

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências
CAMPUS ITAJUBÁ

**Conhecimentos Matemáticos para o Ensino mobilizados por
licenciandos no estudo de tópicos da História da Matemática**

HEDNAN GUIMARÃES MOTA

Orientadora: Mariana Feiteiro Cavalari Silva

Itajubá - MG
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências
CAMPUS ITAJUBÁ

HEDNAN GUIMARÃES MOTA

**Conhecimentos Matemáticos para o Ensino mobilizados por
licenciandos no estudo de tópicos da História da Matemática**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, da Universidade Federal de Itajubá, como requisito para a obtenção do Título de Mestre em Educação em Ciências.

Área de concentração: Educação em Ciências
Linha: Ensino e Aprendizagem na Educação em Ciências

Orientadora: Mariana Feiteiro Cavalari Silva

Itajubá - MG
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências
CAMPUS ITAJUBÁ

HEDNAN GUIMARÃES MOTA

**Conhecimentos Matemáticos para o Ensino mobilizados por
licenciandos no estudo de tópicos da História da Matemática**

Banca Examinadora:

Prof.^a Dr.^a Mariana Feiteiro Cavalari Silva (orientadora)
Universidade Federal de Itajubá

Prof.^a Dr.^a Ana Carolina Costa Pereira
Universidade Estadual do Ceará

Prof.^a Dr.^a Ana Cristina Ferreira
Universidade Federal de Ouro Preto

Prof.^a Dr.^a Eliane Matesco Cristovão
Universidade Federal de Itajubá

Itajubá - MG
2023

*Dedico este trabalho ao meus pais,
Maria Helena Guimarães Mota e
João Batista Mota, os pilares da
minha formação como ser humano*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pelo dom da vida, por me guiar durante todo o processo de desenvolvimento deste trabalho e por me abençoar em todas as escolhas feitas ao longo da jornada.

À minha família, em especial aos meus pais Maria Helena e João Batista, quero expressar a minha gratidão por todo o amor, apoio, incentivo, palavras de carinho e paciência que tiveram comigo em todas as fases desta jornada. Vocês foram e sempre serão a minha maior inspiração para buscar novos conhecimentos e crescer como pessoa e profissional.

À minha namorada Stefany, agradeço por ser a minha companheira nesta caminhada, por todo amor, pelas palavras de carinho, pelo apoio, compreensão e incentivo que você me deu durante a realização deste trabalho.

Aos meus familiares, por todo apoio e pelo incentivo a continuar nos estudos.

À minha orientadora, professora Mariana Feiteiro Cavalari Silva, pelas contribuições que enriqueceram esta pesquisa, por todo o conhecimento compartilhado, pela paciência, sabedoria e apoio.

As professoras pesquisadoras da banca de avaliação, Ana Carolina Costa Pereira, Ana Cristina Ferreira e Eliane Matesco Cristovão, por dedicarem o seu tempo e conhecimento para avaliar e contribuir com a minha pesquisa. Agradeço pelos valiosos comentários, sugestões e contribuições que foram fundamentais para o aprimoramento do meu trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, pelos ensinamentos que contribuíram para a minha formação.

Aos integrantes do Grupo de Pesquisa em Práticas Formativas e Educativas em Ciências e Matemática, pelas trocas de experiências e pelas sugestões destinadas a este trabalho.

Aos licenciandos que fizeram parte desta pesquisa, que acreditaram neste estudo. Agradeço pela dedicação e comprometimento.

Aos meus amigos Alice, Wellington, Jean e Daniel, por todo incentivo, companheirismo e principalmente pela amizade.

Por fim, agradeço a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

As contribuições do estudo da História da Matemática (HM) para a formação de professores têm sido objeto de variados trabalhos acadêmicos em nosso país nos últimos anos. Neste contexto, e considerando que podemos identificar nos cursos de licenciatura em Matemática no Brasil, diferentes enfoques da HM, tais como: História da Matemática, História da Matemática no Ensino e História da Educação Matemática (HEM), nesta investigação nos focamos, especificamente, em investigar as contribuições do estudo da temática “História da Matemática no ensino” para à formação de docentes. Para tanto, partimos do modelo “Conhecimentos Matemáticos para o Ensino”, amplamente conhecido pela sua sigla em inglês, MKT. Nesse sentido, a presente investigação se norteou pela seguinte questão: Que Conhecimentos Matemáticos para o Ensino são mobilizados por licenciandos ao estudarem aspectos da História da Matemática no ensino em uma disciplina do curso de Licenciatura em Matemática? Para tanto, os dados foram construídos ao longo do desenvolvimento de uma disciplina de Prática de Ensino de uma universidade federal do estado de Minas Gerais, cuja ementa previa a abordagem de tópicos da “História da Matemática no ensino”. As aulas desta disciplina foram gravadas e transcritas, nas quais buscamos identificar e analisar, nas falas dos participantes, conhecimentos referentes aos Conhecimentos Matemáticos para o Ensino que foram mobilizados pelos licenciandos. Destaca-se que ao longo da investigação foi realizada uma adaptação do modelo MKT, na qual dividimos os conhecimentos de professores de Matemática em três domínios: o Conhecimento do Conteúdo, o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e o Conhecimento do Currículo. Os resultados indicaram que ao estudarem a temática “HM no Ensino” e ao desenvolverem atividades sobre esta, os licenciandos mobilizaram conhecimentos em todos os três domínios, especialmente o Conhecimento Pedagógico de Conteúdo. Os licenciandos manifestaram principalmente esse domínio, em virtude da disciplina dar mais enfoque as questões pedagógicas do ensino. O Conhecimento do Currículo também foi bem mobilizado, com os licenciandos buscando os documentos oficiais, como a BNCC. Por outro lado, o Conhecimento do Conteúdo foi o menos mobilizado, uma vez que as questões matemáticas não eram o foco principal da disciplina. Assim, pode-se perceber que o estudo da “HM no ensino” pode trazer contribuições para a formação do futuro professor de Matemática.

Palavras-chave: História da Matemática no Ensino; Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT); Formação inicial de professores de matemática.

ABSTRACT

The contributions in the studies of the History of Mathematics (HM) for the formation of teachers has been the subject of various academic works in our country in the last years. In this context, considering that we can identify in the mathematics Degree courses in Brazil, different approaches on HM, such as History of Mathematics, History of Mathematics in Teaching and History of Mathematics Education (HME), on this investigation we focus, specially, in investigating the contributions on the study of theme "History of Mathematics in Teaching" for the training of teachers. For such, we start from the model "Mathematical Knowledge for Teaching" (MKT). In this sense, the present investigation was guided by the following question: Which Mathematical Knowledges for Teaching are mobilized by undergraduates when studying aspects of the History of Mathematics in teaching in a subject of the Mathematics Degree course? Therefore, we collected data throughout the development of a Teaching Practice subject at a federal university in the state of Minas Gerais, whose syllabus provided for the approach of the theme "History of Mathematics in teaching". The classes of this subject were recorded and transcribed, in which we tried to search and identify, in the words of the participants, knowledge referent in the Mathematical Knowledges for Teaching that were mobilized by the undergraduates. Throughout the investigation, an adaptation of the MKT model was realized, in which we divided the knowledges of mathematics teachers in three domains: Subject Matter Knowledge, Pedagogical Content Knowledge and Curriculum Knowledge. The results indicated that when studying the theme "HM in Teaching" and when developing activities on the theme, the undergraduates mobilized the knowledge in all three domains, especially in the Pedagogical Content Knowledge. The undergraduates mainly manifested this domain, due to the discipline giving more focus to the pedagogical issues of teaching. Curriculum Knowledge was also well mobilized, with the students referring to official documents such as the BNCC. However, the Subject Matter Knowledge was the least mobilized since mathematical questions were not the focus of the discipline. Thus, it can be perceived that the study of "HM in teaching" can contribute to the formation of future Mathematics teachers.

Keywords: History of Mathematics in Teaching; Mathematical Knowledge for Teaching (MKT); Initial formation of Mathematics teachers.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Domínios e Subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT).....	34
Figura 2: Ilustração do quadro da docente, comparando a solução geométrica e algébrica do problema.....	50

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Quantidade de conhecimentos mobilizados em cada momento da disciplina.....62

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Encontros síncronos realizados	41
Quadro 2: Atividades assíncronas realizadas	42
Quadro 3: Duplas que disponibilizaram as gravações das atividades	44
Quadro 4: Resumo dos conceitos dos subdomínios	44
Quadro 5: Conhecimentos de cada subdomínio/domínio.....	46
Quadro 6: Cores utilizadas para representar cada conhecimento identificado ao longo do estudo da abordagem da HM no ensino	48
Quadro 7: Exemplo da mobilização do conhecimento C7	64
Quadro 8: Exemplo da mobilização do conhecimento C8	64
Quadro 9: Exemplo da mobilização do conhecimento C9	65
Quadro 10: Exemplo da mobilização do conhecimento C10	65
Quadro 11: Exemplo da mobilização do conhecimento C11	66
Quadro 12: Exemplo da mobilização do conhecimento C11	66
Quadro 13: Exemplo da mobilização do conhecimento C4	68
Quadro 14: Exemplos da mobilização do conhecimento C5.....	68
Quadro 15: Exemplo da mobilização do conhecimento C6	69
Quadro 16: Exemplos da mobilização do conhecimento C12.....	70
Quadro 17: Exemplo da mobilização do conhecimento C13	71
Quadro 18: Exemplo da mobilização do conhecimento C14	71
Quadro 19: Exemplos da mobilização do conhecimento C15.....	72
Quadro 20: Exemplos da mobilização do conhecimento C15.....	72
Quadro 21: Exemplo da mobilização do conhecimento C16	73
Quadro 22: Exemplo da mobilização do conhecimento C17	73
Quadro 23: Exemplo da mobilização do conhecimento C1	75
Quadro 24: Exemplo da mobilização do conhecimento C2	75
Quadro 25: Exemplos da mobilização do conhecimento C3.....	76
Quadro 26: Exemplo da mobilização do conhecimento C3	76
Quadro 27: Exemplo da mobilização do conhecimento C3	77

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CCK	<i>Common Content Knowledge</i> - Conhecimento Comum do Conteúdo
FFCL	Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
HCK	<i>Horizon Content Knowledge</i> – Conhecimento do Horizonte do Conteúdo
HEM	História da Educação Matemática
HM	História da Matemática
KC	Conhecimento do Currículo
KCC	<i>Knowledge of Content and Curriculum</i> – Conhecimento do Conteúdo e do Currículo
KCS	<i>Knowledge of Content and Students</i> - Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes
KCT	<i>Knowledge of Content and Teaching</i> – Conhecimento do Conteúdo e do Ensino
MKT	<i>Mathematical Knowledge for Teaching</i> – Conhecimento Matemático para o Ensino
P.A.	Progressão Aritmética
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
PCK	<i>Pedagogical Content Knowledge</i> – Conhecimento Pedagógico do Conteúdo
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
SBHMat	Sociedade Brasileira de História da Matemática
SBMAC	Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional
SCK	<i>Specialized Content Knowledge</i> – Conhecimento Especializado do Conteúdo
SMK	<i>Subject Matter Knowledge</i> – Conhecimento do Conteúdo
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
2 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO E FORMAÇÃO DE PROFESSORES	20
2.1 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES	20
2.2 A INCLUSÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS CURSOS DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA	23
2.3 CONTRIBUIÇÕES DO ESTUDO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES	25
3 O CONHECIMENTO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: considerações sobre o Conhecimento Matemático para o Ensino	30
3.1 O CONHECIMENTO DE PROFESSORES	30
3.2 CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO (MKT)	33
3.2.1 Os domínios e subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino	34
4 METODOLOGIA.....	40
4.1 CONTEXTO DA PESQUISA.....	40
4.2 INSTRUMENTOS DE CONSTRUÇÃO DOS DADOS E O PROCESSO DE ANÁLISE	43
5 CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS PARA O ENSINO MOBILIZADOS PELOS LICENCIANDOS NO ESTUDO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO ...	48
5.1 DESCRIÇÃO DOS MOMENTOS DA DISCIPLINA DEDICADOS AO ESTUDO DE TÓPICOS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO.....	48
5.1.1 Momento 1: Vivência de uma Atividade que utiliza a História da Matemática no Ensino de Resolução de Equações do 2º Grau	49
5.1.2 Momento 2: Apresentação de uma Proposta de Ensino de Equação do Primeiro Grau por meio de uma Abordagem Histórica	51
5.1.3 Momento 3: Finalidades/potencialidades da inclusão de aspectos da HM na Sala de Aula.....	51

5.1.4 Momento 4: HM nos Livros Didáticos.....	52
5.1.5 Momento 5: Apresentação dos Relatos de Experiência	53
5.1.6 Momento 6: Texto com um plano de aula de HM no ensino	55
5.1.7 Momento 7: Preparação dos Planos de Aula	55
5.1.8 Momento 8: Apresentação dos Planos de Aula.....	59
5.2 UMA DISCUSSÃO DOS CONHECIMENTOS MOBILIZADOS PELOS LICENCIANDOS.....	61
5.2.1 O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (adaptado) mobilizado por licenciandos no estudo da História da Matemática no ensino	63
5.2.2 O Conhecimento do Currículo (adaptado do MKT) mobilizado por licenciandos no estudo da História da Matemática no ensino	70
5.2.3 O Conhecimento do Conteúdo (adaptado do MKT) mobilizado por licenciandos no estudo da História da Matemática no ensino	74
5.2.4 Relações entre os momentos da disciplina e os conhecimentos mobilizados....	78
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	82
REFERÊNCIAS	85
APÊNDICE I.....	88
ANEXO I.....	89

1 INTRODUÇÃO

As pesquisas referentes a História da Matemática, a História no ensino da Matemática e a História da Educação Matemática, vêm apresentando, segundo Mendes (2012), resultados “valiosos” e indicando novas direções e ênfases para melhorar a formação de professores e o aprendizado na Educação Matemática. “Isso possivelmente ocorre porque as reflexões sobre tais estudos evidenciam a importância do processo formativo na superação de obstáculos encontrados na trajetória dos sujeitos da docência em Matemática.” (MENDES, 2012, p.468)

A apresentação da História da Matemática para o ensino da Matemática tem sido objeto de estudo e discussões a mais de um século. Joseph Lagrange (1736-1813), por exemplo, apontava que a HM poderia satisfazer a curiosidade dos estudantes acerca da forma como o conhecimento é produzido, reconhecendo as pessoas que atuaram no seu desenvolvimento, além de contribuir para a orientação de investigações matemáticas futuras. Dessa forma, os alunos poderiam se beneficiar de técnicas conhecidas desenvolvidas no passado para a resolução de problemas atuais (FAUVEL, 1993).

Embora seja uma prática comum há décadas, deve-se questionar a utilização da História da Matemática como alegoria. Essa estratégia pode levar a uma compreensão superficial da disciplina, enfatizando a memorização de fatos históricos em detrimento do desenvolvimento do pensamento matemático. Reconhecemos, portanto, que existem outras abordagens pedagógicas da História da Matemática mais efetivas para o ensino dessa disciplina, as quais podem contribuir para a aprendizagem e o desenvolvimento do pensamento crítico-matemático do estudante.

A partir do final dos anos 1980, emergiu um crescente interesse sobre a inserção da História da Matemática na Educação Matemática, com a apresentação de novas justificativas para a utilização de elementos da HM no ensino de Matemática (MIGUEL; BRITO, 1996). Segundo Fried (2001), as contribuições da HM podem ser sintetizadas em três grandes temas, sendo eles: tornar a Matemática mais interessante e compreensível; colaborar para uma melhor visão dos conceitos, problemas e as soluções dos problemas matemáticos; e a humanização da Matemática.

Neste contexto, podemos identificar que uma abordagem da História da Matemática no ensino de Matemática pode trazer contribuições para o processo de ensino e aprendizagem. A relevância da inclusão de aspectos dessa abordagem no ensino, além de enfatizada pela literatura, é apresentada, também, nos documentos oficiais.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), documento orientador da educação brasileira elaborado em 1997, tais aspectos podem ser introduzidos no ensino com vistas a valorizar conhecimentos matemáticos intuitivos e culturais e para mostrar que a produção de conhecimento não é de exclusividade de alguns grupos sociais ou culturais (BRASIL, 1997). De acordo com este documento, uma abordagem da História da Matemática pode trazer contribuições importantes para o ensino e aprendizagem da Matemática.

Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer idéias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento. (BRASIL, 1997, p. 34).

Já na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que rege a atual educação brasileira, podemos encontrar a ideia de que a HM pode contribuir para despertar o interesse do aluno nos estudos matemáticos e para trazer um contexto para se aprender Matemática. Além disso,

Cumpra também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática (BRASIL, 2017, p. 299).

Desse modo, considerando que uma abordagem histórica no ensino de Matemática na Educação Básica é indicada tanto por pesquisadores quanto pelas diretrizes educacionais brasileiras, é importante propiciar aos futuros professores o estudo da HM. Neste contexto, diversas pesquisas têm estudado a inclusão de aspectos da HM na formação de professores e as contribuições do estudo da HM para tal formação (CAVALARI, 2019; ARAMAN; BATISTA, 2013; BALESTRI, 2008; MIGUEL; BRITO, 1996).

Entretanto, o conhecimento acerca da HM, embora necessário, não é suficiente para preparar o futuro professor de Matemática para o uso dessa abordagem na sala de aula. Afinal, não basta apenas levar elementos da história para a sala de aula, é preciso que o professor seja capaz “[...] de relacionar diversos componentes, de forma coerente e sistematizada, que atenda ao objetivo de proporcionar situações de aprendizagem matemática” (ARAMAN; BATISTA, p.25).

Assim, as autoras ressaltam que “Não basta ter vontade de trabalhar com a história da matemática, pois somente com a boa vontade esse trabalhar se conduz a uma prática de senso comum. É necessário que o professor receba formação profissional para isso, [...]” (p. 26-27). Dessa maneira, é necessário que os cursos de licenciatura em Matemática apresentem aspectos da “HM no ensino” de modo a proporcionar ao professor o estudo desta abordagem, permitindo assim que ele utilize a HM de maneira mais eficiente.

Dessa maneira, é importante destacar que entendemos que o estudo da “História da Matemática no ensino”, se refere a análise da literatura especializada relativa às contribuições, limitações e dificuldades da utilização dessa abordagem no ensino. Além disso, compreende o estudo, com base na literatura, de diferentes formas de incluir a HM no ensino de Matemática e suas potencialidades, bem como o contato com relatos de experiência e vivências de formas de ensinar e aprender matemática por meio da História. Por fim, inclui o estudo e elaboração de planos de ensino que utilizam a HM no ensino de Matemática. Assim, após estudar a temática “História da Matemática no ensino”, espera-se que futuro professor tenha elementos para, caso tenha interesse, possa decidir em que momentos utilizar a HM no ensino de matemática, com quais objetivos e com quais abordagens.

Destacamos que uma maneira de investigar as contribuições de uma abordagem ou de uma temática para a formação de professores, é por meio da análise da mobilização de conhecimentos de professores. Dessa forma, é possível identificar se o estudo desta temática ou se a abordagem adotada está colaborando para o aprimoramento dos conhecimentos que são relevantes aos futuros professores.

O estudo sobre os conhecimentos de professores tiveram início nos anos 1980, em especial com o trabalho de Shulman (1986), que foi um dos precursores no estudo de conhecimentos que seriam próprios dos professores para ensinar. Posteriormente, diversos modelos foram surgindo, sendo um com destaque, o modelo elaborado por Ball, Thames e Phelps (2008): o Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT)¹.

O modelo do **Conhecimento Matemático para o Ensino** (MKT), proposto por Ball, Thames e Phelps (2008), apresenta dois domínios de conhecimentos: o **Conhecimento do Conteúdo**, que é dividido nos subdomínios “Conhecimento Comum do Conteúdo”, “Conhecimento Especializado do Conteúdo” e “Conhecimento do Horizonte do Conteúdo”; e o **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo**, dividido nos subdomínios “Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes”, “Conhecimento do Conteúdo e do Ensino” e “Conhecimento do Conteúdo e do Currículo”.

Apesar da importância do uso da História da Matemática no ensino para a formação de professores e da ampla adoção do modelo MKT em pesquisas realizadas no Brasil, nota-se uma escassez de estudos que se concentram nas contribuições da abordagem da História da

¹ Iremos optar por citar os termos dos domínios e subdomínios do conhecimento em português e usar as suas siglas na forma inglesa, devido ao seu maior destaque nessa língua.

Matemática no ensino para a formação de professores, sob a perspectiva do referencial teórico do MKT².

Para compreender melhor como a HM pode contribuir para a formação de professores, é necessário definir a mobilização de conhecimentos. Esse conceito se refere à habilidade de um professor em utilizar seus conhecimentos para responder a questões e problemas que surgem no contexto do ensino, aplicando diferentes estratégias e recursos. Dessa maneira, a mobilização de conhecimentos, pode sugerir que os licenciandos entenderam e/ou compreenderam o conteúdo discutido. Assim, a mobilização pode envolver tanto o conhecimento do conteúdo específico, quanto o conhecimento pedagógico desse conteúdo. Além disso, a sua compreensão é importante para explorar as possíveis contribuições da abordagem da HM no ensino para a formação de professores.

Um exemplo de pesquisa internacional sobre a mobilização de conhecimentos do modelo MKT foi conduzido por Mosvold, Jakobsen e Jankvist (2014). A partir de aulas que já haviam sido ministradas por membros do grupo de pesquisa que participavam e que utilizavam a História da Matemática, os autores buscaram identificar as contribuições para a formação de professores por meio da análise da mobilização de cada subdomínio do MKT. Com relação ao **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo**, os autores entenderam que a HM contribui para que o professor tenha consciência de possíveis equívocos e dificuldades relacionadas a conceitos e ideias matemáticas. Já no **Conhecimento do Conteúdo**, concluíram que a HM pode oferecer diferentes representações de ideias matemáticas. Dessa maneira, os autores destacam que a HM possui potencial para contribuir de várias maneiras para o MKT (MOSVOLD; JAKOBSEN; JANKVIST, 2014).

Considerando assim, esta lacuna na produção científica brasileira, propomos a realização da presente investigação que, tendo como referência os domínios e subdomínios do MKT, se norteia pela seguinte questão: *Que Conhecimentos Matemáticos para o Ensino são mobilizados por licenciandos ao estudarem aspectos da História da Matemática no ensino em uma disciplina do curso de Licenciatura em Matemática?*

Para a realização desta investigação realizamos a construção dos dados em uma disciplina de Prática de Ensino, do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade

² Ao realizarmos uma busca no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), no dia 28 de outubro de 2022, com o termo “conhecimento matemático para o ensino”, encontramos 25 resultados. Ao lermos os resumos de todos estes trabalhos, podemos encontrar pesquisas que utilizaram o modelo de Ball, Thames e Phelps (2008) para identificar conhecimentos em professores da Educação Básica (SILVA, 2016; ROGERI, 2015) e de licenciandos durante disciplinas da formação inicial do professor de matemática (PINTO, 2021; BONATO, 2020). Entretanto, não localizamos pesquisas que utilizaram desse modelo para investigar os conhecimentos mobilizados por licenciandos no estudo da HM no ensino.

Federal do estado de Minas Gerais, na qual foram realizados estudos e atividades sobre a História da Matemática no ensino. A pesquisa contou com a participação de oito licenciandos e foi aprovada por um comitê de ética em pesquisa³.

Após a obtenção dos dados, foi iniciada a análise dos trechos que indicavam a mobilização de conhecimentos pelos licenciandos. No entanto, a identificação dos subdomínios do Conhecimento do Horizonte do Conteúdo e do Conhecimento do Conteúdo e do Currículo muitas vezes causou incertezas, já que os subdomínios compartilham similaridades. Nesse sentido, surgiu a ideia de uni-los para uma melhor análise dos dados.

Destacamos ainda, o fato de que Ball, Thames e Phelps (2008) já indicavam que os subdomínios Conhecimento do Horizonte do Conteúdo e o Conhecimento do Conteúdo e do Currículo foram incluídos de forma provisória nos domínios do Conhecimento do Conteúdo e do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, respectivamente, de modo que eles podem fazer parte de outros subdomínios ou ainda se configurar como um domínio por si só. Sendo assim, justifica-se a adaptação do modelo MKT que propusemos, na qual agrupamos os subdomínios do Conhecimento do Horizonte do Conteúdo e do Conhecimento do Conteúdo e do Currículo para formar o domínio Conhecimento do Currículo.

Dessa forma, buscamos analisar os conhecimentos referentes aos domínios do Conhecimento do Conteúdo, Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e Conhecimento do Currículo, que foram mobilizados pelos licenciandos ao estudarem aspectos da “HM no ensino” ao longo da disciplina, ou seja, a presente investigação teve os seguintes objetivos específicos:

- Identificar e analisar Conhecimentos do Conteúdo (adaptado) mobilizados por licenciandos durante o estudo de aspectos da História da Matemática no ensino em uma disciplina;
- Identificar e analisar Conhecimentos Pedagógicos do Conteúdo (adaptado) mobilizados por licenciandos durante o estudo de aspectos da História da Matemática no ensino em uma disciplina;
- Identificar e analisar Conhecimentos do Currículo (adaptado) mobilizados por licenciandos durante o estudo de aspectos da História da Matemática no ensino em uma disciplina;

Destacamos que os resultados desta pesquisa poderão contribuir para a ampliação do debate sobre o papel da História da Matemática na formação inicial de professores, à medida

³ O projeto desta pesquisa foi submetido a avaliação de um Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) através do cadastro na Plataforma Brasil do Ministério da Saúde. A proposta foi aprovada pelo CEP do Centro Universitário de Itajubá (FEPI) sob o número CAAE 50337121.5.0000.5094.

que mostrarão possíveis contribuições de um estudo acerca da História da Matemática no ensino para a mobilização de conhecimentos.

Ademais, o desenvolvimento dessa investigação, poderá apresentar resultados que indicam possíveis lacunas na formação do futuro professor de Matemática no estudo da “HM no ensino”. Desse modo, poderão ser pensadas maneiras de aperfeiçoar a abordagem desta temática, podendo assim ser utilizados para a melhoria de cursos de Licenciatura em Matemática.

Para apresentar os resultados da investigação, o presente trabalho se divide em seis capítulos. O primeiro é este capítulo introdutório, no segundo, é apresentada uma revisão bibliográfica sobre a História da Matemática na formação de professores. Já no terceiro capítulo, são expostos os referenciais que discutem conhecimentos de professores, conhecimentos de professores de Matemática, em especial o MKT. No quarto capítulo, é apresentada a metodologia utilizada na investigação, de modo a detalhar o processo de coleta e análise dos dados. No quinto capítulo, são apresentadas as análises dos conhecimentos mobilizados pelos licenciandos durante o desenvolvimento do tópico “História da Matemática no Ensino” na disciplina investigada. Por fim, no sexto capítulo, são apresentadas as considerações finais da investigação.

2 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO E FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Nesse capítulo serão apresentadas reflexões sobre a História da Matemática no ensino na formação de professores que foram elaboradas com base na literatura. Para tanto, inicialmente iremos expor um histórico da inclusão do estudo da História da Matemática na formação de professores, apresentando as contribuições e a importância do estudo desta temática na formação do professor de Matemática.

2.1 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

As discussões referentes à inclusão de temáticas da História da Matemática na formação de professores, não são recentes, tendo sido iniciadas no início do século XX. Durante o III Congresso Internacional de Matemática, realizado em 1904 na Alemanha, a introdução da HM foi recomendada como disciplina “indispensável” à formação de professores (SILVA, 2001).

No Brasil, pode-se encontrar registros de uma disciplina de História da Matemática no currículo do primeiro curso de Matemática, criado em 1934 pela então Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL) da Universidade de São Paulo (USP). Em que pese o fato de que não haja informações claras sobre a sua oferta, a própria presença desta disciplina no currículo já é um indicativo do entendimento de que esta temática era relevante a formação do matemático e do professor de Matemática (SILVA, 2001).

Destaca-se que após a criação do curso de Matemática da USP, foram criados, pelo menos, mais 14 cursos de Matemática até os anos 1950. Já nas duas décadas posteriores, houve um aumento expressivo de cursos de Matemática e de licenciaturas (CAVALARI, 2015).

Nestas décadas de 1960 e 1970, com avanço da industrialização no Brasil, as escolas começaram a buscar professores que pudessem levar aos alunos uma formação científica e técnica, que era proposta pelo “Movimento da Matemática Moderna” (FISCHER, 2008). Além disso, os professores que lecionavam matemática nesse período, eram formados em outras áreas, como a engenharia, de modo que havia uma escassez de professores com graduação em Matemática, o que pode ter contribuído para esse aumento dos cursos (LIMA, 2006).

Ao longo do Movimento da Matemática Moderna, de acordo com Miguel e Brito (1996), houve um desinteresse pelo uso da História da Matemática, o que fez com que essa abordagem ficasse de fora desse movimento. No entanto, com o declínio desse movimento na década de 1980, as discussões sobre a inclusão da HM em práticas pedagógicas e na formação de professores se intensificou em diversos países, inclusive no Brasil (MIGUEL; BRITO, 1996).

Durante os anos 80 do século XX, a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e a Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC) emitiram, em 1985, um documento que sugeria um currículo básico para todos os cursos de licenciatura em Matemática. A disciplina de História da Matemática não aparecia como parte desse currículo básico, mas foi recomendado que esta fosse incluída como optativa. Dessa forma, algumas universidades reformularam seus currículos da graduação, fazendo a inclusão da HM, conforme sugerido pela SBM. (SILVA, 2001).

Ainda nesta década, em 1989, no I Encontro Paulista de Educação Matemática, realizado em Campinas, em uma das atividades, foi destacada a falta da abordagem da HM nos cursos de formação de professores de Matemática (MIGUEL; BRITO, 1996).

Stamato (2003) destaca que após o primeiro Exame Nacional dos Cursos de Matemática, conhecido como 'Provão', realizado em 1998, as instituições de ensino começaram a incluir a disciplina de História da Matemática nos currículos dos cursos de Matemática. Esse exame visava avaliar a qualidade do Ensino Superior no país, que tinha como um dos perfis para o graduando a “visão histórica e crítica da Matemática, tanto no seu estado atual como nas várias fases de sua evolução” (BRASIL, 1998, p.4).

Circe Mary Silva da Silva, em 1998, ao analisar 28 currículos de licenciaturas e bacharelados em Matemática de diferentes regiões do Brasil, exceto a região Norte, identificou que a disciplina de História da Matemática era ofertada em 16 instituições, sendo 13 como obrigatória e três como optativas. A disciplina recebia diferentes nomes como 'História das ciências exatas', 'Evolução da Ciência e Matemática' e 'Tópicos de História da Matemática' e geralmente era oferecida no final do curso, com uma carga horária de 40 a 120 horas (SILVA, 2001).

Em 1999, com a criação da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), houve o fortalecimento da HM no Brasil. Dessa maneira, diversos grupos nacionais e internacionais começaram a surgir, permitindo que a História da Matemática ganhasse cada vez mais espaços (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2011).

Poucos anos depois, em 2001, as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica foram publicadas e instituídas através das Resoluções CNE/CP nº 01/2002 e 02/2002 e as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, com o Parecer CNE 1302/2001. A diretrizes indicam que se deve incluir nos cursos “conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática” (BRASIL, 2001, p.4). Dessa maneira, novos Projetos Políticos Pedagógicos dos

cursos de licenciatura foram elaborados de modo a incluir esses conteúdos, o que fez crescer a oferta da disciplina de História da Matemática nesses cursos (BALESTRI; CYRINO, 2010).

Balestri e Cyrino (2010) realizaram um levantamento, com dados do Censo da Educação Superior de 2007, e identificaram 564 cursos presenciais de ‘Formação de Professores de Matemática’ em 403 instituições de ensino superior de todas as regiões do Brasil. Destes cursos, os autores tiveram acesso a matrizes curriculares de 231 cursos, dos quais 156 oferecem a disciplina de História da Matemática.

Em uma pesquisa mais recente Cavalari e colaboradores (2022), realizaram um mapeamento da presença da temática de História da Matemática em cursos, presenciais, de formação de professores de Matemática ofertados por Universidades Federais. Foram analisados documentos oficiais de 117 cursos e foi identificado que em 112 destes, tópicos referentes a temáticas da HM estão previstos em ementas de suas disciplinas.

Destaca-se ainda, que ao analisarem os currículos desses cursos, as autoras indicaram que temáticas da História da Matemática⁴ têm sido apresentadas com diferentes enfoques, a saber: História da Matemática, História da Matemática no Ensino e História da Educação Matemática (HEM). As disciplinas que abordam a “HM” são aquelas que discutem assuntos específicos da História da Matemática; as que abordam a “HM no Ensino” são as que discutem as possibilidades de utilizar a História da Matemática no contexto da Educação Básica e a referentes à HEM, são aquelas que abordam uma história do ensino de matemática, bem como o desenvolvimento da área de Educação Matemática (CAVALARI e colaboradores, 2022).

Além disto, as autoras destacam que o estudo de aspectos da História da Matemática, não necessariamente, está restrito as disciplinas específicas de História da Matemática, embora, esta tem sido a forma mais utilizada nos cursos de formação de professores de Matemática das universidades federais brasileiras (CAVALARI e colaboradores, 2022).

Destacamos, assim, que disciplinas de HM estão, paulatinamente, sendo inseridas nos cursos de formação de professores. Neste contexto, ressalta-se a necessidade de discussões sobre as finalidades da abordagem desta temática na formação do professor (MIGUEL; BRITO, 1996).

As possíveis articulações entre HM e formação de professores têm sido objeto de investigações brasileiras. Borges (2019), identificou no Banco de Teses e Dissertações da CAPES, 116 trabalhos que tratavam do estudo da HM na formação de professores, de modo que essa temática começou a ter mais destaque a partir de 2008.

⁴ As temáticas relativas a HM podem abranger aspectos da própria HM e/ou às articulações entre História da Matemática e Educação Matemática.

Neste contexto, podemos observar que diversas pesquisas têm sido realizadas de modo a articular a HM da Matemática e formação de professores, sendo muitas destas voltadas para as contribuições da inclusão de temáticas referentes a História da Matemática na formação de professores e formas de realizar estas inclusões (BALESTRI, 2008; GARCIA, 2013; FRANSOLIN, 2019).

Assim, tendo como referência a literatura brasileira, apresentaremos no item a seguir algumas considerações sobre algumas possibilidades de incluir a História da Matemática na formação inicial de professores de Matemática, para posteriormente, apresentarmos as contribuições desta inclusão.

2.2 A INCLUSÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS CURSOS DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

O estudo de tópicos da História da Matemática, nos cursos de formação de professores de Matemática das universidades federais brasileiras tem sido previsto, sobretudo, em disciplinas específicas de HM, ou seja, em disciplinas cujo foco é o estudo de aspectos da HM (CAVALARI e colaboradores, 2022).

Corroborando a esta ideia, Moraes e Cavalari (2019) identificaram a presença da disciplina específica de HM em 13 dos 14 cursos de licenciatura em Matemática de universidades federais localizadas no estado de Minas Gerais. Estas disciplinas são oferecidas a partir da segunda metade dos cursos, fato que está em consonância com Balestri (2008), que ressalta que ao serem ofertadas no final do curso, as disciplinas de HM assumem um papel de articular os conhecimentos que foram adquiridos pelos estudantes ao longo do curso.

Professores e pesquisadores da área da História da Matemática apontam que o estudo de aspectos da HM pode contribuir para que o futuro professor aprenda ou (re)signifique conteúdos matemáticos (ARAMAN; BATISTA, 2013; BALESTRI; CYRINO, 2010; STAMATO, 2003; MIGUEL; BRITO, 1996).

Para Stamato (2003), o conhecimento acerca da HM é importante para a formação dos licenciandos, pois pode apresentar o processo de construção do conhecimento ao longo da história. Dessa maneira, pode-se contribuir para um repensar sobre a concepção de que a Matemática, como modo de pensar formalista, constituída de definições, axiomas e teoremas, na qual se acredita que os rigores e demonstrações facilita a aprendizagem, desvalorizam a HM e a matemática não formalizada no ensino de matemática. Assim Stamato (2003, p.24) explica que:

O objetivo da disciplina História da Matemática, em um curso de formação de professores, não é descrever a história ou acumular conhecimento sobre a história, mas propiciar uma análise crítica das condições da criação e apropriação do conhecimento matemático pelas diversas culturas e atestar que este conhecimento está sujeito a transformações. Além disso, esse espaço disciplinar deve propiciar questionamentos às pretensões de verdade, deve revelar perguntas que não foram feitas dentro das demais disciplinas acadêmicas do currículo para a formação do professor.

Embora os tópicos referentes a HM estejam presentes, sobretudo, em disciplinas inteiramente voltadas à HM, é possível encontrar disciplinas que abordam tópicos da HM, mas que não são especificamente voltadas à HM, como por exemplo, uma disciplina de Matemática que em sua ementa prevê a abordagem de algum aspecto da História do conteúdo matemático foco da disciplina (MORAES; CAVALARI, 2019).

Para Miguel e Brito (1996), a HM não deve ser apresentada nos cursos de Matemática somente em uma disciplina isolada. Os autores defendem uma participação ‘orgânica’ da história nos cursos de formação de professores, no qual entende-se que ela deve estar presente também dentro das disciplinas específicas do currículo dos cursos. Para eles, durante a formação do professor de Matemática, as disciplinas apresentam a matemática acadêmica, mas os estudantes acabam recebendo poucas informações históricas da constituição dos conceitos e preposições, elementos importantes para o professor atuar na escola.

Nesse contexto, é importante que se faça a ligação entre a HM e os conteúdos matemáticos, pois assim pode-se contribuir para a reflexão do futuro professor sobre concepções que se tem de aspectos da matemática e do seu ensino. Assim, a História da Matemática pode fazer com que o licenciando construa seu conhecimento em uma perspectiva histórica e sociocultural (MIGUEL; BRITO, 1996).

Miguel e Brito (1996) ainda destacam que se a História da Matemática fosse apresentada de maneira problematizada,

[...] poderia vir a contribuir para uma adequada compreensão de tópicos de crucial importância para a sua ação pedagógica, tais como: a concepção da natureza dos objetos da matemática, a função da abstração e da generalização, a noção de rigor e o papel da axiomatização, a maneira de se entender a organização do saber, os modos de se compreender a dimensão estética da matemática e valorização da dimensão ético – política da atividade matemática. (MIGUEL; BRITO, 1996, p.50)

Se aproximando da ideia apresentada por Miguel e Brito (1996), Balestri (2008), que realizou entrevistas com importantes pesquisadores da área da HM, identificou que a maioria dos entrevistados ressaltava a importância da HM integrada nas disciplinas do curso. Para eles

[...] a história seria bem contemplada nos cursos de formação se as disciplinas do curso fossem abordadas sob o ponto de vista histórico, integrando a história às disciplinas do curso de formação de professores. Nessas disciplinas, a história ganharia abordagens variadas, tais como: fonte de problematização para o conteúdo; fonte de

informações históricas a respeito do conteúdo; ou ainda estudar o desenvolvimento histórico do conteúdo e suas implicações sociais. (BALESTRI, 2008, p.78)

Para Stamato (2003), embora a participação orgânica da HM apontada por Miguel e Brito (1996) seja o desejável, esta abordagem não é simples de ser realizada e desta forma, a autora, destaca a relevância da manutenção da disciplina específica de História da Matemática na formação de professores.

Existe, entretanto, outras possibilidades de abordar temáticas da HM nos cursos de formação de professores. No cenário internacional, Fauvel e Maanen (2000) apontam que a inclusão da HM em cursos de formação de professores, são realizadas para atingir quatro principais “funções”:

1. Possibilitar aos professores conhecer o passado da matemática (ensino direto da História da matemática);
2. Ampliar o entendimento dos professores da matemática que eles vão ensinar (função metodológica e epistemológica);
3. Prover os professores com métodos e técnicas de incorporação de materiais históricos em seu ensino (uso da história em sala de aula);
4. Ampliar o entendimento dos professores sobre a evolução de sua profissão e do currículo (história do ensino da Matemática [ou da educação matemática])⁵. (FAUVEL; MAANEN, 2000, p. 110, tradução nossa)

Na pesquisa de Cavalari e colaboradores (2022), já citada, as pesquisadoras identificaram que os cursos presenciais de formação de professores de Matemática ministrados por universidades federais oferecem disciplinas que em suas ementas preveem a abordagem de tópicos referentes à História da Matemática no Ensino e História da Educação Matemática, sendo estes presentes respectivamente em 65% e 31% dos 117 cursos analisados.

Apresentaremos no item a seguir, algumas das contribuições da HM para a formação de professores.

2.3 CONTRIBUIÇÕES DO ESTUDO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Os estudos realizados especificamente sobre as contribuições das temáticas da “História da Matemática no Ensino” e da “História da Educação Matemática” para formação de professores ainda não são muito numerosos. Entretanto, é possível encontrar na literatura uma variedade de pesquisas que mostram as contribuições da HM, sem distinguir o enfoque, podendo em alguns, inclusive, ser referente a todos estes enfoques juntos. Neste sentido,

⁵ No original: “1. letting teachers know of the past of mathematics (the direct teaching of the history of mathematics); 2. enhancing teachers’ understanding of the mathematics they are going to teach (methodological and epistemological function); 3. equipping teachers with the methods and techniques of incorporating historical materials in their teaching (use of history in the classroom); 4. enhancing teachers’ understanding of the evolution of their profession and of the curricula (history of mathematics teaching).” (FAUVEL; MAANEN, 2000, p. 110)

apresentaremos as contribuições indicadas na literatura e posteriormente, será destacado um enfoque da “HM no ensino”.

Assim, conforme já ressaltado, entendemos que o estudo da “História da Matemática no ensino”, pode ser, de forma sintética, entendido como o estudo de diferentes formas de abordar a HM nas aulas de Matemática, suas possíveis contribuições, limitações e dificuldades. Isso inclui explorar diferentes formas de ensinar Matemática por meio da História, como estudar relatos de experiências e elaborar planos de aula. Desse modo, os licenciandos podem ser capazes de decidir quando e como utilizar a História da Matemática no ensino.

Borges e Cavalari (2021), realizaram análises de teses e dissertações que continham a HM em propostas didáticas utilizadas para a formação inicial de professores de Matemática. As autoras observaram que as propostas didáticas apresentadas nestes trabalhos se voltavam, sobretudo, para o ensino de conteúdos matemáticos, mas que algumas se voltavam para o ensino de aspectos próprios da HM e/ou de tópicos da “HM no ensino”.

Ao analisar as contribuições do desenvolvimento destas propostas que os autores apresentaram nas teses e dissertações, as autoras identificaram que a História da Matemática contribuiu para a sua formação matemática, já que contribuiu para ‘motivar os estudos matemáticos’, ‘facilitar a compreensão dos conteúdos’, ‘facilitar a compreensão de aspectos da natureza da Matemática’ e ‘permitir o entendimento de conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento’. Além disso, verificou-se que HM também contribuiu para a formação pedagógica dos futuros professores (BORGES; CAVALARI, 2021).

Podemos encontrar na literatura variados autores que apresentam contribuições da HM para a formação de professores semelhantes às identificadas pelas autoras, as quais apresentaremos a seguir.

Com relação a HM poder contribuir para motivar o licenciando em seus estudos matemáticos, Balestri (2008), indica que a apresentação de informações sobre como um tópico matemático surgiu, se desenvolveu e seu contexto socioeconômico e cultural pode expor aspectos interessantes e curiosos, satisfazendo a curiosidade sobre aspectos históricos da Matemática e, portanto, pode permitir que estimule o interesse do estudante.

Contudo, Miguel (1997)⁶ ressalta que devemos ser cautelosos ao apontar a HM como motivadora, pois ela não necessariamente será e não será a todos da mesma forma. O autor, ainda destaca a necessidade de que a HM não seja apresentada somente como um momento de

⁶ Destacamos aqui que Miguel (1997) se refere a HM direcionada a aulas de matemática e não necessariamente a aulas de matemática na formação de professores.

descontração ou recompensa. De modo semelhante, Mendes (2006), indica a necessidade de que a HM seja utilizada nas aulas de matemática de modo a superar o seu caráter motivador.

Com relação a HM poder contribuir para a compreensão dos conteúdos matemáticos, Araman e Batista (2013) e Miguel e Brito (1996), apontam que durante as aulas de matemática podem surgir dúvidas, que a HM pode auxiliar a sanar. Para Araman e Batista (2013), o conhecimento sobre a História da Matemática pode proporcionar ao futuro professor a compreensão de como um conceito matemático foi desenvolvido, quais conceitos são necessários para entendê-lo, por que era importante naquela época e por que é importante atualmente, além de mostrar o que era necessário para que um conceito pudesse ser criado, entre outros. Nesse sentido, a HM pode trazer alguns ‘porquês’ de ideias matemáticas, contribuindo para a compreensão de conceitos, ampliando assim conhecimentos matemáticos do licenciando.

Assim, com a HM pode-se discutir quais as necessidades e condições que propiciaram o desenvolvimento de um certo tópico da matemática. Miguel e Brito (1996) ainda apontam que com a HM poderiam perceber que os conceitos matemáticos não se desenvolveram em ordem lógica, mas que na verdade, ocorreram devido a influência de variados discursos e noções de matemática.

Já Balestri (2008), ressalta que muitos professores conhecem o conteúdo matemático, mas possuem pouco conhecimento acerca de seu processo de desenvolvimento. Assim, é possível mostrar que a matemática não é estática, mas que foi construída de maneira dinâmica, com avanços e retrocessos (BALESTRI; CYRYNO, 2010).

A HM pode contribuir para que se tenha uma compreensão acerca da natureza do conhecimento matemático. Para Balestri e Cyrino (2010, p.113), a HM pode contribuir para “[...] veicular a matemática como uma construção humana, uma manifestação cultural, desmistificando-a e colaborando na constituição de um panorama da sociedade”. Assim, ao mostrar que a matemática é uma construção humana, produzida por pessoas que tiveram dificuldades na sua construção, a HM permite desmistificar que ela foi produzida somente por ‘gênios’.

Araman e Batista (2013), também, indicam que os professores frequentemente entendem que os conteúdos, teorias e leis matemáticas são “descobertos” por indivíduos geniais, sem a colaboração de outros pesquisadores. Além disto, para as autoras, os professores tendem a apresentar a ideia de que a Matemática é um conjunto fixo e acabado de conhecimentos, sem a necessidade de revisão. Essas ideias os levam a conceber a matemática como uma disciplina livre de influências sociais, culturais e políticas. Neste contexto, o estudo

da HM, pode permitir que haja uma compreensão “dinâmica” e “desmistificada” do conhecimento matemático (ARAMAN; BATISTA, 2013).

A HM pode ainda contribuir para estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, conforme apontado Araman e Batista (2013) e Balestri e Cyrino (2010). Assim, ao realizar um estudo histórico do desenvolvimento de um conteúdo, pode evidenciar que a Matemática foi importante, por exemplo, para o desenvolvimento de conceitos/ideias referentes à outras áreas do conhecimento. Tal conhecimento auxilia “[...] o professor a contextualizar e a justificar a matemática perante seus alunos.” (ARAMAN; BATISTA, 2013, p.24).

Balestri (2008) ainda ressalta que o conhecimento da HM colabora para que haja a percepção da relação da Matemática com outras áreas do conhecimento, de modo a posicionar no tempo e espaço, um determinado conteúdo matemático. Assim, conhecendo como se desenvolveu, quais foram as necessidades e interesses relacionados a origem de um tópico matemático, seu estudo pode contribuir para um melhor entendimento da Matemática pelo professor. Dessa maneira, pode-se mudar a visão da Matemática, “[...] como uma manifestação sem significado e fragmentada, de forma que percebam seus significados, e suas relações internas e com outras áreas” (BALESTRI, 2008, p.91).

Araman e Batista (2013), Balestri (2008) e Miguel e Brito (1996) apontam que o estudo da HM, também, pode contribuir para prática pedagógica do futuro professor de Matemática. A HM poderá trazer elementos que contribuam para a contextualização de um conteúdo matemático, permitindo que seja mais bem compreendido pelos alunos e favorecendo, dessa forma, a aprendizagem. Dessa maneira, a HM pode auxiliar o professor para que consiga apresentar como se originou e o contexto histórico de um determinado tópico matemático.

Segundo Balestri (2008), a HM pode contribuir para que o professor seja capaz de entender possíveis erros que forem cometidos pelos alunos. Através da história da construção dos conceitos matemáticos, o professor pode observar as dificuldades que também foram enfrentadas pela humanidade no percurso do desenvolvimento da matemática. “Ao comparar as dificuldades históricas com as enfrentadas pelos alunos, o professor poderá, em alguns casos, estabelecer ações pedagógicas em sala de aula que possibilitem aos alunos a superação dessas dificuldades, e com isso aprender o conteúdo explorado.” (BALESTRI, 2008, p.76-77).

Nesse sentido, podemos identificar diversas contribuições apresentadas pela literatura que a HM (entendida de forma mais ampla) pode trazer a formação inicial de professores de Matemática.

Destacamos que alguns estudos, embora não muito numerosos, foram realizados voltados especificamente a investigar a relevância da inclusão de elementos da “História da Matemática no ensino” para a formação de professores de Matemática (FRANSOLIN, 2019; GARCIA, 2013; ARAMAN, 2011).

Garcia (2013) realizou uma investigação com o intuito de identificar possíveis contribuições de uma proposta de prática de ensino em que se utilizava a História da Matemática, para a formação inicial de professores de Matemática no ensino à distância. Para isso, o autor acompanhou uma disciplina de Prática de Ensino em que tratava da HM para o ensino, na modalidade de ensino à distância. Assim, pode ser observado que a disciplina contribuiu para a formação profissional dos futuros professores de Matemática, a medida que os participantes se mostraram capazes de elaborar planos de aula utilizando a HM, além de despertar o interesse dos licenciandos, para trabalhar com tal abordagem (GARCIA, 2013).

Já Fransolin (2019), buscava repensar a disciplina de História da Matemática e as suas contribuições para a formação humana dos futuros professores e para o ensino da Matemática. Para isso, acompanhou uma disciplina de História da Matemática em um curso de licenciatura em Matemática, no qual a autora e a docente da disciplina elaboraram um plano de curso que tratava de questões relacionadas à “HM no ensino”. Dessa maneira, Fransolin (2019, p.153) destaca que “[...] a incorporação da disciplina, de forma a cumprir um currículo sem reflexão e discussão, não apresentaria benefícios e contribuições para a formação das concepções na perspectiva da formação humana”. Nesse sentido, é importante que a disciplina propicie reflexões e discussões sobre a História da Matemática voltadas para o ensino, a fim de contribuir para a formação dos licenciandos.

Araman (2011), em sua tese, entrevistou cinco professores que utilizaram a História da Matemática em suas aulas no ensino básico, buscando analisar e compreender como os conhecimentos teóricos e metodológicos da HM foram importantes para a construção dos saberes docentes. Araman (2011) destaca que a aproximação entre professor e os estudos teóricos da HM, contribui para o enriquecimento dos seus saberes, em seus variados aspectos, por exemplo, na compreensão da natureza do conhecimento matemático e na compreensão dos conteúdos.

Considerando que a temática da presente pesquisa é a utilização da História da Matemática no ensino, é importante compreender os conhecimentos mobilizados pelos futuros professores em seu estudo. Após a apresentação do referencial da HM, iremos abordar no capítulo a seguir algumas reflexões sobre os conhecimentos do professor de Matemática.

3 O CONHECIMENTO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: considerações sobre o Conhecimento Matemático para o Ensino

Nesse capítulo iremos apresentar algumas considerações, com base na literatura, sobre os conhecimentos de professores proposto por Shulman (1986) e o Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT), voltado ao professor de Matemática que foi elaborado por Ball, Thames e Phelps (2008).

Para compreendermos as concepções teóricas que direcionam nossa pesquisa, primeiramente, é importante ressaltarmos que embora os conceitos de “saberes” e “conhecimentos” muitas vezes sejam considerados como sinônimos, na presente pesquisa, estes serão entendidos como sendo distintos, já que compartilhamos o entendimento de Fiorentini, Souza Júnior e Melo (1998, p.312) sobre esses dois conceitos:

“conhecimento” aproximar-se-ia mais com a produção científica sistematizada e acumulada historicamente com regras mais rigorosas de validação tradicionalmente aceitas pela academia; o “saber”, por outro lado, representaria um modo de conhecer/saber mais dinâmico, menos sistematizado ou rigoroso e mais articulado a outras formas e fazer relativos à prática não possuindo normas rígidas formais de validação.

Para Fernandez (2015), a escolha de Shulman pelo nome de “conhecimento de professores” não é sem razão. O pesquisador busca valorizar a atividade profissional do professor, promovendo um espaço em que se possa transformar e construir conhecimentos específicos desse profissional. “Assim, o conhecimento é a especialização do saber, ou seja, o conhecimento passa pela reflexão do saber fazer, elevando a prática a um nível de consciência, reflexão, análise, sistematização e intenção.” (FERNANDEZ, 2015, p.504).

Assim, podemos entender que os conhecimentos estão mais voltados a atividades desenvolvidas nos processos formativos na Universidade. Considerando que a nossa pesquisa tem como foco as atividades em uma disciplina da formação inicial de professores e que não foram desenvolvidas/investigadas ações em escolas na educação básica, entendemos que a escolha do estudo sobre os **conhecimentos** seja adequada.

3.1 O CONHECIMENTO DE PROFESSORES

No cenário internacional, nos anos 1980, Shulman (1986) estava incomodado com questões relacionadas a pesquisa sobre formação do professor, nas quais as investigações eram baseadas principalmente no referencial teórico da Psicologia. Dessa forma, começou a criticar a maneira como a literatura apresentava o ensino, na qual o destaque estava “[...] em como os

professores administram sua sala de aula, organizam atividades, alocam tempo e turnos, estruturam tarefas, atribuem elogios e culpas, formulam os níveis de suas perguntas, planejam aulas e julgam a compreensão geral dos alunos.” (SHULMAN, 1986, p.8, tradução nossa)⁷

Assim, Shulman (1986) explica que sentia falta de perguntas sobre o conteúdo que é ministrado na sala de aula, que perguntas são realizadas e como é a explicação de um conteúdo. Nesse sentido, o autor aponta questões importantes a serem levantadas sobre o ensino: “De onde vêm as explicações do professor? Como os professores decidem o que ensinar, como representá-lo, como questionar os alunos sobre isso e como lidar com problemas de incompreensão?”⁸ (SHULMAN, 1986, p.8, tradução nossa).

Shulman (1986) defende a valorização do conhecimento específico do conteúdo, no entanto, ele ressalta a importância de o professor tornar pedagógico o conteúdo específico, para que assim seja compreensível aos alunos. O professor deve ter um conhecimento sobre o conteúdo específico que ele leciona, mas deve, também, saber como trabalhar esse conteúdo em sala de aula de maneira pedagógica. Este é conhecimento que diferencia um especialista do assunto de um professor.

Reconhecendo a importância da formação docente e se questionando sobre como podem ser pensados os conhecimentos que se desenvolvem pelos professores, Shulman (1986) então sugere três categorias para uma base de conhecimentos para o ensino, sendo eles: o **Conhecimento do Conteúdo** (*Content Knowledge*), **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** (*Pedagogical Content Knowledge – PCK*) e **Conhecimento Curricular** (*Curricular Knowledge*).

O **Conhecimento do Conteúdo** é entendido como a compreensão do porquê uma proposição é verdadeira, bem como o modo que ela se relaciona com outras proposições. “O professor precisa não apenas compreender *que* algo é assim; o professor deve compreender ainda *porque* é assim, em que bases sua garantia pode ser afirmada e sob que circunstâncias nossa crença em sua justificativa pode ser enfraquecida e até negada.”⁹ (SHULMAN, 1996, p.9, tradução nossa, grifos do autor). Além disso, espera-se que o professor entenda por que um certo tópico é mais central na disciplina, enquanto outro é mais periférico.

⁷ No original: “[...] on how teachers manage their classroom, organize activities, allocate time and turns, structure assignments, ascribe praise and blame, formulate the levels of their questions, plan lessons, and judge general student understanding.”

⁸ No original: “Where do teacher explanations come from? How do teachers decide what to teach, how to represent it, how to question students about it and how to deal with problems of misunderstanding?” (SHULMAN, 1986, p.8).

⁹ No original: “The teacher need not only understand *that* something is so; the teacher must further understand *why* it is so, on what grounds its warrant can be asserted, and under what circumstances our belief in its justification can be weakened and even denied.” (SHULMAN, 1996, p.9, grifos do autor).

Por **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo**, entende-se como “[...] as formas mais úteis de representação dessas ideias, as analogias mais poderosas, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações - em uma palavra, as maneiras de representar e formular o assunto que o tornam compreensível para os outros.”¹⁰ (SHULMAN, 1996, p.9, tradução nossa). O autor ainda ressalta que o professor precisa ter um arsenal de formas alternativas de representação, já que não existe uma maneira mais poderosa de se representar, podendo ser originárias de pesquisa ou até mesmo da própria prática. Compreender o que faz um tema específico ser mais fácil ou difícil, também faz parte dessa categoria de conhecimento.

Já o **Conhecimento Curricular**, é o entendimento sobre toda a gama de programas projetados para o ensino de cada conteúdo, bem como o seu nível específico indicado. Além desse conhecimento, o autor explica que é importante que o professor esteja familiarizado com os materiais que seus alunos estão estudando simultaneamente em outras disciplinas (*Conhecimento Lateral do Currículo*) e também conhecer os temas que são ensinados na mesma disciplina, anteriormente e posteriormente (*Conhecimento Vertical do Conteúdo*).

Shulman (1987) ainda realizou uma revisão das categorias, de modo que expandiu as três categorias propostas por ele, separando-as em sete diferentes tipos de conhecimento: Conhecimento do Conteúdo; Conhecimento do Currículo; Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK); Conhecimento Pedagógico Geral; Conhecimento dos Alunos e de suas características; Conhecimento dos Contextos e; Conhecimento dos Objetivos, finalidades e valores educacionais, e de seus fundamentos filosóficos e históricos.

Segundo Moreira e Ferreira (2013), essas categorias desenvolvidas por Shulman (1986) trouxeram um novo olhar para a formação de professores. O **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** (PCK), gerou uma grande repercussão nos estudos da formação e saberes da profissão docente “[...] e acabou constituindo uma das mais importantes contribuições para se pensar de forma mais abrangente e inovadora o lugar da matemática na licenciatura.” (MOREIRA; FERREIRA, 2013, p.999).

Resultado dessa grande repercussão, foram os modelos criados a partir das ideias de Shulman, que visavam compreender e sistematizar os conhecimentos dos professores de Matemática. A seguir, iremos apresentar com mais ênfase um desses modelos: **Conhecimento Matemático para o Ensino** (*Mathematical Knowledge for Teaching* em inglês), conhecido pela sigla MKT que foi desenvolvido por Debora Ball, Mark Thames e Geoffrey Phelps.

¹⁰ No original: “[...] the most useful forms of representation of those ideas, the most powerful analogies, illustrations, examples, explanations, and demonstration-in a word, the ways of representing and formulating the subject that make it comprehensible to others.” (SHULMAN, 1986, p.9).

3.2 CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO (MKT)

Ball, Thames e Phelps (2008) desenvolveram o modelo **Conhecimento Matemático para o Ensino** (MKT), propondo assim um modelo voltado exclusivamente para a compreensão dos conhecimentos do professor de Matemática.

O modelo MKT é o resultado de uma investigação de dois projetos que foram desenvolvidos pelo grupo de Debora Ball: Projeto Ensinar e Aprender a Ensinar Matemática (*Mathematics Teaching and Learning to Teach Project*) e o Projeto Aprendendo Matemática para Ensinar (*Learning Mathematics for Teaching Project*), que tinham como enfoque, o ensino de matemática e a matemática usada no ensino. A partir dessa investigação, foi possível levantar novas hipóteses para se realizar um refinamento do conceito de conhecimento pedagógico de conteúdo e ainda ampliar o conceito de conhecimento do conteúdo para o ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; RIBEIRO, 2012).

O estudo de Ball, Thames e Phelps (2008) é focado na teorização do conceito de conhecimento matemático para o ensino e quais são as habilidades necessárias para o professor ensinar. Assim, os autores criaram dois subdomínios: o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e o Conhecimento do Conteúdo. Neste último, foi identificado um conhecimento que havia sido pouco explorado, o Conhecimento Especializado do Conteúdo, sendo este um subdomínio essencial para que o ensino seja eficiente, mas que para a surpresa dos autores está dentro do Conhecimento do Conteúdo e não dentro do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; RIBEIRO, 2012).

Sendo assim, o modelo apresentado por Ball, Thames e Phelps (2008), divide cada domínio dos conhecimentos de professores de Matemática em três subdomínios:

- **Conhecimento do Conteúdo** – SMK (*Subject Matter Knowledge*) dividido nos subdomínios:
 - Conhecimento Comum do Conteúdo – CCK (*Common Content Knowledge*);
 - Conhecimento Especializado do Conteúdo – SCK (*Specialized Content Knowledge*);
 - Conhecimento do Horizonte do Conteúdo – HCK (*Horizon Content Knowledge*).
- **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo** – PCK (*Pedagogical Content Knowledge*), dividido nos subdomínios:
 - Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes – KCS (*Knowledge of Content and Students*);

- Conhecimento do Conteúdo e do Ensino – KCT (*Knowledge of Content and Teaching*);
- Conhecimento do Conteúdo e do Currículo – KCC (*Knowledge of Content and Curriculum*).

Na Figura 1 é apresentada uma tradução do diagrama desenvolvido por Ball, Thames e Phelps (2008).

Figura 1: Domínios e Subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT)

CONHECIMENTO DO CONTEÚDO CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO



Fonte: Ball, Thames e Phelps (2008, tradução nossa)

No próximo item, iremos aprofundar cada subdomínio proposto por Ball, Thames e Phelps (2008), apresentando suas principais características, além de exemplificar esses conhecimentos.

3.2.1 Os domínios e subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino

Os domínios do **Conhecimento Matemático para o Ensino**, conforme já exposto, foram divididos em **Conhecimento do Conteúdo (SMK)** e o **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK)**.

O SMK é o domínio que irá apresentar o conhecimento matemático que é exigido do professor no seu trabalho docente. Ball, Thames e Phelps (2008, p. 399, tradução nossa) explicam que a definição de conhecimento matemático é o “[...] conhecimento matemático “implicado pelo ensino” – em outras palavras, conhecimento matemático necessário para

realizar as tarefas recorrentes de ensinar matemática aos alunos.”¹¹ Este conhecimento, conforme já explicitado está dividido em três subdomínios.

O **Conhecimento Comum do Conteúdo** (CCK), é entendido como aquele conhecimento não exclusivo do ensino, que pode ser utilizado em outros momentos, sendo então um conhecimento matemático ‘comum’ que outros profissionais também possuem, não sendo portanto, exclusivo do professor. O CCK pode ser expresso por exemplo, ao resolver problemas matemáticos corretamente ou quando se reconhece uma resposta errada dada pelo aluno ou uma definição imprecisa fornecida por um livro (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Assim, ao saber responder as seguintes questões uma pessoa possui conhecimentos referentes ao CCK. Qual número está entre 1,1 e 1,11? Um quadrado é sempre um retângulo? Qual o resultado de 0 dividido por 7? ou ainda as diagonais de um paralelogramo sempre serão perpendiculares? Estas questões normalmente podem ser respondidas por outras pessoas que sabem matemática, mas não necessariamente são docentes de Matemática. Dessa forma entende-se que não são um conhecimento específico do professor (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Já o **Conhecimento Especializado do Conteúdo** (SCK), é o conhecimento matemático exclusivo para o ensino e que normalmente não é necessário em outros ambientes que não sejam o do ensino. Esse conhecimento possibilita que o professor identifique possíveis padrões de erros dos alunos ou ainda avalie se uma abordagem não padronizada que um aluno fez, pode funcionar de forma geral (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Dessa forma, para que o professor tenha o SCK, ele

deve ser capaz de falar explicitamente sobre como a linguagem matemática é usada (por exemplo, como o significado matemático da aresta é diferente da referência cotidiana à aresta de uma mesa); como escolher, fazer e usar representações matemáticas de forma eficaz (por exemplo, reconhecer vantagens e desvantagens de usar retângulos ou círculos para comparar frações); e como explicar e justificar as próprias ideias matemáticas (por exemplo, por que você inverte e multiplica para dividir frações).¹² (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p.400, tradução nossa).

O subdomínio do **Conhecimento do Horizonte do Conteúdo** (HCK), seria o entendimento de como um conteúdo matemático específico está distribuído ao longo do currículo. Desse modo, o HCK pode ser identificado, por exemplo, em um professor do

¹¹ No original: “[...] mathematical knowledge “entailed by teaching”—in other words, mathematical knowledge needed to perform the recurrent tasks of teaching mathematics to students.” (BALL; THAMES; PHELPS, 2008 2008, p.399).

¹² No original: “[...] must be able to talk explicitly about how mathematical language is used (e.g., how the mathematical meaning of edge is different from the everyday reference to the edge of a table); how to choose, make, and use mathematical representations effectively (e.g., recognizing advantages and disadvantages of using rectangles or circles to compare fractions); and how to explain and justify one’s mathematical ideas (e.g., why you invert and multiply to divide fractions).” (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p.400).

primeiro ano que sabe como a matemática que ele está ensinando, irá se relacionar com a matemática que os alunos irão aprender no terceiro ano, para que, assim, seja capaz de definir as bases matemáticas que os estudantes precisam para aprender os conteúdos que serão lecionados posteriormente (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Esse tipo de conhecimento, pode ajudar o professor a decidir como irá falar, por exemplo, da reta numérica. A maneira como o professor desenvolve a aula, fazendo com que os alunos da primeira série apreciam ou não, que em breve a reta numérica irá ser preenchida com mais números ou ainda a decisão de um professor em antecipar ou distorcer esse desenvolvimento, que poderá ser afetado posteriormente, são exemplos de HCK (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Já o PCK, que proporcionou importantes discussões na formação de professores, é o conhecimento que une o conhecimento de conteúdo com a prática docente. “Parte do valor da noção de conhecimento pedagógico do conteúdo é que ela oferece uma maneira de construir pontes entre o mundo acadêmico do conhecimento disciplinar e o mundo prático do ensino”¹³, que se faz identificando o conhecimento que liga conhecimento de conteúdo com conhecimento pedagógico e dos alunos (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p.398, tradução nossa). Este domínio, também, é subdividido em três subdomínios.

O Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS) combina conhecimentos sobre os alunos e sobre matemática, e é entendido como o conhecimento necessário para o professor antecipar as facilidades e dificuldades que os alunos podem ter durante a aula de matemática. Ter o domínio desse conhecimento, exige que o professor tenha compreensão da matemática específica e ainda familiaridade com seus os alunos e seu pensamento matemático (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Um exemplo de KCS, é quando o professor antecipa, ao escolher um exemplo para ser apresentado em sala de aula, se os alunos o acharão interessante e motivador. Além disto, o KCS permite ao docente antecipar como os alunos provavelmente irão resolver uma tarefa atribuída, bem como presumir se eles tenderão a considerar fácil ou difícil. Por exemplo, ao solicitar que os alunos resolvam a operação: $307 - 168$, o professor já deve esperar alguns erros comuns dos alunos, pois já viu isso acontecer e é capaz de reconhecer sem uma análise matemática (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

¹³ No original: “Part of the value of the notion of pedagogical content knowledge is that it offers a way to build bridges between the academic world of disciplinary knowledge and the practice world of teaching” Ball, Thames e Phelps (2008, p.398).

O subdomínio do **Conhecimento do Conteúdo e do Ensino** (KCT) irá combinar o conhecimento sobre o ensino e sobre matemática. Esse conhecimento pode ser expresso quando o professor sequencia um conteúdo para ensinar, analisa quais exemplos usar durante a aula e quais utilizar para se aprofundar um conteúdo ou ainda quando avalia quais as vantagens e desvantagens de usar determinada representação para ensinar. “Cada uma dessas tarefas requer uma interação entre a compreensão matemática específica e uma compreensão das questões pedagógicas que afetam a aprendizagem do aluno.”¹⁴ (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p.401, tradução nossa).

O professor deve em uma discussão em sala de aula, decidir se faz uma pausa para esclarecer melhor alguma dúvida dos alunos, decidir quando fazer uso de alguma consideração de um aluno para fazer uma explicação matemática ou ainda decidir se faz uma nova pergunta ou propõe uma nova tarefa afim de promover um melhor aprendizado dos alunos. Todas essas decisões fazem parte do KCT que o professor deva ter (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Por fim, o **Conhecimento do Conteúdo e do Currículo** (KCC) corresponde ao Conhecimento Curricular proposto por Shulman (1986). Assim, esse conhecimento se refere ao conhecimento de como os tópicos matemáticos que os alunos devem aprender são organizados no currículo e até relacionando com outras áreas do conhecimento (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Para o professor ter o KCC, este deve ser capaz de identificar em qual série deve ser indicado um conteúdo específico. Além disso, deve conhecer os variados materiais, livros didáticos e programas que são recomendados no ensino de um conteúdo matemático. (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; SHULMAN, 1986).

É importante ressaltar que tanto o HCK, quanto o KCC, são colocados de forma provisória dentro de seus respectivos domínios, pois os autores apresentam questionamentos acerca dos conhecimentos. No caso do HCK, os autores têm dúvidas se este faz parte do SMK ou se pode estar dentro de outros subdomínios. Já o KCC, também se tem dúvidas se este faz parte do PCK, se pode ser abrangido por outras categorias ou ainda se pode ser considerado uma categoria por si só (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Uma relação entre as mobilizações dos conhecimentos apresentados no modelo MKT e o estudo de aspectos da HM no ensino de matemática foi discutida por Mosvold, Jakobsen e Jankvist (2014), que apresentaram exemplos da mobilização dos seis subdomínios do MKT. Para isso, os autores tiveram como base, os estudos e exemplos desenvolvidos pelo grupo de

¹⁴ No original: “Each of these tasks requires an interaction between specific mathematical understanding and an understanding of pedagogical issues that affect student learning.” (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p.401).

estudos internacional *History and Pedagogy of Mathematics*. Apresentaremos a seguir alguns exemplos da mobilização de conhecimentos que foram expostos pelos autores.

Em um desses estudos, foi utilizado um trecho de um argumento de Euler, no qual ele explica o porquê dos jogos de sinais na multiplicação entre números negativos e positivos, para o ensino de matemática. Desse modo, os professores indicaram que o uso de casos históricos, contribuiu para o entendimento do conhecimento desse conteúdo. Saber sobre o produto de números negativos e positivos, é um conhecimento que é utilizado em ambientes fora do ensino, dessa forma, está se relacionando com o **Conhecimento Comum do Conteúdo** (MOSVOLD; JAKOBSEN, JANKVIST, 2014).

Ainda nesse estudo, a importância das definições matemáticas, também foram aprendidas pelos professores, o que permitiu a ampliação dos seus conhecimentos sobre os números negativos no geral, que também é um CCK. Nesse sentido, com relação a esse conhecimento, a história pode apresentar um contexto de como alguns conceitos matemáticos surgiram, além de suas reais aplicações (MOSVOLD; JAKOBSEN, JANKVIST, 2014).

Já em um outro estudo, foi realizado um curso para professores, no qual um dos alunos, apresentou uma abordagem para a solução de equações do 2º grau, proposto por *Al-Khwarizmi*, que é realizado de forma geométrica. Essa abordagem recebeu uma adaptação por um outro professor, que aplicou em sua turma e obteve relatos de seus alunos que entenderam a solução de completar quadrado (MOSVOLD; JAKOBSEN, JANKVIST, 2014).

A resolução desse tipo de equação, é normalmente ensinada de forma algébrica e se atribuí uma fórmula, de modo que não é apresentado nenhum tipo de representação geométrica. Ser capaz de resolver uma equação quadrática utilizando a fórmula, é ainda considerado um CCK, pois não é um conhecimento exclusivo do ensino. Mas o método de *Al-Khwarizmi* é considerado um **Conhecimento Especializado do Conteúdo**, pois o conhecimento desse método, pode permitir que os professores encontrem maneiras diferentes de ajudar os alunos na compreensão do conteúdo (MOSVOLD; JAKOBSEN, JANKVIST, 2014).

Além disso, as discussões sobre como abordar textos históricos, são importantes na formação do professor, pois podem contribuir no desenvolvimento do conhecimento da HM e da Matemática em si. Assim, as discussões dos processos realizado no exemplo de *Al-Khwarizmi*, podem ser utilizados pelos professores para forçar uma generalização, sendo esse também um SCK (MOSVOLD; JAKOBSEN, JANKVIST, 2014).

Outra ideia destes autores é referente ao fato de que a ordem em que os tópicos matemáticos são retratados nos livros didáticos normalmente são diferentes do desenvolvimento histórico do conteúdo. Dessa forma, enquanto no decorrer da história se teve

mais tempo para se familiarizar com o nível crescente de abstração, passando do específico para o geral, nos livros didáticos é esperado que o aluno seja capaz de sair do geral para o específico.

Nesse contexto, pode-se identificar um **Conhecimento do Conteúdo e do Ensino** quando um grupo de matemáticos, para contornar essa questão, elaborou projetos e até mesmo cursos inteiros de graduação baseados na leitura de fontes históricas primárias. Nas aulas de álgebra de um desses cursos, em que se tratou do surgimento da teoria dos grupos, foram realizadas as leituras de textos de Lagrange, Cauchy e Cayley. A docente da disciplina relatou que após os estudos dos trabalhos de Lagrange e Cauchy, os estudantes estavam mais dispostos a aceitar as construções mais abstratas propostas por Cayley, como o isomorfismo de grupo e o teorema fundamental do homomorfismo (MOSVOLD; JAKOBSEN, JANKVIST, 2014).

Dessa maneira, podemos identificar que o modelo MKT pode ser utilizado para o estudo das contribuições do estudo da HM e de sua inserção no ensino para a formação de professores.

Assim, após a apresentação do modelo MKT, que se configura como importante referencial teórico para a realização dessa pesquisa, apresentaremos no item a seguir a metodologia deste trabalho, o contexto em que se realizou a investigação, bem como a coleta de dados e os procedimentos de análise.

4 METODOLOGIA

Para atingir os objetivos dessa pesquisa, adotamos uma abordagem qualitativa, na qual o pesquisador não se preocupa em enumerar ou medir os eventos estudados, mas sim em obter “[...] dados descritivos sobre pessoas, lugares e processos interativos pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada” (GODOY, 1995a, p. 58). Nesse sentido, Godoy (1995b, p. 21) explica que ao utilizarmos dessa abordagem,

[...] um fenômeno pode ser melhor compreendido no contexto em que ocorre e do qual é parte, devendo ser analisado numa perspectiva integrada. Para tanto, o pesquisador vai a campo buscando “captar” o fenômeno em estudo a partir da perspectiva das pessoas nele envolvidas, considerando todos os pontos de vista relevantes. Vários tipos de dados são coletados e analisados para que se entenda a dinâmica do fenômeno.

Sendo assim, realizamos a investigação no âmbito de uma disciplina de “Prática de Ensino”, que abordava tópicos da História da Matemática no ensino, ministrada no quarto período do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Federal localizada no estado de Minas Gerais. A coleta de dados aconteceu no período de setembro e dezembro de 2021.

No presente capítulo, abordaremos inicialmente o contexto em que se foi realizada essa investigação. Em seguida, será apresentado os instrumentos de construção dos dados e o processo de análise.

4.1 CONTEXTO DA PESQUISA

A construção dos dados da pesquisa é realizada na disciplina do quarto período, a qual possui carga horária de 64 horas. Essa disciplina é uma das oito componentes obrigatórias voltadas para a prática como componente curricular no curso de Matemática Licenciatura oferecido por esta Universidade. Sua ementa prevê abordagem das temáticas: História da Educação Matemática, da História da Matemática e da Etnomatemática no ensino na educação básica. Embora o pesquisador tenha acompanhado toda a disciplina, apenas o desenvolvimento da segunda temática é investigado neste estudo.

Havia no início do semestre 11 licenciandos matriculados. No entanto, após a primeira semana de aula, uma discente trancou a disciplina e outra continuou matriculada, porém não participou de nenhuma aula. Sendo assim, nove licenciandos participaram ativamente das aulas e das atividades, dos quais oito assinaram o Termo de Compromisso Livre e Esclarecido, aceitando assim participar desta pesquisa.

Para manter o anonimato dos participantes da pesquisa, foram utilizados pseudônimos para os oito licenciandos: Alana, Gilmar, Hanna, Jorge, Laura, Maria, Pedro e Renan. A idade dos participantes varia de 19 a 29 anos. Apenas Pedro já estava no 8º período do curso, enquanto os demais discentes estavam no quarto período. Renan era o único participante que já tinha formação em uma outra graduação.

Destaca-se que devido a pandemia do Covid-19, as aulas da universidade estavam sendo ministradas de maneira remota. Dessa forma, a disciplina foi conduzida por meio de dois encontros síncronos semanais, na plataforma *online* Google Meet. Esses encontros foram gravados e transcritos.

Foram realizados ao todo 25 encontros síncronos, nos quais foram desenvolvidas discussões dos temas e apresentação das atividades pelos licenciandos. Os encontros ocorriam às segundas-feiras e quartas-feiras, das 21h às 22h40 e foram dispostos conforme o Quadro 1, apresentado a seguir:

Quadro 1: Encontros síncronos realizados

Aula	Data	Tema da aula
A0	30/08/21	Apresentação da docente, dos discentes e da ementa da disciplina
A1	01/09/21	Ensino de matemática: Das origens ao ensino clássico
A2	06/09/21	Ensino de matemática: Estiagem, renovação e o caminho da modernização
A3	13/09/21	Ensino de matemática no Brasil: Desenvolvimento e modernização
A4	15/09/21	Educação Matemática e o Movimento da Matemática Moderna
A5	20/09/21	História na Educação Matemática: Vivência e discussão de uma atividade para o ensino de Resolução de Equações do 2º Grau por meio de um viés histórico
A6	27/09/21	Apresentação de uma proposta de ensino de equação do primeiro grau por meio de uma abordagem histórica.
A7	29/09/21	Finalização da discussão sobre o ensino de Resolução de Equações do 2º Grau por meio de um viés histórico e início da discussão sobre as Finalidades/potencialidades da inclusão de aspectos da HM na Sala de Aula
A8	04/10/21	Finalidades/potencialidades da inclusão de aspectos da HM na Sala de Aula
A9	06/10/21	HM nos Livros Didáticos
A10	13/10/21	Formas de incluir a HM no ensino
A11	18/10/21	Apresentação dos Relatos de Experiência da HM no ensino
A12	20/10/21	Discussão de um plano de aula que utilizava a HM no ensino e Início da Preparação do Plano de Aula HM
A13	25/10/21	Preparação do Plano de Aula HM
A14	03/11/21	Apresentação dos Planos de Aula HM – Parte 1
A15	08/11/21	Apresentação dos Planos de Aula HM – Parte 2
A16	10/11/21	Discussão sobre o conceito de Etnomatemática
A17	17/11/21	Apresentação de uma pesquisa de estado da arte sobre trabalhos em eventos que apresentavam propostas didáticas que utilizavam a Etnomatemática. Convidado: Prof. Hednan Guimarães Mota
A18	22/11/21	Discussão de Textos sobre o Programa Etnomatemática
A19	24/11/21	Oficina sobre jogos africanos no ensino de Matemática, ministrada por um graduando e pela docente
A20	29/11/21	Etnomatemática e o Ensino de Matemática
A21	06/12/21	Apresentação dos Relatos de Experiência da Etnomatemática no ensino – Parte 1
A22	08/12/21	Apresentação dos Relatos de Experiência da Etnomatemática no ensino – Parte 2
A23	13/12/21	Preparação do Plano de Aula Etnomatemática

A24	15/12/21	Apresentação dos Planos de Aula Etnomatemática (Tarde) ¹⁵
A25	15/12/21	Apresentação dos Planos de Aula Etnomatemática (Noite)

Fonte: Elaborado pelo autor

Embora estejamos descrevendo a disciplina completa, destacamos que na presente investigação, são analisados somente os momentos de discussões e atividades desenvolvidas nas aulas sobre História da Matemática no ensino, ou seja, entre as aulas 5 e 15.

Além disso, foram propostas 4 atividades assíncronas, a fim de complementar as discussões realizadas nas aulas. No entanto, ressaltamos que essas atividades não irão fazer parte de nossas análises. No quadro a seguir, se encontram as atividades que foram solicitadas aos licenciandos e quantos a realizaram:

Quadro 2: Atividades assíncronas realizadas

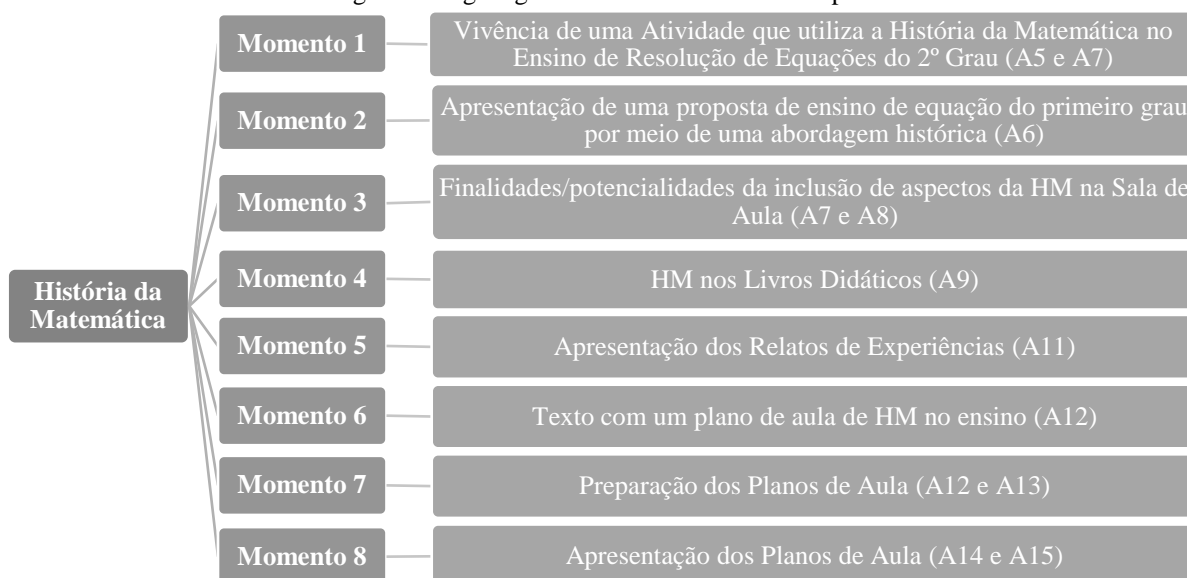
Atividade	Atividade realizada	Alunos
T1	Resumo do texto de Antônio Miguel	8
T2	Atividade sobre argumentos favoráveis e contrários a apresentação de aspectos da HM nas aulas de matemática	8
T3	Atividades sobre Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática	3
T4	Atividade de leitura de texto e visualização de vídeo sobre o Programa Etnomatemática. Foi solicitado que os estudantes selecionassem três trechos dos textos lidos para serem discutidos no encontro síncrono	7

Fonte: Elaborado pelo autor

Dessa maneira, para uma melhor compreensão das nossas análises, dividimos as aulas em momentos. Cada momento, corresponde a um tema de discussão ou atividade que foi realizado ao longo da disciplina. Assim, para facilitar o entendimento, foi elaborado o organograma apresentado a seguir (Figura 2).

¹⁵ Para que fosse possível a apresentação de todos os licenciandos, foi necessário a realização de dois encontros nessa data. O primeiro foi realizado às 17h30 e o segundo às 21hs.

Figura 2: Organograma dos momentos da disciplina



Fonte: Elaborado pelo autor

Sendo assim, ao longo da disciplina de Prática de Ensino analisada, os estudantes tiveram a oportunidade de participar de diversas discussões e atividades que contribuiriam para sua formação como futuros professores. Essa abordagem está em consonância com as ideias de Fransolin (2019), que destaca a importância de promover momentos de reflexão sobre a História da Matemática no ensino, a fim de contribuir para a formação inicial do professor de matemática. Essa formação permite, assim, que o futuro profissional seja capaz, se tiver interesse, de inserir a História da Matemática em suas aulas, de modo a favorecer o aprendizado dos alunos, como apontam outros autores, como Araman e Batista (2013), Balestri (2008) e Miguel e Brito (1996)

Após uma breve descrição da disciplina na qual foi realizada a coleta de dados desta investigação, apresentaremos no item a seguir, os instrumentos utilizados para a coleta de dados e o processo de análise dos conhecimentos de professores mobilizados nos momentos da disciplina.

4.2 INSTRUMENTOS DE CONSTRUÇÃO DOS DADOS E O PROCESSO DE ANÁLISE

Durante a disciplina, os dados para a investigação foram construídos por meio de: (i) gravação de vídeo das aulas e das atividades que envolviam a temática “HM no ensino”; (ii) diário do pesquisador no qual foram registradas informações sobre as atividades realizadas e percepções do pesquisador a cada encontro; e (iii) atividades e materiais produzidos pelos licenciandos que foram desenvolvidos no âmbito da disciplina.

Os encontros síncronos foram gravados pela docente da disciplina, através da própria ferramenta de gravação do Google Meet. Já os momentos de preparação dos planos de aula (Momento 7), nos quais discentes criavam uma sala na plataforma *online*, a gravação foi solicitada pela docente e teria de ser realizada pelos próprios licenciandos. Assim, algumas duplas gravaram seus encontros e disponibilizaram os *links* de acesso à docente e/ou ao pesquisador, entretanto não foram todos os participantes que realizaram este envio. No quadro 3 a seguir, há informações sobre as gravações que foram disponibilizadas.

Quadro 3: Duplas que disponibilizaram as gravações das atividades

Aula	Data	Duplas
A12	20/10/21	Alana e Renan Jorge e Pedro
A13	25/10/21	Hanna e Laura

Fonte: Elaborado pelo autor

As gravações das aulas e das atividades que abordavam o conteúdo relativo a “HM no ensino” foram transcritas pelo pesquisador. Estas transcrições foram lidas, assim, como as anotações do diário do pesquisador referentes a estas aulas, bem como as atividades e materiais produzidos pelos alunos e assim foram selecionados, nestes materiais, trechos que pudessem indicar a mobilização de Conhecimentos Matemáticos para o Ensino. Para a leitura dos diálogos ficarem mais fluída, nos exemplos apresentados, foram retiradas as pausas de suas falas¹⁶.

Partindo dos trechos selecionados, iniciamos nossas análises com base no referencial dos domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) desenvolvido por Ball, Thames e Phelps (2008). Sendo assim, elaboramos um quadro para sintetizar os conceitos de cada subdomínio do Conhecimento Matemático para o Ensino que apresentamos. Dessa forma, foi possível destacar as principais características de cada subdomínio de modo claro e objetivo, para que fique mais fácil a compreensão de cada um deles.

Quadro 4: Resumo dos conceitos dos subdomínios

Domínio	Subdomínio	Conceito
SMK	CCK	É o conhecimento matemático geral que outras pessoas, além de professores de Matemática, também possuem. Ele pode ser expresso ao resolver problemas matemáticos corretamente ou reconhecer erros ou definições imprecisas em respostas de alunos.
	SCK	É o conhecimento exclusivo para o ensino e que possibilita que o professor identifique padrões de erros dos alunos e avalie abordagens não padronizadas. O professor deve ser capaz de falar explicitamente sobre a linguagem matemática e explicar e justificar suas próprias ideias matemáticas

¹⁶ Por exemplo, a transcrição literal era: “É... eu acredito que o aspecto positivo é... seria mostra um porquê pros alunos, mostrar um caminho.” Assim, o trecho ficou: “Eu acredito que o aspecto positivo seria mostra um porquê pros alunos, mostrar um caminho.”

	HCK	É a compreensão de como um tópico da matemática está distribuído ao longo do currículo. Um professor deve saber como o conteúdo atual se relaciona com o que será ensinado no futuro, permitindo-lhe definir as bases necessárias para o aprendizado posterior dos alunos.
PCK	KCS	É a combinação do conhecimento matemático com o conhecimento sobre os alunos, permitindo ao professor antecipar facilidades e dificuldades dos alunos durante a aula. Um exemplo, é quando o professor escolhe exemplos motivadores para a aula e antecipa como os alunos provavelmente resolverão as tarefas atribuídas.
	KCT	É a combinação do conhecimento sobre o ensino e sobre matemática. Esse conhecimento é aplicado pelo professor em tarefas como sequenciar um conteúdo, escolher exemplos para ensinar e avaliar as vantagens e desvantagens de diferentes representações.
	KCC	É o conhecimento de como os tópicos matemáticos são organizados no currículo e até os relacionando a outras áreas do conhecimento. O professor deve ser capaz de identificar em qual série ensinar um conteúdo específico e conhecer os documentos oficiais.

Fonte: Elaborado pelo autor, com base em Ball, Thames e Phelps (2008)

Contudo, no decorrer das análises, sentimos a necessidade de reunir os subdomínios do Conhecimento do Horizonte e do Conteúdo e do Conhecimento do Conteúdo e do Currículo em um único domínio. Destacamos que os autores do modelo MKT já ressaltavam a possibilidade de repensar o fato destes subdomínios fazerem parte, respectivamente, dos domínios Conhecimento do Conteúdo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo.

Para eles, “Ainda não temos certeza se este [se referindo ao Conhecimento do Conteúdo e do Currículo] pode fazer parte da nossa categoria do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino ou se pode atravessar as várias categorias ou ser uma categoria em si” (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p.403, tradução nossa)¹⁷. De modo semelhante, com relação ao Conhecimento do Horizonte do Conteúdo, os autores ressaltam que “Mais uma vez, não temos certeza se esta categoria faz parte do Conhecimento do Conteúdo ou se pode ocorrer nas outras categorias.”¹⁸ (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p.403, tradução nossa)

Dessa forma, com a união desses dois subdomínios, temos um novo domínio que chamamos de Conhecimento do Currículo. Assim, as análises desta investigação foram realizadas, com base em uma adaptação do MKT, de modo que entendemos que os

¹⁷ No original: “We are not yet sure whether this may be a part of our category of knowledge of content and teaching or whether it may run across the several categories or be a category in its own right.” (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p.403).

¹⁸ No original: “Again we are not sure whether this category is part of subject matter knowledge or whether it may run across the other categories.” (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p.403).

conhecimentos dos professores de Matemática podem ser expressos nos domínios do Conhecimento do Conteúdo, Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e Conhecimento do Currículo.

Desse modo, com base nos dados da pesquisa e no referencial teórico utilizado, elaboramos o Quadro 5, no qual apresentamos, resumidamente, alguns conhecimentos que compõe cada subdomínio mobilizado pelos licenciandos.

Quadro 5: Conhecimentos de cada subdomínio/domínio

Domínios	Subdomínios	Conhecimentos
SMK	CCK	C1 – Saber resolver um problema matemático; C2 – Utilizar termos e notações corretamente.
	SCK	C3 – Saber justificar ideias, métodos e procedimentos matemáticos;
PCK	KCS	C4 – Antecipar ações, atitudes ou erros comuns dos alunos; C5 – Antecipar o que os alunos provavelmente considerarão fácil, difícil ou confuso; C6 – Antecipar se um exemplo, atividade ou abordagem será interessante e motivadora ou não;
	KCT	C7 – Saber escolher e avaliar qual exemplo ou atividade utilizar; C8 – Saber sequenciar o conteúdo a ser ensinado; C9 – Avaliar as vantagens e desvantagens das representações utilizadas; C10 – Conhecer analogias para refletir um conhecimento matemático; C11 – Conhecer e avaliar métodos, abordagens, estratégias, técnicas e ferramentas de ensino;
KC	----	C12 – Saber como o conteúdo matemático de uma atividade deve ser trabalhada, visando como o conteúdo matemático se relaciona no currículo; C13 – Saber como a matemática que ensinam, está sendo apresentada nos anos anteriores e posteriores ao que se está ensinando no momento. C14 – Identificar qual ano escolar um conteúdo matemático deve ser indicado; C15 – Conhecer os documentos oficiais; C16 – Saber relacionar o conteúdo matemático com conteúdo de outras disciplinas; C17 – Saber a importância de ser estudado um conteúdo.

Fonte: Elaborado pelo autor

Dessa forma, foi realizada a análise das falas dos licenciandos durante as discussões e atividades da disciplina, com o objetivo de identificar indícios que pudessem sugerir a mobilização de conhecimentos referentes ao MKT. Para isso, foi utilizado o texto com a transcrição das falas dos licenciandos, observando possíveis mobilizações desses conhecimentos pelos estudantes. O Quadro 5, que apresenta os diferentes conhecimentos de cada subdomínio MKT, foi utilizado como guia para a identificação desses indícios.

Assim, para identificar os conhecimentos mobilizados pelos estudantes, cada vez que um trecho indicava a presença desses conhecimentos, ele era grifado. Ao final da fala, era registrado o código correspondente ao conhecimento específico identificado. Por exemplo, se o estudante dava indícios de ter mobilizado o conhecimento C5, o trecho correspondente seria

grifado na transcrição, seguido pelo código do conhecimento e a sigla do subdomínio correspondente (C5 - KCS). Dessa forma, permitiu a identificação de trechos que podem ilustrar a presença desses conhecimentos nas falas dos estudantes.

Dessa maneira, com a identificação dos conhecimentos mobilizados, buscamos observar suas relações com os momentos da disciplina. Assim, no próximo capítulo, apresentaremos os resultados dessa análise, descrevendo cada momento e indicando os conhecimentos manifestados. Além disso, exemplificaremos cada um dos conhecimentos identificados e discutiremos suas possíveis relações com os momentos da disciplina.

5 CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS PARA O ENSINO MOBILIZADOS PELOS LICENCIANDOS NO ESTUDO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO

O presente capítulo tem o objetivo de apresentar a análise de Conhecimentos Matemáticos para o Ensino, mobilizados pelos licenciandos durante o estudo de tópicos da “História da Matemática no ensino”.

Para tanto, o capítulo em questão está dividido em duas seções. Na primeira, apresenta-se uma descrição sucinta dos oito momentos da disciplina, apontando os conhecimentos mobilizados naquele momento, a fim de facilitar a localização dos trechos apresentados na seção subsequente. Já na segunda seção, será exposto exemplos de trechos que sugerem a manifestação de conhecimentos pelos licenciandos, além de discutir as relações entre os momentos da disciplina e os conhecimentos mobilizados.

5.1 DESCRIÇÃO DOS MOMENTOS DA DISCIPLINA DEDICADOS AO ESTUDO DE TÓPICOS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO

Conforme já apontado, o estudo de tópicos “HM no ensino”, na disciplina, foi realizado ao longo de 11 encontros, que para esta dissertação foram divididos em oito momentos, tendo como base o objetivo das atividades realizadas. Ao longo destes momentos foram realizadas vivências de atividades, discussões acerca das finalidades/potencialidades da HM no ensino, discussões sobre trechos livros didáticos e atividades que permitiram ao licenciando conhecer e aprender como utilizar elementos da HM no ensino de matemática.

Para auxiliar a identificação de conhecimentos mobilizados pelos estudantes, utilizaremos siglas para simbolizar cada um dos oito momentos: M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7, M8. Além disso, diferentes cores serão utilizadas para representar cada domínio e subdomínio de conhecimento. Dessa maneira, apresentamos no Quadro 6, as cores que indicarão os diferentes conhecimentos mobilizados nos trechos selecionados.

Quadro 6: Cores utilizadas para representar cada conhecimento identificado ao longo do estudo da abordagem da HM no ensino

Conhecimento do Conteúdo		Conhecimento Pedagógico de Conteúdo		Conhecimento do Currículo
Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK)	Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK)	Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS)	Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT)	Conhecimento do Currículo (KC)

Fonte: Elaborado pelo autor

Sendo assim, apresentaremos a seguir, uma síntese dos oito momentos da disciplina, para proporcionar uma visão geral das principais ideias discutidas ao longo de cada momento. Ao longo da descrição, será indicado pontualmente, por meio de um código, qual conhecimento foi mobilizado naquele momento descrito. Essa estratégia tem como objetivo tornar mais clara a compreensão e localização dos exemplos de excertos que serão apresentados posteriormente no item 5.2, onde será realizada a análise dos trechos.

5.1.1 Momento 1: Vivência de uma Atividade que utiliza a História da Matemática no Ensino de Resolução de Equações do 2º Grau

O primeiro momento, ocorreu nas aulas 5 e 7, nas quais desenvolveu-se com os estudantes um conjunto de atividades para o ensino de Resolução de Equações do 2º Grau, a partir de um problema histórico e, posteriormente, discutiu-se os pontos positivos e negativos do uso da HM no ensino de matemática.

Na aula 5, a docente da disciplina apresentou e desenvolveu com os estudantes uma proposta de ensino de resolução de equações do 2º grau, que se iniciava com a resolução de um problema por meio de um método baseado em uma interpretação utilizada na Mesopotâmia. Inicialmente foi apresentado um breve histórico sobre a Mesopotâmia, destacando seu sistema numérico e formas de registro (mostrando inclusive algumas imagens de tabletas babilônicas).

Para o desenvolvimento da proposta didática, foi apresentado o seguinte problema matemático proveniente de um dos tabletas babilônicos: “Eu somei a área e o lado de um quadrado e o resultado é $\frac{3}{4}$. Qual é o lado?”. Com auxílio de uma pequena lousa que a docente tinha em casa, ela resolveu esse problema por meio de método baseado em uma interpretação da resolução encontrada nos tabletas babilônicos.

Em seguida, foi proposto outro problema com origem em tabletas babilônicas: “Um quadrado mais 10 lados do mesmo é igual a 39. Qual é o lado do quadrado?”. A docente propôs que os licenciandos resolvessem esse problema.

Após algum tempo, alguns estudantes relataram certa dificuldade em resolver. Entretanto, Renan se dispôs a apresentar a sua resolução. Como a aula era no Google Meet, Renan explicava a sua resolução e a professora escrevia na lousa para ilustrar aos colegas (M1, CCK).

Com o resultado apresentado por Renan, chegou-se a equação $(x + 5)^2 = 64$, de modo que a área da figura total seria 64 e assim poderia ser “encontrado” o valor de x , que era igual a 3. Assim, a docente perguntou se o valor 3 encontrado satisfazia a equação e verificou,

voltando na primeira equação, que a substituição de x por 3 resultava em uma igualdade verdadeira. A docente, ao comentar sobre incógnita e variável, perguntou se x era uma variável. Surgiu nesse momento, uma discussão sobre esta temática (M1, SCK).

A docente explicou a diferença entre incógnita e variável e perguntou se o número -13 também satisfazia a equação. Ela explicou que não encontramos esse valor no método que utilizamos para resolver, pois não existe um lado de medida -13.

Em seguida, a docente mostrou que esse método se assemelhava ao completamento de quadrados e indicou que, com ele, o completamento de quadrados poderia se tornar mais significativo. Assim, ela resolveu o problema no quadro utilizando simultaneamente o método (com os desenhos) e o completamento de quadrado.

Figura 2: Ilustração do quadro da docente, comparando a solução geométrica e algébrica do problema

The image shows a green chalkboard with three steps of solving a quadratic equation. Each step includes a diagram and an equation.

Step 1: A rectangle with width x and length $x+10$. The equation is $x^2 + 10x = 39$.

Step 2: The rectangle is divided into a square of side x and a rectangle of width x and height 5 . The equation is $x^2 + 2(5x) = 39$. Below it, the equation is updated to $x^2 + 2(5x) + 25 = 39 + 25$.

Step 3: The diagram is a square of side $x+5$ divided into four quadrants: a square of side x , two rectangles of dimensions x by 5 , and a square of side 5 . The equation is $(x+5)^2 = 64$. Below it, the equation is simplified to $x+5 = 8$.

Fonte: Elaborado pelo autor, com base nos dados da pesquisa

Ao finalizar ela perguntou aos licenciandos se raiz de 64 seria 8 ou é ± 8 ? Os alunos discutem esta pergunta (M1, CCK; SCK). Em seguida, a docente pediu aos licenciandos resolvessem a equação $x^2 + bx = c$, por meio do procedimento algébrico (como realizado na Figura 2) e posteriormente, a docente o resolveu na lousa.

Ao terminar, a docente perguntou aos alunos se o resultado final parecia com “algo” que os licenciandos conheciam. Pedro respondeu que sim e não. A docente, então, apontou as diferenças entre a fórmula obtida e a conhecida (de maneira errônea) como “fórmula de Baskhara”. A aula foi, então, finalizada.

Na aula, 7, a docente retomou alguns pontos sobre a aula anterior (aula 6), que foi apresentado um conjunto de atividades no uso do método da falsa posição para o ensino de

equação do primeiro grau e as possibilidades e dificuldades do uso da HM no ensino. Além disso, lembrou a vivência dos licenciandos na aula 5 (apresentada anteriormente). Em seguida, a docente questionou se os licenciandos identificam pontos positivos e negativos no uso dessa abordagem na sala de aula, iniciando-se uma discussão desse tema (M1, KCS; KCT).

5.1.2 Momento 2: Apresentação de uma Proposta de Ensino de Equação do Primeiro Grau por meio de uma Abordagem Histórica

O segundo momento foi referente a apresentação da pesquisa de mestrado de uma professora, que realizou um estudo de uma proposta didática na Educação Básica em que foi utilizado a História da Matemática para o ensino da equação do primeiro grau. A professora utilizou de problemas retirados do Papiro Rhind, como por exemplo: “Uma quantidade e seu $\frac{1}{4}$ adicionado tornam-se 15. Qual é esta quantidade?”, explicando como podemos resolver com o método da falsa posição, para ensinar a equação do primeiro grau em duas turmas de 7º ano do Ensino Fundamental. Além disso, ela utilizou uma balança, para mostrar o princípio do equilíbrio na resolução de equações do primeiro grau.

Após encerrar sua apresentação, teve um momento no qual os licenciandos puderam fazer perguntas para a professora sobre sua pesquisa (M2, KCS; KC).

5.1.3 Momento 3: Finalidades/potencialidades da inclusão de aspectos da HM na Sala de Aula

O Momento 3 da disciplina iniciou-se no final da aula 7, quando a docente perguntou aos licenciandos sobre quais formas a HM pode contribuir para o ensino de matemática. Para isso ela retomou discussões dos textos de Miguel (1997)¹⁹ e Fossa (2008)²⁰ e questiona: Qual a finalidade de utilizar a HM em sala de aula? Para ajudar a responder a essa questão, foram apresentados argumentos favoráveis, com base em Fried (2001), que sintetiza três grandes temas as contribuições da HM, a saber: tornar a matemática mais interessante e compreensível; colaborar para uma melhor visão dos conceitos, problemas e as soluções dos problemas matemáticos; e a humanização da matemática. Essa discussão teve continuidade na aula 8.

¹⁹ MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: Argumentos reforçadores e questionadores. *Zetetiké*, Campinas, v. 5, n.8, p. 73-105, jul./dez. 1997.

²⁰ FOSSA, J. A. Matemática, História e Compreensão. *Revista Cocar*, v. 2, n. 4, p. 7-16, 2008.

Dessa maneira, os licenciandos discutiram sobre as contribuições da HM, com base no referencial apresentado pela docente (M3, KCT). Após a discussão, a docente continuou a apresentação dos slides sobre a questão da motivação da HM no ensino e explicou sobre as divergências de ser favorável ou não do uso da HM como motivação, finalizando assim o encontro.

Na aula 8, a docente continuou a apresentação do texto de Fried (2001), discutindo a questão: Qual a finalidade de utilizar a HM em sala de aula? Em seguida, foram apresentados diversos autores que apontam contribuições da “HM no ensino”. Durante a exposição, ela comentou sobre a história da fórmula de soma de termos de uma Progressão Aritmética de Gauss e perguntou se alguém a conhecia. Renan disse que já havia utilizado a história do método em uma de suas aulas de um curso preparatório do Enem (ministrado por estudantes da universidade em que foi realizada a pesquisa) e comentou sobre a sua experiência (M3, KCS).

Após isso, a docente iniciou uma discussão sobre o texto de Zuffi e Feliciano (2005)²¹, que os alunos deveriam ter lido previamente. Neste texto, os autores apresentam o método de multiplicação egípcio e apresentam possibilidades de utilizá-lo nas aulas de matemática. Os licenciandos comentaram sobre a proposta apresentada pelos autores. (M3, KCS, KCT)

A professora fez alguns comentários finais e encerrou a aula.

5.1.4 Momento 4: HM nos Livros Didáticos

O quarto momento da disciplina aconteceu na aula 9, nesta aula a docente explicou sobre os livros didáticos e o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). A docente apresentou uma pesquisa de Pereira (2016)²², que estudou a HM em livros didáticos do PNLD 2015. A pesquisa selecionou os trechos destes livros didáticos que faziam menção à HM e os classificou em três categorias: HM e estratégia didática; HM e a elucidação dos porquês e do para que?; e HM e formação cultural geral.

A docente havia disponibilizado aos licenciando um arquivo com 10 trechos de livros didáticos que continham HM (Anexo I). Os trechos foram divididos entre os cinco licenciandos

²¹ ZUFFI, E. M.; FELICIANO, L. F. Uma sequência didática com uso de história da matemática: o método de multiplicação e divisão egípcio. *Revista de Educação Matemática*, v. 9, n. 9_10, p. 55-60, 2005.

²² PEREIRA, E. M. **A História da Matemática nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio: conteúdos e abordagens**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2016.

Posteriormente os resultados foram publicados em: CARLINI, E. M. P.; CAVALARI, M. F. C. As Funções Didáticas desempenhadas pela História da Matemática nos Livros Didáticos de Matemática do Ensino Médio. *Revista Brasileira de História, Educação e Matemática (HIPÁTIA)*, v. 2, n. 2, p. 71-88, 2017.

presentes na aula, ou seja, dois trechos para cada um, da seguinte maneira: Pedro (trechos 1 e 2), Renan (trechos 3 e 4), Gilmar (trechos 5 e 6), Maria (trechos 7 e 8) e o licenciando não-participante da pesquisa (trechos 9 e 10). Dessa forma, foi solicitado que eles lessem os trechos e com base nas categorias apresentadas, os “analisassem” para uma posterior discussão.

Após alguns minutos iniciou-se a discussão. Devido à chuva que se iniciou durante o momento da aula, Maria pediu que adiantasse sua apresentação, com medo de que a energia ou internet caíssem. O único momento em que identificamos a mobilização de conhecimento foi com a apresentação do trecho 6 de Gilmar (M4, KCS).

Após as discussões a docente apresentou alguns dados da pesquisa de Pereira (2016) e, em seguida, a aula foi encerrada.

5.1.5 Momento 5: Apresentação dos Relatos de Experiência

No momento 5 da disciplina, foi realizada a apresentação de Relatos de Experiências que utilizavam a HM no ensino de matemática, que os licenciandos, individualmente ou em duplas, escolheram para compartilhar com os colegas. Nesta atividade, os licenciandos buscaram em revistas ou anais de eventos, relatos de experiência para apresentar aos colegas. Para auxiliar a realização da atividade foram disponibilizados nomes de periódicos e eventos nos quais poderiam ser realizadas as buscas, além disto, foi sugerido aos estudantes um roteiro de perguntas para as apresentações, elaborado pelo pesquisador e revisado pela docente (Apêndice I). As apresentações seguiram a seguinte ordem: Jorge; Pedro; Alana e Renan; Gilmar e Maria; e Hanna e Laura.

A primeira apresentação foi de Jorge, que escolheu o texto de Motta (2007)²³, no qual foi realizada uma revisão bibliográfica sobre as fundamentações teórico-epistemológicas das abordagens que se integram a HM no ensino de matemática. Como o texto escolhido pelo licenciando tratava de questões teóricas da HM, não foi apresentado um relato de ensino de matemática, utilizando a HM.

Pedro, o segundo a apresentar, escolheu o texto de Jucá, Junior e Sá (2014)²⁴, que relataram o ensino do sistema de numeração, em uma turma de 7º ano. Para isso, os autores

²³ MOTTA, C. D. V. B. **História da Matemática em Educação Matemática: Espelho ou Pintura? In: Encontro Nacional de Educação Matemática**, IX. Belo Horizonte, 2007. Disponível em: <http://www.sbemrevista.com.br/files/ix_enem/Relato_de_Experiencia/Trabalhos/RE03198655846T.doc>. Acesso em 15 set. 2022.

²⁴ JUCÁ, R. de S.; JUNIOR, L. de J. F.; SÁ, P. F. de. **Sistemas de numeração; o relato de uma experiência com alunos do 7º ano utilizando a história da matemática como agente facilitador da aprendizagem**. Revista

mostraram aos alunos os sistemas de numeração babilônico, romano e maia. Uma das atividades deste relato, era propor que os alunos criassem o seu próprio sistema de numeração, o que acabou gerando uma certa dificuldade dos alunos na criação de um símbolo para o número 0. Os autores ainda relataram que o uso da HM despertou o interesse dos alunos, o que permitiu que os alunos participassem das atividades com mais satisfação (M5, SCK; KCT; KC).

A terceira apresentação foi da dupla Alana e Renan, que apresentou o texto de Colins e Pereira (2019)²⁵. Neste relato, foi utilizado a história do problema dos 21 vasos, do livro do “O Homem que Calculava”, de Malba Tahan, no ensino dos números racionais. A pesquisa teve como objetivo trabalhar a leitura e a escrita nas aulas de matemática, por meio da interpretação e resolução de problemas (M5, KCT; KC).

Gilmar e Maria fizeram a quarta apresentação do encontro. O Relato de Experiência foi escrito por Soriano, Silva e Damasceno (2021)²⁶ e utilizava os instrumentos astrolábio²⁷ e trigonômetro²⁸ no ensino da trigonometria. Uma das atividades, foi a construção do trigonômetro, que permitia que os estudantes verificassem os valores de seno e cosseno que são apresentados na tabela trigonométrica (M5, KCS; KCT; KC).

Hanna e Laura fizeram a quinta e última apresentação desse encontro. O texto escolhido pela dupla relatava a experiência de Pereira e Silva (2017)²⁹, que trabalhou a divisão e multiplicação egípcia e cálculos envolvendo frações, em que os egípcios apenas utilizavam frações unitárias. Essa atividade foi desenvolvida em uma turma de licenciandos em Matemática. As autoras apresentaram o problema 56 do Papiro Rhind na versão original (escrito em egípcio) e pediram que alunos que traduzissem e resolvessem o problema (M5, KCS; KCT; KC).

Após cada uma das apresentações foram realizadas pequenas discussões sobre estas. Após o término das apresentações e discussões, a docente finalizou a aula.

WEB-MAT, v.1, n.1, p.3-14, 2014. Disponível em: <<https://periodicos.uepa.br/index.php/web-mat/article/view/261>>. Acesso em 15 set. 2022.

²⁵ COLINS, F.; PEREIRA, D. E. **O Problema dos 21 Vasos de Malba Tahan: Leituras e Escrituras no Ensino de Matemática**. In: Seminário Nacional de História da Matemática, XIII. Fortaleza, 2019.

²⁶ SORIANO, M. da S.; SILVA, P. B. I. da.; DAMASCENO, F. B. O Uso do Astrolábio no Ensino da Trigonometria: Uma Experiência no Ensino Fundamental. Revista História da Matemática para Professores, Natal (RN), v.7, n.2, p.01-09, 2021. Disponível em: <<https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/73>>. Acesso em 15 set. de 2022.

²⁷ O Astrolábio é um antigo instrumento utilizado para determinar a posição dos astros do céu e que por muito tempo foi usado pelos navegadores marítimos para determinar a posição das estrelas.

²⁸ O Trigonômetro é um instrumento construído a partir da junção de um transferidor e de duas réguas, no qual é possível com ele, encontrar os valores aproximados do seno e cosseno de qualquer ângulo.

²⁹ PEREIRA, A. C. C.; SILVA, I. C. da. **Estudando o conceito de pirâmides a partir do problema 56 do Papiro de Rhind: Um relato de experiência do uso de fontes para inserir aspectos históricos em sala de aula**. In: Seminário Nacional de História da Matemática, XII. Itajubá, 2017.

5.1.6 Momento 6: Texto com um plano de aula de HM no ensino

O Momento 6 da disciplina aconteceu no início da aula 12, no qual a docente propôs que os licenciandos discutissem um plano de aula que utilizava a HM, apresentado por Mendes (2009)³⁰, que começava com o ensino da semelhança de triângulos e terminava com a trigonometria. Para orientar a discussão, a docente propôs aos estudantes que se apoiassem no roteiro que utilizaram na apresentação dos Relatos de Experiências (conforme Apêndice I).

Respondendo a primeira pergunta do roteiro, Renan comentou que o conteúdo matemático trabalhado era semelhança de triângulos e a docente complementou que se iniciava na semelhança de triângulo, mas que visava o ensino de trigonometria.

Em seguida a docente perguntou se a HM apresentada foi implícita ou explícita. Pedro respondeu “os dois”, pois tiveram várias atividades com abordagens diferentes. Já Renan entendeu que teve mais a HM explícita, pois várias vezes no texto são apresentados acontecimentos e fatos históricos.

Posteriormente a docente perguntou se no texto disponibilizado aparecia o ano escolar que a proposta poderia ser desenvolvida. Renan e Pedro falam que não encontram essa informação no texto. Sendo assim, a docente pergunta em qual série que poderia ser implementado, de modo que os licenciandos discutiram quais os anos escolares seriam adequados para desenvolver o plano de aula (M6, KC).

A docente perguntou se os licenciandos entenderam que os exemplos utilizados no plano de aula contribuíram para o aprendizado dos alunos. Posteriormente, aproveitou para, novamente, retomar e perguntar acerca dos aspectos positivos do uso da HM (M6, KCT).

Os licenciandos começam a discutir sobre alguns pontos que acharam interessante no plano de aula discutido, citando a atividade que envolvia o relógio de Sol (M6, SCK; KCS; KCT).

Em seguida, a docente fez o fechamento da discussão e finalizou a aula.

5.1.7 Momento 7: Preparação dos Planos de Aula

O Momento 7 da disciplina aconteceu nas aulas 12 e 13, no qual os licenciandos puderam se juntar em duplas, para a elaboração dos planos de aulas que utilizavam a História da Matemática no ensino. As duplas formadas foram: Alana e Renan; Gilmar e Maria; Hanna

³⁰ MENDES, I. A. Atividades históricas para o ensino de trigonometria. In: MIGUEL, A. et al. (Orgs.). **História da matemática em atividades didáticas**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. p. 105-178.

e Laura; e Jorge e Pedro. Cada dupla então criou sua própria sala do Google Meet, para que pudessem discutir como seria o plano de aula.

Antes dos licenciandos saírem para cada sala do Meet criada, a professora tirou as dúvidas sobre a atividade e solicitou que os *links* das salas fossem compartilhados com ela e com o pesquisador.

Ao longo do encontro, a docente e o pesquisador passavam pelas salas do Google Meet para conversar e contribuir com o desenvolvimento do plano de aula dos licenciandos. Como já explicitado (conforme Quadro 3), nem todos os discentes enviaram o *link* da gravação desse momento. Dessa maneira, iremos apresentar um resumo das transcrições das gravações que temos, sendo elas: Alana e Renan (A12), Jorge e Pedro (A12) e Hanna e Laura (A13).

Alana e Renan estavam inicialmente se organizando para poderem começar a pensar no plano de aula. O pesquisador estava na sala do Google Meet no início da discussão. Entretanto, por estar no começo da discussão, os estudantes ainda não sabiam qual conteúdo, série e como seria o plano. Durante a gravação, foi possível identificar que os licenciandos de alguma forma estavam compartilhando a tela um do outro, mas por outro *software*, de modo que assim, não fosse exibido na gravação.

Alana e Renan inicialmente discutiram para qual série que eles iriam desenvolver o plano de aula. Renan abriu o documento da BNCC e pensando em utilizar a HM na sala de aula, afirmou entender que para os alunos das primeiras séries do Ensino Fundamental II faria mais sentido a utilização da abordagem.

Os licenciandos buscaram na BNCC os conteúdos matemáticos que eles poderiam trabalhar com os alunos destes anos. Renan sugeriu trabalhar com fração e os licenciandos discutiram sobre formas de abordar esse conteúdo. Renan sugeriu a história do monocórdio de Pitágoras (M7, [KCS](#)) e buscou, sem sucesso, em seus arquivos uma apresentação que havia feito para os alunos no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID). Assim, o licenciando explicou a sua colega como era o instrumento e Alana concordou com a ideia de Renan (M7, [KCT](#)).

Assim, começaram a definir qual a HM que será utilizada no plano. Alana lembrou do problema dos 21 vasos do livro do “O Homem que Calculava”, que também discutia fração (este havia sido discutido nas aulas anteriormente). Renan citou alguns artigos que indicavam o uso da música no ensino de frações. Em seguida eles discutiram sobre a representação numérica de outros povos que havia sido discutido durante as aulas. Eles voltam a olhar alguns artigos e Renan encontrou um texto sobre escala cromática. Assim, ele comenta que seria

trabalhado o conteúdo de Progressão Geométrica, que deveria ser apresentado no Ensino Médio (M7, KC).

Alana e Renan tentam definir qual iria ser a HM e o conteúdo matemático que seria abordado no plano de aula que estavam elaborando. Renan começou a pesquisar sobre o problema dos 21 vasos. Alana encontrou um outro artigo sobre divisão de terras de um rei egípcio. Renan comentou com Alana sobre a rubrica de avaliação para avaliar o aluno. Em seguida eles começam a discutir como resolver o problema dos 21 vasos (M7, CCK).

Quando finaliza a resolução, a docente entrou na sala do Meet.

Renan apresentou a ideia que eles tiveram para o plano de aula. Usar o problema dos 21 vasos no ensino de frações e também apresentar o monocórdio de Pitágoras. Renan disse também a série a ser desenvolvida o plano (M7, KC).

Alana comentou sobre a história da divisão de terras de um rei egípcio e pergunta a docente se isso era HM. Em seguida, Alana também pergunta o que é HM implícita e explícita, pois não havia entendido a diferença. Renan tenta explicar o que é e a docente complementa a resposta de Renan. Alana aponta sobre o fato de o livro “O Homem que Calculava” ser sobre pessoas árabes e a docente comenta sobre o Malba Tahan possivelmente nunca ter ido naquela região e sobre a dificuldade de entender a língua árabe. Renan comenta sobre sua dificuldade em entender a diferença entre Razão, Proporção e divisão da fração. Alana tira dúvidas sobre as atividades de reposição das aulas que faltou. Renan comenta que vai usar a rubrica na parte de avaliação dos alunos do plano que está elaborando.

A docente sai da sala do Meet. Alana busca o livro de Malba Tahan na internet e após isso encerra a gravação.

Já a dupla Jorge e Pedro inicialmente estava se organizando para buscar as competências e habilidades na BNCC acerca do conteúdo que eles haviam escolhido: logaritmos. A docente está na sala do Meet nesse início. Os alunos não estavam sabendo o que significava o código das habilidades apresentado na BNCC e a docente explicou.

Em seguida ela apresentou sites nos quais os licenciandos poderiam encontrar dissertações sobre a HM no ensino de logaritmos, para que eles pudessem ter ideias para o plano. Posteriormente a docente sai da sala do Meet.

Pedro volta a buscar na BNCC por informações sobre os números logarítmicos e eles discutem sobre a série que irão desenvolver o plano (M7, KC).

Nesse momento o pesquisador entra na sala do Meet e Pedro pergunta ao pesquisador qual seria o ano em que se deve ensinar logaritmo, que responde acreditar ser no 2º ou 3º ano. Em seguida, Pedro explica qual é a ideia do plano que estão desenvolvendo. Pedro retoma a

BNCC para ver qual o ano do ensino de logaritmo e o pesquisador explica que o código EM13, significa que logaritmo poderia ser trabalhado em qualquer ano do Ensino Médio.

Os licenciandos abrem o modelo de plano de aula disponibilizado pela docente e começam a preencher. O primeiro item a ser preenchido é referente às competências e habilidades da BNCC. Eles selecionam algumas habilidades que falam de logaritmos e anotam no plano. Em seguida discutem sobre um contexto prático que poderiam discutir os logaritmos, como a matemática financeira, pH, radioatividade e a fórmula para calcular os níveis de terremoto (M7, SCK; KCS; KCT, KC).

Eles voltam ao modelo do plano para verem quais itens ainda faltam fazer. Eles selecionam a competência da BNCC que vai ser utilizada. Em seguida, decidem que irão utilizar um vídeo na aula e passam a discutir sobre a escolha deste vídeo (M7, KCT).

Eles voltam a olhar no modelo do plano de aula e Pedro tenta dar uma breve explicação de como será o desenvolvimento da aula ao pesquisador (M7, KCT). Em seguida, Pedro começa a digitar em um documento o procedimento detalhado do plano de aula. Ele escreve a pergunta inicial da aula “como eles acham que os cálculos eram feitos antes do desenvolvimento das calculadoras?”. Logo após, ele diz que será apresentado o vídeo abordando como e porque foi criado o logaritmo. Jorge fala sobre a apresentação de um exercício resolvendo com e sem o logaritmo e Pedro diz que podem fazer isso usando a matemática financeira. Assim, Pedro apresenta um problema de matemática financeira que se resolve com utilização dos logaritmos para resolver e tentam resolver sem utilizá-lo (M7, CCK, KCT).

A partir dessa discussão, Pedro volta a anotar o procedimento detalhado do plano de aula. Após terminar de anotar, todos saem da sala do Meet.

Hanna e Laura³¹, já tinham iniciado as discussões sobre o plano de trabalho, no entanto, a gravação do encontro só iniciou após a entrada do pesquisador no Google Meet. Hanna então relata ao pesquisador o ano escolar que a dupla está pensando em fazer o plano de aula (M7, KC).

Em seguida, o pesquisador pergunta como elas estão pensando em fazer o plano de aula. Laura responde que ainda não planejaram, mas que já tem um esqueleto do plano. Em seguida Hanna comenta que estão olhando um texto sobre medidas de áreas feitas pelos esticadores de cordas no Egito. Após isso, o pesquisador sai da sala do Meet.

Hanna volta a ler um texto sobre os esticadores de corda do Egito e explica como era realizado a medida. Em seguida eles buscam descritores da matemática. Durante a busca, a

³¹ Na aula anterior, Laura não estava presente, e por conta disso Hanna tinha se juntado a Gilmar e Maria.

docente entra na sala do Meet, onde elas apresentam o plano a professora. A docente vê escrito no plano “3º EM” e pergunta as licenciandas se será no 3º ano do Ensino Médio e Hanna responde que mudaram para o 9º ano (M7, KC).

Em seguida ela comenta sobre dois textos que podem ajudar as licenciandas a produzirem o plano. Após isso, a docente sai da sala do Meet.

A dupla começa a pesquisar alguns vídeos que fazem a demonstração do Teorema de Pitágoras. Após isso, eles voltam aos descritores e buscam aqueles que serão utilizados no plano de aula. Em seguida elas buscam selecionar os objetivos da aula e encerram a gravação.

5.1.8 Momento 8: Apresentação dos Planos de Aula

Por fim, o Momento 8 da disciplina foi realizado nas aulas 14 e 15, na qual os licenciandos apresentaram os planos de aula elaborados por eles. Essa atividade encerra a discussão da disciplina sobre a temática da História da Matemática no ensino. As apresentações ocorreram na seguinte ordem: Jorge e Pedro (A14), Alana e Renan (A14), Gilmar e Maria (A15), Hanna e Laura (A15) e aluno não-participante da pesquisa (A15).

A primeira dupla, Jorge e Pedro, escolheram realizar o plano de aula sobre os logaritmos no 2º ano do Ensino Médio. Para o desenvolvimento do plano, os licenciandos inicialmente utilizariam vídeos que mostram a história deste conceito matemático e seria proposto aos alunos um problema de matemática financeira, de modo que assim os licenciandos demonstrassem como os logaritmos podem facilitar na resolução desse problema (M8, KCT; KC).

Após a apresentação, a docente questiona os licenciandos o porquê de terem destacado sobre o tempo do vídeo que seria apresentado aos alunos. Dessa forma, eles ressaltaram que optaram pela escolha de um vídeo mais curto, devido ao tempo de aula, bem como também para que prendesse mais atenção dos alunos (M8, KCT).

A segunda apresentação é da dupla formada por Alana e Renan. Os licenciandos elaboraram um plano de aula sobre o conteúdo de frações para uma turma do 6º ano. Para isso, seria entregue o enunciado do problema dos 21 vasos de Malba Tahan aos alunos, que em grupos deveriam tentar resolvê-lo. Após isso, seria proposto a eles que resolvessem também o problema dos 35 camelos. Em seguida, Renan explicou a história do monocórdio de Pitágoras e sua relação com as frações. Finalizando sua apresentação, o licenciando explicou que utilizaria a rubrica de avaliação, para avaliar o aprendizado dos alunos (M8, CCK; SCK; KCT; KC).

Encerrada a apresentação, são feitos alguns questionamentos: Alana questiona sobre a resolução do problema dos camelos, apontando que 35 nunca seria divisível de forma inteira, por ser um número ímpar. Dessa maneira, há uma discussão sobre os critérios de divisibilidade (M8, SCK).

Após isso, Renan explica como resolveu o problema dos 35 camelos, comentando algumas dúvidas que teve ao resolver (M8, CCK). A docente ainda pergunta a Alana qual o significado dos códigos das habilidades da BNCC que ela citou na apresentação (M8, KC).

A segunda parte das apresentações acontecem na aula 15. A terceira dupla a se apresentar é Gilmar e Maria, que elaborou um plano de aula sobre a Progressão Aritmética (P.A.), que poderia ser realizada do 1º ao 3º ano do Ensino Médio. A dupla utilizou-se da anedota de como Gauss desenvolveu a fórmula para a soma de termos de uma P.A. no plano (M8, CCK; KCS; KCT; KC).

Ao fim da apresentação, Pedro que havia chegado atrasado na aula, perguntou a dupla qual seria a carga horária do plano de aula e para qual série este era destinado. Maria e Gilmar respondem à pergunta de Pedro e nesse momento há uma pequena discussão sobre a série indicada (M8, KCS; KC).

Após isso, Renan questionou a dupla sobre uma das atividades que eles propuseram. A atividade em questão, iria propor aos alunos que resolvessem uma atividade sobre a soma de termos de uma P.A., na qual não seria utilizada a fórmula, pois a ideia seria partir da atividade para que se fosse discutido o desenvolvimento da fórmula. Dessa maneira, Renan perguntou a dupla o que fariam caso algum aluno surgisse já com essa fórmula durante a atividade. Maria então responde apontando que iria pedir que ele apresentasse aos colegas como conseguiu chegar na fórmula (M8, KCS, KCT).

A última dupla a se apresentar foi Hanna e Laura. O conteúdo proposto para ser trabalhado no plano de aula elaborado por elas é o Teorema de Pitágoras, de modo que iriam contar a história do matemático, em uma turma de 9º ano (M8, KCS; KCT; KC).

Durante a apresentação, foi comentado que elas utilizariam vídeos para fazer a demonstração da veracidade do Teorema de Pitágoras. Assim, após a apresentação, Renan sugere as licenciandas a ideia de utilizar o Geoplano para realizar a demonstração do teorema (M8, KCT).

A docente faz comentários sobre a apresentação da dupla e encerra aula

Dessa maneira, em que foi exposto uma síntese dos oito momentos da disciplina, no item a seguir será discutido e apresentado exemplos da mobilização de conhecimentos pelos licenciandos ao longo desses momentos.

5.2 UMA DISCUSSÃO DOS CONHECIMENTOS MOBILIZADOS PELOS LICENCIANDOS

Nessa seção, iremos discutir a mobilização dos conhecimentos que foram observados nas falas dos licenciandos durante o estudo da História da Matemática no ensino. Para isso, iremos apresentar exemplos das mobilizações de Conhecimentos Pedagógico do Conteúdo, Conhecimento do Currículo e Conhecimento do Conteúdo. Por fim, será discutido as relações entre os momentos da disciplina e os conhecimentos que foram mobilizados pelos licenciandos.

Para iniciar esta apresentação, disponibilizamos a Tabela 1, que sintetiza a quantidade de conhecimentos identificados em cada momento da disciplina.

Tabela 1: Quantidade de conhecimentos mobilizados em cada momento da disciplina

Domínios		SMK		PCK							KC							TOTAL	
Subdomínios		CCK		SCK	KCS			KCT				---							
Conhecimentos		C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16		C17
Momento 1	Quantidade	6		5	1	1				1		5							19
	Licenciandos	1		4	1	1				1		2							4
Momento 2	Quantidade					2											1		3
	Licenciandos					1											1		2
Momento 3	Quantidade					1	1			1		2							5
	Licenciandos					1	1			1		2							2
Momento 4	Quantidade						1												1
	Licenciandos						1												1
Momento 5	Quantidade			1		1	3	1	2	1		6	1	1	3	2			22
	Licenciandos			1		1	3	1	2	1		4	1	1	3	2			6
Momento 6	Quantidade			1			2		1	1		3	2	1	2	1			14
	Licenciandos			1			2		1	1		2	2	1	1	1			2
Momento 7	Quantidade	4		1			3	2	2	1		2	1	2	6	3		1	28
	Licenciandos	2		1			2	2	1	1		2	1	2	4	3		1	5
Momento 8	Quantidade	2	2	2	3	1	3	3	13	2	3	5		4	5	8	1	1	58
	Licenciandos	1	2	2	1	1	2	2	5	2	1	3		3	5	5	1	1	8
TOTAL	Quantidade	12	2	10	4	6	13	6	18	7	3	23	4	8	16	14	2	2	150
	Licenciandos	2	2	4	2	3	7	4	5	3	1	5	4	7	8	7	2	2	8
TOTAL	Quantidade	14		10	23			57					46						
	Licenciandos	3		4	7			6					8						
Subdomínios/Domínio		CCK		SCK	KCS			KCT				KC							

Fonte: Elaborado pelo autor

Observando a Tabela 1, podemos notar que o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, em especial com o subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino, foi o domínio com a maior mobilização. Já o Conhecimento do Currículo foi o segundo mais observado, sendo o único domínio em que todos os licenciandos manifestaram ao menos uma vez. Por fim, temos que o domínio com menos manifestações foi o Conhecimento do Conteúdo.

Ao todo foram identificados indícios da mobilização de 150 conhecimentos ao longo dos oito momentos da disciplina, de modo que todos os licenciandos manifestaram ao menos um conhecimento no decorrer dos encontros.

Na próxima seção, buscaremos apresentar e discutir cada um dos conhecimentos mobilizados pelos licenciandos ao longo da disciplina.

5.2.1 O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (adaptado) mobilizado por licenciandos no estudo da História da Matemática no ensino

Como já relatado, o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo foi o domínio com mais manifestações, sendo esse um resultado que já era esperado, visto que a disciplina trata das questões pedagógicas do ensino. Apresentaremos, a seguir, exemplos da mobilização de conhecimentos referentes aos subdomínios do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, ou seja, do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino e do Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes.

5.2.1.1 A mobilização do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino

O subdomínio com mais mobilizações foi Conhecimento do Conteúdo e do Ensino. Esse resultado se deu justamente em diversos momentos da disciplina, em especial nos Momentos 7 e 8, demandou-se dos estudantes atividades que envolviam planejamento, apresentação e discussão de planos de ensino.

Os conhecimentos que pertencem a este subdomínio são: Saber escolher e avaliar qual exemplo ou atividade utilizar (C7); Saber sequenciar o conteúdo a ser ensinado (C8); Avaliar as vantagens e desvantagens das representações utilizadas (C9); Conhecer analogias para refletir um conhecimento matemático (C10) e; Conhecer e avaliar métodos, abordagens, estratégias, técnicas e ferramentas de ensino (C11). Apresentaremos, a seguir, exemplos referentes a manifestação de conhecimentos que foram identificados ao longo da disciplina no estudo da temática “HM no ensino”.

Identificamos a mobilização de conhecimentos C7, nos Momentos 5, 7 e 8, pelos licenciandos Gilmar, Maria, Pedro e Renan.

Podemos observar esse conhecimento na fala de Renan, quando ele explica as atividades que seriam desenvolvidas no plano de aula apresentado no Momento 8. Ao relatar as atividades escolhidas para o plano, o licenciando deu indícios de que sabe identificar quais atividades seriam mais vantajosas para o aprendizado do aluno no estudo das operações com frações. Dessa maneira, bem como podemos observar no Quadro 7, entendemos que Renan manifestou o Conhecimento do Conteúdo do Ensino.

Quadro 7: Exemplo da mobilização do conhecimento C7

Trecho	Justificativa
<p>Alguns exercícios aqui propostos, né!? Que a gente pegou no site e deu uma adaptada. Então tem da barra de chocolate, tem um do ENEM, que é a organização de qual que é a fração maior, né!? Depois tem um que relacionava com salário, se o cara gasta tipo, não sei quantos do salário dele, né!? Quanto que ele vai ter no final? Depois um de ladrilho, que eu achei <i>interessantizinho</i>, só pra ter um pouco de subtração também, assim. Mas a gente deixou outras fontes aqui, que a pessoa pode olhar, tem bastante exercícios, fora o dos livros. (Renan, M8)</p>	<p>Renan explicou a escolha das atividades que seriam desenvolvidas com os alunos.</p>

Fonte: Elaborado pelo autor

Observamos nos licenciandos Gilmar, Hanna, Maria, Pedro e Renan, durante os Momentos 5, 6, 7 e 8, a manifestação de conhecimentos C8.

Um exemplo desse conhecimento, pode ser identificada durante o Momento 7, quando Jorge e Pedro discutiam sobre a elaboração do plano de aula. Pedro explicava ao seu colega, como estava planejando o desenvolvimento da aula sobre o ensino de logaritmos. Dessa maneira, entendemos que a fala do licenciando pode sugerir que ele soube como sequenciar um conteúdo matemático. No quadro a seguir, podemos verificar essa afirmação.

Quadro 8: Exemplo da mobilização do conhecimento C8

Trecho	Justificativa
<p>Quando a gente começar a aula, a gente já começa com um questionamento. A gente questionar os alunos, pensando há muitos anos atrás, como que vocês fariam cálculos assim, muito difíceis, se não existia calculadora? [...] Entendeu? Você começar a aula com esse questionamento. Por quê? O logaritmo foi desenvolvido com esse intuito, facilitar os cálculos. Até o cara desenvolveu uma tábua, era um negócio assim que você tinha dados tabelados já do logaritmo. Eu acho que a gente poderia começar a aula com esse questionamento. (Pedro, M7)</p>	<p>Pedro detalhou ao seu colega como seria o plano de aula que estava planejando.</p>

Fonte: Elaborado pelo autor

Os licenciandos Laura, Renan e Pedro mobilizaram o conhecimento C9 nos Momentos 1, 3, 5, 6, 7 e 8.

No Momento 8, podemos encontrar a manifestação desse conhecimento, quando Laura apresentava seu plano de aula. A licencianda explicou que usaria uma imagem para explicar o que é a hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente, que são nomes atribuídos aos lados do triângulo retângulo. Assim, ao apontar que a utilização da imagem, é por acreditar que com a visualização, os alunos podem compreender melhor os conceitos que serão trabalhados, entendemos que Laura soube avaliar que utilizar essa representação seria vantajosa ao ensino.

Quadro 9: Exemplo da mobilização do conhecimento C9

Trecho	Justificativa
<p>Aí pra facilitar essa compreensão, né!? Dos alunos em relação o que que é hipotenusa, o cateto oposto, o cateto adjacente, a gente apresentaria essas imagens, [as imagens se referiam a dois triângulos retângulos no qual eram apresentados os catetos opostos e adjacentes e a hipotenusa. Havia, também, o destaque para o fato de que a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto] porque com a visualização é bem melhor, né!? (Laura, M8)</p>	<p>Laura avaliou que os alunos compreenderiam melhor o que são os lados do triângulo retângulo, se utilizasse de uma representação com imagens.</p>

Fonte: Elaborado pelo autor

O conhecimento C10, foi identificado somente no Momento 8, pelo licenciando Renan.

O licenciando manifestou esse conhecimento, quando apresentava o desenvolvimento do plano de aula que elaborou. Desse modo, ao explicar que faria algumas atividades de aquecimento para os alunos, ele apontou que poderia trazer um problema que permitia que os alunos fizessem uma analogia dos pedaços de pizza com as partes de frações. No Quadro 10, podemos observar o trecho da fala de Renan que ilustra esta afirmação.

Quadro 10: Exemplo da mobilização do conhecimento C10

Trecho	Justificativa
<p>“Ah, quanto que representa esse pedaço aqui?”, pra representar a fração como parte de um todo, né!? Então assim, você tira um pedaço de uma pizza e quanto que é duas fatias de pizza em relação ao todo e fazer essa discussão com eles (Renan, M8)</p>	<p>Renan utilizou das relações de pedaços de pizza para fazer uma analogia com as frações.</p>

Fonte: Elaborado pelo autor

O conhecimento C11 foi o mais identificado na disciplina, observada nos licenciandos Jorge, Laura, Maria, Pedro e Renan, nos Momentos 1, 3, 5, 6, 7 e 8.

A grande mobilização do conhecimento C11 se deu pela própria intenção da disciplina, em propor aos licenciandos que estudassem e discutissem as abordagens, métodos e técnicas do ensino. Temos como resultado, que a maior parte das mobilizações se deu nos Momentos 3, quando se discutiu os pontos positivos e negativos do uso da HM na sala de aula, no Momento 5, quando se apresentou os Relatos de Experiência, bem como também nos Momentos 7 e 8, nos quais os licenciandos tinham elaborar e apresentar o plano de aula.

Como um exemplo de conhecimento C11, no Momento 1, temos que Pedro destacou um ponto positivo da História da Matemática na sala de aula, o que permitirá que o aluno perceba que a matemática “não surgiu do nada”. No quadro a seguir, é ilustrado essa afirmação:

Quadro 11: Exemplo da mobilização do conhecimento C11

Trecho	Justificativa
Eu acredito que o aspecto positivo seria mostrar um porquê pros alunos, mostrar um caminho. Ah, isso não surgiu do além, num fez <i>pif</i> e apareceu, tem um porquê. E isso, mostrar um caminho, como a gente pode chegar, como é feita, como que é a estrutura, como que a gente chega naquilo. Eu acho que isso foi um aspecto positivo, ensinar o porquê disso (Pedro, M1)	Pedro soube justificar a vantagem da utilização da abordagem da História da Matemática.

Fonte: Elaborado pelo autor

Nesse caso, destacamos que Pedro, mesmo antes da leitura dos textos disponibilizados na disciplina, já apresentou, com suas próprias palavras, ideias que também podem ser encontradas na literatura, que se referem às contribuições de uma abordagem histórica para mostrar aos estudantes aspectos referentes a produção do conhecimento conforme é apontado por Araman e Batista (2013), Balestri (2008), Miguel e Brito (1996). Este fato pode estar relacionado com o interesse deste estudante em História da Matemática.

Já no Momento 3, durante a discussão acerca das finalidades/potencialidades da “HM no ensino”, Pedro ressaltou que a abordagem pode contextualizar o conteúdo a ser ensinado, de modo que traga mais sentido ao que os alunos estejam estudando. Dessa maneira, sua fala pode sugerir que tem pensado sobre a prática docente e tem começado a estabelecer algumas articulações entre a HM e o planejamento de uma aula.

Quadro 12: Exemplo da mobilização do conhecimento C11

Trecho	Justificativa
eu acho que tudo que é contextualizado tem um pouco mais de sentido. Então quando você apresenta a matemática e você dá uma introdução histórica, eu acho que faz mais sentido e também é uma das formas de dar um porquê da matemática. (Pedro, M3)	Pedro avaliou que a utilização da abordagem da HM, contribuindo para que se contextualize o ensino, trazendo assim mais sentido para o aprendizado do aluno. Além disso, ele resalta que a abordagem pode trazer o porquê do desenvolvimento da matemática.

Fonte: Elaborado pelo autor

Além disso, Pedro aponta que utilizar a HM para se fazer uma introdução histórica da matemática, é uma maneira do aluno compreender o porquê aquele conteúdo matemático foi desenvolvido. Vale ressaltar que o plano de aula elaborado pelo discente e apresentado no Momento 8, previa uma introdução histórica, por meio de um vídeo, para o ensino de logaritmos, reforçando que ele conseguiu compreender uma possibilidade e contribuições da HM para o ensino de matemática.

Mais uma vez identificamos consonância entre as ideias apresentadas por ele e pela literatura como Araman e Batista (2013) e Miguel e Brito (1996), que destacam que a HM pode trazer alguns ‘porquês’ de ideias matemáticas.

Por fim, destacamos que podemos observar que os conhecimentos C11, de conhecer e avaliar métodos, abordagens, estratégias, técnicas e ferramentas de ensino e C8, de saber sequenciar o conteúdo a ser ensinado, foram as mais observadas na disciplina. Esses resultados sugerem que a disciplina propiciou momentos no qual os licenciandos precisam desse conhecimento para a realização das atividades, em especial, a que envolve a elaboração de planos de aulas.

Apresentaremos no item a seguir uma discussão dos conhecimentos mobilizados dentro do subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes.

5.2.1.2 A mobilização do Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes

Já sobre o subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes, foi o único subdomínio identificado em todos os momentos da disciplina que abordavam a temática “HM no ensino.”

Destaca-se que esta disciplina está prevista para ser cursada no quarto semestre e o estágio se inicia somente no quinto. Considerando essa organização curricular, pode-se perceber que os conhecimentos referentes aos estudantes que a maioria dos licenciandos mobilizam, são pautados em experiências de aulas particulares ou PIBID, uma vez que muitos ainda não tiveram a oportunidade de vivenciarem o ambiente escolar.

Com relação a este subdomínio, foram identificados os conhecimentos de: Antecipar ações, atitudes ou erros comuns dos alunos (C4); Antecipar o que os alunos provavelmente considerarão fácil, difícil ou confuso (C5) e; Antecipar se um exemplo, atividade ou abordagem será interessante e motivadora ou não (C6). Serão apresentados e discutidos a seguir exemplos desses conhecimentos.

O conhecimento C4, foi identificado pelos estudantes Maria e Pedro ao longo dos Momentos 1 e 8 da disciplina.

Um exemplo da mobilização desse conhecimento foi observado na fala de Maria no Momento 8, quando os licenciandos estavam apresentando atividades que haviam elaborado para o ensino de matemática que utilizavam a HM. Em uma das atividades criadas por Maria e Gilmar, para o ensino de Progressão Aritmética (P.A.), os alunos seriam desafiados a criar uma sequência de termos. Contudo, os licenciandos anteciparam que os alunos poderiam criar

sequências que não seriam uma P.A., fato que atrapalharia o desenvolvimento da atividade a ser proposta. Nesse sentido, os licenciandos anteciparam uma possível ação e tiveram o cuidado de colocar algumas regras, para que a atividade pudesse ser realizada de modo a cumprir seu objetivo. No quadro 13, apresentamos o trecho da fala de Maria que sugere esta afirmação.

Quadro 13: Exemplo da mobilização do conhecimento C4

Trecho	Justificativa
Só que a gente viu que ia ter que ter alguns critérios, porque eles podiam colocar uma sequência absurda, eles nunca conseguiriam progredir com essa sequência, então a gente teria alguns critérios, [...] (Maria, M8)	Maria antecipou que os alunos poderiam escrever sequências que não fossem Progressões Aritméticas.

Fonte: Elaborado pelo autor

Já com relação a C5, identificamos manifestações durante os Momentos 1, 2, 3, 5 e 8 pelos licenciandos Maria, Pedro e Renan.

Durante o Momento 1, quando se discutiam pontos positivos e negativos do uso da HM na sala de aula, identificamos que os estudantes Renan e Pedro conseguiam apresentar justificativas coerentes com a da literatura para a apresentação de aspectos da HM nas aulas de matemática, como por exemplo, quando Renan comentou sobre a utilização de métodos históricos para resolver equações do segundo grau. Entretanto, o licenciando indicou que se a ideia da resolução de equação do segundo grau for introduzida por meio da apresentação desse método e depois for lecionada a fórmula resolutive da equação do segundo grau, pode ser que os estudantes tenham dificuldades para compreender a “passagem” de um método para outro. Ideias semelhantes a esta podem ser encontradas na literatura como uma dificuldade da inclusão da HM em sala de aula, como ressaltado por Miguel (1997). O autor destaca que levar para a sala de aula problemas históricos com suas resoluções originais, pode demandar grandes esforços e tempo dos estudantes para algo que não é familiar, o que pode complicar a aprendizagem.

As discussões sobre os exemplos da utilização de métodos históricos para o ensino de resolução de equação do primeiro grau e do segundo grau possibilitaram que os estudantes manifestassem conhecimentos sobre possíveis dificuldades dos estudantes.

No quadro a seguir, apresentamos trechos das falas de Renan que permitem ilustrar estas afirmações.

Quadro 14: Exemplos da mobilização do conhecimento C5

Trecho	Justificativa
Eu acho que, a gente mostrar dessa forma pra eles [se referendo ao método histórico], pode ser que eles absorvam dessa forma, na hora que ver da forma “tradicional” [se referindo a fórmula resolutive da	Renan identificou uma possível dificuldade que os alunos poderiam ter na “passagem” da resolução do método histórico

equação do segundo grau], eles vão ter dificuldade em traduzir o que foi feito (Renan, M1)	para o método ensinado atualmente.
uma coisa que eu tenho muita dificuldade quando eu tô dando aula particular as vezes, é mostrar pro aluno que não necessariamente precisa ser x e y , sabe? Por exemplo. Isso é uma dificuldade violenta, assim, se você coloca outra coisa ali, parece que a pessoa trava, ela não sabe mais fazer, sabe? (Renan, M1)	Renan apontou que já identificou uma dificuldade de alunos ao se depararem com equações que não utilizam de x e y para representar a incógnita.
[...] no PIBID lá que eu acompanho uma galera do 1º ano, dá pra ver muito que a galera tem dificuldade em resolução de equação no 1º ano, no Ensino Médio, sabe? (Renan, M1)	Renan ressaltou uma dificuldade que os alunos do PIBID possuem na resolução de equações.

Fonte: Elaborado pelo autor

Nos Momentos 3, 4, 5, 6, 7 e 8, identificamos o conhecimento C6, pelos licenciandos Gilmar, Hanna, Jorge, Laura, Maria, Pedro e Renan.

Um exemplo desse conhecimento, foi identificado no Momento 7, quando Renan sugeriu a Alana que pudessem ensinar frações a partir do monocórdio de Pitágoras. Assim, o licenciando destacou que poderia relacionar frações com a música, sendo este um tema que os alunos costumam gostar. Dessa maneira, entendemos que o licenciando foi capaz de identificar que utilizar um exemplo que fosse ligado a música, pode ser interessante aos alunos.

Quadro 15: Exemplo da mobilização do conhecimento C6

Trecho	Justificativa
A gente pode trazer a história de Pitágoras, que tem uma história que fala que Pitágoras houve o barulhinho martelo batendo [...]. Daí as vezes dá pra tira alguma coisa, sabe? De tipo, estudar fração, essas coisas assim, através desse aspecto, que ainda mexe com um pouco com um assunto que os alunos gostam, que geralmente é música (Renan, M7)	Renan destacou que poderiam ensinar as frações, utilizando a história do monocórdio de Pitágoras, de modo que ao relacionar esse conteúdo com a música, os alunos poderiam se interessar mais pelo conteúdo.

Fonte: Elaborado pelo autor

Nesse sentido, podemos identificar que a grande maioria dos licenciandos manifestaram conhecimentos referentes as dificuldades e facilidades dos alunos. Além disso, entendemos que os estudantes compreenderam a importância de utilizar a HM para as aulas de matemática, de modo a contribuir para o ensino, facilitando a compreensão do conteúdo e também motivando os alunos no ensino de matemática, conforme apontado por Araman e Batista (2013), Balestri (2008) e Miguel e Brito (1996).

Assim, no próximo item, serão apresentados e discutidos exemplos da mobilização de conhecimentos referentes ao domínio do Conhecimento do Currículo.

5.2.2 O Conhecimento do Currículo (adaptado do MKT) mobilizado por licenciandos no estudo da História da Matemática no ensino

Sobre o Conhecimento do Currículo, podemos inferir que os licenciandos têm conhecimento de quais são os documentos oficiais e de como encontrá-los, assim como, são capazes de, com base neles, identificar quais os anos em que um conteúdo matemático é indicado. Ressaltamos que a disciplina, de maneira intencional, propõe aos alunos que busquem esses documentos para os auxiliarem, o que pode ter implicado a grande mobilização desse domínio, sendo o único observado em todos os licenciandos.

Dessa maneira, podemos identificar os seguintes conhecimentos: Saber como o conteúdo matemático de uma atividade deve ser trabalhada, visando como o conteúdo matemático se relaciona no currículo (C12); Saber como a matemática que ensinam, está sendo apresentada nos anos anteriores e posteriores ao que se está ensinando no momento (C13); Identificar qual ano escolar um conteúdo matemático deve ser indicado (C14); Conhecer os documentos oficiais (C15); Saber relacionar o conteúdo matemático com conteúdo de outras disciplinas (C16) e; Saber a importância de ser estudado um conteúdo (C17). Desse modo, a seguir serão apresentados exemplos da mobilização de conhecimentos desse subdomínio.

O conhecimento C12 foi mobilizado nos Momentos 5, 6 e 7 pelos licenciandos Hanna, Laura, Pedro e Renan.

Podemos encontrar a manifestação desse conhecimento no Momento 6, quando os licenciandos discutiam o plano de aula elaborado por Mendes (2009), conduzida a partir do roteiro de perguntas (Apêndice I). Ao serem perguntados sobre qual o ano escolar o plano de aula deveria ser aplicado, os licenciandos identificaram que poderia ser aplicado no 9º ano ou no 1º ano do Ensino Médio. Contudo, Renan e Pedro ressaltaram que parte da atividade poderia ser aplicada em outros anos escolares, devido aos conteúdos matemáticos trabalhados no plano de aula. Dessa maneira, podemos inferir que eles souberam identificar como os conteúdos matemáticos das atividades se relacionam com os conteúdos matemáticos do currículo, bem como podemos observar no quadro a seguir:

Quadro 16: Exemplos da mobilização do conhecimento C12

Trecho	Justificativa
mas assim, dá pra aplicar pedaços dele, né!? Tipo, semelhanças do triângulo e tudo dá pra apresentar pra galera do 9º ano (Renan, M6)	Renan percebeu que o conteúdo da atividade do plano discutido, não necessariamente pode ser aplicado todo no 1º ano do Ensino Médio, sendo que há partes dele que podem ser trabalhados em outros anos, como a semelhança de triângulos no 9º ano.

Fonte: Elaborado pelo autor

Nos Momentos 5, 6, 7 e 8 foi possível identificar o conhecimento C13 nas falas dos licenciandos Alana, Gilmar, Hanna, Laura, Maria, Pedro e Renan.

Durante a elaboração do plano da dupla Hanna e Laura, no Momento 7, quando Hanna explicava à docente em qual série o plano seria desenvolvido, podemos observar a mobilização desse conhecimento. Inicialmente a licencianda apontou que definiram o 9º ano para o ensino do Teorema de Pitágoras. Em seguida, ela justificou a escolha dessa série, por ser a primeira vez que este conteúdo será trabalhado com os alunos, sugerindo que ela sabia como esse conteúdo matemático está sendo apresentado no currículo.

Quadro 17: Exemplo da mobilização do conhecimento C13

Trecho	Justificativa
Aí a gente achou melhor dá no 9º ano tipo assim, o primeiro contato ser já com a história. (Hanna, M8)	Hanna sabia que o Teorema de Pitágoras está sendo trabalhado no 9º ano pela primeira vez.

Fonte: Elaborado pelo autor

Todos os oito licenciandos participantes da pesquisa manifestaram o conhecimento C14 nos Momentos 5, 6, 7 e 8.

O fato de todos os licenciandos terem manifestado esse conhecimento pode estar relacionado com a própria intenção da disciplina de em diversos momentos, como elaboração e discussão de planos de aula, ser necessário que os licenciandos saibam/busquem quais anos escolares são indicados/lecionados determinados conteúdos matemáticos. Em especial, isso ocorreu quando eles estudaram no Momento 6, os Relatos de Experiência e discutiram acerca da série na qual estas foram realizadas, bem como no Momento 7 e 8, quando eles elaboraram e apresentaram o plano de aula. Dessa forma, podemos perceber que os licenciandos sabiam identificar o ano escolar de um conteúdo matemático. No Quadro 18, podemos verificar exemplos que comprovam essa afirmação:

Quadro 18: Exemplo da mobilização do conhecimento C14

Trecho	Justificativa
Ah, por tratar seno, cosseno e trigonometria, eu imagino que fosse mais pro 1º ano do Ensino Médio (Renan, M6)	Renan apontou que o plano de aula de Mendes (2009), por trabalhar o conteúdo da trigonometria, deveriam ser trabalhados a partir do 1º ano do Ensino Médio.
O nosso foco de ensinar frações vai ser pro 6º ano do Ensino Fundamenta (Alana, M8)	Ao apresentar o plano de aula que elaborou, Alana destacou que o ano escolar para ser trabalhado o conteúdo de frações seria o 6º ano.
por ser história do teorema [de Pitágoras], a gente deu preferência pra falar no 9º ano do Ensino Fundamental. (Laura, M8)	Laura apontou o 9º ano como o ano escolar adequado para ser trabalhado o Teorema de Pitágoras.

Fonte: Elaborado pelo autor

Destacamos que em diversos momentos da disciplina, para identificarem o ano escolar adequado aos conteúdos matemáticos discutidos, os licenciandos recorriam a BNCC. Isso pode estar relacionado ao fato de que os licenciandos ainda tinham pouca experiência na escola e também, o contexto da disciplina impunha uma dificuldade ao acesso a materiais que não são online, como o livro didático, visto que a pesquisa ocorreu em um momento de pandemia.

Podemos, assim, observar a mobilização do conhecimento C15 por grande parte dos licenciandos participantes da investigação (Alana, Gilmar, Hanna, Jorge, Laura, Pedro e Renan). Esta ocorreu em variados momentos da disciplina (Momentos 5, 6, 7 e 8), nos quais a BNCC foi citada como fonte de busca dos licenciandos, sugerindo assim que eles conhecem o documento. Esse fato pode ser observado nas falas dos licenciandos apresentadas no Quadro 19:

Quadro 19: Exemplos da mobilização do conhecimento C15

Trecho	Justificativa
eu procurei a BNCC, pra me apoiar nisso, onde a BNCC na unidade temática Números, ela traz que é um objetivo de conhecimento do 7º ano, que seria trabalhado números inteiros, seus usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações. (Pedro, M5)	Pedro demonstrou conhecer a BNCC e saber onde encontrar o tema trabalhado no documento oficial.
Aí a gente tá olhando agora na BNCC pra ver se a gente faz no 6º ano ou pra frente (Renan, M7)	Renan destacou que estava usando a BNCC para que se decidisse em qual ano escolar trabalhariam o conteúdo de frações.

Fonte: Elaborado pelo autor

Uma fala de Alana reforça ainda mais a mobilização desse conhecimento. Após a apresentação dos planos de aula no Momento 8, a docente questiona a licencianda acerca do que são os códigos da BNCC que a dupla utilizou (EF06MA07, EF06MA08, EF06MA09 e EF06MA10). Alana demonstrou conhecer o documento, pois soube explicar corretamente o significado dos códigos, como pode ser ilustrado no Quadro 20:

Quadro 20: Exemplos da mobilização do conhecimento C15

Trecho	Justificativa
O EF, quer dizer Ensino Fundamental; o MA quer dizer matemática e aí vai mudando se não me engano. O Ensino Médio fica EM, aí dependendo da competência, o MA por conta de ser matemática e a competência dentro da matemática que ele vai atingir. [...] EM é o Ensino Médio, aí vai falar acho que o ano que ele tá: 01, 02, 03. Depois o próximo, fala sobre a matéria que tá sendo específica sobre ela e depois a competência que vai atingir dentro daquela matéria. (Alana, M8)	Alana demonstrou conhecer o documento, ao explicar corretamente o significado dos códigos das habilidades que são apresentadas na BNCC.

Fonte: Elaborado pelo autor

Foi observado nos Momentos 2 e 8, o conhecimento C16 pelos licenciandos Maria e Pedro.

Um exemplo desse conhecimento foi mobilizado por Pedro no Momento 2. Após a professora apresentar a sua pesquisa e as atividades elaboradas e desenvolvidas nesta, bem como os seus resultados, Pedro levantou a hipótese de que poderia relacionar o conteúdo matemático que foi abordado, com as questões históricas do Egito que os alunos já sabiam. Dessa maneira, entendemos que há indícios de que o licenciando foi capaz de identificar que a matemática trabalhada com os alunos, poderia ser relacionada com outra área do conhecimento, no caso a História, mobilizando assim um Conhecimento do Currículo.

Quadro 21: Exemplo da mobilização do conhecimento C16

Trecho	Justificativa
Não teve nenhuma parceria com a professora de História? (Pedro, M2)	Pedro identifica que poderia ser relacionado o conteúdo matemático com outra área do conhecimento.

Fonte: Elaborado pelo autor

Por fim, temos o conhecimento C17 identificado nos Momentos 7 e 8 pelos licenciandos Maria e Pedro.

Identificamos a mobilização desse conhecimento durante a apresentação dos planos de aula de Maria e Gilmar no Momento 8. A licencianda ressaltava algumas curiosidades que seriam expostas aos alunos sobre a sequência de Fibonacci, quando apontou que a sequência é importante na Matemática. Dessa maneira, entendemos que Maria soube que este é um conteúdo importante a ser estudado, manifestando assim um conhecimento do domínio do Conhecimento do Currículo.

Quadro 22: Exemplo da mobilização do conhecimento C17

Trecho	Justificativa
Mas a gente ia mostrar curiosidades dessa sequência, por estar relacionado com diversos fenômenos da natureza, obras de arte e outros conteúdos matemáticos. Possui grande importância na Matemática. (Maria, M8)	Maria destacou que a sequência de Fibonacci é importante na Matemática.

Fonte: Elaborado pelo autor

Sendo assim, destacamos que o conhecimento C14, de identificar qual ano escolar um conteúdo matemático deve ser indicado, foi o único em que todos os licenciandos mobilizaram ao menos uma vez. Dessa forma, pode-se inferir que todos eles têm um conhecimento que os permite identificar qual o ano escolar é indicado ou é lecionado com frequência, um determinado conteúdo matemático. Além disso, podemos observar que os estudantes conhecem e se preocupam em indicar a BNCC como documento oficial para se apoiarem em seus apontamentos sobre o currículo..

Destaca-se que os discentes em várias situações, destacaram que a BNCC nem sempre apresenta essas informações de maneira clara, em especial no Ensino Médio. Assim, os licenciandos, diante do contexto da disciplina e da pandemia, tiveram que, em alguns momentos, buscar as informações necessárias junto a docente e ao pesquisador ou em elementos de suas próprias experiências, como no PIBID ou até mesmo em suas próprias experiências enquanto discentes.

Para finalizar, destacamos que podemos observar que todos os licenciandos foram capazes de mobilizar o Conhecimento do Currículo, principalmente nos Momentos 5 a 8, em especial nos dois últimos momentos

Apresentaremos, a seguir, uma discussão acerca da mobilização de conhecimentos referentes ao último domínio do conhecimento analisado pelos licenciandos, ao estudar temáticas da “HM no ensino”.

5.2.3 O Conhecimento do Conteúdo (adaptado do MKT) mobilizado por licenciandos no estudo da História da Matemática no ensino

Com relação ao Conhecimento do Conteúdo, temos uma menor mobilização comparado aos outros domínios, que pode estar relacionado ao fato que a disciplina tem mais enfoque nas questões pedagógicas do ensino de matemática. A maior concentração da manifestação desse domínio foi no Momento 1, no qual foi realizada a vivência de uma atividade que utilizava a HM no ensino da resolução de equações do 2º grau, de modo que foi observado quase metade do total de conhecimentos identificados do Conhecimento do Conteúdo. Dessa maneira, apresentaremos exemplos da mobilização de conhecimentos desse domínio.

5.2.3.1 A mobilização do Conhecimento Comum do Conteúdo

O Conhecimento Comum do Conteúdo foi observado principalmente no Momento 1, quando os licenciandos resolveram o problema retirado de um tablete babilônico, pois eles souberam resolver um problema matemático.

Consideramos, nesta investigação, dois conhecimentos referentes a este subdomínio: Saber resolver um problema matemático (C1) e Utilizar termos e notações corretamente (C2). Apresentaremos a seguir, exemplos da manifestação de conhecimentos que foram observados no estudo da “HM no Ensino” ao longo da disciplina.

Os licenciandos Renan e Jorge, nos Momentos 1, 7 e 8 da disciplina, mobilizaram o conhecimento C1.

Inicialmente, podemos perceber então que a discussão do Momento 1, promoveu principalmente a mobilização do Conhecimento Comum do Conteúdo. Ao resolver o problema matemático de origem histórica proposto pela docente, Renan demonstrou saber resolver um problema matemático, mobilizando assim o conhecimento C1 desse subdomínio. Podemos verificar nossa afirmação, visualizando o quadro a seguir:

Quadro 23: Exemplo da mobilização do conhecimento C1

Trecho	Justificativa
E o quadrado que tá ali é um quadrado 5 por 5, então [a área] é 25 (Renan, M1)	Renan demonstrou saber calcular a área do quadrado.
A $\sqrt{64}$ é 8 (Renan, M1)	Renan soube calcular a $\sqrt{64}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Já o conhecimento C2 foi identificado apenas no Momento 8 pelos licenciandos Gilmar e Renan.

Um exemplo da mobilização desse conhecimento pode ser observado durante a apresentação do plano de aula da dupla Gilmar e Maria, no Momento 8, quando o licenciando explicava que na segunda etapa, os alunos iriam aprender sobre o conceito da Progressão Aritmética. Ao explicar o conceito, identificamos que Gilmar definiu a Progressão Aritmética utilizando corretamente os termos matemáticos. Dessa forma, entendemos que há indícios da mobilização de um Conhecimento Comum do Conteúdo, como pode ser ilustrado no quadro a seguir:

Quadro 24: Exemplo da mobilização do conhecimento C2

Trecho	Justificativa
o conceito de progressão aritmética, que é uma sequência numérica na qual a diferença de elementos ou termos, consecutivos é sempre a mesma. Essa diferença é chamada de razão da progressão aritmética. (Gilmar, M8)	Gilmar soube explicar corretamente o que é a Progressão Aritmética.

Fonte: Elaborado pelo autor

Desse modo, temos que o Conhecimento Comum do Conteúdo teve poucas manifestações, justamente pela disciplina ter mais destaque as questões pedagógicas do ensino. Sendo assim, o destaque desse subdomínio foi durante o Momento 1, no qual os licenciandos foram instigados a resolver um problema histórico, manifestando assim conhecimentos desse subdomínio. Assim, podemos perceber que os estudantes sabem resolver um problema matemático, bem como possuem uma boa compreensão dos conceitos matemáticos.

No item a seguir serão apresentados exemplos da mobilização de conhecimentos do último subdomínio no estudo da “HM no ensino”.

5.2.3.2 A mobilização do Conhecimento Especializado do Conteúdo

O Conhecimento Especializado do Conteúdo foi o subdomínio com menos mobilizações. Nesse subdomínio, identificamos apenas um conhecimento: Saber justificar ideias, métodos e procedimentos matemáticos (C3).

O momento com mais mobilizações desse conhecimento ocorreu no Momento 1, após a resolução do problema proposto pela docente, suscitou uma discussão sobre o significado dos conceitos de variável e incógnita. Ao questionar a turma se o valor de x , na equação $x + 5 = 8$ seria uma variável, Pedro responde que sim, mas ao ser questionado o porquê, ele se corrige afirmando ser uma incógnita. Nesse sentido, os licenciandos foram instigados a explicar qual seria a diferença entre os termos, permitindo que eles manifestassem o conhecimento do que está por trás do conceito matemático discutido, mobilizando assim um Conhecimento Especializado do Conteúdo.

Quadro 25: Exemplos da mobilização do conhecimento C3

Trecho	Justificativa
Não, <i>pera</i> . É verdade! É porque assim, ela tem um valor, no caso, a raiz, o valor que, no caso, é igual da área vai ser zero. Ela tem um valor, no caso, ela não varia. (Pedro, M1)	Pedro soube explicar o porquê do valor de x na equação ser uma incógnita, ao invés de uma variável.
A variável varia [risos], a incógnita não (Maria, M1) variável é um número qualquer que pode ser atribuído (Alana, M1) a incógnita é um número que desconhecemos (Alana, M1)	As licenciandas Maria e Alana demonstraram saber a diferença entre os significados dos termos de variável e incógnita.

Fonte: Elaborado pelo autor

Ainda durante a resolução do problema proposto, Renan chegou ao resultado de $(x + 5)^2 = 64$, de modo que a continuação da resolução da equação, se discutiu o sinal de \pm na solução. Dessa maneira, ao explicar o significado do sinal de \pm é devido ao $|x + 5|$, o licenciando indicou ter um conhecimento da definição do conceito de módulo. Neste sentido, sua fala sugere que ele sabia o porquê desse procedimento matemático, como podemos observar no trecho apresentado no quadro a seguir:

Quadro 26: Exemplo da mobilização do conhecimento C3

Trecho	Justificativa
Por causa da outra parte, né!? Do $x + 5$, na hora que você tira a raiz vai ser $ x + 5 $, né!? (Renan, M1)	Renan explicou o porquê de se colocar o sinal de \pm na equação, sugerindo que ele sabe o conceito matemático por trás do uso desse sinal.

Fonte: Elaborado pelo autor

Já nas apresentações dos Relatos de Experiências, no Momento 5, durante a apresentação de Pedro, identificamos outro exemplo da manifestação de um Conhecimento

Especializado do Conteúdo, ao relatar que os autores tiveram dificuldades quando os alunos foram representar o número 0 na atividade que foi proposta de criação do próprio sistema de numeração. Ao explicar sobre o porquê houve esse problema na aula, o licenciando deu indícios de ter um conhecimento de que no decorrer da história, teve-se dificuldades em realizar a representação do número zero. Dessa maneira, podemos perceber que ele sabia o que está por trás da dificuldade que os alunos tiveram, pois o conceito do número zero também teve problemas em ser representado pela humanidade ao longo da história.

Quadro 27: Exemplo da mobilização do conhecimento C3

Trecho	Justificativa
Por exemplo, eu já fiz [a disciplina de] História da Matemática, eu sei como o zero foi algo complicado pra humanidade e teve esse probleminha também nessa turma (Pedro, M5)	Pedro deu indícios de saber que houve dificuldades, no decorrer da história, de se representar o número 0.

Fonte: Elaborado pelo autor

Nesse sentido, podemos perceber ainda uma contribuição da HM na fala de Pedro. O licenciando percebeu uma dificuldade que os alunos tiveram e sabia que também era uma dificuldade que a humanidade também teve. Dessa maneira, podemos observar que o licenciando sabe que a HM pode ter a função de contribuir para identificar melhor os erros que os alunos possam cometer, permitindo assim que o professor seja capaz de ajudar os alunos a superarem esse obstáculo, bem como apontado por Balestri (2008).

Desse modo, temos que o Conhecimento Especializado do Conteúdo foi o menos mobilizado. Este resultado nos surpreendeu, pois esperávamos que durante a elaboração dos planos de aulas, no Momento 7, que os licenciandos buscassem diferentes maneiras de se justificar ideias matemáticas. Nesse sentido, acreditamos que os estudantes, por estarem mais preocupados em realizar uma atividade mais atrativa aos alunos, acabaram focando mais nas questões pedagógicas do plano. Além disso, a falta das gravações nos momentos de elaboração dos planos de aula, pode ter implicado nesse resultado. Contudo, podemos observar que os licenciandos deram indícios de ter um bom domínio de saber o que está por trás dos conceitos matemáticos.

Por fim, apresentamos uma discussão das relações entre os momentos da disciplina e os conhecimentos mobilizados pelos licenciandos.

5.2.4 Relações entre os momentos da disciplina e os conhecimentos mobilizados

Com base na Tabela 1, podemos, também, perceber que mais da metade dos conhecimentos identificados foram manifestados nos Momentos 7 e 8, ou seja, nos momentos nos quais os estudantes elaboraram e apresentaram seus planos de aula.

Ressaltamos que no Momento 7, os licenciandos estavam à vontade em expor suas ideias, visto que a maior parte do tempo estavam sem a supervisão da docente ou do pesquisador, sendo que estes auxiliavam as duplas em momentos específicos. Dessa maneira, destacamos que atividades em que os licenciandos são colocados a discutir, livremente podem se configurar como importantes para a mobilização de conhecimentos. É importante frisar, que esse número poderia ser ainda maior se tivéssemos as gravações dos demais encontros que foram realizados pelos licenciandos.

Ademais, o Momento 8 foi o único no qual todos os licenciandos manifestaram ao menos um conhecimento. Entendemos que isso ocorreu, pelo fato de que todos os licenciandos (independentemente se os estudantes fossem mais tímidos ou menos participativos) deveriam participar da apresentação do plano de aula, de modo que, todos teriam um momento de fala. Além disso, dos 17 conhecimentos que elencamos ao longo da pesquisa, 16 deles foram identificadas nesse momento. Este fato reforça a importância de que ao longo da disciplina, sejam realizadas atividades de elaboração e apresentação de planos de aula para a Educação Básica.

Ainda sobre os Momentos 7 e 8, foi possível notar que a maior quantidade de manifestações, foi do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo. Temos ainda que o número de mobilizações do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino no Momento 8 foi bem maior, devido as apresentações dos licenciandos em que foram dados mais detalhes dos planos de aulas que foram elaborados por eles, além do fato de que todos os licenciandos tiveram que apresentar.

Nestes momentos, identificamos, também, a mobilização do subdomínio do Conhecimento do Currículo, que pode estar relacionada com a solicitação de que os licenciandos buscassem os documentos oficiais, como a BNCC, para que os auxiliassem na elaboração dos planos.

Destacamos que ao realizarmos a análise da elaboração dos planos de aula no Momento 7, notamos que houve pouca mobilização do Conhecimento Especializado do Conteúdo, o que nos surpreendeu, uma vez que esperávamos que os licenciandos buscassem utilizar de estratégias diferentes para justificar as ideias matemáticas. Esta situação pode estar relacionada com a pouca disponibilização das gravações nos momentos de elaboração dos planos de aula.

Além disto, nossas observações indicam que os estudantes tenham direcionado sua atenção para as questões pedagógicas do plano, visando torná-lo mais atrativo aos alunos, o que pode ter levado os estudantes a deixarem a matemática um pouco de lado.

O Momento 1, no qual foi realizada a “vivência” de uma atividade utilizando a HM no ensino da resolução de equações do 2º grau, foi relevante para a manifestação do Conhecimento do Conteúdo. Durante a atividade, os licenciandos resolveram um problema retirado de um tablete babilônico, mobilizando inicialmente o Conhecimento Comum do Conteúdo. Esta resolução gerou uma discussão sobre o significado de variável e incógnita, o que manifestou o Conhecimento Especializado do Conteúdo. Os licenciandos conheciam os conceitos matemáticos e eram capazes de justificar os conhecimentos e métodos discutidos. Assim, a vivência desta atividade, resultou na concentração de quase metade do total de conhecimentos identificados do domínio do Conhecimento do Conteúdo.

Tal situação pode ser relacionada com o fato de que a História da Matemática contribui para aprendizagem ou a ressignificação da matemática, conforme apontado por Miguel e Brito (1996).

Embora esse resultado não seja o objetivo desta pesquisa, ele também mostra, o potencial que a HM possui para lecionar o conteúdo de resolução de equações do 2º grau na educação básica.

Nos momentos 2 e 3, nos quais foram realizadas, respectivamente, a apresentação do plano de aula com a HM, por uma professora e a discussão das potencialidades e finalidades da HM no ensino, identificamos a mobilização de poucos conhecimentos, em especial, pelo fato de que estas aulas foram mais expositivas, de modo que os licenciandos tiveram uma participação menos ativa.

Além disso, é importante ressaltar que nossa investigação foi realizada em um contexto de pandemia do Covid-19, onde as aulas da universidade estavam sendo realizadas de maneira remota. Dessa maneira, entendemos que a participação dos licenciandos não teria sido a mesma se a aula tivesse sido presencial, uma vez que para participar das aulas remotas, era necessário ligar o microfone, o que nem sempre era possível, seja pelo barulho que tinha no local em que estavam assistindo a aula ou por problemas técnicos com o aparelho.

Apesar dessas situações, entendemos que estes momentos foram importantes para a formação dos licenciandos, já que possibilitaram que estes conhecessem formas de utilizar e incluir a HM na sala de aula e compreendessem as possíveis contribuições da HM no ensino de Matemática.

Em uma perspectiva semelhante, no Momento 4, em que foi realizado o estudo de trechos de livros didáticos que utilizam a HM, também não houve a mobilização de muitos conhecimentos. Entretanto, entendemos que este foi um momento importante que permitiu aos licenciandos conhecer e refletir sobre maneiras que a HM tem sido incluída nos livros didáticos, além de discutirem as possibilidades da utilização dos trechos para o ensino de matemática.

Já no Momento 5, no qual foram realizadas as apresentações dos Relatos de Experiências, podemos perceber que houve um destaque na mobilização de conhecimentos relativos ao Conhecimento do Conteúdo e do Ensino. Durante as apresentações, os alunos faziam comentários sobre a maneira como foi conduzido o plano de aula apresentado nos relatos escolhidos, fato que pode ter propiciado uma maior mobilização do conhecimento C11, de conhecer e avaliar métodos, abordagens, estratégias, técnicas e ferramentas de ensino.

Durante a atividade em que os licenciando discutiram um plano de aula que utilizava a HM em sala de aula, no Momento 6, podemos observar uma mobilização de conhecimentos referentes ao Conhecimento do Currículo - principalmente relativo à avaliação da série indicada para desenvolver o plano – e de Conhecimento do Conteúdo e do Ensino – referente aos comentários sobre as questões do ensino, como por exemplo, as formas de aplicar o plano na sala de aula.

De maneira geral, podemos perceber que os Momentos 1, 5, 6, 7 e 8 foram o que observamos mais mobilizações de conhecimentos. É possível notar que se tem em comum nesses momentos, as atividades mais práticas realizadas pelos licenciandos, de modo que estes vivenciaram uma atividade que utilizava a HM (Momento 1), apresentaram um Relato de Experiência (Momento 5), estudaram e discutiram também um plano de aula (Momento 6) e por fim, elaboraram e apresentaram seus planos de aula (Momentos 7 e 8). Dessa maneira, podemos inferir que atividades em que os licenciandos tem um maior envolvimento com um plano de aula, permite a mobilização de mais conhecimentos.

Destacamos ainda que as discussões ocorridas no decorrer da disciplina contribuíram para a construção dos planos de aula apresentados no Momento 8. Isso pode ser observado nos planos de aulas de três duplas: a primeira dupla, Alana e Renan, utilizou o problema dos 21 vasos, que havia sido relatado na apresentação dos Relatos de Experiência, para ensinar as frações no plano de aula que desenvolveram. Já a dupla Gilmar e Maria, que no Momento 4, ao ser apresentado um trecho do livro didático que contava a história de como Gauss desenvolveu a fórmula de termos de uma P.A., fez com que os licenciandos se interessem pela história e utilizassem para elaborar o plano de aula. Por fim, a dupla Jorge e Pedro, no qual Pedro destacou a contribuição de ser realizada uma introdução histórica no Momento 1 e no plano de aula que

elaborou junto a Jorge, ele propôs que fosse feita uma introdução histórica dos logaritmos para iniciar o ensino do conteúdo.

Por fim, ressaltamos que alguns licenciados podem ter conhecimentos que não foram identificados, seja pelo fato das discussões e atividades não permitirem que ocorresse a sua mobilização ou ainda por não termos identificado o conhecimento. Sendo assim, entendemos que a não identificação desses conhecimentos, não indica que os discentes não a tenham. Além disso, destacamos que a manifestação dos conhecimentos, não indica que estes foram desenvolvidos nos momentos da disciplina, mas que foram mobilizados. Isso pode ser observado por momentos nos quais os licenciandos citam outros momentos que podem ter sido desenvolvidos os conhecimentos, como em outras disciplinas, no PIBID e/ou nos estágios.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta investigação teve por objetivo analisar as contribuições do estudo de tópicos da HM no ensino para a formação de professores, mais especificamente para a mobilização de Conhecimentos Matemáticos para o Ensino. Sendo assim, acompanhamos uma disciplina na qual se discutiu o uso da História da Matemática no ensino. Para isso, escolhemos o curso de licenciatura em Matemática de universidade federal do estado de Minas Gerais, para a realização desta pesquisa.

Escolhemos inicialmente o modelo MKT, de Ball, Thames e Phelps (2008), que é constituído de dois domínios: Conhecimento do Conteúdo (SMK) e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK). Tendo como base este modelo e os dados da investigação, propomos para nossas análises uma adaptação do modelo MKT, composta de três domínios: Conhecimento do Conteúdo, Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e Conhecimento do Currículo. Assim, buscamos identificar os conhecimentos que foram mobilizados pelos licenciandos durante o estudo da História da Matemática no ensino ao longo de oito momentos da disciplina. Esses momentos foram de vivências de plano de aula, discussões de textos e planos de aulas, estudo do livro didático, apresentação de relatos de experiências e por fim, a elaboração e apresentação de um plano de aula que utilizasse a HM no ensino de matemática.

Identificamos que o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, foi o mais mobilizado, sendo ainda o único domínio a ser mobilizado pelos licenciandos em todos os momentos da disciplina. A disciplina que analisamos, tinha por objetivo discutir o uso da História da Matemática na Educação Básica, dessa maneira, os licenciandos foram instigados a discutirem sobre questões pedagógicas do ensino, fato este, que contribuiu para a maior mobilização do domínio PCK, sendo este um resultado já esperado. Justamente nesse sentido, temos que os conhecimentos de conhecer e avaliar as metodologias de ensino e de saber sequenciar um conteúdo, dentro do KCT, e a de antecipar se um exemplo, atividade ou abordagem será interessante e motivador ou não, do KCS, foram as mais manifestadas.

O segundo domínio com mais mobilizações foi o Conhecimento do Currículo, de modo que foram observados nos momentos em que se envolvia planos de aula, seja na discussão, apresentação de relatos de experiência e elaboração e apresentação do plano de aula. Isso ocorreu devido a proposta das discussões e atividades que foram realizadas pelos licenciandos, que os levava a apontar os anos escolares que um tópico matemático é indicado, bem como citavam a BNCC, demonstrando conhecer o documento oficial utilizado para realizar esse apontamento.

Já o Conhecimento do Conteúdo, foi o domínio com o menor número de mobilizações. Entendemos que esse resultado se deu justamente pela proposta da disciplina, em que está voltada as questões pedagógicas do ensino e não as questões matemáticas. Dessa maneira, podemos perceber que esse conhecimento foi mobilizado com mais frequência no Momento 1, em que os licenciandos vivenciaram um plano de aula. Assim, os licenciandos tiveram que resolver um problema proposto, o que evidenciou seus conhecimentos matemáticos.

Ao analisarmos os planos de aula no Momento 7, notamos que os licenciandos mobilizaram pouco Conhecimento Especializado do Conteúdo, o que foi surpreendente, já que esperávamos ver a aplicação de diferentes estratégias para justificar as ideias matemáticas pelos licenciandos na elaboração do plano de aula. A falta de acesso às gravações durante a elaboração dos planos de aula, pode estar relacionada a esta situação. Além disso, observamos que os estudantes se concentraram mais nas questões pedagógicas do plano, com o objetivo de torná-lo mais atraente para os alunos, deixando possivelmente de lado alguns aspectos da matemática.

Este fato aponta a necessidade de se repensar a forma como a atividade de elaboração dos planos de aula foi proposta aos estudantes. É preciso desenvolver meios para que os licenciandos se dediquem não apenas às questões pedagógicas, mas também à reflexão sobre os conceitos matemáticos fundamentais presentes nos planos de aula.

Ainda que não seja o objetivo dessa pesquisa, podemos observar contribuições da História da Matemática tanto para a formação matemática, quanto para a formação pedagógica do licenciando, conforme apontado por Borges (2019). Identificamos momentos em que a HM mostrou que pode, por exemplo, motivar o estudante nos estudos da matemática, para facilitar a compreensão dos conteúdos matemáticos e principalmente para a formação da prática pedagógica do futuro professor. Este fato reforça ainda mais a importância dos licenciandos realizarem estudos sobre a HM no ensino, de modo que assim possa favorecer o ensino de matemática.

De maneira geral, podemos perceber que os momentos em que os licenciandos estão produzindo e apresentando aos colegas os seus planos de aula com a HM, propiciaram uma maior exposição dos conhecimentos dos licenciandos. Nesse sentido, demonstra-se a importância de se realizar esse tipo de atividade na disciplina, pois assim, os licenciandos poderão manifestar os seus conhecimentos. Destacamos ainda a importância de se realizar atividades fora do ambiente da disciplina, pois podemos perceber que os licenciandos ficavam mais à vontade em expressar suas ideias e pensamentos, de maneira a ser possível identificar diversos conhecimentos expressos por eles. Vale ressaltar que se por um lado essa liberdade é

relevante, por outro é importante que este momento seja realizado em sala de aula, para que o docente possa acompanhar e supervisionar este processo, contribuindo para este momento tão rico da disciplina.

Além disso, destacamos que a disciplina que analisamos, bem como todas as outras do curso de licenciatura em que a pesquisa foi realizada, não foram desenvolvidas em função dos conhecimentos aqui analisados. Embora essa condição traga impactos a nossa pesquisa, obtivemos resultados interessantes, de maneira que identificamos variados conhecimentos nas falas dos licenciandos ao longo das atividades da disciplina analisada.

É válido ressaltar que a nossa pesquisa foi conduzida em um cenário de pandemia de Covid-19, em que as aulas universitárias estavam ocorrendo de forma remota. Nesse sentido, é compreensível que a participação dos licenciandos possa ter sido prejudicada em comparação com as aulas presenciais, uma vez que muitos deles enfrentaram dificuldades para ativar o microfone durante as aulas, seja por conta de ruídos externos ou por problemas técnicos em seus dispositivos.

Por fim, destacamos que estudos sobre a mobilização de conhecimentos por licenciandos no estudo da História da Matemática no Ensino ainda se constitui num tema pouco explorado na literatura acadêmica. Assim sendo, ressaltamos a importância de ampliar o debate nos cursos de licenciatura em Matemática no Brasil e conduzir novas investigações que abordem temas relacionados ao Conhecimento Matemático para o Ensino, bem como as disciplinas de História da Matemática na formação inicial de professores de matemática. Tais pesquisas podem oferecer valiosas contribuições para identificar e solucionar lacunas na formação dos futuros professores de Matemática.

REFERÊNCIAS

- BALESTRI, R. D. **A participação da História da Matemática na formação inicial de professores de Matemática na ótica de professores e pesquisadores.** 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.
- BALESTRI, R. D.; CYRINO, M. C. C. T. A História da Matemática na Formação Inicial de Professores de Matemática. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 3, n. 1, p. 103- 120, 2010.
- BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.
- BARONI, R. S.; TEIXEIRA, M. V.; NOBRE, S. R. História da matemática em contextos da educação matemática: contribuições do GPHM. **Bolema**, v. 25, n. 41, p. 153-171, 2011
- BONATO; G. V. **Conhecimento Matemático para o Ensino mobilizado em um planejamento de aula na perspectiva da Resolução de Problemas.** 2020. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.
- BORGES, L. C. **A História da Matemática na formação inicial de professores de Matemática: Um estudo em teses e dissertações brasileiras.** 2019. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências) - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2019.
- BORGES, L. de C.; CAVALARI, M. F. A História da Matemática em Propostas Didáticas para a Formação de Professores: Um Estudo em Teses e Dissertações Brasileiras. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 10, n. 22, p. 174–199, 2021.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em 14 jun. 2021.
- BRASIL, Ministério da Educação. Portaria nº 57, de 05 de fevereiro de 1998. **Estabelece os objetivos para o Exame Nacional do Curso de Matemática.** Diário Oficial da União, Brasília, DF, p.4, 6 fev. 1998.
- BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES 1302/2001. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura.** Brasília: CNE, 2001.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, DF, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>>. Acesso em: 14 jun. 2021.
- CAVALARI, M. F. A Inserção da História da Matemática na formação inicial de professores: breves considerações. In. SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, XIII, 2019, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza: SBHMat, 2019, p.39-52.

CAVALARI, M. F. Breves considerações acerca dos cursos de graduação em Matemática nas décadas de 1930 a 1950 no Brasil. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, XI, 2015, Natal. **Anais...** Natal: SBHMat, 2015.

CAVALARI, M. F.; MORAES, S. R. A. de; CALÁBRIA, A. R.; BONFIM, S. H. História da Matemática na Formação de Professores: Um mapeamento em cursos ofertados por Universidades Federais brasileiras. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 8, p. 1-24, 23 jun. 2022.

FAUVEL, J. Utilização da história da matemática local na educação do jovem matemático. **Educação e Matemática**, n. 27, p. 3-5, 1993.

FAUVEL, J.; MAANEN, J. V. **History in mathematics education: the ICMI study**. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, v. 6, 2000.

FIORENTINI, D.; SOUZA JÚNIOR, A. J.; MELO, G. F. A. Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos. In: GERALDI, C.M.G. et al. (Orgs.). **Cartografias do trabalho docente: professor(a) pesquisador(a)**. Campinas: Mercado de Letras, 1998. p. 307-335.

FISCHER, M. C. B. Formação de Professores em Tempos da Matemática Moderna: uma proposta de investigação histórica. **Revista Diálogo Educacional**, v. 8, n. 25, p. 663-674. 2008.

FRANSOLIN, J. B. L.. **A disciplina História da Matemática na formação inicial: uma perspectiva para a formação humana dos futuros professores de Matemática**. 2019. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2019.

FRIED, M. N. Can mathematics education and history of mathematics coexist? **Science & Education**, v. 10, n. 4, p. 391-408, 2001.

GARCIA, F. T. **A prática de ensino com a História da Matemática na formação inicial de professores de Matemática na modalidade a distância**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2013.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de administração de empresas**, v. 35, n. 2, p. 57-63, 1995a.

GODOY, A. S. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. **Revista de Administração de empresas**, v. 35, n. 3, p. 20-29, 1995b.

MENDES, I. A. Tendências da Pesquisa em História da Matemática no Brasil: A Propósito das Dissertações e Teses (1990 – 2010). **Educação, Matemática e Pesquisa**, v. 14, n. 3, p.465-480, 2012.

MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: Argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetiké**, v.5, n.8, p.73-105, 1997.

MIGUEL, A.; BRITO, A. de J. A história da matemática na formação do professor de matemática. **Caderno Cedes**, v. 40, p. 47-61, 1996.

MOSVOLD, R.; JAKOBSEN, A.; JANKVIST, U. T. How mathematical knowledge for teaching may profit from the study of history of mathematics. **Science & Education**, v. 23, n. 1, p. 47-60, 2014.

PINTO, T. L. **Design de Problemas e o Conhecimento Matemático para o Ensino de Licenciandos em Matemática sobre Progressões Aritméticas e Geométricas**. 2021. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Franciscana, Santa Maria, 2021.

RIBEIRO, A. J. Equação e Conhecimento Matemático para o Ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. **Bolema**, v. 26, n. 42B, p. 535-558, 2012.

ROGERI, N. K. de O. **Conhecimentos de Professores dos Anos Iniciais para o Ensino dos Números Racionais em sua Representação Decimal**. 2015. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 4, p. 4-14, 1986.

SILVA, C. M. S. A História da Matemática e os cursos de formação de professores. In: **Formação de professores de matemática: uma visão multifacetada**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001. p. 129-165.

SILVA, S. M. F. da. **Formação de Professores dos Anos Iniciais: Uma Investigação sobre os Conhecimentos para o Ensino de Área e Perímetro de Figuras Planas**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016.

APÊNDICE I

Roteiro de perguntas para apresentação dos relatos de experiência de História da Matemática:

- 1) Qual o conteúdo matemático apresentado no plano de aula?
- 2) Qual História da Matemática foi apresentada?
- 3) Qual a série que foi desenvolvido o plano de aula? O conteúdo trabalhado estava adequado com a série aplicada?
- 4) Como foi desenvolvido o plano de aula? A sequência seguida pelo autor no plano de aula contribuiu para o aprendizado do aluno?
- 5) Quais os exemplos utilizados no plano de aula? Você entende que os exemplos contribuíram para o aprendizado do aluno?
- 6) A HM foi utilizada no plano de aula como estratégia didática, elucidação dos porquês e para que ou formação cultural geral?
- 7) Os alunos tiveram dificuldades em algum momento do plano de aula? Como o autor lidou com essa situação?
- 8) Quais foram as considerações dos alunos e/ou autores sobre utilizar a HM?

ANEXO I

ATIVIDADE SOBRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM LIVROS DIDÁTICOS

A atividade que será explicada em aula é uma adaptação das atividades presentes em Carlini e Cavalari (2017) que tem como base Pereira (2016).

Por meio dessa associação, representa-se geometricamente o conjunto \mathbb{C} pelo plano, que é chamado de **plano complexo** ou **plano de Argand-Gauss**, em homenagem aos seus criadores: o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e o guarda-livros suíço Jean Robert Argand (1768-1822).

1.

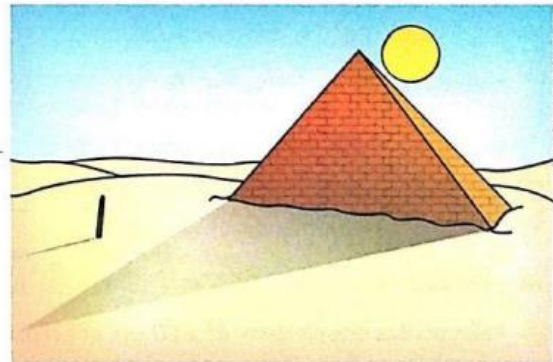
Neste capítulo retomaremos o estudo da Trigonometria (do grego: 'medida dos triângulos'), revendo e aprofundando a Trigonometria no triângulo retângulo. O conceito de proporcionalidade é questão central nesse processo, portanto faremos uma revisão de tópicos relevantes da Geometria plana.

A proporcionalidade, principalmente na forma do teorema de Tales ou de semelhança de triângulos, foi um dos conhecimentos geométricos mais úteis ao longo dos tempos. Foi com semelhança de triângulos que Aristarco (310 a.C.-230 a.C.) comparou as distâncias da Terra, e com que os matemáticos árabes estabeleceram as razões trigonométricas.

Tales de Mileto (624 a.C.-547 a.C.), considerado um dos mais versáteis gênios da Antiguidade, levou para a Grécia a Geometria dos egípcios e começou a aplicar a ela os procedimentos da Filosofia grega. Com seu método de comparar sombras, hoje conhecido como teorema de Tales, realizou muitos cálculos até então inéditos. O mais famoso deles foi a obtenção da altura de uma pirâmide.

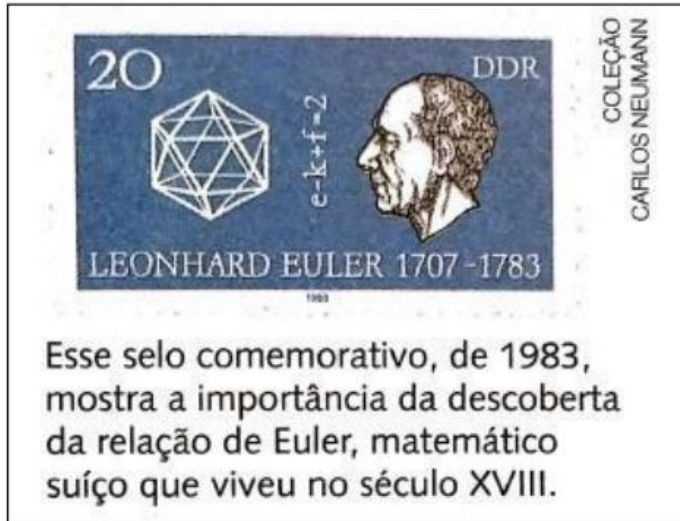
Conta-se que Tales fincou uma vareta verticalmente no chão, ao lado da pirâmide. Esperou até um momento em que a sombra e a vareta tivessem exatamente o mesmo tamanho. Nesse instante, Tales mediu a sombra da pirâmide, descobrindo assim sua altura.

Junte-se com um colega e discutam como esse método usado por Tales permite que se descubra a altura da pirâmide. Poderia ter sido usado outro momento do dia, por exemplo, o momento em que a sombra da vareta fosse metade da altura dela?

**Você sabia?**

Tales é considerado um dos sete sábios da Antiguidade. Formem trios e pesquisem quem são os outros seis.

2.



3.

Encontrar caminhos matemáticos para a resolução de problemas de astronomia, agrimensura, navegação e construção sempre despertou o interesse do ser humano. Desse tipo de especulação nasceu a Trigonometria, parte da Matemática que se dedica ao estudo das relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo.

O grego Aristarco de Samos (310-230 a.C.), considerado por muitos o primeiro grande astrônomo da história, fez uso das ideias da Trigonometria ao estabelecer um método geométrico para investigar a razão entre as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua.

Seus cálculos partiram da observação de que, quando a Lua está no quarto crescente – ocasião em que exatamente metade dela aparece iluminada pelo Sol –, o triângulo TSL (sendo T um observador na Terra, S o centro do Sol e L o centro da Lua) é retângulo em L , como mostra o esquema ao lado.

Aplicando os conhecimentos da época, Aristarco observou que o ângulo entre as linhas de vista da Terra ao Sol e da Terra à Lua era $\frac{29}{30}$ de um ângulo reto (ou seja, $\beta = 87^\circ$). Na linguagem atual, isso significa que a razão entre as distâncias Terra-Lua e Terra-Sol é $\text{sen } 3^\circ$. Como ainda não haviam sido desenvolvidas tabelas trigonométricas, Aristarco recorreu a outros recursos para concluir que essa razão $\left(\frac{TL}{TS}\right)$ estava entre $\frac{1}{20}$ e $\frac{1}{18}$, e daí concluiu que a razão entre as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua estaria entre 18 e 20.

Hoje, sabemos que esse valor é pouco menor que 400, o que significa que a distância Terra-Sol é cerca de 400 vezes a distância Terra-Lua. A grande diferença entre esse valor e o encontrado por Aristarco está relacionada ao ângulo β , cuja medida correta é de aproximadamente $89^\circ 50'$. Mesmo assim, o raciocínio de Aristarco foi perfeito.

4.



REPRODUÇÃO

John Venn (1834-1923),
lógico e matemático
britânico, criador dos
diagramas de Venn
adotados pela Matemática
moderna.

7.

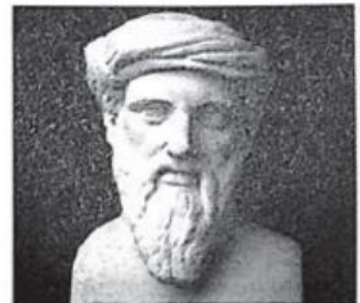
Como já dito anteriormente, os pitagóricos acreditavam que, tomando-se quaisquer dois segmentos, eles seriam comensuráveis. Para eles, o dogma de sua doutrina, "TUDO É NÚMERO", referia-se aos números racionais, já que eles não concebiam a existência de outros números que não fossem racionais (inteiro ou fração).

Assim, como estudamos, ao medirem a diagonal de um quadrado cujos lados medem 1 unidade de comprimento, os pitagóricos se depararam com o número irracional $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$, ou seja, descobriram que o lado desse quadrado e sua diagonal são segmentos incomensuráveis.

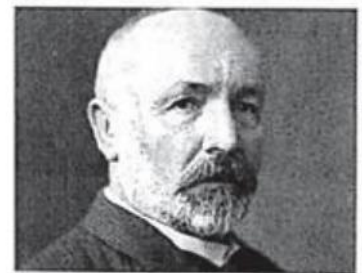
Essa descoberta causou, na época, grande constrangimento, pois punha por terra um dos dogmas centrais dos pitagóricos: "TUDO É NÚMERO" (racional).

Conta-se que Pitágoras proibiu seus discípulos de divulgar tal descoberta para não abalar a sua doutrina, mas um deles, Hipaso, quebrou o voto de silêncio e foi, por isso, duramente punido.

A resistência aos números irracionais prosseguiu por vários séculos, até que, no fim do século XIX, o matemático George Cantor fundamentou-os adequadamente.



Busto de Pitágoras



George Cantor

8.



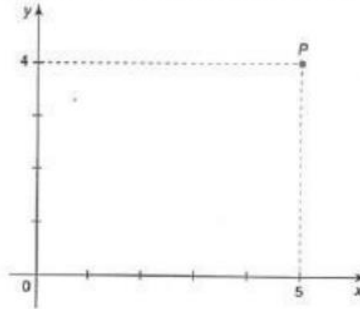
Gravura de René Descartes, que rompeu com as tradições clássicas da Geometria grega e criou a Geometria analítica.

1 Introdução

Em qualquer ciência, o entendimento de um objeto de estudo é facilitado quando o representamos por mais de um registro (desenhos, equações, símbolos etc.) e transitamos por esses registros, de modo que a carência de um seja suprida pelo outro.

Um exemplo notável dessa prática é a Geometria analítica, concebida pelo matemático francês René Descartes (1596-1650). Transitando entre Álgebra e Geometria euclidiana, a Geometria analítica possibilita a representação de figuras geométricas por meio de pares ordenados, equações ou inequações. Por exemplo:

- O par ordenado $(5, 4)$ representa o ponto P da figura abaixo.



9..

O mais completo tratado sobre as cônicas foi escrito pelo matemático e astrônomo grego Apolônio de Perga, por volta de 225 a.C., embora elas já tivessem sido estudadas antes dele.

A obra *As cônicas*, de Apolônio, foi duramente criticada por alguns sábios de sua época, que encaravam esse estudo como puro deleite do autor, sem nenhum interesse no mundo real. O tempo se incumbiu de mostrar que esses sábios estavam enganados: por volta de 1605, o astrônomo alemão Johannes Kepler descobriu que os planetas descrevem órbitas **elípticas** em torno do Sol; em 1632, Galileu Galilei descreveu como **parabólica** a trajetória de projéteis lançados obliquamente para cima; em 1662, Robert Boyle descobriu que, sob temperatura constante, a função que expressa a relação entre o volume de uma massa fixa de gás e a pressão exercida sobre ela é **hiperbólica**. Constatamos, ainda, a presença das cônicas em muitas outras situações do mundo real, como na construção de antenas, espelhos e lentes parabólicos ou hiperbólicos; na construção de pontes pênséis; nas trajetórias elípticas, parabólicas ou hiperbólicas de astros celestes; em Economia, no estudo da curva parabólica de possibilidades de produção etc.

10.

Fonte das Ilustrações:

1. Leonardo, 2013, v. 3, p. 169, Apud Pereira, 2016
2. Souza, v. 2, 2013, p. 184, Apud Pereira, 2016
3. PAIVA, v. 3, 2013, Apud Pereira, 2016
4. LEONARDO, v. 1, 2013, p. 258, Apud Pereira, 2016
5. Leonardo, 2013, p. 216, Apud Pereira, 2016
6. SOUZA, v. 2, 2013, p. 184, Apud Pereira, 2016
7. Paiva, 2013, v. 1, p. 9, Apud Pereira, 2016
8. Dante, 2013, v.1, p. 22, Apud Pereira, 2016
9. Paiva, 2013, v. 3, p. 36, Apud Pereira, 2016
10. Paiva, 2013, v. 3, p. 108, Apud Pereira, 2016

Referências:

CARLINI, E. M. P.; CAVALARI, M. F. **A história da Matemática em livros didáticos do Ensino Médio**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2017.

PEREIRA, E. M. **A História da Matemática nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio: conteúdos e abordagens**. 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2016.