

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
CAMPUS DE ITABIRA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Renan Delgado Camurça Lima

**REDES NEURAI APLICADAS NA PREVISÃO DE ÍNDICE SHARPE: EVIDÊNCIA
EM COMPONENTES DO IBOVESPA**

ITABIRA

2023

Renan Delgado Camurça Lima

**REDES NEURAIIS APLICADAS NA PREVISÃO DE ÍNDICE SHARPE: EVIDÊNCIA
EM COMPONENTES DO IBOVESPA**

Dissertação submetida ao Mestrado Profissional em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Itajubá - campus de Itabira como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Engenharia de Produção - mestrado profissional.

Área de concentração: Engenharia de Produção

Orientador: Prof. Henrique Duarte Carvalho, Dr.

ITABIRA

2023

Renan Delgado Camurça Lima

**REDES NEURAIS APLICADAS NA PREVISÃO DE ÍNDICE SHARPE: EVIDÊNCIA
EM COMPONENTES DO IBOVESPA**

Dissertação submetida ao Mestrado Profissional em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Itajubá - campus de Itabira como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Engenharia de Produção - mestrado profissional.

Área de concentração: Engenharia de Produção

Banca examinadora de 14 de julho de 2023.

Banca examinadora:

Prof. Henrique Duarte Carvalho, Dr. - UNIFEI

Prof. Leonardo Albergaria Oliveira, Dr. - UNIFEI

Prof. Michel Carlo Rodrigues Leles, Dr. - DTECH/UFSJ

ITABIRA

2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me dar forças e sabedoria para concluir este trabalho. Agradeço à minha família, aos meus pais e em especial minha companheira, por todo o apoio e incentivo, que foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Henrique Duarte Carvalho, pela paciência e compreensão, que diante dos momentos mais difíceis se mostrou um ser humano incrível, sempre disposto a ajudar. Além de demonstrar um profundo conhecimento e grande capacidade de transmitir sua sabedoria.

Aos professores do Programa de pós-graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Itajubá, pela formação e conhecimento adquirido.

A todos os meus amigos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

A aplicação de modelos de redes neurais com intuito de selecionar ativos para carteiras de investimentos com o uso do índice Sharpe é uma área que tem atraído a atenção de pesquisadores. Este estudo tem como objetivo aplicar redes neurais na previsão do índice Sharpe para seleção de carteiras de investimento. Por meio de uma revisão bibliográfica, são identificados os métodos utilizados na construção de carteiras, assim como as técnicas de otimização e as estruturas de redes neurais empregadas nesse contexto. A construção dos modelos de previsão requer a coleta e o tratamento de dados históricos de ativos financeiros e dados econômicos. O processo de seleção de carteiras é dividido em duas etapas: a otimização baseada no índice Sharpe e a seleção da carteira utilizando redes neurais para previsão da carteira com melhor desempenho no período seguinte. A avaliação do desempenho é realizada em comparação com o índice Bovespa. Os resultados mostram que o modelo sem restrições apresenta melhor desempenho em termos de tempo de otimização e índice Sharpe. As redes neurais, embora não superem as carteiras, demonstram desempenho superior ao Ibovespa. A rede neural LSTM+Atenção de Bahdanau obteve o melhor desempenho. Essas descobertas contribuem para o avanço do conhecimento na área de finanças e destacam o potencial das redes neurais na seleção de carteiras de investimento.

Palavras-chave: Redes Neurais, Índice Sharpe, Otimização de Carteiras, Mecanismo de Atenção

ABSTRACT

The application of neural network models for selecting assets for investment portfolios using the Sharpe ratio has gained the attention of researchers. This study aims to apply neural networks in predicting the Sharpe ratio for investment portfolio selection. Through a literature review, the methods used in portfolio construction, optimization techniques, and neural network structures employed in this context are identified. The construction of prediction models requires the collection and preprocessing of historical data on financial assets and economic indicators. The portfolio selection process is divided into two stages: optimization based on the Sharpe ratio and portfolio selection using neural networks to predict the portfolio with the best performance in the next period. The performance evaluation is compared to the Bovespa index. The results show that the unconstrained model performs better in terms of optimization time and Sharpe ratio. Neural networks, although not surpassing the portfolios, demonstrate superior performance compared to the Ibovespa index. The LSTM+Bahdanau Attention neural network achieved the best performance. These findings contribute to the advancement of knowledge in the field of finance and highlight the potential of neural networks in investment portfolio selection.

Keywords: *Neural Networks, Sharpe Ratio, Portfolio Optimization, Attention Mechanism*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Mapa de citação conjunta em artigos recentes	19
Figura 2 – Relação das referências com os títulos dos documentos selecionados . . .	20
Figura 3 – Otimização de portfólio utilizando o modelo de média-variância	31
Figura 4 – Otimização de portfólio utilizando o modelo com o parâmetro λ de aversão ao risco	32
Figura 5 – Linha do mercado de capitais	33
Figura 6 – Distribuição da perdas do portfólio, VaR, e CVaR	34
Figura 7 – Organização dos ativos na Busca Básica do Núcleo	40
Figura 8 – Célula LSTM.	41
Figura 9 – Mecanismo de atenção.	43
Figura 10 – Algoritmo HyperBand.	44
Figura 11 – Fluxo de processamento da metodologia	47
Figura 12 – Fluxo de pré-processamento de dados	51
Figura 13 – Fluxo de modelagem de dados	53
Figura 14 – Fluxo de otimização de portfólio	57
Figura 15 – Fluxograma de redes neurais de RNN com auto atenção.	58
Figura 16 – Fluxograma de redes neurais de RNN com atenção aditiva.	59
Figura 17 – Estrutura de rede neural LSTM com atenção aditiva.	60
Figura 18 – Estrutura de rede neural LSTM com auto atenção.	61
Figura 19 – Validação cruzada com lacunas.	62
Figura 20 – Fluxo de predição de redes neurais	62
Figura 21 – Evolução da convergência de otimização da carteira	64
Figura 22 – Densidade de probabilidade das carteiras.	66
Figura 23 – Retornos gerados pelas carteiras.	68
Figura 24 – Retorno acumulado das carteiras.	68
Figura 25 – Porcentagem de sucesso na otimização das carteiras.	69
Figura 26 – Função de perda para o treinamento de hiperparâmetros.	70
Figura 27 – Boxplot de acurácia para as redes avaliadas.	70
Figura 28 – Boxplot de acurácia para as redes avaliadas ampliado.	71
Figura 29 – Frequência dos atributos alvos do teste.	71
Figura 30 – Séries temporais de retorno acumulado geradas pelas predições das redes neurais.	72

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Protocolo de revisão sistemática da literatura	18
Quadro 2 – Referências mais citadas pelos documentos selecionados	21
Quadro 3 – Métodos aplicados para avaliação de risco e retorno de ativos em estudos recentes	22
Quadro 4 – Métodos de otimização de carteiras	23
Quadro 5 – Dados coletados	49

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros de mercado e investimento	65
Tabela 2 – Resultados da otimização para os três cenários	65
Tabela 3 – Alocação da carteira de 30 dias	67
Tabela 4 – Índice Sharpe para as redes avaliadas e as carteiras.	73

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANN	<i>Artificial Neural Network.</i>
ARCH	<i>Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.</i>
ARIMA	<i>Autoregressive Integrated Moving Average.</i>
ARMA	<i>Autoregressive Moving Average.</i>
B3	Brasil, Bolsa, Balcão.
CNN	<i>Convolutional Neural Network.</i>
CVaR	<i>Conditional Value-at-Risk.</i>
EWMA	<i>Exponentially Weighted Moving Average.</i>
GA	<i>Genetic Algorithm.</i>
GARCH	<i>Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.</i>
GNN	<i>Graph Neural Network.</i>
GRU	<i>Gated Recurrent Unit.</i>
Ibovespa	Índice Bovespa.
LR	<i>Linear Regression.</i>
LSTM	<i>Long Short-Term Memory.</i>
MA	Média móvel.
MV	Média-Variância.
PSO	<i>Particle Swarm Optimization.</i>
RF	<i>Random Forest.</i>
RL	<i>Reinforcement Learning.</i>
RNN	<i>Recurrent Neural Network.</i>
SLSQP	<i>Sequential Least Squares Programming.</i>
SVR	<i>Support Vector Regression.</i>
VaR	<i>Value-at-Risk.</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO.....	12
1.2	JUSTIFICATIVA	14
1.3	OBJETIVOS	14
1.3.1	Objetivo Geral	14
1.3.2	Objetivos Específicos	15
1.4	LIMITAÇÕES DA PESQUISA	15
1.5	ESTRUTURA DE PESQUISA.....	15
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1	REVISÃO SISTEMÁTICA DA LITERATURA	17
2.1.1	Métodos de risco e retorno de ativos	22
2.1.2	Métodos de otimização e estruturas de redes neurais	23
2.1.3	Restrições Reais	25
2.2	RISCO E RETORNO DE ATIVOS	25
2.2.1	Retorno	26
2.2.2	Risco	28
2.3	OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIO.....	30
2.3.1	Modelos de Otimização de portfólio	30
2.3.2	Otimização com parâmetros reais	35
2.3.3	Métodos de Otimização	38
2.3.4	Heurística	39
2.4	REDES NEURAS ARTIFICIAIS	40
2.4.1	Redes Neurais Recorrentes	41
2.4.2	Mecanismo de Atenção	42
2.4.3	Otimização de hiperparâmetros	44
3	METODOLOGIA	46
3.1	COLETA DE DADOS	47
3.2	PRÉ-PROCESSAMENTO DE DADOS.....	49

3.3	MODELAGEM DE DADOS	51
3.4	OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIO.....	53
3.5	TREINAMENTO E VALIDAÇÃO DE REDES NEURAS	57
4	RESULTADO E DISCUSSÃO.....	64
4.1	OTIMIZAÇÃO COM PARÂMETROS REAIS	64
4.2	REDES NEURAS	67
5	CONCLUSÃO.....	74
5.1	RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	74
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	75
	APÊNDICE A	81
	APÊNDICE B - PRODUÇÃO CIENTÍFICA.....	85

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

O mercado financeiro gerencia trilhões de dólares com uso da teoria moderna de portfólios elaborada pelo laureado do prêmio Nobel de economia Harry Markowitz (SETHI, 2021). As discussões sobre a teoria foram aprofundadas pelo também laureado William Sharpe, que aborda a estratégia de maximização de uma carteira de investimentos, considerando tanto o risco quanto o retorno.

A intuição do investidor seria que a máxima diversificação para um retorno esperado da carteira geraria um portfólio de mínima variância, isto é, com menor risco. Contudo, esta hipótese é rejeitada segundo a teoria de Markowitz (1952), pois existe uma combinação ideal de ativos que compõem uma carteira de forma eficiente maximizando o retorno com o menor nível de risco. Portanto, a cada retorno esperado há uma combinação eficiente dos ativos que gera uma carteira de mínima variância, assim formando uma fronteira eficiente de combinações de ativos.

A escolha da carteira eficiente é feita com base na relação entre risco e retorno. Segundo Sharpe (1964), os investidores exigem um prêmio de retorno para assumir riscos adicionais. Desta maneira, a preferência dá-se pela aceitação ao risco, em que para opções de investimentos com o mesmo retorno esperado, o investidor escolherá a opção com menor risco (LINTNER, 1965).

Este prêmio por unidade de risco é conhecido como o índice Sharpe (SHARPE, 1994). O termo foi apresentado por Treynor e Black (1973) em reconhecimento as contribuições feitas na avaliação de desempenho de fundos feita por Sharpe (1966), e atualmente é uma das medidas mais utilizadas para avaliação de desempenho de carteiras de investimento.

Considerando que existe a opção para o investidor realizar empréstimo ou tomar emprestado a uma taxa livre de risco, é possível construir uma carteira eficiente que combina o empréstimo com todos os investimentos disponíveis no mercado. Esta combinação forma uma linha reta que tangencia a fronteira eficiente de ativos. Esta linha é denominada linha do mercado de capitais, e a carteira eficiente que tangencia a linha é chamada de carteira de mercado, que apresenta o maior prêmio por unidade risco (SHARPE, 1964).

Uma estratégia de construção de carteira de investimentos é a otimização do índice Sharpe, que consiste em maximizar o índice Sharpe para uma carteira de ativos para obter a carteira de mercado (MAREE; OMLIN, 2022). Para a otimização da carteira é necessário estimar o retorno e o risco da carteira. A estimativa do retorno esperado é feita com base em dados históricos, e o risco é estimado com base na matriz de correlação dos ativos e a volatilidade de cada ativo.

Modelos de otimização também combinam previsão das séries temporais para estimar o retorno esperado da carteira. Modelos tradicionais de previsão de séries temporais, aplicam métodos estatísticos que consideram as séries como modelos lineares (ZHOU et al., 2023).

Dentre estes há os modelos de médias móveis auto-regressivas integradas (ARIMA, do inglês *Autoregressive Integrated Moving Average*), e heterocedasticidade condicional autoregressiva generalizada (GARCH, do inglês *Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity*).

Entretanto, séries temporais de ativos financeiros como ações, apresentam uma dinâmica de processo não linear. Há diversas abordagens para capturar dados não lineares, dentre estes há as redes neurais artificiais, modelos de redes neurais profundas, ou a rede neural recorrente que se provaram como ferramentas válidas para aplicações para dados de séries temporais multivariada (CAO; CAO; NGUYEN, 2020). Além disso, os modelos podem ser combinados com métodos de otimização para a seleção de carteiras de investimentos (DU, 2022).

A aplicação de modelos de redes neurais com intuito de selecionar ativos para carteiras de investimentos é uma área que tem atraído a atenção de pesquisadores. O índice Sharpe tem sido utilizado em estudos como a função objetivo para a otimização de carteiras de investimentos com modelos de redes neurais (TRAN; PHAM-HI; BUI, 2023). Além disso, estuda-se a aplicação de redes neurais para predição do maior índice Sharpe no futuro (VUKOVIC et al., 2020).

Em geral, as redes neurais recorrentes (RNN, do inglês *Recurrent Neural Network*) têm se mostrado eficientes para previsão de séries temporais de ações (WANG et al., 2020), em especial uma variante, a RNN memória de longo prazo com curto prazo (LSTM, do inglês *Long Short-Term Memory*). Estes modelos de redes neurais utilizam uma camada de memória que permite a rede aprender dependências de longo prazo, e são capazes de capturar padrões de séries temporais não lineares para realizar previsões (HOCHREITER; SCHMIDHUBER, 1997).

Há a possibilidade de combinar estruturas de redes neurais entre si para obter melhores resultados. O mecanismo de atenção tem sido efetivamente aplicado na área de processamento de linguagem natural, utilizado para melhorar o desempenho de modelos de redes neurais para previsão de séries temporais. Como exemplo, Sun et al. (2022) desenvolveu um modelo para as séries temporais que combina uma rede neural convolucional com *transformer* (rede neural baseada no mecanismo de atenção) para otimização de uma carteira de investimentos com objetivo de maximização do índice Sharpe.

Em modelos de otimização há restrições e parâmetros que podem ser adicionados para tornar o problema próximo ao real. Mulvey et al. (2020) propõe um modelo de otimização de carteira de investimentos com redes neurais que considera a taxa de transação.

A aplicação de restrições como a taxa de transação, limitação de capital, e restrições como a de cardinalidade, que limita o número de ativos na carteira tornam o problema próximo da realidade, contudo aumentam a complexidade de resolução (AITHAL et al., 2023). Uma abordagem para resolução de problemas complexos é a utilização de métodos heurísticos, que são métodos de busca que não garantem a solução ótima, mas são capazes de encontrar soluções próximas da ótima em um tempo computacionalmente viável (MILHOMEM; DANTAS, 2020).

Os estudos sobre otimização de carteiras de investimentos pelo índice Sharpe têm ap-

resentado somente uma restrição real, o efeito do custo de transação. Em maioria negligenciam questões como lote padrão, a aversão ao risco e outras restrições afetam a decisão sobre a alocação de ativos. Estes parâmetros seguem as regulações e práticas exercidas no mercado em que se inserem.

O índice Bovespa (Ibovespa) é o principal indicador de desempenho das ações do mercado de capitais brasileiro e referência para investidores, reunindo as empresas mais importantes do mercado nacional. A composição do ativo é construída com base nos seguintes critérios: quanto ao volume financeiro no mercado a vista, quanto índice de negociabilidade e presença no pregão, e quanto ao valor do ativo (B3, 2023).

Portanto, este trabalho propõe a combinação dos métodos de otimização de carteira de investimentos com a aplicação de redes neurais para predição da carteira com melhor índice Sharpe, restrito a componentes do Ibovespa. Desta forma, busca-se construir carteiras de investimentos com base em modelos de risco e retorno por otimização do índice Sharpe com parâmetros reais. Avalia-se em seguida estruturas de redes neurais para seleção da melhor carteira de investimentos para o próximo período.

1.2 JUSTIFICATIVA

A teoria moderna de portfólio de Markowitz continua uma base amplamente utilizada para seleção de carteiras de investimentos. Gestores de fundos de investimentos e investidores individuais utilizam a teoria de Markowitz para selecionar carteiras de investimentos com base em modelos de risco e retorno. O processo de seleção de carteiras passa por diversas etapas, como a definição de um universo de ativos, a definição de um modelo de risco e retorno, a aplicação de um método de otimização para seleção de carteiras de investimentos, e a avaliação de desempenho da carteira de investimentos.

Este processo é complexo e demanda tempo e conhecimento do investidor. A aplicação de modelos de redes neurais para previsão de índice Sharpe pode auxiliar o investidor a tomar decisões de alocação de ativos, e a prever o desempenho de sua carteira de investimentos.

Logo, a contribuição deste trabalho é o desenvolvimento de uma ferramenta de seleção de carteiras de investimentos com a construção de um fluxo de processamento que permita o investidor obter uma carteira de investimento para a sua realidade, com base em um modelo de risco e retorno, e com a aplicação de redes neurais para previsão de índice Sharpe.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver e analisar uma estrutura que aplica redes neurais para seleção da melhor carteira de investimentos no período seguinte com base em carteiras otimizadas com índice Sharpe.

1.3.2 Objetivos Específicos

1. Realizar uma revisão sistemática da literatura sobre seleção de carteiras de investimentos, com base em modelos de risco e retorno, e com base em redes neurais.
2. Construir ferramenta para coleta de dados históricos de ativos financeiros e dados econômicos de forma estruturada e com qualidade de dados.
3. Desenvolver um modelo de alocação de ativos baseado no cálculo do índice Sharpe e com base em modelos de risco e retorno incluindo parâmetros reais.
4. Elaborar estruturas de redes neurais para previsão de índice Sharpe e seleção da melhor carteira de investimentos.
5. Analisar o desempenho da seleção de carteiras de investimentos aplicados a este fluxo de processamento de duas etapas.

1.4 LIMITAÇÕES DA PESQUISA

O índice Sharpe é uma ferramenta amplamente utilizada para avaliar desempenho de carteiras de investimentos. Este estudo não busca avaliar a previsão de valor do índice Sharpe para uma carteira específica. O objetivo é utilizar a previsão de índice Sharpe para selecionar a melhor carteira de investimentos dentre um conjunto de carteiras de investimentos que aplicam o índice Sharpe como critério de seleção de ativos.

O desenvolvimento deste estudo não contempla financiamento para aquisição de dados de mercado. Portanto, a coleta de dados de mercado é limitada a fontes gratuitas disponíveis na internet. O que tornou necessário o desenvolvimento de uma ferramenta de coleta de dados de mercado de forma estruturada e com qualidade de dados.

O mercado financeiro é um ambiente dinâmico e complexo. Além disso, há diversos produtos financeiros com diferentes características. Portanto, este estudo não contempla a avaliação de todos os produtos financeiros disponíveis no mercado, se restringindo a avaliação de ativos financeiros de renda variável que compõem o índice Bovespa.

Corretoras intermedeiam as transações de compra e venda de ativos financeiros. Portanto, há custos de transação para compra e venda de ativos financeiros, além de custos de custódia. Este estudo se limita a dados obtidos de somente uma corretora para referência.

1.5 ESTRUTURA DE PESQUISA

Nesta seção de introdução, foi apresentado o contexto, a justificativa, os objetivos e as limitações da pesquisa. O restante deste trabalho está organizado da seguintes seções. Na seção 2 é apresentado o referencial teórico, com uma avaliação sistemática da literatura, em que avalia os principais textos que fundamentam os estudos recentes, além de identificar nos estudos recentes quais os métodos utilizados para o problema de otimização de carteiras considerando

a utilização do índice Sharpe. Essa seção explora a fundamentação dos conceitos e métodos utilizados neste estudo.

Na seção 3 é apresentada a metodologia de pesquisa, com a descrição dos dados utilizados, a descrição do modelo de otimização de carteiras de investimentos, e descrição das estruturas de redes neurais para previsão de índice Sharpe, e a metodologia aplicada para validação dos modelos.

Na seção 4 são apresentados os resultados obtidos com a aplicação dos modelos de otimização de carteiras de investimentos e de redes neurais para previsão de índice Sharpe. Na seção 5 são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros. Na seção seguinte é apresentada as referências bibliográficas utilizadas neste estudo.

Apêndices são apresentados ao final deste trabalho, contendo as peças de códigos desenvolvidos neste trabalho, e a produção científica gerada durante o desenvolvimento deste estudo.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção são apresentados os conceitos e modelos matemáticos que fundamentam o desenvolvimento deste trabalho. Para elaborar a fundamentação destes conceitos, são considerados três aspectos: modelos de risco e retorno de ativos financeiros, métodos e parâmetros de otimização de portfólio e estruturas de redes neurais. Estes aspectos são abordados considerando a aplicação do índice Sharpe nas pesquisas relacionadas ao tema de pesquisa deste trabalho.

A avaliação destes aspectos passa por uma revisão sistemática da literatura, avaliando-se as referências historicamente mais relevantes e identificar estudos recentes sobre o tema. A partir da revisão bibliográfica, é possível identificar os métodos utilizados para construção de carteiras. Assim, busca-se identificar as tecnologias referentes a avaliação de risco e retorno para construção de carteiras de investimentos, identificar as técnicas de otimização para previsão de índice Sharpe e as estruturas de redes neurais para seleção de carteiras.

Esta revisão sistemática da literatura é apresentada na seção 2.1. A seção 2.2 apresenta os modelos de risco e retorno de ativos financeiros, a seção 2.3 apresenta os modelos de otimização de portfólio e a seção 2.4 apresenta as estruturas de redes neurais.

2.1 REVISÃO SISTEMÁTICA DA LITERATURA

A revisão sistemática da literatura busca identificar as principais referências relacionadas ao tema, seguindo um protocolo orientado a este objetivo. As etapas para um protocolo de revisão sistemática são: definição da questão de pesquisa, definição dos critérios de seleção, busca e seleção dos estudos, extração dos dados e análise dos resultados. Pode-se utilizar métodos matemáticos e estatísticos para auxiliar na análise dos resultados, como a análise bibliométrica (YU et al., 2018).

Milhomem e Dantas (2020) apresenta uma revisão sistemática da literatura sobre otimização de carteiras dado a dual de risco e retorno para avaliação de questões sobre métodos, técnicas e ferramentas para otimização, quais restrições reais são aplicadas, e que tipo de análise financeira foi realizada na pesquisa, além dos programas utilizados. Complementando o estudo de Milhomem e Dantas (2020), o protocolo utilizado para revisão sistemática é descrito no quadro 1.

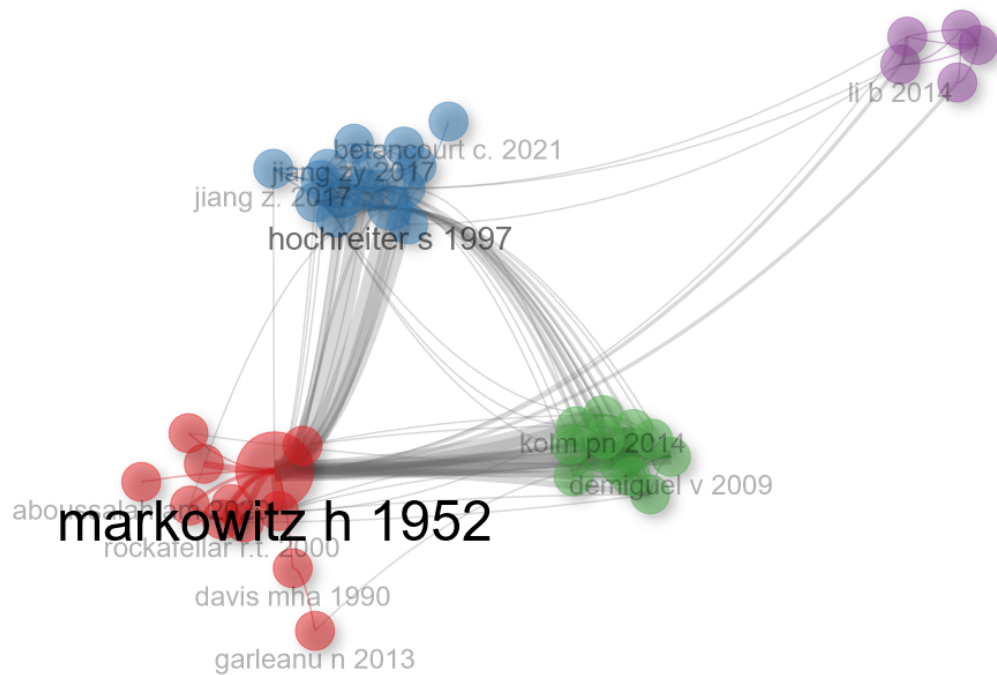
Quadro 1 – Protocolo de revisão sistemática da literatura

Estágio	Descrição
Tema central:	Redes neurais aplicados a otimização de carteiras de investimentos.
Estrutura conceitual:	O modelo de Markowitz contribuiu para diversos outros estudos explorarem métodos para a otimização de carteiras. O objetivo desta revisão é identificar os métodos mais relevantes para três aspectos: modelos de risco e retorno de ativos financeiros, métodos e restrições para otimização de portfólio e estruturas de redes neurais aplicado ao índice Sharpe.
Escopo:	A revisão será realizada considerando os artigos publicados entre 2019 a 2023, com objetivo de encontrar os documentos mais relevantes publicados nos últimos 5 anos.
Corrente teórica:	Otimização de portfólio, redes neurais e índice Sharpe.
Idioma:	Inglês.
Questões de pesquisa:	Questão 1: Quais são os métodos utilizados para avaliação de risco e retorno de ativos financeiros? Questão 2: Quais são os métodos e restrições reais aplicados para otimização de portfólio? Questão 3: Quais estruturas de redes neurais são aplicadas ao índice Sharpe?
CrITÉrios de inclusão:	Título, palavras chaves ou resumos que apresentam relação com otimização de portfólio e estruturas de redes neurais aplicado ao índice Sharpe.
CrITÉrios de exclusão:	Artigos duplicados, ou não públicos e sem acesso via CAPES.
Termos de busca:	Pesquisa 1: <i>Portfolio optimization & Neural Network</i> , Pesquisa 1: <i>Portfolio optimization & Machine Learning</i> , Pesquisa 3: <i>Portfolio optimization & Deep Learning</i> ,
Fontes de pesquisa:	<i>Web of Science</i> .

Fonte: próprio autor.

Como resultado do processo de revisão sistemática, de uma lista de 577 artigos da base de dados, foram identificados 48 que atendem aos critérios de inclusão. Para obter uma visão macro sobre os artigos, foi realizada uma análise bibliométrica com uso da ferramenta bibliometrix (ARIA; CUCCURULLO, 2017). Inicialmente, para observar as referências mais citadas em conjunto, foi realizada uma análise de co-citação. A figura 1 apresenta o mapa de co-citação dos artigos.

Figura 1 – Mapa de citação conjunta em artigos recentes

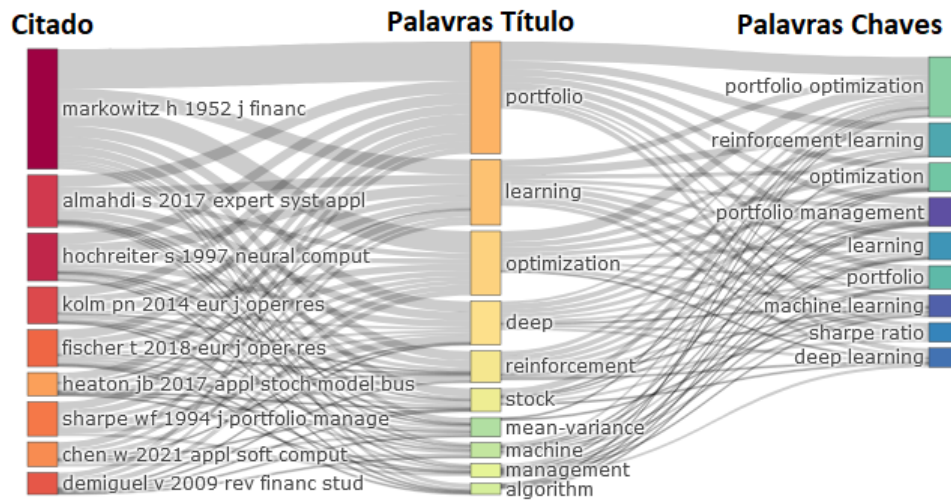


Fonte: próprio autor, gerado com *bibliometrix*.

Dentre os artigos mais citados em conjunto, observa-se que Markowitz (1952) é a referência que apresenta maior número de conexões entre as citações. Isto ocorre, pois a fundamentação da teoria de seleção de portfólio tem como base este trabalho. É possível observar que há a formação de alguns grupos de co-citação. Um grupo contém os documentos de Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014), que realiza uma revisão ampla de 60 anos da teoria de otimização de portfólio, em conjunto com DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), que compara resultados de portfólio ótimos com modelos uniformes $1/N$. Outro grupo, contém o documento de Hochreiter e Schmidhuber (1997), que apresenta a estrutura de redes neurais recorrentes LSTM.

A relação das referências com os documentos selecionados é avaliada na figura 2. Nesta figura é realizado o filtro das 10 referências mais citadas pelos artigos selecionados, e quais palavras dos títulos e palavras-chaves são mais recorrentes e alinhadas com as referências.

Figura 2 – Relação das referências com os títulos dos documentos selecionados



Fonte: próprio autor, gerado com *bibliometrix*.

Pela figura 2, nota-se que as principais referências estão relacionadas com o tema de otimização de portfólio, com aprendizagem de máquina e com o índice Sharpe. Portanto, os artigos selecionados estão alinhados com o tema de pesquisa deste trabalho.

Para uma melhor compreensão das principais referências, artigos com 5 ou mais citações pelos documentos selecionados são descritos no quadro 2.

Quadro 2 – Referências mais citadas pelos documentos selecionados

Referência citada	Citações	Visão Geral
Markowitz (1952)	31	Teoria Moderna de Portfólio.
Almahdi e Yang (2017)	8	Alocação de carteira utilizando aprendizagem por reforço recorrente com máximo <i>drawdown</i> .
Hochreiter e Schmidhuber (1997)	8	Redes neurais recorrentes LSTM.
Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014)	8	Revisão de 60 anos da teoria de otimização de portfólio.
DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009)	7	Comparação de portfólio ótimo com modelo uniforme $1/N$.
Fischer e Krauss (2018)	7	Previsão de movimento de mercado com LSTM aplicado a grande dimensionalidade.
Sharpe (1994)	7	Índice de Sharpe.
Chen et al. (2021)	6	Combina método de previsão de aprendizagem de máquina XGBoost com modelo de média-variância para seleção de carteiras.
Heaton, Polson e Witte (2017)	6	Revisão sobre o arcabouço de otimização de portfólio utilizando aprendizagem profunda.
Moody et al. (1998)	6	Aprendizagem por reforço com aplicação do índice Sharpe com custos de transação para construção de carteiras.
Wang et al. (2020)	6	Combinação de LSTM com modelo de média-variância para construção de carteira ótima.
Artzner et al. (1999)	5	Avaliação sobre a compreensão, aceitação e percepção de risco.
Chen e Guestrin (2016)	5	Método de aprendizagem de máquina de larga escala XGBoost.
Chong, Han e Park (2017)	5	Modelo de aprendizagem profunda de atributos para previsão de mercado de ações.
Deng et al. (2017)	5	Modelo de aprendizagem profunda para identificação de atributos combinado com aprendizagem com reforço para ação de investimentos.
Kingma e Ba (2015)	5	Algoritmo de otimização Adam aplicado a redes neurais.
Mnih et al. (2015)	5	Aprendizagem por reforço profundo aplicado a jogos Atari.
Rockafellar e Uryasev (2000)	5	Valor em risco condicional CVaR.
Sutton e Barto (2018)	5	Introdução sobre aprendizagem por reforço.

Fonte: próprio autor.

A partir da análise do quadro 2, pode-se identificar algumas temáticas principais, modelos de otimização de carteiras, modelos de aprendizagem de máquina, e combinação de ambos. Os principais modelos de otimização são o de média-variância de Markowitz (1952), maximização do índice Sharpe (SHARPE, 1994), e o de valor em risco condicional de Rockafellar e Uryasev (2000). Os modelos de aprendizagem de máquina mais citados são LSTM de Hochreiter e Schmidhuber (1997), XGBoost de Chen e Guestrin (2016) e aprendizagem por reforço para finanças de Moody et al. (1998) combinados com redes neurais (MNIH et al., 2015).

2.1.1 Métodos de risco e retorno de ativos

Avaliando o conteúdo dos estudos selecionados quanto a quais são os métodos mais utilizados para risco e retorno de ativos, foi elaborado o quadro 3 que apresenta os métodos por algumas referências. Quando não realizada a otimização diretamente pela rede neural, aplica-se os seguintes métodos de risco e retorno nas séries temporais para o cálculo das carteiras.

Quadro 3 – Métodos aplicados para avaliação de risco e retorno de ativos em estudos recentes

Referência	Risco e Retorno
Yu et al. (2019)	copula-GARCH
Ta, Liu e Tadesse (2020)	Média e Covariância
Yu e Chang (2020)	GARCH
Vukovic et al. (2020)	Média Móvel
Zhu et al. (2020)	Média Móvel Exponencial
Lee, Koh e Choe (2021)	Média Móvel
Leow, Nguyen e Chua (2021)	Média Móvel Exponencial
Liang et al. (2021)	Média Móvel Exponencial
Chaweewanchon e Chaysiri (2022a)	Média, Mediana
Zhou et al. (2023)	Média Móvel

Fonte: próprio autor.

Assim, pode-se observar que os métodos mais utilizados são a média móvel exponencial, média móvel, média e covariância, e GARCH para a consideração de risco e retorno de ativos como forma de entrada para otimização. A média e covariância representa o retorno médio da série temporal e a covariância a relação do desvio padrão do ativo e correlação entre este e os demais (MARKOWITZ, 1952). A média móvel é um método de suavização de séries temporais. A média móvel exponencial é um método de suavização de séries temporais, que atribui pesos decrescentes para os dados mais antigos, e pesos crescentes para os dados mais recentes (WINTERS, 1960). O GARCH é um modelo de previsão de volatilidade de séries temporais, que considera a volatilidade condicional, ou seja, a volatilidade de um período é calculada em função da volatilidade do período anterior (BOLLERSLEV, 1986). Portanto, neste trabalho serão consideradas os modelos de risco e retorno avaliados por estes estudos.

2.1.2 Métodos de otimização e estruturas de redes neurais

Quando avaliado quais são os métodos de otimização e também quais estruturas de redes neurais são utilizadas, foi elaborado o quadro 4 que apresenta ambas as informações.

Quadro 4 – Métodos de otimização de carteiras

Referência	Modelo de Otimização	Modelo de Aprendizagem de Máquina
Yu et al. (2019)	CVaR	ANN
Aboussalah e Lee (2020)	Sharpe	RL
Cao, Cao e Nguyen (2020)	Sharpe	LSTM, GRU, Additive Attention, Self-Attention, CNN, RL
Ta, Liu e Tadesse (2020)	1/N, MV	LSTM, GRU, LR, SVR
Vukovic et al. (2020)	Sharpe	ANN
Wang et al. (2020)	MV	LSTM
Weng et al. (2020)	Máximo Retorno	CNN, RL, Attention
Yu e Chang (2020)	CVaR	ANN
Daiya e Lin (2021)	Máximo Retorno	Transformer, CNN, RL
Kruger, Zyl e Paskaramoorthy (2021)	AMA-K	AMA-K
Lee, Koh e Choe (2021)	Sharpe	LSTM, RL
Leow, Nguyen e Chua (2021)	MV	Transformer
Min et al. (2021)	VaR, CVaR	LSTM, XGBoost
Chaweewanchon e Chaysiri (2022b)	MV, 1/N	CNN, LSTM
Du (2022)	MV	Attention, LSTM
Gao et al. (2022)	Sharpe	RL, CNN
Jia e Cai (2022)	Sharpe, MV, PSO	RL
Maree e Omlin (2022)	Sharpe	RL+GA
Solares et al. (2022)	1/N, GA	ANN
Yang, Park e Lee (2022)	Máximo Retorno	RL
Yue, Liu e Zhang (2022)	Máximo Retorno	LSTM, RL
Aithal et al. (2023)	Sharpe, Meta-heurísticas	k-médias
Jang e Seong (2023)	Máximo Retorno	RL, CNN
Kisiel e Gorse (2023)	Sharpe	Transformer, GNN, ANN, RL
Ngo, Nguyen e Nguyen (2023)	MV, Sharpe	RL, LSTM
Zhou et al. (2023)	Sharpe, MV, 1/N	SVR, XGBoost, LightGBM, RF, e LSTM

Fonte: próprio autor.

A partir do quadro 4 é possível observar que os principais modelos para a otimização são CVaR, Sharpe, Média-Variância (MV), $1/N$ e máximo retorno. O modelo de otimização por máximo retorno busca maximizar o retorno esperado de um portfólio. O modelo de otimização MV busca minimizar a variância de um portfólio para um retorno esperado (MARKOWITZ, 1952). O modelo de otimização Sharpe busca maximizar o retorno de um portfólio a partir do risco do portfólio (SHARPE, 1994). O modelo de otimização CVaR, considera a média de perdas de um portfólio a partir de um limite de perda determinado (URYASEV, 2000), buscando minimizar este valor. O modelo de otimização $1/N$ busca alocar o mesmo peso para todos os ativos do portfólio (DEMIGUEL; GARLAPPI; UPPAL, 2009).

Com relação aos modelos de aprendizagem de máquina, os mais recorrentes nos estudos atuais são LSTM, a aprendizagem por reforço (RL, do inglês, *Reinforcement Learning*) com aplicação de redes neurais. Algumas estruturas fazem a combinação de outros modelos de redes neurais, com as redes neurais convolucionais (CNN, do inglês *Convolutional Neural Network*) (WENG et al., 2020) (DAIYA; LIN, 2021)(CHAWEEWANCHON; CHAYSIRI, 2022a) (GAO et al., 2022), com mecanismos de atenção (*Transformer, Attention, Self-Attention, Additive Attention*)(CAO; CAO; NGUYEN, 2020) (WENG et al., 2020) (DAIYA; LIN, 2021)(LEOW; NGUYEN; CHUA, 2021) (DU, 2022) (KISIEL; GORSE, 2023), ou com uma camada final de redes neurais artificiais (ANN, do inglês *Artificial Neural Network*).

As ANN são modelos de aprendizagem de máquina que buscam simular o funcionamento do cérebro humano (ROSENBLATT, 1958). Este modelo é a base para os modelos de redes neurais mais complexos, como as Redes Neurais Recorrentes (RNN, do inglês, *Recurrent Neural Network*), que estruturam as redes neurais de forma que a saída de uma camada seja a entrada da próxima camada, permitindo o sequenciamento dos dados. A LSTM e a Unidade Recorrente de Portões (GRU, do inglês *Gated Recurrent Unit*) são RNN que possuem mecanismos de controle de fluxo de informação, permitindo que a rede neural aprenda a esquecer ou lembrar informações (HOCHREITER; SCHMIDHUBER, 1997)(CHO et al., 2014).

Estruturas tem sido propostas para melhorar o desempenho das redes neurais recorrentes, como a rede neural recorrente com mecanismo de atenção. Os modelos de mecanismo de atenção são baseados em uma função de atenção, que calcula a importância de cada elemento de uma sequência para a saída da rede neural (BAHDANAU; CHO; BENGIO, 2015)(LUONG; PHAM; MANNING, 2015)(VASWANI et al., 2017). A aplicação no contexto de redes neurais recorrentes com mecanismo de atenção para o problema de otimização de portfólio tem obtido resultados acima dos modelos tradicionais. Cao, Cao e Nguyen (2020) desenvolveram uma estrutura com RNN combinados com mecanismos de atenção para realizar a otimização de uma carteira de investimento aplicando o índice Sharpe como a função para ser maximizada. Estas estruturas serão avaliadas para a seleção de carteiras de investimento neste trabalho.

2.1.3 Restrições Reais

Em relação a avaliação das restrições reais inseridas no modelo de otimização, poucos estudos aplicaram estas restrições em seus modelos para otimização de carteiras. Aboussalah e Lee (2020), Kisiel e Gorse (2023) e Yang, Park e Lee (2022) utilizaram o método de aprendizagem por reforço e aplicaram o custo de transação em seus cálculos. Aboussalah e Lee (2020) também considerou na avaliação o rebalanceamento das carteiras e a cardinalidade, isto é, a limitação de quantidade de ativos na carteira, com objetivo de tornar mais próximas as decisões que um investidor considera para composição de uma carteira.

A revisão sistemática realizada por Milhomem e Dantas (2020) identificou que estudos de otimização para modelos de Média-Variância, sem considerar modelos de redes neurais, aplicam também restrições de quantidade de um ativo na carteira, de dependência entre os ativos, de utilização de lotes de negociação, a aplicação de reinvestimento e a decisão de somente posições de compra.

A aplicação destas restrições geram complexidade para os modelos de otimização, sendo portanto necessária a aplicação de heurísticas para a resolução do problema. Alguns estudos utilizam modelos heurísticos para reduzir o tempo computacional, como a Otimização de *Swarm* de Partícula (PSO, do inglês *Particle Swarm Optimization*) e Algoritmo Genético (GA, do inglês *Genetic Algorithm*) (MAREE; OMLIN, 2022)(JIA; CAI, 2022)(SOLARES et al., 2022)(AITHAL et al., 2023).

Milhomem e Dantas (2020) identificou entre os estudos que aplicaram heurísticas, o estudo de Mansini, Ogryczak e Speranza (2014) que faz uma revisão de 20 anos sobre otimização de carteiras baseado em pesquisa operacional, um ramo da matemática aplicada que utiliza métodos avançados de análise matemática para tomar decisões. O modelo de Mansini, Ogryczak e Speranza (2014) realiza um processo que utiliza da própria ferramenta de otimização para reduzir a complexidade do problema, aplicando uma heurística de busca local para encontrar a solução ótima. Esta heurística será utilizada neste trabalho para avaliar a aplicação das restrições reais no modelo de otimização de carteiras.

Com base nas principais referências citadas, e nos documentos selecionados para a revisão sistemática, são fundamentados os modelos e métodos de otimização de carteiras que serão utilizados neste trabalho. A seguir, são apresentados os métodos e modelos para cálculo de risco e retorno, de otimização de carteiras e de estruturas de redes artificiais.

2.2 RISCO E RETORNO DE ATIVOS

O modelo de Média-Variância de Markowitz é um modelo de otimização de carteiras que utiliza a média e a variância dos retornos dos ativos para encontrar a carteira ótima. Para construção da carteira, avalia-se portanto a média esperada e a variância da carteira, que são calculados por meio da avaliação do retorno esperado dos ativos, tal qual o desvio padrão e correlação entre os ativos. Nesta seção, são apresentados os modelos e métodos para cálculo de

risco e retorno de ativos e de carteiras.

2.2.1 Retorno

O cálculo do retorno avalia a expectativa de ganho ou perda de um investimento, isto é, o quanto o investidor ganhou ou perdeu em relação ao valor inicial investido. Portanto, este ganho ou perda de capital é calculado pela diferença entre o valor final e o valor inicial do investimento, dividido pelo valor inicial do investimento. O retorno pode ser calculado para qualquer período de tempo, como diário, semanal, mensal, anual, etc. O retorno é calculado pela seguinte fórmula:

$$\text{Retorno} = \frac{P_f}{P_i} - 1 \quad (2.1)$$

onde P_i é o preço inicial do ativo e P_f é o preço final do ativo.

O retorno de um ativo pode ser calculado de outra forma, através do cálculo do retorno logarítmico. O retorno logarítmico é calculado pela seguinte fórmula:

$$\text{Retorno Logarítmico} = \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right) \quad (2.2)$$

Ambas medidas permitem avaliar ganho ou perda de riqueza para o investidor. Entretanto, na avaliação de um investimento, busca-se compreender a expectativa de retorno e a variação desta expectativa. Os métodos utilizadas para expectativa de retorno podem ser a média simples, médias móveis, médias moveis exponenciais, ou ARMA.

2.2.1.1 Média

A média simples é dada pelo somatório dos retornos de um ativo, dividido pelo número de períodos considerados (YU; CHANG, 2020). A média simples, μ , é dada pela seguinte fórmula:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n} \quad (2.3)$$

onde R_i é o retorno no período i e n é o número de períodos considerados.

Portanto, a expressão do retorno pode ser dada por:

$$R_i = \mu + \epsilon_i \quad (2.4)$$

onde ϵ_i é o erro no período i .

2.2.1.2 Médias Móveis

As médias móveis são utilizadas para suavizar as flutuações dos retornos diários de um ativo financeiro, a fim de identificar tendências de médio e longo prazo (VUKOVIC et al.,

2020). Elas são calculadas tomando-se a média dos retornos em um determinado período de tempo. A média móvel simples (MA) é uma das formas mais comuns de médias móveis e é dada por:

$$\text{MA} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n} \quad (2.5)$$

onde R_i é o retorno no período i e n é o número de períodos considerados.

2.2.1.3 Média Móvel Exponencial

A média móvel exponencial (EWMA) é uma variação da média móvel simples, que atribui pesos diferentes para os retornos de cada período. A média móvel exponencial é dada por:

$$\text{EWMA} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i R_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \quad (2.6)$$

onde R_i é o retorno no período i , n é o número de períodos considerados e α_i é o peso atribuído ao retorno no período i .

2.2.1.4 Médias Móveis Autorregressivas

O modelo de médias móveis autorregressivas (ARMA, do inglês *Autoregressive Moving Average*) é uma técnica estatística utilizada para modelar e prever série temporal estacionária, como os retornos de ativos financeiros. Ele combina componentes autorregressivos (AR) e de médias móveis (MA) para capturar diferentes padrões e comportamentos das séries temporais. A fórmula geral do modelo ARMA é dada por:

$$\text{ARMA}(p, q) : y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t \quad (2.7)$$

onde y_t é o valor da série temporal no período t , c é uma constante, ϕ_1, \dots, ϕ_p são os coeficientes autorregressivos, $\theta_1, \dots, \theta_q$ são os coeficientes de médias móveis, ε_t é o erro no período t e p, q são os parâmetros do modelo.

O parâmetro p é o número de termos autorregressivos, d é o número de diferenciações e q é o número de termos de médias móveis. O parâmetro d é utilizado para tornar a série temporal estacionária, isto é, com média e variância constantes. A estacionariedade é importante para que o modelo consiga capturar os padrões e comportamentos da série temporal. O parâmetro p é utilizado para capturar a dependência linear entre os valores passados e o valor atual da série temporal. O parâmetro q é utilizado para capturar a dependência linear entre os erros passados e o erro atual da série temporal.

Em séries temporais financeiras, o modelo ARMA é utilizado para prever os retornos de um ativo financeiro, e um modelo que pode ser utilizado é o ARMA(1, 1), que é dado por:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.8)$$

considerando que a série temporal y_t é estacionária.

2.2.1.5 Retorno do portfólio

O retorno do portfólio é a média ponderada dos retornos dos ativos financeiros que compõem o portfólio. A fórmula do retorno do portfólio é dada por:

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i R_i \quad (2.9)$$

onde R_p é o retorno do portfólio, w_i é o peso do ativo financeiro i no portfólio e R_i é o retorno do ativo financeiro i .

2.2.2 Risco

O risco é a probabilidade de um investimento não atingir o retorno esperado. O risco é uma medida importante para os investidores, pois eles desejam maximizar o retorno de seus investimentos, mas também desejam minimizar o risco de perder dinheiro. Uma forma de avaliação de risco é o cálculo da variância ou desvio padrão dos retornos de um ativo financeiro. Quanto maior a variância ou desvio padrão, maior o risco do ativo financeiro.

A indústria financeira e a academia desenvolveram diversas técnicas para medir o risco de um ativo financeiro. As técnicas aplicadas podem ser o cálculo da variância, do desvio padrão e GARCH.

2.2.2.1 Variância e Desvio Padrão

A variância é uma medida de dispersão dos valores de uma variável em relação à sua média. Ela é calculada pela média dos quadrados das diferenças entre cada valor e a média. A variância é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2}{n} \quad (2.10)$$

onde y_i é o valor da variável no período i , μ é a média dos valores da variável e n é o número de períodos considerados.

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância. O desvio padrão é dado por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2}{n}} \quad (2.11)$$

onde y_i é o valor da variável no período i , μ é a média dos valores da variável e n é o número de períodos considerados.

A variância e o desvio padrão são utilizados para medir o risco de um ativo financeiro. Quanto maior a variância ou desvio padrão, maior o risco do ativo financeiro.

2.2.2.2 GARCH

O modelo GARCH foi proposto por (BOLLERSLEV, 1986) e é uma extensão do modelo ARCH proposto por (ENGLE, 1982). O modelo GARCH é utilizado para modelar a variância condicional de uma série temporal. O modelo GARCH(1,1) é dado por:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (2.12)$$

onde σ_t^2 é a variância condicional no período t , ω é a constante, α é o coeficiente do termo de erro ao quadrado, ε_{t-1}^2 é o erro ao quadrado no período $t - 1$, β é o coeficiente da variância condicional no período $t - 1$.

2.2.2.3 Correlação e covariância

A correlação é uma medida de associação linear entre duas variáveis. Ela é calculada pela média dos produtos dos desvios das variáveis em relação às suas médias. A correlação é dada por:

$$\rho_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_y)^2}} \quad (2.13)$$

onde x_i é o valor da variável x no período i , μ_x é a média dos valores da variável x , y_i é o valor da variável y no período i , μ_y é a média dos valores da variável y e n é o número de períodos considerados.

A covariância é uma medida de associação linear entre duas variáveis. Ela é calculada pela média dos produtos dos desvios das variáveis em relação às suas médias. A covariância é dada por:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{n} \quad (2.14)$$

onde x_i é o valor da variável x no período i , μ_x é a média dos valores da variável x , y_i é o valor da variável y no período i , μ_y é a média dos valores da variável y e n é o número de períodos considerados.

A correlação e a covariância são utilizadas para medir o grau de associação entre duas variáveis. Quanto maior a correlação ou covariância, maior o grau de associação entre as variáveis.

2.2.2.4 Risco do Portfólio

O risco de um portfólio é dado pela variância do retorno do portfólio. A variância do retorno do portfólio é dada por:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad (2.15)$$

onde w_i é o peso do ativo i no portfólio, w_j é o peso do ativo j no portfólio, σ_{ij} é a covariância entre os ativos i e j .

A covariância entre os ativos i e j é dada por:

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (2.16)$$

onde ρ_{ij} é a correlação entre os ativos i e j , σ_i é o desvio padrão do ativo i , σ_j é o desvio padrão do ativo j .

2.3 OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIO

A construção de uma carteira de investimentos, demanda uma avaliação quanto ao objetivo do investidor, seja ele de maximizar o retorno, minimizar o risco, ou uma combinação de ambos. A teoria moderna do portfólio, proposta por (MARKOWITZ, 1952), iniciou uma vasta discussão sobre a otimização de portfólio. Para a otimização de um portfólio, é necessária a construção de modelos matemáticos que representem as condições e o objetivo do investidor. A seguir serão apresentados os modelos de otimização de portfólio, as restrições que podem ser aplicadas ao modelo e os métodos para de resolução do problema.

2.3.1 Modelos de Otimização de portfólio

O modelo de otimização de portfólio é um modelo matemático que representa as condições e o objetivo do investidor. Os objetivos aplicados podem seguir alguns modelos de otimização, como o de Média-Variância, Índice Sharpe, Valor em Risco Condicional, entre outros. Nos tópicos a seguir, serão apresentados os modelos de otimização de portfólio, as restrições que podem ser aplicadas ao modelo e os métodos para resolução do problema.

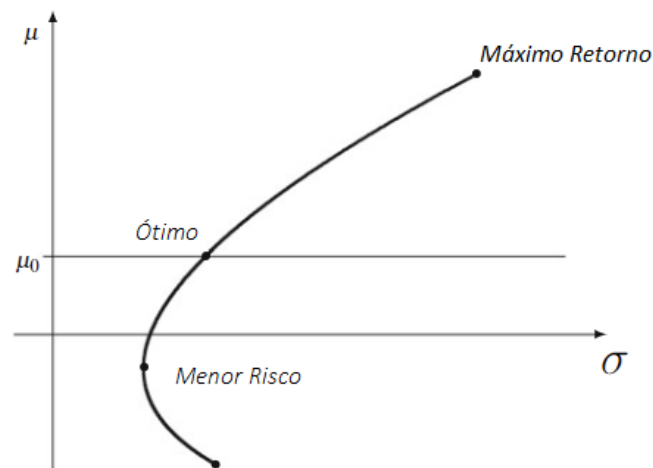
2.3.1.1 Média-Variância

O modelo de média-variância, proposto por (MARKOWITZ, 1952), é um modelo de otimização de portfólio que visa minimizar o risco para um determinado nível de retorno, e vice-versa. O modelo de média-variância é dado por:

$$\begin{aligned}
 &\underset{w}{\text{minimizar}} && w^T \Sigma w \\
 &\text{sujeito a} && w^T \mu = \mu_p \\
 &&& w^T \mathbf{1} = 1 \\
 &&& w \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

onde w é o vetor de pesos dos ativos no portfólio, Σ é a matriz de covariância dos ativos, μ é o vetor de médias dos ativos, μ_p é a média do portfólio, $\mathbf{1}$ é um vetor de uns, n é o número de ativos no portfólio. Na figura 3, é apresentado um exemplo de otimização de portfólio utilizando o modelo de média-variância.

Figura 3 – Otimização de portfólio utilizando o modelo de média-variância



Fonte: adaptado de Mansini, Ogryczak e Speranza (2015).

Pela figura 3, é possível observar uma fronteira que representa todo o conjunto de pontos ótimos para o portfólio, chamada de fronteira eficiente. O ponto ótimo na fronteira eficiente é o ponto de mínimo risco para um determinado nível de retorno.

2.3.1.2 Índice Sharpe

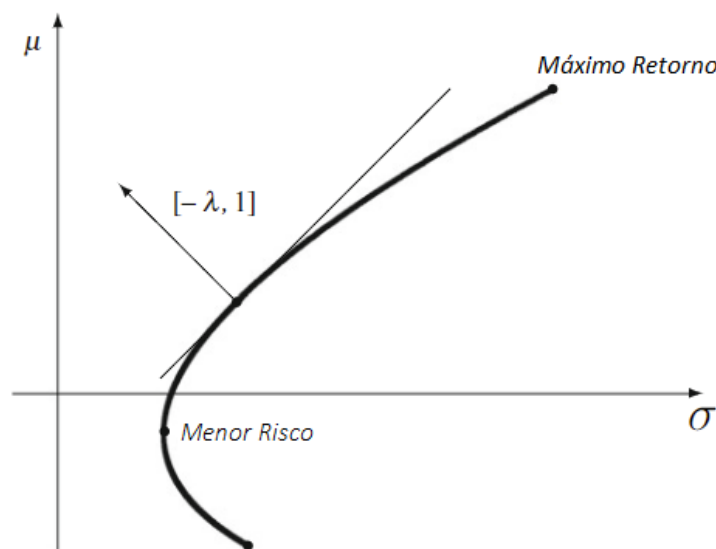
O modelo de Média-Variância é um problema de otimização quadrática, pois contém uma função quadrática e restrições lineares. Entretanto, este modelo considera somente um parâmetro para a avaliação do portfólio. Como um investidor pode apresentar diferentes interesses, pode-se adicionar um novo parâmetro para a avaliação do portfólio, a aversão ao risco.

A aversão ao risco é um parâmetro que representa a preferência do investidor quanto ao risco, e é representado pela letra grega λ . O modelo de otimização de portfólio com o parâmetro de aversão ao risco é dado por:

$$\begin{aligned}
 & \underset{w}{\text{maximizar}} && w^T \mu - \lambda w^T \Sigma w \\
 & \text{sujeito a} && \\
 & && w^T \mathbf{1} = 1 \\
 & && w \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Na figura 4, é apresentado um exemplo de otimização de portfólio utilizando o modelo com o parâmetro λ .

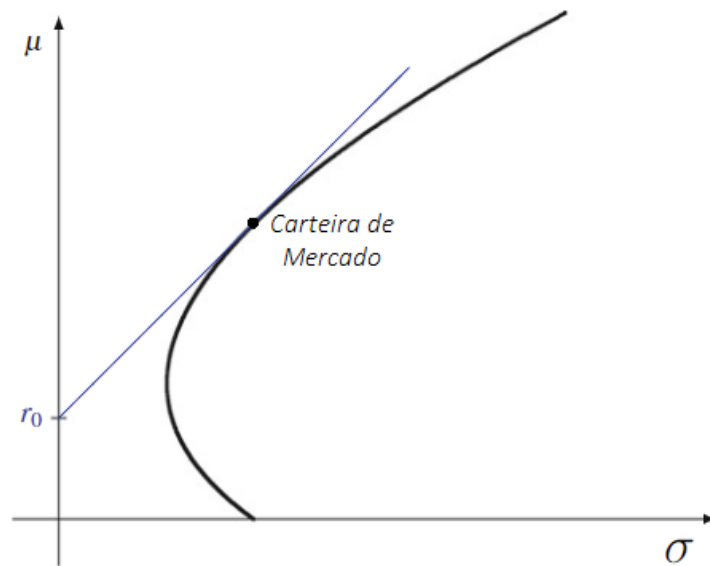
Figura 4 – Otimização de portfólio utilizando o modelo com o parâmetro λ de aversão ao risco



Fonte: adaptado de Mansini, Ogryczak e Speranza (2015).

Considerando que existe a opção para o investidor realizar empréstimo ou tomar emprestado a uma taxa livre de risco, é possível construir uma carteira eficiente que combina o empréstimo com todos os investimentos disponíveis no mercado. Esta combinação forma uma linha reta que tangencia a fronteira eficiente de ativos. Esta linha é denominada linha do mercado de capitais, e a carteira eficiente que tangencia a linha é chamada de carteira de mercado, que apresenta o maior prêmio por unidade de risco (SHARPE, 1964). A figura 5 apresenta um exemplo de linha do mercado de capitais.

Figura 5 – Linha do mercado de capitais



Fonte: adaptado de Mansini, Ogryczak e Speranza (2015).

Este modelo de otimização de portfólio é conhecido como modelo de índice de Sharpe, e é dado por:

$$\begin{aligned} & \underset{w}{\text{maximizar}} && \frac{w^T \mu - r_f}{\sqrt{w^T \Sigma w}} \\ & \text{sujeito a} && \\ & && w^T \mathbf{1} = 1 \\ & && w \geq 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

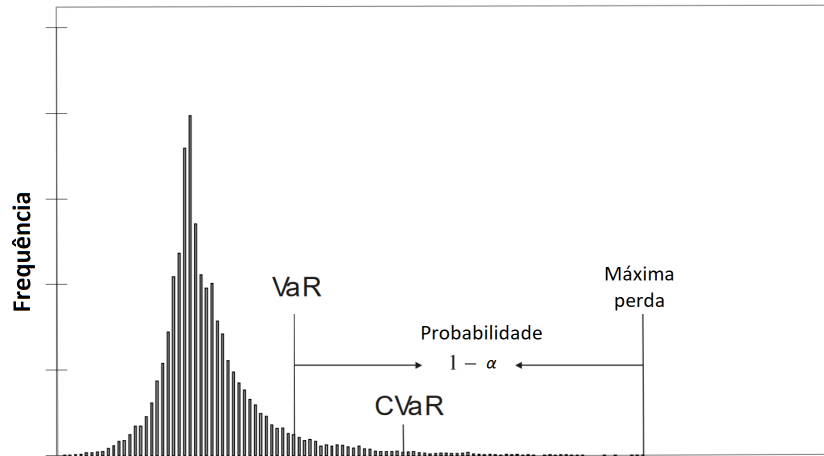
onde r_f é a taxa livre de risco.

O modelo de otimização de portfólio com o Índice Sharpe como função objetivo, é um problema de programação não linear, isto é, contém uma função não linear e restrições lineares. Nas seções seguintes, serão apresentados métodos para resolução de problemas de programação não linear.

2.3.1.3 Valor em Risco Condicional

O Valor em Risco Condicional (CVaR, do inglês *Conditional Value at Risk*) é uma medida de risco que busca reduzir a perda de informação dos valores extremos da distribuição. O CVaR é definido como a média das perdas que excedem o VaR, ou seja, a média das perdas que excedem o valor máximo de perda que uma carteira de investimentos pode ter em um determinado horizonte de tempo, com uma probabilidade de $1 - \alpha$, como apresentado na Figura 6.

Figura 6 – Distribuição da perdas do portfólio, VaR, e CVaR



Fonte: adaptado de Uryasev (2000).

Desta maneira, o CVaR pode ser dado como:

$$\text{CVaR}_\beta(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{f(X,y) > \text{VaR}_\beta(X)} f(X,y)p(X)dy, \quad (2.20)$$

em que $\text{VaR}_\beta(X)$ é o valor em risco para um nível de confiança β , X é a variável de decisão, y é uma variável aleatória que representa o retorno do portfólio, e $p(x)$ é a função de densidade de probabilidade. A fim de simplificar a formulação, Uryasev (2000) propõe a equação (2.21):

$$F_\beta(X, \text{VaR}_\beta(X)) = \text{VaR}_\beta(X) + \frac{1}{1 - \alpha} \int_{f(X,y) > \text{VaR}_\beta(X)} (f(X,y) - \text{VaR}_\beta(X))p(X)dy, \quad (2.21)$$

que pode ser utilizada como função objetivo. A função $F_\beta(X, \text{VaR}_\beta(X))$ é uma função convexa, contudo $F_\beta(X, \text{VaR}_\beta(X))$ é definida como uma função linear quando definida no trecho a partir de VaR em β . O que permite a utilização de métodos de programação linear para o problema. Portanto o problema de otimização de portfólio com o CVaR como função objetivo pode ser definido como:

$$\begin{aligned} & \underset{w}{\text{minimizar}} && F_\beta(X, \text{VaR}_\beta(X)) \\ & \text{sujeito a} && \\ & && z_t \geq f(x, y_t) - \text{VaR}_\beta(X) \geq 0 \quad \forall t \in \{1, \dots, n\} \\ & && f(x, y_t) = \sum r_{it}x_i \quad \forall t \in \{1, \dots, n\} \\ & && \mu = \sum \mu_i x_i \\ & && \mu \geq \mu_0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde z_t é a diferença entre a média e o retorno do portfólio no instante t , $f(x, y_t)$ é a função de retorno do portfólio no período t , μ é o retorno esperado do portfólio, μ_i é o retorno esperado do ativo i , e μ_0 é o retorno esperado mínimo do portfólio.

2.3.2 Otimização com parâmetros reais

A utilização de parâmetros reais na otimização busca aproximar o modelo matemático da realidade. A seguir serão apresentados os principais parâmetros reais utilizados na otimização de portfólio.

2.3.2.1 Capital de Investimento

A restrição de capital investido permite ao investidor avaliar como o seu capital será alocado entre os ativos. Assim, para esta avaliação, a variável de decisão pode ser modificada para representar a quantidade de capital investido em cada ativo, ao invés da porcentagem de alocação. A restrição de capital investido é dada por:

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq C_0 \quad (2.23)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

onde C_0 é o capital disponível para investimento, e x_j é a quantidade de capital investido no ativo j . Desta maneira, tanto o retorno do portfólio, quanto o risco e o valor em risco são calculados em valores monetários.

2.3.2.2 Custos de operação

Os custos de operação são compostos por taxas de transação e custos de transação. As taxas de transação são cobradas pelas corretoras e são calculadas em porcentagem do valor negociado. Os custos de transação são calculados em valor monetário e são compostos por taxas de custódia, taxas de liquidação, taxas de emolumentos e taxas de registro. A restrição de custos de operação é dada por:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \mu_j x_j - K_j &= \mu_0 \sum_{j=1}^n x_j \\
\sum_{j=1}^n x_j + K_j &\leq C_0 \\
\sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{j=1}^n f_j z_j &= K_j \\
x_j &\leq z_j C_0 \quad j = 1, \dots, n, \\
x_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n, \\
z_j &\in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{2.24}$$

onde c_j é a taxa de transação do ativo j em porcentagem, f_j é o custo de transação do ativo j em valor monetário, μ_j é o retorno esperado do ativo j em valor monetário, μ_0 é o retorno esperado do portfólio em valor monetário, C_0 é o capital disponível para investimento, x_j é a quantidade de capital investido no ativo j , e z_j é uma variável binária que indica se o ativo j está incluído no portfólio ($z_j = 1$) ou não ($z_j = 0$), sendo aplicado uma restrição para sua ativação. Assim, o custo da operação também é considerado no cálculo.

2.3.2.3 Cotação e Lotes de Negociação

A cotação e os lotes de negociação são restrições que limitam a quantidade de ativos que podem ser negociados. A cotação é dada em valor monetário e limita o valor mínimo que pode ser negociado. O lote de negociação é dado em quantidade de ativos e limita a quantidade mínima que pode ser negociada. Assim, a variável de decisão se torna a quantidade de lote de cada ativo. A restrição de cotação e lote de negociação é dada por:

$$\begin{aligned}
x_j &= \kappa_j q_j \\
\kappa_j &\geq 0 \in \mathbb{Z} \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{2.25}$$

onde x_j é a quantidade de capital investido no ativo j , κ_j é a quantidade de lotes do ativo j , e q_j é a cotação do ativo j . Com isso, a variável de decisão se torna uma variável inteira. Portanto, necessitando de um método de otimização inteira para sua resolução.

2.3.2.4 Rebalanceamento

O rebalanceamento é uma restrição que permite reinvestir o capital do portfólio. Este capital pode ser combinado com um capital adicional. Também, pode restringir o quanto um ativo será alterado em relação a composição original e avaliar os custos desta operação. Desta maneira, a variável relacionada as taxas de transação é modificada, adicionando uma nova variável para o total de rebalanceamento. A restrição de rebalanceamento é dada por:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n c_j q_j \delta_j + \sum_{j=1}^n f_j z_j &= K_j \\
C_0 &= \sum_{i=1}^n q_i \kappa_i^0 + B \\
\delta_j &\geq (\kappa_j - \kappa_j^0) \quad j = 1, \dots, n \\
\delta_j &\geq -(\kappa_j - \kappa_j^0) \quad j = 1, \dots, n \\
\delta_j &\leq \gamma_j z_j \quad j = 1, \dots, n \\
\delta_j &\geq 0 \in \mathbb{Z} \quad j = 1, \dots, n \\
z_j &\in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{2.26}$$

onde c_j é a taxa de transação do ativo j em porcentagem, f_j é o custo de transação do ativo j em valor monetário, q_j é a cotação do ativo j , κ_j é a quantidade de lotes do ativo j , κ_j^0 é a quantidade de lotes do ativo j no portfólio original, B é o capital adicional, C_0 é o capital disponível para investimento, δ_j é a quantidade de lotes do ativo j que será alterado, e z_j é modificado, sendo é uma variável binária que indica se o ativo j está sendo rebalanceado no portfólio ($z_j = 1$) ou não ($z_j = 0$), e γ_j é quantidade limite de alteração de lotes do ativo j . Assim, o custo da operação também é considerado no cálculo.

2.3.2.5 Cardinalidade

A cardinalidade é uma restrição que limita o número de ativos que podem ser incluídos no portfólio. A restrição de cardinalidade pode ser expressa matematicamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n a_j &\leq N \\
\kappa_j q_j &\leq a_j C_0 \quad j = 1, \dots, n \\
a_j &\in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{2.27}$$

onde a_j é uma variável binária que indica se o ativo j está incluído no portfólio ($a_j = 1$) ou não ($a_j = 0$), n é o número total de ativos e N é o número máximo de ativos que podem ser incluídos no portfólio. Uma restrição adicional é necessária para a ativação da variável binária a_j .

2.3.2.6 Aversão ao Risco

A aversão ao risco é uma variável que permite ao investidor controlar o nível de exposição ao risco do portfólio. A pergunta que esta restrição responde é: quanto está disposto a perder para obter um retorno maior? Considerando que o investidor é capaz de realizar um

empréstimo a juros. A restrição de aversão ao risco é dada por:

$$\mu_p - \sigma_p Z_\beta \geq VaR \quad (2.28)$$

onde μ_p é o retorno esperado da carteira, σ_p é o risco da carteira, Z_β é o valor multiplicador do desvio padrão dado nível de confiança, e VaR é o valor monetário de risco de perda aceitável da carteira.

2.3.3 Métodos de Otimização

A otimização de carteira de investimentos pelo índice Sharpe é um problema de otimização não linear. Assim ferramentas de otimização não linear podem ser utilizadas para resolver o problema. Além disso, o problema quando incorpora parâmetros reais, inclui variáveis inteiras, e este tipo de problema é conhecido como problema de otimização misto inteiro, que demandam métodos de otimização específicos. A seguir são apresentados alguns métodos de otimização que podem ser utilizados para resolver o problema de otimização de carteira de investimentos.

Kraft (1988) desenvolveu o método de Programação Quadrática (SLSQP, do inglês *Sequential Sequential Least Squares Programming*) que é um método para resolução de problemas de otimização não linear. O SLSQP é iterativo e resolve problemas de otimização não linear com restrições de igualdade e desigualdade. O método é de segunda ordem, isto é, utiliza a matriz Hessiana da função objetivo para determinar a direção de busca, e aplica a método do conjunto ativo na realização dos cálculos. Por ser um método de programação não linear, o SLSQP não é capaz de resolver problemas de otimização misto inteiro, sendo assim necessário a utilização de métodos de otimização misto inteiro.

A resolução de problemas de otimização inteira, como os problemas de seleção de ativos para portfólios que consideram restrições reais, necessitam de métodos para a ordenação da resolução. Métodos para otimização inteira são *Branch-and-Bound*, *Branch-and-Cut*. O *Branch-and-Bound* é um método de otimização inteira que utiliza a técnica de divisão e conquista para resolver problemas de otimização inteira. O método consiste em dividir o problema em subproblemas, e resolver cada subproblema de forma recursiva. O *Branch-and-Cut* é um método de otimização inteira que utiliza o *Branch-and-Bound* e cortes para resolver problemas de otimização inteira.

Hedengren et al. (2014) desenvolveu um método para resolução de problemas de programação não linear inteira mista no qual combina o método SLSQP com o método *Branch-and-Bound*. Este método é chamado de *APOPT*, do inglês *Advanced Process Optimization with Partial Integer Programming Technology*. O *APOPT* é um método de otimização não linear inteira mista que utiliza o SLSQP para resolver problemas de otimização não linear e o *Branch-and-Bound* para resolver problemas de otimização inteira. O *APOPT* é capaz de resolver problemas de otimização não linear inteira mista com restrições de igualdade e desigualdade.

2.3.4 Heurística

A aplicação de restrições reais no problema de otimização, como a taxa de transação, limitação de capital, e restrições como a de cardinalidade, e outros, aumenta a complexidade do problema. Otimização de carteira de investimentos com restrições reais é considerado um problema NP-difícil, isto é, um problema não polinomial de difícil resolução (MILHOMEM; DANTAS, 2020). Uma abordagem para resolução de problemas complexos é a utilização de métodos heurísticos, que são métodos de busca que não garantem a solução ótima, mas são capazes de encontrar soluções próximas da ótima em um tempo computacionalmente viável.

Após Angelelli, Mansini e Speranza (2008) avaliarem modelos de otimização com parâmetros reais, como custo de transação, disponibilidade de capital, limites de quantidades além de realizar otimização por programação linear inteira mista, conclui-se que a otimização por programação linear inteira mista para modelo de CVaR exige um alto tempo computacional, especialmente quando há uma grande quantidade de parâmetros no modelo, como mais de 200 ativos. No entanto, também foi observado que modelos heurísticos obtêm resultados satisfatórios em um tempo computacional menor.

Assim propuseram uma matheurística, uma heurística que transforma as variáveis discretas em variáveis contínuas para escolha inicial de ativos para o núcleo que posteriormente são combinados com pequenas parcelas dos ativos restantes para realizar a otimização por programação inteira mista, este modelo é chamado de busca básica no núcleo (do inglês, *Basic Kernel Search* - BKS). O modelo de busca básica do núcleo elaborado por Angelelli, Mansini e Speranza (2012) está descrito no Algoritmo 1.

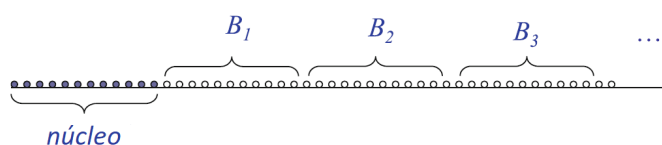
Algoritmo 1 Esquema geral da Busca Básica do Núcleo

1. Identificar o núcleo inicial e organizar os demais ativos em parcelas de listas ordenadas.
2. Resolver o problema de otimização inteira mista restrito ao núcleo inicial.
3. Enquanto critério de parada não é atingido.
 - (a) Adicionar próxima parcela de ativos ao núcleo, formado um único conjunto;
 - (b) Resolver o problema de otimização inteira mista para o conjunto formado;
 - (c) Remover do conjunto os ativos não escolhidos da parcela adicional e adicionar os escolhidos ao núcleo.

Fonte: adaptado de Mansini, Ogryczak e Speranza (2015).

Na etapa 1, as variáveis discretas são transformadas em variáveis contínuas e aplica-se a otimização. Com a solução da etapa 1, a parcela do núcleo, que geralmente não é superior a 100 ativos de acordo com Mansini, Ogryczak e Speranza (2015), é separada e os demais ativos são ordenados utilizando um critério de preferência. Então, os ativos fora do núcleo são divididos em parcelas de até l quantidades, formando conjuntos $\{B_i\}$, como representado na Figura 7.

Figura 7 – Organização dos ativos na Busca Básica do Núcleo



Fonte: adaptado de Mansini, Ogryczak e Speranza (2015).

Na etapa 2, o modelo de programação linear inteira mista é resolvido com o núcleo de ativos inicial, e caso não haja solução, o resultado é definido como $-\infty$. Na etapa 3, adiciona-se duas restrições, uma que ao menos um ativo do conjunto B_i deve ser escolhido e outra que a solução obtida na etapa 2 deve ser melhorada. Caso a etapa 3.a seja viável, o modelo de programação linear inteira mista segue para a próxima etapa. Entretanto, tem-se o critério de parada se a solução para a etapa 3.b for inviável. Portanto, o modelo heurístico busca reduzir o problema de otimização inteira mista para uma parcela menor e com menor custo computacional.

Este algoritmo pode aplicar como critério de ordenação o de maior índice de Sortino. Este índice é dado pelo retorno do portfólio dividido pelo desvio padrão dos retornos negativos do ativo. Para este trabalho, utilizaremos o índice de Sharpe.

2.4 REDES NEURAIS ARTIFICIAIS

Nesta seção, serão apresentados modelos de redes neurais artificiais. As redes neurais são modelos computacionais inspirados no funcionamento do cérebro humano, capazes de aprender e realizar tarefas complexas de processamento de informações. Serão abordadas as redes neurais artificiais, redes neurais recorrentes, mecanismo de atenção e otimização hiperparâmetros.

As redes neurais artificiais, também conhecidas como perceptrons multicamadas, são o tipo mais comum de redes neurais utilizadas na previsão de retornos de ativos. Essas redes são compostas por várias camadas de neurônios, em que cada neurônio de uma camada está conectado a todos os neurônios da camada seguinte. A informação flui apenas em uma direção, da entrada para a saída, sem feedback ou ciclos na rede. Essas redes são treinadas por meio do algoritmo de retropropagação do erro, que ajusta os pesos das conexões para minimizar a diferença entre os valores de saída esperados e os valores de saída previstos.

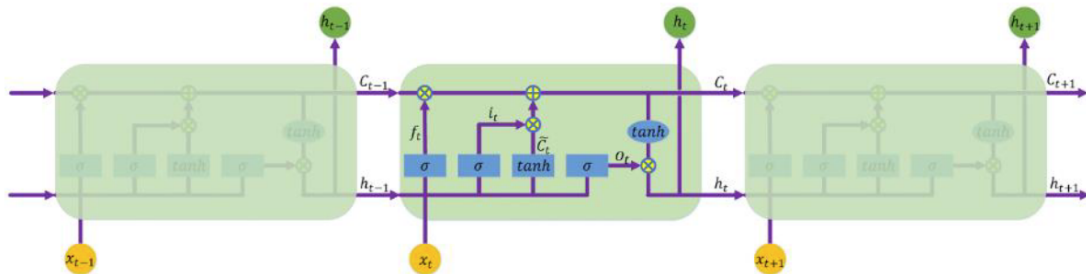
As redes neurais artificiais são capazes de aprender relações não lineares entre as variáveis de entrada e saída, o que as torna adequadas para a previsão de retornos de ativos financeiros. Entretanto, essas redes apresentam problemas com o sobreajuste, que ocorre quando a rede aprende os dados de treinamento muito bem, mas não consegue generalizar para novos dados. Para resolver esse problema, foram propostas as redes neurais recorrentes, que são capazes de aprender dependências de longo prazo e são amplamente utilizadas na previsão de séries temporais financeiras.

2.4.1 Redes Neurais Recorrentes

As redes neurais recorrentes são um tipo especial de rede neural que possui conexões retroalimentadas, permitindo que informações do passado sejam incorporadas na previsão do futuro. Isso as torna adequadas para a previsão de séries temporais, como os retornos de ativos financeiros. As RNN apresentam problemas com a perda do gradiente, que ocorre quando o gradiente de erro se torna muito pequeno, fazendo com que a rede pare de aprender. Para resolver esse problema, foram propostas as redes neurais recorrentes de memória de curto prazo (LSTM) e as redes neurais recorrentes de memória de longo prazo (GRU).

A rede LSTM é um tipo de rede recorrente que possui blocos de memória (células) na camada oculta que são conectados de forma recorrente. Existem dois estados que são transferidos para a próxima célula: o estado da célula e o estado oculto. Os blocos de memória são responsáveis por lembrar as informações, e as manipulações dessa memória são feitas por meio de três mecanismos principais chamados de portões. Um portão de esquecimento é responsável por remover informações do estado da célula. O portão de entrada é responsável pela adição de informações ao estado da célula. O portão de saída decide qual próximo estado oculto deve ser selecionado. A Figura 8 ilustra como o cálculo é realizado em uma célula LSTM.

Figura 8 – Célula LSTM.



Fonte: Ta, Liu e Tadesse (2020).

As operações realizadas nas unidades da rede LSTM são explicadas nas equações (2.29a) a (2.29f), onde x_t é a entrada no tempo t e f_t é o portão de esquecimento no tempo t , que limpa as informações da célula de memória quando necessário e mantém um registro do quadro anterior cuja informação precisa ser apagada da memória. O portão de saída o_t mantém as informações sobre a etapa seguinte, onde g é a unidade recorrente, tendo a função de ativação "tanh", e é calculado a partir da entrada do quadro atual e do estado do quadro anterior h_{t-1} . Em todos os portões de entrada (I_t), esquecimento (f_t) e saída (o_t), bem como na unidade recorrente (g_t), usamos (W_i, W_f, W_o, W_g) e (b_i, b_f, b_o, b_g) como pesos e viés, respectivamente. O portão de entrada determina quais partes da entrada transformada g_t precisam ser adicionadas ao estado de longo prazo c_t . Esse processo atualiza o estado de longo prazo c_t , que é transmitido diretamente para a próxima célula. Finalmente, o portão de saída transforma o estado de longo prazo atualizado c_t através de $\tanh(\cdot)$; filtra-o por o_t ; e produz a saída y_t , que também é enviada

para a próxima célula como o estado de curto prazo h_t .

$$f_t = \sigma(W_f \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_f) \quad (2.29a)$$

$$i_t = \sigma(W_i \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_i) \quad (2.29b)$$

$$o_t = \sigma(W_o \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_o) \quad (2.29c)$$

$$g_t = \tanh(W_g \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_g) \quad (2.29d)$$

$$c_t = f_t \cdot c_{t-1} + i_t \cdot g_t \quad (2.29e)$$

$$h_t = o_t \cdot \tanh(c_t) \quad (2.29f)$$

onde $\sigma(\cdot)$ é a função logística e $\tanh(\cdot)$ é a função tangente hiperbólica. Os três portões abrem e fecham de acordo com o valor dos controladores de portão f_t , i_t e o_t , todos os quais são camadas totalmente conectadas de neurônios. A faixa de suas saídas é $[0, 1]$, pois eles usam a função logística para ativação. Em cada portão, suas saídas são alimentadas em operações de multiplicação elemento a elemento, então, se a saída estiver próxima de 0, o portão é estreitado e menos memória é armazenada em c_t , enquanto se a saída estiver próxima de 1, o portão está mais aberto, deixando mais memória fluir através do portão. Dadas as células LSTM, é comum empilhar várias camadas das células para tornar o modelo mais profundo para ser capaz de capturar a não linearidade dos dados.

Nas redes GRU, a estrutura é semelhante à das redes LSTM, mas com menos parâmetros. A principal diferença entre as redes LSTM e GRU é que as redes GRU não possuem uma célula de memória separada e, portanto, não possuem um estado de célula. Em vez disso, elas possuem um estado oculto único que é usado para controlar o fluxo de informações. As redes GRU também possuem apenas dois portões: um portão de atualização e um portão de reinicialização. O portão de atualização decide quanta informação do passado deve ser mantida no estado oculto atual. O portão de reinicialização decide quanta informação do passado deve ser esquecida. A saída da célula GRU é calculada a partir do estado oculto atual e da entrada atual. A saída da célula GRU é então passada para a próxima célula como o estado oculto. Assim, as redes GRU são mais simples do que as redes LSTM, mas ainda são capazes de capturar dependências de longo prazo nas séries temporais de retorno de ativos.

2.4.2 Mecanismo de Atenção

Apesar de sua eficácia em aprender padrões localizados no tempo, as redes LSTM têm dificuldade em capturar dependências significativas quando o comprimento de uma sequência é relativamente grande. O mecanismo de atenção foi desenvolvido para resolver esse problema e agora foi estabelecida como estado da arte na maioria dos trabalhos em processamento de linguagem natural. Vários estudos também mostram a aplicação bem-sucedida dessa arquitetura no domínio financeiro.

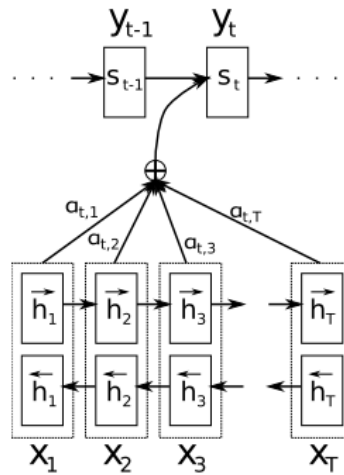
No centro de toda arquitetura está um mecanismo chamado de atenção, e é dado por:

$$\text{Attention}(Q, K, V) = \text{softmax} \left(\frac{QK^T}{\sqrt{d_k}} \right) V \quad (2.30)$$

A matriz de valor $V \in \mathbb{R}^{\tau \times d_v}$ da equação 2.30 é ponderada por um conjunto de pontuações obtidas pela operação *softmax*, que determina quanta ênfase cada etapa da matriz de chaves $K \in \mathbb{R}^{\tau \times d_k}$ deve receber ao codificar posições de sequência da matriz de consultas $Q \in \mathbb{R}^{\tau \times d_k}$. O produto escalar de Q e K é dividido pela raiz quadrada da dimensão de codificação (d_{model}) para evitar problemas associados a pequenos gradientes. Além disso, o mecanismo de atenção implementa uma máscara por meio da matriz $M \in \mathbb{R}^{\tau \times \tau}$ no primeiro bloco de atenção de cada camada do decodificador para garantir que ele só possa atender às etapas de tempo anteriores e, portanto, manter sua propriedade autorregressiva. Os modelos que utilizam as consultas e as chaves de atenção são chamados de *self-attention* e são capazes de capturar dependências de longo alcance em uma sequência.

A figura 9 ilustra um modelo de atenção, o de atenção global ou aditiva, que tenta gerar a palavra alvo y_t dada uma sentença de origem x_1, x_2, \dots, x_T . O modelo de atenção é capaz de capturar dependências de longo alcance entre origem e destino.

Figura 9 – Mecanismo de atenção.



Fonte: Bahdanau, Cho e Bengio (2015).

O mecanismo de atenção aditiva de Bahdanau, Cho e Bengio (2015) é calculado utilizando a seguinte equação:

$$\text{Attention} = \text{softmax}(V_a * \tanh(W_a * x + U_a * y + b_a)) \quad (2.31)$$

onde x é uma matriz contendo os estados ocultos do codificador, y é o estado oculto atual do decodificador, V_a , W_a , U_a e b_a são parâmetros aprendidos, e *tanh* é a função tangente hiperbólica.

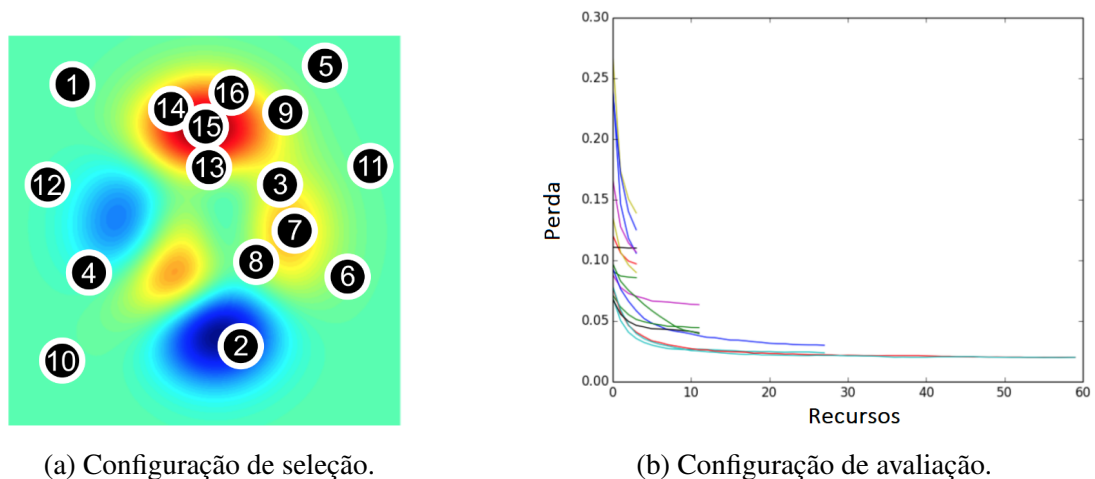
A atenção aditiva de Bahdanau, Cho e Bengio (2015) pode aprender relações mais complexas entre os dados do que outros tipos de mecanismos de atenção, pois emprega uma rede neural para calcular os pesos de atenção em vez de um algoritmo matemático simples.

2.4.3 Otimização de hiperparâmetros

O desempenho de algoritmos de redes neurais dependem de uma série de hiperparâmetros, como o número de camadas, o número de neurônios por camada, a taxa de aprendizado, o tamanho do lote de treinamento, entre outros. A busca de hiperparâmetros é um processo demorado e caro, pois envolve a avaliação de várias configurações de hiperparâmetros. A maioria dos algoritmos de otimização de hiperparâmetros é baseada em métodos de busca aleatória. Esses métodos de busca aleatória são ineficientes, pois não levam em consideração o desempenho de configurações anteriores. Além disso, eles não são capazes de explorar regiões promissoras do espaço de hiperparâmetros. Assim, uma alternativa é a utilização de um método estruturado de busca de hiperparâmetros, como o HyperBand.

O HyperBand é um algoritmo de otimização de hiperparâmetros que foi proposto por Li et al. (2018) para acelerar o processo de busca de hiperparâmetros. Ele utiliza um método de busca aleatória para explorar o espaço de hiperparâmetros e um método de busca em largura para explorar regiões promissoras. Na figura 10 é ilustrado o algoritmo HyperBand.

Figura 10 – Algoritmo HyperBand.



Fonte: adaptado de (LI et al., 2018).

O algoritmo HyperBand é composto por duas etapas: seleção de configuração e avaliação de configuração. Na etapa de configuração, o algoritmo seleciona aleatoriamente uma configuração de hiperparâmetros e treina o modelo com essa configuração por um número fixo de épocas. A figura 10a ilustra a etapa de seleção de configuração, no qual o mapa de calor mostra o erro de validação sobre um espaço de busca bidimensional com a cor vermelho correspondendo a áreas com menor erro de validação. O método seleciona de forma adaptativa novas configurações para treinar, procedendo de forma sequencial como indicado pelas numerações.

Na etapa de avaliação, o algoritmo avalia a configuração e seleciona os modelos mais promissores. A figura 10b ilustra a etapa de avaliação de configuração, na qual o gráfico mostra o erro de validação como uma função dos recursos alocados para cada configuração, ou seja, cada linha no gráfico. Os métodos de avaliação de configuração alocam mais recursos para configurações promissoras.

3 METODOLOGIA

O método de pesquisa aplicado neste estudo é de pesquisa de modelagem quantitativa baseado em modelo empírico. Este tipo de modelagem descritiva busca identificar o melhor ajuste dentre as observações e atuar em modelos reais, desta forma, a pesquisa contempla uma validação do constructo dos modelos científicos baseando em pesquisas teóricas quantitativas (BERTRAND; FRANSOO, 2002).

A construção dos modelos são dependentes de dados históricos de ativos financeiros e dados de mercado. Portanto, é necessário a coleta de dados históricos de ativos financeiros e dados econômicos de forma estruturada e com qualidade de dados. Além disso, há a preocupação de tratamento e preparação dos dados, devido a não padronização das diferentes fontes.

A partir da construção dos modelos, é necessário avaliar o desempenho da seleção de carteiras de investimentos. Para isso, o processo tem duas etapas principais: a otimização de carteiras de investimentos pela maximização do índice Sharpe, e a seleção da carteira de investimentos com base em redes neurais pela previsão de índice Sharpe.

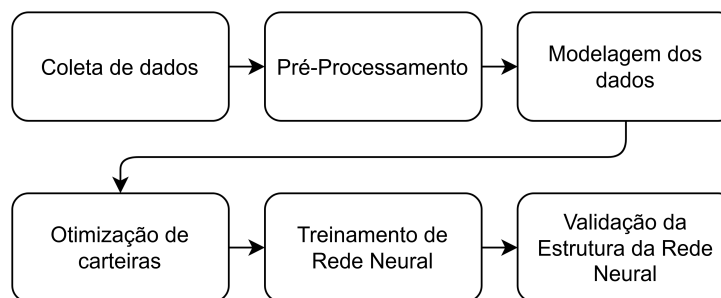
A primeira etapa incorpora a construção de carteiras de investimentos com base em modelos de risco e retorno. Busca-se avaliar a aplicação de parâmetros reais, como capital investido, custo de transação, rebalanceamento, lotes padrão, aversão a risco e cardinalidade. Para resolução, avalia-se métodos de otimização de programação não linear. Contudo, dado a complexidade do problema, faz-se necessário a avaliação de método heurístico para resolução.

A segunda etapa incorpora a construção de redes neurais para previsão de índice Sharpe. Para isso, busca-se avaliar diferentes estruturas de redes neurais afim de identificar a que melhor se adequa ao problema. Estas redes passam por etapas de treinamento e validação com objetivo de avaliar o desempenho da rede neural.

Por fim, avalia-se o desempenho da seleção de carteiras de investimentos aplicados a este fluxo de processamento de duas etapas. Portanto, seguindo as etapas descritas, de revisão, coleta, modelagem e análise tem-se a avaliação da aplicação de redes neurais para previsão de índice Sharpe para seleção de carteiras de investimentos.

A metodologia está dividida em algumas etapas: coleta de dados, pré-processamento, modelagem de dados, otimização de portfólio, treinamento e validação de modelos de redes neurais. A Figura 11 apresenta o fluxo de processamento da metodologia.

Figura 11 – Fluxo de processamento da metodologia



Fonte: próprio autor.

As seções a seguir apresentam as etapas da metodologia, e os métodos utilizados para a resolução do problema.

3.1 COLETA DE DADOS

Os dados utilizados neste estudo são dados públicos, disponibilizados gratuitamente por instituições financeiras e órgãos governamentais. Os dados são coletados através de códigos de programação que acessam diretamente as fontes oficiais. Para o desenvolvimento deste estudo, uma ferramenta de automação para atualização automática dos dados diariamente foi elaborada e integrada a uma plataforma de mensagens instantâneas, desta forma, os dados são atualizados mediante requisição e armazenados localmente.

Utilizou-se dados de preços de ativos, índices de mercado e indicadores econômicos. Os dados de preços de ativos e os dados de índices de mercado são coletados diretamente da B3 (Brasil, Bolsa, Balcão), a bolsa de valores do mercado brasileiro. Os dados de indicadores econômicos são coletados diretamente do Banco Central do Brasil (BRASIL, 2023).

A delimitação das séries históricas utilizadas neste estudo para coleta de dados é de 01/07/1994 até 31/05/2023, com intervalo de 1 dia útil. A escolha desta delimitação, dá-se pela estabilidade da economia brasileira após o plano real. Entretanto, o indicador econômico de taxa de juros SELIC, tem valor referencial a partir de 01/07/1996, além disso, o indicador de mercado Ibovespa tem valor referencial a partir de 02/01/1998. Desta forma, os dados de preços de ativos e índices de mercado são estruturados a partir da última data de referência dos indicadores econômicos.

A escolha do índice de mercado Ibovespa como referência para o mercado brasileiro se dá pela sua representatividade, pois o índice é composto pelas ações mais negociadas na bolsa de valores brasileira, além disso, o índice é utilizado como referência para diversos fundos de investimentos e carteiras de investimentos. A escolha do indicador econômico de taxa de juros SELIC como referência se dá pela sua representatividade, pois a taxa é utilizada como referência para diversos investimentos de renda fixa, para diversos fundos e carteiras de investimentos. Esta taxa é utilizada como referência para a taxa livre de risco.

Os ativos financeiros, objeto de estudo, são os componentes do índice de merca-

do Ibovespa no intervalo delimitado, pois são ativos previamente avaliados pelos critérios do índice, e portanto são ativos de maior liquidez e representatividade no mercado brasileiro. Os ativos financeiros são ações ordinárias e preferenciais, fundos imobiliários, e fundos de investimentos em ações, além disso, os ativos financeiros são classificados em ativos de renda variável.

Informações cadastrais dos ativos financeiros são coletadas diretamente da B3, incluindo nome, código, tipo e setor do ativo, além do tamanho de lote mínimo e valor de mercado. Informações cadastrais dos ativos financeiros são utilizadas para filtrar ativos financeiros, e para cálculo de custos operacionais. Por outro lado, informações relevantes das séries históricas, como desdobramentos e grupamentos, são coletadas via *Yahoo Finance*, sendo utilizadas para o cálculo de preços ajustados, pois os dados obtidos da B3 demonstraram inconsistências quanto a estes eventos.

As corretoras praticam diversas taxas e custos operacionais, entretanto, para este estudo, considera-se taxa de corretagem, sendo a taxa cobrada pela corretora para cada operação de compra e venda de ativos financeiros, e também considera-se taxa de custódia, que é a taxa cobrada pela bolsa de valores brasileira para manter os ativos financeiros em custódia. As taxas de corretagem e custódia são coletadas diretamente das corretoras, e são utilizadas para cálculo de custos operacionais. Adiciona-se também o imposto de renda, sendo a taxa cobrada pelo governo brasileiro sobre o lucro de operações de compra e venda de ativos financeiros.

Os dados coletados são armazenados em arquivos de formato CSV e formato hierárquico de dados (do inglês, *Hierarchical Data Format (HDF5)*), organizados em pastas de acordo com o tipo de dado e nomeados conforme o tipo e a data de referência. O quadro 5 apresenta os dados coletados, a fonte e a descrição destes dados.

Quadro 5 – Dados coletados

Dados	Fonte	Descrição
Preços de ativos	B3	Preços diário de ativos financeiros negociados na B3
Índice Bovespa	B3	Índice de mercado diário calculado pela B3
Componentes do Ibovespa	B3	Lista de ativos financeiros componentes do Ibovespa
Informações cadastrais de ativos	B3	Informações cadastrais no dia dos ativos financeiros listados na B3
Taxa SELIC	Banco Central	Taxa de juros anual por dia pelo Banco Central
Taxas de corretagem	Corretora	Taxas de corretagem cobradas pelas corretoras
Taxas de custódia	Corretora	Taxas de custódia cobradas pela B3
Imposto de renda	Receita Federal	Tabela de alíquotas de imposto de renda por tipo de ativo
Desdobramentos e grupamentos	<i>Yahoo Finance</i>	Desdobramentos e grupamentos de ativos financeiros

Fonte: próprio autor.

Como o volume de dados coletados é grande, e o tempo de coleta é longo quando realizado manualmente, a coleta de dados é automatizada através de códigos de programação, permitindo a atualização diária dos dados mediante requisição. Os códigos de programação estão disponíveis no repositório do projeto, e uma peça do código é exemplificada no apêndice A.

3.2 PRÉ-PROCESSAMENTO DE DADOS

Como os dados têm origem de diversas fontes e não são padronizados, isto é, possuem diferentes estruturas e formatos, os dados são pré-processados para a aplicação nos modelos de otimização e treinamento de redes neurais. O pré-processamento é realizado para garantir o paralelismo de informações, e assim seguindo para filtragem por parâmetros definidos, tratamento de dados faltantes, tratamento de valores atípicos, conversão de valores e de intervalos, para, enfim, compor uma única base concatenada de dados. .

Os preços de ativos da base de dados, contém informações de todos os produtos financeiros negociados pela bolsa de valores no período considerado, sendo necessária a filtragem para selecionar apenas os ativos de interesse e os valores de fechamento do dia. Os ativos de interesse deste estudo são os componentes do índice Bovespa na data de referência. Um módulo

foi elaborado para permitir a seleção de ativos de interesse, e a filtragem de ativos com base em parâmetros definidos, tal qual, o uso de uma lista predeterminada de ativos, ou pelo total de negociações por um intervalo de tempo.

Com os preços de fechamento dos ativos, uma etapa de ajuste de valores atípicos é realizada. Esta etapa considera os ajustes de desdobramentos e agrupamentos para que os valores de fechamento sejam corrigidos considerando as devidas proporções. Neste estudo, o ajuste de valores pagos de dividendos não é realizado, pois a fonte de dados de dividendos não demonstrou consistência para aplicação.

No tratamento dos dados, é observado dados faltantes nas séries de preços. Portanto, os dados faltantes para os preços de fechamentos são interpolados entre os valores anteriores e posteriores a este dado faltante. Não é realizada a operação para os valores anteriores ao início da série temporal do próprio ativo, casos de ativos que tiveram a oferta inicial de ações após o início da série temporal.

A taxa de juros, SELIC, é convertida a partir de dados diários de taxa anual, para dados diários de taxa diária, considerando 365 dias úteis no ano e precificado em unidades monetárias. O índice Bovespa tem sua pontuação utilizada tal qual é disponibilizada pela B3, sem ajustes de valores atípicos, ou de valores faltantes. Desta maneira, a taxa de juros e o índice Bovespa são concatenados com os preços de fechamento dos ativos. Quando avaliados os dados em paralelo, os períodos que possuam valores faltantes são descartados para a análise para todos os ativos. O fluxo de pré-processamento de dados é apresentado na Figura 12.

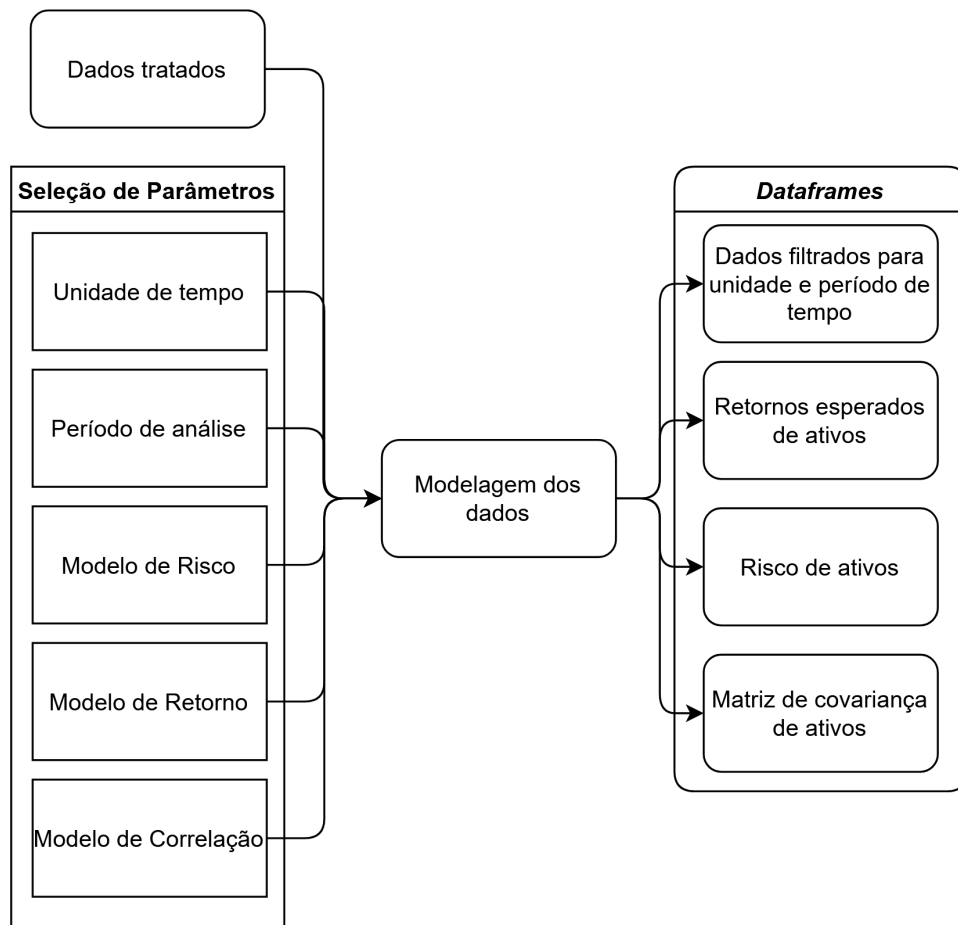
cação dos dados para serem diários, semanais, mensais, trimestrais, semestrais ou anuais. Além disso, é possível definir se a referência temporal é o início ou o final do intervalo, ou seja, se dentro do intervalo a data de referência inicial é o início da semana, mês ou outro, ou se é a última data diária dentro do intervalo. Após a definição do intervalo temporal, o filtro do período de tempo é realizado, e os dados são agrupados conforme o intervalo temporal definido, como exemplo semanal ou mensal. Portanto, define-se a unidade de tempo e o período de análise, como exemplo, filtra-se dados de início de semana a partir de 2018 por 60 semanas, e os dados são agrupados por semana, ou seja, o primeiro dia da semana será a referência para o filtro dos dados, e são selecionados os valores das datas obtidas.

Após o agrupamento dos dados, verifica se já havia algum tratamento prévio de seleção de período, para definir se o intervalo de análise coincide com o intervalo do parâmetro, assim os ativos que apresentarem valores faltantes durante o período selecionado são descartados. Isto ocorre devido ao lançamento do ativo posterior a data de início de análise, portanto, o ativo não apresenta dados suficientes para os cálculos seguintes.

Com os dados filtrados, é feito o cálculo dos retornos, riscos e correlações dos ativos após o cálculo de retorno diário por diferença percentual. O retorno esperado dos ativos é calculado com base no método definido, sendo dentre estes, a média simples, médias móveis, médias móveis exponenciais, ARMA(1,1). Os riscos são calculados com base no método de desejado para definição da variância, sendo estes o desvio padrão e GARCH(1,1). As correlações são calculadas na série temporal e aplicadas no cálculo da covariância.

A modelagem gera *dataframes* com os dados tratados para o período e intervalo definido, um *dataframe* com os retornos, outro com os riscos, e outro com as covariâncias. Os cálculos são realizados por meio de códigos de programação, permitindo a automatização do processo de modelagem de dados. A Figura 13 apresenta o fluxo de processamento da modelagem de dados.

Figura 13 – Fluxo de modelagem de dados



Fonte: próprio autor.

Assim, um módulo é desenvolvido onde são preparadas combinações de intervalos de tempo (diários, semanais e mensais) com métodos para cálculo de risco e retorno para serem inseridas na etapa seguinte de otimização de portfólios. Os intervalos de tempo são definidos como diários, semanais e mensais, e os métodos de cálculo de risco e retorno são definidos como média simples, médias móveis, médias móveis exponenciais, ARMA(1,1), desvio padrão e GARCH(1,1).

Todas as etapas da modelagem de dados são realizadas por códigos de programação que estão disponibilizados no repositório do projeto.

3.4 OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIO

Com os dados modelados e os parâmetros definidos, é realizada a otimização de portfólios. O objetivo é definir a alocação ótima de ativos. A base para cálculo considera a série temporal definida, o retorno esperado dos ativos, matriz de covariância e a taxa livre de risco para a otimização de carteira para o método com índice Sharpe dado pela equação 2.19. O método utiliza variáveis de decisão de proporção simples dos ativos. Este modelo considera que as variáveis possuem distribuição normal, e que o retorno esperado é a média dos retornos,

e o risco é a variância dos retornos.

Como a função objetivo é não-linear, utiliza-se o método de programação sequencial quadrática para a solução do problema. A biblioteca de otimização *scipy.optimize* do Python contém um módulo de programação sequencial quadrática, portanto este módulo é utilizado para a solução do problema. O módulo de otimização da biblioteca é baseado no modelo de Kraft (1988).

As ferramentas de otimização para programação não linear são susceptíveis a mínimos locais, isto é, o algoritmo encontra um mínimo que pode não ser o mínimo global. Portanto, o método é dependente da escolha do ponto inicial. Uma solução, é a escolha aleatória do ponto inicial com a utilização de uma distribuição de probabilidade multivariada contínua, especificamente a distribuição de Dirichlet, no qual gera um vetor não nulo para variável de decisão, e a soma dos elementos do vetor é igual a 1. Logo, a distribuição de Dirichlet é utilizada neste estudo para gerar o ponto inicial. A biblioteca *NumPy* do Python possui a função *random.dirichlet* para geração de amostras da distribuição de Dirichlet.

Quando se trata de parâmetros reais, a otimização se torna mais complexa, sendo necessários métodos para solução com técnicas específicas para otimização de valores inteiros. Assim, são adicionados aos modelos as restrições quanto a capital, o preço do ativo, o lote padrão de compra, a quantidade mínima e máxima de lotes, os custos de operação com taxas e impostos, a aceitação ao risco, o rebalanceamento, e quantidade máxima de ativos na carteira. Para construção de uma carteira ótima considerando parâmetros reais, é necessário elaborar um modelo matemático. Para o modelo, é proposto a aplicação das seguintes restrições: capital de investimento, custos de operação, cotação e lotes de negociação, rebalanceamento, aversão ao risco e somente posições de compra. A equação 3.1 apresenta o modelo matemático proposto neste estudo.

$$\begin{array}{l} \text{maximizar} \\ \kappa \end{array} \frac{r_p(\kappa) - \frac{r_f}{(1+c_{r_f})C_p(\kappa)}}{\sigma_p(\kappa)} \quad (3.1a)$$

sujeito a

$$r_p(\kappa) = \sum_{j=1}^n \kappa_j q_j \mu_j - \sum_{j=1}^n K_j \quad (3.1b)$$

$$\sigma_p(\kappa) = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \kappa_j \kappa_i q_j q_i \sigma_j \sigma_i \rho_{ij}} \quad (3.1c)$$

$$C_p(\kappa) = \sum_{j=1}^n q_j \kappa_j + K_j \quad (3.1d)$$

$$K_j = \sum_{j=1}^n c_j q_j \delta_j + \sum_{j=1}^n f_j z_j \quad (3.1e)$$

$$C_0 = \sum_{i=1}^n q_i \kappa_i^0 + B \quad (3.1f)$$

$$C_0 \geq C_p \quad (3.1g)$$

$$r_{inv} - \sigma_{inv} Z_\beta \geq VaR \quad (3.1h)$$

$$\sigma_{inv} = \sigma_p \frac{C_p}{C_0} \quad (3.1i)$$

$$r_{inv} = \frac{C_0 - C_p}{C_0} \frac{r_f}{(1+c_{r_f})} + \frac{C_p}{C_0} r_p \quad (3.1j)$$

$$q_j \kappa_j \leq z_j C_0 \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.1k)$$

$$\delta_j \geq (\kappa_j - \kappa_j^0) \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1l)$$

$$\delta_j \geq -(\kappa_j - \kappa_j^0) \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1m)$$

$$\delta_j \leq \gamma_j z_j \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1n)$$

$$\delta_j \geq 0 \in \mathbb{Z} \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1o)$$

$$\kappa_j \geq 0 \in \mathbb{Z} \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1p)$$

$$z_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1q)$$

onde κ_j é a variável de decisão, δ_j e z_j são as variáveis auxiliares. A descrição segue:

κ_j : quantidade de lotes

δ_j : quantidade de rebalanceamento no lote

z_j : 1 se o ativo alterar quantidade

e as variáveis dependentes são r_p , σ_p , C_p , C_0 , K_j , r_{inv} e σ_{inv} . A descrição segue:

C_0	: capital disponível
C_p	: capital da carteira
K_j	: custo de transação do ativo
r_p	: retorno da carteira
r_{inv}	: retorno do investimento
σ_{inv}	: risco do investimento
σ_p	: risco da carteira

e os parâmetros são r_f , c_{r_f} , f_j , c_j , q_j , κ_j^0 , γ_j VaR e Z_β . A descrição segue:

r_f	: retorno livre de risco
c_{r_f}	: taxa de imposto para ativo livre de risco
f_j	: taxa de transação do ativo
c_j	: custo de transação do ativo
q_j	: cotação do lote padrão
κ_j^0	: quantidade inicial de lotes do ativo
γ_j	: quantidade máxima de lotes do ativo
VaR	: valor monetário aceitável de perda
Z_β	: quantil da distribuição normal padrão ao nível de confiança β .

Este modelo permite responder as seguintes perguntas: quanto dinheiro tem, e quanto aceita perder no intervalo de investimento para obter o máximo retorno? A resposta é dada pelo valor de C_0 e VaR , respectivamente. A partir destes valores, o modelo determina a quantidade de lotes de cada ativo, a quantidade de rebalanceamento e se o ativo será alterado. O modelo também determina o retorno e o risco da carteira e do investimento, o quanto de capital deve ser utilizado no empréstimo a taxa livre de risco e o quanto deve ser investido na carteira, e também o custo de transação total. Este modelo utiliza variáveis inteiras, portanto, é um problema de programação não linear inteiro misto (do inglês, *Mixed Integer Nonlinear Programming* - MINLP).

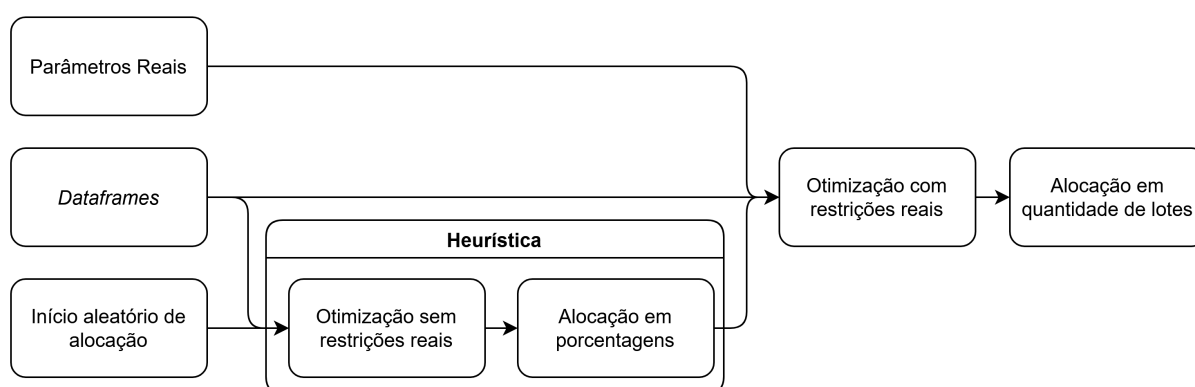
Para solução de problemas de otimização com restrições inteiras é necessário a aplicação da técnica de Ramificar e Limitar (do inglês, *Branch-and-Bound*). A biblioteca *GEKKO* utiliza o otimizador *APOPT*, que aplica o método do conjunto ativo combinado com métodos de pontos interiores (*IPOPT*) e com o de ramificar e limitar (HEDENGREN et al., 2014).

Com objetivo de reduzir o tempo computacional para a otimização, aplica-se uma heurística. A heurística avaliada é a de busca básica no núcleo, a qual utiliza os próprios otimizadores para encontrar a solução passando por uma etapa de relaxação das variáveis, isto é, a transformação de variáveis discretas em variáveis contínuas para resolução inicial do prob-

lema. Esta heurística permite reduzir a quantidade de variáveis do problema, além de se beneficiar do resultado da otimização inicial. Este método avalia que as variáveis de decisão não nulas após a otimização inicial serão fortes candidatas para compor o ponto ótimo da otimização inteira mista.

Após a otimização inicial, é realizada uma etapa de ordenação dos ativos, que consiste em aplicar um critério de avaliação para depois serem organizados em parcelas para compor em conjunto com as variáveis não nulas nas próximas iterações do otimizador. A organização de pacotes busca reduzir o número de variáveis de decisão para iteração para obtenção do núcleo de variáveis não nulas. A ordenação e organização dos ativos é realizada com o objetivo de obter uma solução mais próxima da solução ótima, e assim, reduzir o tempo de processamento do otimizador. Para este estudo, foram aplicadas as etapas de relaxação das variáveis e em seguida a seleção das variáveis não nulas. A Figura 14 apresenta o fluxo de processamento da otimização de portfólio.

Figura 14 – Fluxo de otimização de portfólio



Fonte: próprio autor.

Como o objetivo de pesquisa é desenvolver um modelo de otimização com índice Sharpe, este estudo elabora um método para aplicação dos otimizadores com parâmetros reais e início aleatório, utilizando uma heurística para redução do custo computacional. Também foram implementados os modelos de otimização com índice de risco CVaR. Os códigos de programação estão disponíveis no repositório do projeto.

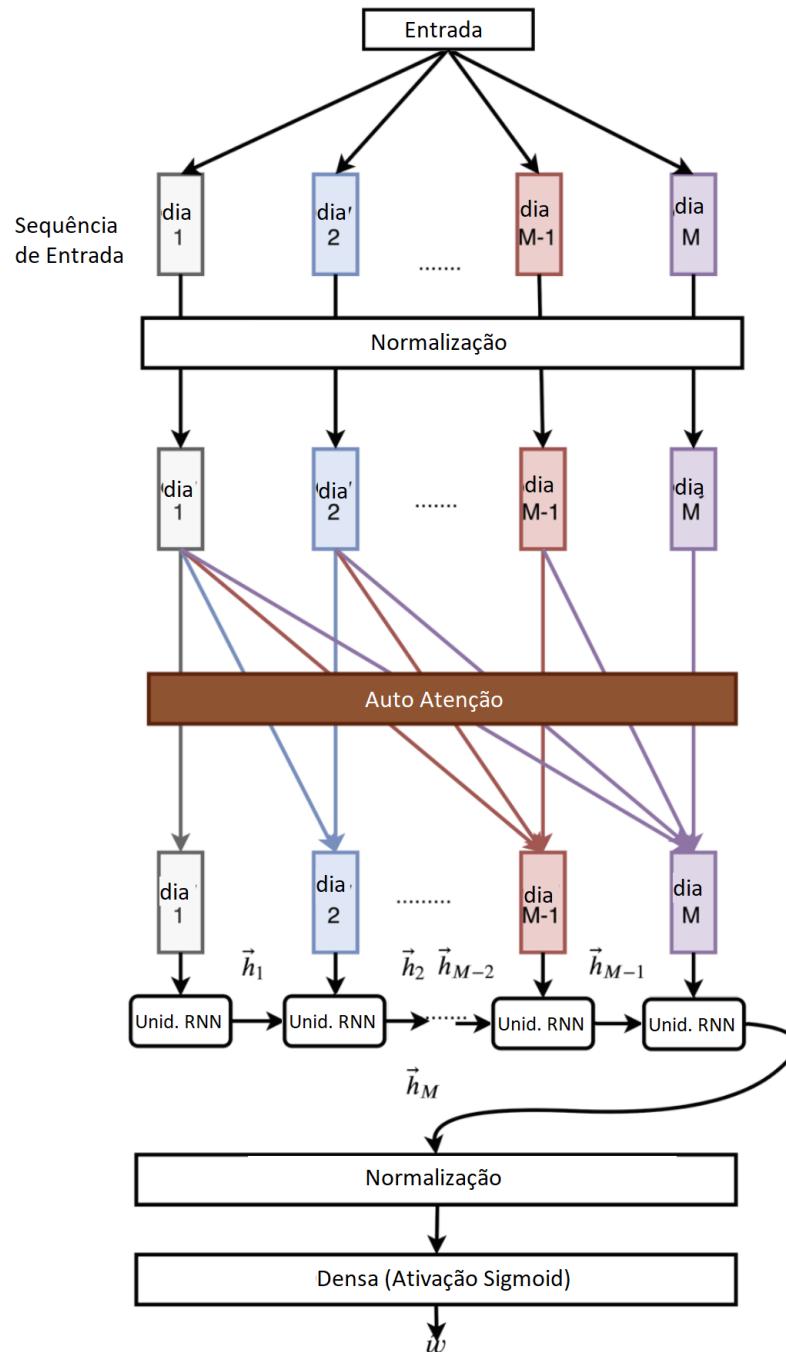
Além disso, neste estudo será realizada a comparação dos modelos de otimização de portfólio com e sem restrições reais. Também é avaliado o custo computacional entre os otimizadores, e a heurística para os modelos gerados. Os resultados obtidos são utilizados para o treinamento das redes neurais.

3.5 TREINAMENTO E VALIDAÇÃO DE REDES NEURAIAS

Com o resultado dos modelos de otimização, propõem-se neste estudo uma estrutura de rede neural artificial para a previsão do índice Sharpe, utilizando a rede para seleção da melhor opção de carteira para os períodos seguintes.

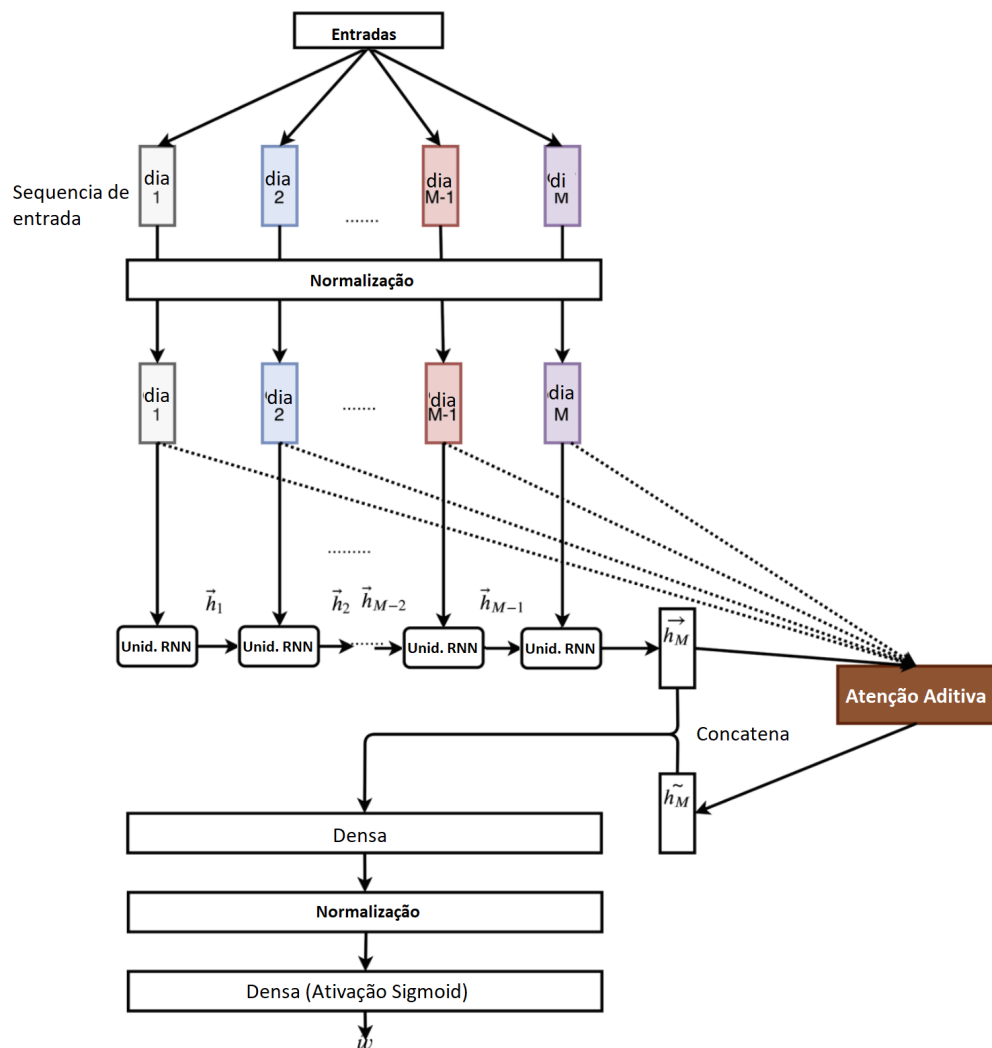
A estrutura proposta de rede neural é a combinação de redes neurais recorrentes, com mecanismo de atenção. Portanto, quatro estruturas são propostas: LSTM com mecanismo de atenção aditiva, GRU com mecanismo de atenção aditiva, LSTM com mecanismo de auto atenção, GRU com mecanismo de auto atenção. As estruturas propostas são apresentadas nas figuras 15 e 16.

Figura 15 – Fluxograma de redes neurais de RNN com auto atenção.



Fonte: adaptado de Cao, Cao e Nguyen (2020).

Figura 16 – Fluxograma de redes neurais de RNN com atenção aditiva.

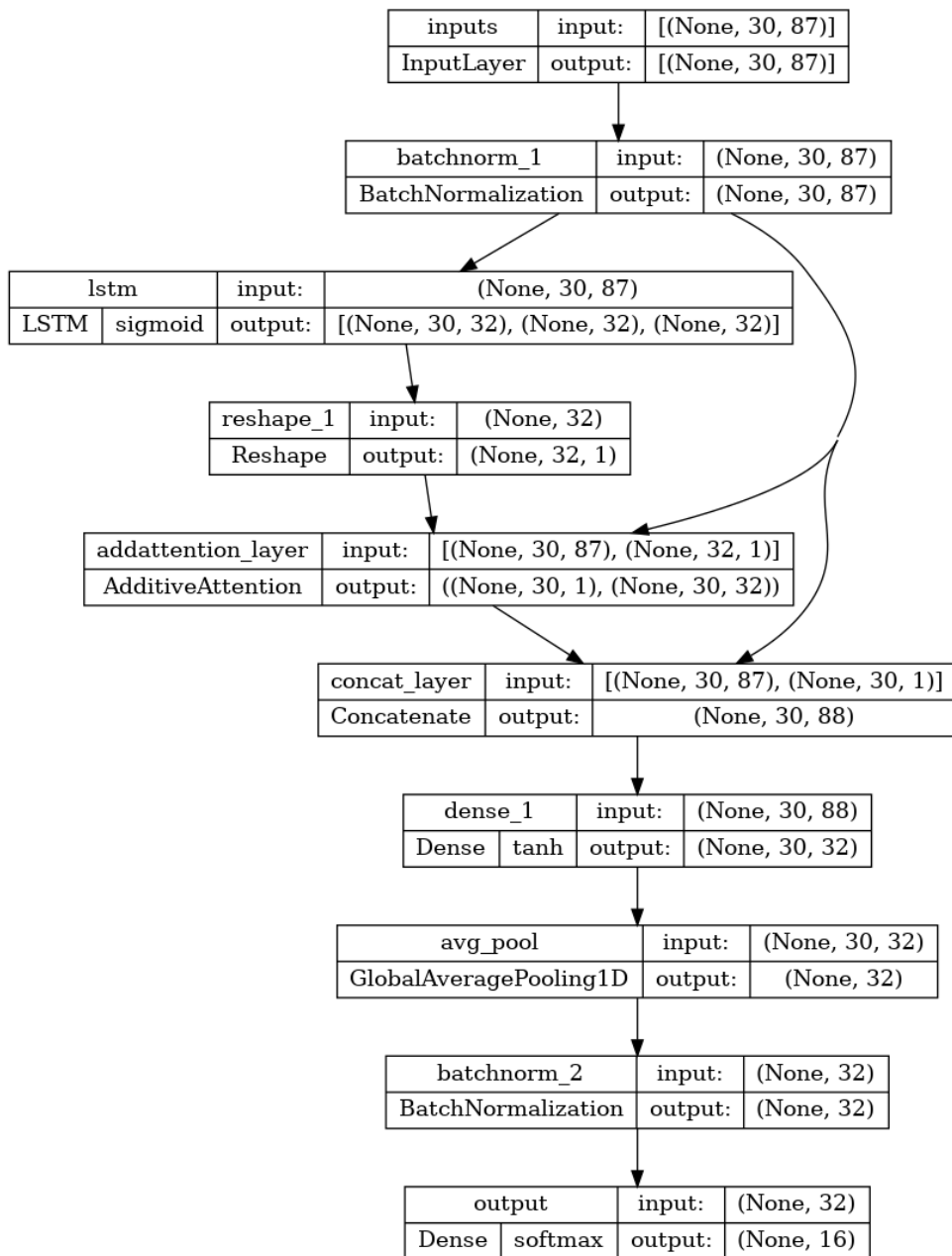


Fonte: adaptado de Cao, Cao e Nguyen (2020).

As estruturas propostas, consideram a entrada de séries temporais dos valores dos ativos em conjunto com a taxa livre de risco e o índice de mercado. Estes valores passam por uma normalização com o objetivo de reduzir o custo computacional e melhorar a convergência do modelo. A normalização aplica uma transformação para manter os valores com média zero e desvio padrão próximo a um. No método de auto atenção, é aplicado o mecanismo de atenção antes de inserir os dados nas redes neurais recorrentes, enquanto para o método de atenção aditiva, é aplicado o mecanismo de atenção após a rede neural recorrente com os dados de entrada, e a camada de contexto concatenada com a camada do último estado da rede neural recorrente. A rede neural recorrente é utilizada para capturar a dependência temporal dos dados, enquanto o mecanismo de atenção é utilizado para capturar a dependência entre os dados. Em seguida os dados são novamente normalizados e seguem para uma camada de redes neurais artificiais para previsão do índice Sharpe, isto é, a previsão da melhor carteira no período.

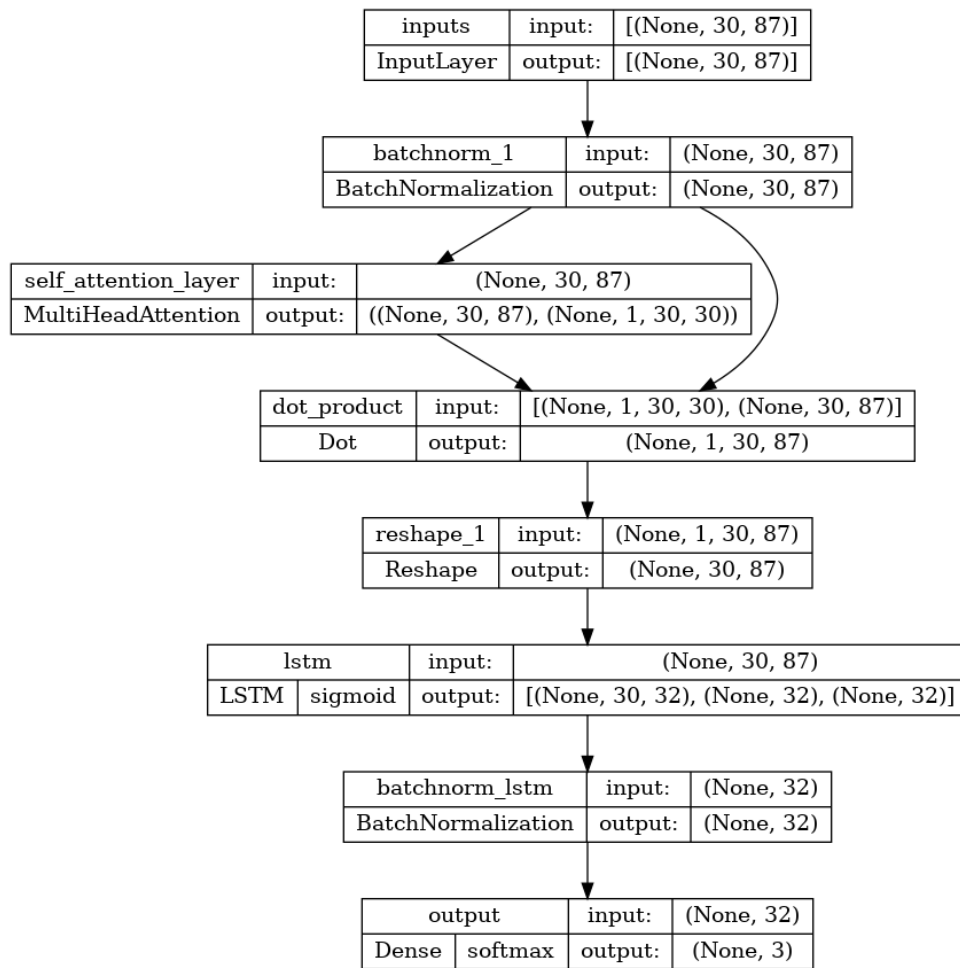
Para os parâmetros da rede neural, é considerado o otimizador Adam, função de perda *categorical cross entropy* e métrica de avaliação de acurácia. As camadas de redes neurais recorrentes, LSTM e GRU, apresentam 32 unidades ocultas e função de ativação sigmoideal com regularização L_2 . A camada de atenção aditiva apresenta 32 unidades ocultas e função de ativação tangente hiperbólica. A camada de auto atenção apresenta 32 unidades ocultas, e a camada de redes neurais artificiais apresenta 32 neurons e função de ativação tangente hiperbólica com regularização L_2 . A camada de saída apresenta 16 neurons e função de ativação softmax com regularização L_2 . As estruturas de rede neurais são apresentadas na figura 17 e 18.

Figura 17 – Estrutura de rede neural LSTM com atenção aditiva.



Fonte: próprio autor, gerado com *keras.utils.plot_model*.

Figura 18 – Estrutura de rede neural LSTM com auto atenção.

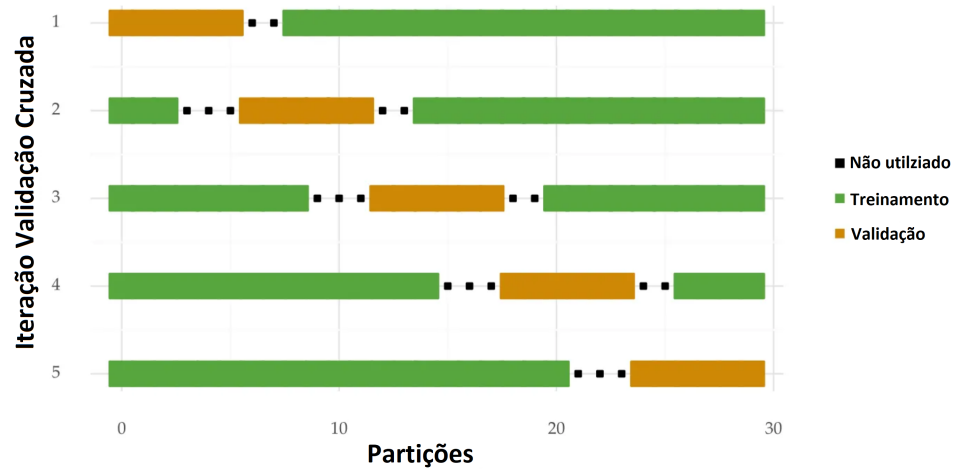


Fonte: próprio autor, gerado com *keras.utils.plot_model*.

Os hiperparâmetros da rede neural são ajustados com o método de Hyperband Tuning, sendo neste modelo os hiperparâmetros de taxa de aprendizagem, e as regularizações L_2 definidos para a busca dos valores ótimos de 0.0001 a 1 distribuídos em função logarítmica reversa. O método tem como validação a acurácia, e é considerado no máximo 30 épocas de treinamento.

O método de validação cruzada com lacunas é utilizado para treinamento do modelo, onde o conjunto de dados será dividido em 10 partes, e a cada iteração, uma parte é utilizada para validação e as demais para treinamento. A validação cruzada com lacunas é utilizada para evitar o sobre-ajuste do modelo devido a utilização de séries temporais ter dependência temporal. A figura 19 apresenta o método de validação cruzada com lacunas.

Figura 19 – Validação cruzada com lacunas.

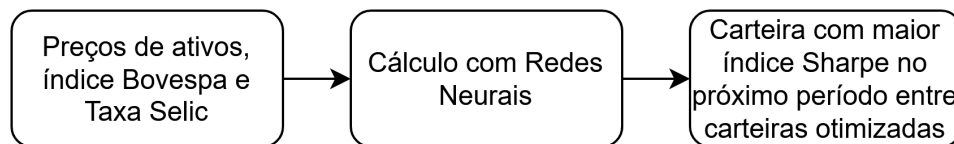


Fonte: adaptado de Cerqueira (2023).

O treinamento dos hiperparâmetros utiliza uma das partes para realizar o ajuste, enquanto para o treinamento final da rede realiza a validação em cada uma das partes considerando 100 épocas, e tamanho de lotes de 32.

O período para treinamento é de setembro de 2018 a janeiro de 2023, resultando em 1078 dados somente ativos que compõem atualmente o índice Ibovespa, um total de 87. O modelo tem como alvo 3 carteiras otimizadas pelo índice Sharpe de forma dinâmica com parâmetros definidos de tipo de média simples e desvio padrão, e correlação para o mesmo intervalo de tempo. Os intervalos considerados são de 15, 30 e 60 dias. A carteira de referência é o Ibovespa, e as carteiras otimizadas são ajustadas diariamente. O alvo atribuído para a rede neural é a escolha da carteira de maior índice Sharpe para o próximo período, sendo treinada com a aplicação das séries temporais de preço dos ativos em blocos de 30 dias, isto é, os últimos 30 dias de preços são utilizados para prever a melhor carteira para o próximo dia. A Figura 20 apresenta o fluxo de processamento de predição com redes neurais.

Figura 20 – Fluxo de predição de redes neurais



Fonte: próprio autor.

Portanto, o modelo tem como entrada os dados de séries temporais de preços dos ativos, e como saída a escolha da carteira de maior índice Sharpe para o próximo período. Após o treinamento dos hiperparâmetros, o modelo é treinado novamente com os hiperparâmetros ajustados, e é feita a predição para o período de teste em dados não utilizados no treinamento.

Para a validação dos modelos, as redes neurais são treinadas novamente para todo o período de treinamento, isto é, de setembro de 2018 a janeiro de 2023. Os testes de validação são no intervalo no ano de 2023 até o mês de julho, resultando em 120 dados. Desta maneira, compara-se as 3 carteiras otimizadas pelo índice Sharpe para treinamento das redes neurais, com as carteiras dinâmicas aplicando a utilização do modelo de redes neurais para previsão do índice Sharpe, inclui-se também para a análise, a carteira de referência de mercado, o Ibovespa. Desta maneira, é feita a rolagem dos dados no período para avaliação das redes neurais.

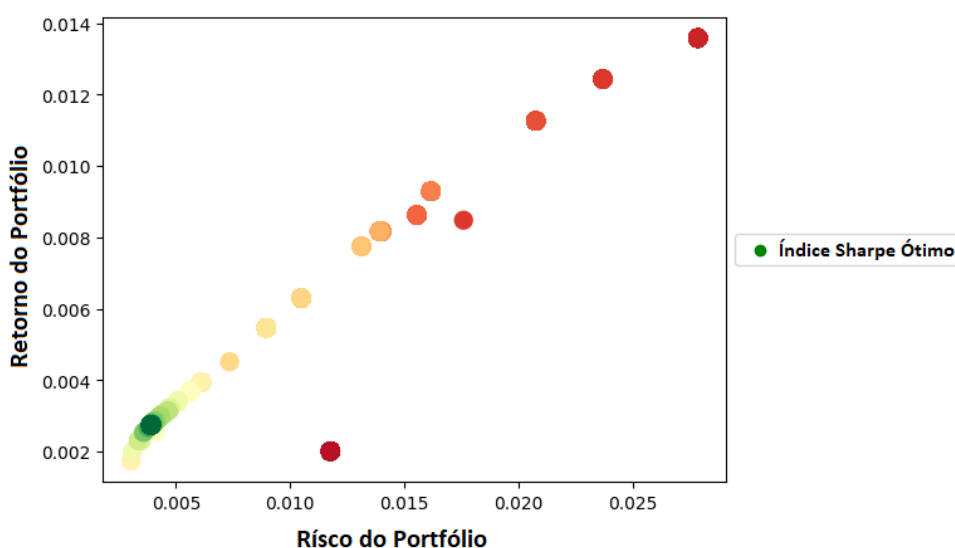
4 RESULTADO E DISCUSSÃO

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos com a implementação dos modelos de redes neurais e otimização de carteiras. Os resultados serão apresentados em duas etapas. A primeira etapa consiste na avaliação da otimização de carteiras, e a segunda etapa consiste na avaliação dos modelos de redes neurais.

4.1 OTIMIZAÇÃO COM PARÂMETROS REAIS

Em um primeiro momento, foi implementada a otimização de carteiras com base na equação 2.19, modelo de Sharpe, utilizando o otimizador SLSQP para o Ibovespa. A figura 21 apresenta a evolução do cálculo para obter a carteira ótima. No cálculo foi considerado a média e desvio padrão dos últimos 30 dias e risco igual a taxa SELIC para o último dia de junho de 2023.

Figura 21 – Evolução da convergência de otimização da carteira



Fonte: próprio autor.

Os pontos estão ordenados em escala de cor, do vermelho ao verde, e amarelo o intermediário. O otimizador converge para um ponto de máximo, o ponto verde, que representa a carteira de mercado de Sharpe (1964). Contudo, este modelo contém somente a restrição de que a soma das porcentagens de alocação deve ser igual a um, o que na prática pode não ser possível. Os ativos financeiros são negociados em lotes, e não é possível comprar 0,5% de uma ação, além disso, o capital de investimento é limitado.

Para avaliar a carteira ótima com parâmetros reais em comparação ao modelo de Sharpe sem restrições adicionais, foi realizada a otimização em três cenários. Os cenários são dados pela média e desvio padrão dos últimos 15, 30 e 60 dias nos componentes do Ibovespa.

O modelo com restrições reais foi implementado com o otimizador APOPT. O modelo matemático segue a equação 3.1. Este modelo considera capital de investimento, custos de

operação, cotação e lotes de negociação, rebalanceamento, aversão ao risco e somente posições de compra. As restrições da equação contém parâmetros de mercado, como a cotação e lotes de negociação, e parâmetros de investimento, como o capital de investimento e custos de operação. Os dados destes parâmetros foram obtidos conforme descrito no quadro 5. Os demais parâmetros foram definidos conforme a tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros de mercado e investimento

Parâmetro	Valor
Capital de Investimento	R\$ 20.000,00
Valor Monetário Aceitável de Perda Diária	R\$ 100,00
Quantil da Distribuição Normal Padrão ao Nível de Confiança	95%
Quantidade Inicial de Lotes do Ativo	0

Fonte: próprio autor.

Com todos os parâmetros e dados definidos, foi realizada a otimização com otimizador APOPT. Como resultado, este otimizador não conseguiu realizar a tarefa devido à complexidade do problema, quando considerados os 87 componentes listados da Ibovespa. Após a avaliação da literatura, optou-se por utilizar a heurística de busca básica no núcleo de Angelelli, Mansini e Speranza (2012). Contudo, para este estudo, optou-se pela aplicação das duas primeiras etapas do algoritmo. A primeira etapa consiste em uma busca aleatória, e a segunda etapa consiste em uma busca local.

Por se tratar de um problema não linear com variáveis discretas, o algoritmo está suscetível a mínimos locais, com dependência da posição inicial. Para contornar este problema, foi implementada uma distribuição aleatória, a distribuição de Dirichlet. Portanto, neste estudo serão comparado os resultados e tempo computacional da otimização com e sem a heurística de busca básica, e com e sem restrições reais para os três cenários. A tabela 2 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 2 – Resultados da otimização para os três cenários

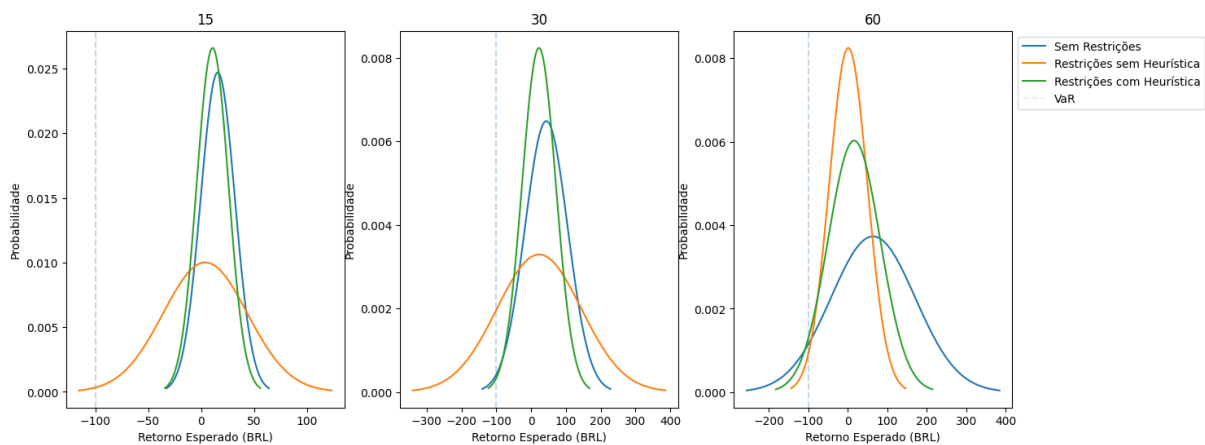
Carteira	Método	Retorno	Risco	Sharpe do Otimizador	Tempo (s)
15	Sem Restrições	15,80	16,14	0,9791	0,42
15	Restrições e Aleatório	3,96	39,83	-0,0849	3,81
15	Restrições com Heurística	10,90	14,99	0,0751	3,70
30	Sem Restrições	43,98	61,49	0,7152	0,20
30	Restrições e Aleatório	23,37	121,18	0,1191	3,92
30	Restrições com Heurística	22,80	48,41	0,2321	3,88
60	Sem Restrições	64,01	106,91	0,5987	0,18
60	Restrições e Aleatório	1,15	48,36	-0,1146	3,21
60	Restrições com Heurística	15,99	66,19	-0,1700	10,13

Fonte: próprio autor.

Para a comparação dos resultados, os valores de porcentagem do modelo sem restrições foi multiplicado pelo capital disponível. As colunas de risco e retorno da tabela 2 estão em valores monetários, em real. A coluna de Sharpe do otimizador é o valor obtido pelo processo de otimização, enquanto os valores de retorno e risco foram calculados após o processo dada a quantidade de lotes do ativo, pela cotação, a média e risco por cada ativo antes de os custos serem aplicados. Assim, os valores de Sharpe negativos são devido à consideração do custo de operação durante o cálculo.

Avaliando o índice Sharpe, é possível observar que o modelo sem restrições supera significativamente os outros modelos, além do tempo de otimização ser inferior. Enquanto o modelo sem restrições dura no máximo 0,42 segundos, o modelo com restrições dura no mínimo 3,21 segundos. Para observar o efeito dos modelos na distribuição normal das carteiras, foi feito o gráfico de densidade de probabilidade das carteiras, apresentado na figura 22.

Figura 22 – Densidade de probabilidade das carteiras.



Fonte: próprio autor.

A linha vertical na figura 22 representa o limite aceitável de perda para o investidor. A carteira com início aleatório não conseguiu atender esta restrição. Este efeito não foi possível de identificar na referência do modelo (HEDENGREN et al., 2014). As demais carteiras atendem a restrição. Há um efeito de estreitamento da distribuição da carteira com restrições e heurística, em relação à carteira sem restrições, e um deslocamento negativo do retorno. Isso ocorre devido à inclusão dos custos de operação e a restrição de perda máxima.

A tabela 3 apresenta alocação da carteira de 30 dias para os modelos sem restrição e com restrição e heurística.

Tabela 3 – Alocação da carteira de 30 dias

	Sem Restrições	Restrições com Heurística
BRKM5	480	-
ENBR3	15620	18912
EQTL3	1400	-
GOLL4	80	-
IRBR3	820	-
JBSS3	520	-
PRI03	540	-
RAIZ4	480	-
SLCE3	40	-
Livre de Risco	-	1088

Fonte: próprio autor.

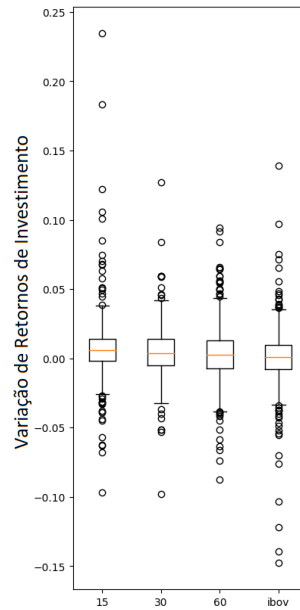
A carteira sem restrições apresenta uma alocação mais diversificada, enquanto a carteira com restrições e heurística apresenta uma alocação mais concentrada. A carteira com restrições e heurística apresenta uma alocação de 1088 reais em ativos de baixo risco, enquanto a carteira sem restrições não apresenta alocação em ativos de baixo risco. A alocação em ativos de baixo risco é devido à restrição de perda máxima. A carteira sem restrições apresenta uma alocação de 15620 reais em ENBR3, enquanto a carteira com restrições e heurística concentra o investimento neste ativo. Isto ocorre devido ao método heurístico utilizar o resultado do modelo sem restrições como o conjunto de ativos candidatos para a seleção da carteira. Como muitos dos ativos têm valores inferiores ao tamanho mínimo de compra por lote, o modelo com restrições e heurística não consegue selecionar estes ativos.

Portanto, é possível concluir que o modelo sem restrições apresenta um melhor desempenho, em relação ao tempo de otimização e ao índice Sharpe. O modelo com restrições e heurística apresenta um desempenho inferior, porém atende a restrição de perda máxima, com exceção do modelo com início aleatório.

4.2 REDES NEURAIIS

A aplicação das redes neurais, visa a seleção da carteira de melhor desempenho no próximo período. Foi realizado a otimização de 3 carteiras dinâmicas de investimentos, isto é com atualização regular dos ativos. As carteiras são de 15, 30 e 60 dias de intervalo para média e desvio padrão. Após a otimização das carteiras com atualização diária, é feito a comparação dos retornos gerados pelas carteiras selecionadas no período de análise. A figura 23 apresenta os retornos gerados pelas carteiras.

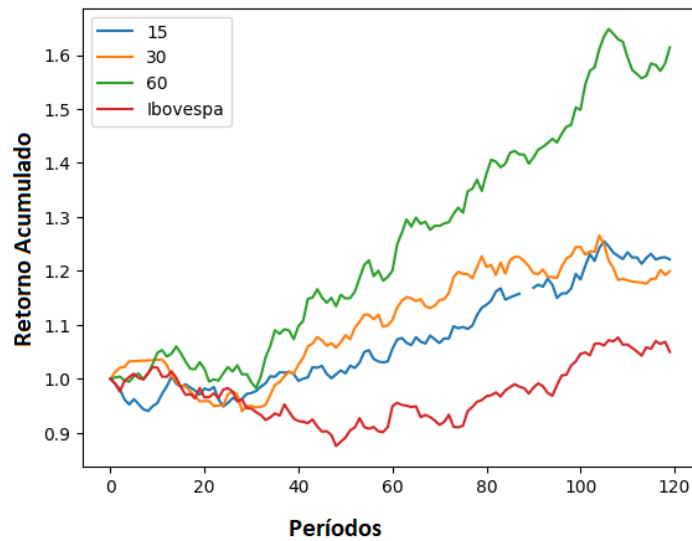
Figura 23 – Retornos gerados pelas carteiras.



Fonte: próprio autor.

Pela figura 23, nota-se que a carteira de referência, Ibovespa e a de 15 dias apresentam as maiores dispersões de retorno, enquanto as carteiras de 30 e 60 dias apresentam menor dispersão. Dentre as carteiras, não é possível observar uma carteira com retorno significativamente superior. Plotando o retorno acumulado das carteiras para os últimos 120 dias do período de análise é possível observar a evolução dos retornos, conforme a figura 24.

Figura 24 – Retorno acumulado das carteiras.

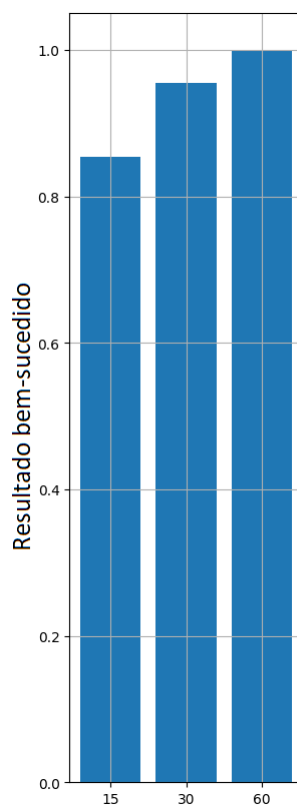


Fonte: próprio autor.

Pela figura 24 é possível observar que a carteira de 60 dias apresenta o maior retorno acumulado. Nota-se que as carteiras em geral apresentaram retornos superiores ao Ibovespa.

Além disso, é possível observar que a carteira de 15 dias apresenta intervalos faltantes, isso ocorre devido à falta de sucesso no processo de otimização. A figura 25 apresenta a porcentagem de sucesso na otimização das carteiras.

Figura 25 – Porcentagem de sucesso na otimização das carteiras.

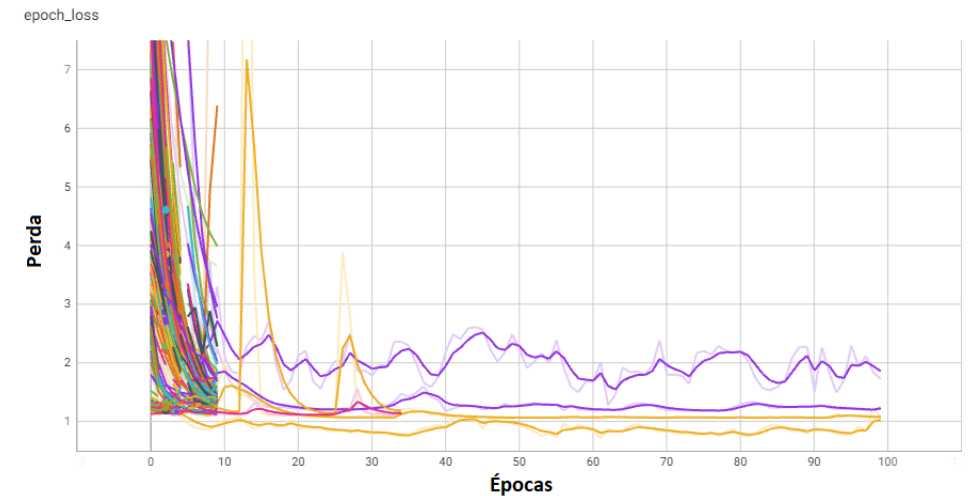


Fonte: próprio autor.

A carteira de 15 dias, obteve mais de 10% de falha na otimização, e a carteira de 30 dias menos de 5% de falha. A de 60 dias não apresentou falha na otimização. Após avaliação, foi identificado a falha durante o processo de busca direcional durante a otimização por meio do método SLSQP. Apesar disso, optou-se por manter os resultados, pois quando avaliado o alvo para rede neural, esta carteira não é definida como a melhor opção para o próximo período.

Para a aplicação da rede neural, foram propostas 4 estruturas de redes: LSTM+Atenção Aditiva, LSTM+Auto Atenção, GRU+Atenção Aditiva, e GRU+Auto Atenção. As estruturas das redes LSTM são apresentadas nas figuras 17 e 18, no qual são equivalentes para as redes GRU. A rede neural foi treinada com 90% dos dados e testada com 10% dos dados, gerando 1198 dados para treino e 120 para teste. No treino foi realizado a validação cruzada com lacunas, considerando 10 partições, sendo 1 para teste, 6 para treino e duas parcelas anterior e uma após o teste não são consideradas. Para o treino dos hiperparâmetros, foi utilizada uma das parcelas da validação cruzada. A figura 26 apresenta a função de perda para o treinamento de hiperparâmetros para a rede LSTM+Atenção Aditiva.

Figura 26 – Função de perda para o treinamento de hiperparâmetros.

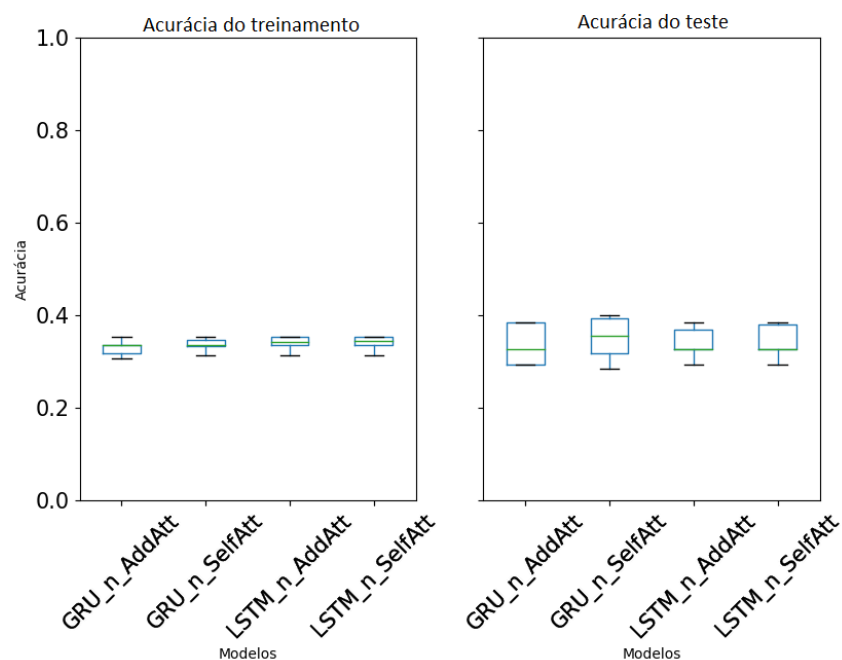


Fonte: próprio autor.

Pela figura 26, nota-se que a função de perda apresenta uma tendência de convergência, a qual é esperada para o treinamento de hiperparâmetros. A figura 26 apresenta a função de perda para o treinamento da rede neural.

Todas as demais redes passaram pelo processo de seleção de hiperparâmetros, e seguiram para a avaliação pela validação cruzada. Após o treinamento da rede por este processo, é avaliada a acurácia, que é a proporção de acertos do modelo. A figura 27 apresenta a acurácia para as redes avaliadas.

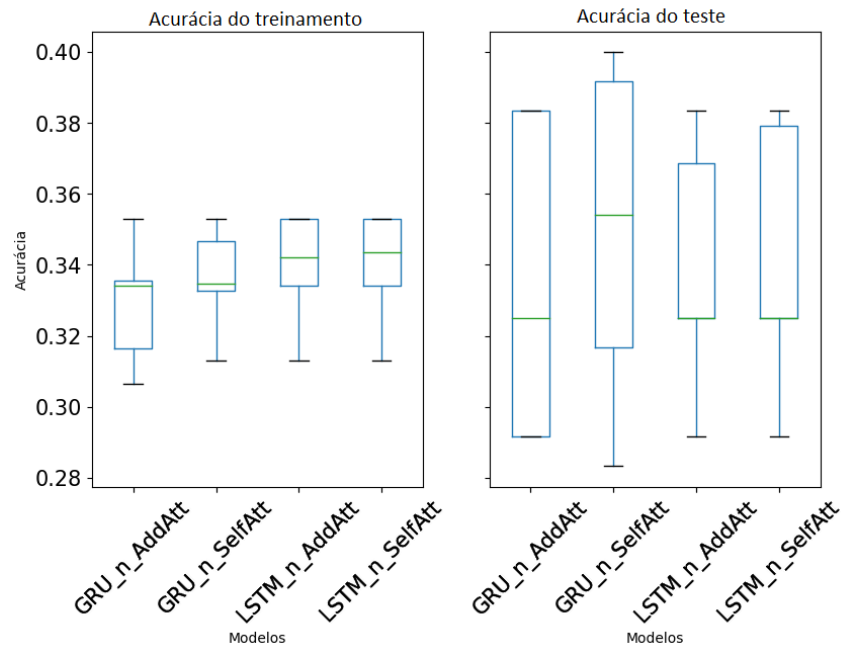
Figura 27 – Boxplot de acurácia para as redes avaliadas.



Fonte: próprio autor.

As redes apresentaram acurácia inferior a 40%, o que indica que o modelo não é capaz de prever o retorno da carteira com precisão. A figura 28 apresenta uma visão ampliada da acurácia para as redes avaliadas.

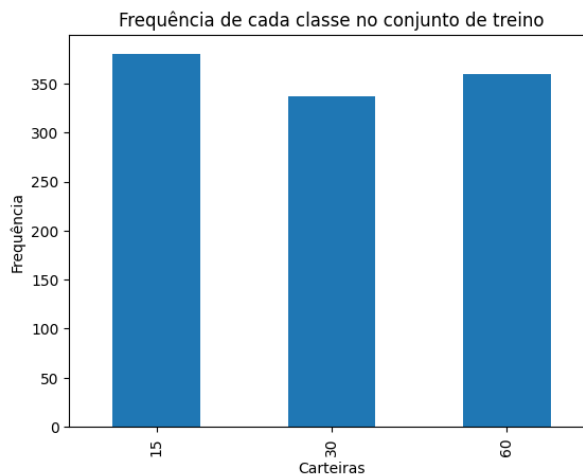
Figura 28 – Boxplot de acurácia para as redes avaliadas ampliado.



Fonte: próprio autor.

A rede GRU+Atenção Aditiva apresentou a menor acurácia, representada pelo modelo 'GRU_n_AddAtt'. As demais redes apresentaram acurácia semelhante. Todas as redes apresentam uma acurácia próximo a 33%. A figura 29 apresenta a frequência dos atributos alvos do teste para avaliar esta distribuição das carteiras a serem escolhidas.

Figura 29 – Frequência dos atributos alvos do teste.

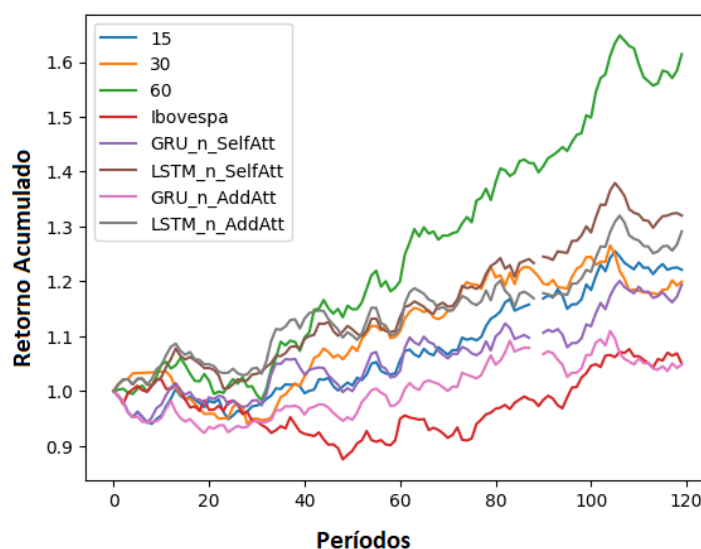


Fonte: próprio autor.

Portanto, as carteiras a serem escolhidas apresentam uma distribuição semelhante, o que indica que a acurácia obtida das redes são semelhantes a escolha de somente uma carteira, sendo esta feita de forma aleatória.

Contudo, seguindo para a validação da capacidade de predição da rede neural, foram avaliadas as escolhas feitas pelas redes ao longo do tempo. Avaliando o período de teste, a figura 30 apresenta a comparação das séries temporais geradas pelas predições das redes neurais, em comparação com as carteiras e o Ibovespa.

Figura 30 – Séries temporais de retorno acumulado geradas pelas predições das redes neurais.



Fonte: próprio autor.

As redes neurais com GRU, demonstraram resultados inferiores às próprias carteiras. A rede neural GRU+Atenção Aditiva apresentou o pior resultado e, em alguns períodos, se manteve inferior ao Ibovespa. As redes neurais com LSTM obtiveram os melhores resultados no retorno acumulado, contudo ainda inferior à carteira de melhor desempenho, a carteira de 60 dias. Os resultados diferem da literatura, em que Cao, Cao e Nguyen (2020) encontra resultados superiores para a rede GRU+Atenção Aditiva. Este estudo difere de Cao, Cao e Nguyen (2020) na aplicação de atributos de entrada, em seu estudo é inserida a combinação de volume e preços de ativos, enquanto este estudo utiliza somente os preços de ativos. Daiya e Lin (2021), que aplica a combinação de atenção com redes neurais convolucionais, também apresenta resultados superiores em seu estudo, contudo, os atributos de entrada são dados de análises técnicas de ativos. Portanto, a diferença de resultados pode ser atribuída aos atributos de entrada utilizados, sendo necessário um estudo mais aprofundado para avaliar a influência destes atributos.

Com objetivo de avaliar o desempenho das redes quanto ao índice Sharpe, a tabela 4 apresenta um comparativo entre as redes avaliadas e as carteiras. A tabela 4 apresenta a média, desvio padrão e índice Sharpe em valores absolutos diários para as redes avaliadas e as carteiras.

Tabela 4 – Índice Sharpe para as redes avaliadas e as carteiras.

	Média	Desvio Padrão	Índice Sharpe
GRU_n_SelfAtt	0,0016	0,0119	0,13
LSTM_n_SelfAtt	0,0024	0,0095	0,25
GRU_n_AddAtt	0,0005	0,0105	0,04
LSTM_n_AddAtt	0,0022	0,0114	0,19
15	0,0017	0,0101	0,17
30	0,0016	0,0108	0,15
60	0,0041	0,0131	0,31

Fonte: próprio autor.

A rede neural LSTM+Atenção Aditiva apresentou o melhor índice Sharpe, seguido pela carteira de 60 dias. O que confirma o desempenho apresentado pela figura 30.

Portanto, é possível concluir que as redes neurais não apresentaram resultados superiores às carteiras, contudo, a rede neural LSTM+Atenção Aditiva apresentou. Além disso, a rede neural LSTM+Atenção Aditiva apresentou o melhor índice Sharpe, apesar das redes não demonstrarem capacidade de predição. Portanto, as redes neurais propostas não foram capazes de prever a carteira de melhor desempenho para o próximo período.

5 CONCLUSÃO

Em conclusão, este estudo teve como objetivo aplicar redes neurais na previsão do índice Sharpe para seleção de carteiras de investimento. Para isso, foi realizada uma revisão bibliográfica para identificar as referências relevantes e as técnicas utilizadas na construção de carteiras de investimento, além de obter dados históricos e econômicos necessários para a análise.

A construção dos modelos de previsão dependeu da coleta e preparação de dados históricos de ativos financeiros e dados de mercado, considerando a qualidade e a padronização das diferentes fontes. A etapa de construção dos modelos envolveu a otimização das carteiras de investimento com base no índice Sharpe, considerando parâmetros reais e utilizando métodos de programação não linear. Também foi aplicada a seleção da carteira de investimento usando redes neurais, após o processo de otimização, avaliadas diferentes estruturas para identificar a mais adequada ao problema.

Ao avaliar o desempenho da seleção de carteiras de investimento, verificou-se que o modelo sem restrições obteve um melhor desempenho em termos de tempo de otimização e índice Sharpe. Por outro lado, o modelo com restrições e o uso de heurísticas apresentaram um desempenho inferior, embora tenham atendido à restrição de perda máxima, com exceção do modelo com início aleatório.

Em relação aos resultados das redes neurais, conclui-se que elas não apresentaram resultados superiores às carteiras de investimento, mas mostraram resultados superiores ao índice Bovespa. A rede neural LSTM+Atenção de Bahdanau obteve o melhor desempenho, contudo, abaixo do desempenho da carteira de 60 dias. Por outro lado, a rede neural GRU+Atenção de Bahdanau teve o pior desempenho, ficando abaixo do índice Ibovespa em alguns momentos.

Portanto, com base nos resultados obtidos, pode-se concluir que a aplicação de redes neurais na previsão do índice Sharpe para seleção de carteiras de investimento não superou o desempenho das carteiras, mas mostrou vantagens em relação ao índice Ibovespa. Essas descobertas contribuem para o avanço do conhecimento na área de finanças e destacam a importância de considerar abordagens baseadas em redes neurais como uma ferramenta adicional na seleção de carteiras de investimento.

5.1 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para trabalhos futuros sugere-se a aplicação de dados financeiros de análise técnica no treinamento das de redes neurais. Além disso, sugere-se a aplicação de redes neurais em outros modelos de otimização para a seleção da carteira de melhor desempenho, como o CVaR.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABOUSSALAH, A. M.; LEE, C. G. Continuous control with stacked deep dynamic recurrent reinforcement learning for portfolio optimization. **Expert Systems with Applications**, v. 140, 2020. ISSN 09574174.
- AITHAL, P. K.; GEETHA, M.; ACHARYA, U. D.; SAVITHA, B.; MENON, P. Real-time portfolio management system utilizing machine learning techniques. **IEEE Access**, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2023. ISSN 21693536.
- ALMAHDI, S.; YANG, S. Y. An adaptive portfolio trading system: A risk-return portfolio optimization using recurrent reinforcement learning with expected maximum drawdown. **Expert Systems with Applications**, v. 87, 2017. ISSN 09574174.
- ANGELELLI, E.; MANSINI, R.; SPERANZA, M. G. A comparison of mad and cvar models with real features. **Journal of Banking and Finance**, v. 32, 2008. ISSN 03784266.
- ANGELELLI, E.; MANSINI, R.; SPERANZA, M. G. Kernel search: A new heuristic framework for portfolio selection. **Computational Optimization and Applications**, v. 51, 2012. ISSN 15732894.
- ARIA, M.; CUCCURULLO, C. bibliometrix: An r-tool for comprehensive science mapping analysis. **Journal of Informetrics**, v. 11, 2017. ISSN 18755879.
- ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J. M.; HEATH, D. Coherent measures of risk. **Mathematical Finance**, v. 9, 1999. ISSN 09601627.
- B3. **Ibovespa B3**. 2023. Disponível em: <https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/ibovespa.htm>.
- BAHDANAU, D.; CHO, K. H.; BENGIO, Y. Neural machine translation by jointly learning to align and translate. **3rd International Conference on Learning Representations, ICLR 2015 - Conference Track Proceedings**, 2015.
- BERTRAND, J. W. M.; FRANSOO, J. C. Operations management research methodologies using quantitative modeling. **International Journal of Operations and Production Management**, v. 22, p. 241–264, 2002. ISSN 01443577.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, v. 31, 1986. ISSN 03044076.
- BRASIL, B. C. do. **Taxa Selic**. 2023. Disponível em: <<https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/taxaselic>>.
- CAO, H. K.; CAO, H. K.; NGUYEN, B. T. Delafo: An efficient portfolio optimization using deep neural networks. In: LAUW, H. W.; WONG, R. C.-W.; NTOULAS, A.; LIM, E.-P.; NG, S.-K.; PAN, S. J. (Ed.). **Advances in Knowledge Discovery and Data Mining: 24th Pacific-Asia Conference, PAKDD 2020, Singapore, May 11–14, 2020, Proceedings, Part I 24**. Cham: Springer International Publishing, 2020. v. 12084 LNAI, p. 623–635. ISSN 16113349.

CERQUEIRA, V. **9 Techniques for Cross-validating Time Series Data** | by Vitor Cerqueira | Medium. 2023. Disponível em: <<https://vcerq.medium.com/9-techniques-for-cross-validating-time-series-data-7828fc3f781d>>.

CHAWEEWANCHON, A.; CHAYSIRI, R. Markowitz mean-variance portfolio optimization with predictive stock selection using machine learning. **International Journal of Financial Studies**, v. 10, 2022. ISSN 22277072.

CHAWEEWANCHON, A.; CHAYSIRI, R. Portfolio optimization and rebalancing with transaction cost: A case study in the stock exchange of thailand. In: IEEE. **International Joint Conference 2022 - 17th International Joint Symposium on Artificial Intelligence and Natural Language Processing, iSAI-NLP 2022 and 3rd International Conference on Artificial Intelligence and Internet of Things, AIoT 2022**. Chiang Mai, Thailand, 2022. p. 1–6.

CHEN, T.; GUESTRIN, C. Xgboost: A scalable tree boosting system. In: **Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining**. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2016. (KDD '16), p. 785–794. ISBN 9781450342322.

CHEN, W.; ZHANG, H.; MEHLAWAT, M. K.; JIA, L. Mean–variance portfolio optimization using machine learning-based stock price prediction. **Applied Soft Computing**, Elsevier, v. 100, p. 106943, 3 2021. ISSN 1568-4946.

CHO, K.; MERRIËNBOER, B. van; GULCEHRE, C.; BAHDANAU, D.; BOUGARES, F.; SCHWENK, H.; BENGIO, Y. Learning phrase representations using RNN encoder–decoder for statistical machine translation. In: **Proceedings of the 2014 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP)**. Doha, Qatar: Association for Computational Linguistics, 2014. p. 1724–1734.

CHONG, E.; HAN, C.; PARK, F. C. Deep learning networks for stock market analysis and prediction: Methodology, data representations, and case studies. **Expert Systems with Applications**, v. 83, 2017. ISSN 09574174.

DAIYA, D.; LIN, C. Stock movement prediction and portfolio management via multimodal learning with transformer. In: **ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - Proceedings**. Toronto, ON, Canada: IEEE, 2021. v. 2021-June, p. 3305–3309. ISSN 15206149.

DEMIGUEL, V.; GARLAPPI, L.; UPPAL, R. Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/n portfolio strategy? **Review of Financial Studies**, v. 22, 2009. ISSN 14657368.

DENG, Y.; BAO, F.; KONG, Y.; REN, Z.; DAI, Q. Deep direct reinforcement learning for financial signal representation and trading. **IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems**, v. 28, 2017. ISSN 21622388.

DU, J. Mean-variance portfolio optimization with deep learning based-forecasts for cointegrated stocks. **Expert Systems with Applications**, v. 201, 2022. ISSN 09574174.

ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. **Econometrica**, v. 50, 1982. ISSN 00129682.

- FISCHER, T.; KRAUSS, C. Deep learning with long short-term memory networks for financial market predictions. **European Journal of Operational Research**, v. 270, 2018. ISSN 03772217.
- GAO, R.; GU, F.; SUN, R.; STEFANIDIS, A.; REN, X.; SU, J. A novel densenet-based deep reinforcement framework for portfolio management. **Proceedings - 2022 International Conference on Cyber-Enabled Distributed Computing and Knowledge Discovery, CyberC 2022**, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., p. 158–165, 2022.
- HEATON, J. B.; POLSON, N. G.; WITTE, J. H. Deep learning for finance: deep portfolios. **Applied Stochastic Models in Business and Industry**, v. 33, 2017. ISSN 15264025.
- HEDENGREN, J. D.; SHISHAVAN, R. A.; POWELL, K. M.; EDGAR, T. F. Nonlinear modeling, estimation and predictive control in apmonitor. **Computers and Chemical Engineering**, v. 70, 2014. ISSN 00981354.
- HOCHREITER, S.; SCHMIDHUBER, J. Long short term memory. **Neural Computation**, v. 9, 1997. ISSN 21695717.
- JANG, J.; SEONG, N. Deep reinforcement learning for stock portfolio optimization by connecting with modern portfolio theory. **Expert Systems with Applications**, v. 218, 2023. ISSN 09574174.
- JIA, X.; CAI, X. A policy gradient based particle swarm optimizer for portfolio optimization problem. In: IEEE. **Chinese Control Conference, CCC**. Hefei, China, 2022. v. 2022-July, p. 1991–1996. ISSN 21612927.
- KINGMA, D. P.; BA, J. L. Adam: A method for stochastic optimization. In: **3rd International Conference on Learning Representations, ICLR 2015 - Conference Track Proceedings**. San Diego, CA, USA: ICLR, 2015.
- KISIEL, D.; GORSE, D. Portfolio transformer for attention-based asset allocation. In: **Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)**. Zakopane, Poland: Springer, 2023. v. 13588 LNAI, p. 19–23. ISSN 16113349.
- KOLM, P. N.; TÛTÛNCÛ, R.; FABOZZI, F. J. 60 years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. **European Journal of Operational Research**, v. 234, 2014. ISSN 03772217.
- KRAFT, D. A software package for sequential quadratic programming. **Technical Report DFVLR-FB**, v. 88, 1988.
- KRUGER, M.; ZYL, T. L. V.; PASKARAMOORTHY, A. Ama-k: Aggressive multi-temporal allocation with k experts for online portfolio selection. In: **2021 8th International Conference on Soft Computing and Machine Intelligence, ISCMi 2021**. Cario, Egypt: IEEE, 2021. p. 114–119.
- LEE, J.; KOH, H.; CHOE, H. J. Learning to trade in financial time series using high-frequency through wavelet transformation and deep reinforcement learning. **Applied Intelligence**, v. 51, 2021. ISSN 15737497.

LEOW, E. K. W.; NGUYEN, B. P.; CHUA, M. C. H. Robo-advisor using genetic algorithm and bert sentiments from tweets for hybrid portfolio optimisation. **Expert Systems with Applications**, v. 179, 2021. ISSN 09574174.

LI, L.; JAMIESON, K.; DESALVO, G.; ROSTAMIZADEH, A.; TALWALKAR, A. Hyperband: A novel bandit-based approach to hyperparameter optimization. **Journal of Machine Learning Research**, v. 18, 2018. ISSN 15337928.

LIANG, Y.; THAVANESWARAN, A.; PASEKA, A.; THULASIRAM, R. K.; JOHNSON-SKINNER, E. Portfolio optimization using novel intelligent probabilistic forecasts of risk measures. In: **Proceedings - 2021 IEEE 45th Annual Computers, Software, and Applications Conference, COMPSAC 2021**. Madrid, Spain: IEEE Computer Society, 2021. p. 1748–1753.

LINTNER, J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. **The Review of Economics and Statistics**, v. 47, 1965. ISSN 00346535.

LUONG, T.; PHAM, H.; MANNING, C. D. Effective approaches to attention-based neural machine translation. In: **Proceedings of the 2015 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing**. Lisbon, Portugal: Association for Computational Linguistics, 2015. p. 1412–1421.

MANSINI, R.; OGRYCZAK, W.; SPERANZA, M. G. Twenty years of linear programming based portfolio optimization. **European Journal of Operational Research**, v. 234, p. 518–535, 2014. ISSN 03772217.

MANSINI, R.; OGRYCZAK, W.; SPERANZA, M. G. **Linear and mixed integer programming for portfolio optimization**. Switzerland: Springer Cham, 2015. (EURO Advanced Tutorials on Operational Research).

MAREE, C.; OMLIN, C. W. Balancing profit, risk, and sustainability for portfolio management. In: **2022 IEEE Symposium on Computational Intelligence for Financial Engineering and Economics, CIFEr 2022 - Proceedings**. Helsinki, Finland: IEEE, 2022.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **The Journal of Finance**, v. 7, p. 77–91, 1952. ISSN 00221082, 15406261.

MILHOMEM, D. A.; DANTAS, M. J. P. Analysis of new approaches used in portfolio optimization: a systematic literature review. **Production**, Associação Brasileira de Engenharia de Produção, v. 30, p. e20190144, 8 2020. ISSN 0103-6513.

MIN, L.; DONG, J.; LIU, J.; GONG, X. Robust mean-risk portfolio optimization using machine learning-based trade-off parameter. **Applied Soft Computing**, v. 113, 2021. ISSN 15684946.

MNIH, V.; KAVUKCUOGLU, K.; SILVER, D.; RUSU, A. A.; VENESS, J.; BELLEMARE, M. G.; GRAVES, A.; RIEDMILLER, M.; FIDJELAND, A. K.; OSTROVSKI, G.; PETERSEN, S.; BEATTIE, C.; SADIK, A.; ANTONOGLU, I.; KING, H.; KUMARAN, D.; WIERSTRA, D.; LEGG, S.; HASSABIS, D. Human-level control through deep reinforcement learning. **Nature**, v. 518, 2015. ISSN 14764687.

- MOODY, J.; WU, L.; LIAO, Y.; SAFFELL, M. Performance functions and reinforcement learning for trading systems and portfolios. **Journal of Forecasting**, v. 17, 1998. ISSN 02776693.
- MULVEY, J. M.; SUN, Y.; WANG, M.; YE, J. Optimizing a portfolio of mean-reverting assets with transaction costs via a feedforward neural network. **Quantitative Finance**, v. 20, 2020. ISSN 14697696.
- NGO, V. M.; NGUYEN, H. H.; NGUYEN, P. V. Does reinforcement learning outperform deep learning and traditional portfolio optimization models in frontier and developed financial markets? **Research in International Business and Finance**, Elsevier, v. 65, p. 101936, 4 2023. ISSN 0275-5319.
- ROCKAFELLAR, R. T.; URYASEV, S. Optimization of conditional value-at-risk. **The Journal of Risk**, v. 2, p. 21–41, 2000. ISSN 14651211.
- ROSENBLATT, F. The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain. **Psychological Review**, v. 65, 1958. ISSN 0033295X.
- SETHI, S. Nobel laureate harry markowitz: Creator of the modern portfolio theory. **Management and Business Review**, v. 1, n. 2, 2021.
- SHARPE, W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. **The Journal of Finance**, v. 19, p. 425–442, 1964. ISSN 15406261.
- SHARPE, W. F. Mutual fund performance. **The Journal of Business**, v. 39, 1966. ISSN 0021-9398.
- SHARPE, W. F. The sharpe ratio. **The Journal of Portfolio Management**, v. 21, 1994. ISSN 0095-4918.
- SOLARES, E.; DE-LEÓN-GÓMEZ, V.; SALAS, F. G.; DÍAZ, R. A comprehensive decision support system for stock investment decisions. **Expert Systems with Applications**, v. 210, 2022. ISSN 09574174.
- SUN, J.; FU, W.; LIN, J.; JIANG, Y.; XIA, S. T. Deep portfolio optimization modeling based on conv-transformers with graph attention mechanism. In: **Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks**. Padova, Italy: IEEE, 2022. v. 2022-July, p. 1–8.
- SUTTON, R. S.; BARTO, A. G. **Reinforcement Learning: An Introduction**. Second. Cambridge, MA, USA: The MIT Press, 2018. (Adaptive computation and machine learning series).
- TA, V. D.; LIU, C. M.; TADESSE, D. A. Portfolio optimization-based stock prediction using long-short term memory network in quantitative trading. **Applied Sciences (Switzerland)**, v. 10, 2020. ISSN 20763417.
- TRAN, M.; PHAM-HI, D.; BUI, M. Optimizing automated trading systems with deep reinforcement learning. **Algorithms**, v. 16, 2023. ISSN 19994893.
- TREYNOR, J. L.; BLACK, F. How to use security analysis to improve portfolio selection. **The Journal of Business**, v. 46, 1973. ISSN 0021-9398.

- URYASEV, S. Conditional value-at-risk: optimization algorithms and applications. In: **IEEE/IAFE Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering, Proceedings (CIFER)**. New York, NY, USA: IEEE, 2000. p. 49–57.
- VASWANI, A.; SHAZEER, N.; PARMAR, N.; USZKOREIT, J.; JONES, L.; GOMEZ, A. N.; KAISER Łukasz; POLOSUKHIN, I. Attention is all you need. In: **Advances in Neural Information Processing Systems**. Long Beach, CA, USA: Curran Associates, Inc., 2017. v. 2017-December. ISSN 10495258.
- VUKOVIC, D.; VYKLYUK, Y.; MATSIUK, N.; MAITI, M. Neural network forecasting in prediction sharpe ratio: Evidence from eu debt market. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 542, p. 123331, 2020. ISSN 03784371.
- WANG, W.; LI, W.; ZHANG, N.; LIU, K. Portfolio formation with preselection using deep learning from long-term financial data. **Expert Systems with Applications**, v. 143, 2020. ISSN 09574174.
- WENG, L.; SUN, X.; XIA, M.; LIU, J.; XU, Y. Portfolio trading system of digital currencies: A deep reinforcement learning with multidimensional attention gating mechanism. **Neurocomputing**, v. 402, 2020. ISSN 18728286.
- WINTERS, P. R. Forecasting sales by exponentially weighted moving averages. **Management Science**, v. 6, 1960. ISSN 0025-1909.
- YANG, H.; PARK, H.; LEE, K. A selective portfolio management algorithm with off-policy reinforcement learning using dirichlet distribution. **Axioms**, v. 11, 2022. ISSN 20751680.
- YU, D.; WANG, W.; ZHANG, W.; ZHANG, S. A bibliometric analysis of research on multiple criteria decision making. **Current Science**, v. 114, 2018. ISSN 00113891.
- YU, J.; CHANG, K.-C. Neural network predictive modeling on dynamic portfolio management—a simulation-based portfolio optimization approach. **Journal of Risk and Financial Management**, v. 13, 2020.
- YU, J.; LE, T.; CHANG, K. C.; GUHARAY, S. Fusing economic indicators for portfolio optimization—a simulation-based approach. **FUSION 2019 - 22nd International Conference on Information Fusion**, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 7 2019.
- YUE, H.; LIU, J.; ZHANG, Q. Applications of markov decision process model and deep learning in quantitative portfolio management during the covid-19 pandemic. **Systems**, v. 10, 2022. ISSN 20798954.
- ZHOU, Z.; SONG, Z.; REN, T.; YU, L. Two-stage portfolio optimization integrating optimal sharp ratio measure and ensemble learning. **IEEE Access**, v. 11, 2023. ISSN 21693536.
- ZHU, Z.; THAVANESWARAN, A.; PASEKA, A.; FRANK, J.; THULASIRAM, R. Portfolio optimization using a novel data-driven ewma covariance model with big data. In: **Proceedings - 2020 IEEE 44th Annual Computers, Software, and Applications Conference, COMPSAC 2020**. Madrid, Spain: IEEE, 2020. p. 1308–1313.

APÊNDICE A - PEÇAS DE CÓDIGOS

Os códigos desenvolvidos para este trabalho estão disponíveis no repositório do GitHub:
<https://github.com/renandcl/Portfolio_Optimization.git>

A seguir há um exemplo de peça de código desenvolvida para este trabalho para a coleta de dados.

Código 1 – Código de coleta de dados

```

1 from playwright.async_api import async_playwright
2 import asyncio
3 import datetime
4 import os
5 import automation_config
6
7 from os import environ
8 from os import path
9
10 environ['geckodriver_path'] = path.join(path.expanduser('/'), 'usr', 'local'
11     , 'bin', 'geckodriver')
12 environ['data_path'] = path.join(path.expanduser('~'), 'data', 'b3')
13
14 async def Update_Selic():
15     """ This automation download the consolidated Selic file from B3
16         and store in the local folder. It uses a webdriver and run on
17         screen
18         background actions.
19     """
20     # Get the path of the local folder
21     data_path = os.getenv('data_path')
22
23     async def run(playwright):
24         # Create a new browser instance
25         browser = await playwright.firefox.launch(headless=True)
26
27         # Create a new context
28         context = await browser.new_context(base_url="https://www3.bcb.gov.
29 br")
30
31         # Define the parameters for the post request
32         parameters = {
33             "optSelecionaSerie": "1178",
34             "dataInicio": "26/06/1996+",
35             "dataFim": datetime.datetime.today().strftime("%d/%
36 m/%Y"), #Today

```

```
35         "selTipoArqDownload": "1",
36         "hdOidSeriesSelecionadas": "1178",
37         "hdPaginar": "false",
38         "bilServico": "[SGSFW2301]"
39     }
40
41     # Create a new page
42     page = await browser.new_page()
43
44     # Execute the post request
45     response = await page.request.post("https://www3.bcb.gov.br/sgspub/
consultarvalores/consultarValoresSeries.do?method=consultarValores",
params=parameters)
46
47     # Get the request url of response
48     await page.goto(response.url)
49
50     # Click text=CSV and download the file
51     async with page.expect_download() as download_info:
52         async with page.expect_popup() as popup_info:
53             await page.click("text=CSV file")
54             page1 = await popup_info.value
55             download = await download_info.value
56
57     # Download the file
58     await download.save_as(os.path.join(data_path, 'SELIC'+'.csv'))
59
60     # Close the popup page, context, and browser
61     await page1.close()
62     await context.close()
63     await browser.close()
64
65
66     async def main():
67         async with async_playwright() as playwright:
68             await run(playwright)
69
70     # Check if an async loop is running
71     try:
72         loop = asyncio.get_running_loop()
73     except RuntimeError: # 'RuntimeError: There is no current event loop
...
74         loop = None
75
76     # Run the async loop
77     if loop and loop.is_running():
78         task = loop.create_task(main())
```

```

79     await task
80 else:
81     asyncio.run(main())

```

A seguir há um exemplo de peça de código para o pré-processamento de dados.

Código 2 – Código de pré-processamento de dados

```


1 import pandas as pd
2 import numpy as np
3
4 def assets_concat(CVM_Values, Ibov_Values, Selic_Values):
5     """ Function to concat the CVM, IBOV and Selic values.
6
7     Parameters:
8     -----
9         `CVM_Values`: DataFrame
10            Dataframe with the CVM values
11
12         `Ibov_Values`: DataFrame
13            Dataframe with the IBOV values
14
15         `Selic_Values`: Series
16            Series with the Selic daily interest rate values
17
18     Returns:
19     -----
20         `Assets_Values`: DataFrame
21            Dataframe with the concat values, outer join with Ibov and
22            inner join with Selic
23
24     Example:
25     -----
26         >>> Assets_Concat(CVM_Values, Ibov_Values, Selic_Values)
27
28            ABEV3  ALPA4  AMER3  ASAI3  AZUL4  ...  VIVT3
29  WEGE3  YDUQ3      IBOV      Selic
30
31            DATE                                     ...
32            1996-06-26      NaN      NaN      NaN      NaN      NaN  ...      NaN
33            NaN      NaN      6227.15      1.000637
34            1996-06-27      NaN      NaN      NaN      NaN      NaN  ...      NaN
35            NaN      NaN      6181.59      1.001266
36            1996-06-28      NaN      NaN      NaN      NaN      NaN  ...      NaN
37            NaN      NaN      6043.89      1.001865
38            1996-07-01      NaN      NaN      NaN      NaN      NaN  ...      NaN
39            NaN      NaN      6156.19      1.002457
40            1996-07-02      NaN      NaN      NaN      NaN      NaN  ...      NaN
41            NaN      NaN      6245.50      1.003036
42            ...      ...      ...      ...      ...      ...  ...      ...




```


```
34     ...     ...     ...     ...
35         2022-03-03  14.18  25.44  31.10  13.15  23.67  ...  48.79
36     31.25  20.32  115165.55  10.007505
37         2022-03-04  13.93  24.71  30.09  12.71  21.83  ...  48.64
38     31.51  19.54  114473.78  10.010280
39         2022-03-07  13.43  22.27  27.01  12.28  17.90  ...  48.64
40     31.08  18.01  111593.46  10.013056
41         2022-03-08  13.44  22.96  26.93  12.30  19.17  ...  48.80
42     31.57  18.08  111203.45  10.015833
43         2022-03-09  13.93  24.45  27.51  13.40  20.86  ...  49.65
44     32.67  19.34  113900.34  10.018610
45
46     """
47
48     CVM_IBOV_concat = pd.concat([CVM_Values, Ibov_Values], axis=1)
49     Selic_interst_to_growth = (Selic_Values + 1).cumprod()
50     CVM_IBOV_Selic = pd.concat([CVM_IBOV_concat, Selic_interst_to_growth],
51                                axis=1, join='inner')
52
53     return CVM_IBOV_Selic
```

APÊNDICE B - PRODUÇÃO CIENTÍFICA

1. International Journal of Theoretical and Applied Finance

IJTAF: A manuscript number has been assigned to Criptocurrency portfolio optimization with transaction costs, rebalancing and capital constraint  Externa Caixa de entrada x

Intl. J. of Theoretical & Applied Finance (IJTAF) <em@editorialman... qua., 14 de jun., 14:03   
para mim ▾

 inglês ▾ > português ▾ Traduzir mensagem

Desativar para: inglês x

Dear Mr. Renan Lima,

I am writing to acknowledge the receipt of your paper titled "Criptocurrency portfolio optimization with transaction costs, rebalancing and capital constraint" submitted to our International Journal of Theoretical & Applied Finance (IJTAF) for publication. We will send the paper to referees and the process will take approximately 5-6 months. Please include your paper ID "IJTAF23-101-Lima, Carvalho" in all your future correspondence and feel free to contact me with any questions that you may have.

You will be able to check on the progress of your paper by logging on to Editorial Manager as an author. The URL is <https://www.editorialmanager.com/ijtaf/>.

Thank you for submitting your work to this journal.

With kind regards

Sara Kowal
International Journal of Theoretical and Applied Finance

In compliance with data protection regulations, you may request that we remove your personal registration details at any time. (Use the following URL: <https://www.editorialmanager.com/ijtaf/login.asp?a=r>). Please contact the publication office if you have any questions.

2. LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional



Ver trabalho

Autor

SUBMETIDO

Otimização de carteira de investimentos em criptomoedas com custos de transações, rebalanceamento e restrição de capital

LIMA, R. D. C.¹
CARVALHO, H. D.²

¹Universidade Federal de Itajubá
²Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI)

Categoria da apresentação
Trabalho completo (oral)

Por gentileza, selecione a segunda opção de Eixo Temático:
1. AD&GP – PO na Administração e Gestão da Produção

Palavras-chave:
Otimização de Portfólio
Custos de transação
criptomoedas

Resumo:
A diversificação de portfólios é uma estratégia que visa reduzir o risco de um portfólio de investimentos. Com o surgimento das criptomoedas, a diversificação de portfólios com criptomoedas tem ganhado relevância em pesquisas de otimização de carteira. O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo de programação linear exato para o problema de otimização de carteira, e comparar com um algoritmo heurístico. Os modelos foram testados em 18 instâncias, com alteração da quantidade de ativos, nível de confiança, e quantidade máxima de ativos na carteira. Os resultados obtidos mostraram que o algoritmo heurístico obteve resultado satisfatório em relação ao exato. O modelo apresentado demonstrou ser viável para a otimização de carteira para criptomoedas considerando restrições reais, com a inclusão de lote padrão, custos de transações, restrições de investimento em cada ativo, total capital disponível, rebalanceamento, e limitação de quantidades de ativos compondo o portfólio.

Upload do trabalho (sem identificação):
 submission-160756-1348532-field_submission_fulltext_file1.pdf

Apresentador:
Renan Delgado Camurça Lima

Eixo Temático Principal:
10. GF – Gestão Financeira

Trabalho submetido

Parabéns, seu trabalho foi submetido com sucesso!

[« Voltar para sua dashboard](#)