

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ANÁLISE COMPARATIVA DE ESFORÇOS E DEFLEXÕES
EM PLACAS RETANGULARES FINAS**

ADILSON MOREIRA SOARES

ORIENTADOR: PROF. Dr. PAULO SHIGUEME IDE

CO-ORIENTADOR: PROF. Dr. WLAMIR CARLOS DE OLIVEIRA

**Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica para
obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na Área de Projeto e Fabricação**

**Itajubá-MG
2004**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ANÁLISE COMPARATIVA DE ESFORÇOS E DEFLEXÕES
EM PLACAS RETANGULARES FINAS**

ADILSON MOREIRA SOARES

Membros da Banca Examinadora:

Carlos Barreira Martinez - UFMG

Paulo Roberto Labegalini - UNIFEI

Paulo Shigueme Ide – Orientador - UNIFEI

Wlamir Carlos de Oliveira – Co-orientador - UNIFEI

**Itajubá-MG
2004**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB_6/1700

S676a

Soares, Adilson Moreira.

Análise comparativa de esforços e deflexões em placas retangulares
finas / por Adilson Moreira Soares. -- Itajubá (MG) : [s.n.], 2004.
87 p. : il.

Orientador : Prof. Dr. Paulo Shigueme Ide

Co-orientador : Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá /IEM

1. Placas. 2. Tensões. 3. Deflexões. I. Ide, Paulo Shigueme, orient. II.
Oliveira, Wlamir Carlos de, co-orient. III. Universidade Federal de Itajubá.
IV. Título.

CDU 621.03(043)

ÍNDICE DE ASSUNTOS

| | |
|---|----------|
| Dedicatória..... | vi |
| Agradecimentos..... | vii |
| Frase sábia..... | viii |
| Simbologia..... | ix |
| Índice de Figuras..... | xi |
| Índice de Tabelas..... | xiii |
| Resumo..... | xvi |
| Abstract..... | xvii |
| | |
| CAPÍTULO 1-INTRODUÇÃO..... | 1 |
| 1.1-Tema..... | 1 |
| 1.2-Objetivo, Recursos e Métodos..... | 1 |
| 1.3-Plano da Dissertação..... | 2 |
| | |
| CAPÍTULO 2-EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO..... | 3 |
| 2.1-Introdução..... | 3 |
| 2.2-Tipos de placas..... | 4 |
| 2.2.1-Placa fina com pequenos deslocamentos..... | 4 |
| 2.2.2-Placa fina com grandes deslocamentos..... | 5 |
| 2.2.3-Placa espessa..... | 5 |
| 2.3-Estudo das placas finas com pequenos deslocamentos..... | 5 |
| 2.4-Deslocamento num ponto qualquer da placa (u,v,w)..... | 6 |
| 2.4.1-Relações entre deslocamentos e deformações..... | 8 |
| 2.4.2-Tensões em um ponto P (x,y,z)..... | 9 |
| 2.4.3-Esforços por unidade de comprimento..... | 10 |
| 2.4.3.1-Cálculo dos momentos fletores Mx e My..... | 11 |
| 2.4.3.2-Cálculo do momento de torção Mxy..... | 13 |
| 2.4.3.3-Cálculo dos esforços cortantes..... | 14 |

| | |
|---|----|
| 2.5-Equações Diferenciais..... | 15 |
| 2.5.1-Equilíbrio de forças na vertical (z)..... | 15 |
| 2.5.2-Equilíbrio de momentos em torno de y..... | 16 |
| 2.6-Determinação da Equação de Sophie-Germain-Lagrange..... | 16 |
| 2.7-Relação entre esforços e deslocamentos..... | 18 |
| 2.8-Distribuição das tensões normais..... | 18 |
| 2.9-Distribuição das tensões tangenciais..... | 19 |
| 2.9.1-Distribuição das tensões tangenciais devido ao momento torçor..... | 19 |
| 2.9.2-Distribuição das tensões tangenciais devido ao cortante..... | 20 |
| 2.10-Condições de Contorno..... | 22 |
| 2.10.1-Placa apoiada nos quatro lados..... | 22 |
| 2.10.2-Placa engastada nos quatro lados..... | 23 |
| 2.10.3-Placa em balanço..... | 24 |

CAPÍTULO 3-ANÁLISE DAS DEFLEXÕES E ESFORÇOS

| | |
|--|----|
| EM PLACAS | 25 |
| 3.1-Introdução..... | 25 |
| 3.2-Solução de Navier para placas retangulares simplesmente apoiadas..... | 25 |
| 3.3-Placa retangular apoiada nos quatro lados sujeita a uma força concentrada..... | 33 |
| 3.4-Solução de Lévy para placa simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída..... | 36 |
| 3.5-Solução de Lévy para simplesmente apoiada, sob carga concentrada..... | 41 |
| 3.5.1-Momentos fletores em uma placa retangular simplesmente apoiada com carga concentrada..... | 44 |

| | |
|--|-----------|
| 3.6-Placa retangular com duas bordas opostas | |
| simplesmente apoiada e as outras duas engastadas..... | 46 |
| 3.6.1-Carga uniformemente distribuída..... | 46 |
| 3.6.2-Força concentrada..... | 51 |
| 3.7-Placa retangular com todos os lados engastados, | |
| carregada uniformemente..... | 52 |
| CAPÍTULO 4-EXEMPLOS NUMÉRICOS..... | 62 |
| 4.1-Introdução..... | 62 |
| 4.2-Exemplos..... | 63 |
| 4.3-Exemplo 1-Placa retangular, com relação entre lados | |
| igual a 2 (dois),simplesmente apoiada em seus lados, | |
| carregada uniformemente com carga q. ($\nu = 0,3$)..... | 64 |
| 4.4-Exemplo 2-Placa retangular, com relação entre lados | |
| igual a 2 (dois),simplesmente apoiada em seus lados, | |
| carregada uniformemente com carga q. ($\nu = 0$)..... | 66 |
| 4.5- Exemplo 3-Placa retangular, com relação entre lados | |
| igual a 2 (dois),simplesmente apoiada em seus lados, | |
| carregada no ponto central com força P. ($\nu = 0,3$)..... | 68 |
| 4.5.1 Exemplo 3.a Placa retangular com relação entre | |
| lados igual a 2 (dois), simplesmente apoiada, carregada | |
| no ponto central com força concentrada P. ($\nu = 0,3$)..... | 68 |
| 4.5.2 Exemplo 3.b Placa retangular com relação entre | |
| lados igual a 2 (dois), simplesmente apoiada, carregada | |
| com força P distribuída uniformemente em uma pequena | |
| área $u \times v = 0,4 \times 0,4 \text{m}$. ($\nu = 0,3$)..... | 70 |
| 4.6- Exemplo 4-Placa retangular, com relação entre lados | |
| igual a 2 (dois),simplesmente apoiada nos lados menores | |
| e engastada nos lados maiores, carregada uniformemente | |
| com carga q. ($\nu = 0,3$)..... | 71 |

| | |
|---|----|
| 4.7- Exemplo 5-Placa retangular, com relação entre lados igual a 2,simplesmente apoiada nos lados menores e engastada nos lados maiores, carregada uniformemente com carga q. $(\nu) = 0$ | 72 |
| 4.8- Exemplo 6-Placa retangular, com relação entre lados igual a 2 (dois),simplesmente apoiada nos lados maiores e engastada nos lados menores, carregada uniformemente com carga q. $(\nu) = 0,3$ | 74 |
| 4.9- Exemplo 7-Placa retangular, com relação entre lados igual a 2 (dois),simplesmente apoiada nos lados maiores e engastada nos lados menores, carregada uniformemente com carga q. $(\nu) = 0$ | 75 |
| 4.10- Exemplo 8-Placa retangular, com relação entre lados igual a 2 (dois),simplesmente apoiada nos lados maiores e engastada nos lados menores, carregada no ponto central com força concentrada P. $(\nu) = 0,3$ | 77 |
| 4.11- Exemplo 9-Placa retangular, com relação entre lados igual a 2, engastada nos quatro lados, carregada uniformemente com carga q. $(\nu) = 0,3$ | 79 |
| 4.12-Exemplo 10- Placa retangular, com relação entre lados igual a 2 (dois), engastada nos quatro lados, carregada no ponto central com força concentrada P. $(\nu) = 0,3$ | 80 |
| CAPÍTULO 5-CONCLUSÕES E PROPOSTAS | 83 |
| 5.1 Conclusões..... | 83 |
| 5.2 Propostas para trabalhos futuros..... | 84 |

APÊNDICE A

| | |
|---|-----------|
| Tabela 1 Constantes α , β , γ , δ , n para uma placa simplesmente apoiada e carregada uniformemente..... | 86 |
| Tabela 2 Constante α para deflexão de uma placa carregada com.carga concentrada central..... | 86 |
| Tabela 3 Constantes γ_1 e γ_2 | 86 |
| Tabela 4 Constantes, α , β_1 , β_2 , γ para uma placa retangular com dois lados simplesmente apoiados e os outros dois engastados, carregada uniformemente..... | 87 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 85 |

DEDICATÓRIA

Por inúmeras razões, as quais seriam difíceis de citar, eu dedico este trabalho à minha esposa Maria de Lourdes, pela iniciativa e estímulo, e extensivamente a toda minha família, que tanto me incentivou, privando-se da minha presença e amparando-me nos momentos de fraqueza.

AGRADECIMENTOS

Ao amigo Paulo Shigueme nas horas de incentivo e firmeza e ao Prof. Dr. Paulo Shigueme nos momentos de orientação e elucidações de dúvidas.

Ao Prof. Dr. Wlamir pela ajuda inestimável da sua enorme competência.

A Gildney, Exdras, José Wilson, Fabiano, Thyago, Thiaguinho e a todos os outros colegas que durante o período de convivência me socorreram nas dificuldades.

A todos os experientes professores que me orientaram nos momentos confusos.

A minha família “itajubense” **Afonso**, Nilson e Marcela.

A José Eduardo Tannús Reis, que criou o embrião que hoje resulta neste trabalho.

A minha mãe e a meu pai (in memorian), pelos ensinamentos, cuidados e exemplos de vida.

E finalmente a Deus, pela possibilidade de viver com saúde, paz, felicidade e perseverança.

Frase sábia

Na vida, começar é uma opção; acabar apenas faz parte da seqüência.

(Luiz Soares)

SIMBOLOGIA

Letras Romanas Maiúsculas

| | |
|------------------|--|
| D | Módulo de rigidez à flexão de placas |
| E | Módulo de elasticidade longitudinal do material |
| G | Módulo de elasticidade transversal do material |
| L | Menor dimensão da superfície da placa |
| M_x, M_y | Momentos fletores por unidade de comprimento nas seções de placa, fletindo os eixos x e y, respectivamente |
| M_{xy}, M_{yx} | Momentos torsores por unidade de comprimento nas seções de placa, perpendiculares aos eixos x e y, respectivamente |
| P | Força concentrada |
| Q_x, Q_y | Esforços cortantes por unidade de comprimento nas seções de placa, nas direções x e y, respectivamente |
| x, y, z | Eixos cartesianos |

Letras Romanas Minúsculas

| | |
|------------|---|
| a, b | Dimensões da superfície da placa |
| dx, dy, dz | Elementos infinitesimais de seções de placa nas direções x, y, z |
| h | Espessura da placa |
| i | Índices de parcelas da somatória |
| m, n, | Índices de parcelas da somatória |
| q | Carga uniformemente distribuída na superfície da placa |
| u, v, w | Deslocamentos dos pontos do plano médio da placa, nas direções x, y, z da placa respectivamente |

Letras Gregas Minúsculas

| | |
|---|--|
| $\alpha, \beta, \beta_1, \beta_2, \gamma, \gamma_1, \gamma_2, \delta$ | Fatores numéricos para cálculo de deflexões e esforços nas seções da placa |
| $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ | Ângulos de distorção das seções da placa |
| $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ | Deformações lineares nas direções x, y, e z, respectivamente |
| $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ | Rotação de seções da placa nas direções x, y, e z, respectivamente |
| ν | Coefficiente de Poisson do material |
| $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ | Tensões normais nas direções x, y, z |
| $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$ | Tensões tangenciais em coordenadas retangulares |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 2.1- Placa..... | 3 |
| Figura 2.2- Chapa..... | 4 |
| Figura 2.3- Vista Lateral .Deflexão e rotação..... | 5 |
| Figura 2.4- Superfície média ou neutra..... | 6 |
| Figura 2.5- Planos de corte S_1 e S_2 | 6 |
| Figura 2.6- Deslocamento de um ponto P..... | 7 |
| Figura 2.7- Localização do ponto P..... | 9 |
| Figura 2.8- Tensões no ponto P..... | 9 |
| Figura 2.9- Ponto P sob os esforços..... | 11 |
| Figura 2.10- Tensões normais e tangenciais no ponto P..... | 12 |
| Figura 2.11- Ponto P sujeito à ação de momentos torçores..... | 14 |
| Figura 2.12- Elemento de uma placa sujeito à ação de esforços..... | 15 |
| Figura 2.13- Distribuição das tensões normais..... | 18 |
| Figura 2.14- Distribuição das tensões tangenciais devido ao momento torçor..... | 20 |
| Figura 2.15- Tensões tangenciais e normais aplicadas no ponto P..... | 20 |
| Figura 2.16- Distribuição das tensões tangenciais..... | 22 |
| Figura 2.17- Variação das tensões tangenciais..... | 22 |
| Figura 2.18- Placa simplesmente apoiada nos quatro lados..... | 23 |
| Figura 2.19- Placa engastada nos quatro lados..... | 24 |
| Figura 2.20- Placa em balanço, engastada em um lado..... | 24 |
| Figura 3.1- Placa simplesmente apoiada sob carga senoidal..... | 25 |
| Figura 3.2- Carga P distribuída uniformemente sobre a área $4cd$ | 33 |
| Figura 3.3- Placa uniformemente carregada..... | 38 |
| Figura 3.4- Placa sob carga concentrada..... | 41 |
| Figura 3.5- Placa apoiada (lados menores) e engastada (lados maiores) com carga uniformemente distribuída..... | 46 |
| Figura 3.6- Placa apoiada (lados menores) e engastada (lados maiores) com força concentrada..... | 52 |

| | |
|--|----|
| Figura 3.7- Placa quatro lados engastados, carga uniforme..... | 53 |
| Figura 4.1.a- Placa simplesmente apoiada..... | 64 |
| b- Carregamento uniforme..... | 64 |
| c- Reações nas quinas..... | 65 |
| Figura 4.2.a- Placa simplesmente apoiada..... | 67 |
| b- Carregamento uniforme..... | 67 |
| Figura 4.3.1.a- Placa simplesmente apoiada..... | 69 |
| Figura 4.3.1.b- Carregamento concentrado..... | 69 |
| Figura 4.3.2.a- Placa simplesmente apoiada..... | 70 |
| Figura 4.3.2.b- Carregamento com P distribuído..... | 70 |
| Figura 4.4.a- Placa engastada lados maiores e apoiada lados menores..... | 71 |
| b-Carregamento uniforme..... | 71 |
| Figura 4.5.a- Placa engastada lados maiores e apoiada lados menores..... | 73 |
| b- Carregamento uniforme..... | 73 |
| c- Momentos M_x e M_y | 74 |
| Figura 4.6.a- Placa engastada lados menores e apoiada lados maiores..... | 74 |
| b-Carregamento uniforme..... | 74 |
| Figura 4.7.a- Placa engastada lados menores e apoiada lados maiores..... | 76 |
| b- Carregamento uniforme..... | 76 |
| Figura 4.8.a- Placa engastada lados menores e apoiada lados maiores..... | 77 |
| b- Carga concentrada..... | 77 |
| Figura 4.9.a- Placa engastada..... | 79 |
| b- Carregamento uniforme..... | 79 |
| Figura 4.10.a- Placa engastada..... | 81 |
| b- Carga concentrada..... | 81 |

ÍNDICE DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 4.1 Resultados de esforços e deflexões para uma placa retangular simplesmente apoiada com carga q uniforme. $\nu = 0,3$ | 65 |
| Tabela 4.2. Desvios percentuais. para uma placa retangular simplesmente apoiada com carga q uniforme, $\nu = 0,3$ | 66 |
| Tabela 4.3. Resultados de esforços e deflexões para uma placa retangular simplesmente apoiada com carga q uniforme, $\nu = 0$ | 67 |
| Tabela 4.4. Desvios percentuais para uma placa retangular simplesmente apoiada com carga q uniforme, $\nu = 0$ | 68 |
| Tabela 4.5. Resultados de esforços e deflexões para uma placa retangular simplesmente apoiada com carga concentrada P, $\nu = 0,3$ | 69 |
| Tabela 4.6. Desvios percentuais para uma placa retangular simplesmente apoiada com carga concentrada P, $\nu = 0,3$ | 70 |
| Tabela 4.7. Resultados de esforços e deflexões para uma placa retangular simplesmente apoiada com carga P distribuída em uma pequena área. $\nu = 0,3$ | 70 |
| Tabela 4.8. Desvios percentuais para uma placa retangular simplesmente apoiada com carga P distribuída em uma pequena área, $\nu = 0,3$ | 71 |
| Tabela 4.9. Resultados de esforços e deflexões para uma placa retangular simplesmente apoiada em seus lados menores e engastada nos lados maiores com carga q distribuída, $\nu = 0,3$ | 72 |
| Tabela 4.10. Desvios percentuais para uma placa retangular simplesmente apoiada em seus lados menores e engastada nos lados maiores com carga q distribuída, $\nu = 0,3$ | 72 |
| Tabela 4.11. Resultados de esforços e deflexões para uma placa retangular simplesmente apoiada em seus lados menores e engastada nos lados maiores com carga q distribuída, $\nu = 0$ | 73 |
| Tabela 4.12 Desvios percentuais para uma placa retangular simplesmente apoiada em seus lados menores e engastada nos lados maiores com carga q distribuída, $\nu = 0$ | 73 |

| | |
|---|----|
| Tabela 4.13. Resultados de esforços e deflexões para uma placa retangular simplesmente apoiada em seus lados maiores e engastada nos lados menores com carga q distribuída, $\nu = 0,3$ | 75 |
| Tabela 4.14. Desvios percentuais para uma placa retangular simplesmente apoiada em seus lados maiores e engastada nos lados menores com carga q distribuída, $\nu = 0,3$ | 74 |
| Tabela 4.15. Resultados de esforços e deflexões para uma placa retangular simplesmente apoiada em seus lados maiores e engastada nos lados menores com carga q distribuída, $\nu = 0$ | 76 |
| Tabela 4.16. Desvios percentuais para uma placa retangular simplesmente apoiada em seus lados maiores e engastada nos lados menores com carga q distribuída, $\nu = 0$ | 77 |
| Tabela 4.17 Resultados de esforços e deflexões para uma placa retangular simplesmente apoiada em seus lados maiores e engastada nos lados menores com carga P concentrada, $\nu = 0,3$ | 78 |
| Tabela 4.18. Desvios percentuais para uma placa retangular simplesmente apoiada em seus lados maiores, e engastada nos lados menores com carga P concentrada, $\nu = 0,3$ | 78 |
| Tabela 4.19. Resultados de esforços e deflexões para uma placa retangular simplesmente apoiada em seus lados maiores e engastada nos lados menores com carga P distribuída em uma pequena área, $\nu = 0,3$ | 78 |
| Tabela 4.20. Desvios percentuais para uma placa retangular simplesmente apoiada em seus lados maiores e engastada nos lados menores com carga P distribuída em uma pequena área, $\nu = 0,3$ | 79 |
| Tabela 4.21. Resultados de esforços e deflexões para uma placa retangular engastada em seus lados, com carga q distribuída, $\nu = 0,3$ | 80 |
| Tabela 4.22 Desvios percentuais para uma placa retangular engastada em seus lados, com carga q distribuída, $\nu = 0,3$ | 80 |
| Tabela 4.23. Resultados de esforços e deflexões para uma placa retangular | |

| | |
|---|----|
| engastada em seus lados, com carga P concentrada, $\nu = 0,3$ | 81 |
| Tabela 4.24. Desvios percentuais para uma placa retangular engastada em seus lados, com carga P concentrada, $\nu = 0,3$ | 81 |
| Tabela 4.25. Resultados de esforços e deflexões para uma placa retangular engastada em seus lados, com carga P distribuída em uma pequena área, $\nu = 0,3$ | 82 |
| Tabela 4.26. Desvios percentuais para uma placa retangular engastada em seus lados, com carga P distribuída em uma pequena área, $\nu = 0,3$ | 82 |

RESUMO

O tema deste trabalho é a análise de esforços e deflexões que atuam em placas retangulares finas, sob diversas condições de carregamento e de contorno, com comportamento linear.

No projeto de placas estruturais, normalmente são utilizados vários processos para determinação dos esforços e deflexões. Dentre esses processos temos o Método de Czerny, o Método de Marcus, o Processo de Lévy, o Processo de Navier e Métodos Numéricos.

Os Métodos de Marcus e Czerny são semi-empíricos e os resultados foram obtidos por meio de conhecidas tabelas. Nos Processos de Lévy e Navier os resultados foram obtidos analiticamente para os casos em que as soluções fechadas foram possíveis. No caso dos Métodos Numéricos, desenvolveu-se um software utilizando-se o Método dos Elementos Finitos para obtenção dos resultados.

O objetivo desta dissertação é de se efetuar a comparação dos vários esforços e deflexões, obtidos pelos vários processos e métodos, de placas retangulares finas sob diversas condições de carregamento e de contorno, a partir dos quais se obtém as diversas conclusões.

ABSTRACT

This work deals with the analysis of forces and deflections that actuate in thin rectangular plates under different load and boundary conditions, with a linear behavior.

In the project of structural plates, normally several process are used in order to determine the forces and deflections, for instance, the Czerny Method, the Marcus Method, the Levy Process, the Navier Process and Numerical Methods.

The Marcus and Czerny Methods are semi-empirical and the results were obtained by the use of standardized tables. In the Levy and Czerny processes the results were analytical processed by closed solutions under possible conditions. In the case of Numerical Methods, a software based in the Finite Elements Method were developed in order to get the results.

The aim of this work is to compare the behavior of different forces and deflections of thin rectangular plates under different loads and boundary conditions using different processes and methods of analysis. The conclusions of the work were based on modeling of the results obtained.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Tema

As placas são estruturas diferenciadas em relação às vigas, tendo esforços de flexão em duas direções ortogonais, sendo que há interferência de uma em relação à outra, e são submetidas a carregamentos perpendiculares à superfície. As placas podem ter diversas configurações geométricas e possuem uma espessura constante ou variável de dimensão muito menor que as demais.

A presente dissertação destina-se comparar resultados de esforços e deflexões em placas retangulares delgadas de comportamento linear, sob diversas condições de carregamento e de contorno.

No projeto de placas estruturais, normalmente são utilizados vários processos para determinação de esforços e deflexões. Neste trabalho analisaremos os esforços e deflexões através de processos analíticos pela Teoria da Elasticidade, pelo Método dos Elementos Finitos e por tabelas apresentadas em diversas referências bibliográficas .

1.2 Objetivos, Recursos e Métodos.

O objetivo deste trabalho é estabelecer comparações entre resultados de esforços e deflexões obtidos por processos analíticos, numéricos e semi-empíricos.

O estudo se aplicará à placas retangulares finas de comportamento linear sob carregamento uniformemente distribuído e concentrado, sob diversas condições de contorno.

Para isso utilizar-se-ão cálculos analíticos da Teoria da Elasticidade, programas computacionais por elementos finitos e processos semi-empíricos.

Os cálculos analíticos utilizados da Teoria da Elasticidade escolhidos foram os métodos de Navier e de Lévy. Dentro dos processos computacionais, empregou-se programas desenvolvidos

neste trabalho, usando o Método dos Elementos Finitos. Em relação ao processo semi-empírico utilizou-se os métodos de Marcus e Czerny.

1.3 Plano da dissertação

No capítulo 2, será apresentada a formulação do problema para obter as equações diferenciais de equilíbrio de placas finas de comportamento linear, ou seja, esforços, relações entre deslocamentos e deformações, tensões e a equação de Sophie-Germain-Lagrange, assim como serão apresentadas as diversas condições de contorno existentes em placas.

O capítulo 3, apresenta as soluções de placas retangulares sob carga uniformemente distribuída e carga concentrada com diversas condições de contorno, através das soluções analíticas de Navier e de Lévy, obtendo-se assim os esforços e deflexões.

Apresenta-se no capítulo 4 o estudo de caso utilizado para a análise comparativa em placas retangulares sob diversas condições de carregamento e de contorno. Utilizam-se as soluções analíticas de Navier e Lévy, bem como as soluções de Marcus e Czerny, juntando-se a elas os resultados encontrados pelas soluções do Método dos Elementos Finitos. Além disso são feitas comparações entre os métodos para obter as conclusões finais.

No capítulo 5, são apresentadas as conclusões e algumas sugestões de propostas para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO DE PLACAS

2.1 Introdução

Apresenta-se neste capítulo a formulação matemática do problema de equilíbrio das placas finas de comportamento geometricamente e fisicamente linear.

Placas são corpos limitados por superfícies, que podem ser paralelas ou não, separadas por uma distância h , cujo valor pode ser constante ou não; porém sendo muito inferior que o menor valor das dimensões da superfície. Define-se como placa de comportamento geometricamente linear quando as rotações de suas seções são inferiores a 10^{-3} rd e de comportamento fisicamente linear quando seguem a lei de Hooke. Os carregamentos em placas são perpendiculares à superfície, conforme a figura (2.1).

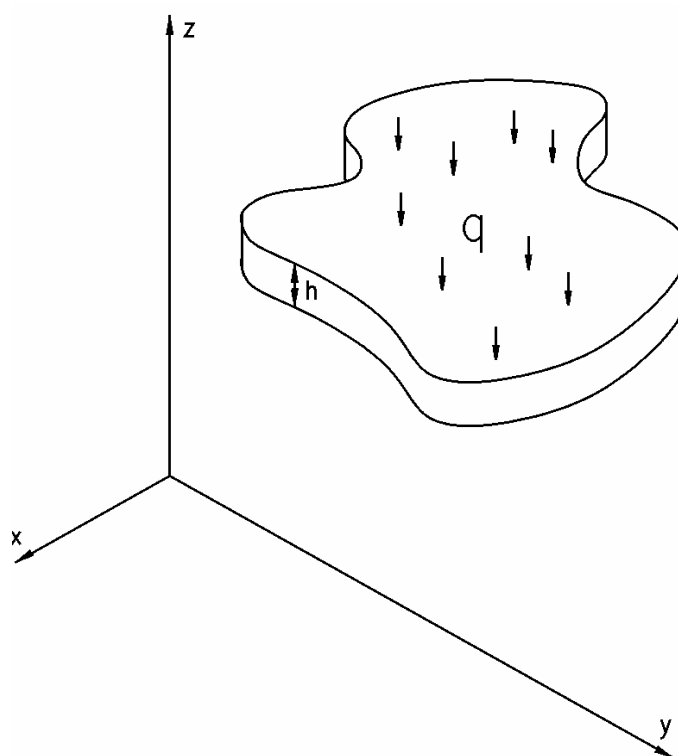


Figura (2.1) Exemplo de placa sob carregamento

Quando os carregamentos são paralelos à superfície média, a estrutura se comporta como uma chapa e se tem outras formulações matemáticas.

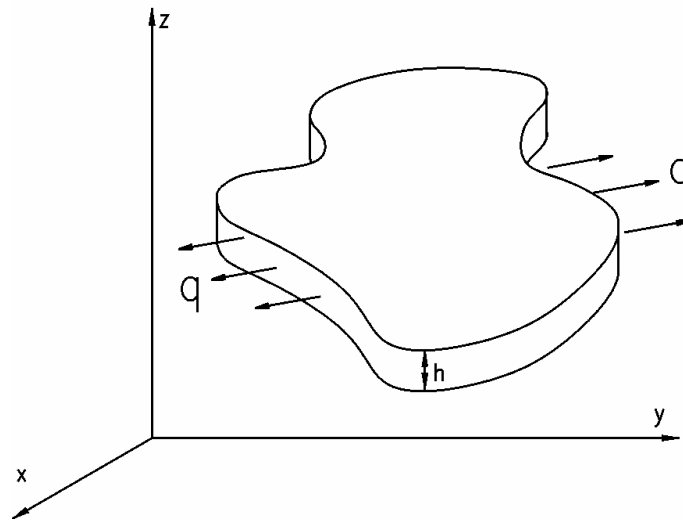


Figura (2.2) Chapa

2.2 Tipos de Placas

As placas podem ser de diferentes formatos, sob vários tipos de carregamentos e de condições de contorno, apresentando pequenos ou grandes deslocamentos lineares e angulares.

2.2.1 Placas Finas com Pequenos Deslocamentos

Uma placa é considerada fina com pequenos deslocamentos, quando as seguintes hipóteses forem admitidas:

- A relação entre a espessura “h” da placa e a menor dimensão da superfície for inferior a 5%, ou seja, $(h/L) < 1/20$;
- A relação entre a deflexão vertical w e a espessura “h” da placa é inferior a 20%, ou seja, $(w/h) < 1/5$.
- As rotações θ , são da ordem de 10^{-3} radianos.

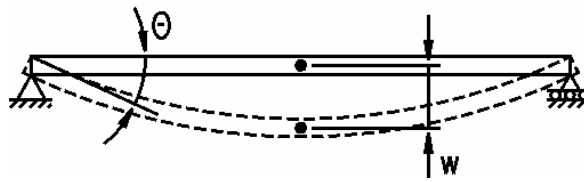


Figura (2.3) Vista lateral-Deflexão e Rotação

2.2.2 Placas Finas com Grandes Deslocamentos

Uma placa é considerada fina com grandes deslocamentos quando as seguintes hipóteses forem admitidas.

- A relação entre a espessura “h” da placa e a menor dimensão dos lados for inferior a 5%, ou seja, $(h/L) < 1/20$;
- A relação entre a deflexão w e a espessura “h” da placa é superior a 20%, ou seja, $(w/h) > 1/5$;
- As rotações θ , são da ordem de 10^{-3} radianos.

2.2.3 Placas Espessas

Uma placa é considerada espessa quando suas dimensões são da mesma ordem de grandeza.

2.3 Estudo das Placas Finas com Pequenos Deslocamentos

Considerar-se-á no presente trabalho que a placa é fina e com pequenos deslocamentos quando apresentar hipóteses de Kirchhoff, quais sejam:

- O material da placa é homogêneo e isotrópico, e obedece a lei de Hooke;
- A placa é fina; ou seja $(h/L) < 1/20$;
- A deflexão máxima vertical é inferior a 20% do valor da espessura e as rotações são da ordem de 10^{-3} radianos;
- As tensões normais à superfície média são desprezíveis quando comparadas com as demais tensões;
- Não há deformações na superfície média de placa, ela é inextensível. Nela tensões de tração e de compressão, são nulas;

- f) A superfície média da placa (x,y) constitui o plano neutro.
- g) As normais à superfície neutra antes da deformação se conservam normais à superfície após à deformação, não havendo variação na espessura “ h ” da placa.

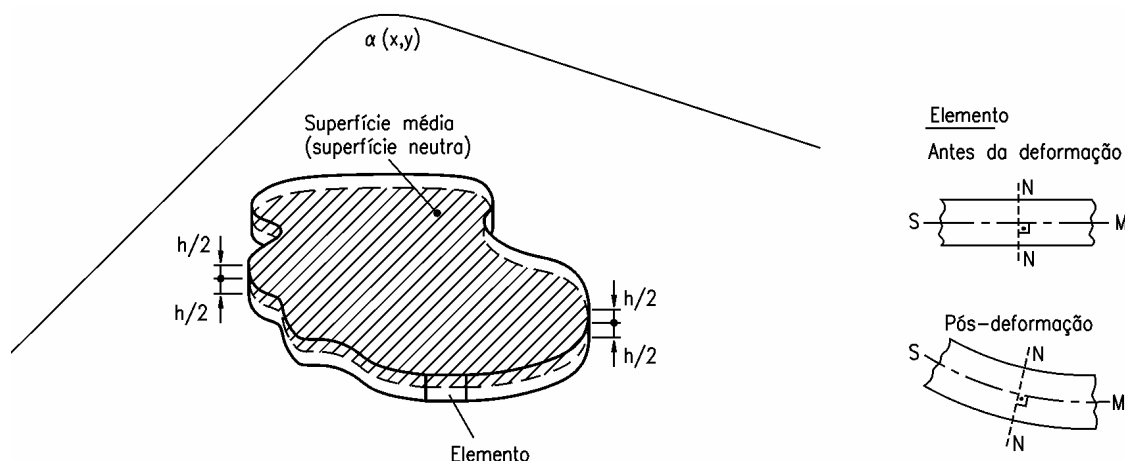


Figura (2.4) Superfície média ou neutra

2.4 Deslocamentos num Ponto qualquer da Placa (u, v, w)

As componentes de deslocamentos u, v e w de um ponto qualquer da placa, respectivamente nas direções x, y e z , serão calculadas em função das coordenadas do ponto e das tensões que nele atuam. A figura (2.5) mostra os cortes S_1 e S_2 nas direções x e y respectivamente.

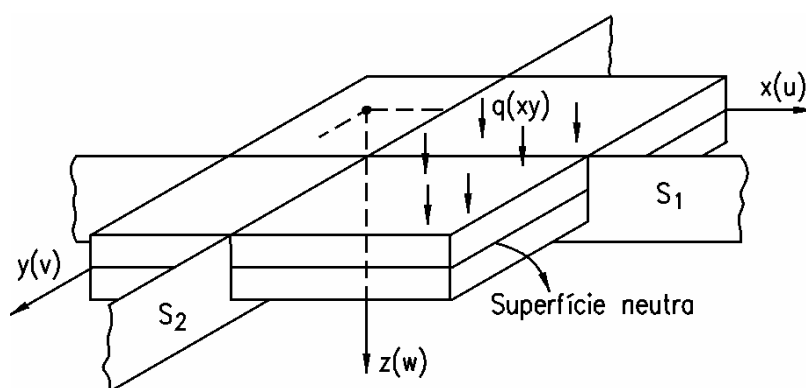


Figura (2.5) Planos de corte S_1 e S_2 .

Pelas hipóteses consideradas, a superfície neutra (média) é inextensível e as deformações ao longo de z , na altura h , serão nulas. Pode-se, portanto exprimir as componentes; u, v e w de um ponto qualquer da placa em função das componentes dos deslocamentos da superfície média.

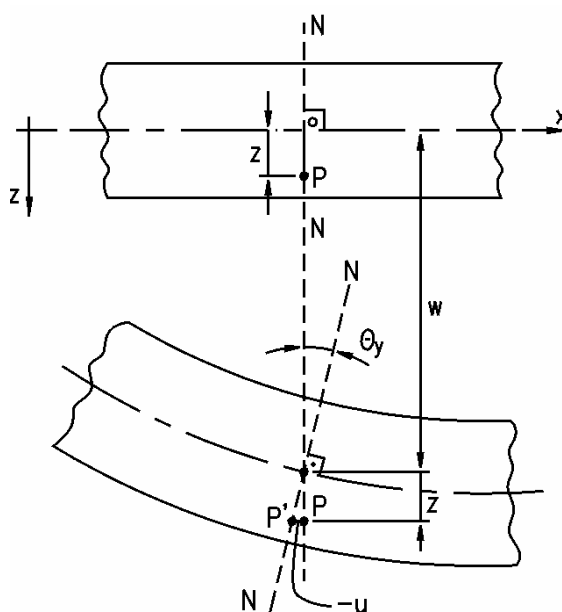


Fig. (2.6) Deslocamento de um ponto P

A figura (2.6) mostra que o deslocamento vertical w do ponto P depende apenas de x e y , já que em z não há deformações, podendo ser escrita a equação da superfície média deformada na forma:

$$w=w(x,y) \quad (1)$$

Os deslocamentos u e v dependem das três direções, ou seja:

$$u=u(x,y,z) \quad (2)$$

$$v=v(x,y,z) \quad (3)$$

Da figura podemos escrever que:

$$\operatorname{tg} \theta_y = -\frac{u}{z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4)$$

Como o ângulo θ_y é pequeno tem-se:

$$\theta_y = -\frac{u}{z} = \frac{\partial w}{\partial x} \text{ (rotação em torno do eixo x)} \quad (5)$$

Daí conclui-se que:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (6)$$

Analogamente tem-se que:

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (7)$$

2.4.1 Relações entre Deslocamentos e Deformações

As componentes de deformações podem ser obtidas a partir de suas relações com os deslocamentos, ou seja:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (8)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (9)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (10)$$

Não havendo variação na espessura, vem que:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

Os ângulos de distorção nos planos xz e yz serão encontrados da mesma forma que a equação (10):

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

2.4.2 Tensões em um Ponto P(x,y,z)

As tensões correspondentes no ponto P (figura 2.7) podem ser obtidas a partir de suas relações com as deformações, decorrentes da Lei de Hooke (hipótese a) e do fato de $\sigma_z \approx 0$ (hipótese d):

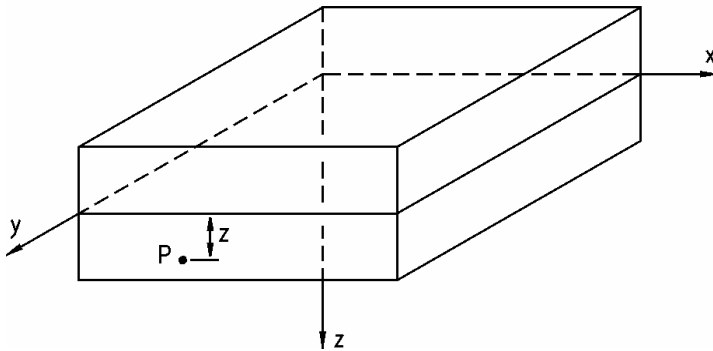


Figura (2.7) Localização do ponto P

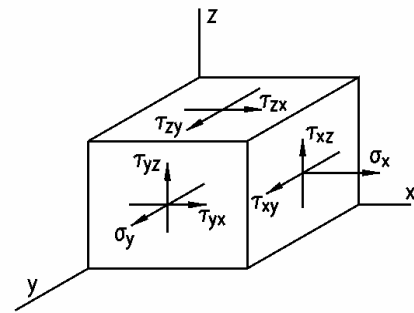


Figura (2.8) Tensões no ponto P

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (14)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (15)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (16)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (17)$$

Analogamente, tem-se que:

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \quad (18)$$

Das equações (8) e (9) vem que:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

ou

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (19)$$

Assim como:

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (20)$$

e

$$\tau_{xy} = \frac{-Ez}{1+\nu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial_x \partial_y} \quad (21)$$

As equações (19), (20) e (21) mostram que todas as tensões num ponto genérico da placa ficam determinadas pelo conhecimento da função $w=w(x,y)$.

2.4.3 Esforços por Unidade de Comprimento

Os momentos fletores, momentos torçores e esforços cortantes em placas serão obtidos por unidade de comprimento.

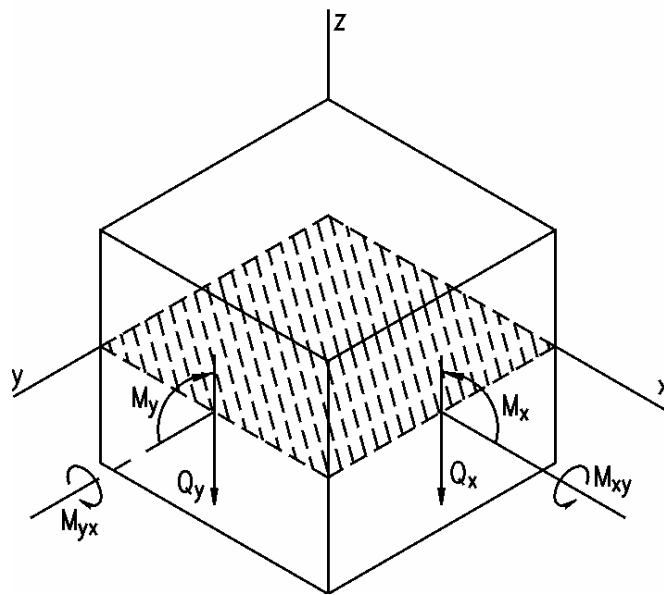


Figura (2.9) Ponto P sob os esforços

A figura (2.9) mostra os esforços aplicados sobre um ponto P considerando que:

M_x = momento fletindo a direção x, sendo positivo ao tracionar fibras inferiores.

M_y = momento fletindo a direção y, sendo positivo ao tracionar fibras inferiores.

Q_x = esforço cortante variando na direção x.

Q_y = esforço cortante variando na direção y.

M_{xy} = momento torçor girando a face yz em torno de x, sendo positivo ao concordar com o eixo x.

M_{yx} = momento torçor girando a face xz em torno de y, sendo positivo ao concordar com o eixo y.

2.4.3.1 Cálculo dos momentos fletores M_x e M_y

Isolado o ponto P faz-se a composição dos momentos fletores através das tensões normais.

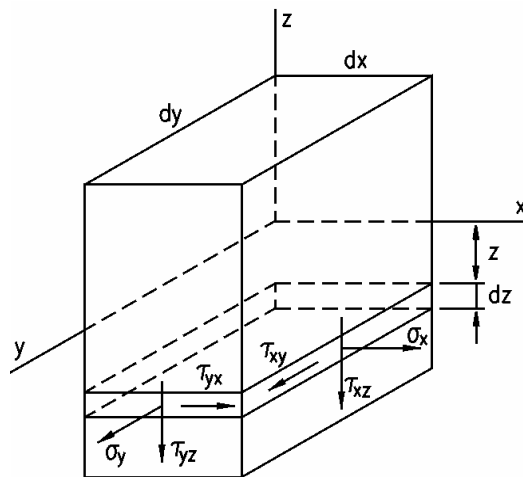


Figura (2.10) Tensões normais e tangenciais no ponto P.

Iniciando com o momento M_x por unidade de comprimento provocado pela tensão σ_x , decorre:

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x (z \cdot d_y \cdot d_z) \quad (22)$$

Como os esforços solicitantes serão por unidade de comprimento, tem-se que:

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} z \sigma_x dz \quad (23)$$

Como:

$$\sigma_x = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

temos:

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{-Ez}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] z \cdot dz \quad (24)$$

Integrando-se:

$$M_x = \frac{-Ez^3}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{-Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

Ou

$$M_x = \frac{-Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (25)$$

Onde:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (26)$$

é definido como módulo de rigidez á flexão da placa.

Assim:

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (27)$$

Analogamente, tem-se que:

$$M_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (28)$$

2.4.3.2 Cálculo do momento de torção M_{xy}

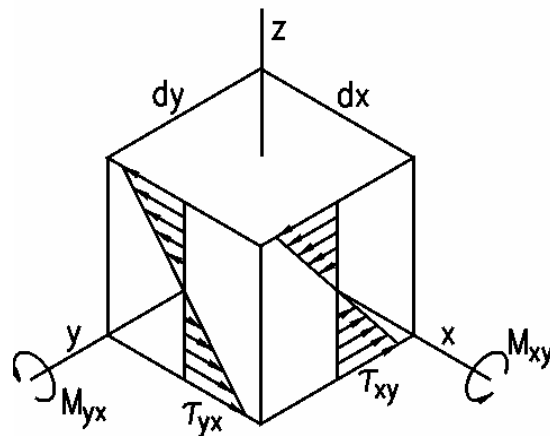


Figura (2.11) Ponto P sujeito à ação de momentos torçores

A figura 2.11 mostra o ponto P sujeito á ação de momentos torsores, assim o momento M_{xy} de torção por unidade de comprimento gerado pela tensão de cisalhamento τ_{xy} produz:

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz \quad (29)$$

Da equação (21) vem que:

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} -z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{E \cdot dz}{(1 + \nu)} \quad (30)$$

ou

$$M_{xy} = D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (31)$$

Deve-se observar que haver equilíbrio $M_{xy} = -M_{yx}$

2.4.3.3 Cálculo dos esforços cortantes

Da figura (2.10) podemos escrever:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad (32)$$

e que:

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (33)$$

As expressões (27), (28), (31), (32) e (33) mostram também que os esforços solicitantes em um ponto genérico ficam inteiramente determinados pelo conhecimento da função $w=w(x,y)$.

2.5 Equações Diferenciais de Equilíbrio

Para determinação da função w , basta agora impor as condições de equilíbrio. Indicando com Q_x e Q_y as forças cortantes por unidade de comprimento, por M_x , M_y , M_{xy} , os momentos de flexão e torção e por $q(x,y)$ o carregamento suposto distribuído, teremos:

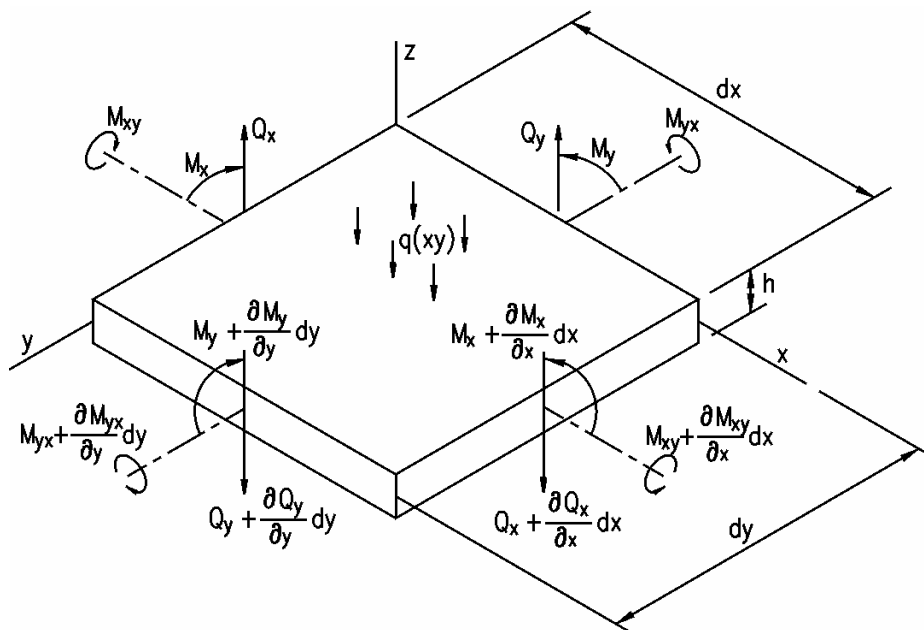


Figura (2.12) Elemento de uma placa sujeito a ação de esforços

2.5.1 Equilíbrio de Forças na Vertical (z)

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx - Q_y dx + q(x, y) dx dy = 0$$

Simplificando, resulta:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x, y) = 0 \quad (34)$$

2.5.2 Equilíbrio de Momentos em torno de y

$$M_x dy - \left(M_x + \frac{\partial M_x dx}{\partial x}\right) dy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x dx}{\partial x}\right) dy dx + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y dy}{\partial y}\right) dx \frac{dx}{2} - Q_y dx \frac{dx}{2} + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx} dy}{\partial y}\right) dx - M_{yx} dx + q dx dy \frac{dx}{2} = 0$$

Desprezando os termos de ordem superior e fazendo

$$M_{yx} = -M_{xy}$$

teremos:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \quad (35)$$

Analogamente acha-se que:

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y \quad (36)$$

2.6 Determinação da Equação de Sophie-Germain-Lagrange

As relações (35) e (36) permitem obter Q_x e Q_y uma vez conhecidos M_x , M_y e M_{xy} , e, portanto, a partir do conhecimento de $w=w(x,y)$.

A partir de (35) temos:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (37)$$

e de (36):

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} \quad (38)$$

De (37) e (38) em (34) vem que:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q(x, y) = 0 \quad (39)$$

Daí tem-se:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x, y) \quad (40)$$

Com as expressões (27), (28) e (31) obtemos:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = -D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \quad (41)$$

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \quad (42)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = D(1 - \nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (43)$$

Substituindo as equações (41), (42) e (43) em (40), vem:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (44)$$

Representando de outra forma, vem que:

$$\nabla^4 w = \frac{q(x, y)}{D} \quad (45)$$

Esta é a equação de Sophie-Germain-Lagrange, a relação fundamental de teoria das placas elásticas delgadas.

2.7 Relações entre Esforços e Deslocamentos

Das expressões (27), (28), (31), (35) e (36), podemos escrever:

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w)$$

e

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w)$$

2.8 Distribuição das Tensões Normais

As tensões normais σ_x e σ_y devidas aos momentos fletores M_x e M_y variam linearmente com z , conforme mostrado na figura a seguir.

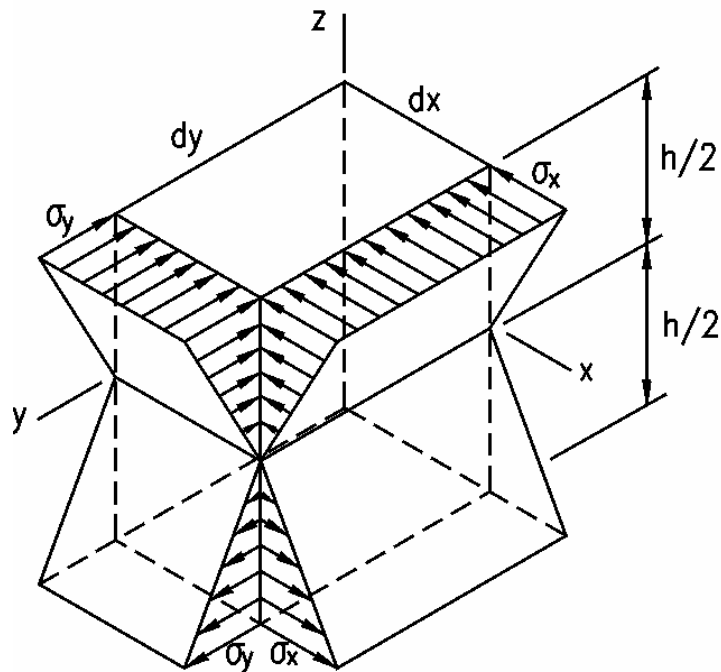


Figura (2.13) Distribuição das tensões normais

Como:

$$\sigma_x = \frac{E.z}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

e

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$\sigma_x = \frac{12.M_x.z}{h^3} \quad (46)$$

Analogamente,

$$\sigma_y = \frac{12.M_y.z}{h^3} \quad (47)$$

2.9. Distribuição das Tensões Tangenciais

As tensões de cisalhamento são originadas por dois esforços, momentos torçores e esforços cortantes.

2.9.1 Distribuição das tensões tangenciais devido ao momento torsor

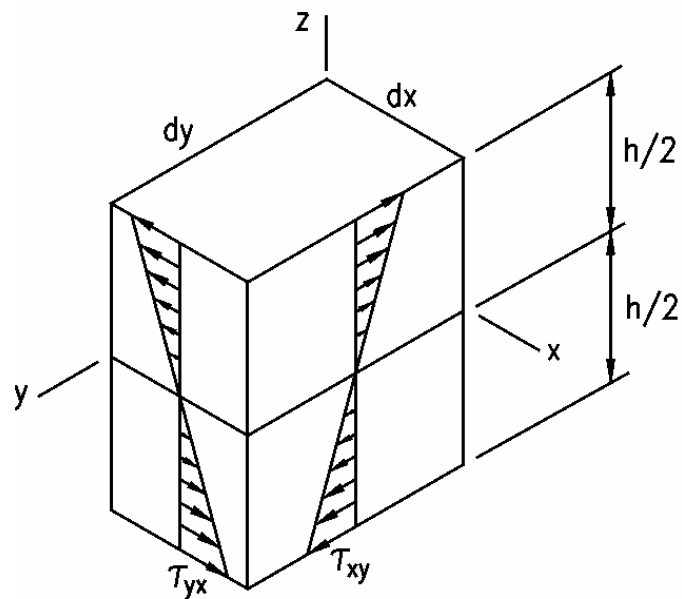


Fig. (2.14) Distribuição das tensões tangenciais, devido ao momento torçor.

De forma semelhante à flexão vem:

$$\tau_{xy} = \frac{12M_{xy} \cdot z}{h^3} \tag{48}$$

2.9.2 Distribuição das Tensões Tangenciais devido ao Esforço Cortante

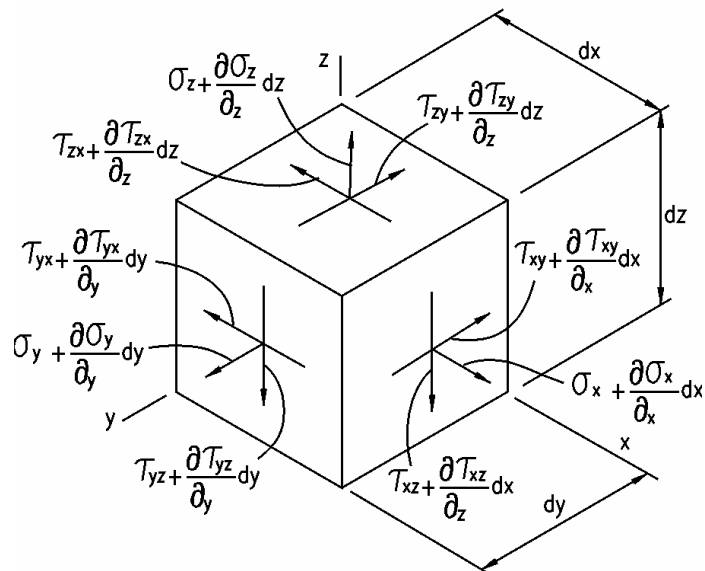


Figura (2.15) Tensões tangenciais e normais aplicadas no ponto P

Através do equilíbrio de forças na direção x, obtém-se:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (49)$$

Derivando-se as expressões (46) e (48) e substituindo-se na expressão anterior temos:

$$\frac{12.z}{h^3} \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{12.z}{h^3} \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{12.z}{h^3} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (50)$$

Como:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

vem que:

$$-12.z \frac{Q_x}{h^3} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (51)$$

Integrando-se:

$$\tau_{xz} = \int -\frac{12Q_x \cdot z}{h^3} dz = -6 \frac{Q_x \cdot z^2}{h^3} + f(x, y) \quad (52)$$

Usando as condições de contorno para $z = \pm \frac{h}{2}$, tem-se que:

$$\tau_{xz} = 0 \quad (53)$$

e

$$f(x, y) = \frac{3 Q_x}{2 h} \quad (54)$$

Portanto:

$$\tau_{xz} = \frac{3 Q_x}{2 h} \left[1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (55)$$

Analogamente tem-se: $\tau_{yz} = \frac{3 Q_y}{2 h} \left[1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]$ (56)

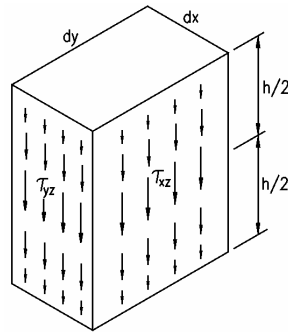


Figura (2.16) Distribuição das tensões tangenciais

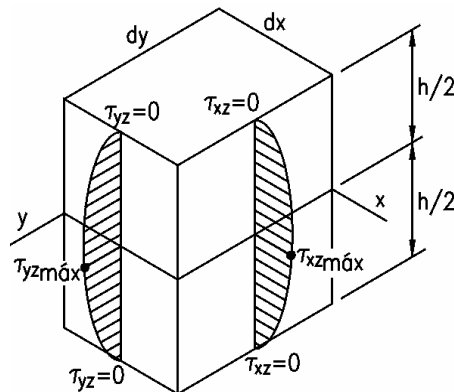


Figura (2.17) Variação das tensões tangenciais

2.10 Condições de Contorno.

Mostra-se aqui algumas condições de contorno, e os valores de esforços, deflexões e rotações impostos por elas.

2.10.1 Placa Apoiada nos Quatro Lados.

Sendo os lados da placa simplesmente apoiados, a superfície média deformada deve neles apresentar deslocamento vertical nulo, e deve ainda girar livremente em torno dos mesmos, o que significa que os momentos fletores são nulos nos lados. Se o lado for dado por $x=a$, as condições são:

$$(w)_{x=a} = 0$$

e

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=a} = 0$$

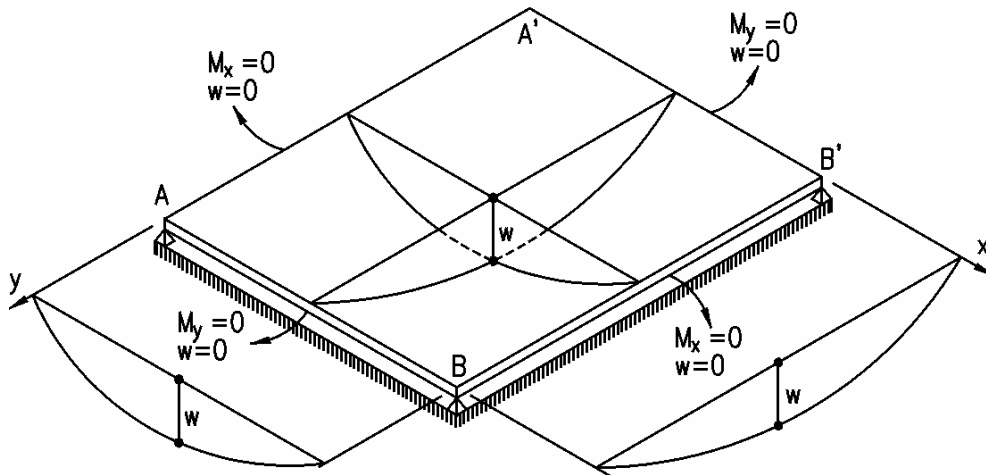


Figura (2.18) Placa simplesmente apoiada nos quatro lados

2.10.2 Placa Engastada nos Quatro Lados.

Sendo a placa engastada em todos os lados, a superfície média deformada deve apresentar deslocamento vertical nulo e rotação nula em todo contorno. Se por exemplo, o lado for dado por $x=a$, as condições são as seguintes:

$$(w)_{x=a} = 0$$

e

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=a} = 0$$

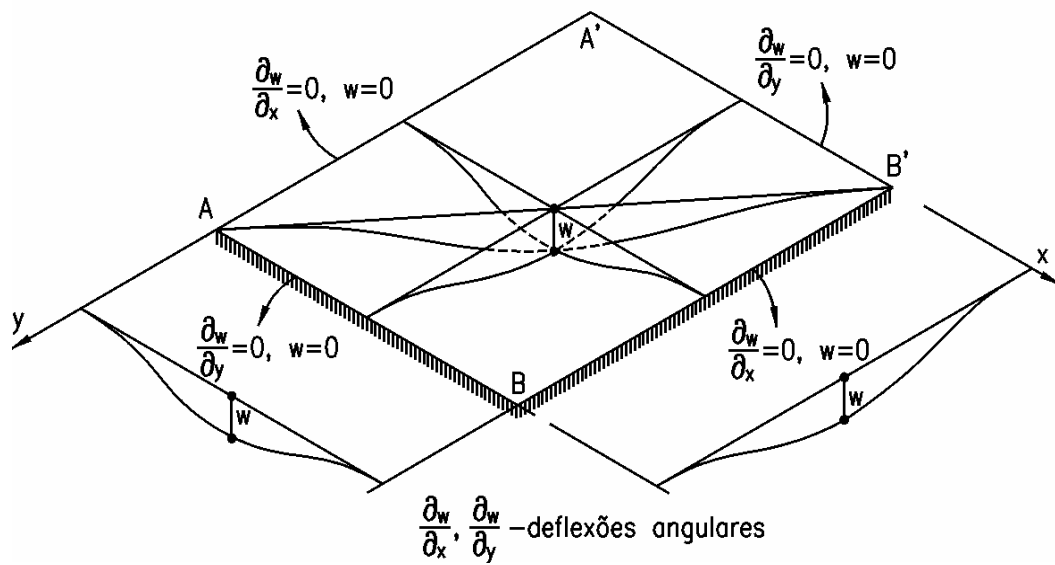


Figura (2.19) Placa engastada nos quatro lados

2.10.3 Placa em balanço.

Sendo um lado livre, no mesmo deve-se ter momento fletor nulo, força cortante nula e momento de torção nulo. Se o lado livre for dado por $x=a$, temos:

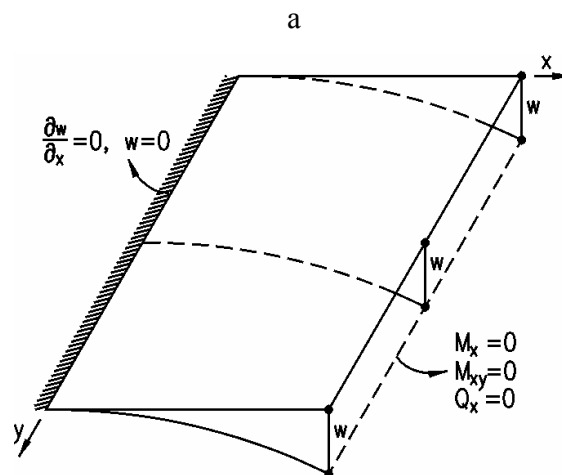


Figura (2.20) Placa engastada e livre

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DAS DEFLEXÕES E ESFORÇOS EM PLACAS

3.1 Introdução

Neste capítulo analisaremos as placas retangulares sob diversas condições de carregamento e de contorno, através dos métodos de Navier e M. Lévy.

3.2 Solução de Navier para Placas Retangulares Simplesmente Apoiadas

Apresentamos a análise de placas retangulares simplesmente apoiadas no contorno e submetidas a carregamentos distribuídos sobre a superfície média, na forma senoidal.

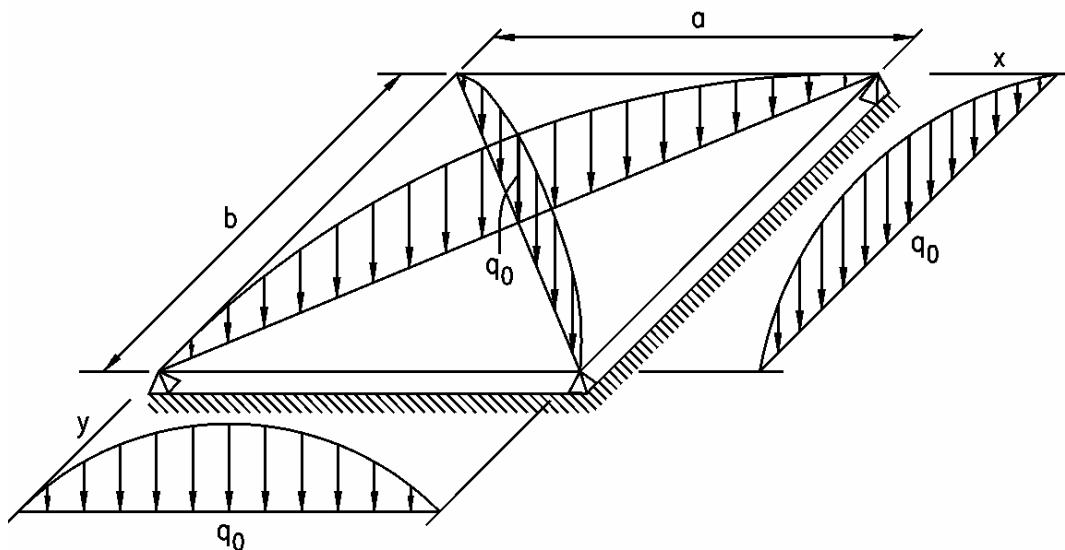


Figura (3.1) Placa simplesmente apoiada sob carga senoidal

Suponhamos que a carga $q(x,y)$ senoidal aplicada na superfície média da placa seja dada pela seguinte equação:

$$q(x, y) = q_0 \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot y}{b} \quad (57)$$

onde q_0 é a intensidade do carregamento no centro da placa.

A equação diferencial desta placa pode ser escrita na forma:

$$\nabla^4 w = \frac{q(x, y)}{D} = \frac{q_0}{D} \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot y}{b} \quad (58)$$

A solução da equação diferencial acima deve satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$\text{Para } x = 0, w = 0 \quad \text{e} \quad M_x = 0$$

$$\text{Para } x = a, w = 0 \quad \text{e} \quad M_x = 0$$

$$\text{Para } y = 0, w = 0 \quad \text{e} \quad M_y = 0$$

$$\text{Para } y = b, w = 0 \quad \text{e} \quad M_y = 0$$

Pode-se verificar que as condições de contorno são satisfeitas pela solução:

$$w = C \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot y}{b} \quad (59)$$

onde a constante C é escolhida de modo que a solução (59) também satisfaça a equação diferencial (58).

Assim:

$$\nabla^2 w = -C \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot y}{b}$$

e

$$\nabla^4 w = \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 C \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot y}{b}$$

Substituindo na equação (58) vem:

$$\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 C = \frac{q_0}{D} \quad (60)$$

Logo:

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (61)$$

Calculando-se os momentos M_x , M_y e M_{xy} pelas expressões (27), (28) e (31), obtemos:

$$M_x = \frac{q_0 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (62)$$

$$M_y = \frac{q_0 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2} \right)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (63)$$

$$M_{xy} = - \frac{q_0 (1 - \nu)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (64)$$

A deflexão máxima e os momentos fletores máximos ocorrem no centro da placa e para

$$x = a/2$$

e

$$y = b/2,$$

tem-se:

$$w_{máx} = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \quad (65)$$

$$M_{x\text{ máx}} = \frac{q_0 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \quad (66)$$

$$M_{y\text{ máx}} = \frac{q_0 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2} \right)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \quad (67)$$

Ao fazer as mesmas substituições em M_{xy} facilmente tem-se que o seu valor será nulo, por conseguinte:

$$M_{yx} = 0$$

No caso particular de placas quadradas, ($a = b$) tem-se que;

$$w_{\text{máx}} = \frac{q_0 \cdot a^4}{4\pi^4 D} \quad (68)$$

$$M_{x\text{ máx}} = M_{y\text{ máx}} = \frac{q_0(1+\nu)a^2}{4\pi^2} \quad (69)$$

Das equações (35) e (36), tem-se que os valores dos cortantes são:

$$Q_x = \frac{q_0}{\pi \cdot a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \text{sen} \frac{\pi \cdot y}{b} \cos \frac{\pi \cdot x}{a} \quad (70)$$

$$Q_y = \frac{q_0}{\pi \cdot b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \text{sen} \frac{\pi \cdot x}{a} \cos \frac{\pi \cdot y}{b} \quad (71)$$

Se a distribuição da carga atuando segundo a normal à superfície média for dada pela expressão

$$q = q_o \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad (72)$$

onde m e n são números inteiros, por um procedimento análogo ao visto anteriormente teremos:

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} q_o \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \quad (73)$$

Como a equação diferencial (58) é linear podemos superpor soluções do tipo (73). Assim, se a placa estiver sujeita ao carregamento do tipo

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (74)$$

teremos como solução para os pontos da superfície média da placa

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \quad (75)$$

Para se determinar os coeficientes q_{mn} devemos multiplicar ambos os membros da série (74) por $\operatorname{sen} \frac{m'\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n'\pi y}{b} dx dy$ e integrar em relação a x e y, ou seja:

$$\int_0^a \int_0^b q(x, y) \operatorname{sen} \frac{m'\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n'\pi y}{b} dx dy = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^b q_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m'\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{n'\pi y}{b} dx dy \quad (76)$$

Devido a ortogonalidade das funções seno, temos:

$$\int_0^a \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m'\pi x}{a} dx = 0 \quad \text{para } m \neq m' \quad (77)$$

e

$$\int_0^a \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m'\pi x}{a} dx = a/2 \quad \text{para } m = m' \quad (78)$$

assim como:

$$\int_0^b \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{m'\pi y}{b} dy = 0 \quad \text{para } m \neq m' \quad (79)$$

e

$$\int_0^b \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{m'\pi y}{b} dy = b/2 \quad \text{para } m = m' \quad (80)$$

Conseqüentemente,

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \cdot \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (81)$$

Assim:

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{m,n} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (82)$$

Se a placa estiver sujeita a uma carga uniformemente distribuída q_0 , utilizando-se as expressões (74) e (81), teremos:

$$q_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (83)$$

onde:

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

ou

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{\pi^2 mn} [-\cos m\pi + 1][-\cos n\pi + 1]$$

Para m e n pares temos $q_{mn} = 0$ e para m e n ímpares temos $q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn}$ (84)

Substituindo esse valor de q_{mn} na série (82), resulta:

$$w = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{m.n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (85)$$

onde $m, n = 1, 3, 5, \dots$

Introduzindo a solução (85) nas expressões

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$M_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

obtemos:

$$M_x = \frac{16q_0}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \nu \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]}{m.n \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \text{sen} \frac{m\pi.x}{a} \text{sen} \frac{n.\pi.y}{b} \quad (86)$$

$$M_y = \frac{16q_0}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\left(\frac{n}{b} \right)^2 + \nu \left(\frac{m}{a} \right)^2 \right]}{m.n \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \text{sen} \frac{m\pi.x}{a} \text{sen} \frac{n.\pi.y}{b} \quad (87)$$

$$M_{xy} = -\frac{16q_0(1-\nu)}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\cos \frac{m\pi.x}{a} \cos \frac{n.\pi.y}{b} \right]}{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (88)$$

Das equações acima, podemos verificar que deflexão w e os momentos M_x e M_y são nulos para $x=0$ e $x=a$, assim como para $y=0$ e $y=b$ e alcançam valores máximos no centro da placa. Da mesma forma o momento torçor é nulo nos planos de simetria, $x = \frac{a}{2}$ e $y = \frac{b}{2}$ (centro da placa) e será diferente de zero nos lados apoiados.

No caso de uma placa quadrada $a = b$, de material $\nu = 0,3$ e ao considerar $m = 1$ e $n = 1$, ou seja apenas o primeiro termo da série (85), o valor da deflexão máxima será (Timoshenko, W-Krieger, Theory Plates and Shells, pg110):

$$w_{m\acute{a}x} = 0,00416 \frac{q_0 \cdot a^4}{D} \quad (89)$$

A convergência rápida da série (85) pode ser verificada retendo-se os quatro primeiros termos da série ($m=1, n=1,3$; $m=3, n=1,3$). Nesse caso o resultado será (mesmas página e referência acima).

$$w_{M\acute{A}X} = 0,00406 \frac{q_0 \cdot a^4}{D} \quad (90)$$

Os momentos fletores máximos no centro da placa, considerando-se apenas o primeiro termo das séries (86) e (87), serão:

$$(M_x)_{m\acute{a}x} = (M_y)_{m\acute{a}x} = 0,0534q_0 \cdot a^2 \quad (91)$$

Considerando os quatro primeiros termos, vem:

$$(M_x)_{m\acute{a}x} = (M_{yI})_{m\acute{a}x} = 0,0469q_0 \cdot a^2 \quad (92)$$

Os resultados acima mostram que as séries dos momentos não possuem uma convergência tão rápida quanto à série das deflexões.

As tensões máximas, obtidas pelas expressões (45) e (46), são dadas por:

$$(\sigma_x)_{m\acute{a}x} = (\sigma_y)_{m\acute{a}x} = 0,281q_0 \frac{a^2}{h^2} \quad (93)$$

3.3 Placa Retangular Apoiada nos Quatro Lados sujeita a uma Força Concentrada

Utilizando-se uma placa simplesmente apoiada sujeita a uma carga P uniformemente distribuída sobre a área 4cd pode-se desenvolver o seguinte equacionamento.

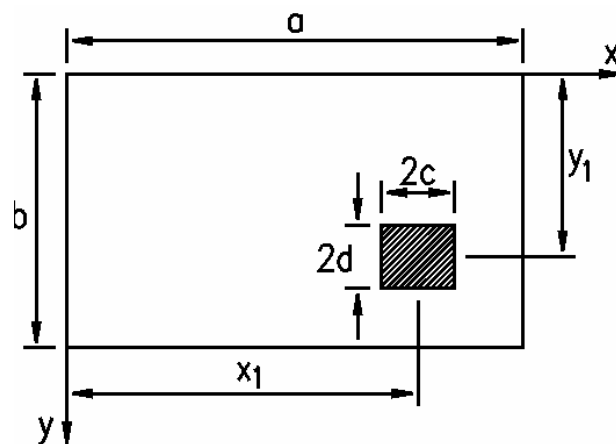


Figura (3.2) Carga P distribuída uniformemente sobre a área 4cd

Substituindo na expressão (81)

$$q(x, y) = \frac{P}{4cd} \quad (94)$$

e integrando-se vem:

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{x_1-c}^{x_1+c} \int_{y_1-d}^{y_1+d} \frac{P}{4cd} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (95)$$

Logo:

$$q_{mn} = \frac{4P}{\pi^2 mn cd} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi c}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi d}{b} \quad (96)$$

Fazendo-se: $x_1 = \frac{a}{2}$, $y_1 = \frac{b}{2}$, $c = \frac{a}{2}$, $d = \frac{b}{2}$, a expressão acima se torna:

$$q_{mn} = \frac{16 P}{\pi^2 mn ab} \quad (97)$$

Substituindo-se q_{mn} dado por (96) na série (75) temos a deflexão da superfície média da placa.

Ainda, a expressão (96) pode ser escrita na forma:

$$q_{mn} = \frac{4P}{(a.b)} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi c}{a}}{\frac{m\pi c}{a}} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi d}{b}}{\frac{n\pi d}{b}} \quad (98)$$

Se fizermos c e d tender a zero resulta:

$$q_{mn} = \frac{4P}{(a.b)} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \quad (99)$$

Substituindo esse resultado na série (82), teremos:

$$w = \frac{4.P}{\pi^4 Dab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (100)$$

O princípio da superposição de efeitos pode ser utilizado para se obter a deflexão de placas simplesmente apoiadas sujeitas a vários tipos de carregamentos.

Se o carregamento P estiver aplicado no centro da placa,

$$x_1 = \frac{a}{2},$$

$$y_1 = \frac{a}{2},$$

a série se reduz a:

$$w = \frac{4.P}{\pi^4 Dab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\left(\frac{m+n}{2}-1\right)} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (101)$$

onde m, n=1,3, 5,...

Quando a placa for quadrada $a = b$ o valor da deflexão máxima será:

$$w_{MÁX} = \frac{4Pa^2}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} \quad (102)$$

Retendo-se os nove primeiros termos da série, obtemos:

$$w_{MÁX} = \frac{0,01142Pa^2}{D} \quad (103)$$

3.4 Solução de M. Lévy para Placa Simplesmente Apoiada com Carga Uniformemente Distribuída.

A necessidade de um processo alternativo em relação à resolução de Navier, é justificada pelo fato das séries que representam os valores dos momentos fletores não convergirem de modo rápido para um resultado de precisão satisfatória. O processo de M. Lévy resulta em convergências mais rápidas, chegando com precisão aceitável, às vezes com apenas o uso do 1º termo da série. O método de M. Lévy é aplicável à flexão de placas retangulares com condições de contorno simplesmente apoiadas em dois lados opostos ($x=0$ e $x=a$) e condições de contorno arbitrárias nos outros lados ($y = \pm b/2$). A solução completa é a soma da solução w_h da equação diferencial (44) tornada homogênea com uma solução particular w_p da equação diferencial de (44). Como solução da equação diferencial homogênea, escolhemos:

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (104)$$

onde Y_m é função de y somente e será determinada de modo a satisfazer as condições de contorno nos lados $y = \pm b/2$. Como notamos, a solução (104) satisfaz as condições dos lados $x=0$ e $x=a$ serem simplesmente apoiadas. Substituindo a solução (104) na equação $\nabla^4 w = 0$, obtemos:

$$\sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \left(Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m \right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = 0 \quad (105)$$

Para que a somatória acima seja verdadeira para qualquer valor de x , o primeiro termo deve ser sempre nulo na somatória:

$$Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m = 0 \quad (106)$$

A solução geral dessa equação diferencial é:

$$Y_m = \left[\begin{array}{l} A_m \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + B_m \frac{m\pi y}{a} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \\ C_m y \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + D_m y \frac{m\pi y}{a} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \end{array} \right] \quad (107)$$

Portanto a solução homogênea será:

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\begin{array}{l} A_m \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + B_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \\ C_m y \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + D_m y \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \end{array} \right] \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (108)$$

onde A_m , B_m , C_m e D_m são constantes a serem determinadas.

Como solução particular, da equação diferencial (45), vamos escolher a série:

$$w_p = \sum_{m=1}^{\infty} k_m(y) \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (109)$$

Desenvolvendo o carregamento $q(x,y)$ na série simples

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (110)$$

onde:

$$q_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \text{sen} \frac{m\pi x}{a} dx \quad (111)$$

e substituindo na equação (44) obtemos:

$$k_m^{iv} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 k_m'' + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 k_m = \frac{q_m}{D} \quad (112)$$

A determinação de uma solução particular da equação (111) nos permitirá obter w_p dado na série (108).

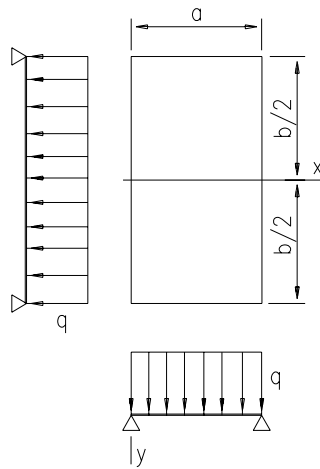


Figura (3.3)-Placa uniformemente carregada

No caso da placa da figura acima com $q(x,y)=q_0$, utilizando a expressão (111), temos $q_m = \frac{4q_0}{m\pi}$, para $m=1,3,5,\dots$

Substituindo esse valor na equação (112), resulta:

$$k_m^{iv} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 k_m'' + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 k_m = \frac{4q_0}{m\pi D}$$

cuja solução particular é dada por:

$$k_m = \frac{4q_0 a^2}{m^5 \pi^5 D}$$

e conseqüentemente pela série (109), tem-se:

$$w_p = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (113)$$

A condição da placa ser simétrica em relação ao eixo x conduz a $A_m=D_m=0$ na equação (108) Assim, somando as soluções (108) e (109), obtemos:

$$w = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{4q_0 a^4}{\pi^5 m^5 D} + B_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + C_m y \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (114)$$

Esta equação satisfaz a equação diferencial (45) e as condições de contorno nos lados

$$x=0$$

e

$$x=a.$$

Impondo agora as condições de contorno

$$w = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

para $\left(y = \pm \frac{b}{2}\right)$:

$$B_m \cosh \alpha_m + C_m \frac{b}{2} \sinh \alpha_m + \frac{4q_0 a^4}{m^5 \pi^5 D} = 0$$

$$2\left(\frac{B_m \alpha_m}{b} + C_m\right) \cosh \alpha_m + C_m \alpha_m \sinh \alpha_m = 0$$

$$\text{onde } \alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

A solução desse sistema nos fornece

$$B_m = -\frac{4q_0 a^4 + m\pi q_0 a^3 b \tanh \alpha_m}{\pi^5 m^5 D \cosh \alpha_m}$$

$$C_m = \frac{2q_0 a^3}{\pi^4 m^4 D \cdot \cosh(\alpha_m)}$$

e conseqüentemente, a solução (114) pode ser escrita como:

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \operatorname{tgh}(\alpha_m) + 2}{2 \cosh(\alpha_m)} \cosh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) + \frac{m\pi y}{2a \cosh(\alpha_m)} \sinh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (115)$$

A deflexão máxima ocorre no centro da placa e é dado por:

$$w_{\max} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \right) \quad (116)$$

Substituindo nessa expressão

$$\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} = \frac{5\pi^5}{2^9 \times 3}$$

obtemos:

$$w_{\max} = \frac{5qa^4}{384D} - \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \right) \left[\frac{\alpha_m \operatorname{tgh}(\alpha_m) + 2}{2 \cosh(\alpha_m)} \right] \quad (117)$$

O primeiro termo dessa série representa a deflexão de uma faixa simplesmente apoiada e os outros termos representam uma série que é rapidamente convergente. No caso de uma placa quadrada, a deflexão é dada por:

$$w_{\max} = \frac{5qa^4}{384D} - \frac{4qa^4}{\pi^5 D} [0,68562 - 0,00025 + \dots] = 0,00406 \frac{qa^4}{D} \quad (118)$$

A deflexão máxima e os momentos máximos podem ser escritos na forma:

$$w_{\max} = \frac{\delta_1 qa^4}{D}, \quad (M_x)_{\max} = \delta_2 q_0 a^2, \quad (M_y)_{\max} = \delta_3 q_0 a^2, \quad \text{para } x=a/2 \text{ e } y=0$$

Onde os valores de δ_1 , δ_2 e δ_3 podem ser tabelados para vários valores de b/a . Estes valores são dados pela tabela 1 (Apêndice A) extraída de Timoshenko, Woinowsky-Krieger (Theory of Plates and Shells).

3.5 Solução de M. Lévy para Placa Simplesmente Apoiada, sob Força Concentrada

Representando a equação de Navier de uma maneira modificada e dependente de uma série simples, tem-se:

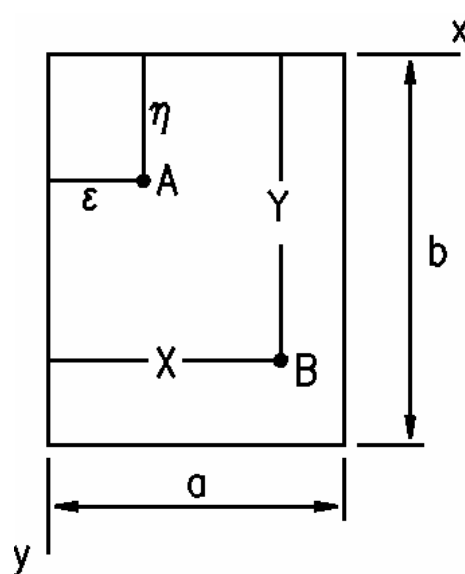


Figura (3.4) Placa sob carga concentrada

$$w = \frac{4Pb^3}{\pi^4 a} \sum_{m=1}^{\infty} S_m \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m \xi}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \quad (119)$$

onde S_m é um coeficiente dado por:

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi_1}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{\left(\frac{m^2 b^2}{a^2} + n^2\right)^2} \quad (120)$$

Introduzindo a notação

$$S'_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi(y-\eta)}{b}\right)}{\left(\frac{m^2 b^2}{a^2} + n^2\right)^2} \quad (121)$$

e

$$S''_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi(y+\eta)}{b}\right)}{\left(\frac{m^2 b^2}{a^2} + n^2\right)^2} \quad (122)$$

podemos escrever a expressão (120) na forma

$$\frac{S'_m - S''_m}{2} = S_m \quad (123)$$

Para calcular as somatórias (121) e (122) podemos usar a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{\alpha^2 + n^2} = -\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\pi}{2\alpha} \frac{\cosh(z(\pi-z))}{\sinh(\pi z)} \quad (124)$$

para $0 \leq z \leq 2\pi$, e sendo S uma função de α , diferenciando o primeiro membro de (124), tem-se:

$$\frac{\partial S(\alpha)}{\partial \alpha} = -2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{(\alpha^2 + n^2)^2} \quad (125)$$

Se derivar o segundo membro (124) vem

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{(\alpha^2 + n^2)^2} &= -\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial S(\alpha)}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2\alpha^4} + \frac{\pi}{4\alpha^3} \frac{\cosh(\pi-z)}{\sinh \pi \alpha} - \frac{\pi(\pi-z)}{4\alpha^2} - \frac{\sinh \alpha(\pi-z)}{\sinh \pi \alpha} + \\ &+ \frac{\pi^2}{4\alpha^2} \frac{\cosh \alpha(\pi-z) \cosh(\pi \alpha)}{\sinh^2 \pi \alpha} \end{aligned} \quad (126)$$

Para obter os valores das expressões (121) e (122) escrevemos

$$z = \frac{\pi}{b}(y - \xi_1) \quad (127)$$

$$z = \frac{\pi}{b}(y + \xi_1) \quad (128)$$

onde $\alpha = \frac{mb}{a}$

Assim tem-se a seguinte expressão para a deflexão da placa:

$$w = \frac{Pa^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[1 + \beta_m \coth(\beta_m) - \frac{\beta_m y_1}{b} \coth \frac{\beta_m y_1}{b} - \frac{\beta_m \eta}{b} \coth \frac{\beta_m \eta}{b} \right] \cdot \left[\frac{\sinh \frac{\beta_m \eta}{b} \sinh \frac{\beta_m y_1}{b} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \sinh \beta_m} \right] \quad (129)$$

em que

$$\beta_m = \frac{m\pi b}{a}, \quad y_1 = b - y, \quad e \quad y \geq \eta$$

Daí, ao considerarmos

$$x_1 = a/2,$$

$$y_1 = b/2,$$

$$x = a/2,$$

$$y = b/2$$

e fazendo:

$$\alpha_m = \frac{\beta_m}{2} = \frac{m\pi b}{2a}, \quad (130)$$

a deflexão máxima no centro; será:

$$w_{\max} = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\operatorname{tgh}(\alpha_m) - \frac{\alpha_m}{\cosh^2(\alpha_m)} \right) = \frac{\alpha \cdot Pa^2}{D} \quad (131)$$

A tabela 2 (Apêndice A) mostra que quanto mais a relação b/a vai crescendo, o coeficiente α vai rapidamente se aproximando do valor 0,01695 que corresponde a uma placa de comprimento infinito. Deste modo as placas retangulares com b/a > 2 tem o seu comportamento próximo das placas largas e estreitas.

3.5.1. Momentos fletores em uma placa retangular simplesmente apoiada com carga concentrada.

Para se encontrar os momentos fletores atuantes ao longo do eixo x, deriva-se a expressão 129 obtendo:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0} = -\frac{P}{2D\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a}}{m} \left(\tanh \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \quad (132)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -\frac{P}{2D\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a}}{m} \left(\tanh \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \quad (133)$$

Substituindo estas derivadas nas expressões:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (27)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (28)$$

tem-se que:

$$(M_x)_{y=0} = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi\xi}{a}}{m} \left((1+\nu) \tanh \alpha_m - \frac{(1-\nu)\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (134)$$

$$(M_y)_{y=0} = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi\xi}{a}}{m} \left((1+\nu) \tanh \alpha_m + \frac{(1-\nu)\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (135)$$

Nessas equações a $\tanh \alpha_m$ aproxima-se da unidade e o valor do $\cosh \alpha_m$ torna-se muito alto, quando m cresce. Dessa forma as equações dos momentos fletores M_x e M_y , localizados no eixo x , e próximos do ponto de aplicação da carga concentrada P , podem ser representados da seguinte forma;

$$M_x = \frac{(1+\nu)P}{2\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \text{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} + \gamma_1 \frac{P}{4\pi} = \frac{(1+\nu)P}{4\pi} \log \frac{2a \text{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} + \gamma_1 \frac{P}{4\pi} \quad (136)$$

$$M_y = \frac{(1+\nu)P}{2\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \text{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} + \gamma_1 \frac{P}{4\pi} = \frac{(1+\nu)P}{4\pi} \log \frac{2a \text{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} + \gamma_2 \frac{P}{4\pi} \quad (137)$$

Os valores de γ_1 e γ_2 são fatores numéricos dependentes da relação b/a e da posição da carga concentrada no eixo x . A tabela 3(Apêndice A) fornece alguns desses valores.

Desta maneira a distribuição das tensões nas proximidades do ponto de aplicação da carga é basicamente a mesma de uma placa circular de raio $\frac{2a}{\pi} \text{sen} \frac{\pi\xi}{a}$.

A superposição dos momentos fletores da placa circular com os momentos da flexão uniforme fornece os momentos M_x e M_y no centro, para uma carga P uniformemente distribuída em uma área circular de pequeno raio c .

Dáí temos que:

$$M_x = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \log \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} \right] + \gamma_1 \frac{P}{4\pi} \quad (138)$$

$$M_y = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \log \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} \right] - (1 - \nu - \gamma_2) \frac{P}{4\pi} \quad (139)$$

3.6 Placa Retangular com duas Bordas Opostas Simplesmente Apoiadas e as outras duas Engastadas.

A deflexão de uma placa sob carregamento qualquer pode ser resolvida pela combinação de vários carregamentos e condições de contorno, resolvido individualmente. Desta forma muitos problemas podem ser solucionados usando os resultados parciais em combinação. A seguir apresentam-se as soluções para diversos problemas.

3.6.1 Carga uniformemente distribuída.

No presente caso pegaremos inicialmente uma placa retangular com carga uniformemente distribuída e simplesmente apoiada em suas bordas ou extremidades.

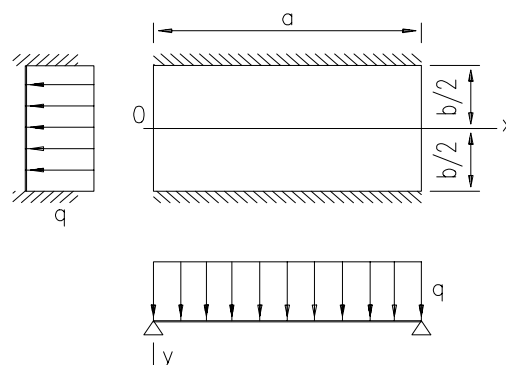


Figura.(3.5) Placa apoiada (lados menores), engastada (lados maiores) com carga uniformemente distribuída

A deflexão encontrada anteriormente pela expressão (115) é:

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m.\pi.x}{a}}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \text{tgh} \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cdot \cosh \frac{m.\pi.y}{a} + \frac{\frac{m.\pi.y}{a}}{2 \cosh \alpha_m} \cdot \text{senh} \frac{m.\pi.y}{a} \right)$$

A rotação angular nas bordas $y = \pm \frac{b}{2}$ é determinada ao se derivar a expressão acima em relação a y .

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=\pm \frac{b}{2}} = \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^4} \text{sen} \frac{m.\pi.x}{a} [\alpha_m - \text{tgh} \alpha_m (1 + \alpha_m \text{tgh} \alpha_m)] \quad (140)$$

Para eliminar esta deflexão angular, que na realidade é nula e atender as condições de contorno, necessita-se da colaboração de um momento uniformemente distribuído, fazendo uma tendência angular igual e contrária, ao longo dos eixos:

$$y = \pm \frac{b}{2} :$$

O momento pode ser representado pela série:

$$My_{y=\pm \frac{b}{2}} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \text{sen} \frac{m.\pi.x}{a} \quad (141)$$

O cálculo do coeficiente E_m deve obedecer a condição de contorno na qual:

$$\frac{\partial w}{\partial y_{Final}} = 0 \quad (142)$$

A expressão para a deflexão em placas retangulares simplesmente apoiadas e carregadas com momentos ao longo da borda é:

$$w = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m.\pi.x}{a}}{m^2 \cosh \alpha_m} E_m \left(\alpha_m \text{tgh} \alpha_m \cosh \frac{m.\pi.y}{a} - \frac{m.\pi.y}{a} \text{senh} \frac{m.\pi.y}{a} \right) \quad (143)$$

A deflexão angular provocada pelo momento será determinada pela derivação de (143) em relação a y .

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^2} E_m [\text{tgh} \alpha_m (\alpha_m \text{tgh} \alpha_m - 1) - \alpha_m] \quad (144)$$

Se igualar (140) e (144), chega-se que:

$$E_M = \frac{4qa^2}{\pi^3 m^3} \frac{\alpha_m - \text{tgh} \alpha_m (1 + \alpha_m \text{tgh} \alpha_m)}{\alpha_m - \text{tgh} \alpha_m (\alpha_m \text{tgh} \alpha_m - 1)} \quad (145)$$

Conseqüentemente, de (145) em (141) tem-se:

$$My_{y=\pm \frac{b}{2}} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4qa^2}{\pi^3 m^3} \frac{\alpha_m - \text{tgh} \alpha_m (1 + \alpha_m \text{tgh} \alpha_m)}{\alpha_m - \text{tgh} \alpha_m (\alpha_m \text{tgh} \alpha_m - 1)} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (146)$$

Para o cálculo da deflexão w_1 devido ao momento, basta substituir E_m na expressão (143)

$$w_1 = \frac{2qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^5 \cosh \alpha_m} \cdot \frac{\alpha_m - \text{tgh} \alpha_m (1 + \text{tgh} \alpha_m)}{\alpha_m - \text{tgh} \alpha_m (\text{tgh} \alpha_m - 1)} \cdot \left(\alpha_m \text{tgh} \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (147)$$

Para

$$x=a/2$$

e

$y=0$,

a deflexão será no centro da placa, logo:

$$w_{m\acute{a}x} = \frac{2qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \cdot \frac{\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m}{\cosh \alpha_m} \cdot \frac{\alpha_m - \operatorname{tgh} \alpha_m (1 + \operatorname{tgh} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{tgh} \alpha_m (\operatorname{tgh} \alpha_m - 1)} \quad (148)$$

Para encontrar a equação da deflexão da superfície deformada de uma placa retangular, uniformemente carregada com dois eixos opostos simplesmente apoiados e dois eixos engastados, sendo estes eixos coincidentes com as bordas, deve-se subtrair de w_2 , que é a deflexão para placas simplesmente apoiadas em todas as extremidades e carregadas uniformemente, o valor de w_1 .

Relembrando a equação (115), mostrada abaixo

$$w_2 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m 2y}{2 \cosh \alpha_m b} \operatorname{senh} \frac{2\alpha_m y}{b} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (115)$$

Logo, temos que:

$$w = w_2 - w_1 \quad (149)$$

Conclui-se daí que:

$$w = \frac{2qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^5} \left[\frac{1 - \frac{\alpha_m \text{tgh} \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m}}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m 2y}{2 \cosh \alpha_m b} \sinh \frac{2\alpha_m y}{b} \right] - \frac{1}{\cosh \alpha_m} \times \frac{\alpha_m - \text{tgh} \alpha_m (1 + \alpha_m \text{tgh} \alpha_m)}{\alpha_m - \text{tgh} \alpha_m (\alpha_m \text{tgh} \alpha_m - 1)} \times \left(\alpha_m \text{tgh} \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (150)$$

Esta é uma série de convergência rápida e para pequenos passos, chega-se a um resultado bastante preciso. A equação (150) dá para: $x = a/2$, $y = 0$, $a = b$ (placa quadrada), a deflexão máxima no centro da placa

$$w_{\max} = 0,00192 \frac{qa^4}{D} \quad (151)$$

Assim como das deduções anteriores tem-se que a deflexão será uma função de seu coeficiente α (no caso igual a 0,00192) que depende da relação b/a .

Para os momentos:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (27)$$

e

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (28)$$

a mesma abordagem será utilizada e $M_x = \beta_1 qa^2$ e $M_y = \beta_2 qa^2$. Os valores de momentos fletores M_x e M_y , para placas quadradas com o contorno em estudo, serão:

$$M_x = 0,0244qa^2 \quad (152)$$

e

$$M_y = 0,0332qa^2 \quad (153)$$

Os valores dos coeficientes α, β_1, β_2 são dados pela tabela 3 (Apêndice A), extraída de Timoshenko, Woinowsky-Krieger (Theory of Plates and Shells) (pg187)

Nota-se que os momentos (152) e (153) são menores que

$$M_x = M_y = 0,0479qa^2 \quad (154)$$

momentos máximos no centro de placas quadradas simplesmente apoiadas.

Mas, os momentos fletores M_y na parte média dos eixos engastados são, como mostra a tabela 4 (Apêndice A) maiores que $0,0479qa^2$ devido à restrição angular imposta pelo engastamento, conseqüentemente, as tensões máximas terão seus valores aumentados.

3.6.2 Força concentrada

Neste caso a solução vem da seguinte superposição de efeitos, a deflexão de uma placa retangular simplesmente apoiada com carga concentrada e deflexão de uma placa retangular com dois eixos opostos nos quais são distribuídos uniformemente os momentos fletores. A figura 3.6 apresenta um desenho esquemático desta configuração.

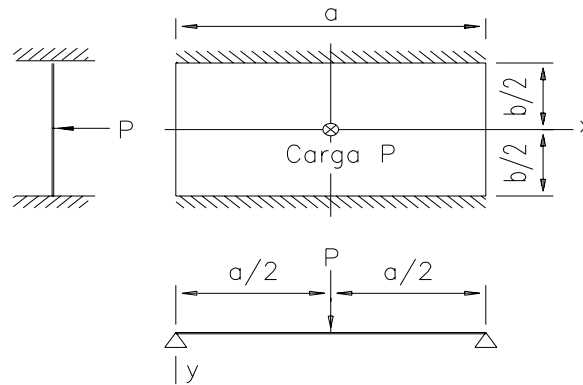


Fig. (3.6) Placa apoiada (lados menores), engastada (lados maiores) com força concentrada.

Fazendo o caso de uma carga concentrada em uma placa no seu ponto central e suas bordas que se localizam em: $y = \pm b/2$, estejam engastadas, obtém-se a expressão da deflexão no ponto de atuação de carga:

$$w_{m\acute{a}x} = \frac{Pb^2}{2\pi^3 D} \left[\frac{a^2}{b^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\operatorname{tgh} \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) - \frac{\pi^2}{4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\operatorname{tgh}^2 \alpha_m}{\sinh \alpha_m \cosh \alpha_m + \alpha_m} \right] \quad (155)$$

3.7 Placa Retangular com todos os Lados Engastados, carregada Uniformemente.

Para uma maior facilidade no equacionamento e devido à simetria nos lados, opta-se por orientar os eixos xx e yy a partir do centro da placa. Para a resolução desse problema foi utilizada a combinação de casos individuais. Deve-se combinar uma placa simplesmente apoiada em todas as extremidades com a deflexão de uma placa carregada com distribuição uniforme de momentos ao longo dos seus lados. A figura 3.7 apresenta um esquema dessa configuração.

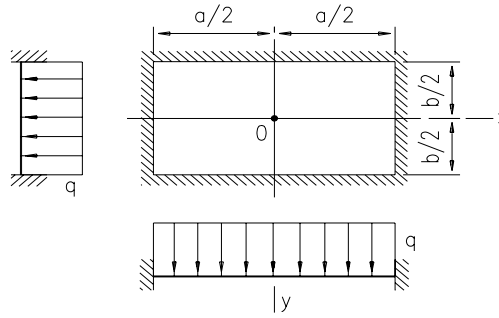


Fig.(3.7) Placa quatro lados engastados, carga uniforme.

Os momentos deverão ser ajustados para satisfazer a condição: $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$, para placas engastadas totalmente. O método se aplica para qualquer tipo de carregamento. A deflexão de uma placa simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída é representada (levando em conta a translação dos eixos xx e yy) por:

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \cos \frac{m\pi x}{a} \left[\frac{1 - \frac{\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cos \frac{m\pi y}{a}}{\frac{1}{2 \cosh \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a}} \right] \quad (156)$$

A deflexão angular (rotação) no lado $y = b/2$ da placa é determinada pela derivação da expressão (156) em relação a y.

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b/2} = \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^4} \cos \frac{m\pi x}{a} [\alpha_m - \operatorname{tgh} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m)] =$$

$$\frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^4} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} - \operatorname{tgh} \alpha_m \right) \quad (157)$$

Analisar-se-ão as deflexões da placa causadas pelos momentos distribuídos ao longo dos seus eixos $y = \pm b/2$. Por considerações de simetria (x positivo ou negativo, simétricos, $\cos \frac{m\pi x}{a}$ sempre iguais) chega-se à conclusão que os referidos momentos podem ser representados pela série abaixo.

$$M_{y=y=\pm \frac{b}{2}} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} E_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (158)$$

A deflexão w_1 correspondente a estes momentos é obtida da expressão (143):

$$w = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{m^2 \cosh \alpha_m} E_m \left(\alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m \cos \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} \right)$$

Se substituir $x + a/2$ por x (translação de eixos) tem-se:

$$w_1 = -\frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2 \cosh \alpha_m} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (159)$$

A rotação do eixo $y = b/2$ correspondente a esta deflexão é determinada pela derivação da expressão (159) em relação a y é:

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)_{y=b/2} = \frac{-a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\operatorname{tgh} \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) \quad (160)$$

A rotação do eixo $x = a/2$ correspondente a esta deflexão é determinada pela derivação da expressão (159) em relação a x é:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=a/2} &= \frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \cdot \frac{1}{m \cosh \alpha_m} \left(\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \\
&= -\frac{1}{4D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{E_m}{2 \cosh^2 \alpha_m} \left(b \sinh \alpha_m \cos \frac{m\pi y}{a} - 2y \cosh \alpha_m \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (161)
\end{aligned}$$

A expressão entre parênteses é uma função de y as quais desaparecem para:

$$y = \pm b/2$$

Desta maneira a função pode ser representada pela série:

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} A_i \cos \frac{i\pi y}{b} \quad (162)$$

na qual os coeficientes A_i são calculados pela fórmula:

$$A_i = \frac{2}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} \left(b \sinh \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} - 2y \cosh \alpha_m \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{i\pi y}{b} \quad (163)$$

Resolvendo a integral, tem-se que:

$$A_i = 16ia(-1)^{\frac{i-1}{2}} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{i}{m^2}\right)^2} \cosh^2 \alpha_m \quad (164)$$

Substituindo a expressão (164) em (162) e lançando o resultado em (161), obtém-se:

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=a/2} = \frac{-4b^2}{\pi^2 Da} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{E_m}{m^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{i(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{i}{m^2}\right)^2} \cos \frac{i\pi y}{b} \quad (165)$$

Pode-se também determinar as rotações nos lados onde os momentos uniformemente distribuídos Mx atuam, ou seja:

$$x = \pm a/2$$

Analogamente à My , M_x pode ser definido por:

$$M_{x_{x=\pm a/2}} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} Fm \cos \frac{m \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (166)$$

Pelo uso idêntico das equações (159) e (164) tem-se:

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)_{x=a/2} = -\frac{b}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Fm \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m \cdot \pi \cdot y}{b} \left(\operatorname{tgh} \beta m + \frac{\beta m}{\cosh^2 \beta m} \right) \quad (167)$$

onde:

$$\beta m = \frac{m \cdot \pi \cdot a}{2b}$$

e:

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial y} \right)_{y=b/2} = \frac{-4a^2}{\pi^2 D b} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{Fm}{m^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{Fm}{m^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{i(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} \cos \frac{i \cdot \pi \cdot x}{a} \quad (168)$$

Quando as atuações dos dois momentos são simultâneas, a deflexão angular provocada por eles é obtida pela soma das deflexões individuais.

Tem se que, para:

$$y = b/2$$

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b/2} = -\frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m.\pi.x}{a} \left(\operatorname{tgh} \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) +$$

$$-\frac{4a^2}{\pi^2 D b} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{Fm}{m^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{i(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{i^2}{m^2}\right)^2} \cos \frac{i.\pi.x}{a} \quad (169)$$

Tomando a expressão (165) que representa a rotação na direção y provocada pela carga uniformemente distribuída na placa simplesmente apoiada e somando com (169), que representa a deflexão angular devido aos dois momentos de engaste atuando simultaneamente; tem-se que a rotação final será nula, que é uma das condições de contorno a ser obedecida. Daí; pode-se calcular as constantes, E_m e Fm através das expressões (170) e (171) para colocar-se nas séries (158) e (166) que representam os momentos de engaste.

Para:

$$y = \pm \frac{b}{2}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b/2} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b/2} = 0 \quad (170)$$

Analogamente, para:

$$x = \pm \frac{a}{2}$$

vem que:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a/2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=a/2} = 0 \quad (171)$$

Ao substituir (157) e (169) em (170), agrupar os termos que contém os cossenos:

$$\left(\frac{i\pi x}{a} + \frac{m\pi x}{a} \right), \quad (172)$$

coloca-los em evidência, e saber que (169) é verdade para qualquer valor de x , deduz-se que os coeficientes que multiplicam os cossenos serão nulos para qualquer valor de x . Obtém-se assim, um sistema linear de infinitas equações para cálculo de E_i e F_i como abaixo se representa:

$$\begin{aligned} & \frac{4qa^2}{\pi^3} \cdot \frac{1}{i^4} \left(\frac{\alpha_i}{\cosh^2 \alpha_i} - \operatorname{tgh} \alpha_i \right) - \frac{E_i}{i} \left(\operatorname{tgh} \alpha_i + \frac{\alpha_i}{\cosh^2 \alpha_i} \right) - \\ & \frac{8_i a}{\pi b} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{Fm}{m^3} \frac{1}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} = 0 \end{aligned} \quad (173)$$

Analogamente, são obtidas equações de E_i e F_i , para a rotação em xx , ficando com dois (2) sistemas de equações. Pelo processo de aproximação sucessivas podem ser calculados os coeficientes E_i e F_i . Para ilustrar este método toma-se para simplificação uma placa quadrada, onde $E_i = F_i$ e faz-se apenas somatória de quatro (4) valores de i .

A equação torna o seguinte formato,;

$$\frac{E_i}{i} \left(\operatorname{tgh} \alpha_i + \frac{\alpha_i}{\cosh^2 \alpha_i} \right) + \frac{8i}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{E_m}{m^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{i^2}{m^2} \right)} = \frac{4qa^2}{\pi^3} \cdot \frac{1}{i^4} \left(\frac{\alpha_i}{\cosh^2 \alpha_i} - \operatorname{tgh} \alpha_i \right) \quad (174)$$

Sabe-se que:

$$\alpha_i = \frac{i\pi b}{2a}$$

Substituindo os valores numéricos dos coeficientes nestas equações e considerando somente os 4 primeiros valores da somatória, obtém-se que:

$$\begin{array}{r}
 1,8033 E_1 + 0,0764 E_3 + 0,0188 E_5 + 0,0071 E_7 = 0,6677 k \\
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \\
 0,0764 E_1 + 0,4045 E_3 + 0,0330 E_5 + 0,0159 E_7 = 0,01232 k \\
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \\
 0,0188 E_1 + 0,0303 E_3 + 0,2255 E_5 + 0,0163 E_7 = 0,00160 k \\
 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \\
 0,0071 E_1 + 0,0159 E_3 + 0,0163 E_5 + 0,1588 E_7 = 0,00042 k
 \end{array}$$

onde:

$$K = -\frac{4qa^2}{\pi^3} \quad (175)$$

Vê-se que os valores dos coeficientes serão na diagonal principal, maiores que os seus correspondentes nas outras equações. Se considerar apenas o lado esquerdo da diagonal e calcularmos E_1 , tem-se:

$$E_1 = 0,3700k$$

Ao lançar E_1 no fracionamento da 2ª equação tira-se:

$$E_3 = -0,0395k$$

Colocando

$$E_1 = 0,3700k \text{ e } E_3 = -0,0395k$$

na 3ª equação parcial, vem que

$$E_5 = -0,0180k$$

Finalmente com os três valores calculados, acha-se na 4ª e total equação que:

$$E_7 = -0.0083k$$

Daí, ao considerar o lado direito da diagonal e colocar-se valores calculados na 1ª aproximação, tem-se:

$$E_1 = 0.3722k$$

$$E_3 = -0.0380k$$

$$E_5 = -0.0178k$$

$$E_7 = -0.0085k$$

Ao repetir estes cálculos, aumenta-se cada vez mais a precisão. Ao substituir os valores de E_1, E_3, E_5 e E_7 na série (151), obtém-se os valores dos momentos ao longo dos lados da placa engastada.

Por exemplo; de 4 equações o valor do momento é:

$$M_{y=y=\frac{b}{2}, x=0} = (E_1 - E_3 + E_5 - E_7) = 0,0517qa^2 \quad (176)$$

Que é o momento máximo no meio do lado de placa quadrada. Substituindo os valores E_1, E_3, E_5, \dots na expressão (159), tem-se a deflexão da placa produzida pelos momentos distribuídos ao longo dos lados:

$$y = \pm \frac{b}{2}$$

necessitando dobrar o valor encontrado pelo fato de ter dois momentos simultâneos (M_x e M_y) atuando. Ao combinar este resultado com o da placa simplesmente apoiada, tem-se a deflexão da placa quadrada com lados engastados carregada com uma carga uniformemente distribuída.

CAPÍTULO 4

EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1 Introdução

As comparações feitas, seguem algumas considerações que serão explanadas agora. Os métodos escolhidos foram os processos analíticos de Navier e Levy, o processo numérico através do Método dos Elementos Finitos, e as tabelas de Marcus e Czerny.

Estas tabelas, foram elaboradas com os seguintes princípios:

a) Princípio de Marcus

Na sua primeira teoria, buscou a integração das equações diferenciais da Teoria da Elasticidade e empregou o método das diferenças finitas; originando equações complexas e acarretando grande exigência de tempo para resolvê-las, o que a tornou inviável no uso prático.

Com a segunda teoria, optou-se pela aplicação de um coeficiente na fórmula do momento fletor, calculado pela teoria das grelhas.

Para a teoria de Marcus, consideraremos o coeficiente de Poisson igual a 0,3.

b) Princípio de Czerny

Os resultados encontrados são baseados na Teoria Matemática da Elasticidade de uma maneira prática, considerando o coeficiente de Poisson igual a zero.

São resultados mais precisos que os de Marcus.

Denominaremos os métodos da seguinte forma:

Método de Navier

Método de Lévy

Método dos Elementos Finitos (MEF)

Método de Czerny

Método de Marcus

4.2 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Dados dos exemplos e considerações:

Todos os exemplos serão de uma placa com lado maior igual a 4m, e lado menor igual a 2m.

A espessura da placa será de 30mm.

O material será aço com coeficiente de Poisson ($\nu = 0.3$) e

módulo de elasticidade $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2 = 210 \text{ GPa}$

Carregamento uniformemente distribuído $q = 2000 \text{ Pa}$

Para as comparações com valores calculados por Czerny, considera-se $\nu = 0$

Módulo de rigidez à flexão de placas $D = 519,23 \times 10^3 \text{ N.m}$.

Nas tabelas onde houver o tracejado, explica-se pelo fato de alguns métodos não apresentarem resultados para aqueles itens específicos, ou as seções onde se calculam os esforços não serem as mesmas.

Para as comparações sucessivas que serão feitas, optou-se por um valor (deslocamentos, tensões, momentos, esforços cortantes) calculado por uma das teorias em uso. Assim, por exemplo, todas as deflexões serão comparadas com apenas uma escolhida como referencial, e não todas entre si. A busca pela teoria que mais se adequasse a esse tipo de comportamento e tivesse seus valores bastante precisos e confiáveis levou a escolha a se inclinar pelo método de Lévy. O método de Lévy, baseado na Teoria Matemática da Elasticidade, tem os seus valores calculados na forma de séries, já que uma integração analítica seria inviável. A convergência apresentada pela teoria de Lévy é bastante precisa e rápida, tendo além disso, estudos sobre várias condições de contorno, o que já não ocorre com processo de Navier. Devido à sua exatidão, facilidade de convergência (essencial no caso do desenvolvimento em séries) e abrangência à várias condições de contorno, tomaremos os valores determinados por Lévy como parâmetros para os desvios percentuais a serem calculados. Deste modo todos os momentos fletores, esforços cortantes e deflexões, determinados nos outros processos serão comparados aos valores respectivos calculados por Lévy.

O Método dos Elementos Finitos, desenvolvido para os exemplos numéricos, usa uma discretização em quinhentos e doze (512) elementos, sendo dezesseis (16) divisões na direção do eixo y e trinta e duas (32) divisões na direção do eixo x . Com isso, o total de nós é de quinhentos e sessenta e um (561).

4.3 Exemplo 1

Placa retangular com relação entre lados igual a 2 (dois), simplesmente apoiada, carregada uniformemente com carga q .

Coefficiente de Poisson $\nu = 0.3$ $q=2000\text{N/m}^2$

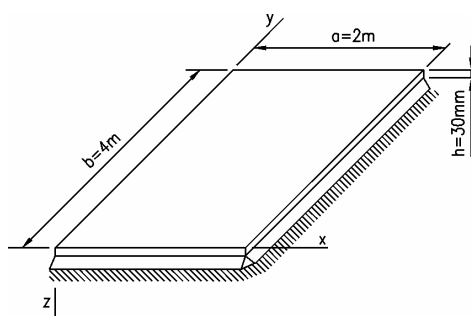
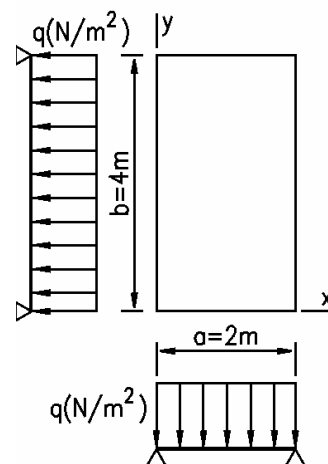
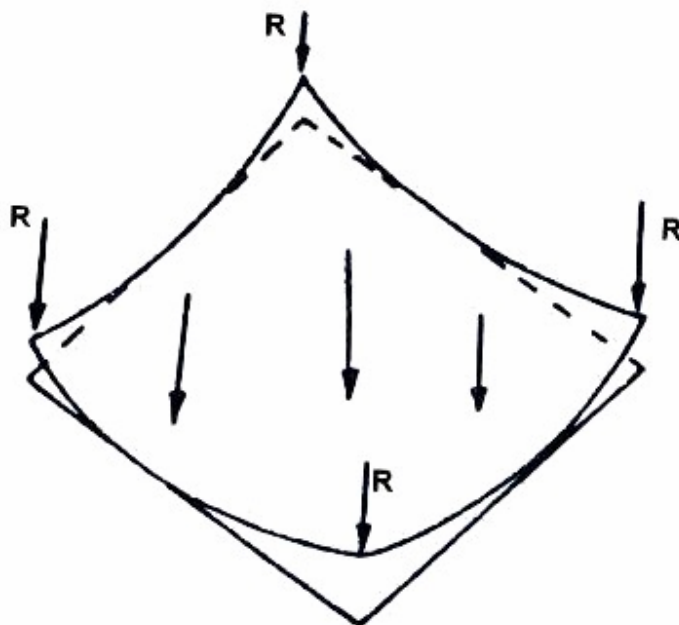


Figura 4.1 (a) Placa simplesmente apoiada



(b) Carregamento uniforme



(c) Reações nas quinas

Comparações também são feitas entre valores de reações nas quinas (Figura 4.1.c) calculados pelos processos de Lévy e Elementos Finitos.

Os resultados dos momentos fletores M_x e M_y , reações nas quinas e das deflexões calculados no centro da placa e dos esforços Q_x e Q_y determinados no meio dos lados da placa são mostrados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 Resultados de esforços e deflexões

| Métodos | M_x Centro | M_y Centro | Q_x Meio do lado | Q_y Meio do lado | Deflexão Centro (w) | Reações nas quinas |
|-------------|-----------------|-----------------|--------------------------|--------------------------|--|--------------------------|
| Lévy | 813Nm | 370Nm | 1860N | 1376N | $0,624 \times 10^{-3}$ m | 736N |
| Navier | 802Nm | 362Nm | 1634N | 1274N | $0,620 \times 10^{-3}$ m | - |
| MEF | 814Nm | 370Nm | - | - | $0,623 \times 10^{-3}$ m | 731N |
| Marcus | 756Nm | - | - | - | - | - |

A Tabela 4.2 mostra os desvios percentuais dos esforços e deflexões calculados em relação aos valores determinados pela teoria de Lévy.

Tabela 4.2 Desvios percentuais

| Métodos | Para Mx Centro | Para My Centro | Para Qx Centro | Para Qy Centro | Para Deflexão Centro (w) | Reações nas quinas |
|---------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------------------|-----------------------|
| Navier | -1,50% | -2,20% | -12,20 % | -7,40 % | -0,64 % | - |
| MEF | 0,13 % | 0,00 % | - | - | -0,16 % | -0,679% |
| Marcus | -7,01 % | - | - | - | - | - |

Comentários:

Pela tabela 4.1, o M_x calculado pelo processo de Marcus, é menor que o valor encontrado pelos processos analíticos de Navier, Lévy e pelo Método dos Elementos Finitos. Já o M_y não é obtido pelo processo de Marcus e os resultados encontrados pelos processos de Navier, Lévy e Elementos Finitos se mostram próximos como apresenta a tabela 4.2.

Em relação aos esforços cortantes nas duas direções, o processo de Lévy fornece valores pouco superiores aos de Navier, pelo fato da convergência das séries ser melhor em Lévy.

Para as deflexões verticais os valores encontrados mostram desvios bem pequenos.

As reações nas quinas pelos processos de Lévy e Elementos Finitos são próximas.

4.4 Exemplo 2

Placa retangular com relação entre lados igual a 2 (dois), simplesmente apoiada, carregada uniformemente com carga q .

Coefficiente de Poisson $\nu = 0$ $q=2000 \text{ N/m}^2$

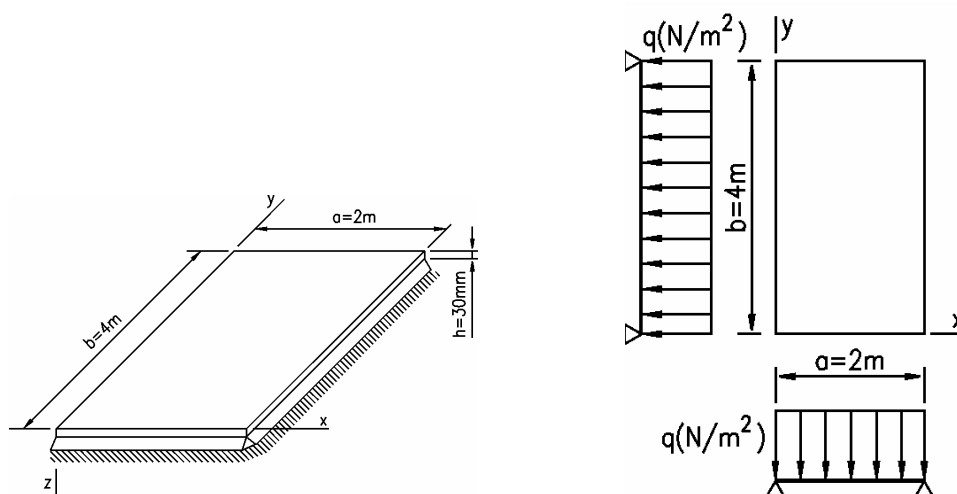


Figura 4.2 (a) Placa simplesmente apoiada

(b) Carregamento
uniforme

Os resultados dos momentos fletores M_x e M_y e das deflexões calculados no centro da placa e dos esforços Q_x e Q_y no meio dos lados da placa são mostrados na Tabela 4.3

Tabela 4.3 Resultados de esforços e deflexões

| Métodos | M_x Centro | M_y Centro | Q_x Meio do lado | Q_y Meio do lado | Deflexão Centro (w) |
|-------------|-----------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|---|
| Lévy | 770Nm | 138Nm | 1860N | 1376N | $0,685 \times 10^{-3} \text{m}$ |
| Navier | 762Nm | 134Nm | 1472N | 1274N | $0,680 \times 10^{-3} \text{m}$ |
| MEF | 769Nm | 138Nm | - | - | $0,683 \times 10^{-3} \text{m}$ |
| Czerny | 768Nm | 198Nm | 1500N | 1376N | - |

A Tabela 4.4 mostra os desvios percentuais dos esforços e deflexões calculados em relação aos valores determinados pela teoria de Lévy.

Tabela 4.4 Desvios percentuais

| Métodos | Para Mx Centro | Para My Centro | Para Qx Meio do lado | Para Qy Meio do lado | Para Deflexão Centro (w) |
|---------|-------------------|-------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------------|
| Navier | -1,038% | -2,898% | -20,860% | 7,412% | -0,730% |
| MEF | -0,129% | 0,000% | - | - | -0,291% |
| Czerny | -0,259% | 43,470%- | -19,350% | 0,000% | - |

Comentários:

Para os momentos de flexão na direção x, pela tabela 4.3, não há variação significativa. Para os momentos de flexão na direção y não há convergência nos resultados apenas para o processo de Czerny.

Os esforços cortantes na direção x, mostram altos desvios nos métodos de Navier e Czerny relativamente à Lévy, e na direção y os valores encontrados em Lévy e Czerny são iguais, Usando Navier o desvio percentual é de 7,412%.

As deflexões seguem com boa aproximação entre os resultados de cada método.

4.5 Exemplo 3 Placa retangular com relação entre lados igual a 2 (dois), simplesmente apoiada, carregada no ponto central com força P.

4.5.1 Exemplo 3.a Placa retangular com relação entre lados igual a 2 (dois), simplesmente apoiada, carregada no ponto central com força concentrada P.

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,3$ $P=16000N$

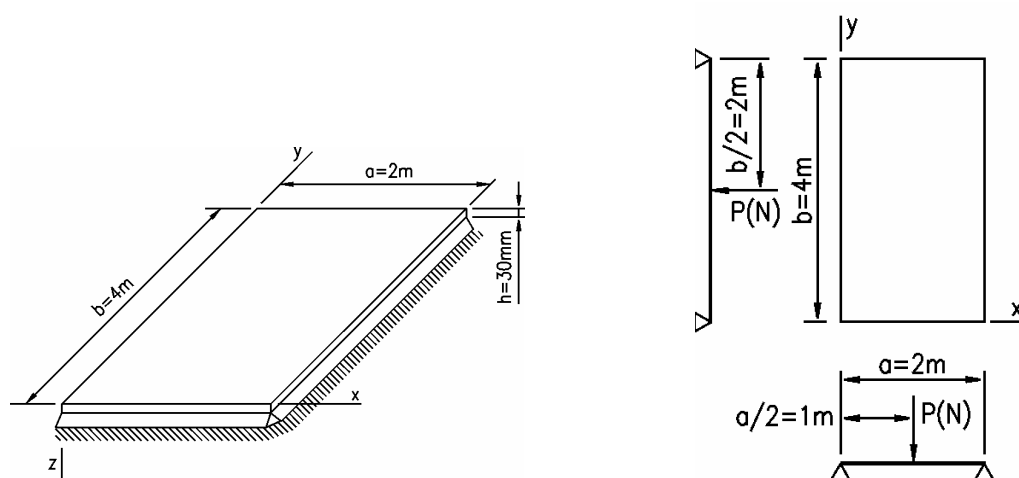


Figura 4.3.1 (a) Placa simplesmente apoiada

(b) Carregamento concentrado

Neste exemplo para se comparar os momentos fletores, toma-se uma carga concentrada central de 16000 N, distribuída em uma pequena área circular central com diâmetro de 0,06m. Este procedimento deve-se ao fato da carga considerada ser pontual, não apresentando convergência no processo de Lévy, para o cálculo dos momentos fletores

Os resultados dos momentos fletores M_x e M_y , e das deflexões calculados no centro da placa são mostrados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 Resultados de esforços e deflexões

| Método | M_x Centro | M_y Centro | Deflexão Centro (w) |
|--------|-----------------|-----------------|---|
| Lévy | 7423N.m | 6615N.m | $0,203 \times 10^{-2} \text{m}$ |
| MEF | 7674Nm | 6864Nm | $0,204 \times 10^{-2} \text{m}$ |

A Tabela 4.6 mostra os desvios percentuais das deflexões calculados em relação aos valores determinados pela teoria de Lévy.

Tabela 4.6 Desvios percentuais

| Método | Mx Centro | My Centro | Para deflexão centro (w) |
|--------|--------------|--------------|-----------------------------|
| MEF | 3,381% | 3,764% | 0,409% |

Comentários:

Para este caso os momentos M_x , M_y e deflexões pelos processos de Lévy e Elementos Finitos, mostraram-se com pequenos desvios.

4.5.2 Exemplo 3.b Placa retangular com relação entre lados igual a 2 (dois), simplesmente apoiada, carregada com força P distribuída uniformemente em uma pequena área $u.v=0,4m \times 0,4m$.

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,3$ $P=16000N$

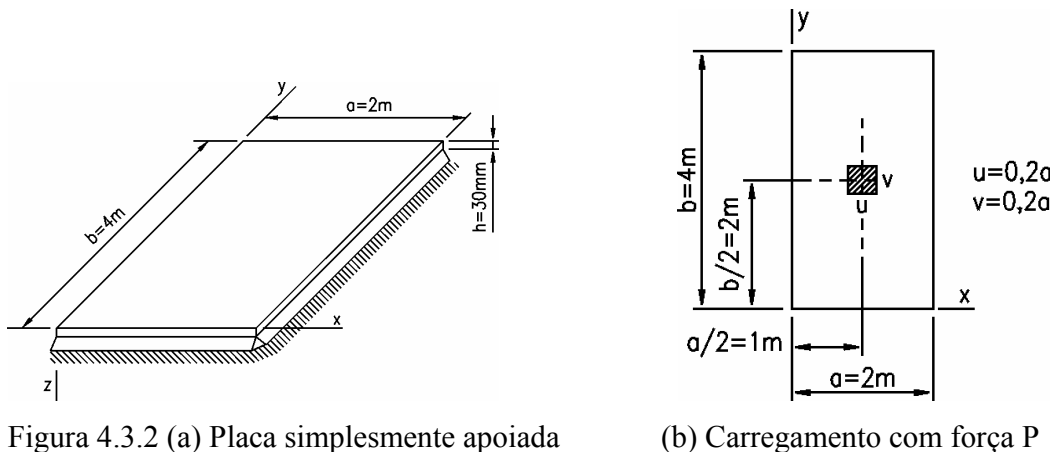


Figura 4.3.2 (a) Placa simplesmente apoiada

(b) Carregamento com força P

Os resultados dos momentos fletores M_x e M_y e das deflexões calculados no centro da placa são mostrados na Tabela 4.7

Tabela 4.7 Resultados de esforços e deflexões

| Método | Mx Centro | My Centro | Deflexão Centro(w) |
|-------------|---------------|---------------|-------------------------|
| Lévy | 4032Nm | 3248Nm | - |
| MEF | 4109Nm | 3311Nm | $0,192 \times 10^{-2}m$ |

A Tabela 4.8 mostra os desvios percentuais dos esforços e deflexões calculados em relação aos valores determinados pela teoria de Lévy.

Tabela 4.8 Desvios percentuais

| Método | Para M_x Centro | Para M_y Centro |
|--------|----------------------|----------------------|
| MEF | 1,909% | 1,939% |

Comentários:

Neste caso temos uma força concentrada distribuída em uma pequena área, tal que, possibilite a convergência pelo processo de Lévy no cálculo dos momentos fletores.

Os resultados mostram desvios perfeitamente aceitáveis.

4.6 Exemplo 4

Placa retangular com relação entre lados igual a 2 (dois), simplesmente apoiada nos lados menores e engastada nos lados maiores, carregada uniformemente com carga q .

Coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ $q = 2000\text{N/m}^2$

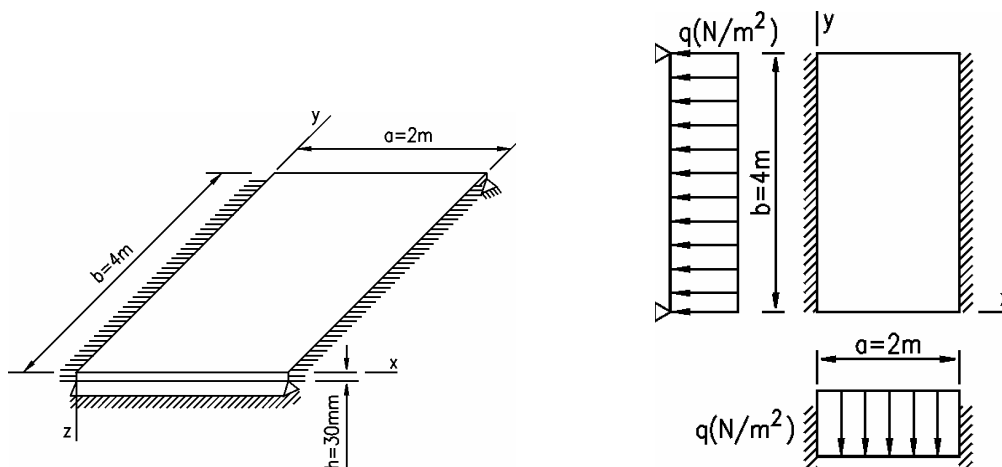


Figura 4.4 (a) Placa engastada nos lados maiores e apoiada, nos lados menores

(b) Carregamento uniforme

Os resultados dos momentos fletores M_x e M_y e das deflexões calculados no centro da placa e do momento M_x (engaste) no meio do lado da placa, são mostrados na Tabela 4.9

Tabela 4.9 Resultados de esforços e deflexões

| Método | Mx Centro | My Centro | Mx engaste Meio do lado | Deflexão Central (w) |
|-------------|--------------|--------------|----------------------------|--|
| Lévy | 336Nm | 113Nm | -672Nm | $0,160 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| MEF | 337Nm | 113Nm | -671Nm | $0,161 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| Marcus | 306Nm | - | -640Nm | - |

A Tabela 4.10 mostra os desvios percentuais dos esforços, e deflexões calculados em relação aos valores determinados pela teoria de Lévy.

Tabela 4.10 Desvios percentuais

| Método | Para Mx Centro | Para My Centro | Para Mx engaste Meio do lado | Para deflexão Central (w) |
|--------|-------------------|-------------------|------------------------------------|---------------------------------|
| MEF | 0,297% | 0,000% | -0,148% | 0,148% |
| Marcus | -8,928% | - | -4,761% | - |

Comentários:

Para os momentos de flexão, o método de Marcus fornece valores menores que os obtidos pelos processos de Lévy e de Elementos Finitos.

Em relação às deflexões os desvios são aceitáveis.

4.7 Exemplo 5

Placa retangular com relação entre lados igual a 2 (dois), simplesmente apoiada nos lados menores e engastada nos lados maiores, carregada uniformemente com carga q.

Coefficiente de Poisson $\nu = 0$ $q = 2000 \text{ N/m}^2$

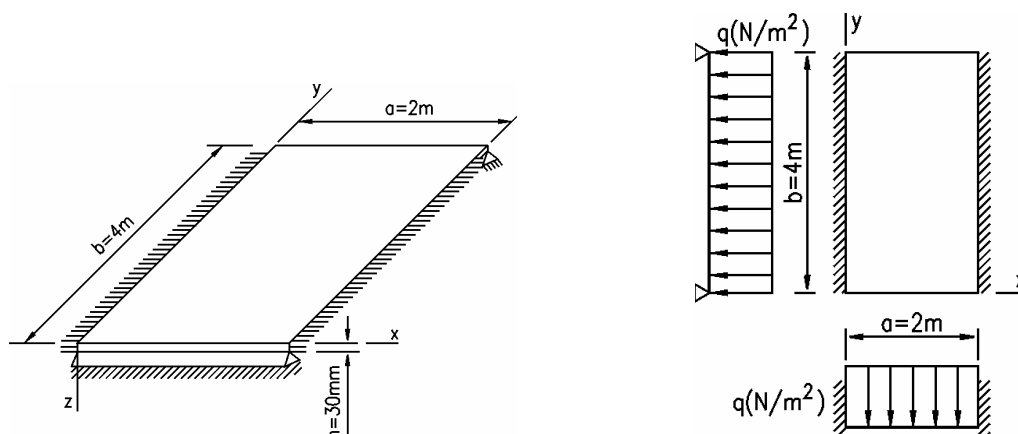


Figura 4.5 (a) Placa engastada lados maiores e apoiada lados menores (b) Carregamento uniforme

Os resultados dos momentos fletores M_x e M_y e das deflexões calculados no centro da placa e do momento M_x (engaste) no meio do lado da placa são mostrados na Tabela 4.11

Tabela 4.11 Resultados de esforços, deflexões e reações

| Método | M_x Centro | M_y Centro | M_x engaste Meio do lado | Deflexão Central (w) |
|--------|-----------------|-----------------|-------------------------------|---|
| Lévy | 334Nm | 112Nm | -682Nm | $0,160 \times 10^{-3} \text{m}$ |
| MEF | 335Nm | 13Nm | -672Nm | $0,177 \times 10^{-3} \text{m}$ |
| Czerny | 332Nm | 104Nm | -666Nm | - |

A Tabela 4.12 mostra os desvios percentuais dos esforços, e deflexões, calculados em relação aos valores determinados pela teoria de Lévy.

Tabela 4.12 Desvios percentuais

| Método | Para M_x Centro | Para M_y Centro | Para M_x engaste Meio do lado | Para deflexão Central (w) |
|--------|----------------------|----------------------|---------------------------------------|------------------------------|
| MEF | 0,299% | -88,4% | -1,466% | 10,625% |
| Czerny | -0,598% | -7,142% | -2,346% | - |

Comentários:

De acordo com os resultados obtidos observam-se desvios aceitáveis para os momentos fletores e deflexões a menos do momento M_y determinado pelo MEF cujas explicações serão mencionadas no capítulo das conclusões.

4.8 Exemplo 6

Placa retangular com relação entre lados igual a 2 (dois), simplesmente apoiada nos lados maiores e engastada nos lados menores, carregada uniformemente com carga q .

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,3$ $q = 2000\text{N/m}^2$

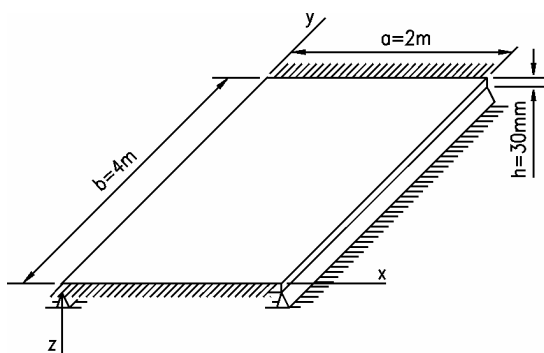
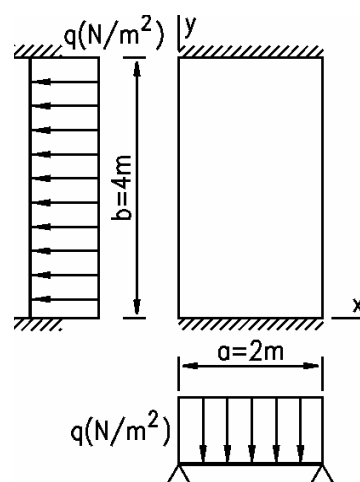


Figura 4.6 (a) Placa engastada lados menores e apoiada, lados maiores.



(b) Carregamento uniforme.

Os resultados dos momentos fletores M_x e M_y e das deflexões calculados no centro da placa e do momento M_x (engaste) no meio do lado da placa são mostrados na Tabela 4.13

Tabela 4.13 Resultados de esforços, deflexões e reações

| Método | M_x Centro | M_y Centro | M_x engaste Meio do lado | Deflexão Central (w) |
|-------------|-----------------|-----------------|-------------------------------|---|
| Lévy | 694Nm | 379Nm | -952Nm | $0,520 \times 10^{-3} \text{m}$ |
| MEF | 698Nm | 380Nm | -949Nm | $0,522 \times 10^{-3} \text{m}$ |
| Marcus | 640Nm | - | - | - |

A Tabela 4.14 mostra os desvios percentuais dos esforços, e deflexões, calculados em relação aos valores determinados pela teoria de Lévy.

Tabela 4.14 Desvios percentuais

| Método | Para M_x Centro | Para M_y Centro | Para M_x engaste Meio do lado | Para deflexão central (w) |
|--------|----------------------|----------------------|---------------------------------------|------------------------------|
| MEF | 0,576% | 0,263% | -0,315% | 0,384% |
| Marcus | -7,780% | - | - | - |

Comentários:

De acordo com os resultados obtidos observam-se desvios aceitáveis para os momentos fletores e deflexões.

4.9 Exemplo 7

Exemplo 7- Placa retangular com relação entre lados igual a 2 (dois), simplesmente apoiada nos lados maiores e engastada nos lados menores, carregada uniformemente com uma carga q .

Coefficiente de Poisson $\nu = 0$ $q = 2000 \text{N/m}^2$

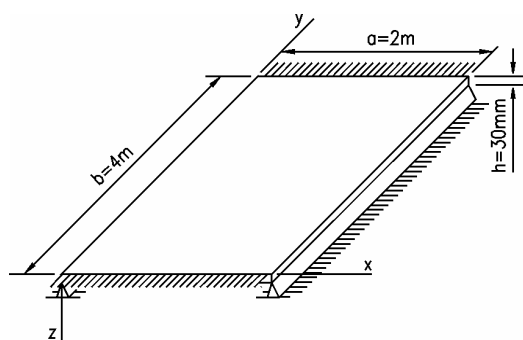
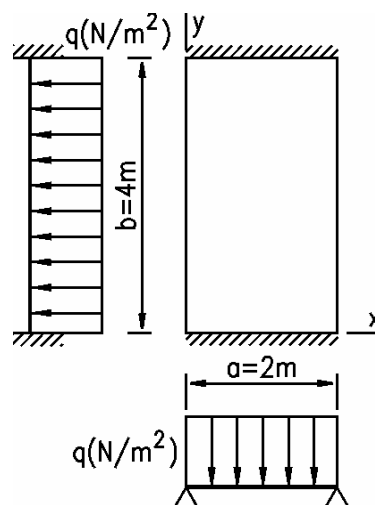


Figura 4.7 (a) Placa engastada lados menores e apoiada, lados maiores.



(b) Carregamento uniforme.

Os resultados dos momentos fletores M_x e M_y e das deflexões calculados no centro da placa e do momento M_x (engaste) no meio do lado da placa são mostrados na Tabela 4.15

Tabela 4.15 Resultados de esforços, deflexões e reações

| Método | M_x Centro | M_y Centro | M_y engaste Meio do lado | Deflexão Central (w) |
|--------|-----------------|-----------------|-------------------------------|--|
| Lévy | 639Nm | 186Nm | -953Nm | $0,520 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| MEF | 641Nm | 187Nm | -948Nm | $0,573 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| Czerny | 640Nm | 188Nm | -952Nm | - |

A Tabela 4.16 mostra os desvios percentuais dos esforços, deflexões e reações calculados em relação aos valores determinados pela teoria de Lévy.

Tabela 4.16 Desvios percentuais

| Método | Para M_x Centro | Para M_y Centro | Para M_y engaste Meio do lado | Deflexão Central (w) |
|--------|----------------------|----------------------|---------------------------------------|-----------------------------|
| MEF | 0,312% | 0,537% | -0,524% | 10,192% |
| Czerny | 0,156% | 1,075% | -0,105% | - |

Comentários:

Os resultados dos desvios percentuais são aceitáveis em relação aos momentos de flexão e deflexões.

4.10 Exemplo 8

Placa retangular com relação entre lados igual a 2 (dois), simplesmente apoiada nos lados maiores e engastada nos lados menores, carregada no ponto central com força concentrada P .

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,3$ $P=16000N$

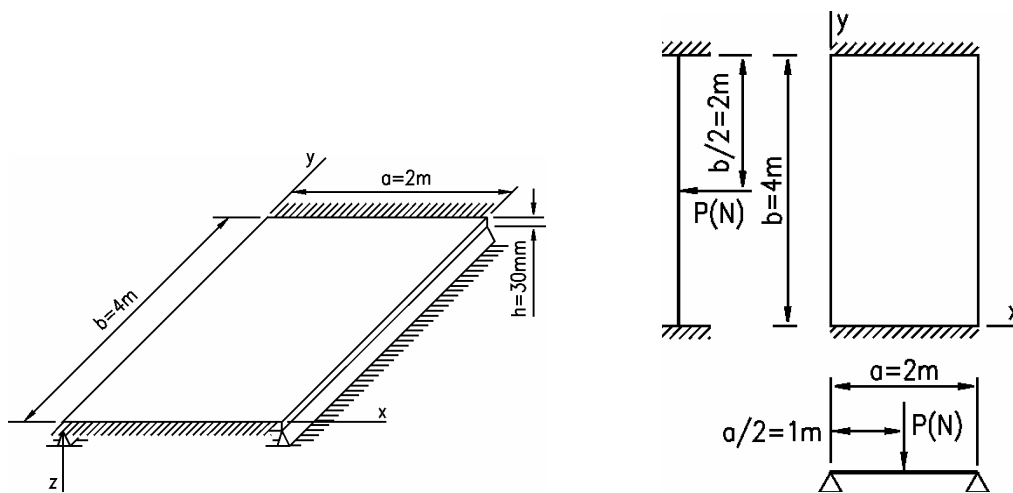


Figura 4.8 (a) Placa engastada lados menores e apoiada nos lados maiores

(b) Carga concentrada

Os resultados das deflexões calculados no centro da placa são mostrados na Tabela 4.17

Tabela 4.17 Resultados de deflexões

| Método | Deflexão centro (w) |
|-------------|---|
| Lévy | $0,189 \times 10^{-2} \text{m}$ |
| MEF | $0,190 \times 10^{-2} \text{m}$ |

A Tabela 4.18 mostra o desvio percentual da deflexão em relação aos valores determinados pela teoria de Lévy.

Tabela 4.18 Desvio percentual

| Método | Deflexão centro (w) |
|--------|------------------------|
| MEF | 0,529% |

Neste exemplo, para se comparar os momentos fletores, toma-se uma carga concentrada central de 16000 N, distribuída em uma pequena área circular central com diâmetro de 0,047 m, para se obter a convergência da série. Este procedimento deve-se ao fato da carga considerada ser pontual, não apresentar convergência no processo de Lévy, para o cálculo dos momentos fletores.

Os resultados dos momentos fletores M_x e M_y calculados no centro da placa e do momento M_x no meio do engastamento da placa são mostrados na Tabela 4.19.

Tabela 4.19 Resultado de esforços

| Método | M_x Centro | M_y Centro |
|-------------|-----------------|-----------------|
| Lévy | 7662N.m | 7008N.m |
| MEF | 7512N.m | 6875N.m |

A Tabela 4.20 mostra os desvios percentuais dos esforços calculados em relação aos valores determinados pela teoria de Lévy.

Tabela 4.20 Desvios percentuais

| Método | Mx Centro | My Centro |
|--------|--------------|--------------|
| MEF | -1,957% | -1,897% |

Comentários:

Neste caso, os resultados dos momentos e das deflexões se mostram com desvios aceitáveis.

4.11 Exemplo 9

Placa retangular com relação entre lados igual a 2 (dois), engastada nos quatro lados, carregada uniformemente com carga q .

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,3$ $q=2000\text{N/m}^2$

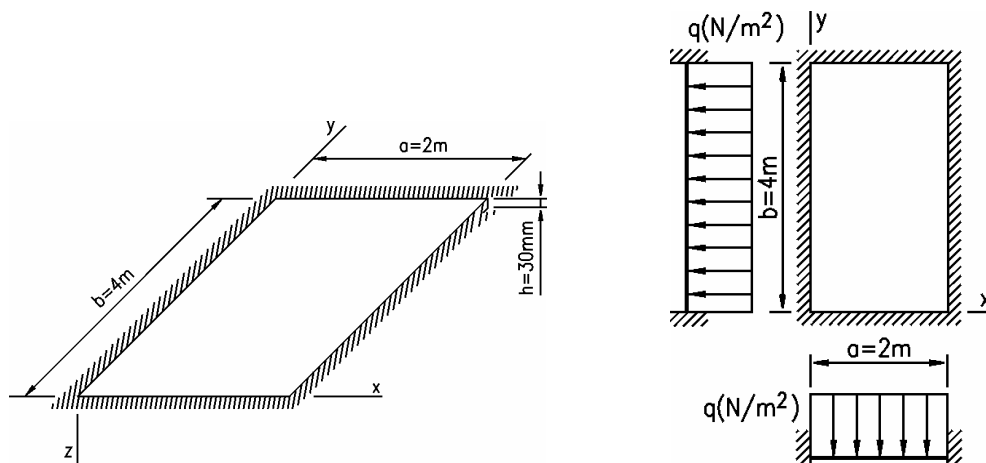


Figura 4.9 (a) Placa engastada

(b) Carregamento uniforme

Os resultados dos momentos fletores M_x e M_y e das deflexões calculados no centro da placa e dos momentos M_x e M_y (engaste) no meio dos lados da placa são mostrados na Tabela 4.21.

Tabela 4.21 Resultados de esforços e deflexões

| Método | Mx Centro | My Centro | Mx (engaste) Meio lado | My (engaste) Meio lado | Deflexão Central w |
|-------------|--------------|--------------|---------------------------|---------------------------|---|
| Lévy | 329Nm | 126Nm | -662Nm | -456Nm | $0,156 \times 10^{-3} \text{m}$ |
| MEF | 332Nm | 127Nm | -661Nm | -452Nm | $0,156 \times 10^{-3} \text{m}$ |
| Marcus | 293Nm | - | -627Nm | - | - |

A Tabela 4.22 mostra os desvios percentuais do esforços, deflexões calculados em relação aos valores determinados pela teoria de Lévy.

Tabela 4.22 Desvios percentuais

| Método | Mx Centro | My Centro | Mx (engaste) Meio lado | My (engaste) Meio lado | Deflexão Central w |
|--------|--------------|--------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------|
| MEF | 0,911% | 0,790% | -0,150% | -0,877% | 0,000% |
| Marcus | -10,942% | - | -5,287% | - | - |

Comentários

Os resultados para os momentos e deflexões foram aceitáveis. O processo de Marcus, como nos exemplos anteriores, forneceu valores menores que os encontrados pelos outros processos

5.12 Exemplo 10

Placa retangular com relação lado maior/lado menor igual a 2 (dois), engastada nos quatro lados, carregada no ponto central com força concentrada P.

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,3$ $P=16000\text{N}$

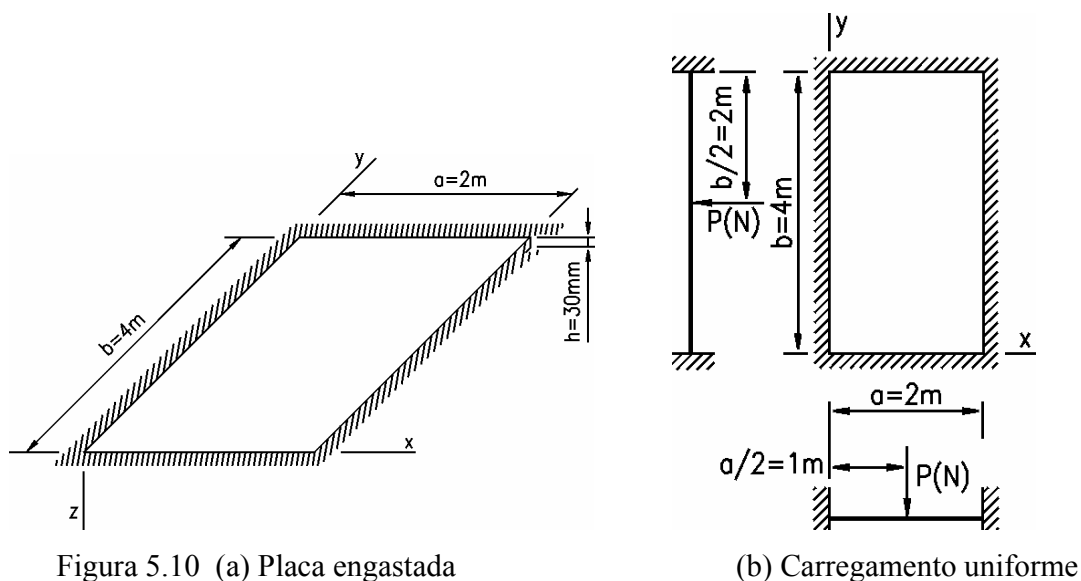


Figura 5.10 (a) Placa engastada

(b) Carregamento uniforme

Os resultados das deflexões calculados no centro da placa são mostrados na Tabela 4.23.

Tabela 4.23 Resultados das deflexões

| Método | Deflexão Centro (w) |
|-------------|--|
| Lévy | $0,890 \times 10^{-3} \text{ m}$ |
| MEF | $0,897 \times 10^{-3} \text{ m}$ |

A Tabela 4.24 mostra o desvio percentual da deflexão calculado em relação ao valor determinado pela teoria de Lévy.

Tabela 4.24 Desvio percentual

| Método | Deflexão Centro (w) |
|--------|------------------------|
| MEF | 0,786% |

Neste exemplo para se comparar os momentos fletores, toma-se uma carga concentrada central de 16000 N, distribuída em uma pequena área circular central com diâmetro de $3,2 \times 10^{-4} \text{ m}$. Este procedimento deve-se ao fato da carga considerada ser pontual, não apresentando convergência no processo de Lévy, para o cálculo dos momentos fletores.

Os resultados dos momentos fletores M_x e M_y calculados no centro da placa e do momento M_x no meio do engastamento da placa são mostrados na Tabela 4.25

Tabela 4.25 Resultados de esforços

| Método | M_x Centro | M_y Centro | M_x Engaste Meio do lado |
|-------------|-----------------|-----------------|-------------------------------|
| Lévy | 6539Nm | 6008Nm | -2678Nm |
| MEF | 6539Nm | 6064Nm | -2667Nm |

A Tabela 4.26 mostra os desvios percentuais dos esforços calculados em relação ao valor determinado pela teoria de Lévy.

Tabela 4.26 Desvio percentual.

| Método | M_x Centro | M_y Centro | M_x Engaste Meio do lado |
|--------|-----------------|-----------------|-------------------------------|
| MEF | 0,000% | 0,932% | -0,410% |

Comentários

Neste caso os resultados obtidos para os momentos e deflexões apresentaram uma boa aproximação.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E PROPOSTAS

5.1 Conclusões

São feitas aqui as conclusões de caráter geral, além daquelas já mencionadas nos comentários em cada exemplo do capítulo anterior.

No caso de placas retangulares apoiadas no contorno e carregadas uniformemente, pelos processos de Navier, Lévy, Marcus, Czerny e Elementos Finitos, os resultados obtidos mostraram-se compatíveis, assim os processos de Marcus e Czerny utilizados na prática são válidos.

No caso de placas retangulares apoiadas no contorno e sob carga concentrada, pelos processos Lévy e Elementos Finitos, os resultados obtidos mostraram-se compatíveis. Sendo que Marcus e Czerny não fornecem resultados neste caso.

No caso de placas retangulares apoiadas nos lados menores e engastadas nos maiores, carregadas uniformemente, observa-se através do gráfico da Figura 4.5 (c) que os resultados obtidos usando os processos de Lévy, Marcus, Czerny e Elementos Finitos para o momento M_x e para o momento M_y com relação $b/a = 1$ mostraram-se compatíveis. Assim, neste caso, os processos de Marcus e Czerny utilizados na prática, são válidos. Para a relação $b/a > 1$, os resultados para M_y diferem dos encontrados pelo MEF. Quando a relação $b/a \geq 1,6$, o momento M_y calculado por Czerny no centro da placa se mantém constante enquanto que pelo MEF este momento diminui, tendendo a zero para altos valores da relação b/a . Nestes casos podemos afirmar que a tabela de Czerny não fornecem valores corretos para M_y no centro da placa pois a influência dos lados apoiados quando se encontram muito distantes do centro da placa para a relação b/a bem maior que a unidade é praticamente nula. Esta conclusão é convalidada com os resultados obtidos pelo MEF.

No caso de placas retangulares apoiadas nos lados maiores e engastadas nos menores, carregadas uniformemente, pelos processos de Lévy, Marcus, Czerny e Elementos Finitos, os resultados obtidos mostraram-se compatíveis, assim os processos de Marcus e Czerny utilizados na prática são válidos.

No caso de placas retangulares apoiadas nos lados maiores e engastadas nos menores, sob carga concentrada, pelos processos de Lévy e Elementos Finitos, os resultados obtidos mostraram-se compatíveis. Sendo que Marcus e Czerny não fornecem resultados neste caso.

No caso de placas retangulares engastadas nos 4(quatro) lados, carregadas uniformemente, pelos processos de Lévy, Marcus, e Elementos Finitos, os resultados obtidos mostraram-se compatíveis, sendo o processo de Marcus menos conservativo.

No caso de placas retangulares engastadas nos 4(quatro) lados, sob carga concentrada, pelos processos de Lévy, e Elementos Finitos, os resultados obtidos mostraram-se compatíveis.

5.2 Propostas para Trabalhos Futuros

1. Analisar os efeitos de concentrações de tensões em regiões próximas de aplicação de cargas concentradas;
2. Analisar os efeitos de segunda ordem nos esforços e deflexões de placas finas;
3. Analisar as deflexões e esforços em placas de materiais compósitos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Oliveira, Wlamir C., 2004, “Método dos Elementos Finitos aplicado à Mecânica Estrutural”, Apostila, UNIFEL.

Polillo, Adolpho, 1981, “Dimensionamento de Concreto Armado”, vol. 2, 4ª Edição, Livraria Nobel, São Paulo.

Rocha, Aderson M.,1978, “Novo Curso Prático de Concreto Armado”, vol. 1, 16ª Edição, Editora Científica, Rio de Janeiro.

Timoshenko, Stephen P., 1966, “Resistência dos Materiais”, vol. 1 1ª Edição, Ao Livro Técnico S. A., Rio de Janeiro, Brasil.

Timoshenko, Stephen P., 1966, “Resistência dos Materiais”, vol. 2ª Edição, Ao Livro Técnico S. A., Rio de Janeiro, Brasil.

Timoshenko, Stephen P., 1940, “Theory of Plates and Shells”, 1ª Edition, McGraw-Hill Book Company, New York and London.

Timoshenko, Stephen P.; Goodier, J. N.,1980, “Teoria da Elasticidade”, 1ª Edição, Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro.

Timoshenko, Stephen P.; Woinowsky-Krieger, S., 1940, “Theory of Plates and Shells”, 2nd Edition, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd.

Zagottis, Décio de, 1982, “Introdução à Teoria das Estruturas”, Escola Politécnica (USP)

APÊNDICE A

Tabela 1

Constantes α , β , γ , δ , n para uma placa simplesmente apoiada e carregada uniformemente

| b/a | W_{\max} $= \alpha \frac{qa^4}{D}$ | $(M_z)_{\max}$ $= \beta qa^2$ | $(M_y)_{\max}$ $B_1 qa^2$ | $(Q_x)_{\max}$ $= \gamma qa$ | $(Q_y)_{\max}$ $= \gamma_1 qa$ | $(V_x)_{\max}$ $= \delta qa$ | $(V_y)_{\max}$ $= \gamma_1 qa$ | R $= nqa^2$ |
|----------|---|----------------------------------|------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|------------------|
| α | β | β | B_1 | γ | γ_1 | δ | δ_1 | n |
| 1.0 | 0.00406 | 0.0479 | 0.0479 | 0.338 | 0.338 | 0.420 | 0.420 | 0.065 |
| 1.1 | 0.00485 | 0.0554 | 0.0493 | 0.360 | 0.347 | 0.440 | 0.440 | 0.070 |
| 1.2 | 0.00564 | 0.0627 | 0.0501 | 0.380 | 0.353 | 0.455 | 0.453 | 0.074 |
| 1.3 | 0.00638 | 0.0694 | 0.0503 | 0.397 | 0.357 | 0.468 | 0.464 | 0.079 |
| 1.4 | 0.00705 | 0.0755 | 0.0502 | 0.411 | 0.361 | 0.478 | 0.471 | 0.083 |
| 1.5 | 0.00772 | 0.0812 | 0.0498 | 0.424 | 0.363 | 0.486 | 0.480 | 0.085 |
| 1.6 | 0.00830 | 0.0862 | 0.0492 | 0.435 | 0.365 | 0.491 | 0.485 | 0.086 |
| 1.7 | 0.00883 | 0.0908 | 0.0486 | 0.444 | 0.367 | 0.496 | 0.488 | 0.088 |
| 1.8 | 0.00931 | 0.0948 | 0.0479 | 0.452 | 0.368 | 0.499 | 0.491 | 0.090 |
| 1.9 | 0.00974 | 0.0985 | 0.0471 | 0.459 | 0.369 | 0.502 | 0.494 | 0.091 |
| 2.0 | 0.01013 | 0.1017 | 0.0464 | 0.465 | 0.370 | 0.503 | 0.496 | 0.092 |
| 3.0 | 0.01223 | 0.1189 | 0.0406 | 0.493 | 0.372 | 0.505 | 0.498 | 0.093 |
| 4.0 | 0.01282 | 0.1235 | 0.0384 | 0.498 | 0.372 | 0.502 | 0.500 | 0.094 |
| 5.0 | 0.01297 | 0.1246 | 0.0375 | 0.500 | 0.372 | 0.501 | 0.500 | 0.095 |
| ∞ | 0.01302 | 0.1250 | 0.0375 | 0.500 | 0.372 | 0.500 | 0.500 | 0.095 |

Tabela 2

Constante α para deflexão de uma placa carregada com carga concentrada central

| b/a | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 | 3,0 | ∞ |
|----------|-------|--------|---------|---------|--------|--------|---------|--------|----------|
| α | 0,116 | 0,1265 | 0,01353 | 0,01484 | 0,0157 | 0,0162 | 0,01651 | 0,0169 | 0,01695 |

Tabela 3

Constantes γ_1 e γ_2

| b/a | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 | ∞ |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|
| γ_1 | -0,565 | -0,350 | -0,211 | -0,125 | -0,073 | -0,042 | 0 |
| γ_2 | 0,135 | 0,115 | 0,085 | 0,057 | 0,037 | 0,023 | 0 |

Tabela 4
Constantes, α , β_1 , β_2 , γ para uma placa retangular com dois lados simplesmente apoiados e os outros dois engastados, carregada uniformemente.

$$\nu = 0.3$$

$$b < a$$

| $\frac{a}{b}$ | $x = \frac{a}{2}, y = 0$ $w_{\max} = \alpha \frac{qb^4}{D}$ α | $x = \frac{a}{2}, y = 0$ $M_x = \beta_1 qb^4$ β_1 | $x = \frac{a}{2}, y = 0$ $M_y = \beta_2 qb^2$ β_2 | $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ $M_y = \gamma qb^2$ γ |
|---------------|--|---|---|---|
| ∞ | 0.00260 | 0.0125 | 0.0417 | -0.0833 |
| 2 | 0.00260 | 0.0142 | 0.0420 | -0.0842 |
| 1.5 | 0.00247 | 0.0179 | 0.0406 | -0.0822 |
| 1.4 | 0.00240 | 0.0192 | 0.0399 | -0.0810 |
| 1.3 | 0.00234 | 0.0203 | 0.0388 | -0.0794 |
| 1.2 | 0.00223 | 0.0215 | 0.0375 | -0.0771 |
| 1.1 | 0.00209 | 0.0230 | 0.0355 | -0.0739 |
| $b > a$ | | | | |
| $\frac{b}{a}$ | $w_{\max} = \alpha \frac{qa^4}{D}$ α | $x = \frac{a}{2}, y = 0$ $M_y = \beta_1 qa^4$ β_1 | $x = \frac{a}{2}, y = 0$ $M_y = \beta_2 qa^2$ β_2 | $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ $M_y = \gamma qa^2$ γ |
| 1 | 0.00192 | 0.0244 | 0.0332 | -0.0697 |
| 1.1 | 0.00251 | 0.0307 | 0.0371 | -0.0787 |
| 1.2 | 0.00319 | 0.0376 | 0.0400 | -0.0868 |
| 1.3 | 0.00388 | 0.0446 | 0.0426 | -0.0938 |
| 1.4 | 0.00460 | 0.0514 | 0.0448 | -0.0998 |
| 1.5 | 0.00531 | 0.058 | 0.0460 | -0.1049 |
| 1.6 | 0.00603 | 0.0650 | 0.0469 | -0.1090 |
| 1.7 | 0.00668 | 0.0712 | 0.0475 | -0.1122 |
| 1.8 | 0.00732 | 0.0768 | 0.0477 | -0.1152 |
| 1.9 | 0.00790 | 0.0821 | 0.0476 | -0.1174 |
| 2.0 | 0.00844 | 0.0869 | 0.0474 | -0.1191 |
| 3.0 | 0.01168 | 0.1144 | 0.0419 | -0.1246 |
| ∞ | 0.01302 | 0.1250 | 0.0375 | -0.1250 |