos  $U_x$  e, portanto, é aberto. ■

**Definição 2.8** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$  uma bijeção. Se  $f$  e  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  são contínuas, então chamaremos  $f$  de *homeomorfismo*. Neste caso, Dizemos que  $X$  e  $Y$  são *homeomorfos*.

**Exemplo 2.10** Seja  $\mathbb{R}$  com a topologia usual. Então, quaisquer dois intervalos  $(a, b)$  e  $(c, d)$  de  $\mathbb{R}$  são homeomorfos.

De fato, tomando a aplicação  $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$  tal que  $f(x) = Ax + B$ , onde  $f(a) = c$  e  $f(b) = d$ , temos que

$$A.a + B = c \text{ e } A.b + B = d.$$

Logo,

$$A = \frac{c - d}{a - b}$$

$$B = d - \left( \frac{c - d}{a - b} \right) . b$$

Assim,

$$f(x) = \left( \frac{c - d}{a - b} \right) . x + d - \left( \frac{c - d}{a - b} \right) . b$$

Desta forma, temos que a inversa de  $f$  é

$$f^{-1}(x) = \left( \frac{a - b}{c - d} \right) . x + b - \left( \frac{a - b}{c - d} \right) . d$$

Portanto, como  $f$  e  $f^{-1}$  são contínuas, pois são funções lineares, então  $f$  é um homeomorfismo.

**Definição 2.9** Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, onde  $X$  é um espaço topológico e  $\mathbb{R}$  é a reta real com a topologia usual. Dizemos que  $f$  é *semi-contínua superiormente* em  $x_0 \in X$  se para cada  $y > f(x_0)$  existe uma vizinhança  $U$  de  $x_0$  tal que  $f(x) < y$ , para todo  $x \in U$ . Uma função é dita *semi-contínua superiormente* em  $X$  se é semi-contínua superiormente em cada  $x \in X$ .

## Espaços Topológicos Irredutíveis

**Definição 2.10** Um conjunto não vazio  $Y$  de um espaço topológico  $X$ , é chamado de *irredutível* se não pode ser escrito como uma união  $Y = Y_1 \cup Y_2$ , onde  $Y_1$  e  $Y_2$  são subconjuntos fechados próprios de  $Y$ . O conjunto vazio não é considerado irredutível.

**Exemplo 2.11** Sejam  $\mathbb{R}$  a reta real, com a topologia usual, e  $Y = [0, 1] \cup [2, 3]$ . Como  $Y = Y_1 \cup Y_2$ , onde

$$Y_1 = [0, 1] \text{ e } Y_2 = [2, 3]$$

temos que  $Y$  não é irredutível.

**Exemplo 2.12** Seja  $X$  um conjunto com mais de um elemento. Considere  $X$  munida da topologia discreta. Logo,

$$X = \{x\} \cup \bigcup_{y \neq x} \{y\}.$$

Como  $\{x\}$  e  $\bigcup_{y \neq x} \{y\}$  são fechados em  $X$ , então  $X$  não é irredutível.

**Proposição 2.7** Seja  $X$  um espaço topológico. Se  $Y \subset X$  é irredutível, então  $\bar{Y}$  é irredutível.

*Demonstração:* Suponha que  $\bar{Y}$  não é irredutível, existem fechados  $F_1$  e  $F_2$  de  $X$ , tais que  $\bar{Y} = (F_1 \cap \bar{Y}) \cup (F_2 \cap \bar{Y})$ , com  $F_1 \cap \bar{Y} \subsetneq \bar{Y}$  e  $F_2 \cap \bar{Y} \subsetneq \bar{Y}$ . Assim,

$$Y = Y \cap \bar{Y} = ((F_1 \cap \bar{Y}) \cap Y) \cup ((F_2 \cap \bar{Y}) \cap Y).$$

Como  $\bar{Y}$  é fechado em  $X$ , então  $F_1 \cap \bar{Y}$ ,  $F_2 \cap \bar{Y}$  são fechados em  $X$  e podemos escrever

$$Y = (G_1 \cap Y) \cup (G_2 \cap Y),$$

onde  $G_1 = F_1 \cap \bar{Y}$  e  $G_2 = F_2 \cap \bar{Y}$ . Suponha que  $G_1 \cap Y = Y$ , então  $Y \subset G_1 \subsetneq \bar{Y}$ , absurdo, pois  $\bar{Y}$  é o menor fechado contendo  $Y$ . Logo,  $G_1 \cap Y \subsetneq Y$ . De modo análogo, se mostra que  $G_2 \cap Y \subsetneq Y$ . Portanto,  $\bar{Y}$  é irredutível. ■

## 3 Álgebra Comutativa

Neste capítulo partiremos do pressuposto que o leitor tenha familiaridade com conceitos básicos de Álgebra. Conceitos estes que podem ser encontrados em [3]. Dito isso, para o embasamento desse capítulo utilizaremos o livro texto [4].

Durante todo o desenvolvimento vamos considerar  $A$  um anel comutativo com unidade.

### Ideais Importantes

**Definição 3.1** Um ideal  $p \subsetneq A$  é dito *primo* se  $x.y \in p$ , então  $x \in p$  ou  $y \in p$ .

**Exemplo 3.1** O ideal  $(3)$  no anel  $\mathbb{Z}$  é primo. Porém, o ideal  $(6)$  não é primo, pois

$$2.3 = 6 \in (6),$$

mas  $2, 3 \notin (6)$ .

**Observação 3.1** O ideal  $(0)$  é primo se, e somente se,  $A$  é um domínio de integridade.

**Definição 3.2** Um ideal  $m \subsetneq A$  é dito *maximal* se sempre que existir outro ideal  $I$  tal que  $m \subset I \subset A$ , então  $I = A$  ou  $I = m$ .

**Definição 3.3** Um anel  $A$  com exatamente um ideal maximal  $m$  é chamado de *anel local*.

**Proposição 3.1** Seja  $A$  um anel.

(a)  $p$  é um ideal primo se, e somente se,  $A/p$  é um domínio de integridade.

(b)  $m$  é um ideal maximal se, e somente se,  $A/m$  é um corpo.

*Demonstração:*

(a)  $(\Rightarrow)$  Sejam  $a + p, b + p \in A/p$ , tal que

$$(a + p)(b + p) = ab + p = p.$$

Logo  $ab \in p$ , como  $p$  é primo, então

$$a \in p \text{ ou } b \in p,$$

assim,

$$a + p = p \text{ ou } b + p = p.$$

Portanto,  $A/p$  é um domínio de integridade.

$(\Leftarrow)$  Suponha que  $ab \in p$ . Temos que

$$(a + p)(b + p) = (ab + p) = p \in A/p.$$

Como  $A/p$  é um domínio de integridade, então  $a + p = p$  ou  $b + p = p$  e, assim,  $a \in p$  ou  $b \in p$ . Portanto,  $p$  é um ideal primo.

(b) ( $\Rightarrow$ ) Basta provar que todo elemento  $a + m \neq m$  é invertível. Dessa desigualdade segue que  $a \notin m$  e, assim,  $(a) + m = A$ , pois  $m$  é maximal. Então a unidade de  $A$  pode ser escrita da seguinte forma

$$1 = ab + n, \text{ para algum } b \in A \text{ e algum } n \in m.$$

Daí,  $1 - ab = n \in m$ , logo

$$1 + m = ab + m = (a + m)(b + m),$$

mostrando que  $b + m$  é o inverso de  $a + m$  no anel quociente  $A/m$ . Portanto,  $A/m$  é um corpo.

( $\Leftarrow$ ) Sendo  $A/m$  um corpo, então  $m \neq A$ . De fato, se  $m = A$ , então  $A/m = \{0\}$ , e isso é incompatível com a hipótese de  $A/m$  ser um corpo. Falta provar que o único ideal que contém  $m$  propriamente é  $A$ . Para tanto, denotamos por  $I$  um ideal de  $A$  tal que  $I \supset m$  e  $I \neq m$  e consideremos um elemento  $a \in I - m$ . Como  $a \notin m$ , então  $a + m \neq m$ , ou seja,  $a + m$  é um elemento não nulo de  $A/m$  e, assim, tem um inverso  $b + m$  no anel. Logo,  $ab - 1 \in I$  e, como  $a \in I$ , então  $1 \in I$ . Dessa relação segue que  $I = A$ . Portanto, o único ideal que contém  $m$  propriamente é  $A$  e, assim,  $m$  é maximal. ■

**Corolário 3.2** Todo ideal maximal é primo.

**Proposição 3.3** Se  $f : A \rightarrow B$  é um homomorfismo de anéis e  $q$  é um ideal primo em  $B$ , então  $f^{-1}(q)$  é um ideal primo de  $A$ .

*Demonstração:* Suponha que  $ab \in f^{-1}(q)$ , então

$$f(ab) = f(a)f(b) \in q,$$

como  $q$  é primo, temos que

$$f(a) \in q \text{ ou } f(b) \in q.$$

Assim,

$$a \in f^{-1}(q) \text{ ou } b \in f^{-1}(q).$$

Portanto,  $f^{-1}$  é um ideal primo em  $A$ . ■

A Proposição 3.3 se torna falsa se trocarmos ideal primo por ideal maximal.

**Exemplo 3.2** Seja  $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$  o homomorfismo de anéis inclusão. Como  $\mathbb{Q}$  é um corpo, o ideal  $(0) \subset \mathbb{Q}$  é maximal. Do fato de  $f$  ser injetora, segue que  $f^{-1}((0)) = \ker(f) = (0) \subset \mathbb{Z}$ , mas  $(0)$  não é um ideal maximal de  $\mathbb{Z}$ , pois  $\mathbb{Z}$  não é um corpo.

**Proposição 3.4** Todo anel  $A$  não nulo possui pelo menos um ideal maximal.

*Demonstração:* Ver [4], Capítulo 1, Teorema 1.3. ■

**Corolário 3.5** Se  $I \neq (1)$  é um ideal em  $A$ , então existe um ideal maximal de  $A$  contendo  $I$ .

**Corolário 3.6** Todo elemento de  $A$  que não é invertível está contido em um ideal maximal.

**Definição 3.4** Sejam  $A$  um anel e  $x \in A$ . Dizemos que  $x$  é *nilpotente* quando existe  $n > 1$  tal que  $x^n = 0$ . Dizemos que  $x \neq 0$  é *divisor de zero* quando existe um elemento não nulo  $y \in A$  tal que  $xy = 0$ .

**Exemplo 3.3** Tome o anel  $k[x, y]/(x^2)$ . Logo, o elemento  $\bar{x} \in k[x, y]/(x^2)$  é nilpotente. De fato,

$$(\bar{x})^2 = \overline{x^2} = \bar{0}.$$

**Proposição 3.7** Todo elemento nilpotente é divisor de zero.

*Demonstração:* De fato, sejam  $A$  um anel e  $x \in A$  um elemento nilpotente não nulo. Suponha que  $n$  é o menor número inteiro positivo, tal que  $x^n = 0$ . Suponha, por absurdo, que  $x$  não é um divisor de zero. Como

$$x \cdot x^{n-1} = x^n = 0,$$

logo  $x^{n-1} = 0$ , contradição. Portanto,  $x$  é um divisor de zero. ■

**Definição 3.5** Seja  $A$  um anel. Definimos o *nilradical* de  $A$ , denotado por  $\mathfrak{N}$ , como sendo o conjunto de todos os elementos nilpotentes.

**Exemplo 3.4** Tome o anel  $k[x, y]/(x^2)$ . O nilradical desse anel é

$$\mathfrak{N} \left( \frac{k[x, y]}{(x^2)} \right) = \langle \overline{xy^m} \mid m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \rangle.$$

**Proposição 3.8** O nilradical de  $A$  é um ideal, e  $A/\mathfrak{N}$  não tem elementos nilpotentes diferentes de 0.

*Demonstração:* Se  $x \in \mathfrak{N}$ , claramente  $ax \in \mathfrak{N}$ , para todo  $a \in A$ . Sejam  $x, y \in \mathfrak{N}$ , temos que  $x^m = 0$  e  $y^n = 0$ , para algum  $m, n \in \mathbb{N}$ . Pela expansão binomial,  $(x + y)^{m+n-1}$  é uma soma de múltiplos inteiros de produtos  $x^r y^s$ , onde  $r + s = m + n - 1$ . Além disso, não pode ocorrer ao mesmo tempo  $r < m$  e  $s < n$  e, assim, cada um desses produtos se anula. Então,  $(x + y)^{m+n-1} = 0$  e, assim,  $x + y \in \mathfrak{N}$ . Portanto,  $\mathfrak{N}$  é um ideal.

Seja  $\bar{x} \in A/\mathfrak{N}$  representado por  $x \in A$ . Então  $\bar{x}^n$  é representado por  $x^n$ . Se  $\bar{x}^n = 0$ , então

$$\begin{aligned} x^n &\in \mathfrak{N} \\ \Rightarrow (x^n)^k &= 0, \text{ para algum } k > 0 \\ \Rightarrow x &\in \mathfrak{N} \\ \Rightarrow \bar{x} &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, isso mostra que  $A/\mathfrak{N}$  não tem elemento nilpotente diferente de zero. ■

**Proposição 3.9** O nilradical de  $A$  é a interseção de todos os ideais primos de  $A$ .

*Demonstração:* Ver [4], Capítulo 1, Proposição 1.8. ■

**Definição 3.6** O *radical de Jacobson*  $\mathfrak{R}$  de  $A$  é definido pela interseção de todos os ideais maximais de  $A$ .

**Proposição 3.10** Seja  $A$  um anel. Então  $x \in \mathfrak{R}$  se, e somente se,  $1 - xy$  é invertível para todo  $y \in A$ .

*Demonstração:* Suponha que  $1 - xy$  não é invertível. Pelo Corolário 3.6 pertence a algum ideal máximo  $m$ , mas  $x \in \mathfrak{R} \subset m$ , logo  $xy \in m$  e, portanto,  $1 \in m$ , absurdo. Por outro lado, suponha que  $x \notin m$ , para algum ideal maximal  $m$ , então  $(x) + m = A$  e, assim, temos que

$$n + xy = 1, \text{ para algum } n \in m \text{ e } y \in A,$$

como  $1 - xy \in m$ , então  $1 - xy$  não é invertível, contradição. ■

**Proposição 3.11**

- (a) Sejam  $p_1, \dots, p_n$  ideais primos e  $I$  um ideal contido em  $\bigcup_{i=1}^n p_i$ . Então  $I \subset p_i$ , para algum  $i$ .
- (b) Sejam  $I_1, \dots, I_n$  ideais e  $p$  um ideal primo contendo  $\bigcap_{i=1}^n I_i$ , então  $p \supset I_i$  para algum  $i$ . Em particular, se  $p = \bigcap_{i=1}^n I_i$ , então  $p = I_i$  para algum  $i$ .

*Demonstração:* Ver [4], Capítulo 1, Proposição 1.11. ■

**Definição 3.7** Seja  $I$  um ideal de  $A$ . Dizemos que  $I$  é *radical* se  $a^m \in I$  para algum  $m > 0$ , implica que  $a \in I$ .

**Definição 3.8** Se  $I$  é um ideal de  $A$ , o *radical* de  $I$  é

$$r(I) = \{x \in A \mid x^n \in I, \text{ para algum } n > 0\}.$$

**Observação 3.2** Seja  $I$  um ideal de uma anel  $A$ . Então  $I \subset r(I)$  e  $r(I)$  é um ideal.

**Proposição 3.12** O radical de um ideal  $I$  é a interseção de todos os ideais primos que contêm  $I$ .

*Demonstração:* Basta aplicar a Proposição 3.9 em  $A/I$ . ■

## Módulos

**Definição 3.9** Seja  $A$  um anel. Um  $A$ -*módulo* é um par  $(M, \mu)$  onde  $M$  é um grupo abeliano e  $\mu : A \times M \rightarrow M$  é uma aplicação que leva  $(a, m)$  em  $am$  e satisfaz:

$$\begin{aligned} a(m + n) &= am + an \\ (a + b)m &= am + bm \\ (ab)m &= a(bm) \\ 1m &= m \end{aligned}$$

para todo  $a, b \in A$  e  $m, n \in M$ .

**Exemplo 3.5** Um ideal  $I$  de  $A$  é um  $A$ -módulo. Em particular,  $A$  é um  $A$ -módulo.

**Exemplo 3.6** Se  $A = k$  é um corpo, então um  $A$ -módulo é um  $k$ -espaço vetorial.

**Exemplo 3.7** Se  $A = \mathbb{Z}$  então um  $A$ -módulo é um grupo abeliano, onde definimos  $nm = m + \dots + m$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$  positivo.

**Definição 3.10** Sejam  $M$  e  $N$  dois  $A$ -módulos. Uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é um  $A$ -homomorfismo se

$$\begin{aligned} f(m_1 + m_2) &= f(m_1) + f(m_2) \\ f(am_1) &= af(m_1) \end{aligned}$$

para todo  $a \in A$  e  $m_1, m_2 \in M$ .

Então  $f$  é um homomorfismo de grupos abelianos que comuta com a ação de cada  $a \in A$ .

**Observação 3.3** A composição de  $A$ -homomorfismos de  $A$ -módulos é um  $A$ -homomorfismo.

**Definição 3.11** Seja  $M$  um  $A$ -módulo. Um *submódulo*  $M'$  de  $M$  é um subgrupo de  $M$  que é fechado em relação à multiplicação por elementos de  $A$ .

O grupo abeliano  $M/M'$  herda uma estrutura de  $A$ -módulo de  $M$ , definida por  $a(m + M') = am + M'$ . Logo, chamaremos  $M/M'$  de  $A$ -módulo *quociente* de  $M$  por  $M'$ .

A projeção canônica  $M \rightarrow M/M'$  é um  $A$ -homomorfismo que induz uma correspondência bijetora, que preserva a ordem ( $\subset$ ), entre submódulos de  $M$  que contêm  $M'$  e submódulos de  $M/M'$ .

**Definição 3.12** Se  $f : M \rightarrow N$  é um  $A$ -homomorfismo, o *núcleo* de  $f$  é o conjunto  $\ker(f) = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$ . Definimos a *imagem* de  $f$  sendo o conjunto  $\text{Im}(f) = f(M)$ .

O *conúcleo* de  $f$  é  $\text{coker}(f) = \frac{N}{\text{Im}(f)}$ .

**Observação 3.4** O  $\ker(f)$  é um submódulo de  $M$ , a  $\text{Im}(f)$  é um submódulo de  $N$  e  $\text{coker}(f)$  é um módulo quociente de  $N$ .

Se  $m$  é um elemento de  $M$ , o conjunto de todos os múltiplos  $am$ , com  $a \in A$ , é um submódulo de  $M$ , denotado por  $Am$  ou  $(m)$ . Se um módulo  $M = \sum_{i \in I} Am_i$  dizemos que os  $m_i$ 's formam um *conjunto de geradores* de  $M$ , isto significa que todo elemento de  $M$  pode ser expresso (não necessariamente de forma única) como uma combinação linear finita dos  $m_i$ 's com coeficientes em  $A$ . Um  $A$ -módulo é dito *finitamente gerado* se ele tem um conjunto finito de geradores.

**Definição 3.13** Se  $(M_i)_{i \in I}$  é uma família de  $A$ -módulos, podemos definir a soma direta  $\bigoplus_{i \in I} M_i$ , seus elementos são  $(m_i)_{i \in I}$  tais que  $m_i \in M_i$ , para cada  $i \in I$ , e quase todos  $m_i$  são 0 (exeto uma quantidade finita).

**Definição 3.14** Um  $A$ -módulo *livre* é um  $A$ -módulo isomorfo a  $\bigoplus_{i \in I} M_i$ , onde cada  $M_i$  é isomorfo a  $A$  como um  $A$ -módulo. Um  $A$ -módulo *livre finitamente gerado* é isomorfo a  $A^n = A \oplus \dots \oplus A$ , para algum  $n > 0$ .

**Definição 3.15** Uma sequência de  $A$ -módulos e  $A$ -homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

é dita *exata* em  $M_i$  se  $\text{Im}(f_i) = \text{ker}(f_{i+1})$ . A sequência é *exata* se é exata em cada  $M_i$ .

**Observação 3.5** Em particular:

- (a)  $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$  é exata  $\Leftrightarrow f$  é injetora.
- (b)  $M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$  é exata  $\Leftrightarrow g$  é sobrejetora.
- (c)  $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$  é exata  $\Leftrightarrow f$  é injetora,  $g$  é sobrejetora e  $\text{Im}(f) = \text{ker}(g)$ .

Uma sequência do tipo (c) é chamada de *sequência exata curta*. Toda sequência exata pode ser dividida em sequências exatas curtas.

**Exemplo 3.8** Considere a sequência de  $A$ -módulos

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A/I \longrightarrow 0$$

onde  $I$  é um ideal de  $A$ ,  $f$  é a aplicação inclusão e  $g$  a projeção canônica. Dessa forma, essa sequência é exata.

**Definição 3.16** Considere os  $A$ -módulos  $M$ ,  $N$  e  $P$ . Uma aplicação  $f : M \times N \rightarrow P$  é chamada  *$A$ -bilinear* se ela satisfaz:

- (a)  $f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$
- (b)  $f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n')$
- (c)  $f(am, n) = f(m, an) = af(m, n)$

para todo  $m, m' \in M$ ,  $n, n' \in N$  e  $a \in A$ .

**Proposição 3.13** Sejam  $M$  e  $N$   $A$ -módulos. Então existe um  $A$ -módulo  $T$  junto com uma aplicação  $A$ -bilinear  $g : M \times N \rightarrow T$  com as seguintes propriedades:

- (a) Dados um  $A$ -módulo  $P$  e uma aplicação  $A$ -bilinear  $f : M \times N \rightarrow P$ , existe um único  $A$ -homomorfismo  $f' : T \rightarrow P$  tal que  $f = f' \circ g$ .
- (b) Se  $(T, g)$  e  $(T', g')$  são dois pares que satisfazem essa propriedade, então existe um único isomorfismo  $j : T \rightarrow T'$  tal que  $j \circ g = g'$ .

*Demonstração:* Ver [4], Capítulo 2, Proposição 12. ■

O módulo  $T$  construído na proposição anterior é chamado de *produto tensorial* de  $M$  e  $N$ , e será denotado por  $M \otimes_A N$ . O produto tensorial  $M \otimes_A N$  é gerado pelos elementos  $m \otimes n$ , onde  $m \in M$  e  $n \in N$ , chamaremos um elemento deste tipo de *tensor elementar*. Se  $(m_i)_{i \in I}$  e  $(n_j)_{j \in J}$  são famílias de geradores de  $M$  e  $N$ , respectivamente, então os elementos  $m_i \otimes n_j$  geram  $M \otimes_A N$ . Em particular, se  $M$  e  $N$  são finitamente gerados então  $M \otimes_A N$  também é.

**Proposição 3.14** Seja

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

uma seqüência exata de  $A$ -módulos e  $A$ -homomorfismo, e seja  $N$  um  $A$ -módulo qualquer. Então a seqüência

$$M' \otimes N \xrightarrow{f} M \otimes N \xrightarrow{g} M'' \otimes N \longrightarrow 0$$

é exata.

*Demonstração:* Ver [4], Capítulo 2, Proposição 2.18. ■

O funtor  $T_N : M \mapsto M \otimes_A N$  na categoria de  $A$ -módulos não é em geral exato. Se  $T_N$  é *exato* significa que ao tensorizar por  $N$  uma seqüência exata a seqüência obtida continua exata, então  $N$  é dito ser um  $A$ -módulo plano.

**Proposição 3.15** Seja  $N$  um  $A$ -módulo, as afirmações a seguir são equivalentes:

- i -  $N$  é plano.
- ii - Se  $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$  é uma seqüência de  $A$ -módulos exata, então a seqüência tensorizada

$$0 \longrightarrow M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M'' \otimes N \longrightarrow 0$$

é exata.

- iii - Se  $f : M' \rightarrow M$  é injetora, então  $f \otimes 1 : M' \otimes N \rightarrow M \otimes N$  é injetora.
- iv - Se  $f : M' \rightarrow M$  é injetora e  $M, M'$  são finitamente gerados, então  $f \otimes 1 : M' \otimes N \rightarrow M \otimes N$  é injetora.

*Demonstração:* Ver [4], Capítulo 2, Proposição 2.19.

**Definição 3.17** Seja  $f : A \rightarrow B$  um homomorfismo de anéis. Se  $a \in A$  e  $b \in B$ , definimos o produto  $ab := f(a)b$ . Logo,  $B$  tem estrutura de  $A$ -módulo e estrutura de anel. Chamamos o anel  $B$  equipado com sua estrutura de  $A$ -módulo de  *$A$ -álgebra*.

## Anéis de Frações

**Definição 3.18** Sejam  $A$  um anel e  $S \subset A$ . Dizemos que  $S$  é *multiplicativamente fechado* se:

- (a)  $1 \in S$ ;
- (b)  $st \in S$ , para todo  $s, t \in S$ .

**Definição 3.19** Sejam  $A$  um anel e  $S$  um subconjunto multiplicativamente fechado de  $A$ . Definimos a seguinte relação de equivalência em  $A \times S$ :

$$(a, s) \equiv (a', s') \Leftrightarrow (as' - a's)u = 0$$

para algum  $u \in S$ .

Claramente esta relação é reflexiva e simétrica. Mostremos que é transitiva, suponha que  $(s, t) \equiv (b, t)$  e  $(b, t) \equiv (c, u)$ . Então, existe  $v, w \in S$  tais que

$$\begin{aligned} (at - bs)v &= 0 \text{ e } (bu - ct)w = 0 \\ \Rightarrow atv - bsv &= 0 \text{ e } buw - ctw = 0 \\ \Rightarrow atvw - bsvw &= 0 \text{ e } buwsv - ctwsv = 0 \\ \Rightarrow (au - cs)tvw &= 0. \end{aligned}$$

Como  $S$  é fechado para multiplicação, temos que  $tvw \in S$ . Portanto,  $(a, s) \equiv (c, u)$ .

Denotamos por  $\frac{a}{s}$  a classe de equivalência de  $(a, s) \in A \times S$  e o conjunto quociente é denotado por

$$S^{-1}A := \frac{A \times S}{\equiv} = \{a/s : a \in A \text{ e } s \in S\}.$$

Definimos as seguintes operações em  $S^{-1}A$ :

$$\begin{aligned} \frac{a}{s} + \frac{b}{t} &= \frac{at + bs}{st} \\ \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} &= \frac{ab}{st}. \end{aligned}$$

Com essas operações, verifica-se que  $S^{-1}A$  é um anel comutativo com unidade, onde  $\frac{1}{1}$  é a unidade e  $\frac{0}{1}$  é o elemento neutro da adição.

Associado a  $S^{-1}A$  temos um homomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} \psi : A &\rightarrow S^{-1}A \\ a &\mapsto \frac{a}{1}, \end{aligned}$$

chamado de *aplicação de localização*.

**Exemplo 3.9** Sejam  $f \in A$  e  $S = \{f^n\}_{n \geq 0}$ . Observe que, para todo  $n, m \geq 0$  temos

$$\begin{aligned} 1 = f^0 &\in S \\ f^n f^m &= f^{n+m} \in S. \end{aligned}$$

Logo,  $S$  é um conjunto multiplicativamente fechado de  $A$ . Neste caso, o anel  $S^{-1}A$  será denotado por  $A_f$ .

**Exemplo 3.10** Seja  $p$  um ideal de  $A$ . Então,  $S = A - p$  é multiplicativamente fechado se, e somente se,  $p$  é primo.

De fato, suponha que  $S$  é multiplicativamente fechado e  $ab \in p$ . Suponha também, por absurdo, que  $a$  e  $b$  não pertencem a  $p$ . Logo,  $a, b \in S$  e, como  $S$  é multiplicativamente fechado, temos que  $ab \in S$ , contradição.

Por outro lado, se  $p$  é primo então  $1 \in S$ . Por fim, suponha que  $a, b \in S$ , assim,  $ab$  não pode pertencer a  $p$  (se  $ab \in p$ , então  $a \in p$  ou  $b \in p$ , o que não ocorre), logo  $ab \in S$ . Portanto,  $S$  é multiplicativamente fechado.

No caso em que  $S = A - p$  com  $p$  um ideal primo, denotaremos  $S^{-1}A$  por  $A_p$  e dizemos que  $A_p$  é a *localização* de  $A$  em  $p$ .

**Proposição 3.16** A localização  $A_p$  é um anel local.

*Demonstração:* Ver [4], Capítulo 3. ■

A construção do anel  $S^{-1}A$  pode ser realizada com um  $A$ -módulo no lugar do anel  $A$ .

**Definição 3.20** Definimos a seguinte relação de equivalência em  $M \times S$ :

$$(m, s) \equiv (m', s') \Leftrightarrow (ms' - m's)u = 0$$

para algum  $u \in S$ .

Seja  $\mu : M \rightarrow N$  um  $A$ -homomorfismo. Então, temos um  $S^{-1}A$ -homomorfismo de  $S^{-1}A$ -módulos induzido

$$\begin{aligned} S^{-1}\mu : S^{-1}M &\rightarrow S^{-1}N \\ m/s &\mapsto \mu(m)/s \end{aligned}$$

para todo  $m \in M$  e  $s \in S$ . Este homomorfismo satisfaz  $S^{-1}(\nu \circ \mu) = (S^{-1}\nu) \circ (S^{-1}\mu)$ , ou seja, o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{u} & N & \xrightarrow{v} & T \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S^{-1}M & \xrightarrow{S^{-1}u} & S^{-1}N & \xrightarrow{S^{-1}v} & S^{-1}T \end{array}$$

**Proposição 3.17** A operação  $S^{-1}$  é exata, isto é, se

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

é exata em  $M$ , então

$$S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$$

é exata em  $S^{-1}M$ .

*Demonstração:* Como  $g \circ f = 0$ , então

$$(S^{-1}g) \circ (S^{-1}f) = S^{-1}(g \circ f) = 0.$$

Logo,  $Im(S^{-1}f) \subset ker(S^{-1}g)$ . Para mostrar a inclusão oposta, seja  $m/s \in ker(S^{-1}g)$ . Então,

$$\frac{g(m)}{s} = 0 \in S^{-1}M'',$$

assim, existe  $t \in S$  tal que  $tg(m) = 0$  em  $M''$ . Como  $g$  é um  $A$ -homomorfismo, temos

$$0 = tg(m) = g(tm).$$

Então,  $tm \in ker(g) = Im(f)$  e, assim, existe  $m' \in M'$  tal que  $tm = f(m')$ . Portanto, em  $S^{-1}M$  temos

$$\frac{m}{s} = \frac{f(m')}{st} = (S^{-1}f) \left( \frac{m'}{st} \right) \in Im(S^{-1}f).$$

■

**Proposição 3.18** Seja  $M$  um  $A$ -módulo. Então os  $S^{-1}A$ -módulos  $S^{-1}M$  e  $S^{-1}A \otimes_A M$  são isomorfos, mais precisamente, existe um único isomorfismo

$$f : S^{-1}A \otimes M \rightarrow S^{-1}M$$

onde

$$f\left(\frac{a}{s} \otimes m\right) = \frac{am}{s}, \forall a \in A, m \in M, s \in S.$$

*Demonstração:* A aplicação  $S^{-1}A \times M \rightarrow S^{-1}M$  definida por

$$(a/s, m) \mapsto am/s$$

é bilinear e, portanto, pela Proposição 3.13 o produto tensorial induz um  $A$ -homomorfismo

$$f : S^{-1}A \otimes M \rightarrow S^{-1}M$$

satisfazendo o desejado. Claramente,  $f$  é sobrejetora e é definida de forma única.

Seja  $\sum (a_i/s_i) \otimes m_i$  é um elemento de  $S^{-1}A \otimes M$ . Se  $s = \prod s_i \in S$ , defina

$$t_i = \prod_{j \neq i} s_j,$$

temos

$$\begin{aligned} \sum \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i &= \sum \frac{a_i t_i}{s} \otimes m \\ &= \sum \frac{1}{s} \otimes a_i t_i m \\ &= \frac{1}{s} \otimes \sum a_i t_i m. \end{aligned}$$

Logo, todo elemento de  $S^{-1}A \otimes M$  é da forma  $(1/s) \otimes m$ .

Suponha que  $f((1/s) \otimes m) = 0$ . Então,  $m/s = 0$  e, assim,  $tm = 0$ , para algum  $t \in S$  e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \otimes m &= \frac{1}{st} \otimes tm \\ &= \frac{1}{st} \otimes 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então,  $f$  é injetora. ■

**Corolário 3.19**  $S^{-1}A$  é um  $A$ -módulo plano.

## Anéis Noetherianos

Nesta seção apresentaremos a definição e propriedades de um dos tipos de anéis mais importantes para a álgebra comutativa.

**Definição 3.21** O anel  $A$  é chamado de *Noetheriano* se satisfaz as seguintes condições equivalentes:

- (a) Todo conjunto de ideais não vazio de  $A$  tem um elemento maximal.
- (b) Toda cadeia ascendente de ideais de  $A$  é estacionário.
- (c) Todo ideal em  $A$  é finitamente gerado.

**Exemplo 3.11** O anel  $\mathbb{Z}$  é Noetheriano. De fato, como  $\mathbb{Z}$  é um domínio de ideais principal, todos os ideais são da forma  $(n)$ , para algum  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Exemplo 3.12** O anel de polinômios  $k[x_1, x_2, \dots]$  em um número infinito de variáveis  $x_n$  não é Noetheriano, pois a cadeia de ideais ascendente

$$(x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq \dots$$

é estritamente crescente.

**Definição 3.22** Sejam  $A$  um anel e  $M$  um  $A$ -módulo. Chameremos  $M$  de um  *$A$ -módulo Noetheriano* se todos os seus submódulos são finitamente gerados.

**Proposição 3.20** Seja

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência de  $A$ -módulos exata. Então,  $M$  é Noetheriano se, e somente se,  $M'$  e  $M''$  são Noetherianos.

*Demonstração:* Ver [4], Capítulo 6, Proposição 6.3.

**Corolário 3.21** Se  $A$  é Noetheriano, então  $A/I$  é Noetheriano para todo ideal  $I$  de  $A$ .

**Exemplo 3.13** Como  $\mathbb{Z}$  é Noetheriano e a sequência

$$0 \longrightarrow n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$$

é exata, para todo  $n > 0$ . Então, o anel  $\mathbb{Z}_n$  é Noetheriano.

**Proposição 3.22** Se  $A$  é Noetheriano e  $f$  é um homomorfismo sobrejetor de  $A$  para um anel  $B$ , então  $B$  é Noetheriano.

*Demonstração:* Pelo teorema do isomorfismo, temos que

$$\frac{A}{\ker(f)} \cong B.$$

Pelo Corolário 3.21,  $B$  é Noetheriano. ■

**Proposição 3.23** Se  $A$  é Noetheriano e  $S$  um subconjunto multiplicativamente fechado de  $A$ , então  $S^{-1}A$  é Noetheriano.

*Demonstração:* Sabemos que todos os ideais de  $S^{-1}A$  são da forma  $S^{-1}I$ , onde  $I$  é um ideal de  $A$ . Dado  $S^{-1}I$  um ideal de  $S^{-1}A$ , temos que  $I$  é finitamente gerado, digamos por  $x_1, \dots, x_n$ . Assim, afirmamos que  $x_1/1, \dots, x_n/1$  são geradores de  $S^{-1}I$ . De fato, dado  $x/s \in S^{-1}I$ , temos que  $x/1 \in S^{-1}I$ . Logo,  $x \in I$ . Desse modo, existem  $c_1, \dots, c_n \in A$  tais que

$$x = c_1x_1 + \dots + c_nx_n.$$

Daí,

$$\frac{x}{1} = \frac{c_1}{1} \frac{x_1}{1} + \dots + \frac{c_n}{1} \frac{x_n}{1}.$$

Então

$$\frac{x}{s} = \frac{c_1}{s} \frac{x_1}{1} + \dots + \frac{c_n}{s} \frac{x_n}{1}.$$

Portanto,  $S^{-1}I$  é finitamente gerado e, assim,  $S^{-1}A$  é Noetheriano. ■

**Corolário 3.24** Se  $A$  é Noetheriano e  $p$  um ideal primo de  $A$ , então  $A_p$  é Noetheriano.

**Corolário 3.25** Se  $A$  é Noetheriano e  $f \in A$ , então  $A_f$  é Noetheriano.

**Teorema 3.26** (*Teorema da Base de Hilbert*) Se  $A$  é Noetheriano, então o anel de polinômios  $A[x]$  é Noetheriano.

*Demonstração:* Ver [4], Capítulo 7, Teorema 7.5. ■

**Corolário 3.27** Se  $A$  é Noetheriano, então  $A[x_1, \dots, x_n]$  é Noetheriano.

*Demonstração:* Vamos provar por indução. Para  $A[x_1]$  vale pelo Teorema da Base de Hilbert 3.26. Suponha que  $A[x_1, \dots, x_{n-1}]$  é Noetheriano. Então, pelo Teorema da Base de Hilbert 3.26,  $A[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]$  é Noetheriano. Como

$$A[x_1, \dots, x_n] \cong A[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n],$$

então  $A[x_1, \dots, x_n]$  é Noetheriano. ■

**Proposição 3.28** Em um anel Noetheriano  $A$ , todo ideal  $I$  contém uma potência de seu radical.

*Demonstração:* Sejam  $x_1, \dots, x_k$  geradores de  $r(I)$ . Então,

$$x_i^{n_i} \in I, \text{ para algum } n_i \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq i \leq k.$$

Seja  $m = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) + 1$ . Então  $r(I)^m$  é gerado pelos produtos  $x_1^{r_1} \dots x_k^{r_k}$ , onde  $m = \sum r_i$ . Da definição de  $m$  devemos ter  $r_i \geq n_i$ , para pelo menos um índice  $i$  e, assim, cada um desses monômios está em  $I$  e, portanto,  $r(I)^m \subset I$ . ■

**Corolário 3.29** Em um anel Noetheriano o nilradical é nilpotente.

## Espectro de um Anel

**Definição 3.23** Seja  $A$  um anel. Definimos o *espectro* de  $A$  como sendo o conjunto de todos os ideais primos de  $A$ , isto é

$$\text{spec}A = \{p \subset A \mid p \text{ é um ideal primo de } A\}.$$

**Exemplo 3.14** Se  $A = k$  é um corpo, então  $\text{spec}A = \{0\}$ .

**Exemplo 3.15** Se  $A = \mathbb{Z}$ , então

$$\text{spec}A = \{(p) \mid p \text{ é primo}\} \cup \{0\}.$$

**Exemplo 3.16** Se  $A = \mathbb{C}[x]$ , então

$$\text{spec}A = \{(x - x_0) \mid x_0 \in \mathbb{C}\} \cup \{0\}.$$

**Definição 3.24** Seja  $E$  um subconjunto de um anel  $A$ . Definimos a *variedade* de  $E$  como sendo o conjunto

$$V(E) = \{p \subset A \mid p \in \text{spec}A \text{ e } E \subset p\}.$$

**Exemplo 3.17** Seja  $A = \mathbb{Z}$ , então a variedade de  $E = \{6\}$  é  $V(E) = \{(2), (3)\}$ .

**Proposição 3.30** Seja  $E$  um subconjunto de um anel  $A$ . Então vale que:

- (a) Se  $I$  é o ideal gerado por  $E$ , então  $V(E) = V(I) = V(r(I))$ .
- (b)  $V(0) = \text{spec}A$  e  $V(1) = \emptyset$ .
- (c) Se  $\{E_\alpha\}_{\alpha \in J}$  é uma família qualquer de subconjuntos de  $A$ , então

$$V\left(\bigcup_{\alpha \in J} E_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in J} V(E_\alpha).$$

- (d)  $V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$ , para todos os ideais  $I_1, I_2$  de  $A$ .

*Demonstração:*

- (a) i -  $V(E) = V(I)$ : Se  $p \in V(I)$ , então  $I \subset p$ . Como  $I$  é gerado por  $E$ , temos que  $E \subset I$ . Logo,  $E \subset p$  e, assim,  $p \in V(E)$ . Por outro lado, se  $p \in V(E)$  significa que  $p$  contém todos os geradores de  $I$ , isto é,  $I \subset p$  e  $p \in V(I)$ .  
ii -  $V(I) = V(r(I))$ : Se  $p \in V(r(I))$ , então  $r(I) \subset p$ . Como  $I \subset r(I)$ , temos que  $I \subset p$  e, assim,  $p \in V(I)$ . Por outro lado, seja  $p \in V(I)$ . Pela Proposição 3.12, temos que  $r(I)$  é a interseção de todos os ideais primos contendo  $I$  e, portanto,  $p \in V(r(I))$ .
- (b) Como  $0 \in p$ , para todo  $p \in \text{spec}A$ , então  $V(0) = \text{spec}A$  e, como 1 não pertence a  $p$ , para nenhum  $p \in \text{spec}A$ , então  $V(1) = \emptyset$ .
- (c) Sejam  $\{E_\alpha\}_{\alpha \in J}$  uma família de subconjuntos de  $A$  e  $p \in \text{spec}A$ . Então,  $p$  contém  $\bigcup_{\alpha \in J} E_\alpha$  se, e somente se,  $p$  contém cada  $E_\alpha$ . Logo,

$$V\left(\bigcup_{\alpha \in J} E_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in J} V(E_\alpha).$$

(d) Sejam  $I_1$  e  $I_2$  ideais de  $A$ .

i -  $V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 I_2)$ : Temos que

$$V(I_1 I_2) = V(r(I_1 I_2)) = V(r(I_1 \cap I_2)) = V(I_1 \cap I_2).$$

ii -  $V(I_1 I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$ : Como  $I_1 I_2$  está contido em  $I_1$  e  $I_2$ , então  $V(I_1) \cup V(I_2) \subset V(I_1 I_2)$ . Por outro lado, se  $p$  é um ideal primo contendo  $I_1 I_2$ , pela Proposição 3.11, então  $p$  contém  $I_1$  ou  $I_2$  e, assim,  $V(I_1 I_2) \subset V(I_1) \cup V(I_2)$ . ■

Este resultado mostra que os conjuntos  $V(E)$  satisfazem os axiomas de conjuntos fechados de um espaço topológico (Proposição 2.1). Tal topologia em  $\text{spec}A$  é chamada de *topologia de Zariski*.

**Observação 3.6** Os abertos  $D(f) = \text{spec}A - V(f)$ , onde  $f \in A$ , são chamados de *abertos principais* e formam uma base da topologia de Zariski em  $A$ .

De fato,

i - Dado  $p \in \text{spec}A$ . Como

$$D(1) = \text{spec}A - V(1) = \text{spec}A - \emptyset$$

então  $p \in D(1)$ , ou seja, existe um elemento principal que contém  $p$ .

ii - Se  $p \in \text{spec}A$  e  $p \in D(f) \cap D(g)$ , onde  $f, g \in A$ , então

$$\begin{aligned} D(f) \cap D(g) &= (\text{spec}A - V(f)) \cap (\text{spec}A - V(g)) \\ &= \text{spec}A - (V(f) \cup V(g)) \\ &= \text{spec}A - V(fg) \\ &= D(fg). \end{aligned}$$

Logo,  $p \in D(fg) = D(f) \cap D(g)$ .

Portanto, o conjunto dos abertos principais formam uma base para a topologia de Zariski.

**Definição 3.25** Seja  $\varphi : A \rightarrow B$  um homomorfismo de anéis. Definimos a aplicação associada a  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \text{spec}(\varphi) : \text{spec}B &\rightarrow \text{spec}A \\ p &\mapsto \varphi^{-1}(p). \end{aligned}$$

A aplicação  $\text{spec}(\varphi)$  está bem definida, pois pela Proposição 3.3  $\varphi^{-1}(p)$  é um ideal primo de  $A$ , para todo ideal primo  $p$  de  $B$ .

**Proposição 3.31** Seja  $\varphi : A \rightarrow B$  um homomorfismo de anéis. Então  $\text{spec}(\varphi)$  é uma aplicação contínua.

*Demonstração:* Ver [4], Capítulo 1, Exercício 21. ■

**Proposição 3.32** Seja  $\varphi : A \rightarrow B$  um homomorfismo de anéis.

- (a) Se  $\varphi$  é sobrejetor, então  $\text{spec}(\varphi)$  é um homeomorfismo de  $\text{spec}B$  sobre  $V(\ker\varphi)$ .
- (b) Se  $\varphi$  é injetora, então  $\overline{\text{spec}(\varphi)(\text{spec}B)} = \text{spec}A$ .

*Demonstração:* Ver [4], Capítulo 1, Exercício 21. ■

**Corolário 3.33** Sejam  $A$  um anel,  $I$  um ideal de  $A$  e  $\pi : A \rightarrow A/I$  o homomorfismo canônico. Então

$$\text{spec}(\pi) : \text{spec}A/I \hookrightarrow \text{spec}A$$

é um homeomorfismo de  $\text{spec}A/I$  sobre o fechado  $V(I) \subset \text{spec}A$ .

**Corolário 3.34** Sejam  $A$  um anel,  $S$  um conjunto multiplicativamente fechado de  $A$  e  $\psi : A \rightarrow S^{-1}A$  a localização. Então

$$\text{spec}(\psi) : \text{spec}S^{-1}A \rightarrow \text{spec}A$$

é um homeomorfismo de  $\text{spec}S^{-1}A$  sobre o conjunto  $U_S = \{p \in \text{spec}A \mid p \cap S = \emptyset\} \subset \text{spec}A$ .

**Corolário 3.35** Sejam  $A$  um anel,  $f \in A$  e  $S = \{1, f, f^2, \dots\} \subset A$ . Seja  $\psi : A \rightarrow A_f$  a localização. Então

$$\text{spec}(\psi) : \text{spec}A_f \rightarrow \text{spec}A$$

é um homeomorfismo de  $\text{spec}A_f$  sobre o aberto  $D(f)$ .

## 4 Geometria Algébrica Clássica

Neste capítulo definiremos e apresentaremos propriedades relacionadas às variedades algébricas afins e as variedades algébricas projetivas. O livro usado como referência é [5].

### 4.1 Variedades Algébricas Afins

**Definição 4.1** Dado um corpo  $k$  e um inteiro positivo  $n$  definimos o *espaço afim  $n$ -dimensional* sobre  $k$

$$k^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in k\}.$$

**Definição 4.2** Sejam  $k$  um corpo e  $E$  um subconjunto de polinômios de  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Definimos a *variedade afim* de  $E$  por:

$$\mathbf{V}(E) = \{a \in k^n \mid f(a) = 0, \forall f \in E\}.$$

**Proposição 4.1** Seja  $I$  o ideal gerado por  $E$ . Então  $\mathbf{V}(E) = \mathbf{V}(I)$ .

*Demonstração:* Sejam  $a \in \mathbf{V}(E)$  e  $F \in I$ , então

$$F = h_1 f_1 + \dots + h_l f_l$$

onde  $f_1, \dots, f_l \in E$  e  $h_1, \dots, h_l \in k[x_1, \dots, x_n]$ . Logo,

$$\begin{aligned} F(a) &= h_1(a)f_1(a) + \dots + h_l(a)f_l(a) \\ &= h_1(a)0 + \dots + h_l(a)0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Deste modo,  $a \in \mathbf{V}(I)$  e  $\mathbf{V}(E) \subset \mathbf{V}(I)$ . Por outro lado, se  $b \in \mathbf{V}(I)$  e  $G \in E$ . Então, como  $E \subset I$ , temos que  $G \in I$  e, assim,  $G(b) = 0$ . Portanto,  $\mathbf{V}(I) \subset \mathbf{V}(E)$ . ■

A Proposição 4.1 nos diz que toda variedade afim  $V$  é da forma  $V = \mathbf{V}(I)$ , onde  $I$  é um ideal de  $K[x_1, \dots, x_n]$ . Esta observação, associada ao Teorema da Base de Hilbert 3.26, nos permite uma nova definição para as variedades algébricas, isto é,

**Definição 4.3** Sejam  $k$  um corpo e  $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$  polinômios. Definimos a *variedade afim* definida por  $f_1, \dots, f_s$ :

$$\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) = \{a \in k^n \mid f_i(a) = 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq s\}.$$

**Exemplo 4.1** A seguir alguns exemplos de variedades afins em  $\mathbb{C}^2$ :

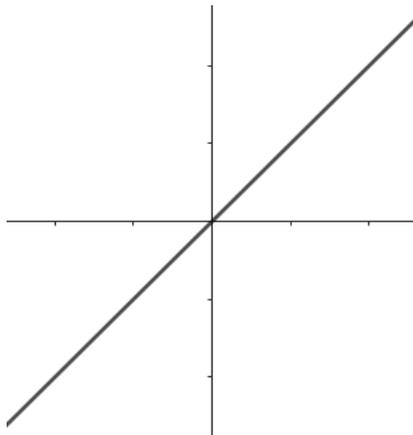


Figura 4.1:  $\mathbf{V}(x - y)$ .

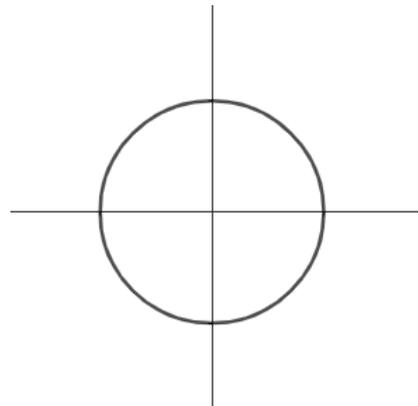


Figura 4.2:  $\mathbf{V}(x^2 + y^2 - 1)$ .

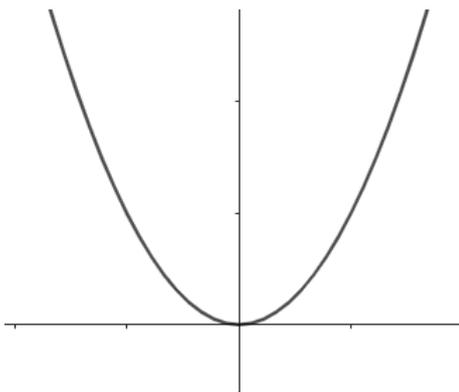


Figura 4.3:  $\mathbf{V}(x^2 - y)$ .

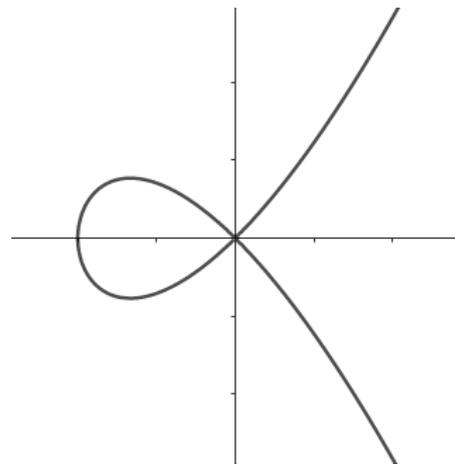


Figura 4.4:  $\mathbf{V}(y^2 - x^3 - x^2)$ .

**Proposição 4.2** Seja  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  e  $J = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ . Então  $IJ$  é gerado pelo conjunto de todos os produtos de geradores de  $I$  e  $J$ , isto é

$$IJ = \langle f_i g_j \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s \rangle.$$

*Demonstração:* Ver [5], Capítulo 4, Seção 3, Proposição 6. ■

**Proposição 4.3** Se  $I$  e  $J$  são ideais em  $k[x_1, \dots, x_n]$ , então  $\mathbf{V}(IJ) = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$ .

*Demonstração:* Sejam  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  e  $J = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ . Pela Proposição 4.2, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(IJ) &= \mathbf{V}(f_i g_j \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s) \\ &= \mathbf{V}(f_1, \dots, f_r) \cup \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s) \\ &= \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J). \end{aligned}$$
■

**Proposição 4.4** A interseção de uma família qualquer de variedades afins é uma variedade afim.

*Demonstração:* Seja  $\{V_\alpha = \mathbf{V}(I_\alpha)\}_\alpha$  uma família de variedades afins, suponha  $P \in \bigcap V_\alpha$ , então  $P \in \mathbf{V}(I_\alpha)$  para todo  $\alpha$ , assim temos que  $P \in \mathbf{V}(\bigcup I_\alpha)$ . Portanto  $V_\alpha \subset \mathbf{V}(\bigcup I_\alpha)$ .

Agora considere  $P \in \mathbf{V}(\bigcup I_\alpha)$ , ou seja, para todo  $f \in \bigcup I_\alpha$  temos que  $f(P) = 0$ , portanto  $P \in \mathbf{V}(I_\alpha)$ , ou seja,  $P \in \bigcap V_\alpha$ . Isto implica que  $V_\alpha \supset \mathbf{V}(\bigcup I_\alpha)$ . Portanto

$$\bigcap V_\alpha = \mathbf{V}(\bigcup I_\alpha),$$

então  $\bigcap V_\alpha$  é uma variedade afim. ■

Observe que,  $\mathbf{V}(1) = \emptyset$  e  $\mathbf{V}(0) = k^n$ . Logo, pelas Proposições 4.3 e 4.4, podemos definir uma topologia em  $k^n$ , isto é

**Definição 4.4** Definimos em  $k^n$  uma topologia, chamada de *topologia de Zariski*, onde os fechados são as variedades afins.

A partir de agora sempre que tratarmos de aspectos topológicos em  $k^n$ , estará subentendido que estamos tratando da topologia de Zariski, a menos que seja dito contrário.

**Definição 4.5** Definimos o *ideal de uma variedade afim*  $V \subset k^n$  como sendo o conjunto

$$\mathbf{I}(V) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(a) = 0, \forall a \in V\}.$$

O ideal de uma variedade  $\mathbf{I}(V)$  é um ideal de  $k[x_1, \dots, x_n]$ . De fato, o polinômio identicamente nulo está em  $\mathbf{I}(V)$  e, dados  $f, g \in \mathbf{I}(V)$  e  $h \in k[x_1, \dots, x_n]$  temos que

$$\begin{aligned} (f + g)(a) &= f(a) + g(a) = 0, \\ (fh)(a) &= f(a)h(a) = 0h(a) = 0 \end{aligned}$$

para todo  $a \in V$ . Portanto,  $\mathbf{I}(V)$  é um ideal.

**Lema 4.5** Seja  $k$  um corpo.

(a) Se  $I_1 \subset I_2$ , então  $\mathbf{V}(I_1) \supset \mathbf{V}(I_2)$ .

(b) Se  $V_1 \subset V_2$ , então  $\mathbf{I}(V_1) \supset \mathbf{I}(V_2)$ .

onde  $I_1, I_2 \subset k[x_1, \dots, x_n]$  ideais e  $V_1, V_2 \subset k^n$  variedades afins.

*Demonstração:*

(a) Dados  $a \in \mathbf{V}(I_2)$  e  $f \in I_1$ . Como  $I_1 \subset I_2$ , temos que  $f \in I_2$  e, assim,  $f(a) = 0$ . Portanto,  $a \in \mathbf{V}(I_1)$  e  $\mathbf{V}(I_1) \supset \mathbf{V}(I_2)$ .

(b) Dados  $g \in \mathbf{I}(V_2)$  e  $b \in V_1$ . Como  $V_1 \subset V_2$ , temos que  $b \in V_2$  e, assim,  $g(b) = 0$ . Portanto,  $g \in \mathbf{I}(V_1)$  e  $\mathbf{I}(V_1) \supset \mathbf{I}(V_2)$ . ■

**Proposição 4.6** Seja  $k$  um corpo. Sejam  $V \subset k^n$  uma variedade afim e  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  um ideal, então  $\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$  e  $\mathbf{V}(r(I)) = \mathbf{V}(I)$ .

*Demonstração:*

- i -  $\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$ : Sai direto da definição de  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$ .
- ii -  $\mathbf{V}(r(I)) = \mathbf{V}(I)$ : Como  $I \subset r(I)$ , pelo Lema 4.5, temos que  $\mathbf{V}(r(I)) \subset \mathbf{V}(I)$ . Por outro lado, se  $a \in \mathbf{V}(I)$  e  $f \in r(I)$ , existe  $m > 0$  tal que  $f^m \in I$ . Logo,

$$\begin{aligned} f^m(a) &= 0 \\ \Rightarrow f(a) &= 0. \end{aligned}$$

Com isso,  $a \in \mathbf{V}(r(I))$ . Portanto,  $\mathbf{V}(r(I)) = \mathbf{V}(I)$ . ■

**Lema 4.7** Seja  $V$  uma variedade. Então  $\mathbf{I}(V)$  é um ideal radical.

*Demonstração:* Se  $f^m \in \mathbf{I}(V)$ , então

$$\begin{aligned} f^m(a) &= f(a)f(a) \dots f(a) = 0 \\ \Rightarrow f(a) &= 0 \end{aligned}$$

para todo  $a \in V$ . Portanto,  $f \in \mathbf{I}(V)$  e  $\mathbf{I}(V)$  é radical. ■

**Teorema 4.8** (*Teorema dos zeros de Hilbert*) Seja  $k$  um corpo algebricamente fechado.

- (a) Se um ideal  $I \in k[x_1, \dots, x_n]$  satisfaz  $\mathbf{V}(I) = \emptyset$ , então  $I = k[x_1, \dots, x_n]$ .
- (b) Se  $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ , então  $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s))$  se, e somente se,  $f^m \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$  para algum inteiro  $m \geq 1$ .
- (c) Se  $I$  é um ideal em  $k[x_1, \dots, x_n]$ , então  $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = r(I)$ .

*Demonstração:* Ver [5], Capítulo 4, Seção 1, Teorema 1, Teorema 2; Seção 2, Teorema 6. ■

Para demonstrar o teorema a seguir, utilizaremos as ferramentas apresentadas nessa seção.

**Teorema 4.9** (*Correspondência ideal-variedade*) Seja  $k$  um corpo algebricamente fechado. Existe uma bijeção, que reverte a inclusão, entre as variedades afins em  $k^n$  e os ideais radicais em  $k[x_1, \dots, x_n]$ .

*Demonstração:* Sejam

$$\varphi : I \mapsto \mathbf{V}(I) \text{ e } \psi : V \mapsto \mathbf{I}(V),$$

onde  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  é um ideal radical e  $V \subset k^n$  uma variedade afim. Com isso, temos que

$$(\varphi \circ \psi)(V) = \varphi(\mathbf{I}(V)) = V.$$

Por outro lado,

$$(\psi \circ \varphi)(I) = \psi(\mathbf{V}(I)) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = r(I) = I.$$

Portanto,  $\psi$  é a inversa de  $\varphi$ . ■

**Definição 4.6** Uma variedade afim  $V \subset k^n$  é *irredutível* se sempre que  $V$  é escrita da forma  $V = V_1 \cup V_2$ , onde  $V_1$  e  $V_2$  são variedades afins, então  $V_1 = V$  ou  $V_2 = V$ . Caso contrário, dizemos que a variedade é *reduzível*.

**Proposição 4.10** Seja  $V \subset k^n$  uma variedade afim. Então  $V$  é irredutível se, e somente se,  $\mathbf{I}(V)$  é um ideal primo.

*Demonstração:* Ver [5], Capítulo 4, Seção 5, Proposição 3. ■

**Observação 4.1** Todo ideal primo é radical.

De fato, sejam  $I$  um ideal primo e  $f^m \in I$ , para algum  $m > 0$ . Escolhemos o  $m$  de modo que seja o menor inteiro positivo que satisfaz  $f^m \in I$ . Suponha, por absurdo, que  $f \notin I$ , então

$$f^{m-1}f = f^m \in I.$$

Contradição, pois  $I$  é primo, mas  $f^{m-1} \notin I$  e  $f \notin I$ . Portanto,  $f \in I$  e, assim,  $I$  é radical.

**Corolário 4.11** Seja  $k$  um corpo algebricamente fechado. Existe uma bijeção, que reverte a inclusão, entre as variedades afins irredutíveis em  $k^n$  e os ideais primos em  $k[x_1, \dots, x_n]$ .

**Exemplo 4.2** Seja  $k$  um corpo algebricamente fechado. Se  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$  é irredutível, então  $\mathbf{V}(f)$  é irredutível.

Tome  $I = \langle f \rangle$ . Se  $g \cdot h \in I$ , então

$$gh = pf, \text{ onde } p \in k[x_1, \dots, x_n].$$

Como  $f$  é irredutível, temos que  $g$  ou  $h$  é divisível por  $f$ . Então,  $g \in I$  ou  $h \in I$ . Logo,  $I$  é primo e, portanto, como  $k$  é algebricamente fechado,  $\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(f)$  é irredutível.

**Exemplo 4.3** A variedade afim  $V = \mathbf{V}(y - x^2, z - x^3) \subset \mathbb{R}^3$  é irredutível. De fato, mostremos que  $\mathbf{I}(V)$  é primo. Suponha que  $fg \in \mathbf{I}(V)$ . Como a curva é parametrizada por  $(t, t^2, t^3)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , segue que

$$\begin{aligned} f(t, t^2, t^3)g(t, t^2, t^3) &= 0 \\ \Rightarrow f(t, t^2, t^3) &= 0 \text{ ou } g(t, t^2, t^3) = 0. \end{aligned}$$

Logo,  $f$  ou  $g$  se anula em toda variedade afim  $V$ . Portanto,  $f$  ou  $g$  está em  $\mathbf{I}(V)$ , provando que  $\mathbf{I}(V)$  é primo e, assim,  $V$  é irredutível.

**Proposição 4.12** Se  $k$  é um corpo infinito e  $V \subset k^n$  é uma variedade afim definida parametricamente por

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(t_1, \dots, t_m) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(t_1, \dots, t_m), \end{aligned}$$

onde  $f_1, \dots, f_n$  são polinômios em  $k[t_1, \dots, t_m]$ , então  $V$  é irredutível.

*Demonstração:* Ver [5], Capítulo 4, Seção 5, Proposição 5. ■

**Observação 4.2** Se  $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$ , então  $\mathbf{I}(\{a_1, \dots, a_n\}) = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ .

De fato, como  $x_i - a_i$  se anula em  $(a_1, \dots, a_n)$  para cada  $1 \leq i \leq n$ , então  $x_i - a_i \in \mathbf{I}(\{a_1, \dots, a_n\})$  para cada  $1 \leq i \leq n$  e, assim,  $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle \subset \mathbf{I}(\{a_1, \dots, a_n\})$ .

Por outro lado, se  $f \in \mathbf{I}(\{a_1, \dots, a_n\})$ , podemos escrever  $f$  da seguinte forma

$$f = g_1(x_1 - a_1) + \dots + g_n(x_n - a_n) + r$$

onde  $g_1, \dots, g_n \in k[x_1, \dots, x_n]$  e  $r \in k$ . Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= f(a_1, \dots, a_n) \\ &= g_1(a_1, \dots, a_n)0 + \dots + g_n(a_1, \dots, a_n)0 + r \\ &= r. \end{aligned}$$

Logo,  $f \in \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$  e, portanto,  $\mathbf{I}(\{a_1, \dots, a_n\}) \subset \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ .

**Teorema 4.13** Seja  $k$  um corpo algebricamente fechado. Então todo ideal maximal de  $k[x_1, \dots, x_n]$  é da forma  $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ , para algum  $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$ .

*Demonstração:* Seja  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  um ideal maximal. Como  $I \neq k[x_1, \dots, x_n]$ , pelo Teorema dos zeros de Hilbert, temos que  $\mathbf{V}(I) \neq \emptyset$ . Logo, existe um ponto  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(I)$ . Assim, todo  $f \in I$  se anula em  $(a_1, \dots, a_n)$ , logo  $f \in \mathbf{I}(\{(a_1, \dots, a_n)\})$ , então  $I \subset \mathbf{I}(\{(a_1, \dots, a_n)\})$ . Porém, como  $I$  é maximal e  $\mathbf{I}(\{(a_1, \dots, a_n)\}) = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$  (pela observação anterior), temos que

$$\begin{aligned} I &= \mathbf{I}(\{(a_1, \dots, a_n)\}) \\ &= \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle. \end{aligned}$$

■

**Corolário 4.14** Seja  $k$  um corpo algebricamente fechado. Existe uma bijeção, que reverte a inclusão, entre os pontos em  $k^n$  e os ideais maximais em  $k[x_1, \dots, x_n]$ .

**Proposição 4.15** Uma variedade afim  $V$  é irredutível se, e somente se, para cada variedade afim  $W \subsetneq V$  a diferença  $V - W$  é densa em  $V$ .

*Demonstração:* Ver [5], Capítulo 4, Seção 4, Proposição 13.

■

## 4.2 Variedades Algébricas Projetivas

Neste seção definiremos e estudaremos propriedades relacionadas às variedades projetivas sobre o espaço projetivo. Para isso, usaremos como referência o livro texto [5].

**Definição 4.7** O *plano projetivo* sobre  $k$ , denotado por  $\mathbb{P}^2(k)$  (ou apenas por  $\mathbb{P}^2$ ), é o conjunto

$$\mathbb{P}^2(k) = k^2 \cup \{\text{Um ponto no } \infty \text{ para cada classe de equivalência de retas paralelas}\}$$

Seja  $L \subset k^2$  uma reta. Seja  $[L]_\infty$  o ponto comum em  $\infty$  de todas as retas paralelas a  $L$ . Então chamaremos o conjunto

$$\overline{L} = L \cup [L]_\infty \subset \mathbb{P}^2$$

de *reta projetiva* correspondente a  $L$ . Observe que duas retas projetivas sempre se intersectam exatamente em um ponto: se elas não são paralelas em  $k^2$ , se encontram em um ponto em  $k^2$ , se elas são paralelas em  $k^2$ , se encontram em seu ponto comum no infinito.

**Definição 4.8** Defina em  $k^3$  a relação de equivalência  $p \sim q \Leftrightarrow p = \lambda q$ , onde  $\lambda \in k$ . Defina também o *plano projetivo* como sendo

$$\mathbb{P}^2(k) = \frac{k^3 - \{0\}}{\sim}.$$

A cada  $(x_0, x_1, x_2) \in k^3 - \{0\}$  denotaremos a sua classe de equivalência por  $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2$ .

**Definição 4.9** Sejam  $A, B, C \in k$ , onde  $A, B$  ou  $C$  é diferente de 0. O conjunto

$$\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid Ax_0 + Bx_1 + Cx_2 = 0\}$$

é chamado de *reta projetiva* em  $\mathbb{P}^2$ .

A próxima proposição servirá para relacionar as duas definições de plano projetivo apresentadas.

**Proposição 4.16** A aplicação

$$\begin{aligned} \pi : k^2 &\rightarrow \mathbb{P}^2(k) \\ (x_0, x_1) &\mapsto (x_0 : x_1 : 1), \end{aligned}$$

é injetora e o complemento de sua imagem é a reta projetiva  $H_\infty$  definida por  $x_2 = 0$ .

*Demonstração:* Seja  $(x, y)$  e  $(x', y')$  tal que  $\pi(x, y) = \pi(x', y')$ . então

$$(x : y : 1) = (x' : y' : 1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x, y, 1) &= \lambda(x', y', 1), \text{ para algum } \lambda \in k - \{0\} \\ \Rightarrow \lambda &= 1 \\ \Rightarrow (x, y) &= (x', y') \end{aligned}$$

temos que  $\pi$  é injetora

Seja  $P = (x : y : z) \in \mathbb{P}^2$ . Se  $z = 0$ , então  $P$  está na reta projetiva  $H_\infty$ . Por outro lado, se  $z \neq 0$ , então podemos multiplicar por  $1/z$ , isto é

$$P = (x : y : z) = (x/z : y/z : 1),$$

isso mostra que  $P$  está na imagem da aplicação  $\pi$ , pois basta toma o ponto  $(x/z, y/z) \in k^2$ . Portanto, a imagem da aplicação  $\pi$  é o complemento da reta projetiva  $H_\infty$ . ■

Segue da Proposição 4.16 que

$$\mathbb{P}^2 = k^2 \cup H_\infty, H_\infty = \{(x_0 : x_1 : 0) \mid x_0 \neq 0 \text{ ou } x_1 \neq 0\}.$$

Para terminarmos de averiguar que as duas definições do plano projetivo são equivalente, resta mostrar que  $H_\infty$  consiste em pontos no  $\infty$  da Definição 4.7. Assim, precisamos estudar como as retas em  $k^2$ , chamaremos de *retas afins*, se relacionam com as retas projetivas.

Retas Afins	Retas Projetivas	Pontos em $\infty$
$L : y = mx + b$	$\bar{L} : y = mx + bz$	$(1 : m : 0)$
$L : x = c$	$\bar{L} : x = cz$	$(0 : 1 : 0)$

Para entender essa tabela, primeiro considere uma reta afim não vertical  $L$  definida por  $y = mx + b$ . Dado  $(x, y) \in k^2$ , temos que  $\pi(x, y) = (x : y : 1)$  satisfaz a equação  $y = mx + bz$ . Assim,  $(x : y : z)$  está na reta projetiva  $\bar{L}$  definida por  $mx - y + bz = 0$ , de modo que  $L$  pode ser considerado um subconjunto de  $\bar{L}$ . Os pontos de  $\bar{L}$ , que não estão em  $L$ , são os pontos da forma  $z = 0$ . As equações  $z = 0$  e  $y = mx + bz$  implicam em  $y = mx$ , logo as soluções são  $(x : mx : 0)$ . Deste modo,  $x \neq 0$ , pois as coordenadas nunca são todas nulas simultaneamente, e dividindo por  $x$ , temos que  $(1 : m : 0)$  é o único ponto em  $\bar{L} \cap H_\infty$ . O pensamento é análogo às retas afins da forma  $x = c$ .

A tabela mostra que duas retas em  $k^2$  se encontram no mesmo ponto em  $\infty$  se, e somente se, elas são paralelas. Consequentemente,  $H_\infty$  consiste em um único ponto em  $\infty$  para cada classe equivalência de retas paralelas. Então  $\mathbb{P}^2 = k^2 \cup H_\infty$  mostra que as duas definições são o mesmo objeto, o plano projetivo.

Por conta da Definição 4.8 que restringe  $(x_0, x_1, x_2) \neq (0, 0, 0)$ , temos a seguinte bijeção

$$\mathbb{P}^2 \cong \{ \text{retas que passam pela origem em } k^3 \}.$$

**Definição 4.10** Defina em  $k^n$  a relação de equivalência  $p \sim q \Leftrightarrow p = \lambda q$ , onde  $\lambda \in k$ . Defina também o *espaço projetivo n-dimensional* como sendo

$$\mathbb{P}^n(k) = \frac{k^n - \{0\}}{\sim}.$$

A cada  $(x_0, \dots, x_n) \in k^n - \{0\}$  denotaremos a sua classe de equivalência por  $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ , chamadas de *coordenadas homogêneas*.

Seguindo o mesmo raciocínio, temos que

$$\mathbb{P}^n \cong \{ \text{retas que passa pela origem em } k^{n+1} \}.$$

**Proposição 4.17** Seja

$$U_0 = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 \neq 0\}.$$

Então a aplicação  $\phi$  que leva  $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$  em  $(1 : a_1 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n$  é uma bijeção entre  $k^n$  e  $U_0 \subset \mathbb{P}^n$ .

*Demonstração:* Definimos

$$\begin{aligned} \psi : U_0 &\rightarrow k^n \\ (x_0 : \dots : x_n) &\mapsto (x_1/x_0, \dots, x_n/x_0). \end{aligned}$$

Primeiro mostremos que  $\psi$  esta bem definida. De fato, se  $(x_0 : \dots : x_n) = (x'_0 : \dots : x'_n) \in U_0$ , então existe  $\lambda \in k - \{0\}$ , tal que

$$(x'_0, \dots, x'_n) = \lambda(x_0, \dots, x_n).$$

Então

$$\begin{aligned}
 \psi(x'_0, \dots, x'_n) &= \left( \frac{x'_1}{x'_0}, \dots, \frac{x'_n}{x'_0} \right) \\
 &= \left( \frac{\lambda x_1}{\lambda x_0}, \dots, \frac{\lambda x_n}{\lambda x_0} \right) \\
 &= \left( \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \\
 &= \psi(x_0 : \dots : x_n).
 \end{aligned}$$

Agora, basta mostrar que  $\psi$  é a inversa de  $\phi$ . De fato, se  $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$ , temos que

$$\begin{aligned}
 \psi(\phi(a_1, \dots, a_n)) &= \psi(1 : a_1 : \dots : a_n) \\
 &= (a_1, \dots, a_n).
 \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $(a_0 : \dots : a_n) \in U_0$ , temos que

$$\begin{aligned}
 \phi(\psi(a_0 : \dots : a_n)) &= \phi\left(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}\right) \\
 &= \left(1, \frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}\right) \\
 &= (a_0 : a_1 : \dots : a_n).
 \end{aligned}$$

■

Temos que  $\mathbb{P}^n = U_0 \cup H$ , onde

$$H = \{P \in \mathbb{P}^n \mid P = (0 : x_1 : \dots : x_n)\}.$$

Se identificarmos  $U_0$  com o espaço afim  $k^n$  e  $H$  como o *hiperplano no infinito*  $\mathbb{P}^{n-1}$ , então

$$\mathbb{P}^n = k^n \cup \mathbb{P}^{n-1}.$$

**Corolário 4.18** Para cada  $i = 0, \dots, n$ , seja

$$U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}.$$

- (a) Os pontos de  $U_i$  estão em bijeção com os pontos de  $k^n$ .
- (b) O complementar  $\mathbb{P}^n - U_i$  pode ser identificado com  $\mathbb{P}^{n-1}$ .
- (c)  $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$ .

Note que dado um polinômio qualquer  $f \in k[x_0, \dots, x_n]$  não faz sentido avaliar em  $(a_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ , pois o valor de  $f$  dependerá do representante.

**Exemplo 4.4** Dados  $f = x_1 - x_2^2$  e  $P = (1 : 4 : 2) = (2 : 8 : 4)$ . Observe que

$$f(1, 4, 2) = 0 \text{ e } f(2, 8, 4) = -8.$$

Desta forma, não conseguimos determinar se  $f$  se anula em  $P$ .

Para evitar este tipo de problema, iremos definir uma classe especial de polinômios.

**Definição 4.11** Dado  $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ , dizemos que  $f$  é um polinômio *homogêneo* se todos os monômios de  $f$  têm o mesmo grau.

**Definição 4.12** Dado um polinômio qualquer  $f \in k[x_0, \dots, x_n]$  de grau  $d$ , podemos escrever  $f$  da seguinte forma

$$f = \sum_{i=0}^d f_i,$$

onde  $f_i \in k[x_0, \dots, x_n]$  é um polinômio homogêneo de grau  $i$ . Dizemos que cada  $f_i$  desta decomposição é uma *componente homogênea*.

**Exemplo 4.5** Dado o polinômio  $f = x^2y^3 + 3y^5 + x^4 + 2x^2y^2 + x^3 + xy + 6x + y + 10$ . Então,

$$f = \sum_{i=0}^5 f_i,$$

onde,  $f_0 = 10, f_1 = 6x + y, f_2 = xy, f_3 = x^3, f_4 = x^4 + 2x^2y^2, f_5 = x^2y^3 + 3y^5$ .

**Proposição 4.19** Seja  $f \in k[x_0, \dots, x_n]$  um polinômio homogêneo, se  $f$  se anula em um representante do ponto  $P \in \mathbb{P}^n$ , então  $f$  se anula em qualquer representante de  $P$ .

*Demonstração:* Sejam  $(a_0 : \dots : a_n) = (\lambda a_0 : \dots : \lambda a_n)$  coordenadas homogêneas para um ponto  $P \in \mathbb{P}^n$ . Suponha que  $f(a_0, \dots, a_n) = 0$ . Como  $f$  é homogêneo de grau  $d$ , então todos os seus monômios são da forma

$$c \prod_{i=0}^n x_i^{\alpha_i}, \text{ onde } \alpha_0 + \dots + \alpha_n = d \text{ e } c \in k.$$

Substituindo  $x_i = \lambda a_i$ , temos que

$$c \prod_{i=0}^n (\lambda a_i)^{\alpha_i} = \lambda^d c \prod_{i=0}^n a_i^{\alpha_i}.$$

Logo, os termos em  $f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$  tem o fator comum  $\lambda^d$  e, portanto

$$f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \dots, a_n) = 0.$$

Nestas hipóteses, concluímos que  $f(P) = 0$  não depende da representação de  $P$ . ■

**Definição 4.13** Sejam  $k$  um corpo e  $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$  polinômios homogêneos. Definimos a *variedade projetiva* definida por  $f_1, \dots, f_s$ :

$$\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) = \{P \in \mathbb{P}^n \mid f_i(P) = 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq s\}.$$

Pela Proposição 4.19, a variedade projetiva está bem definida.

**Observação 4.3** Sempre que usarmos a notação  $\mathbf{I}_a$  e  $\mathbf{V}_a$ , estaremos nos referindo aos ideais e variedades, respectivamente, no espaço afim.

**Proposição 4.20** Seja  $V = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$  uma variedade projetiva. Então  $W = V \cap U_0$  corresponde a uma variedade afim  $\mathbf{V}(g_1, \dots, g_s) \subset k^n$ , onde

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = f_i(1, x_1, \dots, x_n), \text{ para cada } 1 \leq i \leq s.$$

*Demonstração:* Ver [5], Capítulo 8, Seção 2, Proposição 6. ■

O processo descrito na Proposição 4.20 é chamado de *deshomogeneização*.

**Exemplo 4.6** Dada a variedade projetiva

$$\mathbf{V}(x_1^2 - x_2x_0, x_1^3 - x_3x_0^2) \subset \mathbb{P}^3.$$

Temos a variedade afim correspondente

$$\mathbf{V}(x_1^2 - x_2, x_1^3 - x_3) \subset k^3.$$

**Proposição 4.21** Seja  $g \in k[x_1, \dots, x_n]$  polinômio de grau  $d$ .

(a) Seja  $g = \sum_{i=0}^d g_i$  a expansão de  $g$  como soma de suas componentes homogêneas, onde  $g_i$  tem grau  $i$ . Então

$$g^h(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d g_i(x_1, \dots, x_n) x_0^{d-i}$$

é um polinômio homogêneo de grau  $d$  em  $k[x_0, \dots, x_n]$ . Vamos chamar  $g^h$  de *homogeneização* de  $g$ .

(b) A homogeneização de  $g$  pode ser calculada pela fórmula

$$g^h = x_0^d g\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

(c) A deshomogeneização de  $g^h$  é  $g$ , isto é

$$g^h(1, x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n).$$

(d) Sejam  $F(x_0, \dots, x_n)$  um polinômio homogêneo e  $x_0^e$  a maior potência de  $x_0$  que divide  $F$ . Se  $f = F(1, x_1, \dots, x_n)$  é uma deshomogeneização de  $F$ , então  $F = x_0^e f^h$ .

*Demonstração:* Ver [5], Capítulo 8, Seção 2, Proposição 7.

**Definição 4.14** Um ideal  $I \subset k[x_0, \dots, x_n]$  é chamado de *homogêneo* se para cada  $f \in I$ , as componentes homogêneas  $f_i$  de  $f$  estão em  $I$ .

**Proposição 4.22** Seja  $I \subset k[x_0, \dots, x_n]$  um ideal. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a)  $I$  é um ideal homogêneo em  $k[x_0, \dots, x_n]$ .

(b)  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ , onde  $f_1, \dots, f_s$  são homogêneos.

*Demonstração:* Ver [5], Capítulo 8, Seção 3, Teorema 2. ■

**Definição 4.15** Sejam  $k$  um corpo e  $I$  ideal homogêneo de  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Definimos a *variedade projetiva* de  $I$  por:

$$\mathbf{V}(I) = \{P \in \mathbb{P}^n \mid f(P) = 0, \forall f \in I\}.$$

Para mostrar que  $\mathbf{V}(I)$  é uma variedade projetiva de fato, segue a proposição:

**Proposição 4.23** Seja  $I \subset k[x_0, \dots, x_n]$  um ideal homogêneo e suponha que  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ , onde  $f_1, \dots, f_s$  são polinômios homogêneos. Então

$$\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s).$$

*Demonstração:* É fácil ver que  $\mathbf{V}(I) \subset \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ . Para mostrar a outra inclusão, seja  $P \in \mathbb{P}^n$  tal que  $f_i(P) = 0$ , para todo  $1 \leq i \leq s$ . Então, se

$$f = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n, \text{ onde } a_i \in k[x_0, \dots, x_n],$$

Temos que

$$f(P) = a_1(P)f_1(P) + \dots + a_n(P)f_n(P) = 0.$$

Portanto,  $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) \subset \mathbf{V}(I)$ . ■

**Proposição 4.24** Seja  $k$  um corpo infinito. Seja  $V \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade projetiva. O conjunto

$$\mathbf{I}(V) = \{f \in k[x_0, \dots, x_n] \mid f(a_0, \dots, a_n) = 0, \forall (a_0, \dots, a_n) \in V\}$$

é um ideal homogêneo em  $k[x_0, \dots, x_n]$ .

*Demonstração:* O conjunto  $\mathbf{I}(V)$  é fechado para a soma e fechado por produto por elementos de  $k[x_0, \dots, x_n]$ , argumento semelhante ao caso afim. Isto é,  $\mathbf{I}(V)$  é um ideal.

Agora, tome  $f \in \mathbf{I}(V)$  e um ponto  $P \in V$ . Logo,  $f$  se anula no ponto  $P$ , ou seja,  $f$  se anula em todos os representantes de  $P$ . Como  $k$  é infinito, implica que cada componente homogênea  $f_i$  de  $f$  se anula em  $P$ . Isso mostra que  $f_i \in \mathbf{I}(V)$  e, portanto,  $\mathbf{I}(V)$  é um ideal homogêneo. ■

**Lema 4.25** Seja  $k$  um corpo infinito.

(a) Se  $I_1 \subset I_2$ , então  $\mathbf{V}(I_1) \supset \mathbf{V}(I_2)$ .

(b) Se  $V_1 \subset V_2$ , então  $\mathbf{I}(V_1) \supset \mathbf{I}(V_2)$ .

onde  $I_1, I_2 \subset k[x_0, \dots, x_n]$  são ideais homogêneos e  $V_1, V_2 \subset \mathbb{P}^n$  variedades projetivas.

*Demonstração:* Análogo ao caso afim. ■

**Proposição 4.26** Seja  $k$  um corpo infinito. Sejam  $V \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade projetiva, então  $\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$ .

*Demonstração:* Análogo ao caso afim.

**Proposição 4.27** Seja  $I \subset k[x_0, \dots, x_n]$  um ideal homogêneo. Então  $r(I)$  é um ideal homogêneo.

*Demonstração:* Se  $f \in r(I)$ , então  $f^m \in I$ , para algum  $m \geq 1$ . Se  $f \neq 0$ , decomponha  $f$  em suas componentes homogêneas

$$f = \sum f_i = f_{max} + \sum_{i < max} f_i,$$

onde  $f_{max}$  é a componente homogênea não nula de grau máximo em  $f$ . Expandindo a potência  $f^m$ , é fácil mostrar que

$$(f^m)_{max} = (f_{max})^m.$$

Como  $I$  é um ideal homogêneo,  $(f^m)_{max} \in I$ . Logo,  $(f_{max})^m \in I$ , então  $f_{max} \in r(I)$ .

Se definirmos  $g = f - f_{max} \in r(I)$  e repetir o argumento, obtemos  $g_{max} \in r(I)$ . Mas  $g_{max}$  é também uma das componentes homogêneas de  $f$ . Aplicando esse raciocínio repetidamente, mostra-se que todas as componentes homogêneas de  $f$  estão em  $r(I)$ . ■

**Teorema 4.28** (*Teorema dos zeros de Hilbert Fraco*) Sejam  $k$  um corpo algebricamente fechado e  $I$  um ideal homogêneo em  $k[x_0, \dots, x_n]$ . Então as afirmações a seguir são equivalentes:

- (a)  $\mathbf{V}(I)$  é vazio.
- (b) Para cada  $0 \leq i \leq n$ , existe um inteiro  $m_i \geq 0$  tal que  $x_i^{m_i} \in I$ .
- (c) Existe algum  $r \geq 1$  tal que  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \subset I$ .

*Demonstração:* Ver [5], Capítulo 8, Seção 3, Teorema 8. ■

**Teorema 4.29** (*Teorema dos zeros de Hilbert forte*) Sejam  $k$  um corpo algebricamente fechado e  $I$  um ideal homogêneo em  $k[x_0, \dots, x_n]$ . Se  $V = \mathbf{V}(I)$  é uma variedade projetiva não vazia em  $\mathbb{P}^n$ , então  $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = r(I)$ .

*Demonstração:* Defina o cone afim  $C_V = \mathbf{V}_a(I) \subset k^{n+1}$ . Então,  $\mathbf{I}_a(C_V) = \mathbf{I}(V)$ . De fato, suponha que  $f \in \mathbf{I}_a(C_V)$ . Dado  $P \in V$ , qualquer coordenada homogênea de  $P$  é um ponto em  $C_V$ . Como  $f$  se anula em  $C_V$ , segue-se que  $f(P) = 0$ . Por definição, isso implica  $f \in \mathbf{I}(V)$ . Reciprocamente, tome  $f \in \mathbf{I}(V)$ . Como qualquer ponto diferente de zero de  $C_V$  dá coordenadas homogêneas para um ponto em  $V$ , segue que  $f$  se anula em  $C_V - \{0\}$ . Resta mostrar que  $f$  se anula na origem. Como  $\mathbf{I}(V)$  é um ideal homogêneo, sabemos que as componentes homogêneas  $f_i$  de  $f$  também se anula em  $V$ . Em particular, o termo constante de  $f$ , que é a componente  $f_0$  de grau 0, deve se anular em  $V$ . Como  $V \neq \emptyset$ , isso força  $f_0 = 0$ , o que significa que  $f$  se anula na origem. Assim,  $f \in \mathbf{I}_a(C_V)$ .

Pela forma afim do Teorema dos Zeros de Hilbert, sabemos que  $r(I) = \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I))$ . Então

$$r(I) = \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I)) = \mathbf{I}_a(C_V) = \mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)).$$

**Teorema 4.30** Seja  $k$  um corpo algebricamente fechado. Existe uma bijeção, que reverte a inclusão, entre as variedades projetivas em  $\mathbb{P}^n$  e os ideais radicais homogêneos propriamente contidos em  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$  de  $k[x_0, \dots, x_n]$ .

*Demonstração:* Uma consequência do teorema dos zeros de Hilbert fraco é que os únicos ideais homogêneos radicais  $I$  tal que  $\mathbf{V}(I) = \emptyset$  são  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$  e  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Segunda observação, é que se  $I$  é um ideal homogêneo diferente de  $k[x_0, \dots, x_n]$ , então  $I \subset \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ .

Essas observações mostram que os ideais homogêneos radicais com  $\mathbf{V}(I) \neq \emptyset$  são precisamente aqueles que satisfazem  $I \subsetneq \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ . Então, a prova segue como no caso afim, usando o teorema dos zeros de Hilbert forte. ■

## Fecho Projetivo de uma Variedade Afim

**Definição 4.16** Seja  $I$  um ideal em  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Definimos a *homogeneização* de  $I$  sendo o ideal

$$I^h = \langle f^h \mid f \in I \rangle \subset k[x_0, \dots, x_n].$$

**Observação 4.4** Se um ideal  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ , a homogeneização  $I^h$  é um ideal homogêneo em  $k[x_0, \dots, x_n]$ .

**Exemplo 4.7** Considere  $I = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle x_2 - x_1^2, x_3 - x_1^3 \rangle$ , o ideal afim da cúbica torcida em  $\mathbb{R}^3$ . Homogeneizando  $f_1$  e  $f_2$ , temos o ideal

$$J = \langle x_2x_0 - x_1^2, x_3x_0^2 - x_1^3 \rangle \subset \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2, x_3].$$

Afirmamos que  $J \neq I^h$ . De fato, considere o polinômio

$$\begin{aligned} f_3 &= f_2 - x_1f_1 \\ &= x_3 - x_1^3 - x_1(x_2 - x_1^2) \\ &= x_3 - x_1x_2. \end{aligned}$$

Como  $f_3 \in I$ , temos que  $f_3^h$  é um polinômio homogêneo de grau 2 em  $I^h$ . Como os geradores de  $J$  são homogêneos de grau 2 e 3, respectivamente, teríamos que ter

$$f_3^h = A_1f_1^h + A_2f_2^h.$$

Então, usando as expansões de  $A_1$  e  $A_2$  em componentes homogêneas, veríamos que  $f_3^h$  é um múltiplo constante de  $f_1^h$ . Mas, claramente, é falso, então  $f_3^h \notin J$  e  $J \neq I^h$ .

**Definição 4.17** Dada uma variedade afim  $W \subset k^n$ , o *fecho projetivo* de  $W$  é a variedade projetiva

$$\overline{W} = \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) \subset \mathbb{P}^n$$

onde  $\mathbf{I}_a(W)^h \subset k[x_0, \dots, x_n]$  é a homogeneização do ideal  $\mathbf{I}_a(W) \subset k[x_1, \dots, x_n]$ .

**Proposição 4.31** Sejam  $W \subset k^n$  uma variedade afim e  $\overline{W} \subset \mathbb{P}^n$  o fecho projetivo. Então:

- (a)  $\overline{W} \cap U_0 = \overline{W} \cap k^n = W$ .
- (b)  $\overline{W}$  é a menor variedade projetiva em  $\mathbb{P}^n$  contendo  $W$ .
- (c) Se  $W$  é irredutível, então  $\overline{W}$  é irredutível.

(d) Nenhuma componente irredutível de  $\overline{W}$  está no hiperplano no infinito  $V(x_0) \subset \mathbb{P}^n$ .

*Demonstração:* Ver [5], Capítulo 8, Seção 4, Proposição 7. ■

**Proposição 4.32** Seja  $k$  um corpo algebricamente fechado. Seja  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  um ideal. Então,  $\mathbf{V}(I^h) \subset \mathbb{P}^n$  é o fecho projetivo de  $\mathbf{V}_a(I) \subset k^n$ .

*Demonstração:* Ver [5], Capítulo 8, Seção 4, Teorema 8.

## Espaços Lineares

**Definição 4.18** Seja  $k^{n+1}$  um  $k$ -espaço vetorial. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \Pi : k^{n+1} - \{0\} &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ v &\mapsto [v] = \bar{v}. \end{aligned}$$

Dado  $P \in \mathbb{P}^n$  denotaremos por  $\widehat{P}$  qualquer elemento de  $k^{n+1} - \{0\}$  tal que  $\Pi(\widehat{P}) = P$ .

**Definição 4.19** Um conjunto  $X \subset \mathbb{P}^n$  é um *espaço linear* quando  $X = \Pi(W - \{0\})$ , para algum espaço vetorial  $W \subset k^{n+1}$ .

### Exemplo 4.8

- (a) Todo  $P \in \mathbb{P}^n$  é um espaço linear, pois  $P = \Pi(l - \{0\})$  onde  $l$  é a reta gerada por  $\widehat{P}$ .
- (b) O conjunto  $\emptyset$  é um espaço linear, pois  $\emptyset = \Pi(\{0\} - \{0\})$ .
- (c) O espaço projetivo  $\mathbb{P}^n$  é um espaço linear, pois  $\mathbb{P}^n = \Pi(k^{n+1} - \{0\})$ .
- (d) Um hiperplano  $H = \mathbf{V}(a_0x_0 + \dots + a_nx_n) \subset \mathbb{P}^n$  é um espaço linear, pois  $H = \Pi(\widehat{H} - \{0\})$  onde  $\widehat{H} = \mathbf{V}_a(a_0x_0 + \dots + a_nx_n) \subset k^{n+1}$ .
- (e) Dada a variedade projetiva  $V = \mathbf{V}(L_1, \dots, L_c) \subset \mathbb{P}^n$ . Então  $V$  é um espaço linear se  $L_1, \dots, L_c$  são polinômios homogêneos de grau 1, pois  $V = \Pi(\widehat{V} - \{0\})$  onde  $\widehat{V} = \mathbf{V}_a(L_1, \dots, L_c) \subset k^{n+1}$ .

**Definição 4.20** Seja  $X$  um espaço linear de  $\mathbb{P}^n$ . Definimos a *dimensão* de  $X$ , denotado por  $\dim(X)$ , por  $\dim(X) = \dim(\widehat{X}) - 1$ , onde  $\Pi(\widehat{X} - \{0\}) = X$ .

### Exemplo 4.9

- (a) O ponto  $P \in \mathbb{P}^n$  tem dimensão

$$\dim(P) = \dim(l) - 1 = 1 - 1 = 0$$

onde  $l$  é a reta gerada por  $\widehat{P}$ .

- (b) A dimensão de  $\emptyset$  é

$$\dim(\emptyset) = \dim(\{0\}) - 1 = 0 - 1 = -1.$$

(c) A dimensão do espaço projetivo  $\mathbb{P}^n$  é

$$\dim(\mathbb{P}^n) = \dim(k^{n+1}) - 1 = n + 1 - 1 = n.$$

(d) A dimensão de um hiperplano  $H = \mathbf{V}(a_0x_0 + \cdots + a_nx_n) \subset \mathbb{P}^n$  é

$$\dim(H) = \dim(\widehat{H}) - 1 = n - 1$$

onde  $\widehat{H} = \mathbf{V}_a(a_0x_0 + \cdots + a_nx_n) \subset k^{n+1}$ .

(e) Dada a variedade projetiva  $V = \mathbf{V}(L_1, \dots, L_c) \subset \mathbb{P}^n$ . Se os polinômios homogêneos  $L_1, \dots, L_c$  são de grau 1 e linearmente independentes, então a dimensão de  $V$  é

$$\dim(V) = \dim(\widehat{V}) - 1 = n + 1 - c - 1 = n - c$$

onde  $\widehat{V} = \mathbf{V}_a(L_1, \dots, L_c) \subset k^{n+1}$ .

**Definição 4.21** Dados  $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}^n$  definimos o espaço linear gerado por  $P_1, \dots, P_k$  (ou o *span* de  $P_1, \dots, P_k$ ), sendo o seguinte conjunto

$$\begin{aligned} \langle P_1, \dots, P_k \rangle &= \Pi(\langle \widehat{P}_1, \dots, \widehat{P}_k \rangle - \{0\}) \\ &= \{P \subset \mathbb{P}^n \mid \widehat{P} = a_1\widehat{P}_1 + \cdots + a_k\widehat{P}_k, a_1, \dots, a_k \in k\}. \end{aligned}$$

**Definição 4.22** Dizemos que  $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}^n$  são *independentes* (linearmente ou projetivamente) quando  $\dim(\langle P_1, \dots, P_k \rangle) = k - 1$ .

**Exemplo 4.10** Seja  $P_1 = (1 : 0 : 0), P_2 = (0 : 1 : 0), P_3 = (1 : 1 : 0) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Temos que,

$$\dim(\langle P_1, P_2, P_3 \rangle) = \dim(\langle \widehat{P}_1, \widehat{P}_2, \widehat{P}_3 \rangle) - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Como a  $\dim(\langle P_1, P_2, P_3 \rangle) = 1 \neq k - 1$ , onde  $k = 3$ , então  $P_1, P_2$  e  $P_3$  não são independentes.

**Exemplo 4.11** Seja  $P_1 = (1 : 0 : 0), P_2 = (0 : 1 : 0), P_3 = (0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Temos que,

$$\dim(\langle P_1, P_2, P_3 \rangle) = \dim(\langle \widehat{P}_1, \widehat{P}_2, \widehat{P}_3 \rangle) - 1 = 3 - 1 = 2.$$

Como a  $\dim(\langle P_1, P_2, P_3 \rangle) = 2 = k - 1$ , onde  $k = 3$ , então  $P_1, P_2$  e  $P_3$  são independentes.

**Definição 4.23** Dados os espaços lineares  $X$  e  $Y$  em  $\mathbb{P}^n$  definimos o espaço gerado por  $X$  e  $Y$ , sendo o seguinte conjunto

$$\langle X, Y \rangle = \Pi(\widehat{X} + \widehat{Y} - \{0\}).$$

Se  $X = \langle P_1, \dots, P_k \rangle$  e  $Y = \langle Q_1, \dots, Q_l \rangle$ , onde  $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_l \in \mathbb{P}^n$ , então

$$\langle X, Y \rangle = \langle P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_l \rangle.$$

**Lema 4.33** Sejam  $E_1, E_2 \subset k^n$  espaços vetoriais. Então

$$\dim(\langle E_1, E_2 \rangle) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2).$$

*Demonstração:* Ver [6], Capítulo 7, Teorema 7.1.

**Proposição 4.34** Sejam  $X, Y \subset \mathbb{P}^n$  espaços lineares. Então

$$\dim(\langle X, Y \rangle) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y).$$

*Demonstração:* Sejam  $\widehat{X}$  e  $\widehat{Y}$  subespaços vetoriais de  $k^{n+1}$ , tais que  $X = \Pi(\widehat{X} - \{0\})$  e  $Y = \Pi(\widehat{Y} - \{0\})$ . Pelo Lema 4.33, segue que

$$\begin{aligned} \dim(\langle X, Y \rangle) &= \dim(\langle \widehat{X}, \widehat{Y} \rangle) - 1 \\ &= \dim(\widehat{X}) + \dim(\widehat{Y}) - \dim(\widehat{X} \cap \widehat{Y}) - 1 \\ &= \dim(\widehat{X}) - 1 + \dim(\widehat{Y}) - 1 - (\dim(\widehat{X} \cap \widehat{Y}) - 1) \\ &= \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y). \end{aligned}$$

■

**Definição 4.24** Seja  $X = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) \subset k^n$ . Definimos o *espaço tangente* a  $X$  em  $p$ , como sendo

$$O_p X = \mathbf{V}(d_p(f_1), \dots, d_p(f_s)).$$

Se  $X \subset k^n$  é uma variedade afim parametrizada por

$$\begin{aligned} f : k^m &\rightarrow k^n \\ t &\mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t)), \end{aligned}$$

onde  $t = (t_1, \dots, t_m)$ . Definimos o espaço tangente de  $X$  em  $p = f(t_0) \in X$  como sendo

$$O_p X = p + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_1}(t_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial t_m}(t_0) \right\rangle,$$

onde  $\frac{\partial f}{\partial t_i}(t_0)$  é um vetor direção de  $k^m$ .

**Definição 4.25** Seja  $X' = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) \subset \mathbb{P}^n$ . Identificamos  $k^n$  por meio de uma carta, digamos  $k^n \cong U_0$  (Proposição 4.17). Tomando  $X = k^n \cap X'$  e  $P \in X$ , definimos o *espaço tangente* a  $X'$  em  $P$ , como sendo o fecho projetivo do espaço tangente afim, ou seja,

$$T_P X' = \overline{O_P X}.$$

**Proposição 4.35** Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade projetiva. Então, existe um aberto  $U \subset X$ , tal que a dimensão de  $T_P X$  é fixa, para todo  $P \in U$ .

*Demonstração:* Ver [14], Capítulo 2, Teorema 2.3.

**Definição 4.26** Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade projetiva. Definimos a dimensão de  $X$  como sendo

$$\dim X = \dim T_P X,$$

onde  $P \in U$ , sendo  $U$  o aberto da Proposição 4.35.

## Transformações Lineares Projetivas

Seja  $GL(n+1, k)$  o conjunto das matrizes invertíveis  $(n+1) \times (n+1)$  com entradas em  $k$ . Dado  $A \in GL(n+1, k)$ , sabemos que  $A$  induz uma aplicação linear

$$A : k^{n+1} \rightarrow k^{n+1}$$

que é um isomorfismo, pois  $A$  é invertível. Esta aplicação leva subespaços de  $k^{n+1}$  a subespaços de mesma dimensão em  $k^{n+1}$ , restringindo a subespaços de dimensão 1, segue que  $A$  leva uma reta através da origem para uma outra reta através da origem. Assim,  $A$  induz uma aplicação

$$A : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$$

Chamamos tal aplicação de *transformação linear projetiva*.

Sejam  $P = (b_0 : \dots : b_n) \in \mathbb{P}^n$  e  $A : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  uma transformação linear projetiva, temos que

$$A(P) = (a_{00}b_0 + \dots + a_{0n}b_n : \dots : a_{n0}b_0 + \dots + a_{nn}b_n),$$

onde  $A = (a_{ij})$ , para  $0 \leq i, j \leq n$ .

Dada uma variedade  $V \subset \mathbb{P}^n$  e  $A \in GL(n+1, k)$ , podemos aplicar  $A$  a todos os pontos de  $V$ , para obter

$$A(V) = \{A(P) | P \in V\} \subset \mathbb{P}^n.$$

**Proposição 4.36** Sejam  $V \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade e  $A \in GL(n+1, k)$ . Então,  $A(V)$  é uma variedade.

*Demonstração:* Suponha que  $V = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ , onde cada  $f_i$  é homogêneo. Como  $A$  é invertível, defina  $B = A^{-1}$ . Então, para cada  $i$ , seja  $g_i = f_i \circ B$ . Se  $B = (b_{ij})$ , temos

$$g_i(x_0, \dots, x_n) = f_i(b_{00}x_0 + \dots + b_{0n}x_n, \dots, b_{n0}x_0 + \dots + b_{nn}x_n).$$

Observe que  $g_i$  é homogêneo de mesmo grau que  $f_i$ .

Afirmamos que  $A(\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)) = \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)$ . De fato, se  $A(P) \in A(\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s))$ , onde  $P \in \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ , temos

$$\begin{aligned} g_i(A(P)) &= g_i \circ A(P) \\ &= f_i \circ B \circ A(P) \\ &= f_i(P) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então,  $A(P) \in \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)$ . Logo,  $A(\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)) \subset \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)$ . Por outro lado, se  $x \in \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)$ , temos que  $g_i(x) = 0$  e, assim

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_i \circ B(x) &= 0 \\ \Rightarrow f_i(B(x)) &= 0 \\ \Rightarrow B(x) &\in \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) \\ \Rightarrow x &= A(B(x)) \in A(\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)). \end{aligned}$$

Assim,  $\mathbf{V}(g_1, \dots, g_s) \subset A(\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s))$  e, portanto,  $A(\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)) = \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)$  e  $A(V)$  é uma variedade. ■

**Definição 4.27** Sejam  $V \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade e  $A \in GL(n+1, k)$ . Dizemos que  $V$  e  $A(V)$  são *projetivamente equivalentes*.

**Observação 4.5** Podemos considerar  $A = (a_{ij})$  como se estivesse transformando  $x_0, \dots, x_n$  em novas coordenadas  $X_0, \dots, X_n$  definida por

$$X_i = \sum_{j=0}^n a_{ij} x_j.$$

Pela Proposição 4.36, podemos pensar a variedade  $A(V)$  como a variedade original  $V$  usando outras coordenadas homogêneas.

## 5 Variedades de Segre-Veronese

Nesse capítulo, daremos as definições e alguns exemplos de variedades de Veronese, variedades de Segre e variedades de Segre-Veronese, as referências são [8] e [7].

### Veronese

**Definição 5.1** Sejam  $n$  e  $d$  inteiros positivos. Então a variedade de Veronese  $V_d^n$  é dada pela imagem da aplicação

$$\begin{aligned} v_d^n : \mathbb{P}_x^n &\rightarrow \mathbb{P}_y^N \\ (x_0 : x_1 : \cdots : x_n) &\mapsto (M_0, \dots, M_N), \end{aligned}$$

em que  $N = \binom{n+d}{d} - 1$  e  $M_0, \dots, M_N$  são todos os monômios de grau  $d$  nas variáveis  $x_0, \dots, x_n$ .

**Definição 5.2** Uma *curva racional normal*  $C \subset \mathbb{P}^n$  é uma curva projetivamente equivalente à variedade de Veronese  $V_1^n$ .

**Exemplo 5.1** A variedade de Veronese  $V_2^1$  é a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} v_2^1 : \mathbb{P}_x^1 &\rightarrow \mathbb{P}_y^2 \\ (x_0 : x_1) &\mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2). \end{aligned}$$

Desta forma, temos que  $V_2^1 = \mathbf{V}(y_0y_2 - y_1^2)$  contido em  $\mathbb{P}^2$ .

**Exemplo 5.2** A variedade de Veronese  $V_3^1$  é a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} v_3^1 : \mathbb{P}_x^1 &\rightarrow \mathbb{P}_y^3 \\ (x_0 : x_1) &\mapsto (x_0^3 : x_0^2x_1 : x_0x_1^2 : x_1^3). \end{aligned}$$

Neste caso, temos que  $V_3^1 = \mathbf{V}(y_0y_3 - y_1y_2, y_1^2 - y_0y_2, y_2^2 - y_1y_3)$  é uma *cúbica torcida* em  $\mathbb{P}^3$ .

**Exemplo 5.3** A variedade de Veronese  $V_2^n$  é a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} v_2^n : \mathbb{P}^n &\rightarrow \mathbb{P}^{\frac{(n+2)(n+1)}{2} - 1} \\ (x_0 : \cdots : x_n) &\mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : \cdots : x_n^2). \end{aligned}$$

**Exemplo 5.4** Dada a variedade de Veronese  $V_2^n$  podemos representar ela na forma matricial. Considere a variedade  $V_2^2$  dada pela imagem da aplicação

$$\begin{aligned} v_2^2 : \mathbb{P}_x^2 &\rightarrow \mathbb{P}_y^5 \\ (x_0 : x_1 : x_2) &\mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2), \end{aligned}$$

então a matriz simétrica  $P$  dada por

$$P = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 \\ x_0x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_0x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix},$$

é a representação matricial de  $V_2^2$ .

**Proposição 5.1** Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$  não nula. Então o posto da matriz  $A$  é igual a 1 se, e somente se, existem vetores  $x \in k^m$  e  $y \in k^n$  não nulos tais que  $A = x^T y$ .

*Demonstração:* Suponha que o posto de  $A$  seja 1. Então todas as colunas de  $A$  são múltiplas de um vetor  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m) \in k^m$ . Daí,

$$A = (a_1 v^T | a_2 v^T | \dots | a_n v^T).$$

Seja o vetor  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in k^n$ , temos que

$$\begin{aligned} v^T a &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \\ &= \begin{pmatrix} v_1 a_1 & v_1 a_2 & \dots & v_1 a_n \\ v_2 a_1 & v_2 a_2 & \dots & v_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_m a_1 & v_m a_2 & \dots & v_m a_n \end{pmatrix} \\ &= (a_1 v^T | a_2 v^T | \dots | a_n v^T) := A. \end{aligned}$$

Basta então tomar  $x = v$  e  $y = a$ . Por outro lado, suponha que  $A = x^T y$ , onde  $x = (x_1, \dots, x_m)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . Dessa forma,

$$A = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m y_1 & x_m y_2 & \dots & x_m y_n \end{pmatrix} = (y_1 x^T | y_2 x^T | \dots | y_n x^T).$$

Dessa forma, todas as colunas de  $A$  são múltiplas de  $x^T$  e portanto, o posto de  $A$  é igual a 1. ■

**Proposição 5.2** Seja  $A$  uma matriz não nula quadrada de ordem  $n$ . Então  $A$  é uma matriz simétrica de posto 1 se, e somente se, existe um vetor  $x \in k^n$  não nulo tal que  $A = \alpha x^T x$ .

*Demonstração:* Suponha que  $A$  seja uma matriz simétrica de posto 1. Como o posto de  $A$  é igual a 1, pela Proposição 5.1, existem  $u, v \in k^n$  tais que  $A = u^T v$ . Sejam  $x = \frac{u}{\|u\|}$  e  $y = \frac{v}{\|v\|}$  e escreva  $A = \beta x^T y$ , onde  $\beta = \|u\| \|v\|$ . Como  $A$  é uma matriz simétrica, então

$$\beta y^T x = A^T = A = \beta x^T y \Rightarrow y^T x = x^T y.$$

Multiplicando ambos os lados por  $y$  à esquerda e por  $x^T$  à direita e lembrando que  $x$  e  $y$  são unitários, obtemos

$$\|y\|^2\|x\|^2 = 1 = yy^Txx^T = yx^Tyx^T = (yx^T)^2.$$

Sendo assim, os vetores  $x$  e  $y$  são linearmente dependentes. Como ambos são unitários, segue que  $y = \pm x$  e, portanto,  $A = \pm\beta x^Tx$ . Por outro lado, se existe  $x \in k^n$  tal que  $A = \alpha x^Tx$ , então

$$A^T = (\alpha x^Tx)^T = \alpha x^Tx = A$$

e portanto,  $A$  é simétrica. Além disso, pela Proposição 5.1,  $A$  tem posto 1. ■

**Exemplo 5.5** A variedade de Veronese  $V_2^2$  pode então ser identificada como o espaço das matrizes simétricas  $3 \times 3$  de posto 1. De fato, seja

$$p = (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2) \in V_2^2.$$

O ponto  $(x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2) \in k^6$  é um representante de  $p$  e podemos escrever

$$\begin{aligned} (x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2) &= \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 \\ x_0x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_0x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} := A \end{aligned}$$

Pela Proposição 5.2, temos que o posto de  $A$  é 1. Por outro lado, dada uma matriz  $B$  simétrica  $3 \times 3$  de posto 1, pela Proposição 5.2, temos que existe um vetor  $x \in k^3$  tal que  $B = \alpha x^Tx$ . Escreva  $x = (x_0, x_1, x_2)$ . Daí, temos que

$$\begin{aligned} B &= \alpha \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 \\ x_0x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_0x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha(x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2). \end{aligned}$$

E em coordenadas homogêneas, temos que

$$\alpha(x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2) \in (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2).$$

## Segre

**Definição 5.3** Seja  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$  uma  $r$ -upla de inteiros positivos. Definimos a variedade de Segre  $S^n$  sendo a imagem da aplicação a seguir:

$$\begin{aligned} s^n : \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r} &\rightarrow \mathbb{P}^N \\ (x_1, \dots, x_r) &\mapsto (x_{1i_1}x_{2i_2} \cdots x_{ri_r} \mid i_j = 0, \dots, n_j). \end{aligned}$$

onde  $x_k = (x_{k0} : \dots : x_{kn_k})$  e  $N = \prod_{i=1}^r (n_i + 1) - 1$ .

**Exemplo 5.6** Tome  $\mathbf{n} = (1, 1)$ . Daí,

$$N = (1 + 1)(1 + 1) - 1 = 3.$$

Logo, a aplicação é

$$\begin{aligned} s^{(1,1)} : \mathbb{P}_x^1 \times \mathbb{P}_y^1 &\rightarrow \mathbb{P}_z^3 \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) &\mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1). \end{aligned}$$

Temos que a variedade de Segre é  $S^{(1,1)} = \mathbf{V}(z_0z_3 - z_1z_2)$ .

**Exemplo 5.7** Tome  $\mathbf{n} = (2, 1)$ . Daí,

$$N = (2 + 1)(1 + 1) - 1 = 5.$$

Logo, a aplicação é

$$\begin{aligned} s^{(2,1)} : \mathbb{P}_x^2 \times \mathbb{P}_y^1 &\rightarrow \mathbb{P}_z^5 \\ ((x_0 : x_1 : x_2), (y_0 : y_1)) &\mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1 : x_2y_0 : x_2y_1). \end{aligned}$$

Temos que a variedade de Segre é  $S^{(2,1)} = \mathbf{V}(z_0z_3 - z_1z_2, z_3z_4 - z_2z_5)$ .

## Segre-Veronese

**Definição 5.4** Sejam  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$  e  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)$  duas  $r$ -uplas de inteiros positivos. Então a variedade de *Segre-Veronese*  $SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}$  é dada pela imagem da aplicação

$$\begin{aligned} sv_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} : \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r} &\rightarrow \mathbb{P}^N \\ (x_1, \dots, x_r) &\mapsto (M_0, \dots, M_N), \end{aligned}$$

onde  $N = \prod_{i=1}^r \binom{n_i + d_i}{n_i} - 1$  e  $M_0, \dots, M_N$  são todos os monômios de grau  $d_i$  em relação às variáveis de  $\mathbb{P}^{n_i}$  para  $i = 1, \dots, r$ .

**Exemplo 5.8** Quando  $r \geq 1$  e  $d_1 = \dots = d_r = 1$ , temos a variedade de Segre, dada pela imagem da aplicação

$$\begin{aligned} sv_{(1, \dots, 1)}^{\mathbf{n}} : \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r} &\rightarrow \mathbb{P}^N \\ (x_1, \dots, x_r) &\mapsto (M_0 : \dots : M_N), \end{aligned}$$

onde  $M_j$  são todos os monômios de grau 1 nas variáveis de  $\mathbb{P}^{n_i}$  para cada  $i = 1, \dots, r$  e

$$N = \prod_{i=1}^r \binom{n_i + 1}{n_i} - 1 = \prod_{i=1}^r (n_i + 1) - 1.$$

**Exemplo 5.9** A variedade de Segre-Veronese  $SV_{(1,1)}^{(1,1)}$  é dada pela imagem da aplicação

$$\begin{aligned} sv_{(1,1)}^{(1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^3 \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) &\mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1). \end{aligned}$$

**Exemplo 5.10** A variedade de Segre-Veronese  $SV_{(1,1)}^{(1,2)}$  é dada pela imagem da aplicação

$$sv_{(1,1)}^{(1,2)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$$

$$((x_0 : x_1), (y_0 : y_1 : y_2)) \mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : x_0y_2 : x_1y_0 : x_1y_1 : x_1y_2).$$

**Exemplo 5.11** A variedade de Segre-Veronese  $SV_{(1,2)}^{(1,1)}$  é dada pela imagem da aplicação

$$sv_{(1,2)}^{(1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^5$$

$$((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) \mapsto (x_0y_0^2 : x_0y_0y_1 : x_0y_1^2 : x_1y_0^2 : x_1y_0y_1 : x_1y_1^2).$$

**Exemplo 5.12** A variedade de Segre-Veronese  $SV_{(2,2)}^{(1,1)}$  é dada pela imagem da aplicação

$$sv_{(2,2)}^{(1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^8$$

$$((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) \mapsto (x_0^2y_0^2 : x_0^2y_0y_1 : x_0^2y_1^2 : x_0x_1y_0^2 : x_0x_1y_0y_1 : x_0x_1y_1^2 : x_1^2y_0^2 : x_1^2y_0y_1 : x_1^2y_1^2).$$

**Exemplo 5.13** A variedade de Segre-Veronese  $SV_{(1,2)}^{(2,1)}$  é dada pela imagem da aplicação

$$sv_{(1,2)}^{(2,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^8$$

$$((x_0 : x_1 : x_2), (y_0 : y_1)) \mapsto (x_0y_0^2 : x_0y_0y_1 : x_0y_1^2 : x_1y_0^2 : x_1y_0y_1 : x_1y_1^2 : x_2y_0^2 : x_2y_0y_1 : x_2y_1^2).$$

Todas as variedades de Segre-Veronese são variedades projetivas, ou seja, são dadas por zeros de polinômios homogêneos.

## 6 Defeitos Secantes

Na primeira seção, definiremos a variedade secante e discutiremos o significado de uma variedade ser defeituosa, o principal assunto deste trabalho. Caso o leitor queira se aprofundar sobre o assunto, pode consultar em [8], que será a referência usada nesse capítulo. Ainda na primeira seção, apresentaremos o Teorema de Alexander e Hirschowitz. Na segunda seção, daremos exemplos de como determinar, em alguns casos, se uma variedade de Veronese é ou não  $h$ -defeituosa.

### 6.1 Definições, Exemplos e o Teorema de Alexander e Hirschowitz

**Definição 6.1** Sejam  $X \subset \mathbb{P}^N$  uma variedade projetiva. Definimos a  $h$ -secante de  $X$ , como sendo o conjunto

$$Sec_h(X) = \overline{\bigcup_{p_i \in X} \langle p_1, \dots, p_h \rangle}.$$

**Observação 6.1** Dada uma variedade projetiva  $X \subset \mathbb{P}^N$ , então a  $Sec_h(X)$  também é uma variedade projetiva contida em  $\mathbb{P}^N$ , para mais informações o leitor poderá consultar a referência [8] Seção 1.1 do Capítulo 1.

**Definição 6.2** Seja  $X \subset \mathbb{P}^N$  uma variedade projetiva de dimensão  $n$ . A *dimensão esperada* de  $Sec_h(X)$ , denotada por  $Expdim(Sec_h(X))$ , será a dimensão máxima que ela pode ter. A dimensão esperada é dada por

$$Expdim(Sec_h(X)) = \min\{h(n+1) - 1, N\}.$$

Deste modo, caso

$$\dim(Sec_h(X)) < Expdim(Sec_h(X)),$$

diremos que  $X$  é  $h$ -defeituosa.

**Exemplo 6.1** Toda variedade projetiva  $X \subset \mathbb{P}^N$  não é 1-defeituosa.

De fato, seja  $X$  uma variedade projetiva de dimensão  $n$ , então

$$Sec_1(X) = \overline{\bigcup_{p \in X} \langle p \rangle} = \overline{\bigcup_{p \in X} \{p\}} = X.$$

A dimensão esperada de  $Sec_1(X)$  é

$$Expdim(Sec_1(X)) = \{1(n+1) - 1, N\} = n.$$

Logo,

$$\dim(Sec_1(X)) = \dim(X) = n = Expdim(Sec_1(X)).$$

Portanto, a variedade projetiva  $X$  não é 1-defeituosa.

**Definição 6.3** Seja  $X = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$  uma variedade projetiva. Definimos o conjunto *singular* de  $X$  como sendo

$$\text{Sing}(X) := \{P \in X \mid \nabla f_i(P) = 0, \forall i = 1, \dots, s\}.$$

**Proposição 6.1** Seja  $X$  uma variedade projetiva. Então  $X \subset \text{Sing}(\text{Sec}_2(X))$ .

*Demonstração:* Ver [8], Capítulo 1, Proposição 1.2.2. ■

**Proposição 6.2** Seja  $X$  uma variedade projetiva de  $\mathbb{P}^N$  de dimensão  $n$ . Se  $X$  é  $h$ -defeituosa, então  $X$  é  $k$ -defeituosa para todo  $k \geq h$ .

*Demonstração:* Basta mostrar que  $X$  é  $h + 1$ -defeituosa. Como  $X$  é  $h$ -defeituosa, temos que

$$\dim(\text{Sec}_h(X)) < \text{Expdim}(\text{Sec}_h(X)) = \min\{h(n + 1) - 1, N\}, \text{ onde } n = \dim X.$$

Pela Proposição 1.3.1 do Capítulo 1 do livro [8], temos que a dimensão da  $\text{Sec}_{h+1}(X)$  é no máximo  $\dim(\text{Sec}_h(X)) + n + 1$ . Logo

$$\begin{aligned} \dim(\text{Sec}_{h+1}(X)) &\leq \dim(\text{Sec}_h(X)) + n + 1 \\ &< \text{Expdim}(\text{Sec}_h(X)) + n + 1 \\ &= \min\{(h + 1)(n + 1) - 1, N\} \\ &= \text{Expdim}(\text{Sec}_{h+1}(X)). \end{aligned}$$

Mostrando que  $X$  é  $(h + 1)$ -defeituosa. ■

**Corolário 6.3** Seja  $X$  uma variedade projetiva de  $\mathbb{P}^N$ . Se  $X$  não é  $h$ -defeituosa, então  $X$  não é  $k$ -defeituosa para todo  $k \leq h$ .

**Exemplo 6.2** A variedade de Veronese  $V_2^2$  é 2-defeituosa.

De fato, dada a aplicação de Veronese

$$\begin{aligned} v_2^2 : \mathbb{P}_x^2 &\rightarrow \mathbb{P}_y^5 \\ (x_0 : x_1 : x_2) &\mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2), \end{aligned}$$

onde  $x = (x_0 : x_1 : x_2)$  e  $y = (y_0 : y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : y_5)$ .

Primeiro, calculemos a dimensão esperada de  $\text{Sec}_2(V_2^2)$

$$\text{Expdim}(\text{Sec}_2(V_2^2)) = \min\{2(2 + 1) - 1, 5\} = 5.$$

Agora, considere o ponto  $P = (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2) \in V_2^2$ . Podemos ver o ponto  $P$  da seguinte maneira

$$P = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 \\ x_0x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_0x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Logo, como a matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

tem posto entre 1 e 3 e a matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

tem posto 1, então o posto da matriz  $P$  é 1. Portanto podemos considerar  $V_2^2$  um subconjunto das matrizes simétricas de posto 1, logo

$$\begin{aligned} \text{Sec}_2(V_2^2) &\subset \{\overline{M+N}; M, N \in M_{3 \times 3} \text{ matrizes simétricas de posto 1}\} \\ &= \{\overline{M} \in M_{3 \times 3} \mid \text{matriz simétrica de posto 2 ou 1}\} \\ &= \{\overline{M} \in M_{3 \times 3} \mid M \text{ matriz simétrica de determinante nulo}\} \\ &= V(\det(M)) = \mathbf{V}((y_0y_3y_5 + y_1y_4y_2 + y_2y_1y_4 - y_2^2y_3 - y_1^2y_5 - y_0y_4^2)). \end{aligned}$$

Dessa maneira  $\text{Sec}_2(V_2^2)$  é uma hipersuperfície de grau 3 em  $\mathbb{P}^5$ , logo a codimensão é 1 e a dimensão dela é 4, porém a dimensão esperada de  $\text{Sec}_2(V_2^2)$  é 5. Portanto,  $V_2^2$  é 2-defeituosa.

Uma questão que surge de imediato é: Quais variedades de Segre-Veronese são defeituosas? Quais não são defeituosas? Este problema ainda está em aberto. Porém, existem resultados que classificam algumas dessas famílias. Um dos teoremas que busca realizar essa distinção é o Teorema de Alexander e Hirschowitz, que diz quais variedades de Veronese são defeituosas. O teorema encontra-se em [9].

**Teorema 6.4** (*Teorema de Alexander e Hirschowitz*) As variedades de Veronese  $V_d^n$  são não defeituosas, exceto os seguintes casos:

$$\frac{n}{d} \left| \begin{array}{cccccc} \geq 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 3 \end{array} \right.$$

O objetivo desse trabalho é provar o Teorema de Alexander e Hirschowitz. Dito isso, a demonstração do teorema consiste em dois passos gerais: primeiro precisamos mostrar que as variedades que se encontram na tabela são de fato defeituosas e em, segundo, que as variedades que não estão na tabela, não são defeituosas. A dificuldade da prova se encontra no segundo passo, onde precisaremos de ferramentas mais robustas, como o conceito de esquemas, que discutiremos no Capítulo 8.

## 6.2 Lema de Terracini

Quando formos provar alguma propriedade, provaremos para pontos gerais, ideia essa que será utilizada muitas vezes durante esse trabalho. Tendo em vista a topologia de Zariski, podemos definir o conceito de ponto geral e pontos gerais da seguinte forma:

**Definição 6.4** Uma propriedade  $p$  a respeito de uma variedade algébrica  $X \subset \mathbb{P}^n$  é dita *geral* se ela for satisfeita em um aberto não vazio. Dizemos que um ponto é *geral*

para a propriedade  $p$  se existe um aberto não vazio contendo este ponto satisfazendo a propriedade  $p$ . Dizemos também que  $P_1, \dots, P_h \in X$  são *gerais* para a propriedade  $p$  se existe um aberto não vazio de  $X^h$  contendo  $(P_1, \dots, P_h)$  e satisfazendo  $p$ .

**Observação 6.2** Como todo aberto não vazio de  $\mathbb{P}^n$  é denso, na topologia de zariski, então não há problema em aplicar seguidamente vários resultados que utilizam o conceito de propriedade geral. Isso segue do fato de que a interseções de abertos não vazios e densos é também um aberto não vazio e denso.

**Exemplo 6.3** Três pontos gerais de  $\mathbb{P}^2$  não estão alinhados. De fato, basta mostrar que

$$V = \{(p, q, r) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \mid p, q, r \text{ estão alinhados}\}$$

é um fechado de  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ .

Dados  $p = (x_0, x_1, x_2), q = (y_0, y_1, y_2), r = (z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{P}^2$ . Logo,  $p, q$  e  $r$  são alinhados se, e somente se,

$$\begin{aligned} & \text{Posto} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} \leq 2 \\ \Leftrightarrow & \text{Det} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & x_0y_1z_2 + x_1y_2z_0 + x_2y_0z_1 - x_2y_1z_0 - x_0y_2z_1 - x_1y_0z_2 =: F = 0. \end{aligned}$$

Então,  $F$  é um polinômio homogêneo de grau 1 em cada um dos conjuntos de variáveis  $x, y, z$  e, assim,  $V = \mathbf{V}(F) \subset \mathbb{P}_x^2 \times \mathbb{P}_y^2 \times \mathbb{P}_z^2$  é um conjunto fechado.

**Exemplo 6.4** Se  $p$  e  $\pi$  em  $\mathbb{P}^2$  são um ponto e um plano gerais, então  $p \notin \pi$ . De fato, como  $\pi$  é um hiperplano em  $\mathbb{P}_x^2$ , existe um polinômio  $G := z_0x_0 + z_1x_1 + z_2x_2$  homogêneo de grau 1 em  $k[x_0, x_1, x_2]$ , tal que  $\pi = \mathbf{V}(G)$ , se considerarmos o conjunto dos hiperplanos, temos que

$$\{z_0x_0 + z_1x_1 + z_2x_2 = 0 \mid (z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2\} \cong \mathbb{P}^2.$$

Logo,  $p = (y_0 : y_1 : y_2) \in \pi$  se, e somente se,

$$z_0y_0 + z_1y_1 + z_2y_2 := F = 0,$$

onde  $F$  é um polinômio homogêneo de grau 1 em cada um dos conjuntos de variáveis  $y, z$  e, assim, mostrando que  $\mathbf{V}(F) \subset \mathbb{P}_y^2 \times \mathbb{P}_z^2$  é o conjunto fechado onde  $p \in \pi$ .

**Lema 6.5** (*Lema de Terracini*) Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade projetiva. Seja  $P \in \text{Sec}_h(X)$  um ponto geral tal que  $P \in \langle P_1, \dots, P_h \rangle$  e  $P_1, \dots, P_h \in X$  pontos gerais. Então

$$T_P \text{Sec}_h(X) = \langle T_{P_1}X, \dots, T_{P_h}X \rangle.$$

*Demonstração:* Ver [8], Capítulo 1, Teorema 1.3.1. ■

Observe que, como  $\dim(T_P \text{Sec}_h(X)) = \dim(\text{Sec}_h(X))$ , pelo Lema de Terracini, temos que

$$\dim(\text{Sec}_h(X)) = \dim(\langle T_{P_1}X, \dots, T_{P_h}X \rangle).$$

desta forma, segue o seguinte corolário:

**Corolário 6.6** Seja  $X$  uma variedade. Se existem  $P_1, \dots, P_h \in X$  pontos gerais tais que  $\dim\langle P_0, \dots, P_h \rangle = h - 1$  e  $\dim\langle T_{P_1}X, \dots, T_{P_h}X \rangle = \text{Expdim}(\text{Sec}_h(X))$ , então  $X$  não é  $h$ -defeituosa.

**Lema 6.7** Sejam  $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{P}^n$  pontos em posição geral. Então existe uma transformação linear projetiva  $\varphi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  tal que

$$\begin{aligned}\varphi(p_0) &= e_0, \\ \varphi(p_1) &= e_1, \\ &\vdots \\ \varphi(p_n) &= e_n,\end{aligned}$$

onde  $e_0 = (1 : 0 : 0 : \dots : 0 : 0)$ ,  $e_1 = (0 : 1 : 0 : \dots : 0 : 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_n = (0 : 0 : 0 : \dots : 0 : 1)$ .

*Demonstração:* Sejam  $p_0, p_1, \dots, p_n$  pontos em posição geral. Tome  $v_0, v_1, \dots, v_n$  pontos em  $k^{n+1}$  tal que  $p_i = [v_i]$ , ou seja,  $v_i$  é um representante da classe de equivalência  $p_i$ , ver Definição 4.10, para cada  $i = 0, 1, \dots, n$ . Dessa forma,  $v_0, v_1, \dots, v_n$  formam uma base do espaço vetorial  $k^{n+1}$  e, assim, como  $\bar{e}_0 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0)$ ,  $\bar{e}_1 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0)$ ,  $\dots$ ,  $\bar{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$  também é uma base do espaço vetorial  $k^{n+1}$ , existe o seguinte isomorfismo linear  $A : k^{n+1} \rightarrow k^{n+1}$  tal que  $A(v_i) = \bar{e}_i$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n$ . Portanto,  $A$  é a transformação linear projetiva desejada, pois  $\bar{e}_i$  é um representante da classe de equivalência  $e_i$ , para cada  $i = 0, 1, \dots, n$ . ■

**Lema 6.8** Se  $X \subset \mathbb{P}^N$  é uma variedade projetiva não degenerada e  $\dim \text{Sec}_h X = N - 1$ , então  $\dim \text{Sec}_{h+1} X = N$ .

*Demonstração:* Ver [8], Capítulo 1, Proposição 1.2.2. ■

**Exemplo 6.5** A variedade de Veronese  $V_2^2$  é 2-defeituosa.

De fato, dada a aplicação de Veronese

$$\begin{aligned}v_2^2 : \mathbb{P}_x^2 &\rightarrow \mathbb{P}_y^5 \\ (x_0 : x_1 : x_2) &\mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2).\end{aligned}$$

A dimensão esperada de  $\text{Sec}_2(V_2^2)$  é

$$\text{Expdim}(\text{Sec}_2(V_2^2)) = \min\{2(2 + 1) - 1, 5\} = 5.$$

Sejam  $p$  e  $q$  pontos gerais de  $\mathbb{P}^2$ . Podemos supor, pelo Lema 6.7, que  $p = (1 : 0 : 0)$  e  $q = (0 : 0 : 1)$ , sem perda de generalidade. Agora, considere  $P = v_2^2(p) = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$  e  $Q = v_2^2(q) = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$  em  $\mathbb{P}^5$ .

Tomando a reta gerada por  $p$  e  $q$

$$L := \langle p, q \rangle = \{(a : 0 : b) \mid (a : b) \in \mathbb{P}^1\},$$

podemos restringir o domínio da aplicação  $v_2^2$  à reta  $L$ , isto é

$$\begin{aligned}v_{2|L}^2 : \langle p, q \rangle &\rightarrow \mathbb{P}_y^5 \\ (a : 0 : b) &\mapsto (a^2 : 0 : ab : 0 : 0 : b^2).\end{aligned}$$

Então,  $C = v_{2|L}^2(L)$  é uma cônica em  $\mathbb{P}^2$ , pois  $C = \mathbf{V}(y_0y_5 - y_2^2) \subset \mathbb{P}^2 = \mathbf{V}(y_1, y_3, y_4) \subset \mathbb{P}^5$ .

Por fim, pela Definição 4.26, temos que

$$\dim T_P C = \dim T_Q C = \dim L = 1.$$

Logo,  $T_P C$  e  $T_Q C$  são retas em  $\mathbb{P}^2$ . Assim, segue que

$$T_P C = \Pi(H_1 - \{0\})$$

$$T_Q C = \Pi(H_2 - \{0\}),$$

onde  $H_1, H_2$  são planos passando pela origem em  $k^3$  e  $\Pi$  é a aplicação definida em 4.18. Observe que, pela Definição 4.20, temos que

$$\dim H_1 = \dim H_2 = 2,$$

em  $k^3$  e, como  $H_1 \neq H_2$ , pois  $T_P C \neq T_Q C$ , temos que

$$H_1 \cap H_2 = l,$$

onde  $l$  é uma reta em  $k^3$  passando pela origem. Assim,  $P := \Pi(l - \{0\})$  pertence a  $T_P C \cap T_Q C$ . Logo,

$$P \in T_P C \cap T_Q C \subset T_P V_2^2 \cap T_Q V_2^2.$$

Deste modo, pelo Lema de Terracini 6.5, concluímos que

$$\dim \langle T_P V_2^2, T_Q V_2^2 \rangle \leq 4 < 5 = \text{Expdim}(\text{Sec}_2(V_2^2))$$

e, assim, a variedade de Veronese  $V_2^2$  é 2-defeituosa.

**Exemplo 6.6** Uma outra forma de ver que a variedade de Veronese  $V_2^2$  é 2-defeituosa é a seguinte:

considere a aplicação de Veronese

$$\begin{aligned} v_2^2 : \mathbb{P}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^5 \\ (x_0 : x_1 : x_2) &\mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2). \end{aligned}$$

Primeiro, calculemos a dimensão esperada de  $\text{Sec}_2(V_2^2)$

$$\text{Expdim}(\text{Sec}_2(V_2^2)) = \min\{2(2+1) - 1, 5\} = 5.$$

Agora, tome dois pontos gerais  $p, q \in \mathbb{P}^2$ , sem perda de generalidade, pelo Lema 6.7, podemos considerar  $p = (1 : 0 : 0)$  e  $q = (0 : 0 : 1)$ , considere também

$$P = v_2^2(p) = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^5$$

$$Q = v_2^2(q) = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^5.$$

Com isso, vamos construir os espaços tangentes  $T_P V_2^2$  e  $T_Q V_2^2$ . Tome  $x_0 = 1$ , pela Proposição 4.17, considere a aplicação de  $U_0 = k^2$  em  $V_0 = k^5$ :

$$\begin{aligned} \varphi : U_0 &\rightarrow V_0 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2). \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} &= (1, 0, 2x_1, x_2, 0) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} &= (0, 1, 0, x_1, 2x_2).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= (0, 0, 0, 0, 0) = \bar{0} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(0) &= (1, 0, 0, 0, 0) := \bar{e}_1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(0) &= (0, 1, 0, 0, 0) := \bar{e}_2.\end{aligned}$$

Portanto, o espaço tangente em  $P$  é

$$\begin{aligned}T_P V_2^2 &= \overline{\langle \bar{0}, \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle} \\ &= \overline{\langle (0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0) \rangle} \\ &= \langle (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0), (1 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0), (1 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0) \rangle \\ &= \langle (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0), (0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0), (0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0) \rangle \\ &:= \langle e_0, e_1, e_2 \rangle.\end{aligned}$$

Agora, tome  $x_2 = 1$ , pela Proposição 4.17, considere a aplicação de  $U_2 = k^2$  em  $V_5 = k^5$ :

$$\begin{aligned}\gamma : U_2 &\rightarrow V_5 \\ (x_0, x_1) &\mapsto (x_0^2, x_0 x_1, x_0, x_1^2, x_1).\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\gamma}{\partial x_0} &= (2x_0, x_1, 1, 0, 0) \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x_1} &= (0, x_0, 0, 2x_1, 1).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= (0, 0, 0, 0, 0) = \widehat{0} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x_0}(0) &= (0, 0, 1, 0, 0) := \widehat{e}_2 \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x_1}(0) &= (0, 0, 0, 0, 1) := \widehat{e}_4.\end{aligned}$$

Portanto, o espaço tangente em  $Q$  é

$$\begin{aligned}T_Q V_2^2 &= \overline{\langle \widehat{0}, \widehat{e}_2, \widehat{e}_4 \rangle} \\ &= \overline{\langle (0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1) \rangle} \\ &= \langle (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1), (0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 1), (0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 1) \rangle \\ &= \langle (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1), (0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0), (0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0) \rangle \\ &:= \langle e_5, e_2, e_4 \rangle.\end{aligned}$$

Desta forma, segue que

$$\langle T_P V_2^2, T_Q V_2^2 \rangle = \langle e_0, e_1, e_2, e_4, e_5 \rangle.$$

Logo,

$$\dim \langle T_P V_2^2, T_Q V_2^2 \rangle = 4.$$

Pelo Lema de Terracini 6.5, como

$$\dim \langle T_P V_2^2, T_Q V_2^2 \rangle = 4 < 5 = \text{Expdim}(\text{Sec}_2(V_2^2)),$$

a variedade  $V_2^2$  é 2-defeituosa.

**Exemplo 6.7** A variedade de Veronese  $V_3^2$  não é defeituosa.

De fato, dado o mergulho de Veronese

$$\begin{aligned} v_3^2 : \mathbb{P}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^9 \\ (x_0 : x_1 : x_2) &\mapsto (x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_0^2 x_2 : x_0 x_1 x_2 : x_1^3 : x_1^2 x_2 : x_1 x_2^2 : x_0 x_1 x_2 : x_2^3). \end{aligned}$$

A dimensão esperada de  $\text{Sec}_k(V_3^2)$  é

$h$	$\text{Expdim}(\text{Sec}_h(V_3^2))$
2	5
3	8
4	9

Primeiro, comecemos tomando três pontos gerais  $p, q, r \in \mathbb{P}^2$ , sem perda de generalidade, pelo Lema 6.7, podemos considerar  $p = (1 : 0 : 0)$ ,  $q = (0 : 0 : 1)$  e  $r = (0 : 1 : 0)$ , considere também

$$\begin{aligned} P &= v_3^2(p) = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^9 \\ Q &= v_3^2(q) = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^9 \\ R &= v_3^2(r) = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^9. \end{aligned}$$

Com isso, vamos construir os espaços tangentes  $T_P V_3^2$  e  $T_Q V_3^2$ . Tome  $x_0 = 1$ , pela Proposição 4.17, considere a aplicação de  $U_0 = k^2$  em  $V_0 = k^9$ :

$$\begin{aligned} \varphi : U_0 &\rightarrow V_0 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x_1, x_1^2, x_2, x_2^2, x_1^3, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2, x_1 x_2, x_2^3). \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= (1, 2x_1, 0, 0, 3x_1^2, 2x_1 x_2, x_2^2, x_2, 0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= (0, 0, 1, 2x_2, 0, x_1^2, 2x_1 x_2, x_1, 3x_2^2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) := \bar{0} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0) &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) := \bar{e}_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(0) &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) := \bar{e}_3. \end{aligned}$$

Portanto, o espaço tangente em  $P$  é

$$\begin{aligned}
T_P V_3^2 &= \overline{\langle \bar{0}, \bar{e}_1, \bar{e}_3 \rangle} \\
&= \overline{\langle (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \rangle} \\
&= \langle (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : \dots : 0), (1 : 1 : 0 : 0 : 0 : \dots : 0), (1 : 0 : 0 : 1 : 0 : \dots : 0) \rangle \\
&= \langle (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : \dots : 0), (0 : 1 : 0 : 0 : 0 : \dots : 0), (0 : 0 : 0 : 1 : 0 : \dots : 0) \rangle \\
&:= \langle e_0, e_1, e_3 \rangle.
\end{aligned}$$

Agora, tome  $x_2 = 1$ , pela Proposição 4.17, considere a aplicação de  $U_2 = k^2$  em  $V_9 = k^9$ :

$$\begin{aligned}
\gamma : U_2 &\rightarrow V_9 \\
(x_1, x_2) &\mapsto (x_0^3, x_0^2 x_1, x_0 x_1^2, x_0^2, x_0, x_1^3, x_1^2, x_1, x_0 x_1).
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \gamma}{\partial x_0} &= (3x_0^2, 2x_0 x_1, x_1^2, 2x_0, 1, 0, 0, 0, x_1) \\
\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} &= (0, x_0^2, 2x_0 x_1, 0, 0, 3x_1^2, 2x_1, 1, x_0).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) := \widehat{0} \\
\frac{\partial \gamma}{\partial x_0}(0) &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) := \widehat{e}_4 \\
\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) := \widehat{e}_7.
\end{aligned}$$

Portanto, o espaço tangente em  $Q$  é

$$\begin{aligned}
T_Q V_3^2 &= \overline{\langle \widehat{0}, \widehat{e}_4, \widehat{e}_7 \rangle} \\
&= \langle (0 : \dots : 0 : 1), (0 : \dots : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1), (0 : \dots : 0 : 1 : 0 : 1) \rangle \\
&= \langle (0 : \dots : 0 : 1), (0 : \dots : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0), (0 : \dots : 0 : 1 : 0 : 0) \rangle \\
&:= \langle e_9, e_4, e_7 \rangle.
\end{aligned}$$

Desta forma, segue que

$$\langle T_P V_3^2, T_Q V_3^2 \rangle = \langle e_0, e_1, e_3, e_4, e_7, e_9 \rangle.$$

Logo,

$$\dim \langle T_P V_3^2, T_Q V_3^2 \rangle = 5.$$

Pelo Lema de Terracini 6.5, como

$$\dim \langle T_P V_3^2, T_Q V_3^2 \rangle = 5 = \text{Expedim}(\text{Sec}_2(V_3^2)),$$

logo, a variedade  $V_3^2$  não é 2-defeituosa.

Veremos agora que a variedade  $V_3^2$  não é 3-defeituosa. De fato, tome  $x_1 = 1$ , pela Proposição 4.17, considere a aplicação de  $U_1 = k^2$  em  $V_5 = k^9$ :

$$\begin{aligned} \mu : U_1 &\rightarrow V_5 \\ (x_0, x_2) &\mapsto (x_0^3, x_0^2, x_0, x_0^2 x_2, x_0 x_2^2, x_2, x_2^2, x_0 x_2, x_2^3). \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial x_0} &= (3x_0^2, 2x_0, 1, 2x_0 x_2, x_2^2, 0, 0, x_2, 0) \\ \frac{\partial \mu}{\partial x_2} &= (0, 0, 0, x_0^2, 2x_0 x_2, 1, 2x_2, x_0, 3x_2^2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mu(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) := \tilde{0} \\ \frac{\partial \mu}{\partial x_0}(0) &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) := \tilde{e}_2 \\ \frac{\partial \mu}{\partial x_2}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) := \tilde{e}_6. \end{aligned}$$

Portanto, o espaço tangente em  $R$  é

$$\begin{aligned} T_R V_3^2 &= \overline{\langle \tilde{0}, \tilde{e}_2, \tilde{e}_6 \rangle} \\ &= \langle (0 : \dots : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0), (0 : 0 : 1 : 0 : \dots : 0), (0 : \dots : 0 : 1 : 0 : 0 : 0) \rangle \\ &:= \langle e_5, e_2, e_6 \rangle. \end{aligned}$$

Desta forma, segue que

$$\langle T_P V_3^2, T_Q V_3^2, T_R V_3^2 \rangle = \langle e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_9 \rangle.$$

Logo,

$$\dim \langle T_P V_3^2, T_Q V_3^2, T_R V_3^2 \rangle = 8.$$

Pelo Lema de Terracini 6.5, como

$$\dim \langle T_P V_3^2, T_Q V_3^2, T_R V_3^2 \rangle = 8 = \text{Expedim}(Sec_3(V_3^2)),$$

deste modo, a variedade  $V_3^2$  não é 3-defeituosa.

Por fim, pelo Lema 6.8, como  $Sec_3(V_3^2)$  tem dimensão 8, ou seja, 1 a menos que o espaço projetivo  $\mathbb{P}^9$  onde está ambientada a variedade de Veronese  $V_3^2$ , então  $Sec_4(V_3^2)$  preenche todo o espaço projetivo  $\mathbb{P}^9$  e, assim, a variedade de Veronese  $V_3^2$  não é defeituosa.

**Exemplo 6.8** A variedade de Veronese  $V_2^3$  é 2-defeituosa.

De fato, dada a aplicação de Veronese

$$\begin{aligned} v_2^3 : \mathbb{P}^3 &\rightarrow \mathbb{P}^9 \\ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) &\mapsto (x_0^2 : x_0 x_1 : x_0 x_2 : x_0 x_3 : x_1^2 : x_1 x_2 : x_1 x_3 : x_2^2 : x_2 x_3 : x_3^2). \end{aligned}$$

A dimensão esperada de  $Sec_k(V_2^3)$  é

$$\text{Expdim}(\text{Sec}_2(V_2^3)) = \min\{2(3+1) - 1, 9\} = 7.$$

Primeiro, comecemos tomando dois pontos gerais  $p, q \in \mathbb{P}^3$ , sem perda de generalidade, pelo Lema 6.7, podemos considerar  $p = (1 : 0 : 0 : 0)$  e  $q = (0 : 0 : 0 : 1)$ , considere também

$$P = v_2^3(p) = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^9$$

$$Q = v_2^3(q) = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^9.$$

Com isso, vamos construir os espaços tangentes  $T_P V_2^3$  e  $T_Q V_2^3$ . Tome  $x_0 = 1$ , pela Proposição 4.17, considere a aplicação de  $U_0 = k^2$  em  $V_0 = k^9$ :

$$\begin{aligned} \varphi : U_0 &\rightarrow V_0 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2). \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= (1, 0, 0, 2x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= (0, 1, 0, 0, x_1, 0, 2x_2, x_3, 0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} &= (0, 0, 1, 0, 0, x_1, 0, x_2, 2x_3). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) := \bar{0} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0) &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) := \bar{e}_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(0) &= (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) := \bar{e}_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(0) &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) := \bar{e}_3. \end{aligned}$$

Portanto, o espaço tangente em  $P$  é

$$\begin{aligned} T_P V_2^3 &= \overline{\langle \bar{0}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle} \\ &= \overline{\langle (1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0), (1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0), (1, 0, 1, 0, 0, \dots, 0), (1, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) \rangle} \\ &= \langle (1 : 0 : \dots : 0), (1 : 1 : 0 : \dots : 0), (1 : 0 : 1 : 0 : \dots : 0), (1 : 0 : 0 : 1 : 0 : \dots : 0) \rangle \\ &= \langle (1 : 0 : \dots : 0), (0 : 1 : 0 : \dots : 0), (0 : 0 : 1 : 0 : \dots : 0), (0 : 0 : 0 : 1 : 0 : \dots : 0) \rangle \\ &:= \langle e_0, e_1, e_2, e_3 \rangle. \end{aligned}$$

Agora, tome  $x_3 = 1$ , pela Proposição 4.17, considere a aplicação de  $U_3 = k^2$  em  $V_9 = k^9$ :

$$\begin{aligned} \gamma : U_3 &\rightarrow V_9 \\ (x_0, x_1, x_2) &\mapsto (x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_0, x_1^2, x_1x_2, x_1, x_2^2, x_2). \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\gamma}{\partial x_0} &= (2x_0, x_1, x_2, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x_1} &= (0, x_0, 0, 0, 2x_1, x_2, 1, 0, 0) \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x_2} &= (0, 0, x_0, 0, 0, x_1, 0, 2x_2, 1).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) := \widehat{0} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x_0}(0) &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) := \widehat{e}_3 \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x_1}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) := \widehat{e}_6 \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x_2}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) := \widehat{e}_8.\end{aligned}$$

Portanto, o espaço tangente em  $Q$  é

$$\begin{aligned}T_Q V_2^3 &= \overline{\langle \widehat{0}, \widehat{e}_3, \widehat{e}_6, \widehat{e}_8 \rangle} \\ &:= \langle e_9, e_3, e_6, e_8 \rangle.\end{aligned}$$

Desta forma, segue que

$$\langle T_P V_2^3, T_Q V_2^3 \rangle = \langle e_0, e_1, e_2, e_3, e_6, e_8, e_9 \rangle.$$

Logo,

$$\dim \langle T_P V_2^3, T_Q V_2^3 \rangle = 6.$$

Pelo Lema de Terracini [6.5](#), como

$$\dim \langle T_P V_2^3, T_Q V_2^3 \rangle = 6 < 7 = \text{Expdim}(\text{Sec}_2(V_2^3)),$$

portanto, a variedade  $V_2^3$  é 2-defeituosa.

## 7 Polítopos, Simplexos e Algoritmos

Neste capítulo apresentaremos o algoritmo que desenvolvemos, que pode ser encontrado em [10], no software *Wolfram Mathematica* que pode ser obtido em [11]. Para a base do desenvolvimendo do algoritmo usaremos os resultados que se encontram em [12], que apenas enunciaremos.

O objetivo do algoritmo é mostrar se uma variedade de Segre-Veronese não é  $h$ -defeituosa, se possível, dizer que não é defeituosa. Veremos que com o algoritmo não dá para afirmar que a variedade é defeituosa. Outra finalidade do algoritmo, será encontrar famílias de Segre-Veronese que podem não ser defeituosas.

**Definição 7.1** O toro em Geometria Algébrica é dado por  $(k^*)^n = k^* \times \dots \times k^*$ , onde  $k^* = k - \{0\}$ . Dizemos que uma variedade projetiva  $X \subset \mathbb{P}^N$  é *tórica* se existe um morfismo com imagem densa

$$\begin{aligned} \gamma : (k^*)^n &\rightarrow X \cap U_0 \\ x &\mapsto (x^{m_1}, \dots, x^{m_N}), \end{aligned}$$

onde  $U_0$  é como na Proposição 4.17 e  $M = \{m_1, \dots, m_N\} \subset \mathbb{Z}^n$  chamaremos de *polítopo*.

**Exemplo 7.1** Seja

$$\begin{aligned} \gamma : k^* &\rightarrow X \cap U_0 \\ (x_1) &\mapsto (1, x_1, x_1^2), \end{aligned}$$

onde  $X$  é a variedade de Veronese  $V_2^1$  e  $M = \{0, 1, 2\} \subset \mathbb{Z}$  é o polítopo associado. Assim,  $V_2^1$  é uma variedade tórica.

**Exemplo 7.2** Seja

$$\begin{aligned} \gamma : (k^*)^2 &\rightarrow X \cap U_0 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2), \end{aligned}$$

onde  $X$  é a variedade de Veronese  $V_2^2$  e  $M = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2)\} \subset \mathbb{Z}^2$  é o polítopo associado. Assim,  $V_2^2$  é uma variedade tórica.

**Exemplo 7.3** Seja

$$\begin{aligned} \gamma : (k^*)^2 &\rightarrow X \cap U_0 \\ (x_1, y_1) &\mapsto (1, y_1, x_1, x_1y_1), \end{aligned}$$

onde  $X$  é a variedade de Segre-Veronese  $SV_{(1,1)}^{(1,1)}$  e  $M = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \subset \mathbb{Z}^2$  é o polítopo associado. Assim,  $SV_{(1,1)}^{(1,1)}$  é uma variedade tórica.

**Exemplo 7.4** Seja

$$\begin{aligned} \gamma : (k^*)^2 &\rightarrow X \cap U_0 \\ (x_1, y_1) &\mapsto (1, y_1, x_1, x_1y_1, x_1^2, x_1^2y_1), \end{aligned}$$

onde  $X$  é a variedade de Segre-Veronese  $SV_{(2,1)}^{(1,1)}$  e  $M = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\} \subset \mathbb{Z}^2$  é o polítopo associado. Assim,  $SV_{(2,1)}^{(1,1)}$  é uma variedade tórica.

**Observação 7.1** Toda Segre-Veronese é uma variedade projetiva tórica e, assim, há um único polítopo associado à Segre-Veronese. Mais ainda, duas Segre-Veronese distintas tem polítopos associados distintos.

O computador usado na execução do programa tem as seguintes configurações: Memória 8GB DDR3 L, Intel Core i3-6100U 2.3 GHz, 1000 GB HDD e Intel HD graphics 520.

**A Primeira Etapa do Algoritmo:** Encontrar o polítopo correspondente a Segre-Veronese desejada. Para isso, construímos a função *SegreVeronese*, cuja a entrada é da forma  $SegreVeronese[\{n_1, \dots, n_r\}, \{d_1, \dots, d_r\}]$  e a saída é o polítopo  $M$  associado à variedade  $SV_{(d_1, \dots, d_r)}^{(n_1, \dots, n_r)}$ .

*Tempo estimado:* Para a variedade  $SV_{(3,3,3,2)}^{(3,3,3,3)}$  a função demora aproximadamente 30 segundos, onde o polítopo tem 80.000 pontos. Para a variedade  $SV_{(3,3,3,3)}^{(3,3,3,3)}$  a função demora aproximadamente 120 segundos, onde o polítopo tem 160.000 pontos. Para polítopos com até 1.000 pontos leva menos de 1 segundo, em geral.

**Exemplo 7.5** O polítopo associado à variedade de Veronese  $V_2^2$ :

```
SegreVeronese[{2},{2}]
Saída: {{0, 0}, {0, 1}, {0, 2}, {1, 0}, {1, 1}, {2, 0}}
```

**Definição 7.2** Seja  $\Delta \subset \mathbb{Z}^n$  finito. Dizemos que  $\Delta$  é um *simplexo* quando  $\#(\Delta) = n + 1$  e os pontos de  $\Delta$  são linearmente independentes.

**Exemplo 7.6** Considere o polítopo  $M = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2)\}$  do Exemplo 7.2. Tome  $\Delta_1 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ ,  $\Delta_2 = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0)\}$  e  $\Delta_3 = \{(1, 1), (0, 2)\}$  contidos em  $M$ .

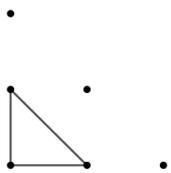


Figura 7.1:  $\Delta_1 \subset M$ .

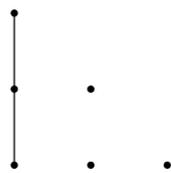


Figura 7.2:  $\Delta_2 \subset M$ .

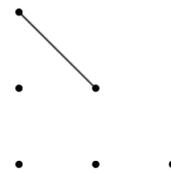


Figura 7.3:  $\Delta_3 \subset M$ .

Assim, temos que

- $\Delta_1$ : É um simplexo, pois os pontos são linearmente independentes e  $\#(\Delta_1) = 3$ .
- $\Delta_2$ : Não é um simplexo apesar de  $\#(\Delta_2) = 3$ , pois os pontos estão na mesma reta.
- $\Delta_3$ : Não é um simplexo apesar dos pontos serem linearmente independentes, pois  $\#(\Delta_3) = 2$ .

**Definição 7.3** Seja  $S \subset \mathbb{Z}^n$  finito. Dado um vetor  $v \in \mathbb{R}^n$ , defina

$$\begin{aligned}\varphi_v : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \langle p, v \rangle (\text{produto interno escalar}).\end{aligned}$$

Defina também

$$\varphi_v(S) := \sum_{p \in S} \varphi_v(p).$$

Dizemos que um vetor  $v \in \mathbb{R}^n$  *separa* um simplexo  $\Delta$  em  $S$ , quando

$$\max\{\varphi_v(D) \mid D \subset S \text{ é um simplexo}\}$$

é atingido uma única vez e é igual a  $\varphi_v(\Delta)$ .

**Definição 7.4** Sejam  $S \subset \mathbb{Z}^n$  e  $v$  um vetor em  $\mathbb{R}^n$ . Ordene os pontos de  $S$  com respeito à direção  $v$  do maior para o menor, por meio da aplicação  $\varphi_v$ :

$$S = \{p_1, \dots, p_s\}.$$

Seja  $Q = \{p_1, \dots, p_{n+2}\}$  o conjunto dos primeiros  $n + 2$  pontos de  $S$ . Dizemos que  $v$  *separa trivialmente* um simplexo em  $S$  quando  $Q' = Q - \{p_{n+2}\}$  é um simplexo e  $\varphi_v(p_{n+1}) > \varphi_v(p_{n+2})$ .

**Exemplo 7.7** Considere  $S = M$ , onde  $M$  é o polítopo do Exemplo 7.2. Tome o vetor  $v = (-1, -1) \in \mathbb{R}^2$ , temos que

$$\begin{aligned}\varphi_v((0, 0)) &= \langle (0, 0), v \rangle = 0 & \varphi_v((1, 0)) &= \langle (1, 0), v \rangle = -1 \\ \varphi_v((2, 0)) &= \langle (2, 0), v \rangle = -2 & \varphi_v((0, 1)) &= \langle (0, 1), v \rangle = -1 \\ \varphi_v((0, 2)) &= \langle (0, 2), v \rangle = -2 & \varphi_v((1, 1)) &= \langle (1, 1), v \rangle = -2.\end{aligned}$$

Dessa forma, defina  $Q = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0)\}$  como um conjunto de 4 pontos com maior valor com respeito a  $v$ . Como  $\Delta_1 = Q - \{(0, 2)\}$  é um simplexo e  $\varphi_v((0, 1)) > \varphi_v((2, 0))$ , então  $v$  separa trivialmente o simplexo  $\Delta_1$ .

**Proposição 7.1** Seja  $S \subset \mathbb{Z}^n$  finito. Se  $v$  separa trivialmente um simplexo em  $S$ , então  $v$  separa um simplexo em  $S$ .

*Demonstração:* Dado vetor  $v \in \mathbb{R}^n$ . Temos que, ordenar do maior para o menor o conjunto  $S$ , em relação a aplicação  $\varphi_v$ , e depois escolher os  $n + 1$  pontos iniciais é o mesmo que pegar os  $n + 1$  pontos com maior valor em  $S$ , em relação à aplicação  $\varphi_v$ . ■

A volta da Proposição 7.1 não é verdade, vejamos um exemplo:

**Exemplo 7.8** Considere o conjunto  $S = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$ . Se tomarmos  $v = (0, 1)$ , temos que  $v$  separa  $\Delta = \{(1, 3), (1, 2), (0, 0)\}$ , mas não o separa trivialmente.

**Observação 7.2** Computacionalmente é inviável testar se  $v$  separa um simplexo, pois teria que testar todos os simplexos  $\Delta \subset S$ . Já testar se  $v$  separa trivialmente é muito mais rápido.

## Segunda Etapa do Algoritmo:

- 1- Determinar se dado um conjunto de pontos  $\Delta$  em  $\mathbb{Z}$  é um simplexo. Para isso, construímos a função *ESimplexo*, onde a entrada é da forma *ESimplexo*[\{p<sub>1</sub>, ..., p<sub>n</sub>\}] e a saída é *True* ou *False* quando forma um simplexo ou quando não forma um simplexo, respectivamente.

*Tempo estimado:* Conjuntos com 9.001 pontos em  $\mathbb{Z}^{9.000}$  levam aproximadamente 45 segundos. Para conjuntos com 2.001 pontos em  $\mathbb{Z}^{2.000}$  levam menos de 1 segundo, em geral.

- 2- Verificar se  $v$  separa trivialmente um simplexo em  $S$ . Para isso, construímos a função *Trivialmente*, onde a entrada é da forma *Trivialmente*[ $S, v$ ] e a saída é o simplexo, caso consiga separar trivialmente, ou *False* caso não consiga.

*Tempo estimado:* Conjuntos com 3.000 pontos em  $\mathbb{Z}^{2.000}$  levam aproximadamente 72 segundos. Para conjuntos com até 600 pontos em  $\mathbb{Z}^{500}$  levam menos de 1 segundo, em geral.

**Exemplo 7.9** Verifiquemos, por meio do algoritmo, se  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  e  $\Delta_3$  do Exemplo 7.6 formam simplexos, isto é

```
ESimplexo[\{\{0,0\}, \{0,1\}, \{1,0\}\}]  
Saída: True  
Time: 0.0000 segundos
```

```
ESimplexo[\{\{0,0\}, \{0,1\}, \{0,2\}\}]  
Saída: False  
Time: 0.0000 segundos
```

```
ESimplexo[\{\{1,1\}, \{0,2\}\}]  
Saída: False  
Time: 0.0000 segundos
```

**Exemplo 7.10** Verifiquemos, por meio do algoritmo, se  $v_1 = (-1, -1)$  e  $v_2 = (-1, 0)$  separam trivialmente um simplexo em  $M = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2)\}$ , isto é

```
Trivialmente[\{\{0,0\}, \{1,0\}, \{0,1\}, \{2,0\}, \{1,1\}, \{0,2\}\},\{-1,-1\}]  
Saída: \{\{0, 0\}, \{1, 0\}, \{0, 1\}\}  
Time: 0.0000 segundos
```

```
Trivialmente[\{\{0,0\}, \{1,0\}, \{0,1\}, \{2,0\}, \{1,1\}, \{0,2\}\},\{-1,0\}]  
Saída: False  
Time: 0.0000 segundos
```

Agora enunciaremos o teorema principal de [12], no qual nos apoiaremos.

**Teorema 7.2** (*Teorema 2.8*) Sejam  $M \subset \mathbb{Z}^n$  o polítopo associado à variedade tórica  $X \subset \mathbb{P}^N$ ,  $\Delta_1, \dots, \Delta_h$  simplexos disjuntos de  $M$  e  $v_1, \dots, v_h$  vetores em  $\mathbb{R}^n$ . Se para  $i = 1, \dots, h$ ,  $v_i$  separa  $\Delta_i$  em  $M - (\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_{i-1})$ , então a variedade  $X$  não é  $h$ -defeituosa. Além disso, se  $M - (\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_h)$  for linearmente independente, então a

variedade  $X$  não é defeituosa. Em particular, se  $M = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_h$ , então  $X$  não é defeituosa.

**Exemplo 7.11** Considere a variedade de Segre-Veronese  $SV_{1,1}^{1,1}$ . Pelo Exemplo 7.3 o polítopo associado é  $M = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \subset \mathbb{Z}^2$ . Tome  $v = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_v((0, 0)) &= 0 & \varphi_v((0, 1)) &= 1 \\ \varphi_v((1, 0)) &= 1 & \varphi_v((1, 1)) &= 2, \end{aligned}$$

assim,  $v$  separa o simplexo  $\Delta = \{(1, 1), (0, 1), (1, 0)\}$ :

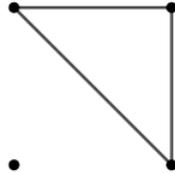


Figura 7.4: Polítopo associado a  $SV_{(1,1)}^{(1,1)}$ .

Pelo Teorema 7.2 a variedade  $SV_{1,1}^{1,1}$  não é 1-defeituosa, mais ainda, como  $M - \Delta = \{(0, 0)\}$  é linearmente independente, então  $SV_{1,1}^{1,1}$  não é defeituosa.

**Exemplo 7.12** Considere a variedade de Segre-Veronese  $SV_{(1,4)}^{(1,1)}$ . Tome a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma : (k^*)^2 &\rightarrow SV_{(1,4)}^{(1,1)} \cap U_0 \\ (x_1, y_1) &\mapsto (1, y_1, y_1^2, y_1^3, y_1^4, x_1, x_1 y_1, x_1 y_1^2, x_1 y_1^3, x_1 y_1^4). \end{aligned}$$

Dessa forma, o polítopo associado é

$$M = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}.$$

Tome  $v_1 = (1, 1)$ ,  $v_2 = (0, 1)$  e  $v_3 = (1, 1)$ , segue que  $v_1$  separa o simplexo  $\Delta_1 = \{(1, 4), (0, 4), (1, 3)\}$  de  $M$ ,  $v_2$  separa o simplexo  $\Delta_2 = \{(0, 3), (1, 2), (0, 2)\}$  de  $M - \Delta_1$  e  $v_3$  separa o simplexo  $\Delta_3 = \{(0, 1), (1, 1), (1, 0)\}$  de  $M - (\Delta_1 \cup \Delta_2)$ :

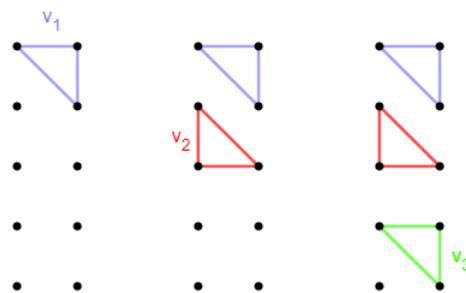


Figura 7.5: Polítopo associado a  $SV_{(1,4)}^{(1,1)}$ .

Pelo Teorema 7.2, a variedade  $SV_{(1,4)}^{(1,1)}$  não é defeituosa.

**Observação 7.3** No Exemplo 7.12, se trocarmos  $v_3$  por  $v'_3 = (-1, -1)$ , temos que  $v'_3$  separa o simplexo  $\Delta'_3 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$  de  $M - (\Delta_1 \cup \Delta_2)$ :

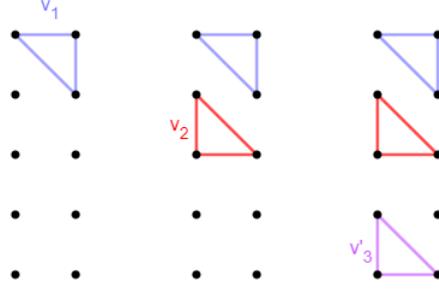


Figura 7.6: Segundo polítopo associado a  $SV_{(1,4)}^{(1,1)}$ .

Observe que,  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta'_3$  é outro conjunto de simplexos disjuntos de  $M$  que satisfaz as hipóteses do Teorema 7.2, ou seja, é outro conjunto de simplexos que mostra que a variedade  $SV_{(1,4)}^{(1,1)}$  não é defeituosa.

**Exemplo 7.13** Considere a variedade de Segre-Veronese  $SV_{(1,5)}^{(1,1)}$ . Tome a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma : (k^*)^2 &\rightarrow SV_{(1,5)}^{(1,1)} \cap U_0 \\ (x_1, y_1) &\mapsto (1, y_1, y_1^2, y_1^3, y_1^4, y_1^5, x_1, x_1 y_1, x_1 y_1^2, x_1 y_1^3, x_1 y_1^4, x_1 y_1^5). \end{aligned}$$

Dessa forma, o polítopo associado é

$$M = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}.$$

Tome  $v_1 = (1, 1)$ ,  $v_2 = (0, 1)$ ,  $v_3 = (-1, -1)$  e  $v_4 = (1, 0)$ , segue que  $v_1$  separa o simplexo  $\Delta_1 = \{(1, 5), (0, 5), (1, 4)\}$  de  $M$ ,  $v_2$  separa o simplexo  $\Delta_2 = \{(0, 4), (1, 3), (0, 3)\}$  de  $M - \Delta_1$ ,  $v_3$  separa o simplexo  $\Delta_3 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$  de  $M - (\Delta_1 \cup \Delta_2)$  e  $v_4$  separa o simplexo  $\Delta_4 = \{(1, 2), (0, 2), (1, 1)\}$ :

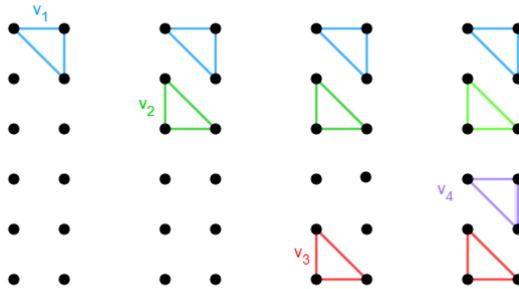


Figura 7.7: Polítopo associado a  $SV_{(1,5)}^{(1,1)}$ .

Pelo Teorema 7.2, a variedade  $SV_{(1,5)}^{(1,1)}$  não é defeituosa.

**Observação 7.4** No Exemplo 7.13, se tomarmos  $v'_1 = (1, 1)$ ,  $v'_2 = (1, -1)$  e  $v'_3 = (2, 1)$ :

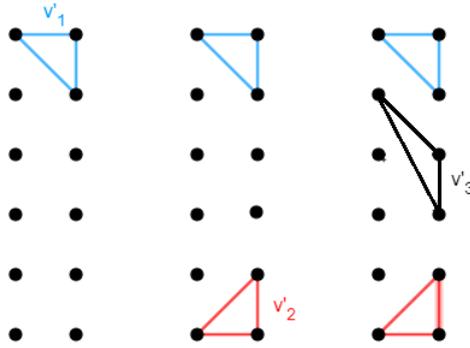


Figura 7.8: Segundo polítopo associado a  $SV_{(1,5)}^{(1,1)}$ .

Observe que não temos as hipóteses do Teorema 7.2, pois os 3 pontos que sobram não são linearmente independentes. Logo, com essa configuração de simplexes não conseguimos mostrar que a variedade não é defeituosa, mas isso não significa que seja defeituosa.

Por esse motivo, o Teorema 7.2 não garante que uma variedade é defeituosa. Esse tipo de fenômeno tem consequências computacionais, às vezes o computador encontra uma “triangulação incompleta” de  $S$  e tem que começar de novo do zero.

### Terceira Etapa do Algoritmo:

- 1- A função *Defeituosa* tem entrada da forma  $Defeituosa[M, t]$ , onde  $M$  é o polítopo associado à Segre-Veronese e  $t$  é a quantidade de tentativas para verificar se a variedade não é defeituosa. A saída desta função: *Nao e defeituosa* seguida do conjunto de simplexes e os pontos linearmente independentes, caso consiga verificar; *Falhou, mas nao e h-defeituosa*, caso não consiga verificar na quantidade de tentativas estipulada na entrada, mas encontrou  $h$ -simplexos.

*Tempo estimado:* Em 5 tentativas, para determinar que a variedade de Veronese  $V_4^7$ , cujo o polítopo tem 330 pontos, não é defeituosa, o algoritmo leva aproximadamente 185 segundos.

- 2- A função *QNDefeituosas* tem entrada da forma

$$QNDefeituosas[\{\{\{n_1, \dots, n_{r_1}\}, \{d_1, \dots, d_{r_1}\}\}, \dots, \{\{n_1, \dots, n_{r_k}\}, \{d_1, \dots, d_{r_k}\}\}\}, t],$$

e a saída mostrará apenas as variedades de Segre-Veronese  $SV_{(d_1, \dots, d_{r_i})}^{(n_1, \dots, n_{r_i})}$  que verificou-se não ser defeituosa nas  $t$  tentativas. *Tempo estimado:* O tempo estimado da função *QNDefeituosas* depende diretamente da função *Defeituosa*, pois ela utilizada a função *Defeituosa* para cada variedade.

**Exemplo 7.14** Como exemplo, segue algumas variedades de Segre-Veronese:

```
Defeituosa[SegreVeronese[{2},{2}], 5]
Saída: Falhou, mas nao e 1-defeituosa
Time: 0.0156 segundos
```

```

Defeituosa[SegreVeronese[{2},{3}], 5]
Saída: Nao e defeituosa {{{{3,0},{2,0},{2,1}},{0,3},{1,2},{0,2}},{1,0},{0,0},
{1,1}},{0,1}}
Time: 0.0156 segundos

```

```

Defeituosa[SegreVeronese[{3},{2}], 5]
Saída: Falhou, mas nao e 1-defeituosa
Time: 0.0156 segundos

```

```

Defeituosa[SegreVeronese[{1,2},{2,2}], 5]
Saída: Falhou, mas nao e 3-defeituosa
Time: 0.1406 segundos

```

**Exemplo 7.15** As variedades de Segre-Veronese da forma  $SV_{(1,1)}^{(n,1)}$  não são defeituosas. Mostraremos, por meio do algoritmo, que para  $1 \leq n \leq 10$  isso é verdade, isto é

```

QNDefeituosas[Table[{{n,1}, {1,1}}, {n, 1, 10}],5]
Saída: {{{1, 1}, {1, 1}}, {{2, 1}, {1, 1}}, {{3, 1}, {1, 1}}, {{4, 1}, {1, 1}},
{{5, 1}, {1, 1}}, {{6, 1}, {1, 1}}, {{7, 1}, {1, 1}}, {{8, 1}, {1, 1}},
{{9, 1}, {1, 1}}, {{10, 1}, {1, 1}}}
Time: 0.7812 segundos

```

**Exemplo 7.16** Vejamos quais das Veroneses  $V_4^n$  o algoritmo consegue verificar que não são defeituosas, para  $n = 1, \dots, 5$ , isto é

```

QNDefeituosas[Table[{{n}, {4}}, {n, 1, 5}],10]
Saída: {{{1}, {4}}, {{5}, {4}}}
Time: 316.3440 segundos

```

Portanto, entre esses casos que consideramos, o algoritmo conseguiu verificar que as variedades de Veronese  $V_4^1$  e  $V_4^5$  não são defeituosas. Os demais casos não podemos dizer nada pelo algoritmo, mas pelo Teorema de Alexander e Hirschowitz 6.4 sabemos que são defeituosas.

## 8 Esquemas

Neste capítulo definiremos e apresentaremos propriedades, sem demonstrar, relacionadas a esquemas. Caso o leitor queira se aprofundar no assunto, a referência indicada é [13], sendo essa a referência na qual nos basearemos.

Na primeira seção apresentaremos conceitos e propriedades relativas à estrutura de pré-feixes e feixes. Em seguida, na segunda seção, definiremos um feixe  $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$  sobre o espectro de um anel (Definição 3.23), de modo que  $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$  seja um espaço localmente anelado, esse tipo de estrutura será de suma importância para definirmos os esquemas.

Já na terceira seção, será apresentado o morfismo de pré-feixe, que será amplamente utilizado a partir do Capítulo 11. Dessa forma, na última seção, usaremos as ferramentas que foram apresentadas nas seções anteriores, veremos o espaço projetivo  $\mathbb{P}^n$ , assim como as variedades projetivas, pela perspectiva de esquemas.

### 8.1 Feixes

**Definição 8.1** Seja  $X$  um espaço topológico. Um *pré-feixe* de conjuntos  $\mathcal{F}$  em um conjunto  $X$  é definido da seguinte maneira:

- (a) Para cada aberto  $U \subset X$  é associado um conjunto  $\mathcal{F}(U)$ .
- (b) Para cada inclusão  $V \subset U$  de abertos de  $X$ , uma função  $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  chamada de *restrição*.

Sujeita às seguintes condições

- (1)  $\mathcal{F}(\emptyset)$  consiste de um único ponto;
- (2)  $\rho_U^U = \text{Id}_{\mathcal{F}(U)}$ ;
- (3) Se  $W \subset V \subset U$ , são abertos, então  $\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$ , ou seja, o diagrama a seguir é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\rho_V^U} & \mathcal{F}(V) \\ & \searrow \rho_W^U & \downarrow \rho_W^V \\ & & \mathcal{F}(W) \end{array}$$

**Observação 8.1** Um pré-feixe de anéis é definido da mesma forma que um pré-feixe de conjuntos, mas as restrições devem ser homomorfismos de anéis.

Os elementos  $s \in \mathcal{F}(U)$  são chamados de *seções* de  $\mathcal{F}$  sobre  $U$ . Os elementos de  $\Gamma(\mathcal{F}, X) := \mathcal{F}(X)$  são chamados de *seções globais* de  $\mathcal{F}$ . Usaremos a notação  $\rho_V^U(s) = s|_V$ , para cada  $s \in \mathcal{F}(U)$ .

**Exemplo 8.1** Sejam  $X$  e  $M$  espaços topológicos. Defina para cada aberto  $U \subset X$ ,

$$\mathcal{F}(U) := \{f : U \rightarrow M \text{ contínua}\}$$

e para cada inclusão de abertos  $V \subset U$

$$\begin{aligned} \rho_V^U : \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{F}(V) \\ f &\mapsto f|_V. \end{aligned}$$

Então  $\mathcal{F}$  é um pré-feixe de espaços topológicos em  $X$  com valores em  $M$ .

**Exemplo 8.2** Sejam  $X$  uma variedade diferenciável. Defina para cada aberto  $U \subset X$ ,

$$\mathcal{F}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciável}\}$$

e para cada inclusão de abertos  $V \subset U$

$$\begin{aligned} \rho_V^U : \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{F}(V) \\ f &\mapsto f|_V. \end{aligned}$$

Então  $\mathcal{F}$  é um pré-feixe chamado de *pré-feixe de funções diferenciáveis* em  $X$ .

**Definição 8.2** Seja  $\mathcal{F}$  um pré-feixe sobre  $X$ . Dizemos que  $\mathcal{F}$  é um *feixe* quando vale a seguinte propriedade

(4) Dada uma cobertura aberta  $\{U_\alpha\}$  de um aberto  $U \subset X$  e seções  $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$  compatíveis na interseções, isto é,

$$s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta},$$

existe uma única seção  $s \in \mathcal{F}(U)$  tal que  $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$ , para todo  $\alpha$ .

Dizemos que as  $s_\alpha$  podem ser *coladas* para obter a  $s$ .

Os Exemplos 8.1 e 8.2 são exemplos de pré-feixe que são feixes. Vejamos a seguir um exemplo de um pré-feixe que não é um feixe.

**Exemplo 8.3** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $M$  um conjunto. Defina para cada aberto  $U \subset X$ ,

$$\mathcal{F}(U) := \{f : U \rightarrow M \text{ constante}\}$$

e para cada inclusão de abertos  $V \subset U$

$$\begin{aligned} \rho_V^U : \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{F}(V) \\ f &\mapsto f|_V. \end{aligned}$$

Então  $\mathcal{F}$  é um pré-feixe, mas não é um feixe.

De fato, suponha que existam abertos  $U, U_1, U_2$  com

$$U = U_1 \cup U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset, U_1 \neq \emptyset \neq U_2.$$

Sejam  $m_1, m_2 \in M$ , onde  $m_1 \neq m_2$ , e  $s_1 \in \mathcal{F}(U_1)$ ,  $s_2 \in \mathcal{F}(U_2)$ , onde

$$s_1 : U_1 \rightarrow M \quad \text{e} \quad s_2 : U_2 \rightarrow M \\ x \mapsto m_1 \quad \quad \quad x \mapsto m_2$$

Então,

$$s_1|_{U_1 \cap U_2} = s_2|_{U_1 \cap U_2} = *$$

onde  $\mathcal{F}(\emptyset) = \{*\}$ , pois  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

Porém, não existe  $s \in \mathcal{F}(U_1 \cup U_2)$  tal que  $s|_{U_1} = s_1$  e  $s|_{U_2} = s_2$ .

**Definição 8.3** Seja  $\mathcal{F}$  um pré-feixe num espaço topológico  $X$  e seja  $U \subset X$  um aberto não vazio. Definimos  $\mathcal{F}$  *restrito* a  $U$ , e denotamos por  $\mathcal{F}|_U$ , como sendo

$$\mathcal{F}|_U(V) := \mathcal{F}(V), \text{ para todo aberto } V \subset U$$

e  $\sigma_W^V = \rho_W^V$  para toda inclusão de abertos  $W \subset V \subset U$ . Neste caso,  $\mathcal{F}|_U$  juntamente com as restrições  $\sigma_W^V$  é um feixe sobre o aberto  $U$ .

**Definição 8.4** Uma variedade *quase-afim*  $Y \subset k^n$  é um aberto de uma variedade afim  $V(I) \subseteq k^n$ , onde  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ . Uma variedade *quase-projetiva*  $X \subset \mathbb{P}^n$  é um aberto de uma variedade projetiva  $V(J) \subset \mathbb{P}^n$  onde  $J \subset k[x_0, \dots, x_n]$  é um ideal homogêneo. Uma *variedade* sobre um corpo  $k$  é qualquer variedade afim, quase-afim, projetiva ou quase-projetiva.

**Definição 8.5** Seja  $Y \subset k^n$  uma variedade quase-afim. Uma função  $f : Y \rightarrow k$  é *regular* em  $p \in Y$ , se existe uma vizinhança  $U \subset Y$  de  $p$  e polinômios  $g, h \in k[x_1, \dots, x_n]$  tais que  $0 \notin h(U)$  e  $f = g/h$  em  $U$ . Dizemos que  $f$  é *regular* se  $f$  é regular em  $p$ , para todo  $p \in Y$ .

**Definição 8.6** Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade quase-projetiva. Então uma função  $f : X \rightarrow k$  é *regular* em  $p \in X$ , se existe uma vizinhança  $U \subset X$  de  $p$  e polinômios homogêneos de mesmo grau,  $g, h \in k[x_0, \dots, x_n]$  tais que  $0 \notin h(U)$  e  $f = g/h$  em  $U$ .

**Exemplo 8.4** Seja  $X$  uma variedade sobre um corpo  $k$ . Defina para todo aberto não vazio  $U \subseteq X$ ,

$$\mathcal{O}(U) := \{f : U \rightarrow k \text{ regular}\}$$

e para cada inclusão de abertos  $V \subseteq U$ ,

$$\rho_V^U : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V) \\ f \mapsto f|_V$$

Chamamos  $\mathcal{O}$  de *feixe de funções regulares*. De fato,  $\mathcal{O}$  é um feixe sobre  $X$ , como se pode ver no Exemplo 1.0.1 do livro [13], Capítulo 2.

**Definição 8.7** Seja  $\mathcal{F}$  um pré-feixe sobre um espaço topológico  $X$ . Definimos o *talo*  $\mathcal{F}_p$  de  $\mathcal{F}$  em  $p \in X$ , como sendo o limite direto dos grupos  $\mathcal{F}(U)$  para toda vizinhança  $U \subset X$  de  $p$ , isto é

$$\mathcal{F}_p := \varinjlim \mathcal{F}(U).$$

Um elemento de  $\mathcal{F}_p$  é representado por um par  $\langle U, s \rangle$  com  $U$  vizinhança de  $p$  e  $s \in \mathcal{F}(U)$ . Dois pares  $\langle U, s \rangle$  e  $\langle V, t \rangle$  representam o mesmo elemento de  $\mathcal{F}_p$ , quando existe um aberto  $W$  tal que  $p \in W \subset U \cap V$  e  $s|_W = t|_W$ . Os elementos de  $\mathcal{F}_p$  são chamados *germes de seções*.

**Exemplo 8.5** Sejam  $A$  um grupo abeliano,  $X$  um espaço topológico e  $p \in X$ . Defina para todo aberto não vazio  $U \subset X$ ,

$$i_p(A)(U) = \begin{cases} A, & \text{se } p \in U \\ \{0\}, & \text{se } p \notin U \end{cases}$$

e para toda inclusão de abertos  $V \subseteq U$ ,

$$\rho_V^U = \begin{cases} \text{id}_A, & \text{se } p \in V \\ \{0\} \mapsto \{0\}, & \text{se } p \notin U \\ A \mapsto \{0\}, & \text{se } p \in U \setminus V \end{cases}.$$

Além disso, os talos de  $i_p(A)$  são dados por

$$(i_p(A))_q = \begin{cases} A, & \text{se } q \in \overline{\{p\}} \\ \{0\}, & \text{se } q \notin \overline{\{p\}} \end{cases}.$$

## 8.2 O Espectro de um Anel como um Feixe

Nesta seção iremos definir sobre o espectro de um anel (Definição 3.23) um feixe com uma propriedade em específico. Pela Proposição 3.30, o espectro de um anel  $A$ , denotado por  $\text{Spec}(A)$ , é um espaço topológico, sendo os abertos os conjuntos da forma  $D(E) = \text{Spec}(A) - V(E)$ , onde  $E \subset \text{Spec}(A)$  e  $V(E)$  é como na Definição 3.24. Vale resaltar para o leitor, que utilizaremos os anéis  $A_f$  apresentados no Exemplo 3.9 para contruir as restrições do feixe.

**Definição 8.8** Seja  $\mathcal{O}$  um feixe sobre o espaço topológico  $X$ . Dizemos que  $(X, \mathcal{O})$  é um *espaço anelado*, quando  $\mathcal{O}$  é um feixe de anéis sobre  $X$ . Dizemos que o espaço anelado  $(X, \mathcal{O})$  é *localmente anelado*, se cada talo  $\mathcal{O}_p$  é um anel local.

O que queremos agora é definir sobre  $\text{Spec}(A)$  um feixe  $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$  de modo que  $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$  seja um espaço localmente anelado. Para isso, vamos usar (sem provar nem formalizar) o fato de que para definir um feixe sobre um espaço topológico basta definir um feixe nos abertos de uma base da topologia.

**Definição 8.9** Seja  $A$  um anel. Defina

- (a) Para cada  $f \in A$ ,  $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(D(f)) = A_f$ ;
- (b) Para cada par  $f, g \in A$  com  $D(f) \subseteq D(g)$

$$\begin{aligned} \rho_{D(f)}^{D(g)} : A_g &\rightarrow A_f \\ \frac{a}{g^k} &\mapsto \frac{an^k}{f^{nk}} \end{aligned}$$

onde  $f^n = gu$  em  $A$  para algum  $u \in A$  e  $n \geq 0$ .

**Observação 8.2** Para justificar que  $f^n = gu$ , observe que, como  $D(f) \subseteq D(g)$ , então  $V(g) \subseteq V(f)$ , ou seja,

$$p \in \text{Spec}(A), p \ni g \Rightarrow p \ni f.$$

Considere a aplicação

$$\begin{aligned}\pi : A &\rightarrow A/(g) \\ f &\mapsto \bar{f}\end{aligned}$$

e lembre que há uma bijeção

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ideais primos de } A \\ \text{que contém } g \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ideais primos de} \\ A/(g) \end{array} \right\}.$$

Agora, observe que  $\bar{f} \in I$ , para todo  $I \in \text{Spec}(A/(g))$ . De fato, seja  $I \in \text{Spec}(A/(g))$ . Pelo exposto acima,  $(g) \in \pi^{-1}(I) \subseteq \text{Spec}(A)$ . Pela observação anterior,  $f \in \pi^{-1}(I)$ . Desse modo,  $\bar{f} \in \pi(\pi^{-1}(I)) = I$ .

Assim, pela Proposição 3.9, segue que

$$\begin{aligned}\bar{f} &\in \bigcap_{I \in \text{Spec}(A/(g))} I = \mathfrak{N}(A/(g)), \text{ onde } \mathfrak{N}(A/(g)) \text{ é o nilradical de } A/(g), \\ &\Rightarrow \bar{f}^n = 0 \in A/(g) \\ &\Rightarrow f^n \in (g) \\ &\Rightarrow f^n = ug\end{aligned}$$

para algum  $u \in A$  e para algum  $n \geq 0$ .

**Observação 8.3** A aplicação  $\rho_{D(f)}^{D(g)}$  é simplesmente a localização  $A_g \rightarrow (A_g)_f = A_f$ .

**Observação 8.4** A ideia da aplicação  $\rho_{D(f)}^{D(g)}$  é que os elementos de  $A_g$  são do tipo  $a/g^k$  e queremos restringir para  $A_f$ . Mas em  $A_f$ , os elementos são da forma  $b/f^l$ , então queremos escrever o  $g$  em termos de potências de  $f$ . Convenientemente, como  $f^n \in (g)$ , para algum  $n \geq 0$ , isso é possível.

**Teorema 8.1** Sejam  $A$  um anel e  $X = \text{Spec}(A)$  um espaço topológico. Então,  $(X, \mathcal{O}_X)$  ganha uma estrutura de um espaço localmente anelado. Além disso,  $\mathcal{O}_X(X) = A$  e o talo de  $\mathcal{O}_X$  em cada  $p \in X$  é  $\mathcal{O}_{X,p} = A_p$  a localização do anel  $A$  no ideal primo  $p$ .

*Demonstração:* Ver [13], Capítulo 2, Proposição 2.3. ■

Chamamos  $\mathcal{O}_X$  de *feixe estrutural* de  $X$  ou *feixe de funções regulares* de  $X$ .

Vejamos em alguns exemplos como o espectro dá informação geométrica. O que devemos lembrar do Teorema anterior é

$$\underbrace{\{A\}}_{\text{ANEL}} \longrightarrow \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \text{Spec}(A) = X \text{ conjunto} \\ X \text{ espaço topológico} \\ \mathcal{O}_X \text{ feixe} \end{array} \right\}}_{\text{GEOMETRIA}} \longrightarrow \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_X(X) = A \text{ seções globais} \\ \mathcal{O}_X(U) \text{ seções sobre } U \\ \mathcal{O}_{X,p} = A_p \text{ talos} \\ \mathcal{O}_X(D(f)) = A_f \end{array} \right\}}_{\text{ÁLGEBRA}}$$

**Exemplo 8.6** Considere os anéis  $A = k[x]/(x)$ ,  $B = k[x]/(x^2)$  e  $C = k[x]/(x^3)$ .

Nos três casos, o espectro tem um único elemento correspondente à  $(\bar{x})$ . Sejam  $X = \text{Spec}(A)$ ,  $Y = \text{Spec}(B)$  e  $Z = \text{Spec}(C)$ . Como só há uma topologia em um conjunto unitário os três espaços são homeomorfos. Porém,  $\mathcal{O}_X$ ,  $\mathcal{O}_Y$  e  $\mathcal{O}_Z$  são essencialmente distintos, pois os anéis  $\mathcal{O}_X(X) = A$ ,  $\mathcal{O}_Y(Y) = B$  e  $\mathcal{O}_Z(Z) = C$  não são isomorfos.

### 8.3 Morfismos de Feixes

**Definição 8.10** Sejam  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  pré-feixes em um espaço topológico  $X$ . Um *morfismo de pré-feixes*  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  é uma coleção de aplicações  $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  para cada aberto não vazio  $U \subset X$  tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow \rho_V^U & & \downarrow \bar{\rho}_V^U \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

comuta para todos abertos não vazios  $V \subset U \subset X$ .

Se  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  são pré-feixes de grupos,  $k$ -álgebras ou outros, exigimos que os  $\varphi(U)$  sejam morfismos de grupos, de  $k$ -álgebras ou de outros. Quando  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  são feixes, dizemos que  $\varphi$  é um *morfismo de feixes*.

**Definição 8.11** Dados morfismos de pré-feixes  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  e  $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ , definimos a *composta*  $\psi \circ \varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$  por

$$(\psi \circ \varphi)(U) := \psi(U) \circ \varphi(U),$$

para todo aberto não vazio  $U \subset X$ .

**Definição 8.12** Dizemos que  $\varphi$  é um *isomorfismo de feixes* quando possui inversa bilateral.

**Observação 8.5** O morfismo de pré-feixes  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  induz um morfismo em cada talo  $\varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$  do seguinte modo: seja  $p \in X$  e  $\emptyset \neq U \subseteq X$  uma vizinhança de  $p$ , definimos  $\varphi_p(s_p) := (\varphi(U)(s))_p$ , de modo que o diagrama abaixo comute.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_p & \xrightarrow{\varphi_p} & \mathcal{G}_p \end{array}$$

onde  $\mathcal{F}(U) \ni s \mapsto \bar{s} = s_p = \langle s, U \rangle \in \mathcal{F}_p$  e  $\mathcal{G}(U) \ni \varphi(U)(s) \mapsto \langle \varphi(U)(s), \varphi(U) \rangle$ .

**Teorema 8.2** Seja  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  um morfismo de feixes. Então  $\varphi$  é um isomorfismo se, e somente se,  $\varphi_p$  é um isomorfismo para cada  $p \in X$ .

*Demonstração:* Ver [13], Capítulo 2, Proposição 1.1. ■

**Definição 8.13** Seja  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  um morfismo de pré-feixes de grupos abelianos. Definimos três pré-feixes, colocando para cada aberto não vazio  $U \subset X$

- (a) *pré-feixe núcleo* de  $\varphi : U \rightarrow \ker(\varphi(U))$ ;
- (b) *pré-feixe imagem* de  $\varphi : U \rightarrow \text{Im}(\varphi(U))$ ;
- (c) *pré-feixe conúcleo* de  $\varphi : U \rightarrow \text{coker}(\varphi(U)) = \mathcal{G}(U)/\text{Im}(\varphi(U))$ .

**Observação 8.6** Se  $\mathcal{F}$  é um feixe, então o pré-feixe núcleo é um feixe. Porém, o mesmo nem sempre vale para os pré-feixes imagem e conúcleo.

Os pré-feixes imagem e conúcleo nem sempre são feixes, mesmo se  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  forem.

**Exemplo 8.7** Sejam  $X = \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{O}$  o feixe das funções holomorfas  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\mathcal{O}^*$  o feixe das funções holomorfas não nulas  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , ou seja,  $f(z) \neq 0$  para todo  $z$ . Por exemplo,  $g = id_{\mathbb{C}} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{O}^*(\mathbb{C})$ . Sejam  $U_0 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $U_1 = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  e  $U_2 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Seja também,

$$\begin{aligned} h : U_0 &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z \end{aligned}$$

Note que  $h \in \mathcal{O}^*(U_0)$ , pois  $\rho_{U_0}^{\mathbb{C}}(g) = g|_{U_0} = h \in \mathcal{O}(U_0)$ . Seja  $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$ , definida por

$$\begin{aligned} \varphi(U) : \mathcal{O}(U) &\rightarrow \mathcal{O}^*(U) \\ f &\mapsto e^f \end{aligned}$$

Por Análise Complexa,  $h \notin \text{Im}(\varphi(U_0))$ , daí  $[h] \neq [0]$  em  $\text{coker}(\varphi(U_0)) = \mathcal{O}^*(U_0)/\text{Im}(\varphi(U_0))$ . Por Análise Complexa  $\varphi(U_1)$  e  $\varphi(U_2)$  são bi-holomorfas, em particular,

$$\text{coker}(\varphi(U_1)) = \text{coker}(\varphi(U_2)) = \{0\}.$$

Assim,  $[h]$  e  $[0]$  são dois elementos distintos de  $\text{coker} \varphi(U_0)$  com a mesma restrição a  $U_1$  e  $U_2$ . Ou seja, as seções:

$$\begin{aligned} s_1 &= 0 \in \text{coker}(U_1) \\ s_2 &= 0 \in \text{coker}(U_2) \end{aligned}$$

colam de duas maneiras diferentes em  $U$ . Assim, o pré-feixe conúcleo não é um feixe.

Para corrigir o problema da imagem não ser um feixe, usamos a *feixificação*.

**Proposição 8.3** Dado um pré-feixe  $\mathcal{F}$ , existe um feixe  $\mathcal{F}^+$  e um morfismo  $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$  que é isomorfismo nos talos e tem “boas propriedades”.

*Demonstração:* Ver [13], Capítulo 2, Proposição-Definição 1.2. ■

**Definição 8.14** Seja  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  um morfismo de feixes de grupos abelianos. Definimos o *feixe*:

- (a) *núcleo* como o pré-feixe núcleo;
- (b) *imagem*  $\text{Im}\varphi$  como a feixificação do pré-feixe imagem;

(c) *conúcleo*  $\text{coker}\varphi$  como a feixificação do pré-feixe conúcleo.

**Definição 8.15** Dados feixes de grupos abelianos  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$ , definimos

(a) o feixe de grupos soma direta  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$  como o feixe com seções

$$(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(U) := \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U).$$

(b) o feixe de  $A$ -módulos produto tensorial  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$  como a feixificação do pré-feixe com seções

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_A \mathcal{G}(U)$$

**Definição 8.16** Seja  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  um morfismo de feixes de grupos abelianos. Dizemos que  $\varphi$  é *injetor* se  $\ker\varphi = 0$ . Dizemos que  $\varphi$  é *sobrejetor* se  $\text{Im}\varphi = \mathcal{G}$ . Dizemos que a sequência de morfismos de feixes de grupos abelianos

$$\dots \rightarrow \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathcal{F}^{i+1} \rightarrow \dots \quad (8.1)$$

é exata, se  $\ker\varphi^i = \text{Im}\varphi^{i-1}$  para cada  $i$ .

**Proposição 8.4**

(a) A sequência (8.1) é exata se, e somente se, a sequência

$$\dots \rightarrow \mathcal{F}_p^{i-1} \xrightarrow{\varphi_p^{i-1}} \mathcal{F}_p^i \xrightarrow{\varphi_p^i} \mathcal{F}_p^{i+1} \rightarrow \dots \quad (8.2)$$

é exata para todo  $p \in X$ ;

(b)  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  é injetor  $\iff \varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$  é injetor para todo  $p \in X \iff \varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  é injetor para todo aberto não vazio  $U \subset X$ ;

(c)  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  é sobrejetor  $\iff \varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$  é sobrejetor para todo  $p \in X$ .  
 $\iff \varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  é sobrejetor para todo aberto não vazio  $U \subset X$ .

*Demonstração:* Ver [13], Capítulo 2, Corolário 1.2.1. ■

**Exemplo 8.8** Sejam  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = X$  a esfera de Riemann e considere os feixes em  $X$ :  $\mathcal{G}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorfa}\}$ ;  $\mathcal{F}_1(U) = \{f \in \mathcal{G}(U) \mid f(0) = 0\}$ ;  $\mathcal{F}_2(U) = \{f \in \mathcal{G}(U) \mid f(\infty) = 0\}$  e defina  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$ . Considere  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  definido pela adição

$$\begin{aligned} \varphi(U) : \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{G}(U) \\ (f, g) &\mapsto f + g \end{aligned}$$

Temos que  $\varphi$  é um morfismo sobrejetor, mas  $\varphi(X) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$  não é sobrejetor, pelo Teorema de Liouville.

O fato da sequência

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0 \quad (8.3)$$

ser exata, não implica que

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \rightarrow 0 \quad (8.4)$$

é exata, mas apenas que

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \quad (8.5)$$

é exata.

**Observação 8.7** Seja (8.3) uma sequência exata de morfismos de feixes de grupos abelianos, então existe uma sequência exata longa de cohomologia

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\alpha} H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}) \rightarrow \dots$$

de grupos abelianos, onde  $H^0(X, \mathcal{L}) := \Gamma(\mathcal{L}, X) = \mathcal{L}(X)$  para qualquer feixe  $\mathcal{L}$  sobre  $X$ . Usamos a notação  $h^j(X, \mathcal{L}) := \dim H^j(X, \mathcal{L})$ , onde a dimensão é como espaço vetorial. Além disso,  $\alpha = 0 \iff \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  é sobrejetor.

Agora, vejamos como levar um feixe de um espaço topológico para outro, por meio de uma função contínua  $f : X \rightarrow Y$ .

**Definição 8.17** Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma função contínua,  $\mathcal{F}$  um feixe sobre  $X$  e  $\mathcal{G}$  um feixe sobre  $Y$ . Definimos a *imagem direta* (ou *pushforward*)  $f_*\mathcal{F}$  de  $\mathcal{F}$  por  $f$ , como o feixe em  $Y$  dado por  $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ , para todo aberto não vazio  $V \subset Y$ , e  $\rho_{VW}^{f_*\mathcal{F}} = \rho_{f^{-1}(V)f^{-1}(W)}^{\mathcal{F}}$ , para toda inclusão de abertos não vazios  $V \subset W \subset Y$ .

**Exemplo 8.9** Sejam  $X = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$  e  $Y = \{0\} \subseteq X$ . Então  $X = \text{spec}(\mathbb{C}[x])$  e podemos “empurrar” o feixe estrutural  $\mathcal{O}_Y$  de  $Y$  para  $X$  por meio da inclusão

$$\begin{aligned} i : Y &\hookrightarrow X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

e  $i_*\mathcal{O}_Y$  é um feixe sobre  $X$ .

Temos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow I_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\psi} i_*\mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

em que  $\psi(f) = f|_Y$  e  $I_Y = \ker\psi$  é dado por

$$I_Y(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f|_Y = 0\}$$

$I_Y$  é chamado de *feixe de ideais de  $Y$* . Muitas vezes, escrevemos  $\mathcal{O}_Y$  no lugar de  $i_*\mathcal{O}_Y$ .

Agora, estamos em condições de definir o que é um esquema, lembrando da Definição de um espaço localmente anelado 8.8 e que  $\text{Spec}(A)$  é um espaço localmente anelado, pelo Teorema 8.1. Um esquema é essencialmente uma estrutura que, localmente, é um  $\text{Spec}(A)$ .

**Definição 8.18** Um *morfismo de espaços anelados*  $(X, \mathcal{O}_X)$  e  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  é um par  $(f, f^\#)$ , onde  $f : X \rightarrow Y$  é uma aplicação contínua e  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  é um morfismo de feixes de anéis.

Sejam  $A$  e  $B$  anéis locais. Dizemos que o morfismo de anéis  $\varphi : A \rightarrow B$  é *local*, quando  $\varphi^{-1}(m_B) = m_A$ . Um morfismo de espaços localmente anelados  $(X, \mathcal{O}_X)$  e  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  é *morfismo de espaços anelados*  $(f, f^\#)$  tal que para cada  $p \in X$ , o morfismo induzido  $f_p^\# : \mathcal{O}_{Y, f(p)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, p}$  é um morfismo local de anéis locais.

Um *isomorfismo de espaços localmente anelados* é um morfismo com inversa bilateral. Um *esquema afim* é um espaço localmente anelado  $(X, \mathcal{O}_X)$  que é isomorfo como espaço localmente anelado a  $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$  para algum anel  $A$ .

Um *esquema* é um espaço localmente anelado  $(X, \mathcal{O}_X)$  tal que para todo  $x \in X$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $(U, \mathcal{O}_X|_U)$  é um esquema afim.

### Proposição 8.5

- (a) Se  $\varphi$  é um morfismo de anéis, então  $\varphi$  induz um morfismo de espaços localmente anelados

$$(f = \text{Spec } \varphi, f^\#) : (\text{Spec}(B), \mathcal{O}_{\text{Spec}(B)}) \rightarrow (\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}).$$

- (b) Se  $A$  e  $B$  são anéis, então qualquer morfismo de espaços localmente anelados de  $(\text{Spec}(B), \mathcal{O}_{\text{Spec}(B)})$  para  $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$  é induzido por algum morfismo  $\varphi : A \rightarrow B$  como acima.

*Demonstração:* Ver [13], Capítulo 2, Proposição 2.3. ■

## 8.4 Esquemas

Esta seção terá duas partes. Na primeira, definiremos o que se entende como variedades em Geometria Algébrica. Na segunda parte, daremos exemplos concretos de sequências exatas de morfismos de esquemas que aparecem na prática, dentre outras coisas.

### Parte Um - Variedades

**Definição 8.19** Seja  $(X, \mathcal{O}_X)$  um esquema. Dizemos que  $X$  é *irredutível* se ele o é como espaço topológico. Dizemos que  $X$  é *reduzido* se  $\mathcal{O}_X(U)$  não tem nilpotentes, para todo aberto  $U \subset X$ .

**Proposição 8.6**  $X$  é reduzido se, e somente se,  $\mathcal{O}_{X,x}$  não tem nilpotentes, para todo  $x \in X$ .

**Proposição 8.7**  $X$  é irredutível e reduzido (*integral*) se, e somente se,  $\mathcal{O}_X(U)$  é um domínio, para todo aberto  $U \subseteq X$ .

*Demonstração:* Ver [13], Capítulo 2, Proposição 3.1. ■

**Exemplo 8.10** (*Pontos Múltiplos*) Temos que  $\text{spec}(\mathbb{C}[x]/(x^n))$ , com  $n > 1$ , não são reduzidos, mas são irredutíveis. O mesmo vale para a reta dupla  $\text{spec}(\mathbb{C}[x, y]/(x^2))$ .

**Exemplo 8.11** O par de retas concorrentes  $\text{spec}(\mathbb{C}[x, y]/(xy))$  é reduzido, mas não é irredutível.

**Exemplo 8.12** O esquema  $X = \text{spec}(\mathbb{C}[x, y]/(x^2y))$  pode ser interpretado como a união da reta dupla  $\text{spec}(\mathbb{C}[x, y]/(x^2))$  com a reta simples  $\text{spec}(\mathbb{C}[x, y]/(y))$ . Assim,  $X$  não é nem reduzido e nem redutível.

**Exemplo 8.13** Esquemas não irredutíveis e não reduzidos aparecem naturalmente ao fazermos “interseções” de esquemas integrais.

A cada esquema  $X$  podemos associar um esquema reduzido  $X_{red}$  com o mesmo espaço topológico e que é obtido grosso modo assim:

$Spec(A) = U \subset X \longrightarrow U_{Red} = Spec(A/\mathfrak{N}(A))$ , onde  $\mathfrak{N}(A)$  é o nilradical de  $A$ .

Em Geometria Algébrica, quase sempre começamos com um esquema  $X$  reduzido, mesmo que ao longo do caminho apareçam esquemas não reduzidos. Uma das hipóteses essenciais para um esquema ser uma variedade é ser reduzido.

Na definição de variedade podemos colocar ou não a hipótese de irredutibilidade, não há consenso com relação à essa discussão. O segundo ingrediente na definição de variedade é a finitude.

**Definição 8.20** Seja  $X$  um esquema e  $A$  um anel. Dizemos que  $X$  é um *esquema sobre  $A$*  ou um  *$A$ -esquema*, quando existe um morfismo de esquemas  $X \rightarrow Spec(A)$ . Isto equivale a requerer que  $\mathcal{O}_X$  seja um feixe de  $A$ -álgebras. Um morfismo de  $A$ -esquemas é um diagrama comutativo de morfismos de esquemas.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow & \downarrow \\ & & spec(A) \end{array}$$

O caso mais comum é  $A = k$  corpo. Daí, cada  $\mathcal{O}_X(U)$  é uma  $k$ -álgebra.

**Definição 8.21** Sejam  $k$  um corpo e  $X$  um  $k$ -esquema. Dizemos que  $X$  é de *tipo finito* sobre  $k$  quando  $X = \bigcup_{i=1}^n spec(A_i)$ , onde cada  $A_i$  é uma  $k$ -álgebra finitamente gerada.

Há muitas noções de finitude: Noetheriano, finito, localmente de tipo finito, etc. Para nós, de tipo finito será a mais conveniente.

Todo esquema  $X$  se escreve como

$$X = \bigcup_{i \in I} spec(A_i).$$

O primeiro ingrediente (reduzido/irredutível) nos diz que tipos de anéis  $A_i$  podemos usar. O segundo ingrediente, da definição de variedade (de tipo finito sobre  $k$ ), nos diz que  $\#I < \infty$  e cada  $A_i$  é uma  $k$ -álgebra finitamente gerada. O terceiro e último ingrediente nos dirá como podemos colar os  $spec(A_i)$ .

**Definição 8.22** Um esquema  $X$  é dito *separado* se a diagonal  $\Delta_X$  é fechada em  $X \times X$ .

**Definição 8.23** Uma  *$k$ -variedade* é um esquema reduzido, separado e de tipo finito sobre  $k$ .

O esquema afim  $Spec(A)$  é de tipo finito e separado. Além disso, é reduzido se, e somente se,  $\mathfrak{N}(A) = \{0\}$ .

Agora, que temos a definição de variedade em mãos, precisamos de exemplos de variedades que não sejam afins. O jeito mais simples de conseguir isso é com a construção do *Proj* que é similar à construção do *Spec* e que nos dará  $\mathbb{P}^n$  bem como todas as variedades quase-projetivas. Para fazer o *Proj* precisamos de um anel graduado.

**Definição 8.24** Um anel  $S$  é dito *graduado*, quando existe uma escrita

$$S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d,$$

onde cada  $S_d$  é um grupo abeliano com a soma de  $S$  e temos  $S_d \cdot S_e \subset S_{d+e}$  com a multiplicação de  $S$ .

Dizemos que um elemento  $f \in S$  é *homogêneo* de grau  $d \geq 0$  quando  $f \in S_d$ . Um ideal  $I \subset S$  é dito *homogêneo* quando  $I = \bigoplus_{d \geq 0} (I \cap S_d)$ . Chamamos  $S_+ = \bigoplus_{d \geq 1} S_d$  de *ideal irrelevante*.

**Exemplo 8.14** Considere  $S = k[x_0, \dots, x_n]$ . Temos então

$$S_d := \{f \in S \text{ homogêneo} \mid \deg f = d\}$$

$$S_+ = (x_0, \dots, x_n).$$

Logo, o anel  $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$  é um anel graduado.

**Definição 8.25** O *Proj* de um anel  $S$  é o conjunto

$$\text{Proj} S := \{p \subset S \text{ ideal primo homogêneo} \mid S_+ \not\subset p\}.$$

A topologia de  $\text{Proj} S$  é a herdada de  $\text{Spec}(S)$ . Em particular, os fechados são os conjuntos

$$V(I) = \{p \in \text{Proj} S \mid I \subset p\},$$

onde  $I \subseteq S$  é um ideal homogêneo.

Dado  $f \in S_d$  com  $d > 0$ , seja  $S_f$  a localização de  $S$  em  $f$  e

$$S_{(f)} = \left\{ \frac{g}{f^k} \in S_f \mid g \in S_{dk} \right\} \subset S_f.$$

Chamamos  $D_+(f) = D(f) \cap \text{Proj} S = (V(f)^c) \cap \text{Proj} S$  de *aberto principal*. Considere

$$\Psi_f : D_+(f) \xrightarrow{i} D(f) \xrightarrow{\cong} \text{Spec}(S_f) \xrightarrow{\text{Spec}(i)} \text{Spec}(S_{(f)}),$$

onde  $S_{(f)} \subset S_f$ .

Definimos seções para um feixe  $\mathcal{O}_X$ , onde  $X = \text{Proj} S$

$$\mathcal{O}_X(D_+(f)) := S_{(f)}$$

e usamos os  $\Psi_f$  para definir as restrições, usando as restrições de  $\text{Spec}(S)$ .

**Teorema 8.8** Seja  $S$  um anel graduado e  $X = \text{Proj} S$ .

(a)  $(X, \mathcal{O}_X)$  definido acima é um esquema separado;

(b) Se  $S_+ \subset \sqrt{(f_0, \dots, f_n)}$  então

$$\text{Proj} S = D_+(f_0) \cup \dots \cup D_+(f_n);$$

- (c) Se  $S$  é uma álgebra sobre um anel  $A$  e  $A \cdot S_d \subset S_d$  para todo  $d \geq 0$ , então  $X$  é um  $A$ -esquema;
- (d) Sejam  $k$  um corpo e  $S = k[x_0, \dots, x_n]$  com a graduação usual. Então  $Proj S$  é uma  $k$ -variedade irredutível e  $S = U_0 \cup \dots \cup U_n$ , onde

$$U_j = \text{spec} \left( k \left[ \frac{x_0}{x_j}, \frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right] \right).$$

Chamamos  $X$  do  $n$ -espaço projetivo sobre  $k$  e escrevemos  $S = \mathbb{P}_k^n$  ou  $S = \mathbb{P}^n$ .

O  $\mathbb{P}^n$  do item (d) no Teorema 8.8 é essencialmente o mesmo da Geometria Algébrica Clássica, veja Definição 4.10. As variedades quase-projetivas serão abertos de fechados de  $\mathbb{P}^n$  e também são variedades no sentido de esquemas.

Se  $I \subset k[x_0, \dots, x_n]$  é um ideal homogêneo, então  $Proj(S/I)$  é essencialmente  $V(I) \subset \mathbb{P}^n$  do mesmo modo que no  $Spec$ .

**Definição 8.26** Um *subesquema aberto* de um esquema  $X$  é um esquema  $U \subset X$ , onde  $U$  é um aberto não vazio de  $X$ , tal que  $\mathcal{O}_U$  é isomorfo a  $\mathcal{O}_X|_U$ . Uma *imersão aberta* é um morfismo  $(f, f^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  que induz um isomorfismo de  $Y$  com um subesquema aberto de  $X$ .

**Definição 8.27** Uma *imersão fechada* é um morfismo  $(f, f^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  tal que  $f : Y \rightarrow f(Y)$  é um homeomorfismo,  $f(Y)$  é fechado em  $X$  e  $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$  é sobrejetor. Um *subesquema fechado* de  $X$  é uma classe de equivalência de imersões fechadas, onde  $f : Y \rightarrow X$  e  $f' : Y' \rightarrow X$  são equivalentes se existe um isomorfismo  $i : Y' \rightarrow Y$  tal que  $f' = f \circ i$ .

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{i} & Y \\ & \searrow f' & \downarrow f \\ & & X \end{array}$$

**Exemplo 8.15** Sejam  $k$  um corpo,  $A = k[x, y]$  e  $X = Spec(A)$ . Então  $I = (x^2)$  e  $J = (x^2, xy)$  ambos definem estruturas de subesquemas fechados em  $X$ , como conjunto

$$\underbrace{V(I)}_{\text{eixo duplo}} = \underbrace{V(J)}_{\text{eixo } y \text{ + origem}} = \text{eixo } Y$$

Para  $J$ , a origem é um ponto “mergulhado”.

**Definição 8.28** Um  $k$ -esquema  $X$  é dito *projetivo* ou  $k$ -*projetivo* se é isomorfo a um subesquema fechado de  $\mathbb{P}_k^n$ . Um  $k$ -esquema *quase projetivo* é um subesquema aberto de um esquema  $k$ -projetivo.

Seja  $Z$  um subesquema finito de  $\mathbb{P}^n$  (fechado e 0-dimensional  $\iff$  finito). Definimos o *comprimento* de  $Z = \{p_1, \dots, p_h\}$  e o denotamos por  $length(Z)$ ,

$$length(Z) = \dim_k \underbrace{H^0(Z, \mathcal{O}_Z)}_{\mathcal{O}_Z(Z)} = \sum_{k=1}^h \dim_k (\mathcal{O}_Z, p_i) \quad (8.6)$$

Na prática  $length(Z)$  é a soma do comprimento de cada ponto. Um ponto de multiplicidade  $m$  em  $\mathbb{P}^n$  tem comprimento  $\binom{m+n-1}{n}$ .

**Exemplo 8.16**

$$\begin{aligned} length\left( \underbrace{2P_1}_{\text{ponto duplo}} + \underbrace{5P_2}_{\text{ponto quintúplo}} \right) &= \binom{2+n-1}{n} + \binom{5+n-1}{n} \\ &= n+1 + \binom{n+4}{n}. \end{aligned}$$

**Exemplo 8.17**

$$\begin{aligned} length(\text{spec}(k[x, y]/(x, y^2))) &= \dim_k k[x, y]/(x, y^2) \\ &= \dim_k(k \oplus k\bar{y}) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Como  $length(\text{spec}(k[x, y]/(x, y^2))) = 2$ , temos que  $\text{spec}(k[x, y]/(x, y^2))$  não é nem um ponto simples (senão o comprimento seria 1) e nem um ponto duplo (senão o comprimento seria 3), logo é algo entre os dois.

## Parte Dois - Morfismos na Prática

É importante notar que dado um aberto não vazio  $U \subset X$ , existe uma única estrutura de esquema para  $U$ . Mas se  $Y \subset X$  é um fechado, então há diversas estruturas de esquemas possíveis para  $Y$ , dentre essas, existe uma mais simples:  $Y_{Red}$ .

**Exemplo 8.18** Sejam  $X, Y$  e  $Z$   $k$ -variedades. Definimos o *produto fibrado*  $X \times_Y Z$  de  $X$  e  $Z$  sobre  $Y$ , mas usaremos isso apenas no caso particular em que  $X$  e  $Z$  são espaços projetivos e  $Y = \text{spec}(k)$  é o corpo base. Nesse caso, dados  $S = k[x_0, \dots, x_n] = \sum_{d \geq 0} S_d$ ,  $X = \mathbb{P}^n = Proj S$ ;  $T = k[y_0, \dots, y_m] = \sum_{d \geq 0} T_d$ ,  $Z = \mathbb{P}^m = Proj T$ . Temos então

$$X \times_Y Z = X \times Z = \mathbb{P}^n \times_k \mathbb{P}^m = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m = Proj(S \times_k T)$$

onde  $S \times_k T$  é o seguinte anel graduado

$$S \times_k T = \sum_{d \geq 0} (S_d \otimes_k T_d) \left( \neq \sum_{d \geq 0} \left( \sum_{j=0}^d S_j \otimes_k T_{d-j} \right) = S \otimes_k T \right)$$

Note que  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$  é uma “variedade abstrata”, ou seja, não está mergulhada em nenhum espaço projetivo. Mostraremos que  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$  é de fato uma variedade projetiva exibindo uma imersão fechada  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}^{n+m+nm}$  que é um isomorfismo sobre sua imagem.

Agora, vejamos como se define um morfismo de uma variedade  $X$  para  $\mathbb{P}^n$ . Um feixe de  $\mathcal{O}_X$ -módulos é um feixe  $\mathcal{F}$  sobre  $X$  tal que  $\mathcal{F}(U)$  é um  $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo para cada aberto não vazio  $U \subset X$ . Um feixe de  $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos  $\mathcal{F}$  é localmente livre quando existe uma cobertura de  $X$  por abertos  $U$  tal que  $\mathcal{F}|_U$  é um  $\mathcal{O}_X|_U$ -livre.

Nesse caso o posto de  $\mathcal{F}$  é o número de cópias de  $\mathcal{O}_X$  necessárias. Um feixe invertível é um feixe localmente livre de posto um, ou seja, é um feixe  $\mathcal{L}$  tal que  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  e para cada inclusão de abertos  $U \subset U_i$ , existe  $s \in \mathcal{L}(U)$  tal que  $\mathcal{L}(U)$  é isomorfo a  $s \cdot \mathcal{O}_X(U)$  como  $\mathcal{O}_X$ -módulo. Feixes invertíveis são essenciais em Geometria Algébrica.

Dar um morfismo  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  é equivalente a dar um feixe invertível  $\mathcal{L}$  sobre  $X$  e seções globais  $s_0, \dots, s_n \in \mathcal{L}(X)$  tais que para todo  $p \in X$  existe  $i$  tal que  $s_i(p) \neq 0$ . Grosso modo

$$\begin{aligned} \varphi : X &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ p &\mapsto (s_0(p) : \dots : s_n(p)) \end{aligned}$$

onde  $s_j(p) = (s_j)|_p \in k$ .

Agora, que já sabemos como fazer um morfismo  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  de um esquema  $X$  para  $\mathbb{P}^n$ , precisamos de exemplos de feixes invertíveis.

**Exemplo 8.19** (*Twisting Sheaf of Serre*) Para cada  $d \in \mathbb{Z}$ , definimos um feixe invertível  $\mathcal{O}(d)$  (ou  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$  ou  $\mathcal{L}_{n,d}$ ) em  $\mathbb{P}^n$ . Lembre que para definir um feixe em  $\mathbb{P}^n$  basta o definir na base de abertos  $D(f)$ . Defina

$$\mathcal{O}(d)(D(f)) = \left\{ \frac{g}{f^m} \mid m \geq 0; f, g \text{ polinômios homogêneos com } \deg g - m \cdot \deg f = d \right\}$$

Uma maneira simples de lembrar é  $\mathcal{O}(d) = \{h \text{ função racional, } \deg h = d\}$ . Por exemplo,

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)(D(x))$$

e

$$\frac{x^3 - yz^2}{(y - z)^{10}} \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-7)(D(y - z)).$$

Note que  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(0) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$  é o feixe estrutural de  $\mathbb{P}^n$ . O feixe  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$  é chamado *feixe de torção de Serre*.

### Proposição 8.9

- (a)  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$  é um feixe invertível;
- (b)  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d + e)$ .

*Demonstração:* Ver [13], Capítulo 2, Corolário 5.2. ■

**Exemplo 8.20** Seja  $A = k[x_0, \dots, x_n]$ ,  $m_1 = x_j^d$  e  $m_2 = x_j^e$ . Defina  $M_1 = m_1 A$  e  $M_2 = m_2 A$ . Temos então

$$M_1 \otimes M_2 = m_1 A \otimes m_2 A = (m_1 m_2) \underbrace{(A \otimes_A A)}_A.$$

Mais geralmente, se  $X$  é um esquema, então  $\otimes$  nos dá uma operação no conjunto de feixes invertíveis de  $X$ . Com esta operação, o conjunto dos feixes invertíveis módulo isomorfismo é um grupo abeliano com elemento neutro  $\mathcal{O}_X$ . Este grupo é chamado *grupo de Picard* de  $X$  e denotado por  $Pic(X)$ ,

$$Pic(X) = \left\{ \frac{\{\text{feixes invertíveis } \mathcal{L} \text{ em } X\}}{\text{isomorfismo de feixes}}, \otimes \right\}$$

**Proposição 8.10**  $Pic(\mathbb{P}^n)$  é isomorfo à  $\mathbb{Z}$ . Mais precisamente,  $Pic(\mathbb{P}^n) = \{\mathcal{O}(d) \mid d \in \mathbb{Z}\}$  onde  $\mathcal{O}(0) = \mathcal{O}$  é o elemento neutro e  $\mathcal{O}(1)$  é um gerador.

*Demonstração:* Ver [13], Capítulo 2, Corolário 6.17. ■

Desse modo, temos uma descrição completa dos feixes invertíveis em  $\mathbb{P}^n$  e com isso já podemos construir alguns morfismos do tipo  $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^m$ .

**Observação 8.8** Na operação  $\otimes$  o inverso de um feixe invertível  $\mathcal{L}$  é denotado por  $\mathcal{L}^*$  (o dual de  $\mathcal{L}$ ). Assim, em particular:  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^* = \mathcal{O}_X$  e  $\mathcal{O}(3)^* = \mathcal{O}(-3)$ .

**Exemplo 8.21** Considere  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$ . Sabemos que  $\mathcal{L}(\mathbb{P}^2) = k[x, y, z]_2 = W$  é gerado por seis seções globais:  $x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2$ . Tomando todas elas, temos um morfismo

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{L}} = \phi : \mathbb{P}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^5 \\ (x : y : z) &\mapsto (x^2 : xy : xz : y^2 : yz : z^2) \end{aligned}$$

cuja imagem é a variedade de Veronese  $V_2^2$ . Em geral,  $\phi_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)} = v_d^n$ , onde  $v_d^n$  é a aplicação da Definição 5.1. Podemos escolher também apenas cinco seções:  $xy, xz, y^2, yz, z^2$  (que é o mesmo que escolher o subespaço vetorial  $V = \langle xy, xz, y^2, yz, z^2 \rangle$  de  $W$ ).

$$\begin{aligned} \phi_V = \psi : \mathbb{P}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}^4 \\ (x : y : z) &\mapsto (xy : xz : y^2 : yz : z^2), \end{aligned}$$

mas, neste caso, temos apenas uma aplicação racional  $\psi$  definida em  $\mathbb{P}^2 - \{(1 : 0 : 0)\}$  pois  $f(1, 0, 0) = 0$ , para todo  $f \in V$ . Dizemos, neste caso, que  $P = (1 : 0 : 0)$  é o *lugar de base* de  $V$ . Para um subespaço  $U$  de  $W$  definir um morfismo é necessário e suficiente que seu lugar de base seja vazio. O lugar de base é sempre fechado, mas pode ter dimensão positiva, ser desconexo, não ser reduzido, dentre outras coisas.

Seja  $X$  uma variedade e  $Z$  um subsquema fechado. Se  $i : Z \rightarrow X$  é uma imersão fechada, definimos o feixe de ideais de  $Z$  como  $\ker(i^\#) = I_Z$  onde  $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Z$ . Se  $Z$  é reduzido podemos pensar  $I_Z = \{f \in \mathcal{O}_X \mid f|_Z = 0\}$  no sentido informal e  $I_Z(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f|_Z = 0\}$  no sentido usual.

**Exemplo 8.22** Seja  $X = \mathbb{P}_k^1$ ,  $Z = 2P$  (o ponto  $P$  com multiplicidade 2) onde  $P = (0 : 1) \in X$ , onde  $X = D(x) \cup D(y)$  e  $\mathcal{O}_X(X) = k$ . Temos que

$$\mathcal{O}_X(D(x)) = \left\{ \frac{f}{x^n} \mid \deg f = n \right\} \text{ e } \mathcal{O}_X(D(y)) = \left\{ \frac{f}{y^n} \mid \deg f = n \right\}.$$

Dessa forma, temos  $I_Z(D(x)) = \mathcal{O}_X(D(x))$ , pois  $P \notin D(x)$ , e

$$\begin{aligned} I_Z(D(y)) &= \left\{ \frac{f}{y^n} \mid \deg f = n \text{ e } \text{mult}_p f \geq 2 \right\} \\ &= \left\{ \frac{x^2 g}{y^n} \mid \deg g = n - 2 \right\} \\ &= \frac{x^2}{y^2} \left\{ \frac{g}{y^{n-2}} \mid \deg g = n - 2 \right\} \\ &= \left( \frac{x}{y} \right)^2 \cdot \mathcal{O}_X(D(y)). \end{aligned}$$

Com a notação de antes, temos uma sequência exata de feixes em  $X$ :

$$0 \longrightarrow I_Z \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow i_* \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0 \quad (8.7)$$

pois  $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_* \mathcal{O}_Z$  é sobrejetor pela definição de imersão fechada. Muitas vezes, escrevemos  $\mathcal{O}_X|_Z$  ou  $\mathcal{O}_Z$  no lugar de  $i_* \mathcal{O}_Z$ . Mais geralmente, se  $\mathcal{F}$  é um feixe invertível, podemos tensorizar (8.7) por  $\mathcal{F}$  e obter uma sequência exata

$$0 \longrightarrow I_Z \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow (i_* \mathcal{O}_Z) \otimes \mathcal{F} \longrightarrow 0 \quad (8.8)$$

que também se escreve como

$$0 \longrightarrow I_Z \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}|_Z \longrightarrow 0 \quad (8.9)$$

onde essencialmente  $I_Z \otimes \mathcal{F} = \{f \in \mathcal{F} \mid f|_Z = 0\}$  e  $\mathcal{F}|_Z = \{f|_Z \mid f \in \mathcal{F}\}$ ,  $\alpha$  é a inclusão e  $\beta(f) = f|_Z$ .

**Definição 8.29** Seja  $X$  uma variedade não-singular (lisa) e  $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$  um feixe invertível. Definimos o *sistema linear completo* associado a  $\mathcal{L}$ :

$$|\mathcal{L}| = L = \mathbb{P}(\mathcal{L}(X)) = \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{L})) \cong \mathbb{P}^n$$

onde  $\dim_k H^0(X, \mathcal{L}) = h^0(X, \mathcal{L}) = n + 1$ . Um sistema linear  $S$  é um subespaço linear de  $L$ .

**Observação 8.9** Um sistema linear  $S$  corresponde a um subespaço vetorial do espaço vetorial  $\mathcal{L}(X)$ . Tipicamente, se define um sistema linear  $S$  começando com um sistema linear completo  $\mathcal{O}(d)$  ou  $\mathcal{O}(d_1, \dots, d_r)$  e impondo condições geométricas, como por exemplo

- $\{F \in \mathcal{O}(d) \mid F \text{ passa por } P\} = \{F \mid F(p) = 0\}$ ;
- $\{F \in \mathcal{O}(d) \mid F \text{ contém } l\}$ , onde  $l \subseteq \mathbb{P}^n$  é uma reta;
- $\{F \in \mathcal{O}(d) \mid F \text{ é singular em } P\} = \{F \mid \text{mult}_P F \geq 2\}$   
 $= \{F \mid F(P) = 0 \text{ e } \nabla F(P) = 0\}$ .

Prova-se que tais condições são de fato lineares.

**Definição 8.30** Seja  $S$  um sistema linear em uma variedade  $X$ . Definimos o lugar de base de  $S$ :  $\mathcal{B}_S(F) = \{P \in X \mid F(P) = 0 \text{ para todo } F \in S\}$ .

**Exemplo 8.23**  $|\mathcal{O}(d)|$  é livre de lugar de base (ou seja, o lugar de base é vazio) para todo  $d > 0$ . De fato, se  $p = (p_0 : \dots : p_n) \in \mathbb{P}^n$  então  $p_j \neq 0$  para algum  $j$ . Como  $x_j^d \in |\mathcal{O}(d)|$  e  $x_j^d(p) = p_j^d \neq 0$  então  $p \notin B_S(|\mathcal{O}(d)|)$ .

**Exemplo 8.24** Sejam  $p, q \in \mathbb{P}^3$  e considere o sistema linear das quádricas que passam em  $p$  e são singulares em  $q$ . Usamos a notação  $S = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2; p, 2q)|$ . Como  $F \in S$  é singular em  $q$ , então  $F$  é um cone com vértice em  $q$  e que passa por  $p$ . Movendo  $p$  e  $q$  para  $p = (0 : 1 : 0 : 0)$  e  $q = (1 : 0 : 0 : 0)$ , temos

$$F = \underbrace{ax^2 + bxy + cxz + dxw}_{=0, \text{ pois } mult_q F \geq 2} + \underbrace{ey^2}_{=0, \text{ pois } F(p)=0} + fyz + gyw + hz^2 + izw + kw^2$$

temos que

$$F = fyz + gyw + hz^2 + izw + kw^2.$$

Logo,  $S$  é um  $\mathbb{P}^4$ .

## Alguns Resultados de Cohomologia

O Teorema do Anulamento e o Teorema da Cohomologia do Espaço Projetivo serão essenciais para provarmos a Proposição 11.6, proposição essa, fundamental nas análises das dimensões dos sistemas lineares que iremos estudar a partir do Capítulo 9.

**Teorema 8.11** (*Anulamento*) Seja  $X$  uma variedade de dimensão  $n$  e  $\mathcal{F}$  um feixe em  $X$ . Então

$$H^k(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall k > n.$$

*Demonstração:* Ver [13], Capítulo 3, Teorema 2.7. ■

**Teorema 8.12** (*Cohomologia do Espaço Projetivo*)

- (a)  $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = 0$  para  $0 < i < n$  para todo  $d \in \mathbb{Z}$ ;
- (b)  $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)) = k$ .

*Demonstração:* Ver [13], Capítulo 3, Teorema 5.1. ■

## Divisores e Feixes Invertíveis

Existe uma outra classe de objetos em esquemas que são muito importantes em geometria algébrica: Os divisores.

Há dois tipos: Divisores de Weil e divisores de Cartier. Não trataremos deles aqui, caso o leitor queira se aprofundar no assunto a referência indica é o Seção II.6 do livro [13], apenas exibiremos um minidicionário de como passar de divisores de Weil para feixes invertíveis e vice-versa já que para variedades irredutíveis há um isomorfismo entre esses dois conceitos.

Feixes Invertíveis	Divisores
$\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(dH)$	$dH$
$\mathcal{O}(1)$ feixe de torção	$H$ seção hiperplana
$\mathcal{O}(2)^* = \mathcal{O}(-2)$	$-(2H) = (-2)H$
$F \in  \mathcal{O}(d) $	$F \in  H $
$\mathcal{L}(D)$	$D$
$H^0(\mathcal{L}(D), X) \neq 0$	$D$ é efetivo

## 9 Sistemas Lineares

Neste capítulo apresentaremos com mais detalhes os sistemas lineares e, também estabeleceremos a relação entre os sistemas lineares e as variedades de Veronese, para isso usaremos [15].

### 9.1 Definições e Exemplos

**Definição 9.1** Chamaremos de *sistema linear*, denotado por  $\mathcal{L}_{n,d}(m_1, \dots, m_h)$ , o conjunto de todas as hipersuperfícies em  $\mathbb{P}^n$  de grau  $d$  com  $h$  pontos gerais de multiplicidade pelo menos  $m_i$ , onde  $i = 1, \dots, h$ .

Os polinômios homogêneos de grau  $d$  em  $n + 1$  variáveis formam um espaço projetivo de dimensão

$$\binom{n+d}{n} - 1,$$

além disso, para um polinômio ter multiplicidade pelo menos  $m_i$  em um ponto  $p_i \in \mathbb{P}^n$  corresponde a

$$\binom{m_i - 1 + n}{n}$$

condições lineares impostas aos coeficientes.

**Exemplo 9.1** Vamos analisar como são os elementos do sistema linear  $\mathcal{L}_{2,2}(2^2)$ . Sejam  $p$  e  $q$  pontos gerais em  $\mathbb{P}_x^2$ , pelo Lema 6.7, podemos supor que  $p = (1 : 0 : 0)$  e  $q = (0 : 1 : 0)$ . Assim, temos que uma hipersuperfície qualquer em  $\mathcal{L}_{2,2}$  é da forma

$$F = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_0x_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2,$$

onde pelo menos um dos coeficientes é diferente de zero. Primeiramente, vamos impor o ponto  $p$  com multiplicidade 2, isto é

$$\begin{aligned} F(1 : 0 : 0) &= a = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_0}(1 : 0 : 0) &= 2a = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(1 : 0 : 0) &= b = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(1 : 0 : 0) &= c = 0. \end{aligned}$$

Com isso, temos que o sistema linear  $\mathcal{L}_{2,2}$  com um ponto duplo é da forma

$$\mathcal{L}_{2,2}(2) = \{F = dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2 \mid (d : e : f) \in \mathbb{P}^2\}.$$

Agora, vamos impor o ponto  $q$  com multiplicidade 2, isto é

$$\begin{aligned} F(0 : 1 : 0) &= d = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_0}(0 : 1 : 0) &= b = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(0 : 1 : 0) &= 2d = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(0 : 1 : 0) &= e = 0. \end{aligned}$$

Com isso, temos que o sistema linear  $\mathcal{L}_{2,2}$  com dois pontos duplos é da forma

$$\mathcal{L}_{2,2}(2^2) = \{F = fx_2^2 | (f) \in \mathbb{P}^0\} \cong \mathbb{P}^0.$$

Por fim, isso mostra que  $\dim(\mathcal{L}_{2,2}(2^2)) = 0$ .

**Exemplo 9.2** Vamos analisar como são os elementos do sistema linear  $\mathcal{L}_{2,3}(2^2)$ . Sejam  $p, q$  pontos gerais em  $\mathbb{P}_x^2$ , pelo Lema 6.7, podemos supor que  $p = (1 : 0 : 0)$  e  $q = (0 : 1 : 0)$ . Assim, temos que uma hipersuperfície qualquer em  $\mathcal{L}_{2,3}$  é da forma

$$F = ax_0^3 + bx_0^2x_1 + cx_0x_1^2 + dx_0x_1x_2 + ex_0^2x_2 + fx_0x_2^2 + gx_1^3 + hx_1^2x_2 + ix_1x_2^2 + jx_2^3,$$

onde pelo menos um dos coeficientes é diferente de zero. Primeiramente, vamos impor o ponto  $p$  com multiplicidade 2, isto é

$$\begin{aligned} F(1 : 0 : 0) &= a = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_0}(1 : 0 : 0) &= 3a = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(1 : 0 : 0) &= b = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(1 : 0 : 0) &= e = 0. \end{aligned}$$

Com isso, temos que o sistema linear  $\mathcal{L}_{2,3}$  com um ponto duplo é da forma

$$\mathcal{L}_{2,3}(2) = \{F = cx_0x_1^2 + dx_0x_1x_2 + fx_0x_2^2 + gx_1^3 + hx_1^2x_2 + ix_1x_2^2 + jx_2^3 | (c : d : f : g : h : i : j) \in \mathbb{P}^6\}.$$

Agora, vamos impor o ponto  $q$  com multiplicidade 2, isto é

$$\begin{aligned} F(0 : 1 : 0) &= g = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_0}(0 : 1 : 0) &= c = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(0 : 1 : 0) &= 3g = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(0 : 1 : 0) &= h = 0. \end{aligned}$$

Com isso, temos que o sistema linear  $\mathcal{L}_{2,3}$  com dois pontos duplos é da forma

$$\mathcal{L}_{2,3}(2^2) = \{F = dx_0x_1x_2 + fx_0x_2^2 + ix_1x_2^2 + jx_2^3 | (d : f : i : j) \in \mathbb{P}^3\} \cong \mathbb{P}^3.$$

Por fim, isso mostra que  $\dim(\mathcal{L}_{2,3}(2^2)) = 3$ .

**Observação 9.1** No Exemplo 9.2 os coeficientes dos polinômios do sistema linear  $\mathcal{L}_{2,3}$  formam um espaço de dimensão  $\binom{2+3}{2} - 1 = 9$  e os dois pontos duplos teriam que impor

$$\binom{2-1+2}{2} + \binom{2-1+2}{2} = 6,$$

condições lineares. Logo, é esperado que o sistema linear  $\mathcal{L}_{2,3}(2^2)$  tenha dimensão  $9-6 = 3$ , que é exatamente o que acontece.

Por outro lado, no Exemplo 9.1 os coeficientes dos polinômios do sistema linear  $\mathcal{L}_{2,2}$  formam um espaço de dimensão  $\binom{2+2}{2} - 1 = 5$  e os dois pontos duplos teria que impor

$$\binom{2-1+2}{2} + \binom{2-1+2}{2} = 6,$$

condições lineares. Logo, é esperado que o sistema linear  $\mathcal{L}_{2,2}(2^2)$  tenha dimensão  $5-6 = -1$ , então é esperado que o sistema  $\mathcal{L}_{2,2}(2^2)$  seja vazio, o que não ocorre.

Observe que, o problema no Exemplo 9.1 ocorre pois os dois pontos gerais duplos acabam impondo, em uma das derivadas, coeficientes iguais.

Dito isso, é plausível definir uma possível dimensão para um sistema linear.

**Definição 9.2** A *dimensão virtual* de um sistema linear  $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{n,d}(m_1, \dots, m_h)$  é definida por

$$v(\mathcal{L}) := \binom{n+d}{n} - 1 - \sum_{i=1}^h \binom{m_i-1+n}{n}.$$

**Exemplo 9.3** Calculemos a dimensão virtual do sistema linear  $\mathcal{L}_{2,3}(2^4)$ . Isto é,

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}_{2,3}(2^4)) &= \binom{2+3}{2} - 1 - 4 \binom{2-1+2}{2} \\ &= 10 - 1 - 4 \cdot 3 \\ &= -3. \end{aligned}$$

Observe que, a dimensão virtual de um sistema linear ser menor que  $-1$  não faz sentido geométrico, pois quando a dimensão de um sistema é  $-1$  significa que o sistema é vazio. Logo, no caso degenerado, o sistema linear tem dimensão  $-1$ .

**Observação 9.2** Quando falamos que um sistema linear é vazio, estamos nos referindo as seções globais. Por exemplo, se considerarmos o sistema linear  $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{2,1}(1^3)$ , pelo Lema 6.7 podemos tomar os pontos gerais simples como sendo  $p = (1 : 0 : 0)$ ,  $q = (0 : 1 : 0)$  e  $r = (0 : 0 : 1)$  em  $\mathbb{P}^2$ . Dessa forma, as seções globais são  $\mathcal{L}(\mathbb{P}^2) = H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{L}) = \{0\}$ , mas  $\mathcal{L}(\mathbb{P}^2 - \{r\}) = \{a\langle p, q \rangle \mid a \in k\}$ .

**Definição 9.3** A *dimensão esperada* de um sistema linear  $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{n,d}(m_1, \dots, m_h)$  é definida por

$$e(\mathcal{L}) := \max\{v(\mathcal{L}), -1\}.$$

Como vimos, nem sempre a *dimensão real* do sistema linear, que denotaremos por  $l = \dim(\mathcal{L})$ , corresponde à dimensão esperada do mesmo, pois as condições impostas acabam se repetindo. Quando isso acontece, temos que

$$l(\mathcal{L}) > e(\mathcal{L}). \tag{9.1}$$

Por outro lado, se as condições são *linearmente independentes* (isto é, não se repetem), temos que

$$l(\mathcal{L}) = e(\mathcal{L}). \quad (9.2)$$

**Definição 9.4** Quando a dimensão do sistema linear satisfizer (9.1), chamaremos o sistema de *especial*, e se satisfizer (9.2) falaremos que o sistema é *não especial*.

**Exemplo 9.4** Como já discutimos, o sistema do Exemplo 9.1 é especial, mas o sistema do Exemplo 9.2 é não especial.

**Exemplo 9.5** O sistema linear  $\mathcal{L}_{3,2}(1^4)$  é não especial. De fato, primeiro calculemos a dimensão esperada desse sistema

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}_{3,2}(1^4)) &= \binom{3+2}{3} - 1 - 5 \binom{1-1+3}{3} \\ &= 10 - 1 - 4.1 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Logo,  $e(\mathcal{L}_{3,2}(1^4)) = \max\{5, -1\} = 5$ .

Tome  $p_1, \dots, p_4 \in \mathbb{P}_x^3$  pontos gerais. Pelo Lema 6.7, podemos supor que

$$\begin{aligned} p_1 &= (1 : 0 : 0 : 0) & p_2 &= (0 : 1 : 0 : 0) \\ p_3 &= (0 : 0 : 1 : 0) & p_4 &= (0 : 0 : 0 : 1). \end{aligned}$$

Assim, temos que uma hipersuperfície qualquer em  $\mathcal{L}_{3,2}$  é da forma

$$F = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_0x_2 + dx_0x_3 + ex_1^2 + fx_1x_2 + gx_1x_3 + hx_2^2 + ix_2x_3 + jx_3^2$$

onde pelo menos um dos coeficientes é diferente de zero.

Agora, vamos impor os pontos  $p_1, \dots, p_4$  com multiplicidade 1, isto é

$$\begin{aligned} F(1 : 0 : 0 : 0) &= a = 0 \\ F(0 : 1 : 0 : 0) &= e = 0 \\ F(0 : 0 : 1 : 0) &= h = 0 \\ F(0 : 0 : 0 : 1) &= j = 0 \end{aligned}$$

Com isso, temos que o sistema linear  $\mathcal{L}_{3,2}$  com 4 ponto simples é da forma

$$\mathcal{L}_{3,2}(1^4) = \{F = bx_0x_1 + cx_0x_2 + dx_0x_3 + fx_1x_2 + ex_1x_3 + ix_2x_3 \mid (b : c : d : f : e : i) \in \mathbb{P}^5\}.$$

Logo,

$$l(\mathcal{L}_{3,2}(1^4)) = 5 = e(\mathcal{L}_{3,2}(1^4))$$

e, portanto, o sistema é não especial.

**Teorema 9.1** (*Teorema da Multiplicidade Um*) Seja  $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_{n,d}$  um sistema linear não especial. Se  $h$  pontos simples estão em posição geral em  $\mathbb{P}^n$ , então o sistema  $\mathcal{L}(1^h)$  é não especial.

*Demonstração:* Provaremos por indução sobre o número  $h$  de pontos simples. Se  $h = 1$ , existe uma hipersuperfície de  $\mathcal{L}$  que não passa por um ponto geral. Para o passo indutivo, temos que provar que um ponto geral adicional impõe, em um sistema linear não vazio, uma condição linear independente das anteriores, ou de forma equivalente, que um ponto geral adicional não está em todas as hipersuperfícies do sistema. Isso é verdadeiro, para um ponto na posição geral. ■

**Exemplo 9.6** O sistema linear  $\mathcal{L}_{2,3}(2^2)$ , como vimos no Exemplo 9.2, é não especial e tem dimensão 3. Logo, pelo Teorema 9.1, o sistema  $\mathcal{L}_{2,3}(2^2, 1^3) = \mathcal{L}_{2,3}(2^2)(1^3)$  é não especial e tem dimensão 0.

## 9.2 Relação entre Variedades de Veronese e Sistemas Lineares

Nessa seção, estabeleceremos a relação entre as variedades de Veronese e os sistemas lineares, assim como, a relação entre o defeito secante de uma Veronese e a especialidade de um sistema linear. Em seguida, apresentaremos outra versão do Teorema de Alexander e Hirschowitz.

Dito isso, veremos um exemplo, para termos uma ideia inicial, de como os hiperplanos de uma Veronese  $V_d^n$  estão em correspondência com as hipersuperfícies do sistema linear  $\mathcal{L}_{n,d}$  por meio da aplicação de Veronese  $v_d^n$ .

**Exemplo 9.7** Uma hipersuperfície  $S$  de  $\mathcal{L}_{2,2}$  corresponde a uma seção hiperplana  $H$  de  $V_2^2$ . De fato, tome a aplicação de Veronese

$$\begin{aligned} v_2^2 : \mathbb{P}_x^2 &\rightarrow \mathbb{P}_y^5 \\ (x_0 : x_1 : x_2) &\mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2). \end{aligned}$$

Como  $S$  é uma hipersuperfície de  $\mathcal{L}_{2,2}$ , então  $S = \mathbf{V}(F)$ , onde

$$F = \alpha_{00}x_0^2 + \alpha_{01}x_0x_1 + \alpha_{02}x_0x_2 + \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2.$$

Agora, via a aplicação de Veronese, podemos tomar

$$G = \alpha_{00}y_0 + \alpha_{01}y_1 + \alpha_{02}y_2 + \alpha_{11}y_3 + \alpha_{12}y_4 + \alpha_{22}y_5,$$

e, assim, segue que  $H = \mathbf{V}(G)$  é um hiperplano de  $\mathcal{L}_{5,1}$ .

Por outro lado, dado um hiperplano  $H'$  de  $\mathcal{L}_{5,1}$ , então  $H' = \mathbf{V}(G')$ , onde

$$G' = a_0y_0 + a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + a_4y_4 + a_5y_5.$$

Dessa forma, se considerarmos

$$F' = a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2,$$

temos que  $S' = \mathbf{V}(F')$  é uma hipersuperfície de  $\mathcal{L}_{2,2}$ .

De forma geral, podemos considerar o seguinte resultado:

**Proposição 9.2** Há uma correspondência biunívoca, via aplicação de Veronese  $v_d^n$ , entre os sistemas lineares  $\mathcal{L}_{n,d}$  e  $\mathcal{L}_{N,1}$ , onde  $N = \binom{n+d}{n} - 1$ .

**Proposição 9.3** Sejam  $S = \mathbf{V}(F) \in \mathcal{L}_{n,d}$  e  $H = \mathbf{V}(G) \in \mathcal{L}_{N,1}$ , onde  $S$  e  $H$  se correspondem via aplicação de Veronese, como na Proposição 9.2. Então,  $p \in \mathbb{P}^n$  é um ponto duplo em  $S$  se, e somente se,  $H$  é tangente à Veronese  $V_d^n$  em  $P := v_d^n(p)$ .

*Demonstração:* Considere a aplicação

$$v_d^n : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$$

$$(x_0 : \dots : x_n) \mapsto (x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : x_0^{d-1}x_2 : \dots : x_n^d).$$

Pelo Lema 6.7 podemos considerar  $p = (1 : 0 : \dots : 0) \in \mathbb{P}^n$  e, assim, temos que  $P = (1 : 0 : \dots : 0) \in \mathbb{P}^N$ . Desta forma, é fácil ver que  $T_P V_d^n = \langle e_0, e_1, \dots, e_n \rangle$ .

Agora, temos que  $F$  é da forma

$$F = \alpha_{(0,0,\dots,0)}x_0^d + \alpha_{(1,0,\dots,0)}x_0^{d-1}x_1 + \alpha_{(2,0,\dots,0)}x_0^{d-1}x_2 + \dots + \alpha_{(n,n,\dots,n)}x_n^d.$$

Para exemplificar a notação, o coeficiente  $\alpha_{a_1, a_2, \dots, a_d}$  acompanha o monômio  $x_{a_1}x_{a_2} \dots x_{a_d}$ , por conveniência consideraremos  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_d$ .

Pela Proposição 9.2, temos que  $S = \mathbf{V}(F) \in \mathcal{L}_{n,d} \Leftrightarrow H = \mathbf{V}(G) \in \mathcal{L}_{N,1}$ , onde

$$G = \alpha_{(0,0,\dots,0)}y_0 + \alpha_{(1,0,\dots,0)}y_1 + \alpha_{(2,0,\dots,0)}y_2 + \dots + \alpha_{(n,n,\dots,n)}y_N.$$

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $p$  é um ponto duplo em  $S$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_0}(p) &= \alpha_{(0,0,\dots,0)} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(p) &= \alpha_{(1,0,\dots,0)} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(p) &= \alpha_{(n,0,\dots,0)} = 0. \end{aligned}$$

Logo,  $G = \alpha_{(1,1,0,\dots,0)}y_{n+1} + \dots + \alpha_{(n,n,n,\dots,n)}y_N$  e, assim,  $e_0, e_1, \dots, e_n \in H = \mathbf{V}(G)$ . Portanto,  $T_P V_d^n \subset H$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $T_P V_d^n \subset H = \mathbf{V}(G)$ , então  $G(e_0) = G(e_1) = \dots = G(e_n) = 0$ . Logo,  $G$  tem que ser da forma

$$G = \alpha_{(1,1,0,\dots,0)}y_{n+1} + \dots + \alpha_{(n,n,n,\dots,n)}y_N,$$

assim

$$F = \alpha_{(1,1,0,\dots,0)}x_0^{d-2}x_1^2 + \dots + \alpha_{(n,n,n,\dots,n)}x_n^d,$$

mostrando que  $p$  tem multiplicidade 2 em  $S = \mathbf{V}(F)$ . ■

**Corolário 9.4** Sejam  $p_1, \dots, p_h$  pontos gerais em  $\mathbb{P}^n$ . O sistema linear  $\mathcal{L}_{n,d}(2^h)$  de hiper-superfícies singulares em  $p_1, \dots, p_h$  corresponde ao sistema linear de hiperplanos em  $\mathbb{P}^N$  tangente à variedade de Veronese  $V_d^n$  em  $v_d^n(p_1), \dots, v_d^n(p_h)$ , ou seja,

$$\mathcal{L}_{n,d}(2^h) \cong \mathcal{L} := \{G \in \mathcal{L}_{N,1} \mid T_{v_d^n(p_j)} V_d^n \subset \mathbf{V}(G), j = 1, \dots, h\}.$$

**Corolário 9.5** Na notação do Corolário 9.4. Se  $p \in \langle p_1, \dots, p_h \rangle$  é um ponto geral, então

$$\mathcal{L} = \{G \in \mathcal{L}_{N,1} | T_{v_d^n(p)} \text{Sec} V_d^n \subset \mathbf{V}(G)\}.$$

*Demonstração:* Pelo Lema de Terracini 6.5, temos que  $T_{v_d^n(p)} \text{Sec} V_d^n = \langle T_{v_d^n(p_1)} V_d^n, \dots, T_{v_d^n(p_h)} V_d^n \rangle$ . Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{G \in \mathcal{L}_{N,1} | T_{v_d^n(p_j)} V_d^n \subset \mathbf{V}(G), j = 1, \dots, h\} \\ &= \{G \in \mathcal{L}_{N,1} | \langle T_{v_d^n(p_1)} V_d^n, \dots, T_{v_d^n(p_h)} V_d^n \rangle \subset \mathbf{V}(G)\} \\ &= \{G \in \mathcal{L}_{N,1} | T_{v_d^n(p)} \text{Sec} V_d^n \subset \mathbf{V}(G)\}. \end{aligned}$$

■

**Lema 9.6** Seja  $W \subset \mathbb{P}^N$  um espaço linear. Então

$$\dim(\{G \in \mathcal{L}_{N,1} | W \subset V(G)\}) = N - \dim W - 1.$$

**Teorema 9.7** A variedade de Veronese  $V_d^n$  é  $h$ -defeituosa se, e somente se, o sistema linear  $\mathcal{L}_{n,d}(2^h)$  é especial.

*Demonstração:*

( $\Rightarrow$ ) Suponha que a Veronese  $V_d^n$  é  $h$ -defeituosa, pelo Lema de Terracini 6.5 significa que

$$\dim(T_P \text{Sec}_h(V_d^n)) < \text{Expdim}(\text{Sec}_h(V_d^n)), \text{ onde } P \text{ é um ponto geral em } \text{Sec}_h(V_d^n),$$

observe que  $\text{Expdim}(\text{Sec}_h(V_d^n)) = N - v(\mathcal{L}_{n,d}) - 1$ , logo

$$v(\mathcal{L}_{n,d}) < N - \dim(T_P \text{Sec}_h(V_d^n)) - 1.$$

Pelo Corolário 9.5 e o Lema 9.6, segue que

$$v(\mathcal{L}_{n,d}) < l(\mathcal{L}).$$

Por fim, pelo Corolário 9.4, temos que  $v(\mathcal{L}_{n,d}) < l(\mathcal{L}_{n,d})$ , implicando que o sistema  $\mathcal{L}_{n,d}$  é especial.

( $\Leftarrow$ ) Suponha que o sistema linear  $\mathcal{L}_{n,d}(2^h)$  seja especial, ou seja,  $v(\mathcal{L}_{n,d}(2^h)) < l(\mathcal{L}_{n,d}(2^h))$ . Pelo Corolário 9.4, temos que  $v(\mathcal{L}_{n,d}(2^h)) < l(\mathcal{L})$ . Do Lema 9.6 e o Corolário 9.5, segue que

$$v(\mathcal{L}_{n,d}(2^h)) < N - \dim(T_P \text{Sec}_h(V_d^n)) - 1, \text{ onde } P \in \text{Sec}_h(V_d^n).$$

Como já dito, vale a seguinte igualdade  $\text{Expdim}(\text{Sec}_h(V_d^n)) = N - v(\mathcal{L}_{n,d}) - 1$  e, assim,

$$\dim(T_P \text{Sec}_h(V_d^n)) < \text{Expdim}(\text{Sec}_h(V_d^n)).$$

Portanto, pelo Lema de Terracini 6.5, a variedade de Veronese  $V_d^n$  é  $h$ -defeituosa.

■

O Teorema 9.7 concretiza a relação entre as variedades de Veronese e os sistemas lineares. Dessa forma, resultados que valem para as variedades de Veronese podem ser adaptados para os sistemas lineares, em particular, o Teorema de Alexander e Hirschowitz.

**Proposição 9.8** Se o sistema linear  $\mathcal{L}_{n,d}(2^h)$  é não especial, então o sistema linear  $\mathcal{L}_{n,d}(2^k)$  é não especial, para todo  $k \leq h$ .

*Demonstração:* Basta combinar o Teorema 9.7 com o Corolário 6.3. ■

**Teorema 9.9** (*Teorema de Alexander e Hirschowitz*) Os sistemas lineares  $\mathcal{L}_{n,d}(2^h)$  são não especiais, exceto os seguintes casos:

$n$	$\geq 2$	2	3	4	4
$d$	2	4	4	4	3

## 10 Quádricas

Neste capítulo, estudaremos as hipersuperfícies quádricas em  $\mathbb{P}^n(k)$ , onde  $k$  é um corpo infinito de característica diferente de 2, essas variedades generalizam seções cônicas no plano e sua geometria é bastante interessante. Usaremos, na primeira seção, o livro [5] para pautar discussão sobre as quádricas, já na segunda seção provaremos que as variedades de Veronese  $V_2^n$  são 2-defeituosa para todo  $n > 1$ .

### 10.1 Hipersuperfícies Quádricas

**Definição 10.1** Uma variedade  $V = \mathbf{V}(f) \subset \mathbb{P}^n$ , onde  $f$  é um polinômio homogêneo de grau 2, é chamado de *hipersuperfície quádrica* ou apenas *quádrica*.

As quádricas em  $\mathbb{P}^2$  também são chamadas de *cônicas*, pois uma cônica em  $k^2$  é da forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

homogeneizando em relação a  $z$ , temos

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0.$$

**Teorema 10.1** (*Forma Normal para Quádricas*) Seja  $f = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}x_i x_j \in k[x_0, \dots, x_n]$  um polinômio homogêneo diferente de zero de grau 2. Então  $\mathbf{V}(f)$  é projetivamente equivalente (Definição 4.27) a uma quádrica definida por uma equação da forma

$$c_0x_0^2 + c_1x_1^2 + \dots + c_nx_n^2 = 0$$

onde  $c_0, \dots, c_n$  são elementos de  $k$  nem todos nulos.

*Demonstração:* A estratégia será encontrar uma mudança de coordenadas  $X_i = \sum_{j=0}^n b_{ij}x_j$  tal que  $f$  tenha a forma

$$c_0X_0^2 + c_1X_1^2 + \dots + c_nX_n^2.$$

Usaremos indução no número de variáveis.

Para uma variável o teorema é trivial, pois os únicos polinômios homogêneos de grau 2 são da forma  $a_{00}x_0^2$ .

Suponha que o teorema é verdadeiro quando existem  $n$  variáveis. Dado  $f = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}x_i x_j$ , primeiro afirmamos que, por uma mudança de coordenadas,  $a_{00} \neq 0$ .

Para ver isso, primeiro suponha que  $a_{00} = 0$  e  $a_{jj} \neq 0$ , para algum  $1 \leq j \leq n$ . Neste caso, definimos

$$X_0 = x_j, X_j = x_0 \text{ e } X_i = x_i \text{ para } i \neq 0, j. \quad (10.1)$$

Então o coeficiente de  $X_0^2$  na expansão de  $f$  em termos de  $X_0, \dots, X_n$  é diferente de zero. Por outro lado, se todos os  $a_{ii} = 0$ , então como  $f \neq 0$  devemos ter  $a_{ij} \neq -a_{ji}$ , para algum  $i \neq j$ . Fazendo uma mudança de coordenadas como em (10.1), podemos supor que  $a_{01} \neq -a_{10}$ . Agora defina,

$$X_0 = x_0, X_1 = x_1 - x_0 \text{ e } X_i = x_i \text{ para } i \geq 2.$$

Em termos de  $X_0, \dots, X_n$  o polinômio  $f$  tem a forma

$$\sum_{i,j=0}^n c_{ij} X_i X_j, \text{ onde } c_{00}a_{01} + a_{10} \neq 0.$$

Agora, suponha que  $f = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x_i x_j$ , onde  $a_{00} \neq 0$ . Seja  $b_i = a_{i0} + a_{0i}$  e note que

$$\frac{1}{a_{00}} \left( a_{00} x_0 + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{2} x_i \right)^2 = a_{00} x_0^2 + \sum_{i=1}^n b_i x_0 x_i + \sum_{i,j=1}^n \frac{b_i b_j}{4a_{00}} x_i x_j.$$

Agora introduzimos novas coordenadas  $X_0, \dots, X_n$ , onde

$$X_0 = x_0 + \frac{1}{a_{00}} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{2} x_i \text{ e } X_i = x_i \text{ para } i \geq 1.$$

Escrevendo  $f$  em termos de  $X_0, \dots, X_n$ , todos os termos  $X_0 X_i$  cancelam para  $1 \leq i \leq n$  e, portanto, obtemos uma soma da forma  $a_{00} X_0^2 + \sum_{i,j=0}^n d_{ij} X_i X_j$ . A soma  $\sum_{i,j=1}^n d_{ij} X_i X_j$  envolve  $n$  variáveis  $X_1, \dots, X_n$ , de modo que, pela hipótese de indução, podemos encontrar uma mudança de coordenadas envolvendo apenas  $X_1, \dots, X_n$  que transforma  $\sum_{i,j=1}^n d_{ij} X_i X_j$  em

$$c_1 X_1^2 + \dots + c_n X_n^2.$$

Podemos considerar isso como uma mudança de coordenadas para  $X_0, \dots, X_n$  que deixa  $X_0$  fixo. Então, temos uma mudança de coordenadas que transforma  $a_{00} X_0^2 + \sum_{i,j=0}^n d_{ij} X_i X_j$  na forma desejada. ■

Na forma normal  $c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 + \dots + c_n x_n^2$ , alguns dos coeficientes  $c_i$  podem ser nulos. Ao renomear as coordenadas, podemos assumir que  $c_i \neq 0$  se  $0 \leq i \leq p$  e  $c_i = 0$  para  $i > p$ . Então a quádrlica é projetivamente equivalente a uma dada pela equação

$$c_0 x_0^2 + \dots + c_p x_p^2, \tag{10.2}$$

onde  $c_0, \dots, c_p$  são diferentes de zero.

**Definição 10.2** Seja  $V \subset \mathbb{P}^n$  uma quádrlica.

- (a) Se  $V$  é definida pela equação (10.2), então  $V$  tem *posto*  $p + 1$ .
- (b) Se  $V$  é uma quádrlica arbitrária, então  $V$  tem *posto*  $p + 1$  se  $V$  é projetivamente equivalente a uma quádrlica definida pela equação (10.2).

Agora, dada uma quádrlica  $\mathbf{V}(f)$ , onde

$$f = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x_i x_j.$$

**Observação 10.1** Podemos assumir  $a_{ij} = a_{ji}$ , para todo  $i$  e  $j$ . De fato, definindo

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$$

segue que  $f = \sum_{i,j=0}^n b_{ij} x_i x_j$  e  $b_{ij} = b_{ji}$ , para todo  $i, j$ .



Como  $k$  é algebricamente fechado, a equação  $x_i^2 - c_i = 0$  tem raiz em  $k$ . Escolha uma e chame de  $\sqrt{c_i}$ . Note que  $\sqrt{c_i} \neq 0$ , pois  $c_i \neq 0$ . Defina

$$X_i = \sqrt{c_i}x_i, \quad 0 \leq i \leq p$$

$$X_i = x_i, \quad p < i \leq n.$$

Isso dá a forma desejada. ■

**Definição 10.3** Uma quádrlica em  $\mathbb{P}^n$  é *não singular* se tem posto  $n + 1$ .

**Corolário 10.4** Seja  $k$  algebricamente fechado. Então todas as quádrlicas não singulares em  $\mathbb{P}^n$  são projetivamente equivalentes.

**Exemplo 10.1** Tome  $C_4 \subset \mathbb{P}^4$ , definida da seguinte forma

$$\begin{aligned} C_4 &= \text{menores } 2 \times 2 \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{V}(x_0x_2 - x_1^2, x_0x_3 - x_1x_2, x_0x_4 - x_1x_3, x_1x_3 - x_2^2, x_1x_4 - x_2x_3, x_2x_4 - x_3^2) \\ &= \mathbf{V}(F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{23}, F_{24}, F_{34}). \end{aligned}$$

Observe que, pela Proposição 10.2, temos que

$$\text{posto}(F_{12}) = \text{posto} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

e

$$\text{posto}(F_{13}) = \text{posto} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4.$$

De forma similar, temos que  $\text{posto}(F_{12}) = \text{posto}(F_{23}) = \text{posto}(F_{34}) = 3$  e, assim, são projetivamente equivalentes a uma quádrlica da forma  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$  (Veja Figura 10.1).

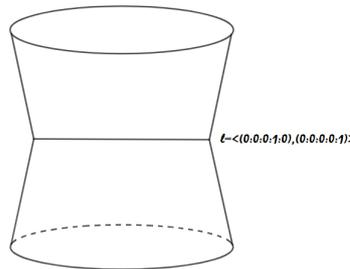


Figura 10.1: Quádrlica de posto 3 em  $\mathbb{P}^4$ .

Da mesma forma, temos que  $\text{posto}(F_{13}) = \text{posto}(F_{12}) = \text{posto}(F_{24}) = 4$  e, assim, são projetivamente equivalente a uma quádrlica da forma  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  (Veja Figura 10.2).

Assim, observe que  $\dim(\mathbf{V}(F_{12}, F_{13})) = 2$ , então

$$\deg(\mathbf{V}(F_{12}, F_{13})) = \deg(F_{12})\deg(F_{13}) = 4.$$

Por fim, afirmamos que  $\deg(C_4) = 4$ , ou seja,  $C_4$  é uma quártica.

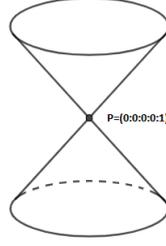


Figura 10.2: Quádrica de posto 4 em  $\mathbb{P}^4$ .

## 10.2 Relação Posto - Sistema Linear

**Exemplo 10.2** Dado o sistema linear  $\mathcal{L}_{2,2}$ , temos que uma quádrica qualquer neste sistema é da forma

$$F_3 = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_0x_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2.$$

Pelo que vimos na seção anterior, o posto de  $F_3$  é no máximo 3. Logo, se impormos um ponto duplo, temos pelo Exemplo 9.1, que

$$\mathcal{L}_{2,2}(2) = \{F_2 = dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2 | (d : e : f) \in \mathbb{P}^2\}.$$

Assim, o posto de  $F_2$  é no máximo 2. Agora, se impormos dois pontos duplos ao sistema  $\mathcal{L}_{2,2}$ , temos

$$\mathcal{L}_{2,2}(2^2) = \{F_1 = fx_2^2 | (f) \in \mathbb{P}^0\}.$$

Assim, o posto de  $F_1$  é 1.

**Exemplo 10.3** Dado o sistema linear  $\mathcal{L}_{3,2}$ , temos que uma quádrica qualquer neste sistema é da forma

$$F_4 = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_0x_2 + dx_0x_3 + ex_1^2 + fx_1x_2 + gx_1x_3 + hx_2^2 + ix_2x_3 + jx_3^2.$$

Pelo que vimos na seção anterior, o posto de  $F_4$  é no máximo 4. Logo, se impormos um ponto duplo, temos que

$$\mathcal{L}_{3,2}(2) = \{F_3 = ex_1^2 + fx_1x_2 + gx_1x_3 + hx_2^2 + ix_2x_3 + jx_3^2 | (e : \dots : j) \in \mathbb{P}^5\}.$$

Assim, o posto de  $F_3$  é no máximo 3. Agora, se impormos dois pontos duplos ao sistema  $\mathcal{L}_{3,2}$ , temos

$$\mathcal{L}_{3,2}(2^2) = \{F_2 = hx_2^2 + ix_2x_3 + jx_3^2 | (h : i : j) \in \mathbb{P}^2\}.$$

Assim, o posto de  $F_2$  é no máximo 2. Agora, se impormos três pontos duplos ao sistema  $\mathcal{L}_{3,2}$ , temos

$$\mathcal{L}_{3,2}(2^3) = \{F_1 = jx_3^2 | (j) \in \mathbb{P}^0\}.$$

Assim, o posto de  $F_1$  é 1.

**Observação 10.2** Observe que, em ambos os exemplos, o primeiro ponto duplo impõe  $n + 1$  condições linearmente independentes e anula todos os monômios que tem  $x_0$ , o segundo ponto duplo impõe  $n$  condições linearmente independentes e anula todos os monômios que tem  $x_1$ , o terceiro ponto duplo impõe  $n - 1$  condições linearmente independentes e anula todos os monômios que tem  $x_2$  e assim sucessivamente até o sistema linear ter dimensão 0.

Afirmamos que essa observação se repete em todos os sistema lineares do tipo  $\mathcal{L}_{n,2}$  ao impor  $h$  pontos duplos. Assim, podemos concluir que

$$\mathcal{L}_{n,2}(2^n) = \{\alpha x_n^2 \mid (\alpha) \in \mathbb{P}^0\}.$$

**Teorema 10.5** Seja  $F_{n-h+1} \in \mathcal{L}_{n,2}(2^h)$ , onde  $0 \leq h \leq n$ . Então  $\text{posto}(F_{n-h+1}) \leq n-h+1$ .

*Demonstração:* Primeiro vamos considerar o caso  $0 \leq h < n$ . Provaremos por indução em  $h$ . Para  $h = 0$ , considere o sistema  $\mathcal{L}_{n,2}$ , como  $F_{n+1} \in \mathcal{L}_{n,2}$  pode depender de todas as  $n+1$  variáveis em  $\mathbb{P}^n$ , então o posto de  $F_{n+1}$  é no máximo  $n+1$ . Agora, suponha que  $F_{n-(h-1)+1} \in \mathcal{L}_{n,2}(2^{h-1})$  tem posto no máximo  $n-(h-1)+1$ , ou seja,  $F_{n-(h-1)+1}$  pode depender de  $n-(h-1)+1$  variáveis. Como o sistema  $\mathcal{L}_{n,2}(2^h)$  é obtido ao impor mais um ponto geral duplo ao sistema  $\mathcal{L}_{n,2}(2^{h-1})$ , pela Observação 10.2, as quádricas  $F_{n-h+1}$  de  $\mathcal{L}_{n,2}(2^h)$  podem depender de no máximo  $n-h+1$  variáveis, isto é,  $F_{n-h+1}$  tem posto no máximo  $n-h+1$ .

Por fim, se  $h = n$ , como já discutimos

$$\mathcal{L}_{n,2}(2^n) = \{\alpha x_n^2 \mid (\alpha) \in \mathbb{P}^0\}.$$

Então,  $F_1$  tem posto 1. ■

## 10.3 Casos Especiais

Nesta seção, vamos mostrar, de duas maneiras diferentes, que as variedades de Veronese  $V_2^n$  são 2-defeituosa, para todo  $n > 1$ . Para isso, usaremos os métodos apresentandos na Seção 6.5 do Capítulo 6.

### Primeira Demonstração

Dada a aplicação de Veronese

$$\begin{aligned} v_2^n : \mathbb{P}_x^n &\rightarrow \mathbb{P}_y^N \\ (x_0 : x_1 : \dots : x_n) &\mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : \dots : x_0x_n : x_1^2 : x_1x_2 : \dots : x_1x_n : x_2^2 : \dots : x_n^2). \end{aligned}$$

A dimensão esperada de  $\text{Sec}_2(V_2^n)$  é

$$\text{Expdim}(\text{Sec}_2(V_2^n)) = \min\{2(n+1) - 1, (n^2 + 3n + 2)/2\} = 2n + 1,$$

onde

$$N = \binom{n+2}{2} - 1 = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}.$$

Sejam  $p$  e  $q$  pontos gerais de  $\mathbb{P}^n$ . Podemos supor, pelo Lema 6.7, que  $p = (1 : 0 : \dots : 0 : 0)$  e  $q = (0 : 0 : \dots : 0 : 1)$ , sem perda de generalidade. Agora, considere  $P = v_2^n(p) = (1 : 0 : \dots : 0 : 0)$  e  $Q = v_2^n(q) = (0 : 0 : \dots : 0 : 1)$  em  $\mathbb{P}^N$ .

Tomando a reta gerada por  $p$  e  $q$

$$L := \langle p, q \rangle = \{(a : 0 : \dots : 0 : b) \mid (a : b) \in \mathbb{P}^1\},$$

podemos restringir o domínio da aplicação  $v_2^n$  à reta  $L$ , isto é

$$v_{2|L}^n : \langle p, q \rangle \rightarrow \mathbb{P}_y^N \\ (a : 0 : \cdots : 0 : b) \mapsto (a^2 : 0 : \cdots : 0 : ab : 0 : \cdots : 0 : b^2).$$

Então,  $C = v_{2|L}^n(L)$  é uma cônica em  $\mathbb{P}^2$ , pois

$$C = V(y_0 y_N - y_m^2) \subset \mathbb{P}^2 = \mathbf{V}(y_1, \dots, y_{m-1}, y_{m+1}, \dots, y_{N-1}) \subset \mathbb{P}^N,$$

onde  $m$  é a coordenada que se encontra  $ab$ .

Por fim, pela Definição 4.26, temos que

$$\dim T_P C = \dim T_Q C = \dim L = 1.$$

Logo,  $T_P C$  e  $T_Q C$  são retas em  $\mathbb{P}^2$ . Assim, segue que

$$T_P C = \Pi(H_1 - \{0\})$$

$$T_Q C = \Pi(H_2 - \{0\}),$$

onde  $H_1, H_2$  são planos passando pela origem em  $k^3$  e  $\Pi$  é a aplicação definida em 4.18. Observe que, pela Definição 4.20, temos que

$$\dim H_1 = \dim H_2 = 2,$$

em  $k^3$  e, como  $H_1 \neq H_2$ , pois  $T_P C \neq T_Q C$ , temos que

$$H_1 \cap H_2 = l,$$

onde  $l$  é uma reta em  $k^3$  passando pela origem. Assim,  $P := \Pi(l - \{0\})$  pertence a  $T_P C \cap T_Q C$ . Logo,

$$P \in T_P C \cap T_Q C \subset T_P V_2^n \cap T_Q V_2^n.$$

Deste modo, pelo Lema de Terracini 6.5, concluímos que

$$\dim \langle T_P V_2^n, T_Q V_2^n \rangle \leq 2n < 2n + 1 = \text{Expdim}(\text{Sec}_2(V_2^n))$$

e, assim, a variedade de Veronese  $V_2^n$  é 2-defeituosa.

## Segunda Demonstração

Dada a aplicação de Veronese

$$v_2^n : \mathbb{P}_x^n \rightarrow \mathbb{P}_y^N \\ (x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \mapsto (x_0^2 : x_0 x_1 : \cdots : x_0 x_n : x_1^2 : x_1 x_2 : \cdots : x_1 x_n : x_2^2 : \cdots : x_n^2).$$

A dimensão esperada de  $\text{Sec}_2(V_2^n)$  é

$$\text{Expdim}(\text{Sec}_2(V_2^n)) = \min\{2(n+1) - 1, (n^2 + 3n + 2)/2\} = 2n + 1,$$

onde

$$N = \binom{n+2}{2} - 1 = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}.$$

Sejam  $p$  e  $q$  pontos gerais de  $\mathbb{P}^n$ . Podemos supor, pelo Lema 6.7, que  $p = (1 : 0 : \dots : 0 : 0)$  e  $q = (0 : 0 : \dots : 0 : 1)$ , sem perda de generalidade. Agora, considere  $P = v_2^n(p) = (1 : 0 : \dots : 0 : 0) \subset \mathbb{P}^N$  e  $Q = v_2^n(q) = (0 : 0 : \dots : 0 : 1) \subset \mathbb{P}^N$ .

Com isso, construiremos os espaços tangentes  $T_P V_2^n$  e  $T_Q V_2^n$ . Tome  $x_0 = 1$ , pela Proposição 4.17, considere aplicação de  $U_0 = k^n$  em  $V_0 = k^N$ :

$$\begin{aligned} \varphi : U_0 &\rightarrow V_0 \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, x_1^2, x_1 x_2, \dots, x_1 x_n, x_2^2, \dots, x_n^2). \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= (1, 0, \dots, 0, 2x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= (0, 1, 0, \dots, 0, x_1, 0, \dots, 0, 2x_2, x_3, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} &= (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, x_1, 0, \dots, 0, x_2, 0, \dots, x_{n-1}, 2x_n). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \bar{0} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0) &= \bar{e}_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(0) &= \bar{e}_2 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(0) &= \bar{e}_n. \end{aligned}$$

Portanto, o espaço tangente em  $P$  é

$$\begin{aligned} T_P X &= \langle e_0, (1 : 1 : 0 : 0 : \dots : 0 : 0), (1 : 0 : 1 : 0 : \dots : 0 : 0), \dots, (1 : 0 : 0 : 0 : \dots : 0 : 1) \rangle \\ &= \langle e_0, (0 : 1 : 0 : 0 : \dots : 0 : 0), (0 : 0 : 1 : 0 : \dots : 0 : 0), \dots, (0 : 0 : 0 : 0 : \dots : 0 : 1) \rangle \\ &= \langle e_0, e_1, \dots, e_n \rangle. \end{aligned}$$

Agora, tome  $x_3 = 1$ , pela Proposição 4.17, considere a aplicação  $U_n = k^n$  em  $V_N = k^N$ :

$$\begin{aligned} \gamma : U_n &\rightarrow V_N \\ (x_0, \dots, x_{n-1}) &\mapsto (x_0^2, x_0 x_1, \dots, x_0 x_{n-1}, x_0, x_1^2, x_1 x_2, \dots, x_1 x_{n-1}, x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \widehat{0} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x_0}(0) &= \widehat{e}_n \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}(0) &= \widehat{e}_{j_1} \\ &\vdots \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x_{n-1}}(0) &= \widehat{e}_{j_{n-1}}. \end{aligned}$$

onde  $n \leq j_i \leq j_{i+1}$ . Portanto, o espaço tangente em  $Q$  é

$$T_Q X = \langle e_n, e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-1}}, e_N \rangle.$$

Desta forma, segue que

$$\langle T_P V_2^n, T_Q V_2^n \rangle = \langle e_0, \dots, e_n, e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-1}}, e_N \rangle.$$

Logo,

$$\dim \langle T_P V_2^n, T_Q V_2^n \rangle = 2n.$$

Pelo Lema de Terracini [6.5](#), como

$$\dim \langle T_P V_2^n, T_Q V_2^n \rangle = 2n < 2n + 1 = \text{Expdim}(\text{Sec}_2(V_2^n))$$

a variedade  $V_2^n$  é 2-defeituosa.

## 11 Sequências Exatas de Sistemas Lineares

A ideia principal deste capítulo é extrair resultados importantes sobre sistemas lineares, por meio de sequências exatas. Para isso, nos basearemos em [9] e em [15].

De início, apresentaremos alguns lemas que serão de suma importância nos próximos capítulos.

**Lema 11.1** Sejam  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  e  $\mathcal{L}_3$  sistemas lineares. Se a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_3$$

é exata e  $h^0(\mathcal{L}_3) = 0$ , então  $l(\mathcal{L}_2) = l(\mathcal{L}_1) + l(\mathcal{L}_3) + 1$ .

*Demonstração:* Considere a sequência de cohomologia correspondente

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_1) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_2) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_3) \longrightarrow H^1(\mathcal{L}_1) \longrightarrow \dots,$$

Como  $H^0(\mathcal{L}_3) = \{0\}$ , pois  $h^0(\mathcal{L}_3) = 0$ , então podemos considerar a seguinte sequência exata de espaços vetoriais

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_1) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_2) \longrightarrow 0.$$

Assim, temos que  $h^0(\mathcal{L}_2) = h^0(\mathcal{L}_1)$  e, assim

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{L}_2) - 1 &= h^0(\mathcal{L}_1) - 1 \\ \Rightarrow l(\mathcal{L}_2) &= l(\mathcal{L}_1) \\ \Rightarrow l(\mathcal{L}_2) &= l(\mathcal{L}_1) + l(\mathcal{L}_3) + 1. \end{aligned}$$

■

**Lema 11.2** Sejam  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  e  $\mathcal{L}_3$  sistemas lineares. Se a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_3$$

é exata e  $h^1(\mathcal{L}_1) = 0$ , então  $l(\mathcal{L}_2) = l(\mathcal{L}_1) + l(\mathcal{L}_3) + 1$ .

*Demonstração:* Considere a sequência de cohomologia correspondente

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_1) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_2) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_3) \longrightarrow H^1(\mathcal{L}_1) \longrightarrow \dots,$$

Como  $H^1(\mathcal{L}_1) = \{0\}$ , pois  $h^1(\mathcal{L}_1) = 0$ , então podemos considerar a seguinte sequência exata de espaços vetoriais

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_1) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_2) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_3) \longrightarrow 0.$$

Assim, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem (para mais detalhes, ver [6], Capítulo 6), temos que  $h^0(\mathcal{L}_2) = h^0(\mathcal{L}_1) + h^0(\mathcal{L}_3)$  e, assim

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{L}_2) - 1 &= h^0(\mathcal{L}_1) + h^0(\mathcal{L}_3) - 1 \\ \Rightarrow h^0(\mathcal{L}_2) - 1 &= h^0(\mathcal{L}_1) + h^0(\mathcal{L}_3) - 1 + (1 - 1) \\ \Rightarrow h^0(\mathcal{L}_2) - 1 &= (h^0(\mathcal{L}_1) - 1) + (h^0(\mathcal{L}_3) - 1) + 1. \end{aligned}$$

Portanto, segue que  $l(\mathcal{L}_2) = l(\mathcal{L}_1) + l(\mathcal{L}_3) + 1$ .

■

## 11.1 Restrição a um Esquema Finito

Fixemos algumas notações para essa seção:

- Seja  $\mathcal{L}_{n,d}$  o sistema linear das hipersuperfície de  $\mathbb{P}^n$  com grau  $d$ ;
- $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{n,d}(m_1, \dots, m_h)$ ;
- seja  $Z = \{m_1P_1, \dots, m_hP_h\}$  um esquema finito, onde  $P_i \in \mathbb{P}^n$  com multiplicidade  $m_i$ . Como vimos em (8.6), temos que

$$\text{length}(Z) = \sum_{i=1}^h \binom{n + m_i - 1}{n};$$

- seja  $\mathcal{L}_{n,d}|_Z$  o sistema linear obtido quando restringimos o sistema  $\mathcal{L}_{n,d}$  ao esquema  $Z$ .

Dessa forma, podemos montar a seguinte sequência exata de restrição

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_{n,d} \longrightarrow \mathcal{L}_{n,d}|_Z. \quad (11.1)$$

**Lema 11.3**  $h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}_{n,d}) = 0$ .

*Demonstração:* Dividiremos a prova em dois casos:

- i - Para  $n = 1$ : Provaremos por indução em  $d$ . Para  $d = 0$ , temos que  $h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}_{1,0}) = 0$ , pelo Exercício III.2.2 do [13].

Agora, considere o esquema  $Z_0 = \{Q_1\}$  dado por um ponto simples. Dessa forma, temos a seguinte sequência exata de restrição

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{1,d-1} \longrightarrow \mathcal{L}_{1,d} \longrightarrow \mathcal{L}_{1,d}|_{Z_0},$$

assim, temos a seguinte sequência exata de cohomologia

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}_{1,d-1}) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}_{1,d}) \longrightarrow H^0(Z_0, \mathcal{L}_{1,d}|_{Z_0}) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}_{1,d-1}) \longrightarrow \dots$$

Pelo Teorema do Anulamento 8.11, segue que  $H^1(Z_0, \mathcal{L}_{n,d}|_{Z_0}) = 0$ , pois  $\dim(Z_0) = 1$ . Logo, podemos considerar a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_{1,d-1}) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_{1,d}) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_{1,d}|_{Z_0}) \longrightarrow H^1(\mathcal{L}_{1,d-1}) \longrightarrow H^1(\mathcal{L}_{1,d}) \longrightarrow 0.$$

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem (para mais detalhes, ver [6], Capítulo 6), segue que

$$\begin{aligned} h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}_{1,d}) &= h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}_{1,d-1}) - h^0(Z_0, \mathcal{L}_{1,d}|_{Z_0}) + h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}_{1,d}) - h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}_{1,d-1}) \\ &= h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}_{1,d-1}) - 1 + (d+1) - d \\ &= h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}_{1,d-1}). \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, temos  $h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}_{1,d-1}) = 0$  e, assim,  $h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}_{1,d}) = 0$ .

- ii - Para  $n > 1$ : Segue direto do Teorema da Cohomologia do Espaço Projetivo 8.12.

**Lema 11.4** Se  $h^0(\mathcal{L}) = 0$ , então  $\mathcal{L}$  é não especial. ■

*Demonstração:* Como  $h^0(\mathcal{L}) = 0$ , temos que  $l(\mathcal{L}) = h^0(\mathcal{L}) - 1 \leq e(\mathcal{L})$ . Portanto,  $\mathcal{L}$  é não especial. ■

**Lema 11.5** Se  $h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}) = 0$ , então  $\mathcal{L}$  é não especial.

*Demonstração:* Considere a sequência exata (11.1), como  $h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}) = 0$ , temos pelo Lema 11.2 que

$$\begin{aligned} l(\mathcal{L}) &= l(\mathcal{L}_{n,d}) - l(\mathcal{L}_{n,d}|_Z) - 1 \\ &= l(\mathcal{L}_{n,d}) - (\text{length}(Z) - 1) - 1 \\ &= \binom{n+d}{n} - 1 - \sum_{i=1}^h \binom{n+m_j-1}{n} \\ &= v(\mathcal{L}). \end{aligned}$$

Portanto,  $\mathcal{L}$  é não especial. ■

**Proposição 11.6** O sistema linear  $\mathcal{L}$  é não especial se, e somente se,  $h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{L})h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}) = 0$ .

*Demonstração:*

( $\Leftarrow$ ) Basta usar os Lemas 11.4 e 11.5.

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $\mathcal{L}$  é não especial. Logo,  $h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}) = e(\mathcal{L}) + 1$ . Há dois casos a se analisar:

- Se  $e(\mathcal{L}) = -1$ . Então,  $h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}) = 0$ .
- Se  $e(\mathcal{L}) = v(\mathcal{L})$ . Pelo Lema 11.3, podemos considerar a seguinte sequência exata de espaços vetoriais

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}_{n,d}) \longrightarrow H^0(Z, \mathcal{L}_{n,d}|_Z) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}) \longrightarrow 0,$$

pelo Teorema do Núcleo e da Imagem (Para mais detalhes, ver [6], Capítulo 6), temos que

$$h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}) = v(\mathcal{L}) + 1 - h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}),$$

segue que

$$h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}) = v(\mathcal{L}) - (v(\mathcal{L}) + 1) + 1 = 0.$$

Portanto, segue que  $h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{L})h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}) = 0$ . ■

## 11.2 Sequência Exata de Castelnuovo

Nesta seção, mostraremos uma técnica de degeneração elaborada por Hirchowitz, que ele chamou de *La Méthode d'Horace*. Esse método consiste em fazer especializações de tantos pontos quanto forem convenientes em um hiperplano fixo e depois aplicar indução sobre dimensão e/ou grau.

Seja  $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{n,d}(2^h)$ . A ideia principal de Hirchowitz era degenerar de tal forma que  $k$  pontos dos  $h$  pontos tenham suporte em um hiperplano  $\pi \cong \mathbb{P}^{n-1}$  de  $\mathbb{P}^n$ , obtendo

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{n,d-1}(2^{h-k}, 1^k) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{L} \xrightarrow{\beta} \mathcal{L}|_{\pi} \subset \mathcal{L}_{n-1,d}(2^k), \quad (11.2)$$

onde  $\alpha(F) = F \cdot \pi$  e  $\beta(G) = G|_{\pi}$ , para  $F \in \mathcal{L}_{n,d-1}(2^{h-k}, 1^k)$  e  $G \in \mathcal{L}$ . Logo, podemos considerar a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{n,d-1}(2^{h-k}, 1^k) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{L} \xrightarrow{\beta} \mathcal{L}_{n-1,d}(2^k), \quad (11.3)$$

chamada de *sequência exata de Castelnuovo*.

Se tomarmos  $F \in \mathcal{L}_{n,d-1}(2^{h-k}, 1^k)$ , então  $F$  tem multiplicidade de pelo menos 2 em  $h - k$  pontos e multiplicidade de pelo menos 1 em  $k$  pontos, digamos  $P_1, \dots, P_{h-k}$  e  $Q_1, \dots, Q_k$ , respectivamente. Sabemos que

$$\frac{\partial \alpha(F)}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \pi + F \frac{\partial \pi}{\partial x_i}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Como os pontos  $Q_1, \dots, Q_k$  tem suporte em  $\pi$ , segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha(F)}{\partial x_i}(Q_j) &= \frac{\partial F}{\partial x_i}(Q_j) \pi(Q_j) + F(Q_j) \frac{\partial \pi}{\partial x_i}(Q_j) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_i}(Q_j) \cdot 0 + 0 \cdot \frac{\partial \pi}{\partial x_i}(Q_j) \\ &= 0, \quad 1 \leq j \leq k, \end{aligned}$$

assim,  $\alpha(F)$  tem multiplicidade de pelo menos 2 nos  $k$  pontos. Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha(F)}{\partial x_i}(P_l) &= \frac{\partial F}{\partial x_i}(P_l) \pi(P_l) + F(P_l) \frac{\partial \pi}{\partial x_i}(P_l) \\ &= 0 \cdot \pi(P_l) + 0 \cdot \frac{\partial \pi}{\partial x_i}(P_l) \\ &= 0, \quad 0 \leq l \leq h - k, \end{aligned}$$

logo,  $\alpha(F)$  tem multiplicidade de pelo menos 2 nos  $h - k$  pontos. Dessa forma,  $\alpha(F)$  tem multiplicidade de pelo menos 2 nos  $h$  pontos. Como  $F$  tem grau  $d - 1$  e  $\pi$  tem grau 1, então  $\alpha(F)$  tem grau  $d$  e, assim,  $\alpha(F) \in \mathcal{L}$  mostrando que a aplicação  $\alpha$  está bem definida. Mostremos que  $Im(\alpha) = ker(\beta)$ . Se  $G \in Im(\alpha)$ , então  $G = F\pi$  onde  $F \in \mathcal{L}_{n,d-1}(2^{h-k}, 1^k)$ , logo  $G|_{\pi} = (F\pi)|_{\pi} = 0$  e, assim,  $G \in ker(\beta)$ . Por outro lado, se  $H \in ker(\beta)$ , então  $H|_{\pi} = 0$  e, assim,  $H = F'\pi$  mostrando que  $H \in Im(\alpha)$ .

Podemos generalizar o conceito da sequência exata de Castelnuovo.

**Proposição 11.7** Considere o sistema linear  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{n,d}(m_1, \dots, m_h)$ . Se  $k$  dos  $h$  pontos tem suporte em um plano  $\pi \cong \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ , então a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{n,d-1}(m_1 - 1, \dots, m_k - 1, m_{k+1}, \dots, m_h) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}|_{\pi} \subset \mathcal{L}_{n-1,d}(m_1, \dots, m_k)$$

é uma sequência exata de sistemas lineares. Em particular,

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{n,d-1}(m_1 - 1, \dots, m_k - 1, m_{k+1}, \dots, m_h) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_{n-1,d}(m_1, \dots, m_k)$$

é uma sequência exata.

## 12 Cúbicas

Neste capítulo, veremos que a única cúbica que é defeituosa é a que tem dimensão 4, ou seja,  $V_3^n$  é defeituosa  $\Leftrightarrow n = 4$ . Para isso iremos nos basear na referência [15].

### Caso Especial

**Teorema 12.1** Por qualquer  $n + 3$  pontos gerais em  $\mathbb{P}^n$  passa uma única curva racional normal (Definição 5.2). Mais ainda, a curva normal é descrita pelos menores  $2 \times 2$  da matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

*Demonstração:* Ver [17], Capítulo 1. ■

**Corolário 12.2** Por qualquer 7 pontos gerais em  $\mathbb{P}^4$  passa uma única curva quártica racional normal  $C_4$ . Mais ainda, a curva quártica  $C_4$  é descrita pelos menores  $2 \times 2$  da matriz

$$M = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

*Demonstração:* Teorema 12.1 e Exemplo 10.1. ■

**Observação 12.1** Temos que

$$\text{menores } 2 \times 2(M) = \text{menores } 2 \times 2(N),$$

onde

$$M = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \text{ e } N = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

De fato, considere os seguintes ideais

$$\begin{aligned} I &:= \langle \text{menores } 2 \times 2(M) \rangle \\ &= \langle x_0x_2 - x_1^2, x_0x_3 - x_1x_2, x_0x_4 - x_1x_3, x_1x_3 - x_2^2, x_1x_4 - x_2x_3, x_2x_4 - x_3^2 \rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} J &:= \langle \text{menores } 2 \times 2(N) \rangle \\ &= \langle x_0x_2 - x_1^2, x_0x_3 - x_1x_2, x_1x_3 - x_2^2, x_0x_3 - x_1x_2, x_0x_4 - x_2^2, x_1x_4 - x_2x_3, x_1x_3 - x_2^2, \\ &\quad x_1x_4 - x_2x_3, x_2x_4 - x_3^2 \rangle \\ &= \langle x_0x_2 - x_1^2, x_0x_3 - x_1x_2, x_1x_3 - x_2^2, x_0x_4 - x_2^2, x_1x_4 - x_2x_3, x_2x_4 - x_3^2 \rangle. \end{aligned}$$

Observe que, os polinômios  $x_0x_2 - x_1^2, x_0x_3 - x_1x_2, x_1x_3 - x_2^2, x_1x_4 - x_2x_3, x_2x_4 - x_3^2$  são geradores em comum dos ideais  $I$  e  $J$ . Como

$$\begin{aligned} x_0x_4 - x_1x_3 &= x_0x_4 - x_2^2 - (x_1x_3 - x_2^2) \in J \\ x_0x_4 - x_2^2 &= (x_0x_4 - x_1x_3) + (x_1x_3 - x_2^2) \in I, \end{aligned}$$

temos que  $I = J$ , ou seja, os menores  $2 \times 2(M) =$  menores  $2 \times 2(N)$ .

Assim, segue que

$$C_4 = \{N \in \mathbb{P}^4 | \text{posto}(N) = 1\}.$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} \text{Sec}_2 C_4 &= \{N_1 + N_2 \in \mathbb{P}^4 | \text{posto}(N_1) = \text{posto}(N_2) = 1\} \\ &= \{N \in \mathbb{P}^4 | \text{posto}(N) \leq 2\} \\ &= \mathbf{V}(\det(N)) \\ &= \mathbf{V}(x_0x_2x_4 + 2x_1x_2x_3 - x_2^3 - x_0x_3^2 - x_1^2x_4). \end{aligned}$$

Assim,  $x_0x_2x_4 + 2x_1x_2x_3 - x_2^3 - x_0x_3^2 - x_1^2x_4 = 0$  é uma cúbica que é singular nos 7 pontos gerais, pois os 7 pontos estão contidos em  $C_4$  e, Pela Proposição 6.1,  $C_4 \subset \text{Sing}(\text{Sec}_2 C_4)$ . Logo, pela relação apresentada no Capítulo 9, o sistema linear  $\mathcal{L}_{4,3}(2^7)$  é não vazio. Porém,

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}_{4,3}(2^7)) &= \binom{4+3}{4} - 1 - 5.7 \\ &= 35 - 1 - 35 \\ &= -1, \end{aligned}$$

então o sistema linear  $\mathcal{L}_{4,3}(2^7)$  é especial. Portanto, a variedade de Veronese  $V_3^4$  é 7-defeituosa.

## Casos Não Especiais

**Cúbicas em  $\mathbb{P}^2$ :** Mostramos no Exemplo 6.7, que a variedade de Veronese  $V_3^2$  não é defeituosa.

**Cúbicas em  $\mathbb{P}^3$ :** Mostremos que a variedade de Veronese  $V_3^3$  não é defeituosa usando a técnica apresentada no Capítulo 7. Tome a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma : (k^*)^3 &\rightarrow V_3^3 \cap U_0 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (1, x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2, x_1^3, \dots, x_3^3). \end{aligned}$$

Dessa forma, o polítopo relacionado é

$$M = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 2, 0), \dots, (0, 0, 3)\},$$

com 20 pontos.

Tome  $v_1 = (0, 0, 1)$ ,  $v_2 = (0, 1, 0)$ ,  $v_3 = (1, 0, 0)$ ,  $v_4 = (1, 0, 1)$  e  $v_5 = (1, 0, 0)$ , segue que  $v_1$  separa o simplexo  $\Delta_1 = \{(0, 0, 3), (0, 0, 2), (1, 0, 2), (0, 1, 2)\}$  de  $M$ ,  $v_2$  separa o simplexo  $\Delta_2 = \{(0, 3, 0), (0, 2, 0), (1, 2, 0), (0, 2, 1)\}$  de  $M - \Delta_1$ ,  $v_3$  separa o simplexo  $\Delta_3 = \{(3, 0, 0), (2, 0, 0), (2, 1, 0), (2, 0, 1)\}$  de  $M - (\Delta_1 \cup \Delta_2)$ ,  $v_4$  separa o simplexo

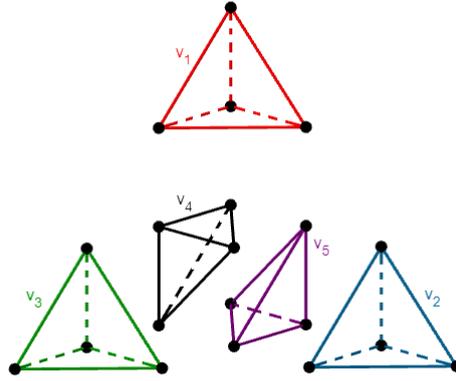


Figura 12.1: Polítopo associado a  $V_3^3$ .

$\Delta_4 = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$  de  $M - (\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3)$  e  $v_5$  separa o simplexo  $\Delta_5 = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$  de  $M - (\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4)$ :

Como  $M - (\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4 \cup \Delta_5)$  é vazio, pelo Teorema 7.2, a variedade  $V_3^3$  não é defeituosa.

**Cúbicas em  $\mathbb{P}^n$ , para  $n \geq 5$ :** Não faremos aqui a prova geral, que pode ser vista na Seção 5 do artigo [9], que usa uma versão mais sofisticada da degeneração que iremos apresentar no Capítulo 14. Porém, com o algoritmo apresentado no Capítulo 7 podemos verificar para  $n = 5, 6, 7$ .

```

QNDefeituosas[{{5}, {3}}, {{6}, {3}}, {{7}, {3}}, 15]
Saída: {{5}, {3}}, {{7}, {3}}, {{6}, {3}}
Time: 926.1410 segundos

```

## 13 Vários Pontos Duplos e um Ponto Múltiplo

Neste capítulo vamos provar que o sistema linear  $\mathcal{L}_{n,d}(d-1, 2^h)$  é não especial para uma determinada cota superior de  $h$ , para isso usaremos como referência [9] e [15].

Para provar os resultados a seguir será usada uma versão alternativa, mas montada de forma similar, à sequência exata de Castelnuovo, apresentada no Capítulo 11.

Primeiro, considere o seguinte lema

**Lema 13.1** Seja  $x \in \mathbb{R}$ . Valem as seguintes relações:

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

onde  $\lfloor x \rfloor$  é o piso de  $x$  e  $\lceil x \rceil$  é o teto de  $x$ .

*Demonstração:* As relações  $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$  vem das definições de piso e teto.

Mostremos que  $\lceil x \rceil < x + 1$ . Suponha, por absurdo, que  $\lceil x \rceil \geq x + 1$ . Observe que

$$\lceil x \rceil + 1 = \lceil x + 1 \rceil \geq x + 1.$$

Logo,  $\lceil x \rceil + 1 - \lceil x \rceil \leq x + 1 - (x + 1)$ , então  $1 \leq 0$ , absurdo! Portanto,  $\lceil x \rceil < x + 1$ .

Prova-se de maneira análoga que  $x - 1 < \lfloor x \rfloor$ . ■

Tome a aplicação  $h$  de  $\mathbb{N}$  em  $\mathbb{N}$ , definida da seguinte maneira

$$h(d) = \left\lfloor \frac{2d+1}{3} \right\rfloor. \quad (13.1)$$

**Observação 13.1** Afirmamos que  $h(d-1) \geq h(d) - 1$ . De fato, usando as relações do Lema 13.1, temos que

$$\begin{aligned} h(d-1) - h(d) + 1 &= \left\lfloor \frac{2d-1}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2d+1}{3} \right\rfloor + 1 \\ &> \frac{2d-1}{3} - 1 - \frac{2d+1}{3} + 1 \\ &= -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Assim,  $h(d-1) - h(d) + 1 \geq 0$  e, portanto,  $h(d-1) \geq h(d) - 1$ .

**Lema 13.2** O sistema linear  $\mathcal{L}_{2,d}(d-1, 2^{h(d)})$  é não especial, para  $d \geq 3$ .

*Demonstração:* Vamos provar usando indução em  $d$ . Para  $d = 3$ , temos pelo Exemplo 6.7 que o sistema linear  $\mathcal{L}_{2,3}(3-1, 2^{h(3)}) = \mathcal{L}_{2,3}(2^3)$  é não especial e não vazio.

Antes de continuarmos com a indução, calculemos a dimensão virtual do sistema  $\mathcal{L}_{2,d}(d-1, 2^{h(d)})$ , isto é

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}_{2,d}(d-1, 2^{h(d)})) &= \binom{d+2}{2} - 1 - \binom{d}{2} - 3h(d) \\ &= \frac{(d+2)(d+1)}{2} - 1 - \frac{d(d-1)}{2} - 3h(d) \\ &= 2d - 3h(d). \end{aligned}$$

Agora, considere o esquema  $Z = \{(d-1)R, 2P_1\}$  que é a união de um ponto  $(d-1)$ -uplo e um ponto duplo. Seja  $\pi \subset \mathbb{P}^n$  um hiperplano contendo o suporte de  $Z$ , como  $n = 2$  observe que  $\pi$  é a reta projetiva que conecta os pontos  $R$  e  $P_1$ . Dito isso, podemos montar a seguinte sequência exata de restrição (para mais detalhes, ver Seção 11.2 do Capítulo 11)

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{2,d-1}(d-2, 2^{h(d)-1}, 1) \longrightarrow \mathcal{L}_{2,d}(d-1, 2^{h(d)}) \longrightarrow \mathcal{L}_{2,d}(d-1, 2^{h(d)})|_{\pi} \subset \mathcal{L}_{1,d}(d-1, 2).$$

Logo,

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{2,d-1}(d-2, 2^{h(d)-1}, 1) \longrightarrow \mathcal{L}_{2,d}(d-1, 2^{h(d)}) \longrightarrow \mathcal{L}_{1,d}(d-1, 2),$$

é uma sequência exata.

O sistema linear  $\mathcal{L}_{1,d}(d-1, 2)$  é não especial e vazio. De fato, pois  $\mathcal{L}_{1,d}(d-1) = \{axy^{d-1} + by^d | (a : b) \in \mathbb{P}^1\}$ , ou seja,  $\dim(\mathcal{L}_{1,d}(d-1)) = 1$  e

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}_{1,d}(d-1)) &= \binom{d+1}{d} - 1 - \binom{d-1}{1} \\ &= (d+1) - 1 - (d-1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Assim, o sistema linear  $\mathcal{L}_{1,d}(d-1, 2)$  é vazio.

Por indução em  $d$ , o sistema linear  $\mathcal{L}_{2,d-1}(d-2, 2^{h(d-1)})$  é não especial. Então, pela Observação 13.1, o sistema linear  $\mathcal{L}_{2,d-1}(d-2, 2^{h(d)-1})$  é não especial. Como vimos, na Proposição 9.1, um ponto simples sempre impõe uma condição independente ao sistema e, assim, o sistema linear  $\mathcal{L}_{2,d-1}(d-2, 2^{h(d)-1}, 1)$  é não especial.

Agora, calculemos  $v(\mathcal{L}_{2,d-1}(d-2, 2^{h(d)-1}, 1))$ , para isso, observe que 1 ponto  $(d-2)$ -uplo impõe  $\binom{d-1}{2}$  condições,  $h(d)-1$  pontos duplos impõem  $3(\lfloor (2d+1)/3 \rfloor - 1)$  condições e 1 ponto simples impõe uma condição e, assim, usando as desigualdades do Lema 13.1, segue que

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}_{2,d-1}(d-2, 2^{h(d)-1}, 1)) &= \binom{d+1}{2} - 1 - \binom{d-1}{2} - 3 \left( \left\lfloor \frac{2d+1}{3} \right\rfloor - 1 \right) - 1 \\ &= \frac{d(d+1)}{2} - \frac{(d-1)(d-2)}{2} - 3 \left\lfloor \frac{2d+1}{3} \right\rfloor + 1 \\ &\geq (2d-1) - 3 \left( \frac{2d+1}{3} \right) + 1 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Como o sistema  $\mathcal{L}_{2,d-1}(d-2, 2^{h(d)-1}, 1)$  é não especial e  $v(\mathcal{L}_{2,d-1}(d-2, 2^{h(d)-1}, 1)) \geq -1$ , então  $l(\mathcal{L}_{2,d-1}(d-2, 2^{h(d)-1}, 1)) = v(\mathcal{L}_{2,d-1}(d-2, 2^{h(d)-1}, 1))$ . Assim, pela Proposição 11.1, segue que

$$\begin{aligned} l(\mathcal{L}_{2,d}(d-1, 2^{h(d)})) &= l(\mathcal{L}_{2,d-1}(d-2, 2^{h(d)-1}, 1)) + l(\mathcal{L}_{1,d}(d-1, 2)) + 1 \\ &= \left( \binom{d+1}{2} - 1 - \binom{d-1}{2} - 3(h(d)-1) \right) + (-1) + 1 \\ &= \binom{d+1}{2} - 1 - \binom{d-1}{2} - 3(h(d)-1) - 1 \\ &= 2d - 3h(d) \\ &= v(\mathcal{L}_{2,d}(d-1, 2^{h(d)})). \end{aligned}$$

Portanto, o sistema linear  $\mathcal{L}_{2,d}(d-1, 2^{h(d)})$  é não especial. ■

Tome a aplicação  $h'$  de  $\mathbb{N}$  em  $\mathbb{N}$ , definida da seguinte maneira

$$h'(n) = \left\lceil \frac{1}{n+1} \binom{n+4}{4} \right\rceil - n - 1. \quad (13.2)$$

**Observação 13.2**  $h'(n)$  é crescente. De fato, usando as relações do Lema 13.1, temos que

$$\begin{aligned} h'(n+1) - h'(n) &= \left\lceil \frac{1}{n+2} \binom{n+5}{4} \right\rceil - n - 2 - \left( \left\lceil \frac{1}{n+1} \binom{n+4}{4} \right\rceil - n - 1 \right) \\ &> \frac{1}{n+2} \binom{n+5}{4} - n - 2 - \left( \frac{1}{n+1} \binom{n+4}{4} - n \right) \\ &= (n+5)(n+4)(n+3) - (n+4)(n+3)(n+2) - 2 \\ &= (n+4)(n+3)((n+5) - (n+2)) - 2 \\ &= 3(n+4)(n+3) - 2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Logo,  $h'(n+1) > h'(n)$  para  $n > 0$ .

**Lema 13.3** Seja  $n \geq 2$ . O sistema linear  $\mathcal{L}_{n,4}(3, 2^h)$ , com  $h \leq h'(n)$ , é não especial.

*Demonstração:* Vamos provar por indução em  $n$ . Para  $n = 2$ , temos que o sistema linear  $\mathcal{L}_{2,4}(3, 2^{h'(2)}) = \mathcal{L}_{2,4}(3, 2^2)$  é não especial, pelo Lema 13.2.

Agora, tome  $\pi \subset \mathbb{P}^n$  um hiperplano contendo os pontos gerais  $R, P_1, \dots, P_{h'(n-1)}$ , considere o esquema  $Z = \{3R, 2P_1, \dots, 2P_{h'(n-1)}\}$  que é a união de um ponto triplo e  $h'(n-1)$  pontos duplos. Dito isso, podemos montar a seguinte sequência exata de restrição (Para mais detalhes, ver Seção 11.2 do Capítulo 11)

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{n,3}(2^{1+h'(n)-h'(n-1)}, 1^{h'(n-1)}) \longrightarrow \mathcal{L}_{n,4}(3, 2^{h'(n)}) \longrightarrow \mathcal{L}_{n,4}(3, 2^{h'(n)})|_{\pi} \subset \mathcal{L}_{n-1,4}(3, 2^{h'(n-1)}).$$

Logo,

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{n,3}(2^{1+h'(n)-h'(n-1)}, 1^{h'(n-1)}) \longrightarrow \mathcal{L}_{n,4}(3, 2^{h'(n)}) \longrightarrow \mathcal{L}_{n-1,4}(3, 2^{h'(n-1)}).$$

Por indução em  $n$  o sistema linear  $\mathcal{L}_{n-1,4}(3, 2^{h'(n-1)})$  é não especial. Como 1 ponto triplo impõe  $\binom{n+1}{2}$  condições e  $h'(n-1)$  pontos duplos impõem  $n(\lceil (1/n)\binom{n+3}{4} \rceil - n)$  e, assim, usando as desigualdades do Lema 13.1, segue que

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}_{n-1,4}(3, 2^{h'(n-1)})) &= \binom{n+3}{4} - 1 - \binom{n+1}{2} - n \left( \left\lceil \frac{1}{n} \binom{n+3}{4} \right\rceil - n \right) \\ &> \binom{n+3}{4} - 1 - \binom{n+1}{2} + n^2 - \binom{n+3}{4} - n \\ &= \frac{n^2 - 3n - 2}{2} \\ &\geq -1, \forall n \geq 3. \end{aligned}$$

Agora, pelo Capítulo 12, o sistema linear  $\mathcal{L}_{n,3}(2^{1+h'(n)-h'(n-1)}, 1^{h'(n-1)})$  é não especial. Calculemos a dimensão virtual

$$\begin{aligned}
v(\mathcal{L}_{n,3}(2^{1+h'(n)-h'(n-1)}, 1^{h'(n-1)})) &= \binom{n+3}{3} - 1 - (n+1)(h'(n)+1) + nh'(n-1) \\
&\geq \binom{n+3}{3} - 1 - \binom{n+4}{4} + n^2 + \binom{n+3}{4} - n^2 \\
&= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} - 1 - \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Como o sistema  $\mathcal{L}_{n,3}(2^{1+h'(n)-h'(n-1)}, 1^{h'(n-1)})$  é não especial e não vazio, então pela Proposição 11.6  $h^1(\mathcal{L}_{n,3}(2^{1+h'(n)-h'(n-1)}, 1^{h'(n-1)})) = 0$ . Assim, pela Proposição 11.2, segue que

$$\begin{aligned}
l(\mathcal{L}_{n,4}(3, 2^{h'(n)})) &= l(\mathcal{L}_{n,3}(2^{1+h'(n)-h'(n-1)}, 1^{h'(n-1)})) + l(\mathcal{L}_{n-1,4}(3, 2^{h'(n-1)})) + 1 \\
&= v(\mathcal{L}_{n,3}(2^{1+h'(n)-h'(n-1)}, 1^{h'(n-1)})) + v(\mathcal{L}_{n-1,4}(3, 2^{h'(n-1)})) + 1 \\
&= \binom{n+3}{3} - (n+1)(h'(n)+1) + \binom{n+3}{4} - 1 - \binom{n+1}{2} \\
&= \binom{n+3}{3} + \binom{n+3}{4} - 1 - (n+1) - \binom{n+1}{2} - (n+1)h'(n) \\
&= \binom{n+4}{4} - 1 - \binom{n+2}{2} - (n+1)h'(n) \\
&= v(\mathcal{L}_{n,4}(3, 2^{h'(n)})).
\end{aligned}$$

Portanto, o sistema linear  $\mathcal{L}_{n,4}(3, 2^{h'(n)})$  é não especial. ■

Tome a aplicação  $h''$  de  $\mathbb{N}$  em  $\mathbb{N}$ , definida da seguinte maneira

$$h''(d) = \left\lfloor \frac{d^2 + 2d - 3}{4} \right\rfloor. \quad (13.3)$$

**Observação 13.3** Afirmamos que  $h''(d) - h(d) \leq h''(d-1)$ , para todo  $d \geq 5$ . De fato, usando as relações do Lema 13.1, temos que

$$\begin{aligned}
h''(d) - h(d) - h''(d-1) &= \left\lfloor \frac{d^2 + 2d - 3}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2d+1}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(d-1)^2 + 2(d-1) - 3}{4} \right\rfloor \\
&< \frac{d^2 + 2d - 3}{4} - \frac{2d+1}{3} + 1 - \left\lfloor \frac{(d-1)^2 + 2(d-1) - 3}{4} \right\rfloor \\
&< \frac{d^2 + 2d - 3}{4} - \frac{2d+1}{3} + 1 - \frac{(d-1)^2 + 2(d-1) - 3}{4} + 1 \\
&= \frac{2d+1}{4} - \frac{2d+1}{3} + 2 \\
&= \frac{23 - 2d}{12} \\
&< 0, \forall d \geq 12,
\end{aligned}$$

logo, temos que  $h''(d) - h(d) \leq h''(d-1)$ , para todo  $d \geq 12$ . Assim, falta mostrar que a desigualdade vale para  $5 \leq d \leq 11$ , isto é

- **d=5:** Temos que  $h''(d) = 8$ ,  $h''(d-1) = 5$  e  $h(d) = 3$ , vale a desigualdade;
- **d=6:** Temos que  $h''(d) = 11$ ,  $h''(d-1) = 8$  e  $h(d) = 4$ , vale a desigualdade;
- **d=7:** Temos que  $h''(d) = 15$ ,  $h''(d-1) = 11$  e  $h(d) = 5$ , vale a desigualdade;
- **d=8:** Temos que  $h''(d) = 19$ ,  $h''(d-1) = 15$  e  $h(d) = 5$ , vale a desigualdade;
- **d=9:** Temos que  $h''(d) = 24$ ,  $h''(d-1) = 19$  e  $h(d) = 6$ , vale a desigualdade;
- **d=10:** Temos que  $h''(d) = 29$ ,  $h''(d-1) = 24$  e  $h(d) = 7$ , vale a desigualdade;
- **d=11:** Temos que  $h''(d) = 35$ ,  $h''(d-1) = 29$  e  $h(d) = 7$ , vale a desigualdade.

Portanto,  $h''(d) - h(d) \leq h''(d-1)$ , para todo  $d \geq 5$ .

**Lema 13.4** Sejam  $d \geq 4$  e  $h \leq h''(d)$ . O sistema linear  $\mathcal{L}_{3,d}(d-1, 2^h)$  é não especial.

*Demonstração:* Vamos provar por indução em  $d$ . Observe que o sistema linear  $\mathcal{L}_{3,4}(4-1, 2^{h''(4)}) = \mathcal{L}_{3,4}(3, 2^5)$  é não especial, pelo Lema 13.3.

Agora, tome  $\pi \subset \mathbb{P}^n$  um hiperplano contendo os pontos gerais  $R, P_1, \dots, P_{h(d)}$ , considere o esquema  $Z = \{(d-1)R, 2P_1, \dots, 2P_{h(d)}\}$  que é a união de um ponto  $(d-1)$ -uplo e  $h(d)$  pontos duplos. Dito isso, podemos montar a seguinte sequência exata de restrição (para mais detalhes, ver Seção 11.2 do Capítulo 11)

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{3,d-1}(d-2, 2^{h''(d)-h(d)}, 1^{h(d)}) \longrightarrow \mathcal{L}_{3,d}(d-1, 2^{h''(d)}) \longrightarrow \mathcal{L}_{3,d}(d-1, 2^{h''(d)})|_{\pi} \subset \mathcal{L}_{2,d}(d-1, 2^{h(d)}).$$

Logo,

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{3,d-1}(d-2, 2^{h''(d)-h(d)}, 1^{h(d)}) \longrightarrow \mathcal{L}_{3,d}(d-1, 2^{h''(d)}) \longrightarrow \mathcal{L}_{2,d}(d-1, 2^{h(d)}).$$

Pelo Lema 13.2, o sistema linear  $\mathcal{L}_{2,d}(d-1, 2^{h(d)})$  é não especial e  $l(\mathcal{L}_{2,d}(d-1, 2^{h(d)})) = v(\mathcal{L}_{2,d}(d-1, 2^{h(d)}))$ .

Por indução em  $d$ , temos que o sistema  $\mathcal{L}_{3,d-1}(d-2, 2^{h''(d-1)})$  é não especial. Logo, pela Observação 13.3, o sistema  $\mathcal{L}_{3,d-1}(d-2, 2^{h''(d)-h(d)})$  é não especial e, assim, pelo Teorema 9.1, o sistema  $\mathcal{L}_{3,d-1}(d-2, 2^{h''(d)-h(d)}, 1^{h(d)})$  é não especial. Usando as relações do Lema 13.1, temos que

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}_{3,d-1}(d-2, 2^{h''(d)-h(d)}, 1^{h(d)})) &= \binom{d+2}{3} - 1 - \binom{d}{3} - 4 \left\lfloor \frac{d^2 + 2d - 3}{4} \right\rfloor + 3 \left\lfloor \frac{2d+1}{3} \right\rfloor \\ &> \frac{(d+2)(d+1)d}{6} - 1 - \frac{d(d-1)(d-2)}{6} - d^2 + 1 \\ &= \frac{d}{6}6d - d^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{L}_{3,d-1}(d-2, 2^{h''(d)-h(d)}, 1^{h(d)})$  é não especial e não vazio, então pela Proposição 11.6 temos que  $h^1(\mathcal{L}_{3,d-1}(d-2, 2^{h''(d)-h(d)}, 1^{h(d)})) = 0$ . Assim, pela Proposição 11.2, segue

que

$$\begin{aligned}
l(\mathcal{L}_{3,d}(d-1, 2^{h''(d)})) &= l(\mathcal{L}_{3,d-1}(d-2, 2^{h''(d)-h(d)}, 1^{h(d)})) + l(\mathcal{L}_{2,d}(d-1, 2^{h(d)})) + 1 \\
&= v(\mathcal{L}_{3,d-1}(d-2, 2^{h''(d)-h(d)}, 1^{h(d)})) + v(\mathcal{L}_{2,d}(d-1, 2^{h(d)})) + 1 \\
&= \binom{d+2}{3} - \binom{d}{3} - 4h''(d) + 3h(d) + \binom{d+2}{2} - 1 - \binom{d}{2} - 3h(d) \\
&= \binom{d+2}{3} + \binom{d+2}{2} - 1 - \binom{d}{3} - \binom{d}{2} - 4h''(d) \\
&= \binom{d+3}{3} - 1 - \binom{d+1}{3} - 4h''(d) \\
&= v(\mathcal{L}_{3,d}(d-1, 2^{h''(d)})).
\end{aligned}$$

Portanto, o sistema linear  $\mathcal{L}_{3,d}(d-1, 2^{h''(d)})$  é não especial. ■

O lema a seguir servirá para mostrar na próxima proposição (Proposição 13.9) a desigualdade desejada. Cabe destacar que esse mesmo lema será útil no Capítulo 16.

**Lema 13.5** Seja

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R} \\
(n, d) &\mapsto \varphi(n, d)
\end{aligned}$$

uma função com as seguintes propriedades:

- (a) ao fixar  $n$ , temos que  $\varphi$  é um polinômio em  $\mathbb{R}[d]$  de grau  $g$  (note que  $g$  depende de  $n$ );
- (b) para cada  $n \geq 2$ , existem  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_g \in \mathbb{R}$ , tais que  $\varphi(n, \alpha_j) = \alpha$  para  $j = 1, 2, \dots, g$ ;
- (c)  $\lim_{d \rightarrow \infty} \varphi(n, d) = \infty$  (ou seja, o coeficiente de  $d^g$  é maior que 0).

Seja  $\beta = \beta(n) > \alpha_g$  tal que  $\varphi(n, \beta) > 0$ , então  $\varphi(n, d) > 0$  para todo  $d > \beta$ .

*Demonstração:* Se fixarmos  $n$ , temos que  $\varphi(n, d)$  é um polinômio em  $\mathbb{R}[d]$  de grau  $g$ . Mais ainda, existem  $\alpha, \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_g$  com as propriedades desejadas, isso implica que o polinômio  $\varphi(n, d)$  tem  $g-1$  pontos extremais entre  $\alpha_1$  e  $\alpha_g$ . Como um polinômio de grau  $g$  tem no máximo  $g-1$  pontos extremais, implica que  $\varphi(n, d)$  é crescente para  $d > \alpha_g$ , pois  $\lim_{d \rightarrow \infty} \varphi(n, d) = \infty$ . Por fim, como  $\beta > \alpha_g$  e  $\varphi(n, \beta) > 0$ , segue que  $\varphi(n, d) > 0$  para  $d > \beta$ . ■

Defina a aplicação

$$h(n, d) := \left[ \frac{1}{n+1} \binom{n+d}{n} - \frac{1}{n+1} \binom{n+d-2}{n} \right] - (n-2). \quad (13.4)$$

**Observação 13.4** Definindo  $f(n, d) = h(n, d-1) + h(n-1, d) - h(n, d)$ , vale a seguinte desigualdade

$$f(n, d) > \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \left( \binom{n+d-3}{n-1} - \binom{n+d-1}{n-1} \right) - n + 1.$$

De fato, usando as relações do Lema 13.1, temos que

$$\begin{aligned}
f(n, d) &= \left[ \frac{1}{n+1} \binom{n+d-1}{n} - \frac{1}{n+1} \binom{n+d-3}{n} \right] + \left[ \frac{1}{n} \binom{n-1+d}{n-1} - \frac{1}{n} \binom{n+d-3}{n-1} \right] + \\
&\quad - \left[ \frac{1}{n+1} \binom{n+d}{n} - \frac{1}{n+1} \binom{n+d-2}{n} \right] - n + 3 \\
&> \frac{1}{n+1} \binom{n+d-1}{n} - \frac{1}{n+1} \binom{n+d-3}{n} + \frac{1}{n} \binom{n-1+d}{n-1} - \frac{1}{n} \binom{n+d-3}{n-1} + \\
&\quad - \frac{1}{n+1} \binom{n+d}{n} + \frac{1}{n+1} \binom{n+d-2}{n} - n + 1 \\
&= -\frac{1}{n+1} \binom{n+d-1}{n-1} + \frac{1}{n+1} \binom{n+d-3}{n-1} + \frac{1}{n} \binom{n-1+d}{n-1} - \frac{1}{n} \binom{n+d-3}{n-1} + \\
&\quad - n + 1 \\
&= \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \binom{n+d-3}{n-1} - \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \binom{n+d-1}{n-1} - n + 1 \\
&= \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \left( \binom{n+d-3}{n-1} - \binom{n+d-1}{n-1} \right) - n + 1.
\end{aligned}$$

**Lema 13.6**  $h(4, d) - h(3, d) \leq h(4, d-1)$ , vale para todo  $d \geq 5$ .

*Demonstração:* Defindo  $f(d) = h(4, d-1) + h(3, d) - h(4, d)$ , pela Observação 13.4, temos que

$$\begin{aligned}
f(d) &> \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \right) \left( \binom{d+1}{3} - \binom{d+3}{3} \right) - 3 \\
&= -\frac{1}{20} \left( \frac{(d+1)d(d-1)}{6} - \frac{(d+3)(d+2)(d+1)}{6} \right) - 3 \\
&= -\frac{1}{20} \left( \frac{-6d^2 - 12d - 6}{6} \right) - 3 \\
&= \frac{d^2 + 2d - 59}{20} > 0, \forall d \geq 7.
\end{aligned}$$

Falta mostrar que a desigualdade vale para  $d = 5, 6$ , isto é

- **d=5:** Temos que  $h(4, d) = 16$ ,  $h(3, d) = 8$  e  $h(4, d-1) = 9$ , vale a desigualdade;
- **d=6:** Temos que  $h(4, d) = 26$ ,  $h(3, d) = 11$  e  $h(4, d-1) = 16$ , vale a desigualdade.

Portanto,  $h(4, d) - h(3, d) \leq h(4, d-1)$ , para todo  $d \geq 5$ . ■

**Lema 13.7**  $h(5, d) - h(4, d) \leq h(5, d-1)$ , vale para todo  $d \geq 5$ .

*Demonstração:* Defindo  $f(d) = h(5, d-1) + h(4, d) - h(5, d)$ , pela Observação 13.4, temos

que

$$\begin{aligned}
f(d) &> \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5}\right) \left(\binom{d+2}{4} - \binom{d+4}{4}\right) - 4 \\
&= -\frac{1}{30} \left(\frac{(d+2)(d+1)d(d-1)}{4!} - \frac{(d+4)(d+3)(d+2)(d+1)}{4!}\right) - 4 \\
&= -\frac{1}{30} \frac{-8d^3 - 36d^2 - 52d - 24}{4!} - 4 \\
&= \frac{2d^3 + 9d^2 + 13d + 6}{180} - 4 \\
&= \frac{2d^3 + 9d^2 + 13d - 714}{180} > 0, \forall d \geq 6.
\end{aligned}$$

Falta mostrar que a desigualdade vale para  $d = 5$ . Para  $d = 5$ , temos que  $h(5, d) = 29$ ,  $h(4, d) = 16$  e  $h(5, d-1) = 14$ , vale a desigualdade. Portanto,  $h(5, d) - h(4, d) \leq h(5, d-1)$ , para todo  $d \geq 5$ . ■

**Lema 13.8**  $h(6, d) - h(5, d) \leq h(6, d-1)$ , vale para todo  $d \geq 5$ .

*Demonstração:* Defindo  $f(d) = h(6, d-1) + h(5, d) - h(6, d)$ , pela Observação 13.4, temos que

$$\begin{aligned}
f(d) &> \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{6}\right) \left(\binom{d+3}{5} - \binom{d+5}{5}\right) - 5 \\
&= -\frac{1}{42} \left(\frac{(d+3)(d+2)(d+1)d(d-1)}{5!} - \frac{(d+5)(d+4)(d+3)(d+2)(d+1)}{5!}\right) - 5 \\
&= -\frac{1}{42} \frac{-10d^4 - 80d^3 - 230d^2 - 280d - 120}{5!} - 5 \\
&= \frac{10d^4 + 80d^3 + 230d^2 + 280d - 25080}{5040} \\
&= \frac{d^4 + 8d^3 + 23d^2 + 28d - 2508}{504} > 0, \forall d \geq 6.
\end{aligned}$$

Falta mostrar que a desigualdade vale para  $d = 5$ . Para  $d = 5$ , Temos que  $h(6, d) = 50$ ,  $h(5, d) = 29$  e  $h(6, d-1) = 22$ , vale a desigualdade. Portanto,  $h(6, d) - h(5, d) \leq h(6, d-1)$ , para todo  $d \geq 5$ . ■

**Proposição 13.9**  $h(n, d) - h(n-1, d) \leq h(n, d-1)$ , para todo  $n \geq 4$  e  $d \geq 5$ .

*Demonstração:* De fato, defina  $f(n, d) = h(n, d-1) + h(n-1, d) - h(n, d)$ , pela Observação

13.4, temos que

$$\begin{aligned}
f(n, d) &> \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \left( \binom{n+d-3}{n-1} - \binom{n+d-1}{n-1} \right) - n + 1 \\
&= -\frac{1}{(n+1)!} ((d-1) \dots (d+(n-3)) - (d+1) \dots (d+(n-1))) - n + 1 \\
&= -\frac{1}{(n+1)!} (d+1) \dots (d+(n-3))(d(d-1) - (d+(n-2))(d+(n-1))) - n + 1 \\
&= \frac{1}{(n+1)!} (d+1) \dots (d+(n-3))(2d+n-2)(n-1) - n + 1 \\
&:= \varphi(n, d).
\end{aligned}$$

Fixando  $n$ , temos que  $\varphi(n, d)$  é um polinômio em  $\mathbb{R}[d]$  de grau  $n-2$  e com coeficiente de  $d^{n-2}$  positivo. Se tomarmos  $\alpha = -(n-1)$  e  $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2, \dots, \alpha_{n-3} = -(n-3), \alpha_{n-2} = -(n/2-1)$ , segue que  $\varphi(n, \alpha_j) = \alpha$ . Agora, seja  $\beta = 5$ , logo

$$\begin{aligned}
\varphi(n, \beta) &= \frac{1}{(n+1)!} (n+2)(n+1)n \dots 6.(n+8)(n-1) - n + 1 \\
&= \frac{1}{5!} (n+2)(n+8)(n-1) - n + 1 \\
&= \frac{1}{5!} (n^3 + 9n^2 + 6n - 16) - n + 1 \\
&= \frac{n^3 + 9n^2 - 114n + 104}{5!} > 0, \forall n \geq 7.
\end{aligned}$$

Dessa forma, pelo Lema 13.5, temos que  $f(n, d) > \varphi(n, d) \geq 0$  para todo  $n \geq 7$  e  $d \geq 5$ , aliando esse fato aos Lemas 13.6, 13.7 e 13.8, concluímos a demonstração. ■

**Observação 13.5** Afirmamos que  $h(3, d) = h''(d)$ . De fato,

$$\begin{aligned}
h(3, d) &= \left[ \frac{1}{3+1} \binom{3+d}{3} - \frac{1}{3+1} \binom{3+d-2}{3} \right] - (3-2) \\
&= \left[ \frac{1}{4} \binom{d+3}{3} - \frac{1}{4} \binom{d+1}{3} \right] - 1 \\
&= \left[ \frac{1}{4} \frac{(d+3)(d+2)(d+1)}{3!} - \frac{1}{4} \frac{(d+1)d(d-1)}{3!} \right] - 1 \\
&= \left[ \frac{1}{4} \frac{(d+1)(d^2 + 5d + 6 - d^2 + d)}{3!} \right] - 1 \\
&= \left[ \frac{1}{4} \frac{6d^2 + 12d + 6}{6} \right] - 1 \\
&= \left[ \frac{d^2 + 2d - 3}{4} \right] \\
&= h''(d).
\end{aligned}$$

**Observação 13.6** Afirmamos que  $h(n, 4) \leq h'(n)$ , para todo  $n \geq 3$ . De fato, usando as

relações do Lema 13.1, temos que

$$\begin{aligned}
h'(n) - h(n, 4) &= \left\lceil \frac{1}{n+1} \binom{n+4}{4} \right\rceil - n - 1 - \left\lfloor \frac{1}{n+1} \binom{n+4}{n} - \frac{1}{n+1} \binom{n+2}{n} \right\rfloor + n - 2 \\
&> \frac{1}{n+1} \binom{n+4}{4} - \frac{1}{n+1} \binom{n+4}{n} + \frac{1}{n+1} \binom{n+2}{n} - 2 \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{(n+2)(n+1)}{2} - 2 \\
&= \frac{n+2}{2} - 1 \\
&> \frac{3}{2}, \forall n \geq 3.
\end{aligned}$$

**Proposição 13.10** O sistema linear  $\mathcal{L}_{n,d}(d-1, 2^h)$ , com  $h \leq h(n, d)$ ,  $d \geq 4$  e  $n \geq 3$ , é não especial.

*Demonstração:* Vamos provar por indução em  $d$  e em  $n$ . Pela Observação 13.5, temos que  $h(3, d) = h''(d)$  e, assim, pelo Lema 13.4 o sistema linear  $\mathcal{L}_{3,d}(d-1, 2^{h(3,d)})$  é não especial, sendo esse o passo base da indução em  $n$ . Agora, pela Observação 13.6, temos que  $h(n, 4) \leq h'(n)$  e, assim, pelo Lema 13.3 o sistema linear  $\mathcal{L}_{n,4}(3, 2^{h(n,4)})$  é não especial, sendo esse o passo base da indução em  $d$ .

Seja  $\pi \subset \mathbb{P}^n$  um hiperplano contendo os pontos gerais  $R, P_1, \dots, P_{h(n-1,d)}$ , considere o esquema  $Z = \{(d-1)R, 2P_1, \dots, 2P_{h(n-1,d)}\}$  que é a união de um ponto  $(d-1)$ -uplo e  $h(n-1, d)$  pontos duplos. Dito isso, podemos montar a seguinte sequência exata de restrição (para mais detalhes, ver Seção 11.2 do Capítulo 11)

$$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{L}_{n,d}(d-1, 2^{h(n,d)}) \longrightarrow \mathcal{L}|_{\pi},$$

onde  $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_{n,d-1}(d-2, 2^{h(n,d)-h(n-1,d)}, 1^{h(n-1,d)})$  e  $\mathcal{L}|_{\pi} = \mathcal{L}_{n-1,d}(d-1, 2^{h(n-1,d)})$ .

O sistema  $\mathcal{L}|_{\pi}$  é não especial por indução em  $n$ . Usando as relações do Lema 13.1, temos que

$$\begin{aligned}
v(\mathcal{L}|_{\pi}) &= \binom{n-1+d}{n-1} - 1 - \binom{n+d-3}{n-1} - nh(n-1, d) \\
&\geq \binom{n-1+d}{n-1} - 1 - \binom{n+d-3}{n-1} + n^2 - 3n - \binom{n-1+d}{n-1} + \binom{n+d-3}{n-1} \\
&= n^2 - 3n - 1 \\
&\geq 0, \forall n \geq 4.
\end{aligned}$$

Por indução em  $d$ , o sistema  $\mathcal{L}_{n,d-1}(d-2, 2^{h(n,d-1)})$  é não especial. Logo, pela Proposição 13.9, o sistema  $\mathcal{L}_{n,d-1}(d-2, 2^{h(n,d)-h(n-1,d)})$  é não especial e, assim, pelo Teorema

9.1 o sistema  $\hat{\mathcal{L}}$  é não especial. Usando as relações do Lema 13.1, temos que

$$\begin{aligned}
v(\hat{\mathcal{L}}) &= \binom{n+d-1}{n} - 1 - \binom{n+d-3}{n} - (n+1)h(n,d) + nh(n-1,d) \\
&> \binom{n+d-1}{n} - \binom{n+d-3}{n} + 3n - 2 + \binom{n+d-2}{n} - \binom{n+d}{n} + \\
&+ \binom{n+d-1}{n-1} - \binom{n+d-3}{n-1} \\
&= \binom{n+d}{n} - \binom{n+d-2}{n} + 3n - 2 + \binom{n+d-2}{n} - \binom{n+d}{n} \\
&= 3n - 2 \\
&> 0, \forall n \geq 1.
\end{aligned}$$

Como o sistema  $\hat{\mathcal{L}}$  é não especial e não vazio, pela Proposição 11.6 temos que  $h^1(\hat{\mathcal{L}}) = 0$ . Assim, pela Proposição 11.2, segue

$$\begin{aligned}
l(\mathcal{L}_{n,d}(d-1, 2^{h(n,d)})) &= l(\hat{\mathcal{L}}) + l(\mathcal{L}|_{\pi}) + 1 \\
&= v(\hat{\mathcal{L}}) + v(\mathcal{L}|_{\pi}) + 1 \\
&= \binom{n+d-1}{n} - 1 - \binom{n+d-3}{n} - (n+1)h(n,d) + \\
&+ \binom{n+d-1}{n-1} - \binom{n+d-3}{n-1} \\
&= \binom{n+d}{n} - 1 - \binom{n+d-2}{n} - (n+1)h(n,d) \\
&= v(\mathcal{L}_{n,d}(d-1, 2^{h(n,d)})).
\end{aligned}$$

Portanto, o sistema linear  $\mathcal{L}_{n,d}(d-1, 2^{h(n,d)})$  é não especial. ■

**Lema 13.11** O sistema linear  $\mathcal{L}_{n,d}(d, 2^h)$  é especial e tem dimensão  $l(\mathcal{L}_{n-1,d}(2^h))$ , ou é vazio.

*Demonstração:* Sejam  $P, P_1, \dots, P_h$  pontos gerais em  $\mathbb{P}^n$ . Considere o esquema  $Z_1 = \{2P_1, \dots, 2P_h\}$  o conjunto de  $h$  pontos duplos. Dessa forma, podemos considerar a sequência exata de restrição

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{n,d}(d, 2^h) \longrightarrow \mathcal{L}_{n,d}(d) \longrightarrow \mathcal{L}_{n,d}(d)|_{Z_1}.$$

Temos que  $\mathcal{L}_{n,d}(d)$  é não especial e não vazio, pois é um sistema com apenas um ponto múltiplo. Pela Proposição 11.6, segue que  $h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}_{n,d}(d)) = 0$ . Logo, podemos considerar a sequência de espaços vetoriais

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}_{n,d}(d, 2^h)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}_{n,d}(d)) \longrightarrow H^0(Z_1, \mathcal{L}_{n,d}(d)|_{Z_1}) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}_{n,d}(d, 2^h)) \longrightarrow 0,$$

pelo Teorema do Núcleo e da Imagem (para mais detalhes, ver [6], Capítulo 6), temos que

$$h^0(Z_1, \mathcal{L}_{n,d}(d)|_{Z_1}) = h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}_{n,d}(d)) + h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}_{n,d}(d, 2^h)) - h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}_{n,d}(d, 2^h)).$$

Do fato de  $l(\mathcal{L}_{n,d}(d)) = v(\mathcal{L}_{n,d}(d))$ , temos que

$$h(n+1) = \binom{n+d}{d} - \binom{n+d-1}{n} + h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}_{n,d}(d, 2^h)) - h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}_{n,d}(d, 2^h)). \quad (13.5)$$

Agora, tome o esquema  $Z_2 = \{2\bar{P}_1, \dots, 2\bar{P}_h\}$  o conjunto de  $h$  pontos, onde esses pontos são a projeção dos  $P_1, \dots, P_h$  em um hiperplano  $\pi \cong \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ . Dessa forma, podemos considerar a sequência exata de restrição

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{n-1,d}(2^h) \longrightarrow \mathcal{L}_{n-1,d} \longrightarrow \mathcal{L}_{n-1,d}|_{Z_2}.$$

Claramente, o sistema  $\mathcal{L}_{n-1,d}$  é não especial e não vazio. Pela Proposição 11.6, temos que  $h^1(\pi, \mathcal{L}_{n-1,d}) = 0$ . De modo análogo, temos a seguinte relação

$$h^0(Z_2, \mathcal{L}_{n,d}|_{Z_2}) = h^0(\pi, \mathcal{L}_{n,d}) + h^1(\pi, \mathcal{L}_{n-1,d}(2^h)) - h^0(\pi, \mathcal{L}_{n,d}(2^h)).$$

Do fato de  $l(\mathcal{L}_{n,d}) = v(\mathcal{L}_{n,d})$  e como vimos em (8.6), temos que

$$h.n = \binom{n+d-1}{n-1} + h^1(\pi, \mathcal{L}_{n-1,d}(2^h)) - h^0(\pi, \mathcal{L}_{n-1,d}(2^h)). \quad (13.6)$$

Subtraindo (13.6) de (13.5), temos que

$$h = h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}_{n,d}(d, 2^h)) - h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}_{n,d}(d, 2^h)) + h^0(\pi, \mathcal{L}_{n-1,d}(2^h)) - h^1(\pi, \mathcal{L}_{n-1,d}(2^h)). \quad (13.7)$$

Mostremos que  $h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}_{n,d}(d, 2^h)) = h^0(\pi, \mathcal{L}_{n-1,d}(2^h))$ . De fato, pelo Lema 6.7 podemos considerar  $P = (1 : 0 : 0 : \dots : 0) \in \mathbb{P}^n$ . Seja  $F \in k[x_0, \dots, x_n]$  um polinômio homogêneo de grau  $d$ . Então, podemos escrever  $F$  na forma

$$F = F_0 x_0^d + F_1 x_1^{d-1} + \dots + F_d,$$

onde  $F_j \in k[x_1, \dots, x_n]$  é um polinômio homogêneo de grau  $j$ . Impor que o ponto  $P$  tenha multiplicidade  $d$  é o mesmo que  $F$  ser igual a  $F_d$ . Dito isso, segue que

$$\begin{aligned} \text{Mult}_{P_j} F \geq 2 &\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i}(P_j) = 0, \quad 0 \leq i \leq n \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i}(P_j) = 0, \quad 0 < i \leq n. \end{aligned}$$

Por outro lado, se tomarmos  $G \in k[x_1, \dots, x_n]$  um polinômio homogêneo de grau  $d$ , temos que

$$\text{Mult}_{\bar{P}_j} G \geq 2 \Leftrightarrow \frac{\partial G}{\partial x_i}(\bar{P}_j) = 0, \quad 0 < i \leq n.$$

Ou seja, isso mostra que impor um ponto com multiplicidade  $d$  e  $h$  pontos com multiplicidade 2 ao sistema  $\mathcal{L}_{n,d}$  é o mesmo que impor  $h$  pontos com multiplicidade 2 ao sistema  $\mathcal{L}_{n-1,d}$ , provando o que queríamos.

Desta forma, de (13.7) segue que

$$\begin{aligned} h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}_{n,d}(d, 2^h)) &= h + h^1(\pi, \mathcal{L}_{n-1,d}(2^h)) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Portanto, se  $h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}_{n,d}(d, 2^h)) > 0$  temos, pela Proposição 11.6, que o sistema  $\mathcal{L}_{n,d}(d, 2^h)$  é especial e, assim,  $l(\mathcal{L}_{n,d}(d, 2^h)) = l(\mathcal{L}_{n-1,d}(2^h))$ , pois como vimos  $h^0(\mathcal{L}_{n,d}(d, 2^h)) = h^0(\mathcal{L}_{n-1,d}(2^h))$ . Mas, se  $h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}_{n,d}(d, 2^h)) = 0$  então o sistema  $\mathcal{L}_{n,d}(d, 2^h)$  é vazio. ■

## 14 Degenerações

A ideia principal desse capítulo é degenerar  $\mathbb{P}^n$  a uma variedade redutível (Definição 4.6) e estudaremos como se degenera um sistema linear na fibra geral. O sistema limite será mais fácil que o geral, e isso nos permitirá usar indução. Para melhor entendimento, indicamos que leiam as seguintes referências [9] e [15], sendo essas usadas como base neste capítulo.

### Degeneração da Variedade

Fixemos algumas notações:

- $\Delta$  é um disco complexo com centro na origem;
- $\mathcal{V} = \mathbb{P}^n \times \Delta$ ;
- Sejam  $p_1 : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{P}^n$  e  $p_2 : \mathcal{V} \rightarrow \Delta$  as projeções naturais;
- $\mathcal{V}_t = \mathbb{P}^n \times \{t\}$ , onde  $t \in \Delta$ . O conjunto  $\mathcal{V}_t$  é chamado de *fibra* de  $\mathcal{V}$  e, em especial, a fibra  $\mathcal{V}_0$  é chamada de *fibra central*.

Com isso, pegue um ponto  $(P, 0)$  na fibra central  $\mathcal{V}_0$  e exploda para obter uma  $(n+1)$ -variedade  $\mathcal{X}$  com as aplicações  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{V}$ ,  $\pi_1 : p_1 \circ f$  e  $\pi_2 : p_2 \circ f$ . Assim, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{X} & \\
 & \downarrow f & \\
 \pi_1 \swarrow & \mathcal{V} & \searrow \pi_2 \\
 & \downarrow p_1 \quad \downarrow p_2 & \\
 \mathbb{P}^n & & \Delta
 \end{array}$$

Obtemos o morfismo  $\pi_2 : \mathcal{X} \rightarrow \Delta$ , com fibra  $\mathcal{X}_t := \pi_2^{-1}(t)$ , onde  $t \in \Delta$ , que produz uma degeneração 1-dimensional do  $\mathbb{P}^n$ . Se  $t \neq 0$ , então  $\mathcal{X}_t = \mathcal{V}_t$  é isomorfo a um  $\mathbb{P}^n$ , enquanto para  $t = 0$  a fibra  $\mathcal{X}_0$  é a união da transformada estrita  $\mathbb{F}$  de  $\mathcal{V}_0$  e o divisor excepcional  $\mathbb{P} = \mathbb{P}^n$  do blow-up. As duas variedades  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{F}$  encontram-se transversalmente ao longo de uma variedade  $(n-1)$ -dimensional  $R$  que é isomorfa a  $\mathbb{P}^{n-1}$ . A variedade  $R$  representa um hiperplano em  $\mathbb{P}$  e o divisor excepcional em  $\mathbb{F}$ . Para simplificar, segue a tabela:

Variedade	$\cong$	Dimensão
$\mathcal{V}$	$\mathbb{P}^n \times \Delta$	$n+1$
$\mathcal{X}$	$Bl_p(\mathcal{V})$	$n+1$
$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}^n$	$n$
$\mathbb{F}$	$Bl_p(\mathbb{P}^n)$	$n$
$R$	$\mathbb{F} \cap \mathbb{P}$	$n-1$
$\mathcal{X}_0$	$\mathbb{F} \cup \mathbb{P}$	$n+1$

## Degeneração do Sistema Linear

Considere agora o sistema linear  $\mathcal{L}_t := \mathcal{L}_{n,d}(2^h)$  das hipersuperfícies de  $\mathbb{P}^n$  de grau  $d$  com  $h$  pontos gerais atribuídos  $P_{1,t}, \dots, P_{h,t}$ , todos de multiplicidade 2, denotaremos a dimensão real desse sistema por  $l_t$ . Lembre-se que a dimensão virtual é

$$v_t := v(\mathcal{L}_t) = \binom{n+d}{n} - 1 - (n+1)h.$$

Fixe um inteiro não negativo  $b \leq h$  e especialize  $b$  pontos genericamente em  $\mathbb{F}$  e os outros  $h-b$  pontos em  $\mathbb{P}$ , isto é, pegue uma família  $\{P_{1,t}, \dots, P_{h,t}\}_{t \in \Delta}$  tal que  $P_{1,0}, \dots, P_{b,0} \in \mathbb{F}$  e  $P_{b+1,0}, \dots, P_{h,0} \in \mathbb{P}$ , consideramos esses pontos como limite de  $h$  pontos gerais em  $\mathcal{X}_t \cong \mathbb{P}^n$ , para  $t \rightarrow 0$ .

O sistema linear limite  $\mathcal{L}_0$  em  $\mathcal{X}_0$  é formado pelos divisores no feixe limite  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$  em uma fibra geral  $\mathcal{X}_t$ , singular em  $P_{1,0}, \dots, P_{h,0}$ . Conforme [16], o sistema limite  $\mathcal{L}_0$  é obtido de  $\mathcal{L}_t$  por uma  $(1, b)$ -degeneração, e ao restringirmos o sistema limite a  $\mathbb{F}$  e  $\mathbb{P}$ , obtemos

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}_{n,d-1}(2^{h-b}) \text{ e } \mathcal{L}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}_{n,d}(d-1, 2^b), \quad (14.1)$$

denotaremos por  $l_{\mathbb{P}}, l_{\mathbb{F}}$  e por  $v_{\mathbb{P}}, v_{\mathbb{F}}$  as dimensões reais e virtuais dos sistemas  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  e  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$ , respectivamente.

**Observação 14.1** Um elemento de  $\mathcal{L}_0$  consiste:

- Ou em um divisor (Seção 8.4 do Capítulo 8) em  $\mathbb{P}$  e em um divisor em  $\mathbb{F}$ , ambos satisfazendo as condições impostas pelos múltiplos pontos, que se restringem ao mesmo divisor em  $R$ ;
- Ou é um divisor correspondente a uma seção de feixe que é identicamente 0 em  $\mathbb{P}$  (ou em  $\mathbb{F}$ ) e que dá um divisor geral em  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  (ou em  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ ) contendo  $R$  como componente.

**Observação 14.2** Por semi-continuidade superior (2.9), temos que  $l_0 \geq l_t$ .

**Lema 14.1** Se  $l_0 = e(\mathcal{L}_{n,d}(2^h))$ , então o sistema linear  $\mathcal{L}_t$  tem a dimensão esperada, ou seja, é não especial.

*Demonstração:* Pela observação anterior, temos que  $l_0 \geq l_t$ , logo  $e(\mathcal{L}_{n,d}(2^h)) \geq l_t$ . Portanto,  $\mathcal{L}_t$  é não especial. ■

Agora, considere as sequências exatas de restrição em  $R \cong \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ :

$$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{P}} \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d-1)|$$

e

$$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{F}} \longrightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{F}} \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d-1)|,$$

onde  $\mathcal{R}_{\mathbb{P}}, \mathcal{R}_{\mathbb{F}}$  denotam as restrições dos sistemas  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}, \mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  a  $R$  e  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}, \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  denotam os sistemas núcleos:

$$\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}_{n,d-2}(2^{h-b}) \text{ e } \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}_{n,d}(d, 2^b), \quad (14.2)$$

denotaremos por  $\hat{l}_{\mathbb{P}}, \hat{l}_{\mathbb{F}}$  e por  $\hat{v}_{\mathbb{P}}, \hat{v}_{\mathbb{F}}$  as dimensões reais e virtuais dos sistemas  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  e  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$ , respectivamente. Além disso, denotaremos  $r_{\mathbb{P}} := \dim(\mathcal{R}_{\mathbb{P}})$  e  $r_{\mathbb{F}} := \dim(\mathcal{R}_{\mathbb{F}})$ .

**Observação 14.3** O núcleo  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  consiste naquelas seções de  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  que se anulam em  $R \cong \mathbb{P}^{n-1}$ , ou seja, os divisores em  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  contendo  $R$  como componente, o mesmo vale para  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$ .

Queremos calcular a dimensão  $l_0$  por recursão. Os casos mais simples ocorrem quando todos os divisores em  $\mathcal{L}_0$  vêm de uma seção que é identicamente nula em uma das duas componentes. Nesses casos, as seções correspondentes do outro sistema devem estar no núcleo da aplicação de restrição.

Agora, se os divisores em  $\mathcal{L}_0$  consistem em um divisor em  $\mathbb{P}$  e um divisor em  $\mathbb{F}$ , ambos não identicamente nulos, que coincidem em  $R$ , então a dimensão de  $\mathcal{L}_0$  depende da dimensão da intersecção  $\mathcal{R} := \mathcal{R}_{\mathbb{P}} \cap \mathcal{R}_{\mathbb{F}}$  dos sistemas restritos, isto é

**Proposição 14.2**  $l_0 = \dim(\mathcal{R}) + \hat{l}_{\mathbb{P}} + \hat{l}_{\mathbb{F}} + 2$ .

*Demonstração:* Primeiro, relembremos as sequências exatas

$$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}} \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{R}_{\mathbb{P}}$$

e

$$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{F}} \xrightarrow{\alpha_2} \mathcal{R}_{\mathbb{F}}.$$

Agora, defina

$$\begin{aligned} \Psi : H^0(\mathbb{P}, \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}) \times H^0(\mathbb{F}, \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}) &\longrightarrow H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0) \\ (F_1, F_2) &\mapsto F, \text{ onde } F|_{\mathbb{P}} = F_1 \text{ e } F|_{\mathbb{F}} = F_2. \end{aligned}$$

Se  $F_1 \in \ker(\alpha_1)$  e  $F_2 \in \ker(\alpha_2)$ , então  $F_1|_R = 0$  e  $F_2|_R = 0$  onde  $R = \mathbb{P} \cap \mathbb{F}$ , respectivamente. Assim, como  $F_1|_R = F_2|_R$ , pelo Axíoma 8.2, existe  $F \in H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0)$  tal que  $F|_{\mathbb{P}} = F_1$  e  $F|_{\mathbb{F}} = F_2$ . Mostrando que  $\Psi$  está bem definida.

Vejam algumas propriedades de  $\Psi$ :

- Se  $\Psi(F_1, F_2) = F = 0$ , então  $F_1 = F|_{\mathbb{P}} = 0$  e  $F_2 = F|_{\mathbb{F}} = 0$ , ou seja,  $\ker(\Psi) = \{0\}$ .
- Dados  $F_1, F'_1 \in H^0(\mathbb{P}, \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}})$  e  $F_2, F'_2 \in H^0(\mathbb{F}, \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}})$ . Existe  $F \in H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0)$ , tal que  $\Psi((F_1 + F'_1, F_2 + F'_2)) = F$ . Por outro lado, existe  $G, G' \in H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0)$ , tais que  $\Psi(F_1, F_2) = G$  e  $\Psi(F'_1, F'_2) = G'$ . Pela Observação 8.1, temos que

$$F|_{\mathbb{P}} = F_1 + F'_1 = G|_{\mathbb{P}} + G'|_{\mathbb{P}} = (G + G')|_{\mathbb{P}}$$

e

$$F|_{\mathbb{F}} = F_2 + F'_2 = G|_{\mathbb{F}} + G'|_{\mathbb{F}} = (G + G')|_{\mathbb{F}}.$$

Como  $\Psi$  é injetora, temos que  $F = G + G'$  e, assim,  $\Psi((F_1 + F'_1, F_2 + F'_2)) = \Psi(F_1, F_2) + \Psi(F'_1, F'_2)$ . De modo análogo, se mostra que  $\Psi(\lambda(F_1, F_2)) = \lambda\Psi(F_1, F_2)$  e, portanto,  $\Psi$  é uma transformação linear.

- $Im(\Psi) = \{F \in H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0) | F|_R = 0\}$ . De fato, sabemos que  $Im(\Psi) \subset \{F \in H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0) | F|_R = 0\}$ . Por outro lado, se  $(F|_{\mathbb{P}})|_{\mathbb{F}} = (F|_{\mathbb{F}})|_{\mathbb{P}} = F|_R = 0$ , então  $F|_{\mathbb{P}} \in H^0(\mathbb{F}, \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}})$  e  $F|_{\mathbb{F}} \in H^0(\mathbb{P}, \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}})$ , logo  $\Psi(F|_{\mathbb{F}}, F|_{\mathbb{P}}) = F$ , mostrando que  $\{F \in H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0) | F|_R = 0\} \subset Im(\Psi)$ .

Afirmamos que  $\dim(\text{Im}(\Psi)) = h^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0) - h^0(R, \mathcal{R})$ . Pelo Teorema da Imagem e do Núcleo, temos que

$$\begin{aligned} h^0(\mathbb{P}, \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}) + h^0(\mathbb{F}, \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}) &= \dim(\ker(\Psi)) + \dim(\text{Im}(\Psi)) \\ &= h^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0) - h^0(R, \mathcal{R}) \end{aligned}$$

Portanto,  $l_0 = \dim(\mathcal{R}) + \hat{l}_{\mathbb{P}} + \hat{l}_{\mathbb{F}} + 2$ . ■

Logo, o ponto fundamental é calcular a dimensão de  $\mathcal{R}$ , da qual obtém-se  $l_0$ .

**Definição 14.1** Dizemos que  $\mathcal{R}_{\mathbb{P}}$  e  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$  são *transversais* se  $\mathcal{R}_{\mathbb{P}} + \mathcal{R}_{\mathbb{F}} = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d-1)|$ .

**Proposição 14.3** Se os sistemas  $\mathcal{R}_{\mathbb{P}}, \mathcal{R}_{\mathbb{F}} \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d-1)|$  são transversais, ou seja, se eles interceptam corretamente dentro de  $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d-1)|$ , então

$$\dim(\mathcal{R}) = \max \left\{ r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} - \binom{d+n-2}{n-1} + 1, -1 \right\}.$$

*Demonstração:* Se a  $\dim(\mathcal{R}) = -1$  não temos nada a provar. Suponha que a dimensão de  $\mathcal{R}$  é maior que  $-1$ . Pelo Lema 4.33, temos que

$$\begin{aligned} \dim(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{R}_{\mathbb{P}}) + H^0(\mathbb{F}, \mathcal{R}_{\mathbb{F}})) &= h^0(\mathbb{P}, \mathcal{R}_{\mathbb{P}}) + h^0(\mathbb{F}, \mathcal{R}_{\mathbb{F}}) - h^0(\mathbb{P} \cap \mathbb{F}, \mathcal{R}_{\mathbb{P}} \cap \mathcal{R}_{\mathbb{F}}) \\ &= h^0(\mathbb{P}, \mathcal{R}_{\mathbb{P}}) + h^0(\mathbb{F}, \mathcal{R}_{\mathbb{F}}) - h^0(R, \mathcal{R}). \end{aligned}$$

Por hipótese, como  $\mathcal{R}_{\mathbb{P}} + \mathcal{R}_{\mathbb{F}} = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d-1)|$ , temos que  $\dim(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{R}_{\mathbb{P}}) + H^0(\mathbb{F}, \mathcal{R}_{\mathbb{F}})) = \dim(\mathbb{P}^{n-1}, |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d-1)|)$ . Logo,

$$\begin{aligned} h^0(R, \mathcal{R}) &= h^0(\mathbb{P}, \mathcal{R}_{\mathbb{P}}) + h^0(\mathbb{F}, \mathcal{R}_{\mathbb{F}}) - \dim(\mathbb{P}^{n-1}, |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d-1)|) \\ &= h^0(\mathbb{P}, \mathcal{R}_{\mathbb{P}}) + h^0(\mathbb{F}, \mathcal{R}_{\mathbb{F}}) - \binom{n+d-2}{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto, segue que  $\dim(\mathcal{R}) = r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} - \binom{d+n-2}{n-1} + 1$ . ■

## 15 Quárticas

Neste capítulo, verificaremos quais quárticas são defeituosas e quais não são defeituosas, para isso iremos nos basear na referência [9].

### Casos Especiais

As variedades de Veronese  $V_4^n$  são defeituosas para  $n = 2, 3, 4$ . Provaremos isso por meio dos sistemas lineares correspondentes, como discutido no Capítulo 9.

Seja

$$h = \binom{n+2}{2} - 1.$$

Afirmamos que os sistemas lineares  $\mathcal{L}_{n,4}(2^h)$  são especiais e  $l(\mathcal{L}_{n,4}(2^h)) = 0$ , para  $n = 2, 3, 4$  e  $h$  como definido acima.

Pelo Teorema 9.1, o sistema linear  $\mathcal{L}_{n,2}(1^h)$  é não especial. Calculemos a dimensão de  $\mathcal{L}_{n,2}(1^h)$ , isto é

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}_{n,2}(1^h)) &= \binom{n+2}{n} - 1 - h \\ &= \binom{n+2}{2} - 1 - \left( \binom{n+2}{2} - 1 \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

assim,  $l(\mathcal{L}_{n,2}(1^h)) = 0$ . Logo, existe  $F \in \mathcal{L}_{n,2}(1^h)$ , então  $F^2 \in \mathcal{L}_{n,4}(2^h)$ . Assim, sabemos que  $l(\mathcal{L}_{n,4}(2^h)) = 0$ , ou seja,  $\mathcal{L}_{n,4}(2^h)$  é não vazio.

Por outro lado, temos que  $h = 5, 9, 14$  para  $n = 2, 3, 4$ , respectivamente. Calculemos a dimensão virtual de cada sistema,

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}_{2,4}(2^5)) &= \binom{2+4}{2} - 1 - 3 \cdot 5 = -1, \\ v(\mathcal{L}_{3,4}(2^9)) &= \binom{3+4}{3} - 1 - 4 \cdot 9 = -2, \\ v(\mathcal{L}_{4,4}(2^{14})) &= \binom{4+4}{4} - 1 - 5 \cdot 14 = -1. \end{aligned}$$

Assim, era esperado que os sistemas fossem vazios, o que não ocorre, pois como vimos cada sistema tem uma hipersuperfície que passa pelos  $h$  pontos duplos. Portanto,  $\mathcal{L}_{n,4}$  é especial para  $n = 2, 3, 4$ .

### Casos Não Especiais

Mostraremos agora que  $V_4^n$  é não defeituosa para  $n \geq 5$ .

Vamos primeiro definir os inteiros

$$h^- = h^-(n) := \left\lfloor \frac{1}{n+1} \binom{n+4}{n} \right\rfloor \text{ e } h^+ = h^+(n) := \left\lceil \frac{1}{n+1} \binom{n+4}{n} \right\rceil.$$

Se a não especialidade vale para uma coleção de  $h^-$  pontos duplos, então vale para um número menor de pontos duplos. Se não houver quárticas com  $h^+$  pontos gerais duplos, o mesmo vale se adicionarmos mais pontos.

**Observação 15.1** Podemos reescrever  $h^-$  e  $h^+$  da seguinte forma:

$$h^- = \left\lfloor \frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{4!} \right\rfloor \text{ e } h^+ = \left\lceil \frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{4!} \right\rceil.$$

Demonstraremos que o sistema linear  $\mathcal{L}_{n,4}(2^h)$  é não especial, para  $n \geq 5$  e  $h^- \leq h \leq h^+$ . Para isso, usaremos a degeneração apresentada no Capítulo 14 tomando  $b = h - n - 1$ . Dessa forma, temos as seguintes sequências exatas

$$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}_{n,4}(4, 2^{h-n-1}) \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}_{n,4}(3, 2^{h-n-1}) \longrightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{F}} \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(3)| \quad (15.1)$$

e

$$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}_{n,2}(2^{n+1}) \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}_{n,3}(2^{n+1}) \longrightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{P}} \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(3)|. \quad (15.2)$$

**Lema 15.1** O sistema linear  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  é vazio.

*Demonstração:* Pelo Teorema 10.5, temos que todo polinômio em  $\mathcal{L}_{n,2}(2^n)$  tem posto 1, implicando que  $l(\mathcal{L}_{n,2}(2^n)) = 0$ . Logo, pelo Teorema 9.1,  $l(\mathcal{L}_{n,2}(2^n, 1)) = -1$  e, assim,  $l(\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}) = l(\mathcal{L}_{n,2}(2^{n+1})) = -1$ . ■

**Lema 15.2** O sistema linear  $\mathcal{L}_{n-1,4}(2^{h-n-1})$  é vazio, para  $n \geq 5$ .

*Demonstração:* Observe que é suficiente demonstrar para  $h = h^-(n)$ . Provemos por indução em  $n$ . Para  $n = 5$  temos que  $h = 21$ , logo  $l(\mathcal{L}_{4,4}(2^{15})) = -1$ , pois na seção anterior vimos que  $l(\mathcal{L}_{4,4}(2^{14})) = 0$ .

Agora, considere o esquema  $Z = \{(2P_1, \dots, 2P_{h^-(n)-n-1})\}$  que é a união de  $h^-(n) - n - 1$  pontos duplos. Seja  $\pi \subset \mathbb{P}^n$  um hiperplano contendo o suporte de  $Z$ . Dito isso, podemos montar a seguinte sequência exata de restrição (para mais detalhes, ver Seção 11.2 do Capítulo 11)

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{n,3}(2^{h^-(n+1)-h^-(n)-1}, 1^{h^-(n)-n-1}) \longrightarrow \mathcal{L}_{n,4}(2^{h^-(n+1)-(n+1)-1}) \longrightarrow \mathcal{L}_{n-1,4}(2^{h^-(n)-n-1}).$$

Por indução em  $n$ , temos que o sistema  $\mathcal{L}_{n-1,4}(2^{h^-(n)-n-1})$  é vazio. Então, pelo Lema 11.1, temos que  $l(\mathcal{L}_{n,4}(2^{h^-(n+1)-(n+1)-1})) = l(\mathcal{L}_{n,3}(2^{h^-(n+1)-h^-(n)-1}, 1^{h^-(n)-n-1}))$ .

Como  $n \geq 5$ , pelo Capítulo 12, temos que o sistema  $\mathcal{L}_{n,3}(2^{h^-(n+1)-h^-(n)-1})$  é não especial. Usando as desigualdades do Lema 13.1, segue que

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}_{n,3}(2^{h^-(n+1)-h^-(n)-1}, 1^{h^-(n)-n-1})) &= \binom{n+3}{3} + n + (n+1)(-h^-(n+1) + h^-(n)) + \\ &\quad - h^-(n) + n + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3 \cdot 2} + n + \\
&+ (n+1) \left( \frac{(n+4)(n+3)(n+2) - (n+5)(n+4)(n+3)}{4!} + 1 \right) + \\
&- \frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{4!} + 1 \\
&= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3 \cdot 2} + 2n + 1 - \frac{(n+4)(n+3)(n+1)}{4 \cdot 2} + \\
&- \frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{4 \cdot 3 \cdot 2} + 1 \\
&= \frac{n+3}{4!} (4(n+2)(n+1) - 3(n+4)(n+1) - (n+4)(n+2)) + 2n + 2 \\
&= \frac{n+3}{4!} (-9n - 12) + 2n + 2 \\
&= \frac{-9n^2 + 9n + 12}{4!} < 0, \forall n \geq 6.
\end{aligned}$$

Assim,  $l(\mathcal{L}_{n,3}(2^{h^-(n+1)-h^-(n)-1}, 1^{h^-(n)-n-1})) = -1$  e, portanto,  $l(\mathcal{L}_{n,4}(2^{h^-(n+1)-(n+1)-1})) = -1$ . ■

**Lema 15.3** O sistema linear  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  é vazio.

*Demonstração:* Pela Proposição 13.10, temos que  $l(\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}) = l(\mathcal{L}_{n-1,4}(2^{h-n-1}))$ . Assim, pelo Lema 15.2, concluímos que

$$l(\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}) = l(\mathcal{L}_{n-1,4}(2^{h-n-1})) = -1. \quad \blacksquare$$

Aplicando os Lemas 15.3 e 15.1 nas seqüências exatas (15.1) e (15.2), respectivamente, temos as inclusões

$$\mathcal{L}_{\mathbb{F}} \hookrightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{F}} \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(3)| \quad (15.3)$$

e

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}} \hookrightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{P}} \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(3)|. \quad (15.4)$$

Por construção, as aplicações  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}} \hookrightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{F}}$  e  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}} \hookrightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{P}}$  são sobrejetoras. Logo,  $r_{\mathbb{F}} = l_{\mathbb{F}}$  e  $r_{\mathbb{P}} = l_{\mathbb{P}}$ . Dessa forma, o próximo passo é calcular a dimensão dos sistemas  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  e  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$ . Para isso, segue os lemas:

**Lema 15.4** O sistema linear  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  é não especial. Mais ainda,  $l_{\mathbb{P}} = v_{\mathbb{P}}$ .

*Demonstração:* Como  $n \geq 5$  segue direto do Capítulo 12 a não especialidade do sistema linear. Agora, mostremos que  $l_{\mathbb{P}} = v_{\mathbb{P}}$ . De fato,

$$\begin{aligned}
v_{\mathbb{P}} &= \binom{n+3}{3} - 1 - (n+1)^2 \\
&= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} - 1 - (n+1)^2 \\
&= \frac{(n+1)((n+3)(n+2) - 6(n+1))}{6} - 1 \\
&= \frac{n^3 - n^2}{6} - 1 > 0, \forall n \geq 5.
\end{aligned}$$

Como  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  é não especial, temos que  $l_{\mathbb{P}} = e(\mathcal{L}_{\mathbb{P}}) = \max\{v_{\mathbb{P}}, -1\} = v_{\mathbb{P}}$ . ■

**Lema 15.5** O sistema linear  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  é não especial. Mais ainda,  $l_{\mathbb{F}} = v_{\mathbb{F}}$ .

*Demonstração:* Considere a aplicação  $h'$  definida em (13.2), isto é

$$\begin{aligned} h'(n) &= \left\lceil \frac{1}{n+1} \binom{n+4}{n} \right\rceil - n - 1 \\ &= h^+(n) - n - 1 \\ &\leq h - n - 1. \end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 13.3, o sistema  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  é não especial.

Agora, mostremos que  $l_{\mathbb{F}} = v_{\mathbb{F}}$ . Usando as desigualdade do Lema 13.1, temos que

$$\begin{aligned} v_{\mathbb{F}} &= \binom{n+4}{4} - 1 - \binom{n+2}{2} - (n+1)(h - n - 1) \\ &\geq \binom{n+4}{4} - 1 - \binom{n+2}{2} - (n+1)(h^+(n) - n - 1) \\ &= \binom{n+4}{4} - 1 - \binom{n+2}{2} - (n+1) \left( \left\lceil \frac{1}{n+1} \binom{n+4}{n} \right\rceil - n - 1 \right) \\ &> \binom{n+4}{4} - 1 - \binom{n+2}{2} - n - 1 - \binom{n+4}{n} + n^2 + 2n + 1 \\ &= n^2 + n - 1 - \binom{n+2}{2} \\ &= \frac{2n^2 + 2n - 2 - (n^2 + 3n + 2)}{2} \\ &= \frac{n^2 - n - 4}{2} > 0, \forall n \geq 5. \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  é não especial, temos que  $l_{\mathbb{F}} = e(\mathcal{L}_{\mathbb{F}}) = \max\{v_{\mathbb{F}}, -1\} = v_{\mathbb{F}}$ . ■

Uma relação que será importante para concluirmos o desejado é que

$$v(\mathcal{L}_{n,4}(2^h)) = r_{\mathbb{F}} - \binom{n+1}{2}. \quad (15.5)$$

Mostremos tal igualdade. Primeiro, pelo Lema 15.3, temos que  $r_{\mathbb{F}} = l_{\mathbb{F}} = v_{\mathbb{F}}$ . Assim, segue que

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{F}} - \binom{n+1}{2} &= \binom{n+4}{4} - 1 - \binom{n+2}{2} - (n+1)(h - n - 1) - \binom{n+1}{2} \\ &= \binom{n+4}{4} - 1 - \frac{(n+2)(n+1)}{2} - \frac{(n+1)n}{2} - ((n+1)h - n^2 - 2n - 1) \\ &= \binom{n+4}{4} - 1 - \frac{(n+1)(2n+2)}{2} - (n+1)h + n^2 + 2n + 1 \\ &= \binom{n+4}{4} - 1 - \frac{2n^2 + 4n + 2}{2} - (n+1)h + n^2 + 2n + 1 \\ &= \binom{n+4}{4} - 1 - (n+1)h \\ &= v(\mathcal{L}_{n,4}(2^h)). \end{aligned}$$

Agora, pela Proposição 14.3, temos que a dimensão de  $\mathcal{R}$  é dado por

$$\max \left\{ r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} - \binom{d+n-2}{n-1} + 1, -1 \right\}$$

e, assim, por tudo que vimos neste capítulo, segue que

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{R}) &= \max \left\{ r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} - \binom{n+2}{n-1} + 1, -1 \right\} \\ &= \max \left\{ \binom{n+3}{3} - 1 - (n+1)^2 + r_{\mathbb{F}} - \binom{n+2}{n-1} + 1, -1 \right\} \\ &= \max \left\{ r_{\mathbb{F}} - \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} - \frac{(n+2)(n+1)n}{3!} - (n+1)^2, -1 \right\} \\ &= \max \left\{ r_{\mathbb{F}} + \frac{(n+2)(n+1)(n+3-n)}{3!} - (n+1)^2, -1 \right\} \\ &= \max \left\{ r_{\mathbb{F}} + \frac{(n+2)(n+1)}{2!} - (n+1)^2, -1 \right\} \\ &= \max \left\{ r_{\mathbb{F}} + \frac{(n+1)(n+2-2(n+1))}{2!}, -1 \right\} \\ &= \max \left\{ r_{\mathbb{F}} - \frac{(n+1)n}{2!}, -1 \right\} \\ &= \max \left\{ r_{\mathbb{F}} - \binom{n+1}{2}, -1 \right\} \\ &= \max \left\{ v(\mathcal{L}_{n,4}(2^h)), -1 \right\} \\ &= e(\mathcal{L}_{n,4}(2^h)). \end{aligned}$$

Por fim, como  $\hat{l}_{\mathbb{P}} = \hat{l}_{\mathbb{F}} = -1$ , temos por (14.2) que  $l_0 = \dim(\mathcal{R}) = e(\mathcal{L}_{n,4}(2^h))$ . Portanto, pelo Lema 14.1, o sistema linear  $\mathcal{L}_{n,4}(2^h)$  é não especial.

## 16 Prova do Teorema de Alexander e Hirschowitz

Neste capítulo veremos a parte final da prova do Teorema de Alexander e Hirschowitz, para isso utilizaremos como base [9] e [15]. Relembremos o teorema:

**Teorema 16.1** (*Teorema de Alexander e Hirschowitz*) As variedades de Veronese  $V_d^n$  são não defeituosas, exceto os seguintes casos:

$$\frac{n}{d} \left| \begin{array}{cccccc} \geq 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 3 \end{array} \right.$$

As variedades de Veronese que são exceções:

- as variedades do tipo  $V_2^n$ , com  $n \geq 2$ , mostramos no Capítulo 10 que são todas 2-defeituosas;
- já no Capítulo 12 vimos que a única variedade defeituosa do tipo  $V_3^n$  é  $V_3^4$ , sendo o defeito na  $Sec_7(V_4^3)$ , isto é, essa variedade é 7-defeituosa;
- para  $n = 2, 3$  e  $4$ , as variedades  $V_4^n$  são 5-defeituosa, 9-defeituosa e 14-defeituosa, respectivamente, como vimos no Capítulo 15. Ainda neste capítulo, vimos que as demais variedades  $V_4^n$  não são defeituosas.

Agora, falta verificar que a variedade de Veronese  $V_d^n$  é não defeituosa para  $n \geq 2$  e  $d \geq 5$ . Vamos primeiro definir os inteiros

$$h^- = h^-(n, d) := \left\lfloor \frac{1}{n+1} \binom{n+d}{n} \right\rfloor \text{ e } h^+ = h^+(n, d) := \left\lceil \frac{1}{n+1} \binom{n+d}{n} \right\rceil.$$

Se a não especialidade vale para uma coleção de  $h^-$  pontos duplos, então vale para um número menor de pontos duplos. Se não houver hipersuperfícies com  $h^+$  pontos gerais duplos, o mesmo vale para mais pontos.

Demonstraremos que o sistema linear  $\mathcal{L}_{n,d}(2^h)$  é não especial, para  $n \geq 2$ ,  $d \geq 5$  e  $h^- \leq h \leq h^+$ . Para isso, usaremos a degeneração apresentada no Capítulo 14 tomando  $b = b_0(n, d)$ , onde

$$b_0(n, d) := \frac{1}{n} \binom{n+d-1}{n-1}. \quad (16.1)$$

Observe que  $b_0(n, d)$  pode ou não ser um número inteiro. Não faremos aqui a prova para  $b_0(n, d) \notin \mathbb{Z}$ , pode ser vista na Seção 4 do artigo [9], que usa uma versão mais sofisticada da degeneração que apresentamos no Capítulo 14.

Dessa forma, temos as seguintes sequências exatas

$$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}_{n,d-2}(2^{h-b}) \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}_{n,d-1}(2^{h-b}) \longrightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{P}} \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d-1)| \quad (16.2)$$

e

$$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}_{n,d}(d, 2^b) \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}_{n,d}(d-1, 2^b) \longrightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{F}} \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d-1)| \quad (16.3)$$

**Lema 16.2** O sistema linear  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  é vazio.

*Demonstração:* Provaremos por indução em  $d$ . Porém, para  $d = 5$  temos o sistema linear  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}_{n,3}(2^{h-b_0(n,5)})$ , onde vimos no Capítulo 12, que é especial para  $n = 4$  quando tomados 7 pontos gerais. Temos também que, para  $d = 6$ , devemos considerar o sistema linear  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}_{n,4}(2^{h-b_0(n,6)})$  e, assim, vimos no Capítulo 15 que para  $n = 2, 3, 4$  o sistema é especial quando tomados 5, 9, 14 pontos gerais, respectivamente. Analizaremos cada sistema separadamente:

- $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}_{4,3}(2^{h-b_0(4,5)})$ : Sabemos que  $l(\mathcal{L}_{4,3}(2^6)) = 4$ , pois é não especial. Pelo Teorema 9.1, segue que  $l(\mathcal{L}_{4,3}(2^6, 1^5)) = -1$  e, assim,  $l(\mathcal{L}_{4,3}(2^{11})) = -1$ . Dito isso, temos que

$$\begin{aligned} h - b_0(4, 5) &\geq h^-(4, 5) - \frac{1}{4} \binom{8}{3} \\ &= \left\lfloor \frac{1}{5} \binom{9}{4} \right\rfloor - \frac{1}{4} \binom{8}{3} \\ &> 25 - 14 = 11, \end{aligned}$$

logo,  $\mathcal{L}_{4,3}(2^{h-b_0(4,5)})$  é vazio.

- $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}_{2,4}(2^{h-b_0(2,6)})$ : Sabemos que  $l(\mathcal{L}_{2,4}(2^4)) = 2$ , pois é não especial. Pelo Teorema 9.1, segue que  $l(\mathcal{L}_{2,4}(2^4, 1^3)) = -1$  e, assim,  $l(\mathcal{L}_{2,4}(2^7)) = -1$ . Dito isso, temos que

$$\begin{aligned} h - b_0(2, 6) &\geq h^-(2, 6) - \frac{1}{2} \binom{7}{1} \\ &= \left\lfloor \frac{1}{3} \binom{8}{2} \right\rfloor - \frac{1}{2} \binom{7}{1} \\ &> 9 - \frac{1}{2} \binom{7}{1} \\ &> 9 - 4 = 5, \end{aligned}$$

logo, como  $h - b_0(2, 6) \geq 7$ , temos que  $\mathcal{L}_{2,4}(2^{h-b_0(2,6)})$  é vazio.

- $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}_{3,4}(2^{h-b_0(3,6)})$ : Sabemos que  $l(\mathcal{L}_{3,4}(2^8)) = 2$ , pois é não especial. Pelo Teorema 9.1, segue que  $l(\mathcal{L}_{3,4}(2^8, 1^3)) = -1$  e, assim,  $l(\mathcal{L}_{3,4}(2^{11})) = -1$ . Dito isso, temos que

$$\begin{aligned} h - b_0(3, 6) &\geq h^-(3, 6) - \frac{1}{3} \binom{8}{2} \\ &= \left\lfloor \frac{1}{4} \binom{9}{3} \right\rfloor - \frac{1}{3} \binom{8}{2} \\ &\geq 21 - 10 = 11, \end{aligned}$$

logo, o sistema  $\mathcal{L}_{3,4}(2^{h-b_0(3,6)})$  é vazio.

- $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}_{4,4}(2^{h-b_0(4,6)})$ : Sabemos que  $l(\mathcal{L}_{4,4}(2^{13})) = 4$ , pois é não especial. Pelo Teorema 9.1, segue que  $l(\mathcal{L}_{4,4}(2^{13}, 1^5)) = -1$  e, assim,  $l(\mathcal{L}_{4,4}(2^{18})) = -1$ . Dito isso,

temos que

$$\begin{aligned}
h - b_0(4, 6) &\geq h^-(4, 6) - \frac{1}{4} \binom{9}{3} \\
&= \left\lfloor \frac{1}{5} \binom{10}{4} \right\rfloor - \frac{1}{4} \binom{9}{3} \\
&= 42 - 21 = 21,
\end{aligned}$$

logo, o sistema  $\mathcal{L}_{4,4}(2^{h-b_0(4,6)})$  é vazio.

Por indução em  $d$ , a menos dos casos já tratados, podemos considerar que o sistema  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  é não especial. Agora, vamos analisar a dimensão virtual desse sistema (tendo em mente o Lema 13.1 das desigualdades envolvendo o piso)

$$\begin{aligned}
\hat{v}_{\mathbb{P}} &= \binom{n+d-2}{n} - 1 - (n+1)(h - b_0(n, d)) \\
&\leq \binom{n+d-2}{n} - (n+1)(h^-(n, d) - b_0(n, d)) - 1 \\
&= \binom{n+d-2}{n} - (n+1) \left\lfloor \frac{1}{n+1} \binom{n+d}{n} \right\rfloor + \frac{n+1}{n} \binom{n+d-1}{n-1} - 1 \\
&< \binom{n+d-2}{n} - \binom{n+d}{n} + n + 1 + \frac{n+1}{n} \binom{n+d-1}{n-1} - 1 \\
&= \binom{n+d-2}{n} + \frac{1}{n} \binom{n+d-1}{n-1} - \binom{n+d-1}{n} + n \\
&= \frac{1}{n} \binom{n+d-1}{n-1} - \binom{n+d-2}{n-1} + n \\
&= \frac{1}{n} \frac{(d+1)(d+2)\dots(d+(n-1))}{(n-1)!} - \frac{d(d+1)\dots(d+(n-2))}{(n-1)!} + n \\
&= \frac{1}{n!} (d+1)(d+2)\dots(d+(n-1)) (d+(n-1) - nd) + n \\
&= \binom{n+d-2}{n-2} n(n-1)^2(1-d) + n \\
&= n \left( \binom{n+d-2}{n-2} (n-1)^2(1-d) + 1 \right) < 0, \forall n \geq 2 \text{ e } d \geq 5.
\end{aligned}$$

Portanto, como  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  é não especial, temos que  $\hat{l}_{\mathbb{P}} = e(\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}) = \max\{\hat{v}_{\mathbb{P}}, -1\} = -1$ . ■

**Lema 16.3** O sistema linear  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  é vazio.

*Demonstração:* Pela Proposição 13.11, temos que

$$l(\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}) = l(\mathcal{L}_{n-1,d}(2^b)).$$

Dessa forma, basta mostrar que  $l(\mathcal{L}_{n-1,d}(2^b)) = -1$ .

Por indução, podemos considerar que o sistema  $\mathcal{L}_{n-1,d}(2^b)$  é não especial. Agora, vamos analisar a dimensão virtual desse sistema

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}_{n-1,d}(2^b)) &= \binom{n+d-1}{n-1} - 1 - nb_0(n,d) \\ &= \binom{n+d-1}{n-1} - \binom{n+d-1}{n-1} - 1 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Assim,  $l(\mathcal{L}_{n-1,d}(2^b)) = -1$  e, portanto,  $l(\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}) = -1$ . ■

Aplicando os Lemas 16.3 e 16.2 nas seqüências exatas (16.3) e (16.2), respectivamente, temos as inclusões

$$\mathcal{L}_{\mathbb{F}} \hookrightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{F}} \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d-1)| \quad (16.4)$$

e

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}} \hookrightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{P}} \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d-1)|. \quad (16.5)$$

Por construção, as aplicações  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}} \hookrightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{F}}$  e  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}} \hookrightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{P}}$  são sobrejetoras. Logo,  $r_{\mathbb{F}} = l_{\mathbb{F}}$  e  $r_{\mathbb{P}} = l_{\mathbb{P}}$ . Dessa forma, o próximo passo é calcular a dimensão dos sistemas  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  e  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$ .

**Lema 16.4** O sistema linear  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  é não especial. Mais ainda,  $l_{\mathbb{P}} = v_{\mathbb{P}}$ .

*Demonstração:* Faremos a prova por indução em  $d$ , contudo precisamos analisar de forma separada o caso  $d = 5$ , pois o sistema  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}_{n,4}(2^{h-b_0(n,5)})$  é especial para  $n = 2, 3, 4$  quando tomados 5, 9, 14 pontos gerais, respectivamente, como visto no Capítulo 14. Analizando cada caso:

- **n=2:** Temos que

$$\begin{aligned} h - b_0(2, 5) &\leq \left\lceil \frac{1}{3} \binom{7}{2} \right\rceil - \frac{1}{2} \binom{6}{1} \\ &= 7 - 3 = 4. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}_{2,4}(2^4)) &= \binom{6}{4} - 1 - 3 \cdot 4 \\ &= 15 - 1 - 12 = 2, \end{aligned}$$

logo, neste caso,  $l_{\mathbb{P}} = v_{\mathbb{P}}$ .

- **n=3:** Temos que

$$\begin{aligned} h - b_0(3, 5) &\leq \left\lceil \frac{1}{4} \binom{8}{3} \right\rceil - \frac{1}{3} \binom{7}{2} \\ &= 14 - 7 = 7. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}_{3,4}(2^7)) &= \binom{7}{3} - 1 - 4 \cdot 7 \\ &= 35 - 1 - 28 = 6, \end{aligned}$$

logo, neste caso,  $l_{\mathbb{P}} = v_{\mathbb{P}}$ .

• **n=4:** Temos que

$$\begin{aligned} h - b_0(4, 5) &\leq \left\lceil \frac{1}{5} \binom{9}{4} \right\rceil - \frac{1}{4} \binom{8}{3} \\ &< 25 - 14 = 11. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}_{4,4}(2^{11})) &= \binom{8}{4} - 1 - 5 \cdot 11 \\ &= 70 - 1 - 55 = 14, \end{aligned}$$

logo, neste caso,  $l_{\mathbb{P}} = v_{\mathbb{P}}$ .

Por indução em  $d$ , podemos considerar que o sistema  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  é não especial. Agora, vamos analisar a dimensão virtual desse sistema (tendo em mente o Lema 13.1 das desigualdades envolvendo o teto)

$$\begin{aligned} v_{\mathbb{P}} &= \binom{n+d-1}{n} - 1 - (n+1)(h - b_0(n, d)) \\ &= \binom{n+d-1}{n} - (n+1)h + (n+1)b_0(n, d) - 1 \\ &\geq \binom{n+d-1}{n} - (n+1)h^+(n, d) + (n+1)b_0(n, d) - 1 \\ &= \binom{n+d-1}{n} - (n+1) \left\lceil \frac{1}{n+1} \binom{n+d}{n} \right\rceil + \frac{n+1}{n} \binom{n+d-1}{n-1} - 1 \\ &> \binom{n+d-1}{n} - \binom{n+d}{n} - (n+1) + \frac{n+1}{n} \binom{n+d-1}{n-1} - 1 \\ &= -\binom{n+d-1}{n-1} + \frac{n+1}{n} \binom{n+d-1}{n-1} - n - 2 \\ &= \frac{1}{n} \binom{n+d-1}{n-1} - n - 2 \\ &= \frac{(d+1)(d+2)\dots(d+(n-1))}{n!} - n - 2 \\ &= \binom{n+d-1}{n-1} \frac{1}{n} - n - 2 \\ &=: \varphi(n, d). \end{aligned}$$

Fixando  $n$ , temos que  $\varphi(n, d)$  é um polinômio em  $\mathbb{R}[d]$  de grau  $n-1$  e com coeficiente de  $d^{n-1}$  positivo. Se tomarmos  $\alpha = -(n+2)$  e  $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2, \dots, \alpha_{n-1} = -(n-1)$ , segue que  $\varphi(n, \alpha_j) = \alpha$ . Agora, seja  $\beta = 5$ , logo

$$\begin{aligned} \varphi(n, \beta) &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!} - n - 2 \\ &= \frac{(n+2)}{5!} (n^3 + 8n^2 + 19n - 108) > 0, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Dessa forma, pelo Lema 13.5, temos que  $v_{\mathbb{P}} > \varphi(n, d) > 0$  para todo  $n \geq 2$  e  $d \geq 5$ . Portanto, como  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  é não especial, temos que  $l_{\mathbb{P}} = e(\mathcal{L}_{\mathbb{P}}) = \max\{v_{\mathbb{P}}, -1\} = v_{\mathbb{P}}$ . ■

**Lema 16.5** O sistema linear  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  é não especial. Mais ainda,  $l_{\mathbb{F}} = v_{\mathbb{F}}$ .

*Demonstração:* Considere a aplicação  $h(n, d)$  definida em (13.4), isto é

$$h(n, d) = \left[ \frac{1}{n+1} \binom{n+d}{n} - \frac{1}{n+1} \binom{n+d-2}{n} \right] - (n-2).$$

Mostremos que  $h(n, d) \geq b_0(n, d)$ , de fato

$$\begin{aligned} h(n, d) - b_0(n, d) &= \left[ \frac{1}{n+1} \binom{n+d}{n} - \frac{1}{n+1} \binom{n+d-2}{n} \right] - (n-2) - \frac{1}{n} \binom{n+d-1}{n-1} \\ &> \frac{1}{n+1} \binom{n+d}{n} - \frac{1}{n+1} \binom{n+d-2}{n} - 1 - (n-2) - \frac{1}{n} \binom{n+d-1}{n-1} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} (d+1)(d+2) \dots (d+n) - \frac{1}{(n+1)!} (d-1)d \dots (d+(n-2)) + \\ &\quad - \frac{1}{n!} (d+1)(d+2) \dots (d+(n-1)) - n + 1 \\ &= \frac{1}{(n+1)!} (d+1)(d+2) \dots (d+(n-2))(d-1)(n-1) - n + 1 \\ &= \binom{d+n-2}{n-2} \frac{d-1}{n(n+1)} - n + 1 \\ &=: \varphi(n, d). \end{aligned}$$

Fixando  $n$ , temos que  $\varphi(n, d)$  é um polinômio em  $\mathbb{R}[d]$  de grau  $n-1$  e com coeficiente de  $d^{n-1}$  positivo. Se tomarmos  $\alpha = -(n-1)$  e  $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2, \dots, \alpha_{n-2} = -(n-2), \alpha_{n-1} = 1$ , segue que  $\varphi(n, \alpha_j) = \alpha$ . Agora, seja  $\beta = 5$ , logo

$$\begin{aligned} \varphi(n, \beta) &= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)}{5!} \frac{4}{n(n+1)} - n + 1 \\ &= \frac{(n-1)(n^2 + 5n - 24)}{30} > 0, \quad n \geq 2 \text{ e } d \geq 5. \end{aligned}$$

Dessa forma, pelo Lema 13.5, temos que  $h(n, d) - b_0(n, d) > \varphi(n, d) > 0$  para todo  $n \geq 2$  e  $d \geq 5$ . Assim, pelo Lema 13.10, o sistema  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  é não especial.

Agora, mostremos que  $l_{\mathbb{F}} = v_{\mathbb{F}}$ . De fato,

$$\begin{aligned} v_{\mathbb{F}} &= \binom{n+d}{n} - 1 - \binom{n+d-2}{n} - \frac{n+1}{n} \binom{n+d-1}{n-1} \\ &= \binom{n+d-1}{n} - \binom{n+d-2}{n} - \frac{1}{n} \binom{n+d-1}{n-1} - 1 \\ &= \binom{n+d-2}{n-1} - \frac{1}{n} \binom{n+d-1}{n-1} - 1 \\ &= \frac{(n+d-2) \dots (d+1)d}{(n-1)!} - \frac{(n+d-1) \dots (d+1)}{n!} - 1 \\ &= \frac{(n+d-2) \dots (d+1)(nd - n - d + 1)}{n!} - 1 \\ &= \frac{(n+d-2) \dots (d+1)(d-1)(n-1)}{n!} - 1 > -1, \quad \forall n \geq 2 \text{ e } d \geq 5. \end{aligned}$$

Portanto, como  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  é não especial, temos que  $l_{\mathbb{F}} = e(\mathcal{L}_{\mathbb{F}}) = \max\{v_{\mathbb{F}}, -1\} = v_{\mathbb{F}}$ . ■

Uma relação que será importante para concluirmos o desejado é

$$v(\mathcal{L}_{n,d}(2^h)) = r_{\mathbb{P}} - b_0(n, d). \quad (16.6)$$

Mostremos tal igualdade. Primeiro, pelo Lema 16.2, temos que  $r_{\mathbb{P}} = l_{\mathbb{P}} = v_{\mathbb{P}}$ . Assim, segue que

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{P}} - b_0(n, d) &= \binom{n+d-1}{n} - 1 - (n+1)(h - b_0(n, d)) - b_0(n, d) \\ &= \binom{n+d-1}{n} - 1 - (n+1)h + nb_0(n, d) \\ &= \binom{n+d-1}{n} - 1 - (n+1)h + \binom{n+d-1}{n-1} \\ &= \binom{n+d}{n} - 1 - (n+1)h \\ &= v(\mathcal{L}_{n,d}(2^h)). \end{aligned}$$

Agora, pela Proposição 14.3, temos que a dimensão de  $\mathcal{R}$  é dado por

$$\max \left\{ r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} - \binom{d+n-2}{n-1} + 1, -1 \right\}$$

e, assim, por tudo que vimos neste capítulo, segue que

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{R}) &= \max \left\{ r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} - \binom{d+n-2}{n-1} + 1, -1 \right\} \\ &= \max \left\{ r_{\mathbb{P}} + \binom{n+d}{n} - 1 - \binom{n+d-2}{n} - (n+1)b_0(n, d) - \binom{d+n-2}{n-1} + 1, -1 \right\} \\ &= \max \left\{ r_{\mathbb{P}} + \binom{n+d}{n} - \binom{n+d-1}{n} - (n+1)b_0(n, d), -1 \right\} \\ &= \max \left\{ r_{\mathbb{P}} + \binom{n+d-1}{n-1} - (n+1)b_0(n, d), -1 \right\} \\ &= \max \{ r_{\mathbb{P}} + nb_0(n, d) - (n+1)b_0(n, d), -1 \} \\ &= \max \{ r_{\mathbb{P}} - b_0(n, d), -1 \} \\ &= \max \{ v(\mathcal{L}_{n,d}(2^h)), -1 \} \\ &= e(\mathcal{L}_{n,d}(2^h)). \end{aligned}$$

Por fim, como  $\hat{l}_{\mathbb{P}} = \hat{l}_{\mathbb{F}} = -1$  (Lemas 16.2 e 16.3), temos por (14.2) que  $l_0 = \dim(\mathcal{R}) = e(\mathcal{L}_{n,d}(2^h))$ . Portanto, pelo Lema 14.1, o sistema linear  $\mathcal{L}_{n,d}(2^h)$  é não especial.

## Considerações Finais

Durante o trabalho, estávamos interessados em determinar quais as variedades de Veronese eram defeituosas e quais não eram defeituosas. Neste caso, o Teorema de Alexander e Hirschowitz 6.4, classifica essas variedades, resolvendo o problema. Porém, a variedade de Veronese é uma família, extremamente restrita, das variedades de Segre-Veronese.

Para as variedades de Segre-Veronese, o problema da dimensionalidade das variedades secantes ainda está em aberto. Logo, uma pergunta que podemos fazer é se dá para adaptar a prova, percorrida nesta dissertação, para as variedades de Segre-Veronese. Observe que essa questão está, intrinsecamente, ligada ao método de degeneração e, assim, um dos problemas que aparecem de imediato é na degeneração da variedade  $\mathbb{P}^n$ , pois a aplicação de Segre-Veronese tem o domínio  $\mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r}$ , o que impossibilita de usarmos o Blow-up. Contudo, isso não significa que não podemos utilizar a degeneração, um exemplo é a degeneração construída no Artigo [18] e na Dissertação [1], para classificar as variedades  $SV_{(d_1, \dots, d_r)}^{(1, \dots, 1)}$ , onde é utilizada a degeneração tórica na variedade  $(\mathbb{P}^1)^r$ , em vez do Blow-up.

Por fim, o defeito secante das variedades de Segre-Veronese é um problema em aberto na Geometria Algébrica. Por exemplo, para a família  $SV_{(d_1, d_2)}^{(n_1, n_2)}$  não há classificação. Neste caso, em específico, será que podemos adaptar a degeneração para a variedade  $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2}$ ?

## Referências Bibliográficas

- [1] C. C. Alves, *Variedades Secantes de Mergulhos de Segre-Veronese de Produtos da Reta Projetiva*, Dissertação, Mestrado em Matemática, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2023.
- [2] J. F. Munkres, *Topology*, Pearson, 2000.
- [3] H. H. Domingues, G. Iezzi, *Álgebra Moderna*, Atual Editora, 4ª edição, 2003.
- [4] M. Atiyah, *Introduction to Commutative Algebra*, Universidade de Oxford, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [5] D. A. Cox, J. Little, D. O’Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Springer, 4ª Edition, 2015.
- [6] E. L. Lima, *Álgebra Linear*, Impa, 9ª Edição, 2009.
- [7] S. A. Araújo, *Defeitos Secantes de Variedades de Segre-Veronese via Projeções Osculadoras*, 85 f, Dissertação, Mestrado em Matemática, Universidade de Federal de Itajubá, Itajubá, 2021.
- [8] F. Russo, *Tangents and Secants of Algebraic Varieties*, IMPA Monographs in Mathematics, Rio de Janeiro, Brasil, 2003.
- [9] E. Postinghel, *A new proof of the Alexander-Hirschowitz interpolation theorem*, Vol. 191, Springer, 2012, 77-94.
- [10] V. M. Manfredini, *Algoritmo: Polítopos, Simplexos e Algoritmos*, 2023, Disponível em <[https://github.com/Vinicius22111997/Politopo\\_Simplexo\\_Algoritmo.git](https://github.com/Vinicius22111997/Politopo_Simplexo_Algoritmo.git)>.
- [11] Wolfram, Disponível em <<https://www.wolfram.com/mathematica/>>.
- [12] A. Laface, A. Massarenti, R. Rischter, *On secant defectiveness and identifiability of Segre-Veronese varieties*, Rev. Mat. Iberoam. 38 (2022), no. 5, pp. 1605–1635 DOI 10.4171/RMI/1336 .
- [13] R. Hartshorne *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Univerdade da California, Berkeley, 1977.
- [14] I. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 1: Varieties in Projective Space*, Springer, 3° Edition, 2007.
- [15] E. Postinghel, *Degenerations and applications: polynomial interpolation and secant degree*, 107 f, Tese, Doutorado em Matemática, Università Degli Studi "Roma Tre", Roma, 2010.
- [16] C. Ciliberto, R. Miranda, *Degenerations of Planar Linear Systems*, J.Reine Angew. Math. 501 1998, 191-220.

- [17] J. Harris, *Algebraic Geometry: A First Course*, Springer, 1992.
- [18] A. Laface, E. Postinghel, *Secant Varieties of Segre-Veronese Embeddings  $(\mathbb{P}^1)^r$* , *Mathematische Annalen*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.