

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Relações Entre a Divergência e os Coeficientes de Lyapunov em Campos Vetoriais no Plano

Felipe Otávio dos Santos

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES.

FEVEREIRO DE 2016

ITAJUBÁ – MG.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Relações Entre a Divergência e os Coeficientes de Lyapunov em Campos Vetoriais no Plano

Felipe Otávio dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática.

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

FEVEREIRO DE 2016

ITAJUBÁ – MG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Felipe Otávio dos Santos

**Relações Entre a Divergência e os Coeficientes de Lyapunov em
Campos Vetoriais no Plano**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 17 de
Fevereiro de 2016, conferindo ao autor o título de Mestre
em Ciências em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello (Orientador)

Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga

Prof. Dr. Jaume Llibre Salo

ITAJUBÁ – MG

2016

Dedico este trabalho a Deus e a todos os meus familiares e amigos, pois sem o apoio de vocês esta conquista seria em vão.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que iluminou meu caminho nesta difícil jornada de estudos do Mestrado.

Agradeço a minha mãe (Aparecida) e ao meu pai (José), pelo apoio durante todos os momentos de minha vida e pelo amor incondicional com que me educaram. Agradeço a minha irmã (Geovana) e seu marido (Sebastião), por terem apoiado minha carreira acadêmica e também a minha sobrinha (Emilly) que trouxe alegrias e risos a minha vida.

Agradeço ao meu orientador, Luis Fernando de Osório Mello, pela dedicação e responsabilidade com que conduziu a orientação, pois seus ensinamentos contribuíram muito a minha carreira como professor. O senhor é muito mais que um professor é um exemplo de profissional.

Agradeço aos meus professores da UNIFEI, pelo excelente ensinamento e por todo carinho e disponibilidade com que ajudaram os alunos. Agradeço especialmente os professores Fábio, Denis e Jaume pela contribuição nesta dissertação.

Agradeço aos meus professores da UFSJ, que ensinaram o necessário durante a graduação em matemática para que desta forma este trabalho fosse concretizado.

Agradeço aos amigos do Mestrado, Ana Elisa, André, Camila, Daniela, Dayana, Estevão, Fábio, Luiz, Pollyanna, Tatiane, Welington, por terem dividido comigo seus conhecimentos, experiências, alegrias e tristezas. Agradeço também ao meu amigo Mauro por ter me informado sobre o mestrado em matemática da UNIFEI e meu amigo Daniel pela amizade e incentivo nos estudos.

Agradeço ao pessoal da república, Omar, Ezequiel e Marcus que compartilharam muito mais que uma casa, compartilharam alegrias, tristezas, frustrações e loucuras.

Agradeço ao padre Lucemir, ao grupo de acólitos e toda a comunidade Nossa Senhora da Agonia por terem me acolhido na igreja, fazendo com que eu renovasse minha fé em Deus.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.

Em fim, gostaria de agradecer a todos que contribuíram direta ou indiretamente para o termino deste trabalho.

“Nunca existiu uma grande inteligência sem uma veia de loucura.”

Aristóteles

Resumo

O *Problema Foco-Centro* consiste em distinguir quando um ponto singular monodrômico de um sistema de equações diferenciais no plano é um centro ou um foco. Nosso objetivo é destacar alguns resultados que relacionam a divergência de um tal sistema e as constantes de Poincaré-Lyapunov com a solução do Problema Foco-Centro e, posteriormente, expor algumas aplicações onde os teoremas estudados foram fundamentais para decidir sobre a estabilidade do sistema.

Palavras-chave: Problema Foco-Centro, Divergência, Constantes de Poincaré-Lyapunov.

Abstract

The *Focus-center problem* is to distinguish when a monodromy singular point of a system of differential equations in the plane is a center or a focus. Our goal is to highlight some results that relate the divergence of such a system and Poincaré-Lyapunov with the solution of the Focus-Center Problem and subsequently expose some applications where the theorems studied were fundamental to decide on system stability.

Keywords: Focus-Center Problem, Divergence, Poincaré-Lyapunov Constants.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
Índice	vii
Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Estrutura da Dissertação	1
2 Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais e o Problema Foco-Centro	3
2.1 Campos Vetoriais e Fluxos	3
2.1.1 Retrato de Fase de um Campo Vetorial	5
2.1.2 Equivalência e Conjugação de Campos Vetoriais	7
2.2 Estrutura Local de Pontos Singulares Hiperbólicos	9
2.2.1 Estabilidade Local Segundo Lyapunov	11
2.3 O Problema Foco-Centro em \mathbb{R}^2	12
2.3.1 Tipos de Centros	12
2.3.2 Coeficientes de Lyapunov	16
2.3.3 Divergência	17

2.3.4	Direções Características	21
2.3.5	Resultados Essenciais	22
3	O Processo Computacional	24
3.1	Calculo dos Coeficientes de Lyapunov	24
3.2	Aplicação	30
4	Relações entre a Divergência e os Coeficientes de Lyapunov	34
4.1	Resultado Fundamental	34
4.2	Centros de Tipo Linear e sua Divergência	36
4.3	Centros Nilpotentes e sua Divergência	41
4.4	Centros e sua Divergência	53
5	Aplicações	58
5.1	Exemplos	58
	Conclusões	66
	Bibliografia	67

Lista de Figuras

2.1	Trajétórias do campo \mathcal{X}	4
2.2	Centro.	6
2.3	Foco estável.	7
2.4	Foco instável.	7
2.5	Fluxo tubular.	9
2.6	Teorema de Hartman-Grobman.	10
4.1	Transformação de Poincaré.	35
4.2	Transformação de Poincaré.	45
5.1	Gráfico da função f do Teorema 5.1.5.	64

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Segundo [18], um marco na evolução das equações diferenciais ordinárias foi o trabalho de Poincaré intitulado “*Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*”, de 1881, no qual foram lançadas as bases da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. Desde então, esta teoria vem crescendo e alguns problemas permaneceram sem solução até os dias de hoje. Um deles é determinar quando um sistema analítico com um equilíbrio monodrômico é foco ou centro. Este Problema é conhecido como *Problema Foco-Centro*.

Será que há um método ou uma resposta definitiva para este problema? Se relacionarmos a divergência e os coeficientes de Lyapunov conseguiremos a resposta para o problema foco-centro? Quais estratégias podem ser usadas para determinar a estabilidade de um ponto de equilíbrio nessas condições?

As respostas para estas perguntas serão dadas ao longo desta dissertação.

1.2 Estrutura da Dissertação

Considere a seguinte equação diferencial planar

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.1)$$

onde P e Q são funções analíticas reais em uma vizinhança de $O = (0, 0)$ (origem das coordenadas do \mathbb{R}^2), tais que $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$. Quando a linearização na origem apresenta autovalores imaginários puros temos o problema foco-centro e sua investigação pode ser feita através de três subcasos: centro do tipo linear, centro nilpotente, centro degenerado com linearização nula.

Nesta dissertação, trabalharemos apenas com sistemas diferenciais analíticos e o nosso principal objetivo é apresentar e discutir resultados que relacionam a divergência do campo de vetores que define a equação diferencial e os coeficientes de Lyapunov para desta forma melhor compreender o problema foco-centro. Através destes resultados apresentamos alguns exemplos para ilustrar os resultados.

No Capítulo 2, serão introduzidos definições e teoremas da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias que serão fundamentais para facilitar o entendimento dos próximos capítulos. Também neste capítulo, explicaremos o que é o problema foco-centro apresentando teoremas e definições essenciais para o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

No Capítulo 3, apresentaremos um processo computacional para determinar os coeficientes de Lyapunov. Tais coeficientes fornecerão informações sobre a estabilidade de equilíbrios de sistemas de equações diferenciais.

No Capítulo 4, serão apresentados resultados para centros do tipo linear, centros do tipo nilpotente e centros do tipo degenerado. Tais resultados relacionam a divergência do campo de vetores que define a equação diferencial e os coeficientes de Lyapunov de modo a determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio de equações diferenciais ordinárias analíticas.

No Capítulo 5, serão feitas aplicações dos teoremas apresentados no capítulo anterior de modo a ilustrar os resultados e mostrar o quão são importantes e eficientes.

Capítulo 2

Teoria Qualitativa das Equações

Diferenciais e o Problema Foco-Centro

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados fundamentais da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) que serão utilizados no decorrer da dissertação, seguindo principalmente as notações e definições de [18]. Para um desenvolvimento mais amplo destes assuntos, recomendamos a leitura dos textos [5], [9], [12], [14] e [18].

2.1 Campos Vetoriais e Fluxos

Seja Δ um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Um Campo Vetorial de Classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$ ou $r = \omega$, em Δ é uma função $\mathcal{X} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r , isto é, as derivadas parciais até a ordem r existem e são contínuas em Δ ; se $r = \omega$, o campo é analítico em Δ , ou seja, a série de Taylor de \mathcal{X} em todo ponto de Δ converge uniformemente para \mathcal{X} numa vizinhança deste ponto.

Um campo vetorial analítico será representado da seguinte forma

$$\mathcal{X}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)), \quad (2.1)$$

onde P e Q são funções analíticas reais em uma vizinhança de O (origem das coordenadas do \mathbb{R}^2).

Um sistema de equações diferenciais será representado por

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (2.2)$$

onde o ponto denota a derivada com respeito a variável real independente t usualmente chamada de tempo.

Será comum ao longo desta dissertação nos referenciarmos a um sistema diferencial através do campo vetorial associado a ele e vice e versa.

Definição 2.1.1. *O sistema*

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \mathcal{X}(x) \quad (2.3)$$

é chamado de sistema diferencial associado ao campo de vetores \mathcal{X} . As soluções desta equação, isto é, as aplicações diferenciáveis $\gamma : I \rightarrow \Delta$ (I intervalo da reta) tais que

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = \mathcal{X}(\gamma(t)), \quad (2.4)$$

para todo $t \in I$, são chamadas trajetórias ou curvas integrais de \mathcal{X} .

Podemos admitir a seguinte interpretação geométrica da equação (2.4): γ é uma curva integral de \mathcal{X} se, e somente se, seu vetor velocidade $\dot{\gamma}(t)$ em t coincidir com o valor do campo \mathcal{X} em $\gamma(t)$. Veja Figura 2.1.

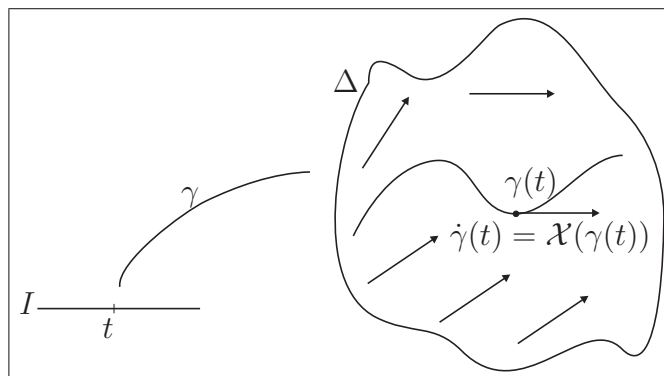


Figura 2.1: Trajetórias do campo \mathcal{X} .

Definição 2.1.2. *Um ponto $p \in \Delta$ é chamado de ponto de equilíbrio ou uma singularidade de \mathcal{X} se $\mathcal{X}(p) = 0$. Caso contrário, diremos que ele é um ponto regular de \mathcal{X} .*

Uma trajetória $\gamma : I \rightarrow \Delta$ de \mathcal{X} chama-se máxima se para toda trajetória $\zeta : J \rightarrow \Delta$ tal que $I \subseteq J$ e $\gamma = \zeta|_I$ se tenha $I = J$ e, conseqüentemente, $\gamma = \zeta$. Neste caso, I é chamado de intervalo máximo.

Teorema 2.1.1. *Seja \mathcal{X} um campo vetorial de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$ ou $r = \omega$.*

- *(Existência e unicidade de soluções máximas). Para cada $x \in \Delta$ existe um intervalo aberto I_x onde está definida a única solução máxima γ_x de (2.3) tal que $\gamma_x(0) = x$.*
- *(Propriedade de grupo). Se $y = \gamma_x(t)$ e $t \in I_x$, então $I_y = I_x - t = \{r - t : r \in I_x\}$ e $\gamma_y(s) = \gamma_x(t + s)$ para todo $s \in I_y$.*
- *(Regularidade com relação as condições iniciais). O conjunto $\Omega = \{(t, x) : x \in \Delta, t \in I_x\}$ é aberto em \mathbb{R}^{n+1} e a aplicação $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\gamma(t, x) = \gamma_x(t)$ é de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$ ou $r = \omega$, em Ω .*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [18].

Definição 2.1.3. *A aplicação $\gamma : \Omega \rightarrow \Delta$ chama-se fluxo gerado por \mathcal{X} .*

2.1.1 Retrato de Fase de um Campo Vetorial

Definição 2.1.4. *O conjunto $\Phi(p) = \{\gamma(t, p) : t \in I_p\}$, isto é, a imagem da curva integral de \mathcal{X} pelo ponto p , chama-se órbita de \mathcal{X} pelo ponto p .*

Observe que

$$a \in \Phi(p) \Leftrightarrow \Phi(p) = \Phi(a),$$

pois se $a \in \Phi(p)$, então $a = \gamma(t_1, p)$ e $\gamma(t, a) = \gamma(t, \gamma(t_1, p)) = \gamma(t + t_1, p)$ e $I_p - t_1 = I_a$.

Em outras palavras, duas órbitas de \mathcal{X} coincidem ou são disjuntas, desta forma Δ fica decomposto numa união disjunta de curvas diferenciáveis, podendo cada uma ser:

1. Imagem biunívoca de um intervalo de \mathbb{R} ;
2. Um ponto;
3. Homeomorfa a um círculo.

No segundo caso, $\{p\} = \Phi(p)$, a órbita chama-se órbita singular; no terceiro caso a órbita chama-se fechada ou periódica. Desta maneira, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2.1.2. *Se ϕ é uma solução máxima de (2.3) em I , ocorre uma das seguintes alternativas:*

- ϕ é biunívoca;
- $I = \mathbb{R}$ e ϕ é constante;
- $I = \mathbb{R}$ e ϕ é periódica, isto é, existe um $k > 0$ tal que $\phi(t + k) = \phi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e $\phi(t_1) \neq \phi(t_2)$ se $|t_1 - t_2| < k$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada na página 100 de [18].

Definição 2.1.5. *O conjunto aberto Δ , munido da decomposição em órbitas de \mathcal{X} , chama-se retrato de fase de \mathcal{X} . As órbitas são orientadas no sentido das curvas integrais do campo \mathcal{X} e os pontos de equilíbrio são munidos da orientação trivial.*

Considere a equação diferencial planar (2.2) tal que $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$, ou seja, $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio. Quando todas as órbitas do sistema (2.2) numa vizinhança perfurada de O são periódicas, então a origem é um centro. Veja Figura 2.2.

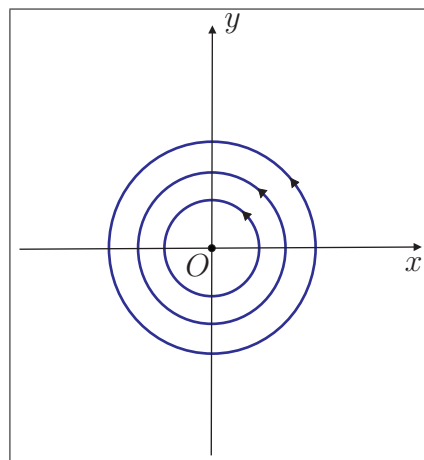


Figura 2.2: Centro.

Se as órbitas do sistema (2.2) numa vizinhança perfurada de O são espirais para O quando $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$, então dizemos que a origem é um foco. No primeiro caso, ($t \rightarrow +\infty$) dizemos que a origem é estável e no segundo caso ($t \rightarrow -\infty$) dizemos que a origem é instável. Veja Figuras 2.3 e 2.4.

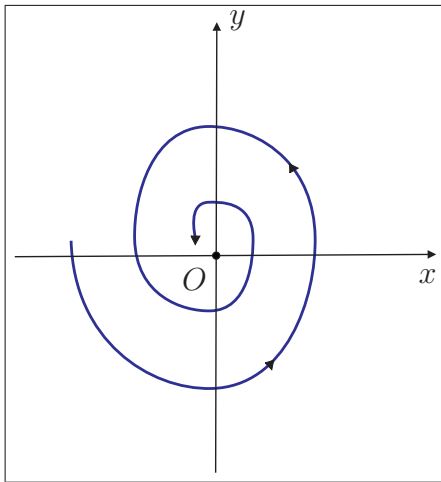


Figura 2.3: Foco estável.

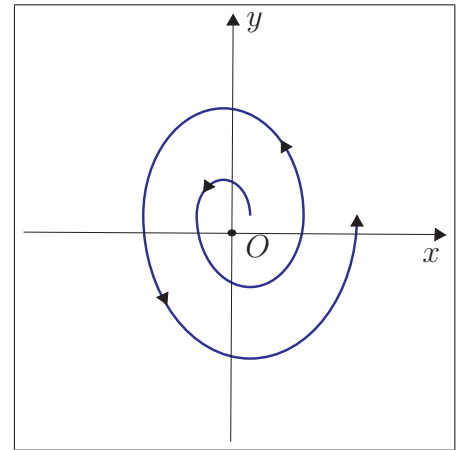


Figura 2.4: Foco instável.

De modo geral temos vários tipos de retratos de fase como, por exemplo, sela, nó, etc. No entanto, ao longo desta dissertação os únicos retratos de fase tratados serão foco ou centro. Isso ficará mais claro na Seção 2.3.

2.1.2 Equivalência e Conjugação de Campos Vetoriais

A seguir vamos introduzir algumas noções de equivalência (possuir as mesmas propriedades) entre dois campos vetoriais, as quais permitem comparar seus retratos de fase.

Definição 2.1.6. *Sejam \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 campos vetoriais definidos nos abertos Δ_1 e Δ_2 do \mathbb{R}^n , respectivamente. Dizemos que \mathcal{X}_1 é topologicamente equivalente (resp. C^r -equivalente) a \mathcal{X}_2 se existe um homeomorfismo (resp. um difeomorfismo de classe C^r) $H : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ que leva órbitas de \mathcal{X}_1 em órbitas de \mathcal{X}_2 preservando a orientação. Mais precisamente, se $p \in \Delta_1$ e $\Phi_1(p)$ é a órbita orientada de \mathcal{X}_1 passando por p , então $H(\Phi_1(p))$ é a órbita orientada $\Phi_2(H(p))$ de \mathcal{X}_2 passando por $H(p)$.*

Definição 2.1.7. *Sejam $\gamma_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\gamma_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ os fluxos gerados pelos campos $\mathcal{X}_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{X}_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, respectivamente. Dizemos que \mathcal{X}_1 é topologicamente conjugado (resp. C^r -conjugado) a \mathcal{X}_2 quando existe um homeomorfismo (resp. um difeomorfismo de classe C^r) $\Upsilon : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ tal que*

$$\Upsilon(\gamma_1(t, x)) = \gamma_2(t, \Upsilon(x)),$$

para todo $(t, x) \in \Omega_1$.

O homeomorfismo Υ chama-se conjugação topológica (resp. C^r -conjugação) entre \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 .

Lema 2.1.1. *Sejam $\mathcal{X}_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{X}_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos de classe C^r nos abertos Δ_1 e Δ_2 do \mathbb{R}^n e $\Upsilon : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ um difeomorfismo de classe C^r . Então Υ é uma conjugação entre \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 se, e somente se,*

$$D\Upsilon(p)\mathcal{X}_1(p) = \mathcal{X}_2(\Upsilon(p)),$$

para todo $p \in \Delta_1$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada na página 103 de [18].

Definição 2.1.8. *Sejam $\mathcal{X} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r , no aberto $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $g : B \rightarrow \Delta$ de classe C^r chama-se seção transversal local de \mathcal{X} (de classe C^r) quando, para todo $b \in B$, $Dg(b)(\mathbb{R}^{n-1})$ e $\mathcal{X}(g(b))$ geram o espaço \mathbb{R}^n .*

Consideremos $\Sigma = g(B)$ munido da topologia induzida. Se $g : B \rightarrow \Sigma$ for um homeomorfismo, dizemos que Σ é uma seção transversal de \mathcal{X} .

O seguinte teorema nos mostra que numa vizinhança de um ponto regular o retrato de fase de um campo \mathcal{X} é facilmente entendido.

Teorema 2.1.3 (Fluxo Tubular). *Seja p um ponto regular de um campo vetorial \mathcal{X} de classe C^r , com $r > 1$. Então existe um difeomorfismo de classe C^r que conjugua \mathcal{X} , em uma vizinhança de p , com o campo constante $\chi = (1, 0, 0, 0, \dots)$ restrito a uma vizinhança da origem.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada na página 105 de [18]. Veja Figura 2.5.

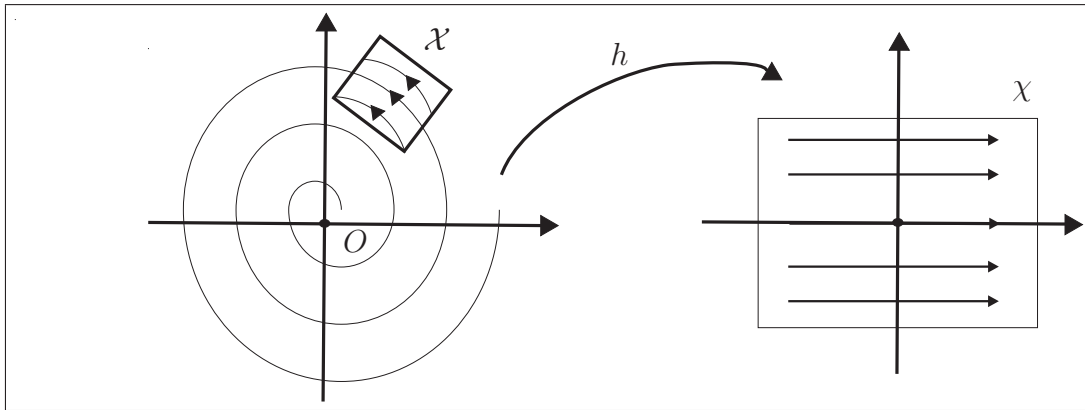


Figura 2.5: Fluxo tubular.

2.2 Estrutura Local de Pontos Singulares Hiperbólicos

Definição 2.2.1. *Seja p um ponto de equilíbrio de (2.1). O ponto de equilíbrio p é dito monodrômico se não existem órbitas se aproximando, ou se afastando, de p , com tangente bem definida em p .*

Definição 2.2.2. *Considere o sistema de equações diferenciais analítico no plano (2.2) associado ao campo (2.1) e seja $p \in \mathbb{R}^2$ um ponto de equilíbrio de \mathcal{X} . Dizemos que*

$$D\mathcal{X}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(p) & \frac{\partial P}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(p) & \frac{\partial Q}{\partial y}(p) \end{pmatrix}$$

é a linearização do campo \mathcal{X} em p . Esta matriz é chamada de Matriz Jacobiana.

Definição 2.2.3. *Considere o sistema de equações diferenciais analítico no plano (2.2) associado ao campo (2.1) e seja $p \in \mathbb{R}^2$ um ponto de equilíbrio de \mathcal{X} . Dizemos que p é um ponto de equilíbrio hiperbólico de \mathcal{X} se a sua linearização $D\mathcal{X}(p)$ possui todos os*

seus autovalores com partes reais não nulas. Caso contrário, diremos que o ponto é não hiperbólico.

Definição 2.2.4. *Seja p um ponto de equilíbrio de um campo (2.1) de classe C^r , com $r \geq 1$ ou $r = \omega$. Então p é denominado:*

1. *tipo linear, se zero não é autovalor de $D\mathcal{X}(p)$;*
2. *degenerado, se o determinante de $D\mathcal{X}(p)$ é nulo. Um ponto degenerado é chamado de:*
 - 2.1 *degenerado elementar, se apenas um dos autovalores de $D\mathcal{X}(p)$ for nulo;*
 - 2.2 *nilpotente, se os dois autovalores são nulos, mas $D\mathcal{X}(p)$ não é a matriz nula;*
 - 2.3 *linearmente nulo, se $D\mathcal{X}(p)$ é a matriz nula.*
3. *isolado, se existe uma vizinhança \mathcal{U}_p de p tal que p é o único ponto de equilíbrio.*

Teorema 2.2.1 (Hartman-Grobman). *Sejam $\mathcal{X} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 no aberto $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ e p um ponto singular hiperbólico. Então existem vizinhanças V de p em Δ e W de 0 em \mathbb{R}^n tais que $\mathcal{X}|_V$ é topologicamente conjugado a $D\mathcal{X}(p)|_W$.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [15].

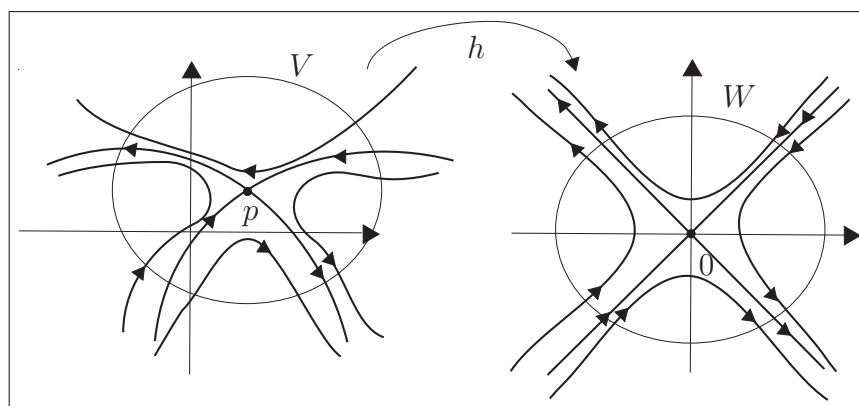


Figura 2.6: Teorema de Hartman-Grobman.

O Teorema de Hartman-Grobman nos diz que, numa vizinhança de uma singularidade hiperbólica, o comportamento de um campo não linear é o mesmo de sua linearização. Apresentamos na Figura 2.6 a interpretação geométrica do Teorema de Hartman-Grobman.

2.2.1 Estabilidade Local Segundo Lyapunov

Para o estudo da estabilidade de uma singularidade uma ferramenta indispensável é o critério de Lyapunov. Desta maneira, esta seção traz conceitos essenciais para discutirmos a estabilidade de soluções de sistemas de equações diferenciais.

Definição 2.2.5. *Dados $\mathcal{X} : \Delta \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial e $p \in \Delta$ uma singularidade de \mathcal{X} , temos que:*

1. *p é estável, se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $\|x - p\| < \delta$ implica $\|\gamma(t, x) - p\| < \varepsilon$, para todo $t > 0$;*
2. *p é instável se não for estável;*
3. *p é assintoticamente estável se p é estável e, além disso, existe um $\delta > 0$ tal que $\|x - p\| < \delta$ implica $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t, x) = p$;*
4. *p é assintoticamente instável se p é instável e, além disso, existe um $\delta > 0$ tal que $\|x - p\| < \delta$ implica $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t, x) = p$.*

Considere um campo vetorial \mathcal{X} e $V : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . A derivada de V na direção do campo \mathcal{X} no ponto $p \in \Delta$ é definida por

$$\dot{V} = \nabla V(p) \cdot \mathcal{X}(p).$$

Definição 2.2.6. *Considere o campo \mathcal{X} e a função V dada acima e $p \in \Delta$ um ponto singular de \mathcal{X} , assim temos:*

- a) *V é uma função de Lyapunov para o campo \mathcal{X} se $V(x) \geq 0$, para todo $x \in \Delta$, $V(x) = 0$ se, e somente se, $x = p$ e $\dot{V} \leq 0$, para todo $x \in \Delta$;*

b) V é uma função de Lyapunov estrita para o campo \mathcal{X} se V é uma função de Lyapunov e, além disso, $\dot{V} < 0$ para todo $x \in \Delta \setminus \{p\}$.

Teorema 2.2.2. *Seja p um ponto de equilíbrio isolado do campo \mathcal{X} . Se existir um função de Lyapunov V definida em algum domínio $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ contendo p , então p é uma singularidade estável. Se V for uma função de Lyapunov estrita, então p será uma singularidade assintoticamente estável.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [18].

2.3 O Problema Foco-Centro em \mathbb{R}^2

Considere a equação diferencial planar (2.2) com $P(0,0) = Q(0,0) = 0$. Suponha que $O = (0,0)$ seja um ponto de equilíbrio isolado deste sistema. Considere o campo de vetores (2.1) associado à equação diferencial planar (2.2). Suponha que a matriz jacobiana $J(O) = D\mathcal{X}(O)$ tenha autovalores complexos conjugados, logo numa vizinhança suficientemente próxima da origem, as soluções de (2.2) circulam a origem.

Nas hipóteses acima, o Problema Foco-Centro consiste em determinar quando a origem é um centro ou um foco (estável ou instável). Desta forma, os únicos retratos de fase que nos interessam são aqueles associados com centros e focos.

Como nessa dissertação nosso intuito é melhor entender o problema foco-centro, através de sistemas diferenciais analíticos, apresentaremos a Proposição 2.3.1 que é válida apenas para esse tipo de sistema.

Proposição 2.3.1. *Se p é um ponto de equilíbrio monodrômico de (2.2), então p é um foco ou um centro.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [6] e [11].

2.3.1 Tipos de Centros

Proposição 2.3.2. *Considere um campo planar analítico \mathcal{X} da forma (2.1), com um equilíbrio não degenerado isolado em $(0,0)$. Suponha que os autovalores de sua parte*

linear na origem são da forma $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Então este campo pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta y + F_1(x, y), \\ \dot{y} = \beta x + \alpha y + F_2(x, y), \end{cases} \quad (2.5)$$

onde F_1 e F_2 são funções analíticas numa vizinhança da origem, com F_1, F_2 e suas derivadas parciais em relação a x e y se anulando na origem.

Demonstração. O campo \mathcal{X} é analítico numa vizinhança da origem, então podemos escrever $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \frac{\partial P}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial P}{\partial y}(0, 0)y + \zeta(x, y), \\ Q(x, y) &= \frac{\partial Q}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial Q}{\partial y}(0, 0)y + \psi(x, y), \end{aligned}$$

onde as funções ζ e ψ são analíticas, com ζ e ψ e suas derivadas parciais em relação a x e y se anulando na origem. Chamemos

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0, 0) = a, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(0, 0) = b, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(0, 0) = c \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(0, 0) = d,$$

logo, segue que (2.2) fica da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + \zeta(x, y), \\ \dot{y} = cx + dy + \psi(x, y). \end{cases} \quad (2.6)$$

Temos que

$$D\mathcal{X}(0, 0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

portanto seu polinômio característico é dado por

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc).$$

Como por hipótese, a origem é um equilíbrio não degenerado e isolado, obtemos que $ad - bc \neq 0$. Assim, $\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = (a - d)^2 - 4bc$.

Por outro lado, como os autovalores são $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ então

$$\Delta < 0 \longrightarrow b, c \neq 0.$$

Considere a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{cases} \bar{x} = x, \\ \bar{y} = \left(\frac{\alpha - a}{\beta}\right)x - \frac{b}{\beta}y. \end{cases} \quad (2.7)$$

Observe que, o fato de $\beta \neq 0$ garante que (2.7) está bem definido. Desta maneira (2.6), após a mudança (2.7) é expressa da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \alpha\bar{x} - \beta\bar{y} + \bar{F}_1(\bar{x}, \bar{y}), \\ \dot{\bar{y}} = \beta\bar{x} + \alpha\bar{y} + \bar{F}_2(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (2.8)$$

onde \bar{F}_1, \bar{F}_2 são funções analíticas com \bar{F}_1 e \bar{F}_2 e suas derivadas parciais em relação a x e y se anulando na origem. Para finalizar basta retornar à notação inicial nas variáveis x e y , e desta forma obtemos (2.5). \square

Proposição 2.3.3. *Considere um campo planar analítico \mathcal{X} da forma (2.1), tal que $(0, 0)$ seja um ponto singular isolado degenerado nilpotente. Então este campo pode ser escrito como*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + F_1(x, y), \\ \dot{y} = F_2(x, y), \end{cases} \quad (2.9)$$

onde F_1 e F_2 são funções analíticas numa vizinhança da origem, com F_1, F_2 e suas derivadas parciais em relação a x e y se anulando na origem.

Demonstração. O campo \mathcal{X} é analítico numa vizinhança da origem, então podemos escrever $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ da seguinte forma

$$P(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial P}{\partial y}(0, 0)y + \zeta(x, y),$$

$$Q(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial Q}{\partial y}(0, 0)y + \psi(x, y),$$

onde as funções ζ e ψ são analíticas, com ζ e ψ e suas derivadas parciais em relação a x e y se anulando na origem. Chamemos

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0, 0) = a, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(0, 0) = b, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(0, 0) = c \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(0, 0) = d,$$

logo, segue que (2.2) fica da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + \zeta(x, y), \\ \dot{y} = cx + dy + \psi(x, y). \end{cases} \quad (2.10)$$

Temos que

$$D\mathcal{X}(0, 0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

portanto seu polinômio característico é dado por

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc).$$

Como por hipótese, a origem é um ponto singular degenerado nilpotente, obtemos que

$$\begin{cases} |a| + |b| + |c| + |d| \neq 0, \\ a + d = 0, \\ ad - bc = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Observamos que $D\mathcal{X}(0, 0)$ é uma matriz nilpotente de ordem 2. De fato, aplicando as condições obtidas acima temos

$$D\mathcal{X}^2(0, 0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & cd + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a + d) & b(a + d) \\ c(a + d) & d(a + d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a forma Canônica de Jordan para matrizes 2×2 nilpotentes tem a seguinte forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, renomeando as coordenadas x e y e trocando-as entre si, obtemos a expressão (2.9). \square

Proposição 2.3.4. *Considere um campo planar analítico \mathcal{X} da forma (2.1), tal que $(0, 0)$ seja um ponto singular degenerado linearmente nulo, com $D\mathcal{X}(0, 0)$ a matriz nula. Então este campo pode ser escrito como*

$$\begin{cases} \dot{x} = F_1(x, y), \\ \dot{y} = F_2(x, y), \end{cases} \quad (2.12)$$

onde F_1 e F_2 são funções analíticas numa vizinhança da origem, com F_1 , F_2 e suas derivadas parciais em relação a x e y se anulando na origem.

Demonstração. Como o sistema (2.1) é analítico temos que numa vizinhança da origem podemos escrevê-lo na forma (2.6). Como por hipótese, $D\mathcal{X}(0,0)$ é a matriz nula, segue que o sistema tem a forma (2.12). \square

Resumindo o sistema (2.2) pode ser reescrito em umas das seguintes equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + F_1(x, y), \\ \dot{y} = x + F_2(x, y), \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y + F_1(x, y), \\ \dot{y} = F_2(x, y), \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = F_1(x, y), \\ \dot{y} = F_2(x, y), \end{cases} \quad (2.15)$$

onde F_1 e F_2 são funções analíticas reais sem termos constantes e lineares definidas numa vizinhança da origem.

Os sistemas (2.13), (2.14), (2.15) são chamados, respectivamente, de centro do tipo linear, centro nilpotente e centro degenerado. O sistema (2.13) é obtido de (2.5) no caso em que $\alpha = 0$ e através de uma mudança no tempo $\bar{t} = \beta t$.

2.3.2 Coeficientes de Lyapunov

Suponha que o sistema diferencial analítico (2.2) tem um ponto singular monodrômico na origem O . Seja Σ uma seção transversal analítica, isto é, um arco transversal analítico para o fluxo do sistema de tal forma que $O \in \partial \Sigma$, o bordo de Σ . Consideramos um parâmetro ρ de Σ tal que $\rho = 0$ corresponde a origem das coordenadas e Σ é parametrizada pelo intervalo $(0, \rho^*)$ com $\rho^* > 0$. Dado um ponto ρ em Σ consideramos a órbita do sistema (2.2) com ρ como condição inicial. Se ρ está suficientemente próximo de O e seguirmos a órbita para valores positivos do tempo t , ela irá intersectar Σ novamente em algum ponto.

Definimos a transformação de Poincaré $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$, sendo $P(\rho)$ o ponto em Σ correspondente ao primeiro retorno em Σ da órbita através de ρ em tempo positivo.

Desse modo, a origem do sistema (2.2) é um centro se, e somente se, a aplicação de Poincaré é a identidade numa seção transversal em uma vizinhança da origem.

Para os sistemas (2.13) e (2.14) é possível achar uma parametrização de Σ tal que a aplicação de Poincaré é analítica em $\rho = 0$ e se escreve como

$$P(\rho) = \rho + \sum_{i=3}^{\infty} \alpha_i \rho^i,$$

onde α_i são expressões algébricas dos coeficientes de F_1 e F_2 . Existem sistemas com a forma degenerada (2.15) para o qual tal parametrização também é possível, por exemplo, aqueles que não tem direções características.

A estabilidade da origem é claramente dada pelo sinal do primeiro coeficiente α_i diferente de zero (isto é, instável se $\alpha_i > 0$ ou estável se $\alpha_i < 0$) e se todos os α_i são nulos, então a origem é um centro. Além disso, os termos de índices par α_{2k} são expressões algébricas que dependem de cada α_i anterior. Portanto, as expressões interessantes são aquelas com índices ímpares, ou seja, os α_{2k+1} . Definimos a $(k+1)$ -ésima constante de Poincaré-Lyapunov ou o $(k+1)$ -ésimo coeficiente de Lyapunov como a expressão α_{2k+1} módulo o anulamento de todos os anteriores.

2.3.3 Divergência

Como de costume, definimos a divergência do sistema (2.2), e denotamos por div , como a função

$$\text{div}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Dada uma função real analítica $f : \mathcal{U}_O \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, onde \mathcal{U}_O é uma vizinhança da origem $O = (0, 0)$, considere sua expansão de Taylor em O

$$f(x, y) = f_d(x, y) + \mathcal{O}_{d+1}(x, y),$$

onde $d \geq 0$ é um inteiro e f_d é um polinômio homogêneo não-nulo de grau d . Dizemos que f é de *sinal definido*, se $f_d(x, y) > 0$ ou $f_d(x, y) < 0$ para todo $(x, y) \in \mathcal{U}_O \setminus \{(0, 0)\}$.

Quando $f_d(x, y) > 0$ (respectivamente $f_d(x, y) < 0$) para todo $(x, y) \in \mathcal{U}_O \setminus \{(0, 0)\}$, dizemos que f é definida positiva (respectivamente definida negativa). É claro que uma condição necessária para f ser de sinal definido é que d seja par.

A seguir vamos enunciar um teorema que relaciona a divergência do sistema original com a divergência de um sistema obtido através de uma mudança de variáveis.

Proposição 2.3.5. *Considere o sistema diferencial (2.2) e uma mudança de variáveis*

$$\begin{cases} x = F(u, v), \\ y = G(u, v), \end{cases}$$

com F, G funções de classe C^2 em U . Denote por

$$\begin{cases} \dot{u} = R(u, v), \\ \dot{v} = S(u, v), \end{cases}$$

a transformação do sistema diferencial nas coordenadas u e v . Seja

$$J(u, v) = \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) \frac{\partial G}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \frac{\partial G}{\partial u}(u, v)$$

o jacobiano da transformação. Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F(u, v), G(u, v)) &= \frac{\partial R}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) + \\ &\quad \frac{1}{J(u, v)} \left(\frac{\partial J}{\partial u}(u, v) R(u, v) + \frac{\partial J}{\partial v}(u, v) S(u, v) \right). \end{aligned}$$

Demonstração. Sabemos que

$$\frac{\partial P}{\partial u}(F(u, v), G(u, v)) = \frac{\partial P}{\partial x}(F(u, v), G(u, v)) \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial P}{\partial y}(F(u, v), G(u, v)) \frac{\partial G}{\partial u}(u, v),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u}(F(u, v), G(u, v)) = \frac{\partial Q}{\partial x}(F(u, v), G(u, v)) \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial Q}{\partial y}(F(u, v), G(u, v)) \frac{\partial G}{\partial u}(u, v),$$

$$\frac{\partial P}{\partial v}(F(u, v), G(u, v)) = \frac{\partial P}{\partial x}(F(u, v), G(u, v)) \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial P}{\partial y}(F(u, v), G(u, v)) \frac{\partial G}{\partial v}(u, v),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial v}(F(u, v), G(u, v)) = \frac{\partial Q}{\partial x}(F(u, v), G(u, v)) \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial Q}{\partial y}(F(u, v), G(u, v)) \frac{\partial G}{\partial v}(u, v),$$

e como

$$\operatorname{div}(F(u, v), G(u, v)) = \frac{\partial P}{\partial x}(F(u, v), G(u, v)) + \frac{\partial Q}{\partial y}(F(u, v), G(u, v)), \quad (2.16)$$

então basta resolver o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial v}(F, G) \\ \frac{\partial Q}{\partial v}(F, G) \\ \frac{\partial P}{\partial u}(F, G) \\ \frac{\partial Q}{\partial u}(F, G) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial G}{\partial v}(u, v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial G}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(F(u, v), G(u, v)) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(F(u, v), G(u, v)) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(F(u, v), G(u, v)) \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(F(u, v), G(u, v)) \end{bmatrix}.$$

Desta forma concluímos que

$$\frac{\partial P}{\partial x}(F(u, v), G(u, v)) = -\frac{1}{J(u, v)} \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) \frac{\partial P}{\partial v}(F, G) + \frac{1}{J(u, v)} \frac{\partial G}{\partial v}(u, v) \frac{\partial P}{\partial u}(F, G) \quad (2.17)$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(F(u, v), G(u, v)) = \frac{1}{J(u, v)} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) \frac{\partial Q}{\partial v}(F, G) - \frac{1}{J(u, v)} \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \frac{\partial Q}{\partial u}(F, G). \quad (2.18)$$

Assim substituindo (2.17) e (2.18) em (2.16), temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F(u, v), G(u, v)) &= \frac{\partial P}{\partial x}(F(u, v), G(u, v)) + \frac{\partial Q}{\partial y}(F(u, v), G(u, v)) = \frac{1}{J(u, v)} \\ &\left(\frac{\partial G}{\partial v}(u, v) \frac{\partial P}{\partial u}(F, G) - \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) \frac{\partial P}{\partial v}(F, G) - \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \frac{\partial Q}{\partial u}(F, G) + \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) \frac{\partial Q}{\partial v}(F, G) \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Por outro lado, sabemos que

$$\dot{x} = \frac{\partial F}{\partial u}(u, v)\dot{u} + \frac{\partial F}{\partial v}(u, v)\dot{v} = P(F(u, v), G(u, v))$$

e

$$\dot{y} = \frac{\partial G}{\partial u}(u, v)\dot{u} + \frac{\partial G}{\partial v}(u, v)\dot{v} = Q(F(u, v), G(u, v)),$$

logo resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} P(F(u, v), G(u, v)) \\ Q(F(u, v), G(u, v)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial G}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}$$

obtemos que

$$\dot{u} = \frac{1}{J(u, v)} \left(\frac{\partial G}{\partial v}(u, v)P(F(u, v), G(u, v)) - \frac{\partial F}{\partial v}(u, v)Q(F(u, v), G(u, v)) \right) = R(u, v)$$

e

$$\dot{v} = \frac{1}{J(u, v)} \left(-\frac{\partial G}{\partial u}(u, v)P(F(u, v), G(u, v)) + \frac{\partial F}{\partial u}(u, v)Q(F(u, v), G(u, v)) \right) = S(u, v).$$

Tomando

$$A(u, v) = \left(\frac{\partial G}{\partial v}(u, v)P(F(u, v), G(u, v)) - \frac{\partial F}{\partial v}(u, v)Q(F(u, v), G(u, v)) \right)$$

e

$$B(u, v) = \left(-\frac{\partial G}{\partial u}(u, v)P(F(u, v), G(u, v)) + \frac{\partial F}{\partial u}(u, v)Q(F(u, v), G(u, v)) \right),$$

temos que

$$\frac{1}{J(u, v)}A(u, v) = R(u, v) \quad \text{e} \quad \frac{1}{J(u, v)}B(u, v) = S(u, v)$$

logo,

$$A(u, v) = J(u, v)R(u, v) \tag{2.20}$$

e

$$B(u, v) = J(u, v)S(u, v). \tag{2.21}$$

Derivando parcialmente com respeito a u ambos os membros da igualdade (2.20) e derivando parcialmente com respeito a v ambos os membros da igualdade (2.21), temos que

$$\frac{\partial A}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial J}{\partial u}(u, v)R(u, v) + J(u, v)\frac{\partial R}{\partial u}(u, v) \tag{2.22}$$

e

$$\frac{\partial B}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial J}{\partial v}(u, v)S(u, v) + J(u, v)\frac{\partial S}{\partial v}(u, v). \tag{2.23}$$

Somando membro a membro das igualdades (2.22) e (2.23) temos

$$\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v} = \left(\frac{\partial J}{\partial u}(u, v)R(u, v) + \frac{\partial J}{\partial v}(u, v)S(u, v) \right) + J(u, v) \left(\frac{\partial R}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \right),$$

logo

$$\frac{1}{J(u, v)} \left(\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v} \right) = \frac{\partial R}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) + \frac{1}{J(u, v)} \left(\frac{\partial J}{\partial u}(u, v)R(u, v) + \frac{\partial J}{\partial v}(u, v)S(u, v) \right).$$

Assim, para finalizar a demonstração, basta mostrarmos que o membro direito da igualdade anterior é igual a (2.19). Observe que

$$\begin{aligned} \frac{1}{J(u, v)} \left(\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v} \right) &= \frac{1}{J(u, v)} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial G}{\partial v}(u, v)P(F, G) - \frac{\partial F}{\partial v}(u, v)Q(F, G) \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial v} \left(-\frac{\partial G}{\partial u}(u, v)P(F(u, v), G(u, v)) + \frac{\partial F}{\partial u}(u, v)Q(F(u, v), G(u, v)) \right) \right] \\ &= \frac{1}{J(u, v)} \left[\frac{\partial G}{\partial u \partial v}(u, v)P(F, G) + \frac{\partial P}{\partial u}(F, G) \frac{\partial G}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial F}{\partial u \partial v}(u, v)Q(F, G) - \frac{\partial Q}{\partial u}(F, G) \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial G}{\partial v \partial u}(u, v)P(F, G) - \frac{\partial P}{\partial v}(F, G) \frac{\partial G}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial F}{\partial v \partial u}(u, v)Q(F, G) + \frac{\partial Q}{\partial v}(F, G) \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) \right] \\ &= \frac{1}{J(u, v)} \left[\frac{\partial G}{\partial v}(u, v) \frac{\partial P}{\partial u}(F, G) - \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) \frac{\partial P}{\partial v}(F, G) - \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \frac{\partial Q}{\partial u}(F, G) + \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) \frac{\partial Q}{\partial v}(F, G) \right]. \end{aligned}$$

□

2.3.4 Direções Características

Suponha o sistema diferencial analítico

$$\begin{cases} \dot{x} = P_n(x, y) + \mathcal{O}_{n+1}(x, y), \\ \dot{y} = Q_m(x, y) + \mathcal{O}_{m+1}(x, y), \end{cases} \quad (2.24)$$

onde $n \geq 1$ e $m \geq 1$ são inteiros e P_n e Q_m são polinômios homogêneos não nulos de graus n e m respectivamente, formados pelos termos de menor ordem de P e Q do sistema (2.2), respectivamente.

Definimos o polinômio homogêneo

$$\Delta(x, y) = \begin{cases} yP_n(x, y) - xQ_m(x, y), & \text{se } n = m; \\ yP_n(x, y), & \text{se } n < m; \\ -xQ_m(x, y), & \text{se } n > m. \end{cases} \quad (2.25)$$

Os fatores lineares reais do polinômio $\Delta(x, y)$ fornecem as possíveis direções das trajetórias que podem se aproximar ou se afastar do ponto singular localizado na origem das coordenadas do sistema (2.24). Tais direções são chamadas *direções características*.

Uma condição suficiente para que o sistema (2.24) tenha um ponto singular monodrômico na origem é $\Delta(x, y) = 0$ apenas se $(x, y) = (0, 0)$. Neste caso, a origem não tem direções características.

Uma condição necessária para que o sistema (2.24) tenha um ponto singular monodrômico na origem é que $\Delta(x, y) > 0$ ou $\Delta(x, y) < 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

2.3.5 Resultados Essenciais

Definição 2.3.1. *Um sistema (2.13) é do tipo tempo-reversível se existe uma aplicação $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que*

$$\frac{d}{dt}(R(z)) = -f(R(z)),$$

onde $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(z) = dz/dt$.

Teorema 2.3.1. *Todo sistema da forma (2.13) do tipo tempo-reversível tem um centro na origem.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [17].

Teorema 2.3.2 (Liouville). *Se um campo planar de classe C^1 tem divergência nula então seu fluxo preserva área.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada na página 252 em [4].

Teorema 2.3.3 (Critério de Bendixson). *Se $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ é um campo de classe C^1 em $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, Δ um conjunto simplesmente conexo, com*

$$\operatorname{div} \mathcal{X} = \frac{\partial \mathcal{X}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{X}_2}{\partial x_2} \neq 0$$

para todos os pontos de Δ , então \mathcal{X} não tem órbitas periódicas em Δ .

A demonstração deste teorema pode ser encontrada na página 244 em [4].

Capítulo 3

O Processo Computacional

O objetivo deste capítulo é apresentar um processo computacional para determinar os coeficientes de Lyapunov. Tais coeficientes fornecem informações sobre a estabilidade de equilíbrios de sistemas de equações diferenciais. Para um estudo mais aprofundado sobre este processo, recomendamos a leitura da referência [16].

3.1 Cálculo dos Coeficientes de Lyapunov

Considere \tilde{P} e \tilde{Q} funções analíticas numa vizinhança da origem, e $(0, 0)$ um ponto singular isolado do sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = \tilde{P}(u, v), \\ \dot{v} = \tilde{Q}(u, v). \end{cases} \quad (3.1)$$

Vamos supor que sua linearização na origem apresente um foco ou um centro. Desta forma, com mudanças adequadas de coordenadas, tal como na Proposição 2.3.2, o sistema (3.1) pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{u} = v + \lambda u + P(u, v), \\ \dot{v} = -u + \lambda v + Q(u, v), \end{cases} \quad (3.2)$$

onde P e Q são funções analíticas e a este sistema temos associado o seguinte campo vetorial $\mathcal{X}(u, v) = (v + \lambda u + P(u, v), -u + \lambda v + Q(u, v))$. Considere a função

$$V(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

para (u, v) numa vizinhança da origem. Assim,

$$\begin{aligned}\dot{V}(u, v) &= \nabla V(u, v) \cdot \mathcal{X}(u, v) = (u, v)(v + \lambda u + P(u, v), -u + \lambda v + Q(u, v)) = \\ &= \lambda u^2 + uP + \lambda v^2 + vQ = \lambda(u^2 + v^2) + uP + vQ.\end{aligned}$$

Logo, o sinal de \dot{V} em uma vizinhança da origem é determinado pelo sinal de λ . Desta forma, se $\lambda \neq 0$ dizemos que a origem é um foco forte e se $\lambda = 0$ dizemos que a origem é um foco fraco ou um centro. Pelo Teorema 2.2.2, se $\lambda < 0$ a origem é assintoticamente estável e se $\lambda > 0$ a origem é assintoticamente instável. O Teorema 2.2.2, neste caso, é válido tomando o simétrico do campo vetorial associado com (3.2) ou o negativo do fluxo. Agora vamos estudar a estabilidade do equilíbrio $(0, 0)$ quando $\lambda = 0$.

Quando $\lambda = 0$, o sistema (3.2) assume a forma

$$\begin{cases} \dot{u} = v + P(u, v), \\ \dot{v} = -u + Q(u, v), \end{cases} \quad (3.3)$$

com

$$\begin{aligned}P(u, v) &= \sum_{k=2}^m P_k(u, v) + \mathcal{O}(\|(u, v)\|^{m+1}), \\ Q(u, v) &= \sum_{k=2}^m Q_k(u, v) + \mathcal{O}(\|(u, v)\|^{m+1}),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}P_k(u, v) &= \sum_{j=0}^k p_{k-j,j} u^{k-j} v^j, \\ Q_k(u, v) &= \sum_{j=0}^k q_{k-j,j} u^{k-j} v^j.\end{aligned}$$

Observação 3.1.1. A notação \mathcal{O} denota a expansão em série de Taylor, em torno da origem, iniciando-se nos termos de ordem $m + 1$ no mínimo.

Considere a função

$$V(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \sum_{k=3}^{m+1} V_k(u, v) + \mathcal{O}(\|(u, v)\|^{m+2}), \quad (3.4)$$

onde

$$V_k(u, v) = \sum_{j=0}^k V_{k-j,j} u^{k-j} v^j$$

são polinômios homogêneos de grau k nas variáveis u e v . Tomando a expansão em série de Taylor até os termos de ordem 3, o sistema (3.3) tem a forma

$$\begin{cases} \dot{u} = v + P_2(u, v) + P_3(u, v) + \mathcal{O}(\|(u, v)\|^4), \\ \dot{v} = -u + Q_2(u, v) + Q_3(u, v) + \mathcal{O}(\|(u, v)\|^4), \end{cases} \quad (3.5)$$

com

$$\begin{aligned} P_2(u, v) &= p_{20}u^2 + p_{11}uv + p_{02}v^2, \\ P_3(u, v) &= p_{30}u^3 + p_{21}u^2v + p_{12}uv^2 + p_{03}v^3, \\ Q_2(u, v) &= q_{20}u^2 + q_{11}uv + q_{02}v^2, \\ Q_3(u, v) &= q_{30}u^3 + q_{21}u^2v + q_{12}uv^2 + q_{03}v^3. \end{aligned}$$

A função (3.4) com $m = 3$ é dada por

$$V(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + V_3(u, v) + V_4(u, v) + \mathcal{O}(\|(u, v)\|^5) \quad (3.6)$$

onde

$$\begin{aligned} V_3(u, v) &= V_{30}u^3 + V_{21}u^2v + V_{12}uv^2 + V_{03}v^3, \\ V_4(u, v) &= V_{40}u^4 + V_{31}u^3v + V_{22}u^2v^2 + V_{13}uv^3 + V_{04}v^4. \end{aligned}$$

Diferenciando (3.6) ao longo das órbitas de (3.5) segue que

$$\begin{aligned} \dot{V}(u, v) &= \left(R_3(u, v) + \left(v \frac{\partial V_3}{\partial u}(u, v) - u \frac{\partial V_3}{\partial v}(u, v) \right) \right) \\ &+ \left(R_4(u, v) + \left(v \frac{\partial V_4}{\partial u}(u, v) - u \frac{\partial V_4}{\partial v}(u, v) \right) \right) \\ &+ \mathcal{O}(\|(u, v)\|^5), \end{aligned} \quad (3.7)$$

com

$$\begin{aligned} R_3(u, v) &= uP_2(u, v) + vQ_2(u, v), \\ R_4(u, v) &= uP_3(u, v) + vQ_3(u, v) + P_2(u, v) \frac{\partial V_3}{\partial u}(u, v) + Q_2(u, v) \frac{\partial V_3}{\partial v}(u, v). \end{aligned}$$

Agora vamos considerar os seguintes espaços vetoriais

$$\begin{aligned} P_n &= \left\{ p(u, v) = \sum_{j=0}^n b_{n-j,j} u^{n-j} v^j : \text{grau}(p) = n, b_{n-j,j} \in \mathbb{R} \right\}, \\ \mathbb{R}^{n+1} &= \left\{ w : w = \sum_{j=0}^n w_{n-j,j} e_{j+1}, w_{n-j,j} \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

O conjunto $B_P^n = \{u^n, u^{n-1}v, \dots, uv^{n-1}, v^n\}$ é uma base para P_n e o conjunto $B_{\mathbb{R}}^{n+1} = \{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ é a base canônica em \mathbb{R}^{n+1} . Desta forma, temos a seguinte transformação linear de P_n em \mathbb{R}^{n+1}

$$S_n: P_n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$p(u, v) = \sum_{j=0}^n b_{n-j,j} u^{n-j} v^j \longmapsto w = \sum_{j=0}^n b_{n-j,j} e_{j+1}.$$

Considere também a seguinte transformação linear

$$T_n: P_n \longrightarrow P_n$$

$$p(u, v) \longmapsto T_n(p(u, v)) = v \frac{\partial p}{\partial u}(u, v) - u \frac{\partial p}{\partial v}(u, v). \quad (3.8)$$

Agora, tomemos as bases B_P^3 e B_P^4 para P_3 e P_4 , respectivamente, logo as matrizes A_3 e A_4 com relação a essas bases, são respectivamente,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposição 3.1.1. *Quando n é ímpar, a transformação linear T_n é um isomorfismo. Quando n é par, T_n possui um núcleo de dimensão um gerado por $(u^2 + v^2)^{\frac{n}{2}}$.*

Demonstração. A demonstração desta proposição pode ser encontrada na página 584 em [3]. □

Da Proposição 3.1.1, V_3 pode ser escolhido de maneira única de forma a cancelar os termos de grau 3 em (3.7). Tal escolha é realizada resolvendo-se o seguinte sistema linear

$$A_3 S_3(V_3(u, v)) = -S_3(uP_2(u, v) + vQ_2(u, v)),$$

onde

$$S_3(V_3(u, v)) = (V_{30}, V_{21}, V_{12}, V_{03}),$$

$$S_3(uP_2 + vQ_2) = (p_{20}, p_{11} + q_{20}, p_{02} + q_{11}, q_{02}).$$

Segue que

$$(V_{30}, V_{21}, V_{12}, V_{03}) = \left(-\frac{1}{3}(p_{11} + q_{20} + 2q_{02}), p_{20}, -q_{02}, \frac{1}{3}(p_{02} + 2p_{20} + q_{11}) \right).$$

Como T_4 não é um isomorfismo, a mesma metodologia não pode ser aplicada para a escolha dos coeficientes de V_4 , mas este pode ser escolhido de modo que \dot{V} tenha um sinal bem definido. Isto pode ser feito impondo que os termos de ordem 4 de (3.7) pertençam ao núcleo de T_4 . Assim, os coeficientes de V_4 podem ser obtidos através de

$$A_4 \left(S_4 \left(uP_3(u, v) + vQ_3(u, v) + P_2(u, v) \frac{\partial V_3}{\partial u}(u, v) + Q_2(u, v) \frac{\partial V_3}{\partial v}(u, v) \right) + A_4 S_4(V_4(u, v)) \right) = 0,$$

onde

$$S_4(V_4(u, v)) = (V_{40}, V_{31}, V_{22}, V_{13}, V_{04}),$$

$$S_4 \left(uP_3(u, v) + vQ_3(u, v) + P_2(u, v) \frac{\partial V_3}{\partial u}(u, v) + Q_2(u, v) \frac{\partial V_3}{\partial v}(u, v) \right) = (s_{40}, s_{31}, s_{22}, s_{13}, s_{04}),$$

com

$$\begin{aligned} s_{40} &= p_{11}p_{20} + p_{30} + 2p_{20}q_{02}, \\ s_{31} &= p_{11}^2 - p_{20}^2 + p_{21} - p_{20}q_{11} + 2q_{20}q_{02} + p_{11}(q_{20} + 2q_{02}) + q_{30}, \\ s_{22} &= p_{12} - 2p_{20}p_{11} + p_{02}(p_{11} + 2q_{02}) + 2q_{11}q_{02} - 2p_{20}q_{20} - q_{11}q_{20} + q_{21}, \\ s_{13} &= p_{03} + q_{02}p_{11} + 2q_{02}^2 - 2p_{20}q_{11} - q_{11}^2 - p_{02}(2p_{20} + q_{11}) + q_{12}, \\ s_{04} &= -2p_{20}q_{02} - q_{02}q_{11} + q_{03}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} V_{40} &= \frac{1}{4}(2q_{20}q_{02} - q_{12} - 3p_{11}p_{20} - q_{30} - 2p_{20}^2 + p_{11}^2 + 3q_{02}p_{11} + p_{11}q_{20} \\ &\quad - p_{21} + 2q_{02}^2 - q_{11}p_{02} - q_{11}^2 - p_{03} - 2p_{20}p_{02}) + 1, \\ V_{31} &= \frac{1}{8}(5p_{30} - 7p_{20}p_{11} - 16q_{02}p_{20} - 3q_{03} - q_{21} - q_{02}q_{11} - 2p_{20}q_{20} - q_{20}q_{11} \\ &\quad + p_{02}p_{11} + 2q_{02}p_{02} - p_{12}), \\ V_{22} &= \frac{1}{2}(2q_{02}^2 - q_{11}p_{02} - 2p_{20}q_{11} - q_{11}^2 + q_{02}p_{11} - q_{12} - p_{03} - 2p_{20}p_{02}) + 2, \\ V_{13} &= \frac{1}{8}(3p_{30} - p_{20}p_{11} - 16q_{02}p_{20} - 5q_{03} + q_{21} + 7q_{02}q_{11} + 2p_{20}q_{20} \\ &\quad + q_{20}q_{11} - p_{02}p_{11} - 2q_{02}p_{02} + p_{12}), \\ V_{04} &= 1. \end{aligned}$$

A partir destas escolhas feitas para V_3 e V_4 , temos que

$$\dot{V}(u, v) = \eta_4(u^2 + v^2)^2 + \mathcal{O}(\|(u, v)\|^5), \quad (3.9)$$

com

$$\eta_4 = \frac{1}{8}(3q_{03} - p_{20}p_{11} + 3p_{30} + q_{21} + q_{02}q_{11} + 2p_{20}q_{20} + q_{20}q_{11} - p_{02}p_{11} - 2q_{02}p_{02} + p_{12}).$$

A equação (3.9) determina a estabilidade da origem. De fato, como

$$V(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + V_3(u, v) + V_4(u, v) \quad (3.10)$$

temos pelo Teorema 2.2.2 que se $\eta_4 = 0$ não podemos determinar a estabilidade da origem, mas se $\eta_4 > 0$ o Teorema 2.2.2, neste caso, é válido tomando o simétrico do campo vetorial associado com (3.2) ou o negativo do fluxo assim temos que V é uma função de Lyapunov estrita e, portanto, a origem é assintoticamente instável, e caso contrário, $\eta_4 < 0$, V é uma função de Lyapunov estrita e a origem é assintoticamente estável.

O processo descrito acima é puramente algébrico e visa estudar a estabilidade da origem do sistema (3.3) construindo-se recursivamente funções candidatas à funções de Lyapunov para o sistema (3.3).

Se $\eta_4 = 0$ na equação (3.9), podemos proceder de forma análoga ao que já fizemos para obter η_4 e, assim, a Proposição 3.1.1 garante que podemos produzir uma nova função V , tal que o primeiro termo da expressão para \dot{V} é $\eta_6(u^2 + v^2)^3$ e assim por diante. Resumidamente, V pode ser escolhida de modo que

$$\dot{V}(u, v) = \eta_4(u^2 + v^2)^2 + \eta_6(u^2 + v^2)^3 + \dots + \eta_{2k}(u^2 + v^2)^k + \dots .$$

Agora vamos apresentar dois teoremas importantes sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio. Denotaremos daqui para frente, o primeiro coeficiente de Lyapunov por α_1 , o segundo por α_2 e, assim, sucessivamente.

Teorema 3.1.1. *Suponha $\alpha_n = 0$, $n = 1, \dots, N$, mas $\alpha_{N+1} \neq 0$, então a estabilidade da singularidade na origem é determinada da seguinte forma:*

- a) *Se $\alpha_{N+1} < 0$, então a singularidade é assintoticamente estável;*
- b) *Se $\alpha_{N+1} > 0$, então a singularidade é assintoticamente instável.*

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [3]. \square

Teorema 3.1.2 (Centro de Lyapunov). *Se o campo vetorial \mathcal{X} é analítico e $\alpha_n = 0$ para $n = 1, \dots, \infty$, então a origem é um centro. Além disto, a série que define V é convergente numa vizinhança da origem e representa uma função cujos conjuntos de nível contém as órbitas do sistema correspondente ao campo \mathcal{X} .*

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [3]. \square

3.2 Aplicação

Usaremos o processo descrito anteriormente em um exemplo, na qual o sistema está na forma normal de Birkhoff.

Teorema 3.2.1. *Considere o sistema na forma normal de Birkhoff*

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + S_1(u^2 + v^2)u - S_2(u^2 + v^2)v \\ \dot{v} = u + S_2(u^2 + v^2)u + S_1(u^2 + v^2)v \end{cases} \quad (3.11)$$

com S_1 e S_2 são funções analíticas com $S_1(0) = S_2(0) = 0$, cuja parte linear no ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é um centro. Denote por $z = u^2 + v^2$. Então os coeficientes c_j definidos por

$$S_1(u^2 + v^2) = \sum_{j \geq 1} c_j z^j$$

são as constantes de Poincaré-Lyapunov de (3.11).

Demonstração. Escreva

$$S_1(u^2 + v^2) = c_1(u^2 + v^2) + c_2(u^2 + v^2)^2 + c_3(u^2 + v^2)^3 + c_4(u^2 + v^2)^4 + \dots = \sum_{j \geq 1} c_j z^j$$

e

$$S_2(u^2 + v^2) = b_1(u^2 + v^2) + b_2(u^2 + v^2)^2 + b_3(u^2 + v^2)^3 + b_4(u^2 + v^2)^4 + \dots = \sum_{j \geq 1} b_j z^j.$$

Assim, o sistema (3.11) pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + \left(\sum_{j \geq 1} c_j (u^2 + v^2)^j \right) u - \left(\sum_{j \geq 1} b_j (u^2 + v^2)^j \right) v \\ \dot{v} = u + \left(\sum_{j \geq 1} b_j (u^2 + v^2)^j \right) u + \left(\sum_{j \geq 1} c_j (u^2 + v^2)^j \right) v \end{cases} \quad (3.12)$$

Considere a função

$$V(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + V_3(u, v) + V_4(u, v) + \mathcal{O}(\|(u, v)\|^5), \quad (3.13)$$

onde

$$\begin{aligned} V_3(u, v) &= V_{30}u^3 + V_{21}u^2v + V_{12}uv^2 + V_{03}v^3, \\ V_4(u, v) &= V_{40}u^4 + V_{31}u^3v + V_{22}u^2v^2 + V_{13}uv^3 + V_{04}v^4. \end{aligned}$$

Escrevendo (3.12) de uma forma mais adequada temos

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + c_1(u^2 + v^2)u - b_1(u^2 + v^2)v + c_2(u^2 + v^2)^2u - b_2(u^2 + v^2)^2v + \dots = F(u, v), \\ \dot{v} = u + b_1(u^2 + v^2)u + c_1(u^2 + v^2)v + b_2(u^2 + v^2)^2u + c_2(u^2 + v^2)^2v + \dots = G(u, v). \end{cases} \quad (3.14)$$

Diferenciando (3.13) ao longo das órbitas de (3.14) segue que

$$\begin{aligned} \dot{V}(u, v) &= \left(u + \frac{\partial V_3}{\partial u}(u, v) + \dots, v + \frac{\partial V_3}{\partial v}(u, v) + \dots \right) \cdot (F(u, v), G(u, v)) \\ &= - \left(v \frac{\partial V_3}{\partial u}(u, v) - u \frac{\partial V_3}{\partial v}(u, v) \right) + c_1(u^2 + v^2)^2 - \left(v \frac{\partial V_4}{\partial u}(u, v) - u \frac{\partial V_4}{\partial v}(u, v) \right). \end{aligned}$$

Considere as seguintes transformações lineares

$$\begin{aligned} T_3 : P_3 &\longrightarrow P_3 \\ V_3(u, v) &\longmapsto T_3(V_3(u, v)) = v \frac{\partial V_3}{\partial u}(u, v) - u \frac{\partial V_3}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_4 : P_4 &\longrightarrow P_4 \\ V_4(u, v) &\longmapsto T_4(V_4(u, v)) = v \frac{\partial V_4}{\partial u}(u, v) - u \frac{\partial V_4}{\partial v}(u, v). \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.1.1, T_3 é um isomorfismo e T_4 possui um núcleo de dimensão um gerado por $(u^2 + v^2)^2$. Desta forma temos que

$$\dot{V}(u, v) = -T_3(V_3(u, v)) + c_1(u^2 + v^2)^2 - T_4(V_4(u, v)).$$

Como T_3 é um isomorfismo podemos tomar $V_3(u, v) = 0u^3 + 0u^2v + 0uv^2 + 0v^3$ e assim,

$$\dot{V}(u, v) = c_1(u^2 + v^2)^2 - T_4(V_4(u, v)). \quad (3.15)$$

Contudo, V_4 pode ser escolhido de forma que \dot{V} tenha sinal bem definido. Como sabemos isto pode ser feito impondo que os termos de ordem 4 de (3.15) pertençam ao núcleo de T_4 . Como $c_1(u^2 + v^2)^2 \in \text{Ker } T_4$ podemos tomar $V_4(u, v) = 0u^4 + 0u^3v + 0u^2v^2 + 0uv^3 + 0v^4$. Através destas escolhas para $V_3(u, v)$ e $V_4(u, v)$, segue que

$$\dot{V}(u, v) = c_1(u^2 + v^2)^2. \quad (3.16)$$

Desta forma a expressão (3.16) determina a estabilidade da origem se $c_1 \neq 0$.

Considere a função (3.4) com $m = k$, onde k é um número ímpar maior ou igual à 3, onde

$$V(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + V_3(u, v) + V_4(u, v) + \cdots + V_k(u, v) + V_{k+1}(u, v) + \mathcal{O}(\|(u, v)\|^{k+2}).$$

Suponhamos que para $m = k$, podemos escolher $V_j \equiv 0$ para $j = 3, 4, \dots, k + 1$, de tal modo que

$$\dot{V}(u, v) = c_{\frac{k+1}{2}-1}(u^2 + v^2)^{\frac{k+1}{2}}, \quad (3.17)$$

onde a expressão (3.17) determina a estabilidade da origem se

$$c_{\frac{k+1}{2}-1} \neq 0.$$

Agora provemos que a função (3.4) com $m = k + 2$, ou seja,

$$V(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + V_3(u, v) + \cdots + V_{k+1}(u, v) + V_{k+2}(u, v) + V_{k+3}(u, v) + \mathcal{O}(\|(u, v)\|^{k+4}),$$

pode ser escolhido $V_j \equiv 0$ para $j = 3, 4, \dots, k + 3$, de tal modo que

$$\dot{V}(u, v) = c_{\frac{k+3}{2}-1}(u^2 + v^2)^{\frac{k+3}{2}}, \quad (3.18)$$

onde a expressão (3.18) determina a estabilidade da origem se

$$c_{\frac{k+3}{2}-1} \neq 0.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \dot{V}(u, v) &= \left(u + \cdots + \frac{\partial V_{k+2}}{\partial u}(u, v) + \cdots, v + \cdots + \frac{\partial V_{k+2}}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial V_{k+3}}{\partial v}(u, v) + \cdots \right) \\ &\cdot (-v + S_1(z)u - S_2(z)v, u + S_2(z)u + S_1(z)v). \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, sabemos que $V_j \equiv 0$ para $j = 3, \dots, k+1$, logo

$$\frac{\partial V_j}{\partial u}(u, v) \quad \text{e} \quad \frac{\partial V_j}{\partial v}(u, v)$$

são nulos, então

$$\begin{aligned} \dot{V}(u, v) &= \left(u + \frac{\partial V_{k+2}}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial V_{k+3}}{\partial u}(u, v) \cdots, v + \frac{\partial V_{k+2}}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial V_{k+3}}{\partial v}(u, v) \cdots \right) \\ &\quad \cdot \left(-v + S_1(z)u - S_2(z)v, u + S_2(z)u + S_1(z)v \right) \\ &= - \left(v \frac{\partial V_{k+2}}{\partial u} - u \frac{\partial V_{k+2}}{\partial v} \right) + c_{\frac{k+3}{2}-1} (u^2 + v^2)^{\frac{k+3}{2}} - \left(v \frac{\partial V_{k+3}}{\partial u} - u \frac{\partial V_{k+3}}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Daí temos,

$$\dot{V}(u, v) = -T_{k+2}(V_{k+2}(u, v)) + c_{\frac{k+3}{2}-1} (u^2 + v^2)^{\frac{k+3}{2}} - T_{k+3}(V_{k+3}(u, v)).$$

Pela Proposição 3.1.1, como $k+2$ é ímpar, T_{k+2} é um isomorfismo, então podemos tomar $V_{k+2}(u, v) \equiv 0$, logo

$$\dot{V}(u, v) = c_{\frac{k+3}{2}-1} (u^2 + v^2)^{\frac{k+3}{2}} - T_{k+3}(V_{k+3}(u, v)).$$

Contudo, $k+3$ é par, desta forma V_{k+3} deve ser escolhido de forma que \dot{V} tenha sinal bem definido. Assim impondo que os termos de ordem $k+3$ pertençam ao núcleo de T_{k+3} temos que

$$c_{\frac{k+3}{2}-1} (u^2 + v^2)^{\frac{k+3}{2}} \in \text{Ker } T_{k+3},$$

daí podemos tomar $V_{k+3}(u, v) \equiv 0$. Como V_{k+2} e V_{k+3} são nulas segue que

$$\dot{V}(u, v) = c_{\frac{k+3}{2}-1} (u^2 + v^2)^{\frac{k+3}{2}}, \quad (3.19)$$

onde (3.19) determina a estabilidade da origem se

$$c_{\frac{k+3}{2}-1} \neq 0.$$

Desta forma, os coeficientes c_j para $j \geq 1$ da função $S_1(z)$ são as constantes de Poincaré-Lyapunov do sistema (3.11). \square

Capítulo 4

Relações entre a Divergência e os Coeficientes de Lyapunov

O objetivo deste capítulo é apresentar e discutir os principais resultados que relacionam a divergência e os coeficientes de Lyapunov em campos vetoriais no plano. Tais resultados podem ser encontrados em [10] e [13].

4.1 Resultado Fundamental

Proposição 4.1.1. *Suponha que a origem do sistema diferencial analítico (2.2) é um ponto singular monodrômico. Se a divergência $\operatorname{div}\mathcal{X}$ do sistema (2.2) é de sinal definido, então a origem do sistema (2.2) é um foco; instável se a divergência é definida positiva ou estável se for definida negativa.*

Demonstração. Vamos mostrar que a origem do sistema (2.2) é um foco. Para demonstrar tal fato, utilizaremos o Critério de Bendixson 2.3.3. Por hipótese temos que a divergência do sistema (2.2) é de sinal definido, então existe uma vizinhança \mathcal{U}_O da origem em que $\operatorname{div}\mathcal{X}(x, y) > 0$ ou $\operatorname{div}\mathcal{X}(x, y) < 0$ para todo $(x, y) \in \mathcal{U}_O \setminus \{(0, 0)\}$. Suponhamos que a origem é um centro, então existe uma órbita periódica contínua completamente contida em \mathcal{U}_O , o que contradiz o Critério de Bendixson 2.3.3, assim a origem é um foco. Agora, vamos provar que se a $\operatorname{div}\mathcal{X}$ é definida positiva, então a origem de (2.2) é um foco instável. Vamos

considerar uma seção transversal Σ cuja fronteira contém a origem e uma vizinhança \mathcal{U}_O da origem, tal que $\text{div}\mathcal{X}(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in \mathcal{U}_O \setminus \{(0, 0)\}$. Vamos considerar somente a interseção de Σ com \mathcal{U}_O . Fixamos um ponto ρ em Σ e consideramos o ponto $P(\rho)$ em Σ correspondente à sua imagem pela aplicação de Poincaré. Se ρ está suficientemente perto da origem, podemos garantir que $P(\rho)$ está contido em \mathcal{U}_O . Definimos a curva fechada C formada pelo arco da órbita de ρ a $P(\rho)$ junto com o segmento de Σ entre estes dois pontos denotado por l . Veja Figura 4.1.

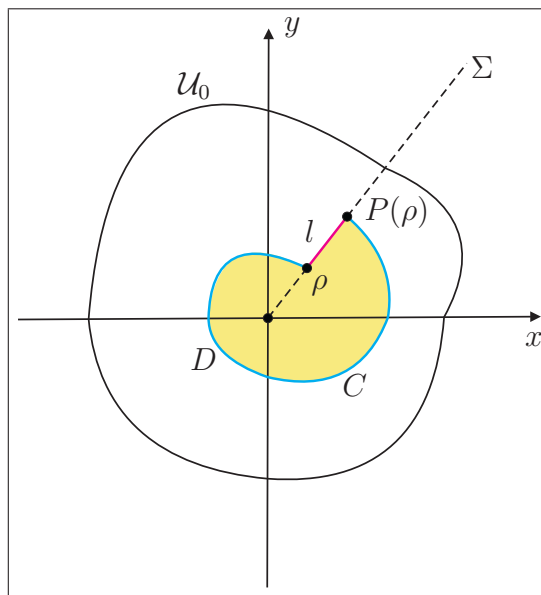


Figura 4.1: Transformação de Poincaré.

Sabemos que a divergência do campo \mathcal{X} é o traço da matriz jacobiana de \mathcal{X} , ou seja, $\text{div}\mathcal{X}(x, y) = \text{tr}D\mathcal{X}(x, y)$. Como a divergência de um campo determina a taxa de variação da área pela ação do fluxo do campo, segue do Teorema de Liouville 2.3.2, e do fato de $\text{div}\mathcal{X}(x, y) > 0$, que a origem de (2.2) é um foco instável. A prova quando $\text{div}\mathcal{X}$ é negativa é análoga. \square

4.2 Centros de Tipo Linear e sua Divergência

Proposição 4.2.1. *Considere o sistema diferencial analítico (2.2) cuja origem é do tipo centro linear. Denote por $\text{div}_d(x, y)$ os termos de menor ordem da divergência $\text{div}\mathcal{X}$ do sistema. Suponha que*

$$\alpha_{d+1} = \frac{1}{d+2} \int_0^{2\pi} \text{div}_d(\cos t, \sin t) dt \neq 0.$$

Então a origem é um foco cuja primeira constante não nula de Poincaré-Lyapunov é α_{d+1} .

Demonstração. Consideramos a mudança de variáveis $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$, com $u(x, y) = x + \tilde{u}(x, y)$ e $v(x, y) = y + \tilde{v}(x, y)$ que é próxima à identidade, cuja expansão em série de Taylor das funções \tilde{u} e \tilde{v} numa vizinhança da origem não possuem termos constantes nem lineares. Através desta mudança, o sistema diferencial analítico (2.13) pode ser escrito na forma normal de Birkhoff (3.11). Observamos que a divergência de (3.11) é uma função de $u^2 + v^2$, dada por

$$\delta(u^2 + v^2) = 2S_1(u^2 + v^2) + 2(u^2 + v^2)S_1'(u^2 + v^2).$$

No Teorema 3.2.1, mostramos que os coeficientes da expansão de Taylor da função S_1 são as constantes de Poincaré-Lyapunov. Assim escrevendo S_1 em potências de z temos

$$S_1(z) = \sum_{j \geq 1} c_j z^j,$$

na qual podemos identificar $c_j = \alpha_{2j+1}/2\pi$, onde α_{2j+1} é a constante de Poincaré-Lyapunov associado ao sistema (3.11). Desta forma, a divergência de (3.11) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \delta(z) &= 2S_1(z) + 2zS_1'(z) = 2 \sum_{j \geq 1} c_j z^j + 2z \sum_{j \geq 1} j c_j z^{j-1} = 2 \sum_{j \geq 1} c_j z^j + 2 \sum_{j \geq 1} z j c_j \frac{z^j}{z} \\ &= 2 \left(\sum_{j \geq 1} (1+j) c_j z^j \right) = 2 \left(\sum_{j \geq 1} (1+j) \frac{\alpha_{2j+1}}{2\pi} z^j \right) \\ &= \frac{2}{2\pi} \sum_{j \geq 1} (1+j) \alpha_{2j+1} z^j = \frac{1}{\pi} \sum_{j \geq 1} (1+j) \alpha_{2j+1} z^j. \end{aligned}$$

Portanto, se a primeira constante não nula de Poincaré-Lyapunov do sistema (3.11) é α_{2k+1} , temos que os termos de menor ordem da divergência são

$$\delta_k(u^2 + v^2) = (k + 1)\alpha_{2k+1} \frac{(u^2 + v^2)^k}{\pi}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \delta_k(\cos t, \sin t) dt &= \int_0^{2\pi} (k + 1)\alpha_{2k+1} \frac{(\cos^2 t + \sin^2 t)^k}{\pi} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (k + 1)\alpha_{2k+1} \frac{1}{\pi} dt = \frac{1}{\pi} (k + 1)\alpha_{2k+1} \int_0^{2\pi} dt = 2(k + 1)\alpha_{2k+1}. \end{aligned}$$

Desta maneira, obtemos o resultado para o sistema (3.11).

Denotamos por $x = F(u, v)$, $y = G(u, v)$ a mudança de variáveis que leva o sistema (3.11) para o sistema de tipo linear (2.13) e $J(u, v)$ o seu jacobiano. Calculando $J(u, v)$ da mudança de variáveis temos $J(u, v) = 1 + \mathcal{O}_1(u, v)$. Pela Proposição 2.3.5, relacionamos a divergência dos sistemas (3.11) e (2.13) através da seguinte expressão

$$\operatorname{div}(F(u, v), G(u, v)) = \delta(u^2 + v^2) + \frac{1}{J(u, v)} \left(\frac{\partial J}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial J}{\partial v} \dot{v} \right), \quad (4.1)$$

onde $\operatorname{div}(F(u, v), G(u, v))$ é a divergência do sistema (2.13). Denotamos por $\phi_t(\rho)$ a solução do sistema (3.11) com condição inicial no ponto $(\rho, 0)$ com $\rho > 0$ suficientemente pequeno e expressamos a solução $\phi_t(\rho)$ pelas componentes $(u(t, \rho), v(t, \rho))$. Quando $\rho = 0$, temos que $\phi_t(0) = (u(t, 0), v(t, 0)) = (0, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, corresponde ao ponto singular na origem. Assim, expandindo as componentes de $\phi_t(\rho)$ em potências de ρ temos

$$u(t, \rho) = u_1(t)\rho + \mathcal{O}(\rho^2) \quad e \quad v(t, \rho) = v_1(t)\rho + \mathcal{O}(\rho^2).$$

Uma vez que, a condição inicial de $\phi_t(\rho)$ é o ponto $(\rho, 0)$, deduzimos que $u_1(0) = 1$ e $v_1(0) = 0$. Observamos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi_t(\rho) &= \frac{d}{dt} (u(t, \rho), v(t, \rho)) = D_t(u_1(t)\rho + \mathcal{O}(\rho^2), v_1(t)\rho + \mathcal{O}(\rho^2)) = \\ &= (u_1'(t)\rho + \mathcal{O}(\rho^2), v_1'(t)\rho + \mathcal{O}(\rho^2)). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi_t(\rho) &= \left(-v + S_1(u^2 + v^2)u - S_2(u^2 + v^2)v, u + S_2(u^2 + v^2)u + S_1(u^2 + v^2)v \right) \Big|_{(u,v)=\phi_t(\rho)} \\ &= \left(-v_1(t)\rho - \mathcal{O}(\rho^2), u_1(t)\rho + \mathcal{O}(\rho^2) \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Assim, igualando os termos de menor ordem de ρ em (4.2) e (4.3), concluimos que

$$u_1'(t)\rho = -v_1(t)\rho \Rightarrow u_1'(t) = -v_1(t)$$

e

$$v_1'(t)\rho = u_1(t)\rho \Rightarrow v_1'(t) = u_1(t)$$

logo, como a condição inicial de $\phi_t(\rho)$ é o ponto $(\rho, 0)$ e $u_1(0) = 1$ e $v_1(0) = 0$, verificamos que $u_1(t) = \cos(t)$ e $v_1 = \sin(t)$. Desta forma, $\phi_t(\rho) = \rho(\cos(t), \sin(t)) + \mathcal{O}(\rho^2)$. A aplicação de Poincaré associada ao sistema (3.11) é $P(\rho) = \phi_{T(\rho)}(\rho)$ para $T(\rho) > 0$ com $T(\rho) = 2\pi + \mathcal{O}(\rho)$. Assumimos que a aplicação de Poincaré seja dada por

$$P(\rho) = \rho + \alpha_{2k+1}\rho^{2k+1} + \mathcal{O}(\rho^{2k+2}),$$

com $k \geq 1$ e $\alpha_{2k+1} \neq 0$. Integramos o primeiro termo do membro direito de (4.1) e avaliamos na órbita $\phi_t(\rho)$ para t de 0 a $T(\rho)$ e obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^{T(\rho)} \left(\delta(u^2 + v^2) \right)_{(u,v)=\phi_t(\rho)} dt \\ &= \int_0^{2\pi + \mathcal{O}(\rho)} \left(\frac{(k+1)\alpha_{2k+1}}{\pi} (u^2 + v^2)^k + \mathcal{O}(\rho^{k+1}) \right)_{(u,v)=\phi_t(\rho)} dt \\ &= \int_0^{2\pi + \mathcal{O}(\rho)} \left(\frac{(k+1)\alpha_{2k+1}}{\pi} ([\rho \cos(t) + \mathcal{O}(\rho^2)]^2 + [\rho \sin(t) + \mathcal{O}(\rho^2)]^2)^k \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi + \mathcal{O}(\rho)} \left(\frac{(k+1)\alpha_{2k+1}}{\pi} [\rho^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) + \mathcal{O}(\rho^3)]^k \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi+\mathcal{O}(\rho)} \left(\frac{(k+1)\alpha_{2k+1}}{\pi} [\rho^{2k} + \mathcal{O}(\rho^{3k})] \right) dt \\
&= \int_0^{2\pi+\mathcal{O}(\rho)} \frac{(k+1)\alpha_{2k+1}}{\pi} \rho^{2k} dt + \int_0^{2\pi+\mathcal{O}(\rho)} \frac{(k+1)\alpha_{2k+1}}{\pi} \mathcal{O}(\rho^{3k}) dt \\
&= 2(k+1)\alpha_{2k+1}\rho^{2k} + \mathcal{O}(\rho^{2k+1}).
\end{aligned}$$

Integramos também o segundo termo do membro direito de (4.1) avaliados na órbita $\phi_t(\rho)$ para t de 0 a $T(\rho)$ e verificamos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T(\rho)} \frac{1}{J(u,v)} \left(\frac{\partial J}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial J}{\partial v} \dot{v} \right) \Big|_{(u,v)=\phi_t(\rho)} dt \\
&= \ln[J(\phi_t(\rho))]_0^{T(\rho)} = \ln[J(\phi_{T(\rho)}(\rho))] - \ln[J(\phi_0(\rho))] = \ln[J(P(\rho), 0)] - \ln[J(\rho, 0)] \\
&= \ln \left[J(0, 0) + \frac{\partial J}{\partial u}(0, 0)P(\rho) + \dots \right] - \ln \left[J(0, 0) + \frac{\partial J}{\partial u}(0, 0)\rho + \dots \right] \\
&= \left[J(0, 0) + \frac{\partial J}{\partial u}(0, 0)P(\rho) + \dots \right] - \left[J(0, 0) + \frac{\partial J}{\partial u}(0, 0)\rho + \dots \right] \\
&= J(0, 0) - J(0, 0) + \frac{\partial J}{\partial u}(0, 0)(P(\rho) - \rho) + \dots \\
&= \frac{\partial J}{\partial u}(0, 0)(\rho + \alpha_{2k+1}\rho^{2k+1} + \mathcal{O}(\rho^{2k+2}) - \rho) + \mathcal{O}(\rho^{2k+2}) \\
&= \alpha_{2k+1}\rho^{2k+1} \left(\frac{\partial J}{\partial u}(0, 0) \right) + \mathcal{O}(\rho^{2k+2}).
\end{aligned}$$

Finalmente, integramos a identidade (4.1) e avaliados na órbita $\phi_t(\rho)$ para t de 0 a $T(\rho)$ temos

$$\int_0^{T(\rho)} \operatorname{div}(F(u, v), G(u, v)) \Big|_{(u,v)=\phi_t(\rho)} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{T(\rho)} \left(\delta(u^2 + v^2) + \frac{1}{J(u, v)} \left(\frac{\partial J}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial J}{\partial v} \dot{v} \right) \right) \Big|_{(u, v) = \phi_t(\rho)} dt \\
&= \int_0^{T(\rho)} \left(\delta(u^2 + v^2) \right) \Big|_{(u, v) = \phi_t(\rho)} dt + \int_0^{T(\rho)} \frac{1}{J(u, v)} \left(\frac{\partial J}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial J}{\partial v} \dot{v} \right) \Big|_{(u, v) = \phi_t(\rho)} dt \\
&= 2(k+1)\alpha_{2k+1}\rho^{2k} + \mathcal{O}(\rho^{2k+1}). \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\operatorname{div}(F(u, v), G(u, v)) = \operatorname{div}_d(u, v) + \mathcal{O}_{d+1}(u, v),$$

assim, por outro lado, temos

$$\int_0^{T(\rho)} \operatorname{div}(F(u, v), G(u, v)) \Big|_{(u, v) = \phi_t(\rho)} dt = \rho^d \int_0^{2\pi} \operatorname{div}_d(\cos t, \operatorname{sent}) dt + \mathcal{O}(\rho^{d+1}). \quad (4.5)$$

De (4.4) e (4.5) temos

$$2(k+1)\alpha_{2k+1}\rho^{2k} = \rho^d \int_0^{2\pi} \operatorname{div}_d(\cos t, \operatorname{sent}) dt$$

Logo, tomando $d = 2k$ obtemos

$$\alpha_{2k+1} = \frac{1}{2k+2} \int_0^{2\pi} \operatorname{div}_d(\cos t, \operatorname{sent}) dt \neq 0.$$

□

A nossa próxima proposição é um caso particular da Proposição 4.2.1 e nos fornece uma método rápido para se obter os coeficientes de Poincaré-Lyapunov.

Proposição 4.2.2. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + P_s(x, y), \\ \dot{y} = x + Q_s(x, y), \end{cases} \quad (4.6)$$

onde $P_s(x, y)$ e $Q_s(x, y)$ são polinômios homogêneos de grau ímpar s . As constantes de Poincaré-Lyapunov do sistema (4.6) são $\alpha_i = 0$ para $i = 1, 2, 3, \dots, s-1$ e

$$\alpha_s = \frac{1}{s+1} \int_0^{2\pi} \operatorname{div}(\cos t, \operatorname{sent}) dt. \quad (4.7)$$

Demonstração. Considere o sistema (4.6), cuja origem é do tipo centro linear. Temos que os termos de menor ordem da divergência de (4.6) são $\text{div}_{s-1}(x, y)$, logo

$$\alpha_s = \frac{1}{s+1} \int_0^{2\pi} \text{div}_{s-1}(\cos t, \sin t) dt \neq 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_s = \frac{1}{s+1} \int_0^{2\pi} \text{div}_{s-1}(\cos t, \tilde{\sin} t) dt = 0.$$

Como P_s e Q_s são polinômios homogêneos de grau ímpar s , então $\text{div}_{s-1}(\cos t, \sin t) = \text{div}(\cos t, \sin t)$ assim, $\alpha_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, s-1$ e obtemos (4.7). \square

Proposição 4.2.3. *Considere o sistema (4.6), onde $P_s(x, y)$ e $Q_s(x, y)$ são polinômios homogêneos de grau ímpar s . Se α_s dado em (4.7) é diferente de zero, então a origem é um foco.*

A demonstração desta proposição é uma consequência imediata da Proposição 4.2.1.

Veja os Teoremas 5.1.1 e 5.1.2 para exemplificar as Proposições 4.2.3 e 4.2.2.

A seguir apresentamos alguns resultados para sistemas cuja origem é do tipo nilpotente, tais resultados serão de extrema importância para nos auxiliar na discussão sobre o Problema Foco-Centro.

4.3 Centros Nilpotentes e sua Divergência

O próximo teorema fornecerá condições necessárias e suficientes para a monodromia de um equilíbrio de um sistema analítico do tipo (2.14).

Teorema 4.3.1 (Andreev). *Seja $\mathcal{X}(x, y) = (y + F_1(x, y), F_2(x, y))$ um campo vetorial do tipo (2.14). Seja $y = F(x)$ uma solução da equação $y + F_1(x, y) = 0$ contendo a origem. Suponha que a expansão da função $F_2(x, F(x))$ é da forma $f(x) = ax^\alpha + \mathcal{O}(x^{\alpha+1})$ e $\phi(x) = \text{div}\mathcal{X}(x, F(x)) = bx^\beta + \mathcal{O}(x^{\beta+1})$ ou $\phi(x) = 0$, com $a \neq 0$, $\alpha \geq 2$, $b \neq 0$ e $\beta \geq 1$. Então, a origem do sistema (2.14) é monodrômico se, e somente se, $a < 0$, $\alpha = 2n - 1$ é ímpar e uma das seguintes condições se aplicam:*

i) $\beta > n - 1$;

ii) $\beta = n - 1$ e $b^2 + 4an < 0$;

iii) $\phi(x) \equiv 0$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [1].

Teorema 4.3.2 (Teorema do Centro Nilpotente). *Suponha que a origem do sistema diferencial analítico (2.2) da forma nilpotente é um centro, então existem funções analíticas M_1 e M_2 com expansões de Taylor começando com termos de grau pelo menos 2 em x e y , de tal modo que o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + F_1(x, y) + \varepsilon M_1(x, y) \\ \dot{y} = -\varepsilon x + F_2(x, y) + \varepsilon M_2(x, y) \end{cases} \quad (4.8)$$

tem um centro de tipo linear na origem para todo $\varepsilon > 0$, onde

$$M_1(x, y) = (x + f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} (1 + U(x, y)) \quad (4.9)$$

e

$$M_2(x, y) = x - (x + f(x, y)) \left(1 + \frac{\partial f}{\partial x} \right) (1 + U(x, y)). \quad (4.10)$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [7].

Observação 4.3.1. *A função f é analítica com expansão de Taylor começando com termos de grau pelo menos 2 em x e y e $U(x, y)$ é uma função analítica com $U(0, 0) = 0$.*

Podemos dizer, a grosso modo, que o Teorema do Centro Nilpotente nos mostra que um centro analítico nilpotente é sempre limite de centros analíticos lineares. Tal teorema será fundamental na demonstração do seguinte resultado.

Proposição 4.3.1. *Considere o sistema diferencial analítico (2.14), cuja origem é um ponto singular nilpotente. Denote por div_d os termos de menor ordem da divergência $\text{div}\mathcal{X}$ do sistema. Defina*

$$V_{d+1}(\varepsilon) = \int_0^{2\pi/\sqrt{\varepsilon}} \text{div}_d(\cos(\sqrt{\varepsilon}t), -\sqrt{\varepsilon}\text{sen}(\sqrt{\varepsilon}t)) dt, \quad (4.11)$$

onde $\varepsilon > 0$ e defina a constante v_{d+1} pelo desenvolvimento

$$V_{d+1}(\varepsilon) = \frac{v_{d+1}}{\sqrt{\varepsilon}} + \mathcal{O}(1). \quad (4.12)$$

(a) Se a origem é um centro, então $v_{d+1} = 0$;

(b) Se $v_{d+1} > 0$ (respectivamente $v_{d+1} < 0$), então a origem é um foco instável (respectivamente estável).

Demonstração. Considere o sistema (4.8) com um centro de tipo linear na origem para todo $\varepsilon > 0$. Seja $\widetilde{\text{div}}$ a divergência do sistema diferencial (4.8) e div a divergência do sistema diferencial (2.14). Então,

$$\widetilde{\text{div}}(x, y) = \text{div}(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

e, conseqüentemente,

$$\widetilde{\text{div}}_d(x, y) = \text{div}_d(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.13)$$

onde div_d denota os termos de menor ordem da função div . Denotamos por $\phi_t(\rho, \varepsilon)$ a solução do sistema (4.8), com condição inicial no ponto $(\rho, 0)$ com $\rho > 0$ suficientemente pequeno. Denotamos também as componentes de $\phi_t(\rho, \varepsilon)$ por $(u(t, \rho, \varepsilon), v(t, \rho, \varepsilon))$. Quando $\rho = 0$, temos que $\phi_t(0, \varepsilon) = (u(t, 0, \varepsilon), v(t, 0, \varepsilon)) = (0, 0)$. Expandindo em potências de ρ as componentes de $\phi_t(\rho, \varepsilon)$ temos

$$u(t, \rho, \varepsilon) = u_1(t, \varepsilon)\rho + u_2(t, \varepsilon)\rho^2 + \mathcal{O}(\rho^3),$$

$$v(t, \rho, \varepsilon) = v_1(t, \varepsilon)\rho + v_2(t, \varepsilon)\rho^2 + \mathcal{O}(\rho^3).$$

Uma vez que a condição inicial de $\phi_t(\rho, \varepsilon)$ é o ponto $(\rho, 0)$, obtemos que $u_1(0, \varepsilon) = 1$ e $v_1(0, \varepsilon) = 0$. Observe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi_t(\rho, \varepsilon) &= \frac{d}{dt}(u(t, \rho, \varepsilon), v(t, \rho, \varepsilon)) \\ &= \frac{d}{dt}(u_1(t, \varepsilon)\rho + \mathcal{O}(\rho^2), v_1(t, \varepsilon)\rho + \mathcal{O}(\rho^2)) \\ &= (u'_1(t, \varepsilon)\rho + u'_2(t, \varepsilon)\rho^2 + \mathcal{O}(\rho^3), v'_1(t, \varepsilon)\rho + v'_2(t, \varepsilon)\rho^2 + \mathcal{O}(\rho^3)). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi_t(\rho, \varepsilon) &= \left(y + F_1(x, y) + \varepsilon M_1(x, y), -\varepsilon x + F_2(x, y) + \varepsilon M_2(x, y) \right) \Big|_{(x,y)=\phi_t(\rho,\varepsilon)} \\ &= \left(v_1(t, \varepsilon)\rho + \mathcal{O}(\rho^2), -\varepsilon u_1(t, \varepsilon)\rho - \varepsilon \mathcal{O}(\rho^2) \right). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Igualando os termos de menor ordem de ρ em (4.14) e (4.15), temos

$$u_1'(t, \varepsilon)\rho = v_1(t, \varepsilon)\rho \Rightarrow u_1'(t, \varepsilon) = v_1(t, \varepsilon)$$

e

$$v_1'(t, \varepsilon)\rho = -\varepsilon u_1(t, \varepsilon)\rho \Rightarrow v_1'(t, \varepsilon) = -\varepsilon u_1(t, \varepsilon).$$

Logo, como a condição inicial do sistema (4.8) é o ponto $(\rho, 0)$ e sabemos que $u_1(0, \varepsilon) = 1$, $v_1(0, \varepsilon) = 0$, $u_1'(t, \varepsilon) = v_1(t, \varepsilon)$ e $v_1'(t, \varepsilon) = -\varepsilon u_1(t, \varepsilon)$ concluímos que

$$u_1(t, \varepsilon) = \cos(\sqrt{\varepsilon}t)$$

e

$$v_1(t, \varepsilon) = -\sqrt{\varepsilon}\text{sen}(\sqrt{\varepsilon}t).$$

Desta forma,

$$\phi_t(\rho, \varepsilon) = \rho(\cos(\sqrt{\varepsilon}t), -\sqrt{\varepsilon}\text{sen}(\sqrt{\varepsilon}t)).$$

Denotamos por $T(\rho, \varepsilon)$ a função estritamente positiva tal que o ponto $\phi_{T(\rho,\varepsilon)}(\rho, \varepsilon)$ é a primeira interseção com a seção transversal $\Sigma = \{(\rho, 0), \rho > 0, \rho \text{ suficientemente pequeno}\}$, com $T(\rho, \varepsilon) = 2\pi/\sqrt{\varepsilon} + \mathcal{O}(\rho)$. Veja Figura 4.2.

Como consequência direta da Proposição 4.2.1, temos que a expressão $V_{d+1}(\varepsilon)$ é uma das constantes de Poincaré-Lyapunov associadas ao sistema (4.8), exceto por uma constante multiplicativa não nula. Finalmente tal expressão para (4.13) é dada por

$$\begin{aligned} V_{d+1}(\varepsilon) &= \int_0^{2\pi/\sqrt{\varepsilon}} \underbrace{\widetilde{\text{div}}_d(\cos(\sqrt{\varepsilon}t), -\sqrt{\varepsilon}\text{sen}(\sqrt{\varepsilon}t))}_{(4.13)} dt \\ &= \int_0^{2\pi/\sqrt{\varepsilon}} \text{div}_d(\cos(\sqrt{\varepsilon}t), -\sqrt{\varepsilon}\text{sen}(\sqrt{\varepsilon}t)) + \mathcal{O}(\varepsilon) dt \end{aligned}$$

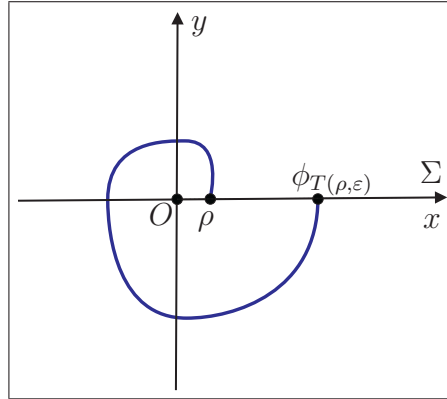


Figura 4.2: Transformação de Poincaré.

$$= \int_0^{2\pi/\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{div}_d(\cos(\sqrt{\varepsilon}t), -\sqrt{\varepsilon}\operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon}t))dt + \int_0^{2\pi/\sqrt{\varepsilon}} \mathcal{O}(\varepsilon)dt.$$

Sabemos que a constante v_{d+1} é dada pelo desenvolvimento (4.12), logo

$$V_{d+1}(\varepsilon) = \frac{v_{d+1}}{\sqrt{\varepsilon}} + \mathcal{O}(1) = \underbrace{\int_0^{2\pi/\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{div}_d(\cos(\sqrt{\varepsilon}t), -\sqrt{\varepsilon}\operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon}t))dt}_{(4.11)} + \int_0^{2\pi/\sqrt{\varepsilon}} \mathcal{O}(\varepsilon)dt.$$

Assim, uma condição necessária para que a origem seja um centro é que $v_{d+1} = 0$, o que prova a afirmação (a). Agora, observe que o sinal do coeficiente v_{d+1} é o sinal da expressão (4.11), portanto se o sinal da expressão (4.11) for positivo, então v_{d+1} é positivo, logo a origem é um foco instável, caso contrário, teremos um foco estável, e desta forma provamos a afirmação (b). \square

Veja o Teorema 5.1.3 para exemplificar a Proposição 4.3.1.

Agora enunciamos outros teoremas e definições que são ótimas ferramentas para discutir a estabilidade de um ponto de equilíbrio.

Definição 4.3.1. *Considere o sistema (2.2) na forma nilpotente cuja origem é um ponto singular monodrômico. O **número de Andreev** n é o valor inteiro correspondente no Teorema 4.3.1 sendo este número $n \geq 2$.*

Consideramos o sistema (2.2) na forma nilpotente cuja origem é um ponto singular

monodrômico com número de Andreev n . Então, a mudança de variáveis

$$(x, y) \mapsto (x, y - F(x)),$$

em que $F(x)$ é definido no Teorema 4.3.1, e o escalonamento

$$(x, y) \mapsto (\xi x, -\xi y),$$

com

$$\xi = \left(\frac{-1}{a} \right)^{\frac{1}{2-2n}},$$

transforma o sistema (2.2) em forma nilpotente, na seguinte forma analítica para singularidades nilpotentes monodrômicas

$$\begin{cases} \dot{x} = y(-1 + X_1(x, y)) \\ \dot{y} = f(x) + y\phi(x) + y^2 Y_0(x, y), \end{cases} \quad (4.16)$$

onde $X_1(0, 0) = 0$, $f(x) = -x^{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n})$ com $n \geq 2$ e $\phi(x) \equiv 0$ ou $\phi(x) = bx^\beta + \mathcal{O}(x^{\beta+1})$ com $b \neq 0$ e $\beta > n - 1$.

Definição 4.3.2. Um polinômio real $p(x, y)$ é **(1, n) quase homogêneo de peso w** se $p(\lambda x, \lambda^n y) = \lambda^w p(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Consideramos o sistema (4.16) com número de Andreev n e seja div sua divergência. Definimos $\text{div}_d^{(1,n)}$ como o polinômio real (1, n) quase homogêneo de peso w da divergência.

Lema 4.3.1. Seja $\rho > 0$ e $F(r, \theta)$ uma função analítica real 2π -periódica em θ e definida em uma vizinhança de $r = 0$. Seja $r(\theta, \rho)$ a solução do seguinte problema de Cauchy

$$\frac{\partial r}{\partial \theta}(\theta, \rho) = F(r(\theta, \rho), \theta),$$

com condição inicial $r(0, \rho) = \rho$. Então,

$$\frac{\partial r}{\partial \rho}(\theta, \rho) = \exp \left[\int_0^\theta \frac{\partial F}{\partial r}(r(\sigma, \rho), \sigma) d\sigma \right]. \quad (4.17)$$

Demonstração. Derivando as identidades

$$\frac{\partial r}{\partial \theta}(\theta, \rho) = F(r(\theta, \rho), \theta) \quad \text{e} \quad r(0, \rho) = \rho$$

com respeito a ρ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}(\theta, \rho) \right) &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(F(r(\theta, \rho), \theta) \right) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}(\theta, \rho) \right) &= \frac{\partial F}{\partial r}(r(\theta, \rho), \theta) \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}(\theta, \rho) \right) \end{aligned}$$

e

$$r(0, \rho) = \rho$$

$$\frac{\partial r}{\partial \rho}(0, \rho) = \frac{\partial \rho}{\partial \rho} = 1.$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \frac{\partial F}{\partial r}(r(\sigma, \rho), \sigma) d\sigma &= \int_0^\theta \frac{\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}(\sigma, \rho) \right)}{\frac{\partial r}{\partial \rho}(\sigma, \rho)} d\sigma = \ln \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}(\sigma, \rho) \right) \Bigg|_{\sigma=0}^{\sigma=\theta} = \\ \ln \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}(\theta, \rho) \right) - \ln \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}(0, \rho) \right) &= \ln \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}(\theta, \rho) \right) - \ln 1 = \ln \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}(\theta, \rho) \right). \end{aligned}$$

Desta forma

$$\ln \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}(\theta, \rho) \right) = \int_0^\theta \frac{\partial F}{\partial r}(r(\sigma, \rho), \sigma) d\sigma,$$

aplicando a função exponencial em ambos membros da igualdade anterior, obtemos

$$\frac{\partial r}{\partial \rho}(\theta, \rho) = \exp \left[\int_0^\theta \frac{\partial F}{\partial r}(r(\sigma, \rho), \sigma) d\sigma \right].$$

□

Teorema 4.3.3. *Considere o sistema analítico diferencial (4.16) com número de Andreev n . Denote por $u(\theta) = \sqrt[2n]{\cos^{2n} \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta}$ e por $\operatorname{div}_d^{(1,n)}$ os $(1, n)$ termos quasi homogêneos de menor ordem d da divergência div do sistema. Suponha que*

$$\zeta = \int_0^{2\pi} \operatorname{div}_d^{(1,n)}(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \frac{\cos^2 \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta}{u(\theta)^{d+n+1}} d\theta \neq 0. \quad (4.18)$$

Então, a origem é um foco estável (respectivamente instável) se $\zeta < 0$ (respectivamente $\zeta > 0$).

Demonstração. Queremos mostrar que a origem é um foco estável (respectivamente instável) se $\zeta < 0$ (respectivamente $\zeta > 0$). Considere o sistema analítico diferencial (4.16). Como $X_1(0, 0) = 0$, $f(x) = x^{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n})$ com $n \geq 2$ e $\phi(x) \equiv 0$ ou $\phi(x) = bx^\beta + \mathcal{O}(x^{\beta+1})$ com $b \neq 0$ e $\beta > n - 1$, segue do Teorema de Andreev 4.3.1 que a origem do sistema analítico diferencial (4.16) é um ponto singular monodrômico e têm número de Andreev n . Vamos supor que a origem do sistema (4.16) é um foco e sua aplicação de Poincaré é dada por

$$P(\rho) = \rho + \alpha_k \rho^k + \mathcal{O}(\rho^{k+1})$$

com $k \geq 3$ e $\alpha_k \neq 0$. Considere o *blow-up* ponderado $x = r \cos \theta$ e $y = r^n \sin \theta$, logo o jacobiano deste *blow-up* é $J(r, \theta) = r^n (\cos^2 \theta + n \sin^2 \theta)$. Assim, temos que

$$\dot{r} = \frac{r^n \psi(\theta) + \mathcal{O}(r^{n+1})}{\cos^2 \theta + n \sin^2 \theta} \quad \text{e} \quad \dot{\theta} = \frac{r^{n-1} \varphi(\theta) + \mathcal{O}(r^n)}{\cos^2 \theta + n \sin^2 \theta},$$

onde $\psi(\theta)$ e $\varphi(\theta)$ são polinômios trigonométricos com $\varphi(\theta) = \cos^{2n} \theta + n \sin^2 \theta$ e $\psi(\theta) = \varphi'(\theta)/(-2n)$. Observe que $\varphi(\theta) > 0$ para todo θ . Denotamos por

$$\dot{r} = \frac{r^n \psi(\theta) + \mathcal{O}(r^{n+1})}{\cos^2 \theta + n \sin^2 \theta} = R(r, \theta) \quad \text{e} \quad \dot{\theta} = \frac{r^{n-1} \varphi(\theta) + \mathcal{O}(r^n)}{\cos^2 \theta + n \sin^2 \theta} = \Theta(r, \theta).$$

Dado $\rho > 0$, podemos considerar a equação diferencial ordinária

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{R(r, \theta)}{\Theta(r, \theta)} = \frac{r^n \psi(\theta) + \mathcal{O}(r^{n+1})}{r^{n-1} \varphi(\theta) + \mathcal{O}(r^n)} = F(r, \theta), \quad (4.19)$$

cuja solução $r(\theta, \rho)$, com condição inicial $r(0, \rho) = \rho$ dá origem a aplicação de Poincaré do sistema (4.16) em uma vizinhança da origem por $P(\rho) = r(2\pi, \rho)$. Agora vamos expandir em série de Taylor a solução $r(\theta, \rho)$ em torno $\rho = 0$. Desta forma temos

$$\begin{aligned} r(\theta, \rho) &= \underbrace{r(\theta, 0)}_0 + \frac{\partial r}{\partial \rho}(\theta, 0) \rho + \mathcal{O}(\rho^2) = \underbrace{\frac{\partial r}{\partial \rho}(\theta, 0)}_{(4.17)} \rho + \mathcal{O}(\rho^2) \\ &= \exp \left[\int_0^\theta \frac{\partial F}{\partial r}(r(\sigma, 0), \sigma) d\sigma \right] \rho + \mathcal{O}(\rho^2) = \exp \left[\int_0^\theta \frac{\varphi'(\sigma)}{-2n\varphi(\sigma)} d\sigma \right] \rho + \mathcal{O}(\rho^2) \\ &= \exp \left[\frac{-1}{2n} \int_0^\theta \frac{\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)} d\sigma \right] \rho + \mathcal{O}(\rho^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left[\frac{-1}{2n} \left(\ln \varphi(\sigma) \right)_0^\theta \right] \rho + \mathcal{O}(\rho^2) \\
&= \exp \left[\frac{-1}{2n} \left(\ln(\cos^{2n} \sigma + n \operatorname{sen}^2 \sigma) \right)_0^\theta \right] \rho + \mathcal{O}(\rho^2) \\
&= \exp \left[\frac{-1}{2n} \left(\ln(\cos^{2n} \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta) - \ln(\underbrace{\cos^{2n} 0}_1 + n \underbrace{\operatorname{sen}^2 0}_0) \right) \right] \rho + \mathcal{O}(\rho^2) \\
&= \exp \left[\frac{-1}{2n} \left(\ln(\cos^{2n} \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta) - \underbrace{\ln 1}_0 \right) \right] \rho + \mathcal{O}(\rho^2) \\
&= \exp \left[\ln(\cos^{2n} \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta)^{-1/2n} \right] \rho + \mathcal{O}(\rho^2) \\
&= (\cos^{2n} \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta)^{-1/2n} \rho + \mathcal{O}(\rho^2) \\
&= \frac{\rho}{\sqrt[2n]{\cos^{2n} \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta}} + \mathcal{O}(\rho^2) \\
&= \frac{\rho}{u(\theta)} + \mathcal{O}(\rho^2).
\end{aligned}$$

Denotamos por $\delta(r, \theta)$ a divergência da equação diferencial ordinária (4.19) que é dada por

$$\delta(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R(r, \theta)}{\Theta(r, \theta)} \right).$$

Dada uma função $G(r, \theta)$, denotamos por $G'(r, \theta)$ a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
G'(r, \theta) &= \frac{d}{d\theta} G(r, \theta) = \frac{\partial G}{\partial r}(r, \theta) \frac{dr}{d\theta} + \frac{\partial G}{\partial \theta}(r, \theta) \\
&= \frac{\partial G}{\partial r}(r, \theta) \left(\frac{R(r, \theta)}{\Theta(r, \theta)} \right) + \frac{\partial G}{\partial \theta}(r, \theta)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

e denotamos por $\operatorname{div}(x, y)$ a divergência do sistema (4.16).

Pela Proposição 2.3.5, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(r \cos \theta, r^n \operatorname{sen} \theta) &= \frac{\partial R}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{1}{J(r, \theta)} \left(\frac{\partial J}{\partial r} R(r, \theta) + \frac{\partial J}{\partial \theta} \Theta(r, \theta) \right) = \\ \delta(r, \theta) \Theta(r, \theta) + \frac{\partial \Theta}{\partial r}(r, \theta) \left(\frac{R(r, \theta)}{\Theta(r, \theta)} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{1}{J(r, \theta)} \left(\frac{\partial J}{\partial r} \left(\frac{R(r, \theta)}{\Theta(r, \theta)} \right) + \frac{\partial J}{\partial \theta} \right) \Theta(r, \theta) \\ &= \delta(r, \theta) \Theta(r, \theta) + \Theta'(r, \theta) + \frac{J'(r, \theta)}{J(r, \theta)} \Theta(r, \theta). \end{aligned}$$

Tomando $r = r(\theta, \rho)$ na igualdade anterior e dividindo ambos os membros da igualdade por $\Theta(r(\theta, \rho), \theta)$, obtemos

$$\frac{\operatorname{div}(r(\theta, \rho) \cos \theta, r(\theta, \rho)^n \operatorname{sen} \theta)}{\Theta(r(\theta, \rho), \theta)} = \delta(r(\theta, \rho), \theta) + \frac{\Theta'(r(\theta, \rho), \theta)}{\Theta(r(\theta, \rho), \theta)} + \frac{J'(r(\theta, \rho), \theta)}{J(r(\theta, \rho), \theta)}. \quad (4.21)$$

Integrando (4.21) com relação à θ de 0 a 2π

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{div}(r(\theta, \rho) \cos \theta, r(\theta, \rho)^n \operatorname{sen} \theta)}{\Theta(r(\theta, \rho), \theta)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \delta(r(\theta, \rho), \theta) + \frac{\Theta'(r(\theta, \rho), \theta)}{\Theta(r(\theta, \rho), \theta)} + \frac{J'(r(\theta, \rho), \theta)}{J(r(\theta, \rho), \theta)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \delta(r(\theta, \rho), \theta) d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\Theta'(r(\theta, \rho), \theta)}{\Theta(r(\theta, \rho), \theta)} d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{J'(r(\theta, \rho), \theta)}{J(r(\theta, \rho), \theta)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \delta(r(\theta, \rho), \theta) d\theta + [\ln \Theta(r(\theta, \rho), \theta)]_0^{2\pi} + [\ln J(r(\theta, \rho), \theta)]_0^{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} \delta(r(\theta, \rho), \theta) d\theta + [\ln \Theta(r(2\pi, \rho), 2\pi)] - [\ln \Theta(r(0, \rho), 0)] + [\ln J(r(2\pi, \rho), 2\pi)] \\ &\quad - [\ln J(r(0, \rho), 0)] \\ &= \int_0^{2\pi} \delta(r(\theta, \rho), \theta) d\theta + [\ln \Theta(P(\rho), 2\pi)] - [\ln \Theta(\rho, 0)] + [\ln J(P(\rho), 2\pi)] - [\ln J(\rho, 0)] \quad (4.22) \end{aligned}$$

Seja $S(r, \theta)$ uma função definida em uma vizinhança de $r = 0$ e 2π -periódica em θ . A função $S(P(\rho), 2\pi)$ tem sua expansão em série de Taylor em torno de $\rho = 0$ dada por

$$S(P(\rho), 2\pi) \cong$$

$$S(P(0), 2\pi) + \left(\frac{\partial S}{\partial r}(P(0), 2\pi) P'(0) \right) \rho + \frac{1}{2} \left(P''(0) \frac{\partial S}{\partial r}(P(0), 2\pi) + P'(0)^2 \frac{\partial^2 S}{\partial r^2}(P(0), 2\pi) \right) \rho^2 \\ + \cdots + \frac{1}{k!} \left(P(0)^k \frac{\partial S}{\partial r}(P(0), 2\pi) + \cdots + P'(0)^k \frac{\partial^k S}{\partial r^k}(P(0), 2\pi) \right) \rho^k.$$

Expandindo também em série de Taylor a função $S(\rho, 0)$ em torno de $\rho = 0$ temos

$$S(\rho, 0) \cong S(0, 0) + \frac{\partial S}{\partial r}(0, 0) \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial r^2}(0, 0) \rho^2 + \cdots + \frac{1}{k!} \frac{\partial^k S}{\partial r^k}(0, 0) \rho^k.$$

Usando o fato que $P(0) = P''(0) = P'''(0) = \cdots = P^{k-1}(0) = 0$, $P'(0) = 1$, $P^k(0) = \alpha_k k!$ onde P' é a primeira derivada com respeito a ρ da aplicação de Poincaré, P'' é a derivada segunda com respeito a ρ da aplicação de Poincaré e assim por diante e, sabendo que a função $S(r, \theta)$ definida em uma vizinhança de $r = 0$ e 2π -periódica em θ temos que

$$S(P(\rho), 2\pi) - S(\rho, 0) = \alpha_k \rho^k \frac{\partial S}{\partial r}(0, 0) + \mathcal{O}(\rho^{k+1}). \quad (4.23)$$

Do Lema 4.3.1, concluímos que

$$\int_0^{2\pi} \delta(r(\theta, \rho), \theta) d\theta = \ln \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}(2\pi, \rho) \right). \quad (4.24)$$

Como $r(2\pi, \rho) = \rho + \alpha_k \rho^k + \mathcal{O}(\rho^{k+1})$, temos que

$$\frac{\partial r}{\partial \rho}(2\pi, \rho) = \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho + \alpha_k \rho^k + \mathcal{O}(\rho^{k+1})) = 1 + \alpha_k k \rho^{k-1} + \mathcal{O}(\rho^k). \quad (4.25)$$

Aplicando (4.25) em (4.24) temos

$$\int_0^{2\pi} \delta(r(\theta, \rho), \theta) d\theta = \ln \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}(2\pi, \rho) \right) = \ln(1 + \alpha_k k \rho^{k-1} + \mathcal{O}(\rho^k)),$$

e como $k \geq 3$ segue que $\underbrace{\ln(1 + \alpha_k k \rho^{k-1} + \mathcal{O}(\rho^k))}_{\text{Expandindo em série de Taylor em torno de } \rho = 0} = \alpha_k k \rho^{k-1} + \mathcal{O}(\rho^k).$

Agora notamos que o desenvolvimento em potências de ρ do lado esquerdo de (4.22) é

$$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{div}(r(\theta, \rho) \cos \theta, r(\theta, \rho)^n \operatorname{sen} \theta)}{\Theta(r(\theta, \rho), \theta)} d\theta \\ = \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{div}([\frac{\rho}{u(\theta)} + \mathcal{O}(\rho^2)] \cos \theta, [\frac{\rho}{u(\theta)} + \mathcal{O}(\rho^2)]^n \operatorname{sen} \theta)}{\Theta([\frac{\rho}{u(\theta)} + \mathcal{O}(\rho^2)], \theta)} d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{div}\left(\left[\frac{\rho}{u(\theta)} + \mathcal{O}(\rho^2)\right] \cos \theta, \left[\frac{\rho}{u(\theta)} + \mathcal{O}(\rho^2)\right]^n \operatorname{sen} \theta\right)}{\frac{\left[\frac{\rho}{u(\theta)} + \mathcal{O}(\rho^2)\right]^{n-1} (\cos^{2n} \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta) + \mathcal{O}\left(\left[\frac{\rho}{u(\theta)} + \mathcal{O}(\rho^2)\right]^n\right)}{\cos^2 \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta}} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{div}\left(\left[\frac{\rho}{u(\theta)} + \mathcal{O}(\rho^2)\right] \cos \theta, \left[\frac{\rho}{u(\theta)} + \mathcal{O}(\rho^2)\right]^n \operatorname{sen} \theta\right)}{\left[\frac{\rho}{u(\theta)} + \mathcal{O}(\rho^2)\right]^{n-1} (\cos^{2n} \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta) + \mathcal{O}\left(\left[\frac{\rho}{u(\theta)} + \mathcal{O}(\rho^2)\right]^n\right)} \cos^2 \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\left[\frac{\rho}{u(\theta)} + \mathcal{O}(\rho^2)\right]^d \operatorname{div}_d^{(1,n)}(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)}{\left[\frac{\rho}{u(\theta)} + \mathcal{O}(\rho^2)\right]^{n-1} (\cos^{2n} \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta) + \mathcal{O}\left(\left[\frac{\rho}{u(\theta)} + \mathcal{O}(\rho^2)\right]^n\right)} \cos^2 \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\rho^d}{u(\theta)^d} \operatorname{div}_d^{(1,n)}(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)}{\frac{\rho^{n-1}}{u(\theta)^{n-1}} (\cos^{2n} \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta)} \cos^2 \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta d\theta + \mathcal{O}(\rho^{d-n+2}) \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\rho^{d-n+1} \operatorname{div}_d^{(1,n)}(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)}{u(\theta)^{d-n+1} (\cos^{2n} \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta)} \cos^2 \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta d\theta + \mathcal{O}(\rho^{d-n+2}) \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\rho^{d-n+1} \operatorname{div}_d^{(1,n)}(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)}{(\cos^{2n} \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta)^{d-n+1/2n} (\cos^{2n} \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta)} \cos^2 \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta d\theta + \mathcal{O}(\rho^{d-n+2}) \\
&= \rho^{d-n+1} \int_0^{2\pi} \operatorname{div}_d^{(1,n)}(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \frac{\cos^2 \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta}{(\sqrt[2n]{\cos^{2n} \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta})^{d+n+1}} d\theta + \mathcal{O}(\rho^{d-n+2}) \\
&= \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{div}_d^{(1,n)}(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \frac{\cos^2 \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta}{u(\theta)^{d+n+1}} d\theta}_{\zeta} \rho^{d-n+1} + \mathcal{O}(\rho^{d-n+2}) \\
&= \zeta \rho^{d-n+1} + \mathcal{O}(\rho^{d-n+2}). \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{div}(r(\theta, \rho) \cos \theta, r(\theta, \rho)^n \operatorname{sen} \theta)}{\Theta(r(\theta, \rho), \theta)} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \delta(r(\theta, \rho), \theta) d\theta + [\ln \Theta(P(\rho), 2\pi)] - [\ln \Theta(\rho, 0)] + [\ln J(P(\rho), 2\pi)] - [\ln J(\rho, 0)] \\
&= \alpha_k k \rho^{k-1} + \mathcal{O}(\rho^k) + \alpha_k \rho^k \frac{\partial \ln \Theta}{\partial r}(0, 0) + \alpha_k \rho^k \frac{\partial \ln J}{\partial r}(0, 0) + \mathcal{O}(\rho^{k+1}).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Comparando (4.26) com (4.27) segue que, se $\alpha \neq 0$, temos $k - 1 = d - n + 1$ e assim a aplicação de Poincaré é dada por

$$P(\rho) = \rho + \frac{\zeta}{k} \rho^k + \mathcal{O}(\rho^{k+1}).$$

Portanto, se $\zeta > 0$ (resp. $\zeta < 0$) então a origem é um foco instável (resp. estável). \square

Veja o Teorema 5.1.5 para exemplificar a Proposição 4.3.3.

4.4 Centros e sua Divergência

Nosso último resultado trata de sistemas do tipo centro linear (2.13) ou em forma degenerada (2.15) com um ponto singular monodrômico na origem.

Assumimos que a origem não tem direções características. Como já definimos, isso significa que $\Delta(x, y) = 0$ apenas se $(x, y) = (0, 0)$. Observamos que neste caso o grau dos termos de menor ordem de P e Q devem coincidir, isto é, $P(x, y) = P_n(x, y) + \mathcal{O}_{n+1}(x, y)$ e $Q(x, y) = Q_n(x, y) + \mathcal{O}_{n+1}(x, y)$, onde P_n e Q_n são polinômios homogêneos não nulos de grau n formado por todos os termos de menor grau de P e Q . Assim definimos

$$v(\theta) = \exp \left[\int_0^\theta \frac{\cos \sigma P_n(\cos \sigma, \operatorname{sen} \sigma) + \operatorname{sen} \sigma Q_n(\cos \sigma, \operatorname{sen} \sigma)}{\cos \sigma Q_n(\cos \sigma, \operatorname{sen} \sigma) - \operatorname{sen} \sigma P_n(\cos \sigma, \operatorname{sen} \sigma)} d\sigma \right]. \tag{4.28}$$

Teorema 4.4.1. *Considere o sistema diferencial analítico (2.2), cuja origem é monodrômica e não tem direções características. Denote por div_d os termos de menor ordem da divergência div do sistema. Suponha que $v(2\pi) = 1$ e*

$$\xi = \int_0^{2\pi} \frac{\text{div}_d(\cos \theta, \text{sen} \theta)v(\theta)^{d-n+1}}{\cos \theta Q_n(\cos \theta, \text{sen} \theta) - \text{sen} \theta P_n(\cos \theta, \text{sen} \theta)} d\theta \neq 0. \quad (4.29)$$

Então, a origem é um foco estável (resp. instável) se $\xi < 0$ (resp. $\xi > 0$).

Demonstração. Queremos mostrar que a origem é um foco estável (respectivamente instável) se $\xi < 0$ (respectivamente $\xi > 0$). Considere o sistema analítico diferencial (2.2), cuja origem é monodrômica e não tem direções características. Vamos supor que a origem do sistema (2.2) é um foco e sua aplicação de Poincaré é dada por

$$P(\rho) = \rho + \alpha_k \rho^k + \mathcal{O}(\rho^{k+1}),$$

com $k \geq 3$ e $\alpha_k \neq 0$. O *blow-up* do sistema analítico diferencial (2.2) é $x = r \cos \theta$ e $y = r \text{sen} \theta$, logo o Jacobiano deste *blow-up* é $J(r, \theta) = r$. Temos que

$$\dot{r} = (\cos \theta P_n(\cos \theta, \text{sen} \theta) + \text{sen} \theta Q_n(\cos \theta, \text{sen} \theta))r^n + \mathcal{O}(r^{n+1})$$

e

$$\dot{\theta} = (\cos \theta Q_n(\cos \theta, \text{sen} \theta) - \text{sen} \theta P_n(\cos \theta, \text{sen} \theta))r^{n-1} + \mathcal{O}(r^n).$$

Denotamos por

$$\dot{r} = R(r, \theta) \quad \text{e} \quad \dot{\theta} = \Theta(r, \theta).$$

Assim, dado $\rho > 0$, podemos considerar a equação diferencial ordinária

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{(\cos \theta P_n(\cos \theta, \text{sen} \theta) + \text{sen} \theta Q_n(\cos \theta, \text{sen} \theta))r^n + \mathcal{O}(r^{n+1})}{(\cos \theta Q_n(\cos \theta, \text{sen} \theta) - \text{sen} \theta P_n(\cos \theta, \text{sen} \theta))r^{n-1} + \mathcal{O}(r^n)} = F(r, \theta), \quad (4.30)$$

cuja solução $r(\theta, \rho)$ com condição inicial $r(0, \rho) = \rho$ dá origem a aplicação de Poincaré do sistema (2.2) em uma vizinhança da origem por $P(\rho) = r(2\pi, \rho)$. Agora vamos expandir em série de Taylor a solução $r(\theta, \rho)$ em torno $\rho = 0$, e desta forma teremos

$$\begin{aligned} r(\theta, \rho) &= \underbrace{r(\theta, 0)}_0 + \frac{\partial r}{\partial \rho}(\theta, 0)\rho + \mathcal{O}(\rho^2) = \underbrace{\frac{\partial r}{\partial \rho}(\theta, 0)}_{(4.17)} \rho + \mathcal{O}(\rho^2) \\ &= \exp \left[\int_0^\theta \frac{\partial F}{\partial r}(r(\sigma, 0), \sigma) d\sigma \right] \rho + \mathcal{O}(\rho^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left[\int_0^\theta \frac{\partial F}{\partial r}(0, \sigma) d\sigma \right] \rho + \mathcal{O}(\rho^2) \\
&= \exp \left[\underbrace{\int_0^\theta \frac{\cos \sigma P_n(\cos \sigma, \text{sen} \sigma) + \text{sen} \sigma Q_n(\cos \sigma, \text{sen} \sigma)}{\cos \sigma Q_n(\cos \sigma, \text{sen} \sigma) - \text{sen} \sigma P_n(\cos \sigma, \text{sen} \sigma)} d\sigma}_{v(\theta)} \right] \rho + \mathcal{O}(\rho^2) \\
&= v(\theta) \rho + \mathcal{O}(\rho^2).
\end{aligned}$$

Denotamos por $\delta(r, \theta)$ a divergência da equação diferencial ordinária (4.30) que é dada por

$$\delta(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R(r, \theta)}{\Theta(r, \theta)} \right).$$

Dada uma função $H(r, \theta)$, denotamos por $H'(r, \theta)$ a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
H'(r, \theta) &= \frac{d}{d\theta} H(r, \theta) = \frac{\partial H}{\partial r}(r, \theta) \frac{dr}{d\theta} + \frac{\partial H}{\partial \theta}(r, \theta) \\
&= \frac{\partial H}{\partial r}(r, \theta) \left(\frac{R(r, \theta)}{\Theta(r, \theta)} \right) + \frac{\partial H}{\partial \theta}(r, \theta)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

e denotamos por div a divergência do sistema (2.2). Observamos que

$$\text{div}(r \cos \theta, r \text{sen} \theta) = \delta(r, \theta) \Theta(r, \theta) + \Theta'(r, \theta) + \frac{J'(r, \theta)}{J(r, \theta)} \Theta(r, \theta). \tag{4.32}$$

Tomando $r = r(\theta, \rho)$ na igualdade anterior e dividindo ambos os membros da igualdade por $\Theta(r(\theta, \rho), \theta)$, obtemos

$$\frac{\text{div}(r(\theta, \rho) \cos \theta, r(\theta, \rho) \text{sen} \theta)}{\Theta(r(\theta, \rho), \theta)} = \delta(r(\theta, \rho), \theta) + \frac{\Theta'(r(\theta, \rho), \theta)}{\Theta(r(\theta, \rho), \theta)} + \frac{J'(r(\theta, \rho), \theta)}{J(r(\theta, \rho), \theta)}. \tag{4.33}$$

Integrando (4.33) com relação à θ de 0 a 2π

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \frac{\text{div}(r(\theta, \rho) \cos \theta, r(\theta, \rho) \text{sen} \theta)}{\Theta(r(\theta, \rho), \theta)} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \delta(r(\theta, \rho), \theta) + \frac{\Theta'(r(\theta, \rho), \theta)}{\Theta(r(\theta, \rho), \theta)} + \frac{J'(r(\theta, \rho), \theta)}{J(r(\theta, \rho), \theta)} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \delta(r(\theta, \rho), \theta) d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\Theta'(r(\theta, \rho), \theta)}{\Theta(r(\theta, \rho), \theta)} d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{J'(r(\theta, \rho), \theta)}{J(r(\theta, \rho), \theta)} d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \delta(r(\theta, \rho), \theta) d\theta + [\ln \Theta(r(\theta, \rho), \theta)]_0^{2\pi} + [\ln J(r(\theta, \rho), \theta)]_0^{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} \delta(r(\theta, \rho), \theta) d\theta + [\ln \Theta(r(2\pi, \rho), 2\pi)] - [\ln \Theta(r(0, \rho), 0)] + [\ln J(r(2\pi, \rho), 2\pi)] \\
&\quad - [\ln J(r(0, \rho), 0)] \\
&= \int_0^{2\pi} \delta(r(\theta, \rho), \theta) d\theta + [\ln \Theta(P(\rho), 2\pi)] - [\ln \Theta(\rho, 0)] + [\ln J(P(\rho), 2\pi)] - [\ln J(\rho, 0)] \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Dada qualquer função $S(r, \theta)$ definida em uma vizinhança de $r = 0$ e 2π -periódica em θ , temos que

$$S(P(\rho), 2\pi) - S(\rho, 0) = \alpha_k \rho^k \frac{\partial S}{\partial r}(0, 0) + \mathcal{O}(\rho^{k+1}). \quad (4.35)$$

Do Lema 4.3.1, concluímos que

$$\int_0^{2\pi} \delta(r(\theta, \rho), \theta) d\theta = \ln \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}(2\pi, \rho) \right). \quad (4.36)$$

Como $r(2\pi, \rho) = \rho + \alpha_k \rho^k + \mathcal{O}(\rho^{k+1})$, temos que

$$\frac{\partial r}{\partial \rho}(2\pi, \rho) = \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho + \alpha_k \rho^k + \mathcal{O}(\rho^{k+1})) = 1 + \alpha_k k \rho^{k-1} + \mathcal{O}(\rho^k). \quad (4.37)$$

Aplicando (4.37) em (4.36) temos

$$\int_0^{2\pi} \delta(r(\theta, \rho), \theta) d\theta = \ln \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}(2\pi, \rho) \right) = \ln(1 + \alpha_k k \rho^{k-1} + \mathcal{O}(\rho^k)),$$

com

$$\ln \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}(2\pi, \rho) \right) = \ln(1 + \alpha_k k \rho^{k-1} + \mathcal{O}(\rho^k)) = \alpha_k k \rho^{k-1} + \mathcal{O}(\rho^k).$$

Agora notamos que o desenvolvimento em potências de ρ do lado esquerdo de (4.33) é

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{div}(r(\theta, \rho) \cos \theta, r(\theta, \rho) \operatorname{sen} \theta)}{\Theta(r(\theta, \rho), \theta)} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{div}([v(\theta)\rho + \mathcal{O}(\rho^2)] \cos \theta, [v(\theta)\rho + \mathcal{O}(\rho^2)] \operatorname{sen} \theta)}{\Theta([v(\theta)\rho + \mathcal{O}(\rho^2)], \theta)} d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{div}_d([v(\theta)\rho + \mathcal{O}(\rho^2)] \cos \theta, [v(\theta)\rho + \mathcal{O}(\rho^2)] \operatorname{sen}\theta) + \mathcal{O}^{d+1}}{\Theta([v(\theta)\rho + \mathcal{O}(\rho^2)], \theta)} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{[v(\theta)\rho + \mathcal{O}(\rho^2)]^d \operatorname{div}_d(\cos \theta, \operatorname{sen}\theta) + \mathcal{O}^{d+1}}{[v(\theta)\rho + \mathcal{O}(\rho^2)]^{n-1} (\cos \theta Q_n(\cos \theta, \operatorname{sen}\theta) - \operatorname{sen}\theta P_n(\cos \theta, \operatorname{sen}\theta))} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{div}_d(\cos \theta, \operatorname{sen}\theta) v(\theta)^{d-n+1} \rho^{d-n+1}}{\cos \theta Q_n(\cos \theta, \operatorname{sen}\theta) - \operatorname{sen}\theta P_n(\cos \theta, \operatorname{sen}\theta)} d\theta + \mathcal{O}(\rho^{d-n+2}) \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{div}_d(\cos \theta, \operatorname{sen}\theta) v(\theta)^{d-n+1}}{\cos \theta Q_n(\cos \theta, \operatorname{sen}\theta) - \operatorname{sen}\theta P_n(\cos \theta, \operatorname{sen}\theta)} d\theta \rho^{d-n+1} + \mathcal{O}(\rho^{d-n+2}) \\
&= \xi \rho^{d-n+1} + \mathcal{O}(\rho^{d-n+2}). \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{div}(r(\theta, \rho) \cos \theta, r(\theta, \rho) \operatorname{sen}\theta)}{\Theta(r(\theta, \rho), \theta)} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \delta(r(\theta, \rho), \theta) d\theta + [\ln \Theta(P(\rho), 2\pi)] - [\ln \Theta(\rho, 0)] + [\ln J(P(\rho), 2\pi)] - [\ln J(\rho, 0)] \\
&= \alpha_k k \rho^{k-1} + \mathcal{O}(\rho^k) \tag{4.39}
\end{aligned}$$

Comparando (4.38) com (4.39) segue que, se $\xi \neq 0$, temos $k - 1 = d - n + 1$ e, assim, a aplicação de Poincaré é dada por

$$P(\rho) = \rho + \frac{\xi}{k} \rho^k + \mathcal{O}(\rho^{k+1}).$$

Portanto, se $\xi > 0$ (resp. $\xi < 0$) então a origem é um foco instável (resp. estável). \square

Veja o Teorema 5.1.6 para exemplificar a Proposição 4.4.1.

Observação 4.4.1. *Como foi mostrado na demonstração do Teorema 4.4.1, se $v(2\pi) > 1$, a origem é um foco instável e se $v(2\pi) < 1$, a origem é um foco estável. A demonstração do Teorema 4.4.1 pode ser útil para estabelecer a estabilidade da origem, no caso quando $v(2\pi) = 1$.*

Capítulo 5

Aplicações

Neste capítulo apresentaremos algumas aplicações dos teoremas estudados nos capítulos anteriores.

5.1 Exemplos

Apresentamos neste momento uma aplicação da Proposição 4.2.2, onde obtemos a primeira constante não nula de Poincaré-Lyapunov e através dela analisamos a estabilidade da origem do sistema.

Teorema 5.1.1. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - (\omega + \theta - a)x^3 - (\eta - 3\mu)x^2y - (3\omega - 3\theta + 2a - \xi)xy^2 - (\mu - \nu)y^3, \\ \dot{y} = x + (\mu + \nu)x^3 + (3\omega + 3\theta + 2a)x^2y + (\eta - 3\mu)xy^2 + (\omega - \theta - a)y^3, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $\omega, \theta, a, \mu, \xi, \nu$ são parâmetros reais. Se $\xi < 0$ então a origem é um foco estável. Se $\xi > 0$ então a origem é um foco instável.

Demonstração. Observe que o sistema (5.1) está no formato do sistema (4.6), com $s = 3$, onde

$$\begin{aligned} P_3(x, y) &= -(\omega + \theta - a)x^3 - (\eta - 3\mu)x^2y - (3\omega - 3\theta + 2a - \xi)xy^2 - (\mu - \nu)y^3, \\ Q_3(x, y) &= (\mu + \nu)x^3 + (3\omega + 3\theta + 2a)x^2y + (\eta - 3\mu)xy^2 + (\omega - \theta - a)y^3. \end{aligned}$$

Temos que as constantes de Poincaré-Lyapunov α_1 e α_2 são nulas. Calculando a divergência de (5.1) temos

$$\operatorname{div}(x, y) = 5a(x^2 - y^2) + \xi y^2.$$

Agora vamos calcular a constante de Poincaré-Lyapunov α_3 . Novamente, pela Proposição 4.2.2, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{1}{3+1} \int_0^{2\pi} \operatorname{div}(\cos t, \operatorname{sen} t) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} 5a(\cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)) + \xi \operatorname{sen}^2(t) dt \\ &= \frac{5a}{4} \int_0^{2\pi} (1 - \operatorname{sen}^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)) dt + \frac{\xi}{4} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t) dt \\ &= \frac{5a}{4} \int_0^{2\pi} dt - \frac{5a}{4} \int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}^2(t) dt + \frac{\xi}{4} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t) dt \\ &= \frac{5a\pi}{2} - \frac{5a\pi}{2} + \frac{\xi\pi}{4} = \frac{\xi\pi}{4}. \end{aligned}$$

Desta forma, podemos concluir que se $\xi\pi/4 < 0$ a origem é um foco estável e caso $\xi\pi/4 > 0$ temos que a origem é um foco instável. Necessariamente o fato de ser estável ou instável é determinado pelo sinal do parâmetro real ξ . \square

Observe que se $\alpha_3 = 0$, ou seja, $\xi = 0$ não implica que a origem é um centro, pois os autores em [10] calcularam as constantes de Poincaré-Lyapunov do sistema (5.1) e obtiveram $\alpha_3 = \xi$, $\alpha_5 = va$, $\alpha_7 = \omega\theta a$, $\alpha_9 = \theta a^2\eta$ e $\alpha_{11} = \theta[4(\mu^2 + \theta^2) - a^2]a^2$. Assim, o anulamento de α_3 não implica no anulamento das demais constantes de Poincaré-Lyapunov.

Teorema 5.1.2. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + ax^2y + by^3, \\ \dot{y} = x + cx^3 + dxy^2, \end{cases} \quad (5.2)$$

onde a, d são parâmetros reais e $b < 0$ e $c > 0$. Então a origem é um centro e α_s dado em (4.7) com $s = 3$ é nulo.

Demonstração. Primeiramente mostraremos que a origem é um centro. Defina $R(x, y) =$

$(x, -y)$ e seja $\mathcal{X}(x, y)$ o campo associado ao sistema (5.2). Então temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(R(x, y)) &= (\dot{x}, -\dot{y}) \\ &= (-y + ax^2y + by^3, -x - cx^3 - dxy^2) \\ &= -(y - ax^2y - by^3, x + cx^3 + dxy^2) \\ &= -\mathcal{X}(R(x, y)). \end{aligned}$$

Portanto, temos que o sistema (5.2) é do tipo tempo-reversível, logo pelo Teorema 2.3.1, a origem deste sistema é um centro. Observe que o sistema (5.1) está no formato do sistema (4.6), com $s = 3$, onde

$$\begin{aligned} P_3(x, y) &= ax^2y + by^3, \\ Q_3(x, y) &= cx^3 + dxy^2. \end{aligned}$$

Calculando a divergência de (5.2) temos

$$\operatorname{div}(x, y) = 2(a + d)xy.$$

Agora vamos calcular a constante de Poincaré-Lyapunov α_3 . Pela Proposição 4.2.2, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{1}{3+1} \int_0^{2\pi} \operatorname{div}(\cos t, \operatorname{sen} t) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} 2(a+d) \operatorname{sen} t \cos t dt \\ &= \frac{2(a+d)}{4} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t dt \\ &= \frac{(a+d)}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Como a origem do sistema (5.2) é um centro temos que todas as constantes de Poincaré-Lyapunov são nulas, em particular o α_3 . □

A seguir, apresentamos um exemplo no qual os autores em [9] mostram que o sistema (5.3) tem um centro na origem se, e somente se, $P = 0$, $B + 3L = 0$ e $L(A + K) = 0$, mas nós utilizamos a Proposição 4.3.1 e mostramos que se $P > 0$ (respec. $P < 0$), então a origem do sistema (5.3) é um foco instável (respec. estável).

Teorema 5.1.3. *Considere o ponto singular nilpotente na origem do sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + Ax^2y + Bxy^2 + Cy^3, \\ \dot{y} = -x^3 + Px^2y + Kxy^2 + Ly^3, \end{cases} \quad (5.3)$$

com $A, B, C, P, K, L \in \mathbb{R}$. Se $P > 0$ (respec. $P < 0$), então a origem do sistema (5.3) é um foco instável (respec. estável).

Demonstração. Através do Teorema de Andreev 4.3.1, é fácil verificar que a origem do sistema (5.3) é um ponto singular monodrômico. Calculando a divergência do sistema (5.3) temos

$$\operatorname{div}\mathcal{X}(x, y) = Px^2 + 2(A + K)xy + (B + 3L)y^2,$$

onde

$$\operatorname{div}_2\mathcal{X}(x, y) = Px^2 + 2(A + K)xy + (B + 3L)y^2.$$

Calculando

$$V_3(\varepsilon) = \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon}}} P \cos^2(\sqrt{\varepsilon}t) - 2(A + K)\sqrt{\varepsilon} \cos(\sqrt{\varepsilon}t)\operatorname{sen}(\sqrt{\varepsilon}t) + (B + 3L)\varepsilon \operatorname{sen}^2(\sqrt{\varepsilon}t) dt,$$

obtemos que

$$V_3(\varepsilon) = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}P + \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}(B + 3L)\varepsilon. \quad (5.4)$$

Por definição, temos

$$V_3(\varepsilon) = \frac{v_3}{\sqrt{\varepsilon}} + \mathcal{O}(1). \quad (5.5)$$

Logo, de (5.4) e (5.5), segue que $v_3 = \pi P$. Portanto, pela Proposição 4.3.1, se $P > 0$ a origem do sistema (5.3) é um foco instável mas, se $P < 0$ então, a origem do sistema (5.3) é um foco estável. \square

Teorema 5.1.4. *Considere o seguinte sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^3 + ay^2 + cy^3 + bx^3y, \end{cases} \quad (5.6)$$

onde a, b e $c \in \mathbb{R}$. Uma condição necessária para o sistema nilpotente (5.6) ter um centro na origem é que $ab(ab + 3c) = 0$, além disso, as condições $a = c = 0$ ou $a = b = 0$ também são suficientes.

Em [9], os autores demonstram o Teorema 5.1.4. As Proposições 4.1.1 e 4.3.1 não fornecem nenhum resultado quando $a \neq 0$, porque a divergência do sistema (5.6) é $\text{div}(x, y) = 2ay + 3cy^2 + bx^3$ e os termos de menor ordem desta divergência é $\text{div}_1(x, y) = 2ay$, assim a divergência não é de sinal definido, pois d é ímpar. Sabemos que

$$\text{div}_1(\cos(\sqrt{\varepsilon}t), -\sqrt{\varepsilon}\text{sen}(\sqrt{\varepsilon}t)) = -2a\sqrt{\varepsilon}\text{sen}(\sqrt{\varepsilon}t),$$

assim

$$\begin{aligned} V_{d+1}(\varepsilon) = V_2(\varepsilon) &= \int_0^{2\pi/\sqrt{\varepsilon}} \text{div}_1(\cos(\sqrt{\varepsilon}t), -\sqrt{\varepsilon}\text{sen}(\sqrt{\varepsilon}t))dt = \\ &= \int_0^{2\pi/\sqrt{\varepsilon}} -2a\sqrt{\varepsilon}\text{sen}(\sqrt{\varepsilon}t)dt = \\ &= -2a\sqrt{\varepsilon} \int_0^{2\pi/\sqrt{\varepsilon}} \text{sen}(\sqrt{\varepsilon}t)dt = 0, \end{aligned}$$

logo a Proposição 4.3.1 não nos fornece informação sobre a estabilidade da origem deste sistema.

A seguir apresentamos um exemplo de equação diferencial ordinária onde o Teorema 4.3.3 foi essencial para analisar a estabilidade da origem.

Teorema 5.1.5. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + a_{02}y^2 - a_{31}x^3y + a_{12}xy^2 - a_{03}y^3, \\ \dot{y} = x^3, \end{cases} \quad (5.7)$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Se $\zeta < 0$ então a origem é estável. Se $\zeta > 0$ então a origem é instável.

Demonstração. É fácil ver que a origem do sistema (5.7) é um ponto singular monodrômico e possui número de Andreev $n = 2$. Denote por

$$u(\theta) = \sqrt[2n]{\cos^{2n} \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta} = \sqrt[4]{\cos^4 \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta}.$$

Calculando a divergência de (5.7) temos

$$\operatorname{div}(x, y) = -3a_{31}x^2y + a_{12}y^2$$

logo,

$$\operatorname{div}_2(x, y) = a_{12}y^2$$

assim

$$\operatorname{div}_2^{(1,2)}(x, y) = a_{12}y^2.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \zeta &= \int_0^{2\pi} \operatorname{div}_d^{(1,n)}(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \frac{\cos^2 \theta + n \operatorname{sen}^2 \theta}{u(\theta)^{d+n+1}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \operatorname{div}_2^{(1,2)}(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \frac{\cos^2 \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta}{(\sqrt[4]{\cos^4 \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta})^5} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} a_{12} \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\cos^2 \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta}{(\sqrt[4]{\cos^4 \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta})^5} d\theta \\ &= a_{12} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\cos^2 \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta}{(\sqrt[4]{\cos^4 \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta})^5} d\theta. \end{aligned}$$

Como um dos objetivos de calcular uma integral é determinar a área sob uma curva no plano cartesiano, temos que o gráfico da função

$$f(\theta) = \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\cos^2 \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta}{(\sqrt[4]{\cos^4 \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta})^5}$$

é apresentado na Figura 5.1.

Observe que apesar da função f se anular nos pontos 0 , π e 2π temos que a área sob a curva é sempre positiva, ou seja, $f(\theta) > 0$ fora destes pontos, desta forma temos que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\cos^2 \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta}{(\sqrt[4]{\cos^4 \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta})^5} d\theta > 0.$$

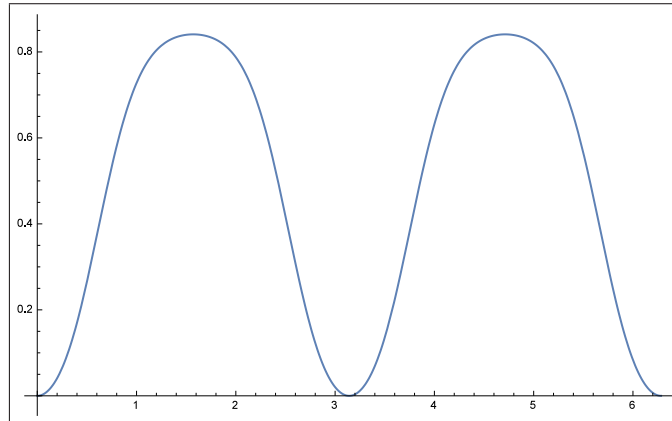


Figura 5.1: Gráfico da função f do Teorema 5.1.5.

Assim, se $a_{12} > 0$, então $\zeta > 0$ e portanto segue do Teorema 4.3.3 que a origem é um foco instável; se $a_{12} < 0$, então $\zeta < 0$ e portanto segue do Teorema 4.3.3 que a origem é um foco estável. \square

O nosso último exemplo é uma aplicação do Teorema 4.4.1, na qual através dele foi possível determinar a estabilidade da origem.

Teorema 5.1.6. *Considere o ponto singular degenerado na origem do sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(x^2 + y^2) + x^3(\lambda_1 x^2 + \lambda_2(x^2 + y^2)), \\ \dot{y} = x(x^2 + y^2) + x^2 y(\lambda_1 x^2 + \lambda_2(x^2 + y^2)), \end{cases} \quad (5.8)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Se $3\lambda_1 + 4\lambda_2 > 0$ (respec. $3\lambda_1 + 4\lambda_2 < 0$), então a origem do sistema (5.8) é um foco instável (respec. estável).

Demonstração. Seja

$$P(x, y) = -y(x^2 + y^2) + x^3(\lambda_1 x^2 + \lambda_2(x^2 + y^2))$$

e

$$Q(x, y) = x(x^2 + y^2) + x^2 y(\lambda_1 x^2 + \lambda_2(x^2 + y^2))$$

onde $P_n(x, y) = -y(x^2 + y^2)$ e $Q_n(x, y) = x(x^2 + y^2)$ com $n = 3$. Pela definição do polinômio real $\Delta(x, y)$ temos

$$\Delta(x, y) = yP_3(x, y) - xQ_3(x, y) = -y^2(x^2 + y^2) - x^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)(-x^2 - y^2).$$

Portanto, $\Delta(x, y) = (x^2 + y^2)(-x^2 - y^2) = 0$ somente se $(x, y) = (0, 0)$, logo a origem do sistema (5.8) na forma degenerada tem um ponto singular monodrômico e, assim, a origem não tem direções características. Calculando

$$\begin{aligned}
v(2\pi) &= \exp \left[\int_0^{2\pi} \frac{\cos \sigma P_3(\cos \sigma, \sin \sigma) + \sin \sigma Q_3(\cos \sigma, \sin \sigma)}{\cos \sigma Q_3(\cos \sigma, \sin \sigma) - \sin \sigma P_3(\cos \sigma, \sin \sigma)} d\sigma \right] \\
&= \exp \left[\int_0^{2\pi} \frac{-\cos \sigma \sin \sigma (\cos^2 \sigma + \sin^2 \sigma) + \sin \sigma \cos \sigma (\cos^2 \sigma + \sin^2 \sigma)}{\cos^2 \sigma (\cos^2 \sigma + \sin^2 \sigma) - \sin^2 \sigma (\cos^2 \sigma + \sin^2 \sigma)} d\sigma \right] \\
&= \exp \left[\int_0^{2\pi} 0 d\sigma \right] = \exp 0 = 1 \quad (5.9)
\end{aligned}$$

e calculando a divergência temos

$$\operatorname{div}(x, y) = 6x^2(\lambda_1 x^2 + \lambda_2(x^2 + y^2)),$$

onde $\operatorname{div}_4(x, y) = 6x^2(\lambda_1 x^2 + \lambda_2(x^2 + y^2))$. Logo

$$\operatorname{div}_4(\cos \theta, \sin \theta) = 6\lambda_1 \cos^4 \theta + 6\lambda_2 \cos^2 \theta.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\xi &= \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{div}_d(\cos \theta, \sin \theta) v(\theta)^{d-n+1}}{\cos \theta Q_n(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta P_n(\cos \theta, \sin \theta)} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(6\lambda_1 \cos^4 \theta + 6\lambda_2 \cos^2 \theta) 1^{4-3+1}}{\cos^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} d\theta \\
&= 6\lambda_1 \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta + 6\lambda_2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \\
&= \frac{3\pi}{2} (3\lambda_1 + 4\lambda_2). \quad (5.10)
\end{aligned}$$

Daí pelo Teorema 4.4.1, temos que se $3\lambda_1 + 4\lambda_2 > 0$ (respec. $3\lambda_1 + 4\lambda_2 < 0$), então a origem do sistema (5.8) é um foco instável (respec. estável). \square

Conclusões

O estudo dos teoremas apresentados para a investigação do Problema Foco-Centro nos permitiu relacionar a divergência do campo de vetores que define a equação diferencial e os coeficientes de Lyapunov. Tal relação possibilitou-nos determinar a estabilidade de alguns pontos de equilíbrio em equações diferenciais ordinárias analíticas. Através destes estudos foi possível verificar dificuldades computacionais, bem como a eficácia de cada um dos teoremas. Observamos que apesar destes teoremas serem boas ferramentas para determinar a estabilidade de alguns pontos de equilíbrio, ainda estamos longe de encontrar uma solução definitiva para o Problema Foco-Centro. Acreditamos que esta dissertação possibilitou-nos o conhecimento de fortes ferramentas matemáticas e um grande amadurecimento na pesquisa, desta forma pretendemos continuar nossos estudos analisando os centros de tipo linear, centros nilpotentes e degenerados. Também pretendemos estudar o Problema Foco-Centro em \mathbb{R}^3 e verificar se a divergência também pode ser uma ferramenta usada neste espaço como um dos fatores para determinar estabilidade de um ponto de equilíbrio.

Referências Bibliográficas

- [1] A. F. Andreev, *Investigation of the behaviour of the integral curves of a system of two differential equations in the neighbourhood of a singular point*, Trans. Amer. Math. Soc., 8 (1958), 183-207.
- [2] V. I. Arnold, Y. S. Ilyashenko, *Dynamical Systems I, Ordinary Differential Equations*, Encyclopaedia Mathematical Sciences, vol.1, Springer, Berlin, 1988.
- [3] C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Texts in Applied Mathematics, 34, Springer-Verlag, Second Edition, New York, 1999.
- [4] C. I. Doering, A. O. Lopes, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Coleção Matemática Universitária, 5ª edição, Rio de Janeiro, Editora IMPA, 2012.
- [5] F. Dumortier, J. Llibre, J. C. Artés, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Universitext, Springer, 2006.
- [6] J. Écalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac Hermam*, Actualités Math., Hermann, Paris, 1992.
- [7] I. A. García, H. Giacomini, J. Giné, J. Llibre, *Analytic nilpotent centers as limits of nondegenerate centers revisited*, preprint, 2015.
- [8] A. Garcia, Y. Lequain, *Elementos de Álgebra*, Coleção Projeto Euclides, 6ª edição, Rio de Janeiro, Editora IMPA, 2013.
- [9] J. Giné, J. Llibre, *A method for characterizing nilpotent centers*, J.Math. Anal. Appl. 413 (2014), 537-545.

- [10] M. Grau, J. Llibre, *Divergence and Poincaré–Liapunov constants for analytic differential systems*, Journal of Differential Equations, 258 (2015), 4348-4367.
- [11] Y. Ilyashenko, *Finiteness Theorems for Limits Cycles*, American Mathematical Society, Providence, RI. 1993.
- [12] J. Itikawa, *O Problema do Centro-Foco para Singularidades Nilpotentes no Plano*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.
- [13] J. Llibre, *Centers: Their integrability and relations with the divergence*, preprint, 2015.
- [14] W. P. Nunes, *Integrabilidade Local de Campos de Vetores em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3* , Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Computação - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2015.
- [15] J. Palis, W. Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems: an Introduction*, New York, Springer-Verlag, 1982.
- [16] J. D. Ribeiro, *O Problema do Centro-Foco em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3* , Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Computação - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2014.
- [17] V. G. Romanovski, D. S. Shafer, *The Center and Cyclicity Problems: A computational Algebra Approach*, Boston-Basel-Berlin: Birkhauser, 2009.
- [18] J. Sotomayor, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Textos Universitários do IME–USP, Livraria da Física, São Paulo, 2011.