Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Persistência de órbitas periódicas, integrais Abelianas em $\mathbb{R}^n$ e aplicações

Juan Gabriel Mora Urueña

Orientador: Bráulio Augusto Garcia

Itajubá, julho de 2023

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Juan Gabriel Mora Urueña

Persistência de órbitas periódicas, integrais Abelianas em $\mathbb{R}^n$ e aplicações

Orientador: Bráulio Augusto Garcia

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática.
Área de Concentração: Topologia/Geometria
Orientador: Bráulio Augusto Garcia

Itajubá – MG
2023

Agradecimentos

Eu agradeço a Deus por me permitir chegar até esta estada no meus estudos, também quero agradecer ao governo do Brasil pelo apoio e suporte oferecido sem o qual não teria sido possível o sonho de fazer meu mestrado em Matemática.
Eu quero agradecer igualmente ao corpo docente do IMC da UNIFEI, em especial ao Professor Luis Fernando Mello pela receptividade nos atendimentos e aos professores que compartilharam seus conhecimentos comigo, em particular ao meu orientador o Professor Bráulio Augusto Garcia por sua paciência imensa e suas valiosas contribuições no processo de preparação deste trabalho.

Dedico este trabalho à memória de minha avó por seus ensinamentos de vida que levo sempre comigo, à minha mãe por seu grande amor, à meu irmão de alma Manuel Mora pela motivação e à todas aquelas pessoas que me incentivaram sempre nos estudos, especialmente a minha professora de escola Elvia Aristizábal.

Resumo

Neste trabalho é apresentado um método de Integrais Abelianas para uma classe de sistemas de equações diferenciais em $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$, ou seja, podemos estudar a existência de ciclos limites através dos zeros simples de uma aplicação num aberto de $\mathbb{R}^{n-1}$. Com esta metodologia, são tratados alguns sistemas de dimensão 3 e 4 e as condições que seus parâmetros devem satisfazer para possuir ciclos limites.
Palavras–chave: Ciclos limites, persistência de órbitas periódicas, integral abeliana.

Abstract

In this work we study a method related to Abelian integrals for a class of differential equation systems in $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$, so that it can be studied the existence of limit cycles through the simple zeros of a mapping defined in an open set of $\mathbb{R}^{n-1}$. By means of this tool, some systems of dimension 3 and 4 are analysed and we give conditions on their parameters in order to get limit cycles for them.

Keywords: Limit cycles, Orbit persistence, Abelian integral.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

No final da década de 1920, van der Pol, Liénard e Andronov, estudando oscilações não lineares de fenômenos elétricos, analisaram certas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem verificando a ocorrência de órbitas periódicas isoladas, chamadas de ciclos limites. Como por exemplo modelos dados pela equação diferencial $\ddot{x} + x = \epsilon f\left(x, -dotx\right)$ ou, equivalentemente, o sistema planar de equações diferenciais

$$\begin{cases} \ddot{x} = y, \\ \ddot{y} = -x + \epsilon f(x, y), \end{cases}$$

sendo ϵ um parâmetro real suficientemente pequeno e f uma função polinomial (ou, em geral, analítica real). Desde então matemáticos e físicos estudam extensivamente a não existência, a existência, a localização e a unicidade, entre outras propriedades, como a estabilidade de ciclos limites.

Um importante conceito, introduzido inicialmente por Poincaré e depois por Pontryagin, utilizado nesses estudos é o da *integral abeliana*, que permite uma análise mais detalhada dos ciclos limites e de suas propriedades dinâmicas. Precisamente, pode-se mostrar a existência de uma *função integral* $F : \Sigma \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(\xi) = \int_0^{2\pi} f(\xi \cos u, -\xi \operatorname{sen} u) \operatorname{sen} u \; \mathrm{d}u$$

com $\xi > 0$ tal que, se $\xi_0 > 0$ é um *zero simples* da função F, isto é, $F\left(\xi_0\right) = 0$ e $F'\left(\xi_0\right) \neq 0$, então existe um ciclo limite no retrato de fase de $x'' + x = \epsilon f\left(x, x'\right)$ próximo a um círculo centrado na origem e de raio ξ_0, para $\epsilon \geqslant 0$ suficientemente pequeno.

Paralelamente, essas ideias foram apresentadas por Hilbert em sua lista de problemas para nortear os matemáticos do século XX. Em suas palavras no Congresso Internacional de Matemáticos de Paris:

> “ Quem de nós não gostaria de descobrir aquilo que o futuro nos oculta, e lançar um olhar sobre os iminentes progressos de nossa ciência e os segredos de seus desenvolvimentos durante o próximo século? Quais serão as metas especiais sobre as quais o comando do intelecto matemático das próximas gerações irá esforçar-se para alcançar? Quais novos métodos e novos fatos serão descobertos no novo século, sobre os quais repousam amplos e ricos campos do pensamento matemático? ” **David Hilbert, 1900.**

Um dos problemas, a sbaer, o 16º problema levanta as seguintes questões sobre o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= P_n(x,y) \\ \dot{y} &= Q_n(x,y). \end{cases} \tag{1.1}$$

Qual é o número máximo de ciclos limites do sistema diferencial (1.1) para todos os possíveis polinômios reais P_n e Q_n de grau menor ou igual a n? E o que dizer das posições relativas dos ciclos limites de (1.1), veja [13].

Tal problema é extremamente difícil e ainda não resolvido. Para reduzir a dificuldade, os sistemas polinomiais gerais são restritos aos seguintes sistemas Hamiltonianos perturbados,

$$\begin{cases} \dot{x} = -H_y(x,y) + \epsilon f(x,y) \\ \dot{y} = H_x(x,y) + \epsilon g(x,y). \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $f(x,y)$ e $g(x,y)$ são polinômios de grau $n \geq 2$, $\epsilon \geqslant 0$ suficientemente pequeno, $H(x,y)$ é um polinômio de grau $n+1$ que possui pelo menos uma família de órbitas fechadas denotada por Γ_h para o sistema não perturbado $(1.2)_{\epsilon=0}$, parametrizada por $\{(x,y) \mid H(x,y) = h, h \in J\}$, onde J é um intervalo aberto.

As perturbações destroem a integrabilidade e a maioria das órbitas periódicas de $(1.2)_{\epsilon=0}$ se tornam espirais. Apenas um número finito de órbitas fechadas isoladas com pequenas deformações persistem como ciclos limite de (1.2). A ideia principal para estudar

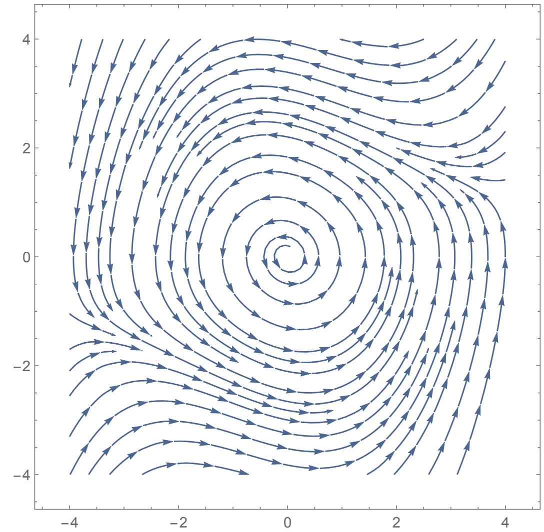

Figura 1.1: Órbitas no retrato de fase da equação de Van der Pol.

os "ciclos limite persistentes" é investigar os zeros da *aplicação de retorno de Poincaré* no anel periódico $\{\Gamma_h\}$, formado por órbitas periódicas do sistema $(1.2)_{\epsilon=0}$. Quando o parâmetro de perturbação ϵ está próximo de zero, a aplicação de retorno de Poincaré é aproximada pela seguinte integral abeliana,

$$I(h) = -\oint_{\Gamma_h} g(x,y)dx - f(x,y)dy, \quad h \in J. \tag{1.3}$$

Os zeros de $I(h)$ correspondem ao número de ciclos limite persistentes do sistema (1.2). Estudar o número máximo de zeros de $I(h)$ é chamado de problema fraco do 16º problema de Hilbert e foi proposto por Arnold. De fato, a maioria dos resultados sobre o 16º problema de Hilbert foram obtidos a partir do estudo do sistema (1.2), veja [13].

Os dois principais objetivos desse trabalho são:

- generalizar esses conceitos para sistemas de equações diferenciais em $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$, ou seja, essencialmente generalizar a integral abeliana (1.3) para uma classe importante de dinâmicas;

- aplicar em certos modelos de equações diferenciais em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ já consagrados na literatura recente da área que foram estudados utilizando outra teoria, a saber *o método do averaging*.

Os sistemas em $\mathbb{R}^3$ que usaremos para exemplificar a teoria são:

Nosé-Hoover, [4]	Langford-Hopf, [14]	Rossler, [3]
$\dot{x} = -y - axz,$	$\dot{x} = -\omega y - bx + xz,$	$\dot{x} = -y - z,$
$\dot{y} = x,$	$\dot{y} = \omega x - by + yz,$	$\dot{y} = x + ay,$
$\dot{z} = b(x^2 - 1).$	$\dot{z} = \lambda + az - \beta(x^2 + y^2) - \alpha z^3.$	$\dot{z} = bx - cz + xz.$

Os sistemas em $\mathbb{R}^4$ são:

Lorenz-Haken, [10]	Sistema hipercaótico, [2]
$\dot{x} = a(y - x),$	$\dot{x} = ay - ax + ew,$
$\dot{y} = -cy - dz + (e - w)x,$	$\dot{y} = bx - fxz + gw,$
$\dot{z} = dy - cz,$	$\dot{z} = -cz + hxy,$
$\dot{w} = -bw + xy.$	$\dot{w} = -dy.$

Para cada um dos sistemas anteriores como provar a existência de órbitas periódicas ou ciclos limites? E qual a sua localização no retrato de fase? Por exemplo, a simulação de uma órbita periódica no sistema de Nosé-Hoover para a, b pequenos, veja [4], é dada na Figura (1.2).

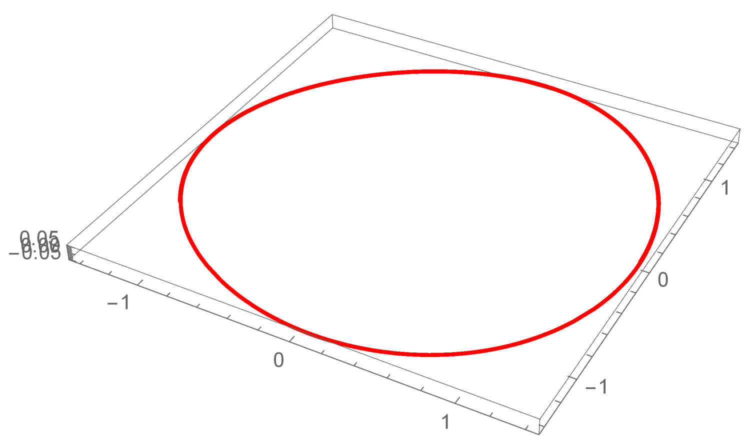

Figura 1.2: Órbita no retrato de fase do sistema de Nosé-Hoover para a, b pequenos.

A *teoria do Averaging* é uma das mais importante ferramentas para obter a existência de ciclos limites para um dado sistema não-autônomo em uma específica forma canônica para uma dada ordem. Na grande maioria dos sistemas, por exemplos nos citados na tabela anterior, esse método foi adaptado para o caso autônomo, usualmente utilizando coordenadas cilíndricas e tomando a variável angular como a variável independente, veja por exemplo [4] ou [9]. Nesse ponto vale ressaltar que a teoria a ser desenvolvida não faz menção a sistemas não-autônomos, portanto mais simples para aplicações práticas em sistemas físicos, eletrônicos, biológicos e ambientais.

Outro ponto fundamental é que a estratégia adotada por vários autores é de procurar por bifurcação do tipo *zero-Hopf* nos pontos singulares de tais sistemas, isto é, por pontos de equilíbrio não hiperbólicos com autovalores do sistema linearizado dados por $\pm i$ e todos os outros iguais a 0. O entendimento das órbitas que bifurcam de tal equilíbrio está longe de ser entendido completamente mas em certos casos levam a forma canônica do método do averaging.

Em suma, motivados pela discussão anterior, estudaremos sistemas dinâmicos na forma:

$$
\begin{cases}
x_1' = -x_2 + \epsilon g_1(x_1, ..., x_n), \\
x_2' = x_1 + \epsilon g_2(x_1, ..., x_n), \\
x_3' = \epsilon g_3(x_1, ..., x_n), \\
\qquad \vdots \\
x_n' = \epsilon g_n(x_1, ..., x_n).
\end{cases}, \tag{1.4}
$$

onde $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Note que para $\epsilon = 0$ o sistema 1.4 é integrável, pois é linear, e está dado pela matriz

$$
A = \begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}
$$

com autovalores $\pm i$ e 0.

Nesse caso temos o seguinte teorema sobre a existência da integral abeliana:

Teorema. *Considere a aplicação* $F : \Sigma_c \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$, *onde* Σ_c *é um conjunto aberto, dada por*

$$F(\xi) = \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} (g_1(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, ..., \xi_{n-1}) cos\ s + g_2(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, ..., \xi_{n-1}) sen\ s)\ ds \\ \int_0^{2\pi} g_3(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, ..., \xi_{n-1})\ ds \\ \vdots \\ \int_0^{2\pi} g_n(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, ..., \xi_{n-1})\ ds \end{pmatrix},$$

para $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-1}) \in \Sigma_c \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

Suponha $\xi_0 = (\xi_{01}, \xi_{02}, ..., \xi_{0n-1},) \in \Sigma_c \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *um zero simples de* F, *isto é,*

$$F(\xi_0) = 0 \quad e \quad det(DF(\xi_0)) \neq 0,$$

então o sistema $(1.4)_{\epsilon>0}$ *possui um ciclo limite persistente do sistema não perturbado* $(1.4)_{\epsilon=0}$, *para* ϵ *suficientemente pequeno. Além disso, a órbita periódica de* $(1.4)_{\epsilon>0}$ *é da forma*

$$X(t, \epsilon) = (\xi_{01} \cos t, \xi_{01} sent, \xi_{02}, \cdots, \xi_{0n-1}) + O_X(t, \epsilon)$$

onde $\xi_0 = (\xi_{01}, \xi_{02}, \ldots, \xi_{0n-1})$, *para* $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno. Desse modo,*

$$X(t, \epsilon) \to (\xi_{01} \cos t, \xi_{01} sent, \xi_{02}, \cdots, \xi_{0n-1})$$

quando $\epsilon \to 0$.

A dissertação está escrita na seguinte forma: No capítulo 2 apresentamos a teoria sobre ciclos limites em sistemas hamiltonianos planares perturbados (*Teorema de Poincaré-Pontryagin-Andronov*), bem como sua aplicação na clássica equação de Van der Pol.
O capítulo 3 trata sobre a teoria da persistência de órbitas periódicas em $\mathbb{R}^n$ em alguns modelos da forma (1.4), junto com algumas definições e fatos necessários para sua aplicação nos modelos estudados.
Para terminar, nos capítulos 4 e 5 são apresentados os sistemas de Nosé-Hoover, Rossler, Langford entre outros e exibem-se as condições sobre seus parâmetros para garantir a existência de ciclos limites por meio do método desenvolvido no capítulo 3.

Capítulo 2

Persistência de órbitas periódicas em $\mathbb{R}^2$

O objetivo deste capítulo é apresentar uma teoria de persistência de órbitas periódicas por perturbações em sistemas planares hamiltonianos que servirá de motivação para nosso estudo de existência de órbitas periódicas em $\mathbb{R}^n$.

2.1 Teorema de Poincaré-Pontryagin-Andronov

Considere $X_H = (-H_y, H_x)$ campo Hamiltoniano associado a uma função Hamiltoniana $H = H(x, y)$ de classe C^∞, onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Considere o sistema planar de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} &= -H_y \\ \dot{y} &= H_x, \end{cases} \tag{2.1}$$

e o sistema perturbado

$$\begin{cases} \dot{x} &= -H_y + \epsilon f(x, y) \\ \dot{y} &= H_x + \epsilon g(x, y), \end{cases} \tag{2.2}$$

onde f, g são funções de classe C^∞ e $\epsilon > 0$ um parâmetro pequeno. Suponha que exista um anel folheado de curvas fechadas (dito anel periódico) dxo sistema (2.1), $\gamma_h \subset H^{-1}(h)$, dependendo continuamente do parâmetro $h \in (a, b)$ com $a < b$. Veja a Figura 2.1.

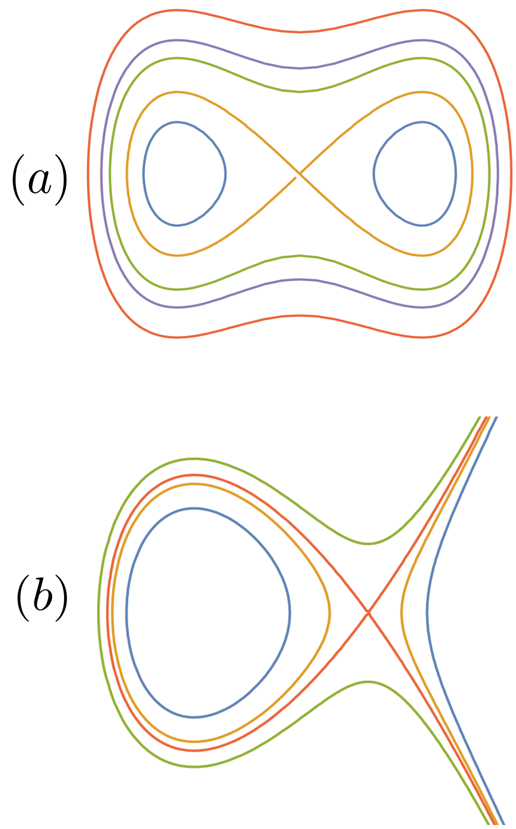

Figura 2.1: (a) $H(x,y) = \frac{1}{4}\left(x^2-1\right)^2 + \frac{y^2}{2}$ e (b) $H(x,y) = -\frac{x^3}{3} + x + \frac{y^2}{2}$.

Como mencionado na introdução, uma pergunta natural é quantas órbitas periódicas de (2.1) persistem para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno em (2.2)? Qual a localização das órbitas periódicas que persistem por pequenas perturbações? Para tentar responder essas perguntas precisamos definir e estudar a aplicação de retorno de Poincaré associada a (2.2) para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Considere a aplicação

$$\begin{array}{rcl} P : \Sigma \times (0, \bar{\epsilon}) & \longrightarrow & \Sigma \\ (h, \epsilon) & \longmapsto & P(h, \epsilon), \end{array}$$

onde $\bar{\epsilon} > 0$ e Σ o segmento transversal a cada curva fechada γ_h do anel periódico do sistema (2.1), como ilustrado na Figura 2.2.

Por simplicidade, parametrizaremos Σ pelos valores da função H denotados por h.

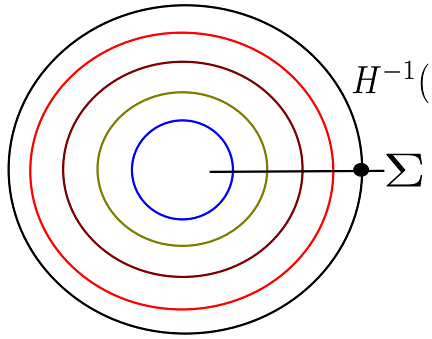

Figura 2.2: Curva de nível $h = H(x, y)$.

Seja $\gamma(h, \epsilon)$ a órbita do sistema (2.2) começando em $h \in \Sigma$ e finalizando em $P(h, \epsilon) \in \Sigma$, veja a seguinte Figura 2.3.

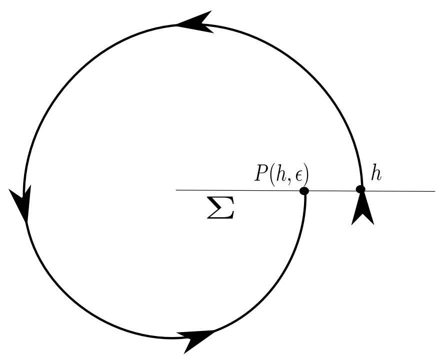

Figura 2.3: Órbita $\gamma(h, \epsilon)$.

Note que $P(h, \epsilon)$ está bem definida pela dependência contínua das equações diferenciais com respeito aos parâmetros. De fato, $\gamma(h, \epsilon)$ está próxima de $\gamma_h \subset H^{-1}(h)$ órbita periódica do sistema não perturbado. Considere a função, dita *função separação*, definida por

$$d(h, \epsilon) = P(h, \epsilon) - h.$$

Claramente, $d(h, 0) = P(h, 0) - h = h - h = 0$ no anel periódico.
Nessas condições podemos enunciar o seguinte teorema conhecido como Teorema de Poincaré-Pontryagin-Andronov:

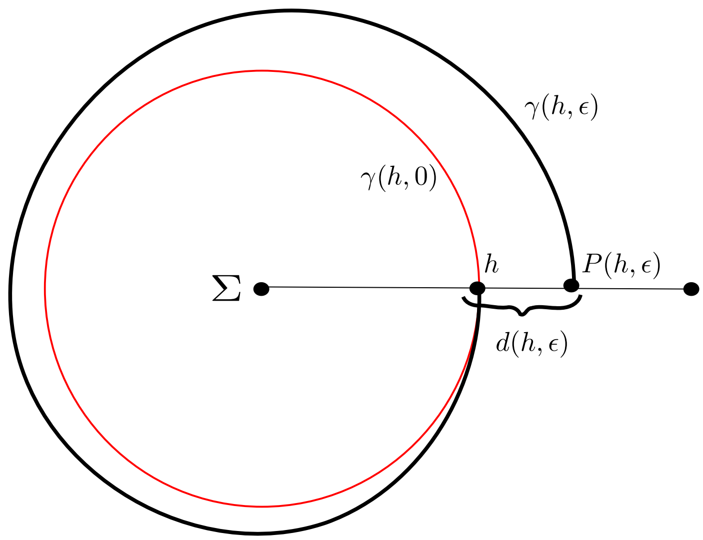

Figura 2.4: Função separação.

Teorema de Poincaré-Pontryagin-Andronov. *Nas hipóteses anteriores, temos que*

$$d(h,\epsilon) = \epsilon(I(h) + \epsilon\phi(h,\epsilon))$$

para ϵ *pequeno, onde* $\phi(h,\epsilon)$ *é de classe* C^∞ *uniformemente limitada numa vizinhança compacta de* $(h,0)$ *com* $h \in (a,b)$*, e*

$$I(h) = \oint_{\gamma_h} f(x,y)dy - g(x,y)dx.$$

A função I *é chamada Integral Abeliana.*

Demonstração. Por consequência de nossa parametrização de Σ temos que $d(h,\epsilon)$ é a diferença dos valores de H nos extremos de $\gamma(h,\epsilon)$, logo

$$\begin{aligned} d(h,\epsilon) &= \int_{\gamma(h,\epsilon)} dH \\ &= \int_{\gamma(h,\epsilon)} (H_x\dot{x} + H_y\dot{y})dt \\ &= \int_{\gamma(h,\epsilon)} (H_x(-H_y+\epsilon f) + H_y(H_x+\epsilon g))dt \\ &= \epsilon\int_{\gamma(h,\epsilon)} (fH_x + gH_y)dt. \end{aligned}$$

Expandindo $d(h,\epsilon)$ em série de Taylor em torno de $\epsilon = 0$ temos

$$d(h,\epsilon) = d(h,0) + \left.\frac{\partial d}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} \epsilon + \left.\frac{\partial^2 d}{\partial \epsilon^2}\right|_{\epsilon=0} \epsilon^2 + \cdots .$$

Note que

$$d(h,0) = 0 \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial d}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{\gamma(h,0)} (fH_x + gH_y)dt.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial d}{\partial \epsilon}\big|_{\epsilon=0} &= \int_{\gamma_h} (f\dot{y} + g\dot{x})dt \\ &= \oint_{\gamma} fdy - gdx. \end{aligned}$$

Definição 2.1. *Dizemos que Γ_ϵ é um ciclo limite do campo $X_{H,\epsilon}$ dado em (2.2) que bifurca de γ_{h^*}, se existir $h^* \in (a,b)$ e $\epsilon^* > 0$ tal que Γ_ϵ é ciclo limite de (2.2) para todo $0 < |\epsilon| < \epsilon^*$ e Γ_ϵ tende para γ_{h^*} quando $\epsilon \to 0$.*

Teorema 2.1. *Ainda nas hipóteses anteriores, suponha que $I = I(h)$ não seja a função identicamente nula em (a,b). Se existir $h^* \in (a,b)$ tal que $I(h^*) = 0$ e $I'(h^*) \neq 0$, então $X_{H,\epsilon}$, campo vetorial dado em (2.2), possui um único ciclo limite Γ_ϵ bifurcando de γ_{h^*}. Portanto, os zeros isolados (ou zeros simples) de $I(h)$ correspondem a órbitas periódicas isoladas no sistema perturbado, ou seja ciclos limites.*

Demonstração. Considere $\tilde{d}(h,\epsilon) = I(h) + \epsilon\phi(h,\epsilon)$. Temos que $\tilde{d}(h^*,0) = I(h^*) = 0$ e $\left.\dfrac{\partial}{\partial h}\tilde{d}\right|_{(h^*,0)} = I'(h^*) \neq 0$. Aplicando o Teorema da Função Implícita temos uma vizinhança de $(h^*,0)$, $U^* = \{(h,\epsilon) : |h - h^*| \leq \eta^* \ e \ |\epsilon| \leq \epsilon^*\}$ e uma única função $h = h(\epsilon)$ em U^* tal que

1. $h(0) = h^*$ e

2. $\tilde{d}(h^*(\epsilon),\epsilon) = 0, \forall \ \epsilon \in (-\epsilon^*, \epsilon^*)$.

Portanto, $d(h(\epsilon),\epsilon) = 0$ que é a função separação para todo $\epsilon < \epsilon^*$.

2.2 Equação de Van der Pol

A seguir, faremos um exemplo clássico da persistêcia de órbitas periódicas da equação de Van der Pol.

Consideremos a *equação de Van der Pol*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \epsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \tag{2.3}$$

Note que para $\epsilon = 0$, o sistema (2.3) é Hamiltoniano cuja família contínua de curvas fechadas é

$$\gamma_h = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = x^2 + y^2 = h, h > 0\right\}.$$

De fato, temos um centro linear. Usando coordenadas polares $x = hcos\theta$ e $y = hsen\theta$, e observando que a orientação de γ_h está no sentido anti-horário, temos:

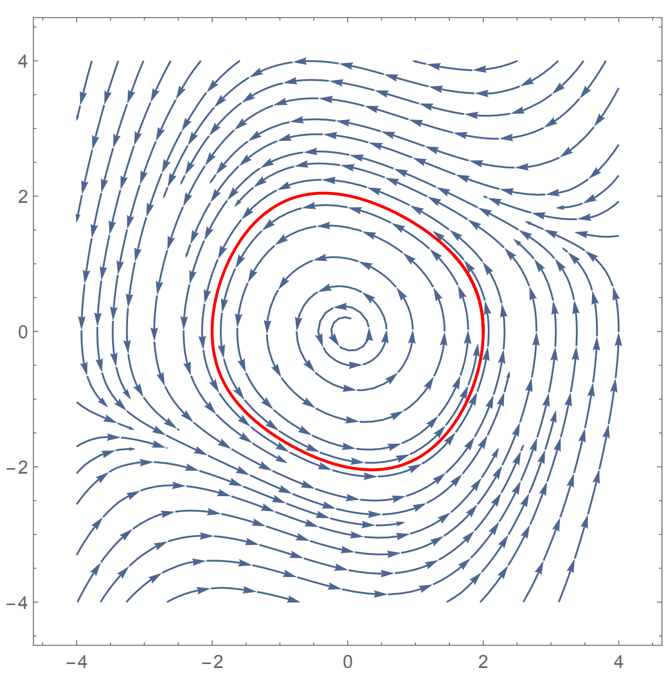

Figura 2.5: Órbita no retrato de fase da equação de Van der Pol para $\epsilon = 0.2$.

$$\begin{aligned}
I(h) &= \oint_{\gamma_h} (1-x^2)ydx \\
&= \int_0^{2\pi} (1-h^2cos^2\theta)(hsen\theta)(-hsen\theta d\theta) \\
&= -\int_0^{2\pi} (1-h^2cos^2\theta)(h^2sen^2\theta)d\theta \\
&= \pi h^2\left(\frac{h^2}{4}-1\right).
\end{aligned}$$

Note que $I(h)=0$ se, e somente se,

$$h=0 \;\; \text{ou} \;\; \frac{h^2}{4}-1=0.$$

O valor $h^*=0$ corresponde a singularidade do sistema e $h^*=2$ é o único zero positivo de $I(h)$.

Por outro lado, vemos que

$$I'(h)=2\pi h\left(\frac{h^2}{2}-1\right),$$

implica

$$I'(2)=4\pi\left(\frac{2^2}{2}-1\right)=4\pi\neq 0.$$

Pelo Teorema 2.1 concluímos que, para ϵ suficientemente pequeno, o sistema (2.3) possui um único ciclo limite que tende ao círculo de raio $\sqrt{2}$ quando $\epsilon\to 0$, veja Figura 2.5.

Capítulo 3

Definições e Resultados Preliminares

Neste capítulo é apresentado o principal resultado que envolve o *método das integrais abelianas* para o estudo de órbitas periódicas que persistem em determinadas equações diferenciais em $\mathbb{R}^n$ além de alguns conceitos, tomados de [5] e

3.1 Teoria da Persistência de Órbitas Periódicas em $\mathbb{R}^n$

Considere uma família a um parâmetro de equações diferenciais em $\mathbb{R}^n$ da forma

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + \epsilon g_1(x_1, ..., x_n), \\ x_2' = x_1 + \epsilon g_2(x_1, ..., x_n), \\ x_3' = \epsilon g_3(x_1, ..., x_n), \\ \qquad \vdots \\ x_n' = \epsilon g_n(x_1, ..., x_n), \end{cases} \tag{3.1}$$

com $\epsilon \geq 0$ um parâmetro e $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções de classe C^r, com $r \geq 1$ ou $r = \infty$, para $i = 1, \ldots, n$.

O sistema (3.1) pode ser escrito da seguinte forma

$$x' = F(x, \epsilon) = Ax + \epsilon G(x), \tag{3.2}$$

com $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon \geq 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

e $G \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $r \geq 1$ ou $r = \infty$, um campo vetorial dado por

$$\begin{array}{rcl} G : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & G(x) = (g_1(x), ..., g_n(x)). \end{array}$$

A solução do problema de valor inicial (3.3) associado ao sistema (3.2)

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + \epsilon g_1(x_1, ..., x_n), \\ x_2' = x_1 + \epsilon g_2(x_1, ..., x_n), \\ x_3' = \epsilon g_3(x_1, ..., x_n), \\ \qquad \vdots \\ x_n' = \epsilon g_n(x_1, ..., x_n), \\ x(0) = (\xi_1, 0, \xi_2, ..., \xi_{n-1}), \end{cases} \tag{3.3}$$

é denotada por

$$\begin{array}{rcl} x : I \times \mathbb{R}_*^{n-1} \times [0, \infty) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (t, \xi, \epsilon) & \longmapsto & x(t, \xi, \epsilon) = (x_1(t, \xi, \epsilon), ..., x_n(t, \xi, \epsilon)), \end{array} \tag{3.4}$$

sendo $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}_*^{n-1}$, com

$$\mathbb{R}_*^{n-1} = (0, \infty) \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

e I o intervalo máximal.

Note que a solução do sistema (3.3) em $\epsilon = 0$,

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = (\xi_1, 0, \xi_2, ..., \xi_{n-1}), \end{cases} \tag{3.5}$$

é dada por $x(t, \xi, 0) = e^{At}x(0)$, onde e^{At} é a matriz fundamental satisfazendo $e^{At} = Id$ em $t = 0$, isto é,

$$e^{At} = \begin{pmatrix} cos\ t & -sen\ t & 0 & ... & 0 \\ sen\ t & cos\ t & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Neste caso, todo ponto da forma $(0, 0, a_1, a_2, ..., a_{n-2})$ é ponto de equilíbrio de $x' = Ax$, sendo $a_1, a_2, ..., a_{n-2}$ números reais. Assim, os pontos de equilíbrio pertencem a um subespaço do $\mathbb{R}^n$ de dimensão $n - 2$. Além disso, com exceção dos pontos de equilíbrio, toda solução é periódica de período 2π.

Como mencionado anteriormente uma pergunta de interesse que surge naturalmente na teoria das equações diferenciais bem como em aplicações em áreas afins consiste em saber sobre a persistência e a localização de órbitas periódicas por pequenas perturbações. Dito de outra forma, sob quais condições órbitas periódicas do sistema linear (3.5) continuam ou persistem para ϵ suficientemente pequeno em (3.2)?

Para dar resposta a esta pergunta, vamos abordar algumas ferramentas da teoria de equações diferenciais que se encontram no trabalho de Mota [5].

Lema 3.1. *A solução x dada em (3.4) ao Problema de Cauchy (3.3) satisfaz*

$$x(t, \xi, \epsilon) = e^{At}x_0 + \epsilon \int_0^t e^{(t-s)A}G(x(s, \xi, \epsilon))\, ds, \quad (t, \xi, \epsilon) \in I \times \mathbb{R}^{n-1}_* \times [0, \infty),$$

com e^{At} a matriz fundamental (3.6) e $x_0 = (\xi_1, 0, \xi_2, ..., \xi_{n-1})$.

Demonstração. Defina a variável y por $y(t,\xi,\epsilon) = e^{-At}x(t,\xi,\epsilon)$, sendo $x = x(t,\xi,\epsilon)$, $(t,\xi,\epsilon) \in I \times \mathbb{R}_*^{n-1} \times [0,\infty)$, a solução do (3.3). Então,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x(t,\xi,\epsilon) &= \frac{d}{dt}(e^{At})y(t,\xi,\epsilon) + e^{At}\frac{d}{dt}y(t,\xi,\epsilon)\\
Ax(t,\xi,\epsilon) + \epsilon G(x(t,\xi,\epsilon)) &= Ae^{At}y(t,\xi,\epsilon) + e^{At}\frac{d}{dt}y(t,\xi,\epsilon)\\
Ax(t,\xi,\epsilon) + \epsilon G(x(t,\xi,\epsilon)) &= Ax(t,\xi,\epsilon) + e^{At}\frac{d}{dt}y(t,\xi,\epsilon),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}y(t,\xi,\epsilon) = \epsilon e^{-At}G(x(t,\xi,\epsilon)).$$

Integrando a equação anterior na variável s, de $s = 0$ até $s = t$, e tendo em conta que

$y(0,\xi,\epsilon) = x_0$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{d}{ds}y(s,\xi,\epsilon)\, ds &= \epsilon\int_0^t e^{-As}G(x(s,\xi,\epsilon))\, ds\\
e^{-At}x(t,\xi,\epsilon) - x_0 &= \epsilon\int_0^t e^{-As}G(x(s,\xi,\epsilon))\, ds, \quad (t,\xi,\epsilon) \in I \times \mathbb{R}_*^{n-1} \times [0,\infty),
\end{aligned}$$

terminando a demonstração.

Do Lema 3.1 resulta que

$$\begin{aligned}
x(t,\xi,\epsilon) &= x(t,\xi,0) + R_x(t,\xi,\epsilon)\\
&= (\xi_1 cost, \xi_1 sent, \xi_2, ..., \xi_{n-1}) + R_x(t,\xi,\epsilon),
\end{aligned}$$

com R_x uma função com desenvolvimento em série de Taylor na variável ϵ, em torno de $\epsilon = 0$, iniciando, pelo menos, no termo de grau 1 e $R_x(t,\xi,0) \equiv 0$.

Agora, em analogia com o caso planar, passamos a definir o que é uma seção transversal para poder introduzir o conceito de aplicação de primeiro retorno, o qual será crucial para atingir o objetivo de estudo.

3.2 Seção Transversal Local

Sejam $f : \Lambda \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$ ou $r = \infty$, no aberto $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$. Uma aplicação diferenciável $\sigma : U \to \Lambda$ de classe $\mathcal{C}^r$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ chama-se seção transversal local de f (de classe $\mathcal{C}^r$) quando, para todo $u \in U, D\sigma(u)\,(\mathbb{R}^{n-1})$ e $f(\sigma(u))$ geram o espaço $\mathbb{R}^n$. Seja $\Sigma = \sigma(U)$ munido da topologia induzida. Se $\sigma : U \to \Sigma$ for um homeomorfismo, é usual dizermos que Σ é uma seção transversal de f.

Seja $u = (u_1, u_2, ..., u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}_*$ e considere as funções

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^{n-1}_* &\to \mathbb{R}^n \\ u &\to \sigma(u) = (u_1, 0, u_2, ..., u_{n-1}) \end{aligned}$$

e h dada por

$$h(u,\epsilon) = det(F(\sigma(u),\epsilon)|D\sigma(u)), \quad u \in \mathbb{R}^{n-1}_*,$$

com F tal como em (3.2). Como, para cada $u \in \mathbb{R}^{n-1}_*$, $D\sigma(u) : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ é tal que

$$D\sigma(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix},$$

aplicando o Teorema de Laplace para determinantes, segue que

$$h(u,\epsilon) = det \begin{pmatrix} \epsilon g_1(\sigma(u)) & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ u_1 + \epsilon g_2(\sigma(u)) & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \epsilon g_3(\sigma(u)) & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \epsilon g_n(\sigma(u)) & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = -u_1 - \epsilon g_2(\sigma(u)),$$

para todo $u \in \mathbb{R}^{n-1}_*$.

Para $\epsilon = 0$, temos que $h(u,0) = -u_1 \neq 0$, para todo $u \in \mathbb{R}^{n-1}_*$, e portanto, $\Sigma = \sigma(\mathbb{R}^{n-1}_*)$ é seção transversal do campo F. Pela continuidade do campo vetorial F e para $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, se $h^{-1}(0) \cap \sigma(\mathbb{R}^{n-1}_*) \neq \emptyset$, então a interseção, em geral, é uma subvariedade de dimensão $n-2$ que determina a fronteira de Σ. Porém, se $h^{-1}(0) \cap \sigma(\mathbb{R}^{n-1}_*) = \emptyset$, então $\Sigma = \sigma(\mathbb{R}^{n-1}_*)$.

3.3 A Aplicação de Retorno de Poincaré

Se Γ é uma órbita periódica do sistema

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.7}$$

através do ponto x_0 e Σ é um hiperplano transversal a Γ em x_0, então para qualquer $x \in \Sigma$ perto o suficiente de x_0, a solução de (3.7) através de x em $t = 0$, $\phi_t(x)$, cruzará Σ de novo no ponto $P(x)$ perto de x_0; veja Figura 3.1. A aplicação $x \mapsto P(x)$ é chamada aplicação de retorno de Poincaré. O seguinte teorema, tomado de [8], estabelece a condições de existência da aplicação de Poincaré.

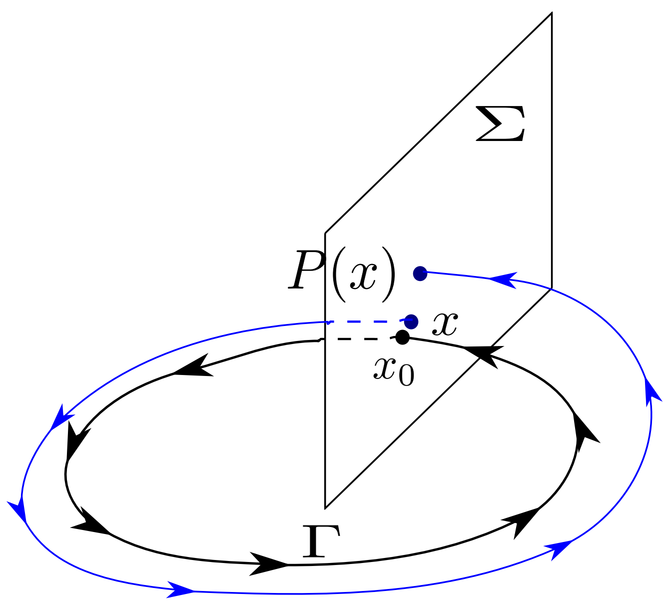

Figura 3.1: A aplicação de retorno de Poincaré.

Teorema 3.1. *Seja E um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f \in C^1(E)$. Suponha que $\phi_t(x_0)$ é uma solução periódica de (3.7) de periodo T e que a curva fechada*

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \phi_t(x_0), \quad 0 \leq t \leq T\}$$

esteja contido em E. Seja Σ o hiperplano ortogonal a Γ em x_0, isto é

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - x_0) \cdot f(x_0) = 0\}.$$

Então existe um $\delta > 0$ e uma única função $\tau(x)$, definida e continuamente diferenciável numa vizinhança de x_0 de raio δ, $N_\delta(x_0)$, tais que $\tau(x_0) = T$ e

$$\phi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma$$

para todo $x \in N_\delta(x_0)$.

Definição 3.1. *Sejam Γ, Σ, δ e $\tau(x)$ definidos como no Teorema 3.1. Então para $x \in N_\delta(x_0) \cap \Sigma$, a aplicação*

$$P(x) = \phi_{\tau(x)}(x)$$

é chamada de ***aplicação de retorno de Poincaré*** *para Γ em x_0.*

Com respeito ao nosso caso particular, vamos definir a *aplicação de primeiro retorno* P para o sistema (3.2).
Sejam $\Sigma_c = \sigma^{-1}(\Sigma)$, Σ como na definição de seção transversal, e no caso em que $h^{-1}(0) \cap \sigma(\mathbb{R}_*^{n-1}) = \emptyset$, onde h está definido como na seção transversal, tomamos $c = \infty$. Aqui c é tal que $\Sigma = \{(x_1, 0, x_2, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n : x_1 \in (0, c)\}$. Assim, ajustando Σ se necessário, P se define da seguinte maneira

$$\begin{array}{rcl} P : \Sigma_c \times [0, \epsilon_0) & \longrightarrow & \Sigma_c \\ (\xi, \epsilon) & \longmapsto & P(\xi, \epsilon), \end{array}$$

onde

$$P(\xi, \epsilon) := (x_1(T(\xi, \epsilon), \xi, \epsilon), x_3(T(\xi, \epsilon), \xi, \epsilon), ..., x_n(T(\xi, \epsilon), \xi, \epsilon))$$

com ϵ_0 um número real positivo, suficientemente pequeno, e $T = T(\xi, \epsilon) > 0$ o menor tempo tal que $x(T(\xi, \epsilon), \xi, \epsilon) \in \Sigma$, onde tal tempo é solução de $x_2(T(\xi, \epsilon), \xi, \epsilon) = 0$, visto que Σ é subconjunto de $x_2 = 0$. Note que $T(\xi, 0) = 2\pi$ e $P(\xi, 0) = \xi, \forall \xi \in \Sigma_c$.

Vale ressaltar que uma órbita periódica do sistema (3.2) se torna um ponto fixo para a função P. Desse modo, quer-se estudar os zeros da chamada *função separação*, que se define como

$$\begin{array}{rcl} \delta : \Sigma_c \times [0, \epsilon_0) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-1} \\ (\xi, \epsilon) & \longmapsto & \delta(\xi, \epsilon) = P(\xi, \epsilon) - \xi. \end{array}$$

Pelo exposto, sabe-se que $\delta(\xi, 0) = 0 \ \forall \xi \in \Sigma_c$ e também tem-se que $\delta_\xi(\xi, 0) = 0$ $\forall \xi \in \Sigma_c$. De fato,

$$\delta(\xi, \epsilon) = (\delta_1(\xi, \epsilon), \delta_2(\xi, \epsilon), ..., \delta_{n-1}(\xi, \epsilon)), \quad (\xi, \epsilon) \in \Sigma_c \times [0, \infty),$$

com

$$\begin{aligned} \delta_1(\xi, \epsilon) &= x_1(T(\xi, \epsilon), \xi, \epsilon) - \xi_1, \\ \delta_2(\xi, \epsilon) &= x_3(T(\xi, \epsilon), \xi, \epsilon) - \xi_2, \\ &\vdots \\ \delta_{n-1}(\xi, \epsilon) &= x_n(T(\xi, \epsilon), \xi, \epsilon) - \xi_{n-1}, \end{aligned}$$

e, portanto, segue que

$$\delta(\xi, 0) = \xi - \xi = 0.$$

Além disto,

$$\delta_\xi(\xi, \epsilon) = [\delta_{i\xi_j}(\xi, \epsilon)],$$

sendo $\delta_{i\xi_j}(\xi, \epsilon) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \delta_i(\xi, \epsilon), \quad i, j = 1, ..., n-1$. Logo, aplicando $\delta_\xi(\xi, \epsilon)$ em $\epsilon = 0$, temos que $\delta_\xi(\xi, 0) = [0]$.

Neste ponto, tem-se a questão de saber se para $\epsilon > 0$ existe ξ_ϵ tal que $\delta(\xi_\epsilon, \epsilon) = 0$, já que essa condição garantiria a existência de uma órbita periódica no sistema (3.2). No caso, calculando o desenvolvimento em série de Taylor da função P em relação a variável ϵ, em torno de $\epsilon = 0$ e até o termo de grau 2 temos que

$$P(\xi, \epsilon) = P(\xi, 0) + \epsilon P_\epsilon(\xi, 0) + O_P(\xi, \epsilon^2),$$

onde

$$O_P(\xi, 0) \equiv 0 \quad e \quad P_\epsilon(\xi, \epsilon) = \frac{\partial}{\partial \epsilon} P(\xi, \epsilon).$$

Desse modo,

$$\delta(\xi, \epsilon) = P(\xi, \epsilon) - \xi = \epsilon(P_\epsilon(\xi, 0) + O_P(\xi, \epsilon)).$$

Então,

$$\delta(\xi, \epsilon) = 0 \iff P_\epsilon(\xi, 0) + O_P(\xi, \epsilon) = 0.$$

Para dar condições de existência ao mencionado ξ_ϵ, precisamos definir mais uma aplicação como segue-se

$$\begin{array}{rcl} \Delta : \Sigma_c \times [0, \epsilon_0) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-1} \\ (\xi, \epsilon) & \longmapsto & \Delta(\xi, \epsilon) = P_\epsilon(\xi, 0) + O_P(\xi, \epsilon). \end{array}$$

Esta função satisfaz $\delta(\xi, \epsilon) = \epsilon \Delta(\xi, \epsilon)$ e, portanto, $\Delta(\xi, 0) = P_\epsilon(\xi, 0)$.

Definição 3.2. *Um zero simples ou um ponto singular simples de $\xi \mapsto \Delta(\xi, 0)$, é um ponto $\xi_0 \in \Sigma_c$ tal que $\Delta(\xi_0, 0) = 0$ e $\Delta_\xi(\xi_0, 0)$ é uma matriz não singular ou, equivalentemente, $P_\epsilon(\xi_0, 0) = 0$ e $P_{\epsilon\xi}(\xi_0, 0)$ é invertível.*

Proposição 3.1. *Se $\xi_0 \in \Sigma_c$ é zero simples de $\xi \mapsto \Delta(\xi, 0)$, então existe uma única função*

$$\begin{array}{rcl} \beta : V \subset [0, \epsilon_0) & \longrightarrow & U \subset \Sigma_c \\ \epsilon & \longmapsto & \beta(\epsilon) = \xi \end{array}$$

de classe C^r, com $0 \in V$, tal que $\Delta(\beta(\epsilon), \epsilon) = 0$, $\forall \epsilon \in V$, $\beta(0) = \xi_0$ e

$$\begin{aligned} \beta(\epsilon) &= \beta(0) + \beta'(0)\epsilon + O_\beta(\epsilon^2) \\ &= \xi_0 - \Delta_\xi(\xi_0, 0)^{-1} \Delta_\epsilon(\xi_0, 0)\epsilon + O_\beta(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Demonstração. Suponha $\xi_0 \in \Sigma_c$ um zero simples de $\xi \mapsto \Delta(\xi, 0)$, ou seja, $\Delta(\xi_0, 0) = 0$ e $\Delta_\xi(\xi_0, 0)$ é não singular. Assim, todas as hipóteses do *Teorema da Função Implícita* são satisfeitas. Portanto, existem uma vizinhança $U \times V \subset \Sigma_c \times [0, \varepsilon_0)$, com $(\xi_0, 0) \in U \times V$ e uma única função $\beta : V \longrightarrow U$, de classe $\mathcal{C}^r$, tal que $\beta(0) = \xi_0$ e $\Delta(\beta(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ para todo $\varepsilon \in V$. E, portanto, o resultado segue. $\square$

Tendo o resultado que sustenta a existência do ξ_ϵ procurado, resta agora encontrar uma expressão que permita seu cálculo. Tal fórmula será a Integral Abeliana associada ao nosso problema. Isto será feito através dos zeros de $P_\epsilon(\xi, 0)$.
Com efeito, note os seguintes pontos fundamentais

1. $P(\xi, \epsilon) = \pi_2(x(T(\xi, \epsilon), \xi, \epsilon))$ onde π_2 é a projeção em $x_2 = 0$, isto é

$$\begin{array}{rcl} \pi_2 : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-1} \\ (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & \pi_2(x_1, ..., x_n) = (x_1, x_3, ..., x_n). \end{array}$$

2. Segue do Lema 3.1 que

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} x(T, \xi, \epsilon) = \int_0^T e^{(T-s)A} G(x(s, \xi, \epsilon)) ds + \epsilon \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\int_0^T e^{(T-s)A} G(x(s, \xi, \epsilon)) ds \right).$$

   Logo, em $\epsilon = 0$ resulta que

$$\begin{aligned} \partial_\epsilon x(2\pi, \xi, 0) &= \int_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A} G(x(s, \xi, 0)) ds \\ &= \int_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A} G(e^{sA} x_0) ds. \end{aligned}$$

Note que $e^{(2\pi - s)A} G(e^{sA} x_0)$ é igual a

$$\begin{pmatrix} cos\ s & sen\ s & 0 & ... & 0 \\ -sen\ s & cos\ s & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, \xi_2, ..., \xi_{n-1}) \\ g_2(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, \xi_2, ..., \xi_{n-1}) \\ g_3(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, \xi_2, ..., \xi_{n-1}) \\ \vdots \\ g_n(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, \xi_2, ..., \xi_{n-1}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} g_1(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, \xi_2, ..., \xi_{n-1}) cos\ s + g_2(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, \xi_2, ..., \xi_{n-1}) sen\ s \\ g_2(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, \xi_2, ..., \xi_{n-1}) cos\ s - g_1(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, \xi_2, ..., \xi_{n-1}) sen\ s \\ g_3(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, \xi_2, ..., \xi_{n-1}) \\ \vdots \\ g_n(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, \xi_2, ..., \xi_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Com isto,

$$\begin{aligned} \partial_\epsilon P(\xi, \epsilon) &= \partial_\epsilon(\pi_2 \circ x(T(\xi, \epsilon), \xi, \epsilon)) \\ &= d\pi_2(x(T(\xi, \epsilon), \xi, \epsilon))\ \partial_\epsilon(x(T(\xi, \epsilon), \xi, \epsilon)) \\ &= d\pi_2\ (\dot{x}\partial_\epsilon T(\xi, \epsilon) + \partial_\epsilon x) \\ &= d\pi_2((Ax + \epsilon G(x))\partial_\epsilon T(\xi, \epsilon) + \partial_\epsilon x) \\ &= d\pi_2 A x \partial_\epsilon T + \epsilon d\pi_2 G(x) \partial_\epsilon T + d\pi_2 \partial_\epsilon x. \end{aligned}$$

Calculando em $\epsilon = 0$,

$$\begin{aligned} P_\epsilon(\xi, 0) &= d\pi_2 A x_0 (\partial_\epsilon T)\mid_{\epsilon=0} + d\pi_2(\partial_\epsilon x)\mid_{\epsilon=0} \\ &= d\pi_2(\partial_\epsilon x)\mid_{\epsilon=0}. \end{aligned}$$

Por fim obtemos a seguinte aplicação dependendo somente das funções na perturbação, $g_1, \ldots, g_n$,

$$P_\epsilon(\xi, 0) = \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} g_1(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, ..., \xi_{n-1}) cos\ s + g_2(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, ..., \xi_{n-1}) sen\ s\ ds \\ \int_0^{2\pi} g_3(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, ..., \xi_{n-1})\ ds \\ \vdots \\ \int_0^{2\pi} g_n(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, ..., \xi_{n-1})\ ds \end{pmatrix}.$$

Portanto, com os pontos ξ_0 que são zeros simples de $P_\epsilon(\xi, 0)$, isto é os pontos $\xi_0 \in \Sigma_c$ tais que $P_\epsilon(\xi_0, 0) = 0$ e $P_{\epsilon\xi}(\xi_0, 0)$ é invertível, obtem-se os pontos de continuação de órbitas periódicas que persistem em $\mathbb{R}^n$ para um valor de $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno.

3.4 Integral Abeliana em $\mathbb{R}^n$

O presente teorema faz resumo a ideia central deste capítulo.

Teorema 3.2. *Considere a aplicação* $F : \Sigma_c \to \mathbb{R}^{n-1}$ *dada por*

$$F(\xi) = \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} g_1(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, ..., \xi_{n-1}) cos\ s + g_2(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, ..., \xi_{n-1}) sen\ s\ ds \\ \int_0^{2\pi} g_3(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, , ..., \xi_{n-1})\ ds \\ \vdots \\ \int_0^{2\pi} g_n(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, ..., \xi_{n-1})\ ds \end{pmatrix}.$$

Suponha $\xi_0 \in \Sigma_c$ *um zero simples de* F*, isto é* $F(\xi_0) = 0$ *e* $det(DF(\xi_0)) \neq 0$*, então o sistema* $(1.4)_{\epsilon>0}$ *possui um ciclo limite persistente do sistema não perturbado* $(1.4)_{\epsilon=0}$*, para* ϵ *suficientemente pequeno. Além disso, a órbita periódica de* $(1.4)_\epsilon$ *é da forma*

$$X(t,\epsilon) = (\xi_{01} \cos t, \xi_{01} sent, \xi_{02}, \cdots, \xi_{0n-1}) + O_X(t,\epsilon)$$

onde $\xi_0 = (\xi_{01}, \xi_{02} \cdots \xi_{0n-1})$*, para* $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno. Desse modo,*

$$X(t,\epsilon) \to (\xi_{01} \cos t, \xi_{01} \sin t, \xi_{02}, \cdots, \xi_{0n-1})$$

quando $\epsilon \to 0$.

Capítulo 4

Modelos em $\mathbb{R}^3$

Nesta seção, são aprensentados algums modelos de sistemas de equações diferenciais suaves em $\mathbb{R}^3$ que exibem a existência de ciclos limites após serem perturbados.

4.1 Sistema de Nosé - Hoover

O sistema de equações diferenciais ordinárias dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - xz \\ \dot{y} = x \\ \dot{z} = \alpha(x^2 - 1), \end{cases} \tag{4.1}$$

onde α é um número real positivo ou nulo,é conhecido como o oscilador Nosé-Hoover [6],[7]. O referido sistema, amplamente estudado e obtido apartir das proposições feitas por Nosé no artigo *A molecular dynamics method for simulations in the canonical emsamble* sobre os novos paradigmas no estudo da dinámica molecular, foi formulado e estudado por Hoover e colaboradores, que mostraram seu amplo comportamento dinâmico em 1986. Em síntese, o sistema modela um oscilador harmónico unidimensional obtido pelas equações canônicas do movimento de Nosé.

Observe que para $\alpha > 0$ o sistema não tem pontos de equilíbrio. Então, considere-se o seguinte sistema diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - axz \\ \dot{y} = x \\ \dot{z} = b(x^2 - 1), \end{cases} \tag{4.2}$$

onde x, y e z são as variáveis, a e b parâmetros reais.
Do sistema (4.1) obtém-se o sistema (4.2) através de um redimensionamento da variável z, $z \to aZ$. Fazendo redimensionamento, considerando $b = \alpha/a$ e chamando $Z = z$ de novo, é gerado o sistema (4.2), o qual é topologicamente equivalente ao sistema (4.1) para $a \neq 0$.

A seguir, é mostrado analiticamente a existência de uma órbita periódica para o sistema (4.2) por meio da teoria descrita no capítulo anterior.

Teorema 4.1. *Para $ab \neq 0$, existe $0 < \varepsilon_0 \ll 1$ tais que para todo $\epsilon \in (0, \varepsilon_0)$ o sistema (4.2) com $a = \epsilon\bar{a}$ e $b = \epsilon\bar{b}$ (para $\bar{a} \neq 0$ e $\bar{b} \neq 0$ pequenos) tem uma órbita periódica γ_ϵ, que tende para o círculo $x^2 + y^2 = 2, z = 0$ quando $\epsilon \to 0$.*

Demonstração. Tomando $a = \epsilon\bar{a}$ e $b = \epsilon\bar{b}$ com ϵ pequeno o suficiente e $\bar{a}\bar{b} \neq 0$ no sistema (4.2), este escreve-se como segue

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \epsilon\bar{a}xz \\ \dot{y} = x \\ \dot{z} = \epsilon\bar{b}(x^2 - 1). \end{cases} \tag{4.3}$$

O sistema (4.3) pode-se reescrever de forma conveniente para que sua abordagem seja mais simples. Portanto, definindo as funções $g_1(x, y, z) = -\bar{a}xz$, $g_2(x, y, z) = 0$ e $g_3(x, y, z) = \bar{b}(x^2 - 1)$ o sistema toma a forma

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \epsilon g_1(x, y, z) \\ \dot{y} = x + \epsilon g_2(x, y, z) \\ \dot{z} = \epsilon g_3(x, y, z). \end{cases} \tag{4.4}$$

Em notação matricial, este sistema reduz-se a

$$X' = AX + \epsilon G(X),$$

onde $X \in \mathbb{R}^3$, $\epsilon > 0$, $G(X) = (g_1(X), g_2(X), g_3(X))$ e

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Desse modo, a aplicação F do teorema 3.2 para o sistema 4.4 está definida assim: $F : \Sigma_c \to \mathbb{R}^2$, onde Σ_c é um subconjunto de $\{(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$, dada por

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} (g_1(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, \xi_2) cos\ s + g_2(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, \xi_2) sen\ s)\, ds \\ \int_0^{2\pi} g_3(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, \xi_2) ds \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} -\bar{a}\xi_1\xi_2 cos^2 s ds \\ \int_0^{2\pi} \bar{b}(\xi_1^2 cos^2 s - 1) ds \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\bar{a}\pi\xi_1\xi_2 \\ \bar{b}\pi(\xi_1^2 - 2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note que $F(\xi) = 0$ se, e somente se, $\xi = \xi_0 = (\sqrt{2}, 0)$. O determinante da matriz jacobiana de F neste ponto é:

$$det(F_\xi(\xi_0)) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}\bar{a}\pi \\ 2\sqrt{2}\pi\bar{b} & 0 \end{pmatrix} = 4\pi^2\bar{a}\bar{b} \neq 0$$

Com isso, ξ_0 é um zero simples da aplicação F e, portanto, é um ponto de continuação de uma órbita periódica X que persiste para o sistema (4.2), após a perturbação para $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno. Tal órbita tem a seguinte representação

$$X(t, \beta(\epsilon), \epsilon) = X(t, \xi_0, 0) + O_X(t, \epsilon) = (\sqrt{2}cost, \sqrt{2}sent, 0) + O_X(t, \epsilon),$$

onde $O_X(t, \epsilon)$ é uma função com desenvolvimento de Taylor na variável ϵ, em torno de $\epsilon = 0$, com $O_X(t, 0) = 0$.

4.2 Sistema de Hopf-Langford

Nesta seção estudaremos o chamado sistema de Hopf-Langford, um sistema de equações diferenciais não-lineares em $\mathbb{R}^3$ dependendo de 5 parâmetros reais $a, b, \alpha, \beta, \lambda$ dado pela seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = (z-b)x - y \\ \dot{y} = x + (z-b)y \\ \dot{z} = \lambda + az - \beta\left(x^2+y^2\right) - \alpha z^3. \end{cases} \tag{4.5}$$

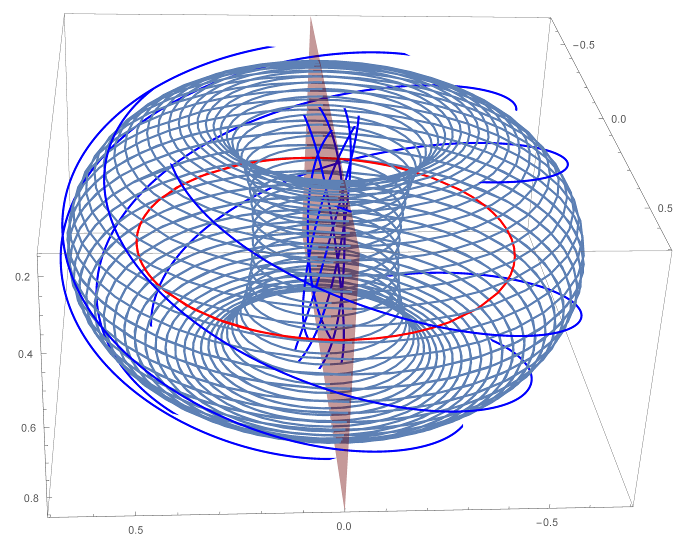

Figura 4.1: Órbitas no retrato de fase do sistema de Hopf-Langford.

Mostraremos analiticamente que esse sistema (4.5) apresenta o surgimento de uma órbita periódica atratora quando o parâmetro a for maior que um parâmetro crítico $a_0 = a_0(b, \alpha, \beta, \lambda)$, que explicitaremos a seguir.
Inicialmente, para $\epsilon > 0$ reescalonaremos (4.5) por

$$x = \epsilon\bar{x}, \quad y = \epsilon\bar{y}, \quad z = \epsilon\bar{z}, \quad a = \epsilon\bar{a}, \quad b = \epsilon\bar{b}, \quad \alpha = \epsilon^{-1}\bar{\alpha}$$

e abandonaremos as barras nas variáveis $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e nos parâmetros $(\bar{a}, \bar{b})$ para obter o seguinte sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \epsilon(z-b)x \\ \dot{y} = x + \epsilon(z-b)y \\ \dot{z} = \epsilon(az - x^2 - y^2 - z^3), \end{cases} \tag{4.6}$$

onde, por simplicidade da exposição, tomamos $\lambda = 0$, $\beta = 1$ e $\alpha = 1$. Dessa forma, ϵ é o parâmetro de bifurcação e a, b são constantes.

Teorema 4.2. *Considere $b > 0$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Se $a > b^2$, então o sistema de Hopf-Langford (4.6) tem uma única órbita periódica atratora dada por*

$$X(t, a, \epsilon) = (r_0 \cos t, r_0 sen\ t, z_0) + O_X(t, \epsilon)$$

onde $r_0 = \sqrt{b(a-b^2)}$ e $z_0 = b$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

A prova é uma aplicação direta das integrais Abelianas desenvolvidas anteriormente.

Demonstração. Queremos encontrar r^* tal que $F(r^*) = (0,0)$ e $F(r^*)$ é invertível para aplicar Teorema 3.2.

Nesse caso as integrais Abelianas

$$F_1(r) = \int_0^{2\pi} (cos\ s) g_1(r_1 cos\ s, r_1 sen\ s, r_2) + sen\ s g_2(r_1 cos\ s, r_1 sen\ s, r_2))\,\mathrm{d}s$$

e

$$F_2(r) = \int_0^{2\pi} g_3(r_1 cos\ s, r_1 sen\ s, r_2)\,\mathrm{d}s$$

fornecem

$$F_1(r) = 2\pi r_1(r_2 - b) e F_2(r, a) = 2\pi(a r_2 - r_1^2 - r_2^3).$$

Temos que $F_1(r) = F_2(r) = 0$ possui uma única solução (r_1^*, r_2^*) com $r_1^* > 0$ dada por

$$r_1^* = \sqrt{b(a-b^2)}, \quad r_2^* = b.$$

Note que o determinante Jacobiano de $F(r)$ em (r_1^*, r_2^*) é precisamente

$$8\pi^2 b(a - b^2).$$

Portanto, para $a > b^2$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno temos a existência de uma solução periódica da forma

$$X(t, a, \epsilon) = (r_0 \cos t, r_0 sen\ t, z_0) + O_X(t, \epsilon)$$

com $r_0 = r_1^*$ e $z_0 = r_2^*$. Além disso, $X(t, a, \epsilon) \to (r_0 cos\ t, r_0 sen\ t, z_0)$ quando $\epsilon \to 0$. Em suma, o sistema (4.5) possui uma órbita periódica com a escolha dos parâmetros feitas como anteriormente, isso prova o teorema. Veja a simulação da órbita periódica na Figura 5.1.

4.3 Sistema de Rössler

Entre os vários sistemas inventados por Rössler, aquele que se tornou mais famoso é provavelmente [12]

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= bx - cz + xz. \end{cases} \tag{4.7}$$

Mesmo que os sistemas Rössler foram criados para estudar a existência de atratores estranhos, muitos autores estudaram as órbitas periódicas desses sistemas de Rössler dependendo de seus parâmetros. Por exemplo, em ([3]) é estudado a existência ou não existência de equilíbrios zero-Hopf e bifurcações zero-Hopf em sistemas de Rössler através do método do averaging.

Definição 4.1. *Um equilíbrio zero-Hopf é um ponto de equilíbrio isolado com autovalores* 0 *e* $\pm\omega i$*, onde* $\omega > 0$*.*

Em nosso estudo, quer-se fazer a mesma caracterização dos pontos de equilíbrio do sistema (4.7) mas tomando como base o método das integrais abelianas. Os resultados via esta metodologia são os seguintes

Proposição 4.1. *Há duas famílías a um parâmetro de sistemas Rössler para as quais a origem é um ponto de equilíbrio zero-Hopf. Isto é* *(i)* $a = c \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ *e* $b = 1$;

(ii) $a = c = 0$ *e* $b \in (-1, \infty)$.

Teorema 4.3. *Seja* α, β *e* γ *números reais positivos, com* $\alpha > \gamma$. *Se* $(a, b, c) = (\overline{a} + \epsilon\alpha, 1 + \epsilon\beta, \overline{a} + \epsilon\gamma)$ *com* $\overline{a} \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$ *, então o sistema de Rössler (4.7) tem uma bifurcação zero-Hopf no ponto de equilíbrio localizado na origem, e uma órbita periódica surge deste equilíbrio quando* $\epsilon \geq 0$ *.*

Demonstração. Primeiramente vamos calcular os pontos de equilíbrio do sistema (4.7), ou seja os pontos nos quais o campo de vetores definido por (4.7), denotado por $F(x, y, z)$, se anula, isto é

$$\begin{aligned} -y - z &= 0, \\ x + ay &= 0, \\ bx - cz + xz &= 0. \end{aligned}$$

Os ditos pontos são os seguintes

$$P_1 = (0, 0, 0) \quad e \quad P_2 = \left(c - ab, \frac{ab - c}{a}, \frac{c - ab}{a} \right).$$

A parte linear do campo (3.7) está dada por

$$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & x - c \end{pmatrix}.$$

Substituindo o ponto $P_1 = (0, 0, 0)$ em DF obtém-se

$$DF(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & -c \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico desta matriz é

$$P(w) = w^3 + (c-a)w^2 + (1+b-ac)w + c - ab.$$

Para que o ponto P_1 seja um equilíbrio zero-Hopf devemos ter que

$$P(w) = w(w^2 + \lambda^2).$$

Logo, P_1 vai satisfazer essa condição quando

(i) $a = c = 0$ e $b = \lambda^2 - 1$ com $\lambda \in (0, \infty)$; ou

(ii) $a = c = \pm\sqrt{2-\lambda^2}$, e $b = 1$, com $w \in (0, \sqrt{2})$.

Com os parâmetros dados no teorema 4.3, da proposição 4.1 (ii) e o redimensionamento das variáveis dado por

$$\begin{cases} x = \epsilon y_1 \\ y = \epsilon y_2 \\ z = \epsilon y_3, \end{cases} \tag{4.8}$$

o sistema de Rössler fica como segue

$$\begin{cases} \dot{y_1} = -y_2 - y_3 \\ \dot{y_2} = y_1 + \sqrt{2-\lambda^2}y_2 + \epsilon\alpha y_2 \\ \dot{y_3} = y_1 - \sqrt{2-\lambda^2}y_3 + \epsilon(\beta y_1 - \gamma y_3 + y_1 y_3). \end{cases} \tag{4.9}$$

Ou em forma matricial,

$$Y' = BY + \epsilon H(Y),$$

com $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & \sqrt{2-\lambda^2} & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2-\lambda^2} \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} H &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ &Y \to H(Y) = (0, \alpha y_2, \beta y_1 - \gamma y_3 + y_1 y_3). \end{aligned}$$

Agora, vamos levar a matriz B a sua forma de Jordan, isto é,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para esse fim, vamos calcular os autovetores de B, a saber

$$\begin{aligned} V_1 &= (\sqrt{2-\lambda^2}, -1, 1) \\ V_2 &= (i\lambda + \sqrt{2-\lambda^2}, -1 + \lambda^2 - i\lambda\sqrt{2-\lambda^2}, 1) \\ V_3 &= (-i\lambda + \sqrt{2-\lambda^2}, -1 + \lambda^2 + i\lambda\sqrt{2-\lambda^2}, 1). \end{aligned}$$

Definindo a matriz $P = (Im(V_2), Re(V_2), V_1)$ temos que

$$P = \begin{pmatrix} \lambda & \sqrt{2-\lambda^2} & \sqrt{2-\lambda^2} \\ -\lambda\sqrt{2-\lambda^2} & 1-\lambda^2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e

$$\lambda A = P^{-1} B P.$$

Então, considerando a mudança de variável em (4.8), $X = P^{-1}Y$, com $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, segue que

$$\begin{aligned}X' &= P^{-1}Y' \\ &= P^{-1}BY + \epsilon P^{-1}H(Y) \\ &= (P^{-1}BP)X + \epsilon P^{-1}H(PX) \\ &= \lambda AX + \epsilon G(X),\end{aligned}$$

em que $G(X) = P^{-1}H(PX)$ possui componentes iguais a

$$G_1(X) = \frac{\epsilon(-\beta\sqrt{2-\lambda^2}\lambda x - \sqrt{2-\lambda^2}\lambda xy - \sqrt{2-\lambda^2}\lambda xz + \gamma\sqrt{2-\lambda^2}y}{\lambda}$$
$$\frac{+\lambda^2(y+z)(\beta+y+z) - 2(y+z)(\beta+y+z) + \gamma\sqrt{2-\lambda^2}z\big)}{\lambda},$$

$$G_2(X) = \frac{\epsilon\left(-\alpha\lambda\sqrt{2-\lambda^2}x + \beta\lambda\left(\lambda^2-1\right)x + \left(\lambda^2-1\right)y\left(\alpha-\gamma+\lambda x+\sqrt{2-\lambda^2}(\beta+2z)\right)\right.}{\lambda^2}$$
$$\frac{-z\left(\alpha+\left(\lambda^2-1\right)\left(-\beta\sqrt{2-\lambda^2}+\gamma-\lambda x\right)\right) + \left(\lambda^2-1\right)\sqrt{2-\lambda^2}y^2 + \left(\lambda^2-1\right)\sqrt{2-\lambda^2}z^2\big)}{\lambda},$$

$$G_3(X) = \frac{\epsilon\left(\lambda x\left(\alpha\sqrt{2-\lambda^2}+\beta\right) + y\left(-\alpha\lambda^2+\alpha-\gamma+\lambda x+\sqrt{2-\lambda^2}(\beta+2z)\right)\right.}{\lambda^2}$$
$$\frac{+z\left(\alpha+\beta\sqrt{2-\lambda^2}-\gamma+\lambda x\right) + \sqrt{2-\lambda^2}y^2 + \sqrt{2-\lambda^2}z^2\big)}{\lambda}.$$

Por fim, com o reescalonamento do tempo dado por $s = \lambda t$, o modelo alcançado é

$$X'(s/\lambda) = AX(s/\lambda) + \epsilon F(X(s/\lambda)),$$

onde, $F = \frac{1}{\lambda}G, \lambda \neq 0$.

Agora, seguindo o procedimento feito no modelo de Nosé-Hoover, definimos a função $F : \Sigma_c \to \mathbb{R}^2$, onde Σ_c é um subconjunto de $\{(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$, como:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi}(g_1(\xi_1 cos\ s, \xi_2 sen\ s, \xi_1) cos\ s + g_2(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, \xi_2) sen\ s)\ ds \\ \int_0^{2\pi} g_3(\xi_1 cos\ s, \xi_1 sen\ s, \xi_2)\ ds \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\pi\xi_1\left(\alpha\left(\lambda^2-1\right)-\gamma\lambda^2+\gamma+\sqrt{2-\lambda^2}\left(\left(\lambda^2-2\right)\xi_2-\beta\right)\right)}{\lambda^3} \\ \frac{\pi\left(\sqrt{2-\lambda^2}\xi_1^2+2\xi_2\left(\alpha-\gamma+\sqrt{2-\lambda^2}(\beta+\xi_2)\right)\right)}{\lambda^3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um zero da aplicação F, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, acontece quando

$$(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{(\gamma-\alpha)(1-\overline{a})+\overline{a}\beta}\sqrt{\alpha-\gamma+\overline{a}\beta(1-\overline{a}^2)}}{|\overline{a}|\overline{a}^2}, \frac{(\alpha-\gamma)(1-\overline{a}^2)-\overline{a}\beta}{\overline{a}^3} \right).$$

O ponto anterior vai ser um zero simples se

$$\det(DF(\xi)) \neq 0,$$

e isto ocorre quando

$$\beta(\gamma-\alpha) \neq 0.$$

Para concluir, se $\beta(\alpha-\gamma) > 0$, o sistema $X' = \lambda AX + \epsilon G(X)$ possui uma solução periódica da forma

$$X(t, \xi, \epsilon) = (\xi_1 cos\ t, \xi_1 sen\ t, \xi_2) + O_X(t, \epsilon)$$

Entretanto, para obter o resultado no sistema de Rössler original, tem-se que ter em conta que $Y = PX$ e o redimensionamento das variáveis em (4.8). Assim, com a notação

$$Y = Y(t, \epsilon) = \begin{pmatrix} y_1(t, \epsilon) \\ y_2(t, \epsilon) \\ y_3(t, \epsilon) \end{pmatrix},$$

segue que

$$
\begin{aligned}
Y(t,\epsilon) &= PX(t,\xi_0,0) + PO_X(t,\epsilon) && (4.10)\\
& && (4.11)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 cos\ t \\ \xi_1 sen\ t \\ \xi_2 \end{pmatrix} + PO_X(t,\epsilon) && (4.12)\\
&= \begin{pmatrix} \xi_1 cos\ t + \xi_1 sen\ t + \xi_2 \\ -\xi_1 cos\ t - \xi_2 \\ \xi_1 sen\ t + \xi_2 \end{pmatrix} + O_Y(t,\epsilon). && (4.13)
\end{aligned}
$$

De (4.8) resulta que

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t,\epsilon) \\ y(t,\epsilon) \\ z(t,\epsilon) \end{pmatrix} &= \epsilon \begin{pmatrix} y_1(t,\epsilon) \\ y_2(t,\epsilon) \\ y_3(t,\epsilon) \end{pmatrix} && (4.14)\\
&= \begin{pmatrix} \epsilon\xi_1 cos\ t + \epsilon\xi_1 sen\ t + \epsilon\xi_2 \\ -\epsilon\xi_1 cos\ t - \epsilon\xi_2 \\ \epsilon\xi_1 sen\ t + \epsilon\xi_2 \end{pmatrix} + \epsilon O_Y(t,\epsilon) && (4.15)\\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{b(c-a)} cos\ t + \sqrt{b(c-a)} sen\ t + 1 - b \\ -\sqrt{b(c-a)} cos\ t + b - 1 \\ \sqrt{b(c-a)} sen\ t + 1 - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_x(t,\epsilon) \\ O_y(t,\epsilon) \\ O_z(t,\epsilon) \end{pmatrix}. && (4.16)
\end{aligned}
$$

Deste modo, obtem-se a representação da órbita periódica que persiste para o sistema de Röosler (4.8) com a escolha adequada dos parâmetros e ϵ suficientemente pequeno.

Capítulo 5

Modelos em $\mathbb{R}^4$

Neste capítulo, vamos apresentar um novo sistema hipercaótico e o modelo de Lorenz-Haken em $\mathbb{R}^4$, e mostrar a existência de ciclos limites sobre certas condições nos seus parâmetros.

5.1 Um novo sistema hipercaótico modificado

Nesta seção consideramos um novo sistema hipercaótico em $\mathbb{R}^4$ com dois termos não-lineares quadráticos, veja [1] e [2],

$$\begin{cases} \dot{x} = ay - ax + ew \\ \dot{y} = bx - fxz + gw \\ \dot{z} = -cz + hxy \\ \dot{w} = -dy. \end{cases} \tag{5.1}$$

Note que a origem $(0,0,0,0)$ é um ponto de equilíbrio de (5.1).

Teorema 5.1. *Considere o sistema ((5.1)) com a, b e c parâmetros positivos arbitrariamente pequenos e $d = \omega^2/g$, onde $e, f, g, h, \omega > 0$. Então um ciclo limite bifurca do ponto de equilíbrio zero-Hopf na origem.*

Demonstração. A origem de (5.1) é um ponto de equilíbrio para qualquer escolha dos parâmetros. O polinômio característico $p(\lambda)$ associado a linearização do sistema nesse equilíbrio é dado por

$$p(\lambda) = (\lambda + c)(\lambda^3 + a\lambda^2 + (dg - ab)\lambda + adg + bde).$$

Temos que $(0,0,0,0)$ é um equilíbrio zero-hopf se, e somente se, $p(\lambda)$ tem a forma $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + \omega^2)$, com $\omega > 0$. Portanto, temos as igualdades

$$c = 0, \quad a = 0, \quad dg - ab = \omega^2, \quad \text{e} \quad adg + bde = 0.$$

Equivalentemente,

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0 \quad \text{e} \quad d = \omega^2/g,$$

ou

$$a = 0, \quad e = 0, \quad c = 0 \quad \text{e} \quad d = \omega^2/g.$$

O primeiro caso sugere considerarmos os parâmetros dados por

$$(a, b, c, d) \mapsto (\epsilon a, \epsilon b, \epsilon c, \epsilon d + \omega^2/g),$$

onde $\omega > 0$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequenos. Portanto, segue que a origem é um equilíbrio tipo zero-hopf quando $\epsilon \to 0$. O sistema (5.1) com esses parâmetros fica

$$\begin{cases} \dot{x} = \epsilon a y - \epsilon a x + e w \\ \dot{y} = \epsilon b x - f x z + g w \\ \dot{z} = -\epsilon c z + h x y \\ \dot{w} = -(\epsilon d + \omega^2/g) y. \end{cases} \tag{5.2}$$

Reescalonando as variáveis por

$$(x, y, z, w) \mapsto (\epsilon x, \epsilon y, \epsilon z, \epsilon w),$$

o sistema (5.2) pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = \epsilon a(y-x) + ew \\ \dot{y} = \epsilon(bx - fxz) + gw \\ \dot{z} = \epsilon(hxy - cz) \\ \dot{w} = -(\epsilon d + \omega^2/g)y. \end{cases} \tag{5.3}$$

O objetivo é mostrar analiticamente o surgimento e a localização de um ciclo limite bifurcando desse equilíbrio zero-hopf para ϵ pequeno. Para isso, devemos colocar a parte linear do sistema (5.3) na origem em sua forma canônica de Jordan, isto é, na forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para isso, considere a mudança linear de coordenadas $(x, y, z, w) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w})$ dada por

$$\begin{cases} x = \dfrac{e}{\omega}\bar{y} + \bar{w} \\ y = \dfrac{g}{\omega}\bar{y} \\ z = \bar{z} \\ w = \bar{x}. \end{cases} \tag{5.4}$$

Denotando as variáveis $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w})$ novamente por (x, y, z, w), o sistema (5.3) assume a forma

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y - \frac{dgy}{\omega}\epsilon \\ \dot{y} = \omega x + \frac{(b-fz)(ey+w\omega)}{g}\epsilon \\ \dot{z} = \left(\frac{ghy(ey+w\omega)}{\omega^2} - cz\right)\epsilon \\ \dot{w} = \left(-\frac{e(b-fz)\left(w+\frac{ey}{\omega}\right)}{g} - \frac{a(ey-gy+w\omega)}{\omega}\right)\epsilon. \end{cases} \tag{5.5}$$

Em resumo, colocamos o sistema hipercaótico (5.1) na forma normal (5.5) para aplicarmos o teorema de persistencia de órbitas periódicas via integrais abelianas.

Nesse caso as integrais fornecem que

$$F_1(r_1,r_2,r_3)=\int_0^{2\pi} g_1(r_1cos\ s, r_1sen\ s, r_2, r_3)cos\ s,\ ds+$$
$$+\int_0^{2\pi} g_2(r_1cos\ s, r_1sen\ s, r_2, r_3)sen\ s,\ ds=\frac{\pi e r_1(b-fr_2)}{g};$$

$$F_2(r_1,r_2,r_3)=\int_0^{2\pi} g_3(r_1cos\ s, r_1sen\ s, r_2, r_3)\,ds=\pi(eghr_1^2-2cr_2);$$

$$F_3(r_1,r_2,r_3)=\int_0^{2\pi} g_4(r_1cos\ s, r_1sen\ s, r_2, r_3)\,ds=-\frac{2\pi r_3(ag+be-efr_2)}{g}.$$

Calculando os zeros de

$$F_1(r_1,r_2,r_3)=F_2(r_1,r_2,r_3)=F_3(r_1,r_2,r_3)=0$$

temos uma única solução (r_1^*,r_2^*,r_3^*), com $r_1^*>0$, dada por

$$(r_1^*,r_2^*,r_3^*)=\left(\sqrt{\frac{2bc}{efgh}},\frac{b}{f},0\right).$$

Além disso, o determinante Jacobiano de

$$F(r_1,r_2,r_3)=\left(\frac{\pi e r_1(b-fr_2)}{g},\pi(eghr_1^2-2cr_2),\frac{2\pi r_3(ag+be-efr_2)}{g}\right)$$

em (r_1^*,r_2^*,r_3^*) é

$$-\frac{8\pi^3 abce}{g}.$$

Portanto, temos um ciclo limite da forma

$$X(t,\epsilon)=(r_0\cos t, r_0\sin t, z_0, w_0)+O_X(t,\epsilon)$$

de (5.5) onde $r_0=r_1^*$, $z_0=r_2^*$ e $w_0=r_3^*$, para $\epsilon>0$ suficientemente pequeno, veja Figura (5.1). Assim

$$X(t,\epsilon)\to(r_0\cos t, r_0\sin t, z_0, w_0)$$

quando $\epsilon\to 0$.

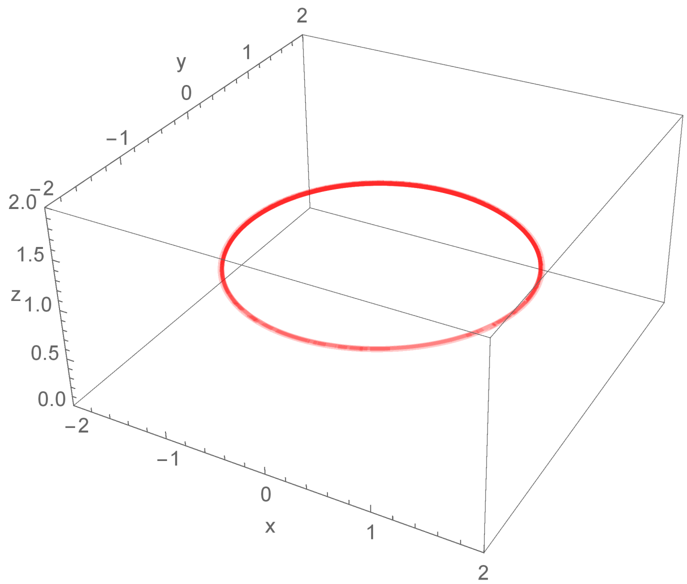

Figura 5.1: Órbita para $\epsilon = 0.03$ em $\{w = 0\} = \mathbb{R}^3$.

Consequentemente, feitas as devidas mudanças de coordenadas o sistema original (5.1) possui uma família de órbitas periódicas que tendem a origem quando ϵ tende a zero.

Vale ressaltar que a segunda condição

$$a = 0, \quad e = 0, \quad c = 0 \quad \text{e} \quad d = \omega^2/g$$

para $(0, 0, 0, 0)$ ser do tipo zero-Hopf não implica na persistência de órbitas periódicas através dessas integrais abelianas.

5.2 Sistema de Lorenz-Haken

O sistema governado pelas equações

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = -cy - dz + (e - w)x, \\ \dot{z} = dy - cz, \\ \dot{w} = -bw + xy, \end{cases} \tag{5.6}$$

onde x, y, z, w são as variáveis de estado e a, b, c, d e e são parâmetros reais, é referenciado como um sistema de Lorenz-Hanken de $\mathbb{R}^4$ com 5 parâmetros (veja [9]).

Para o estudo das órbitas periódicas desse sistema, começamos encontrando seus pontos de equilíbrio, os quais são

$$P_0 = (0,0,0,0) \quad e \quad P_{\pm} = \left(\pm\sqrt{b\Delta}, \pm\sqrt{b\Delta}, \pm\frac{\sqrt{b\Delta}}{c}, \Delta\right),$$

onde

$$\Delta = \frac{ec - c^2 - d^2}{c}.$$

A parte linear do sistema (5.6) está dada por

$$DF(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ e-w & -c & -d & -w \\ 0 & d & -c & 0 \\ y & x & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$DF(P_0) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ e & -c & -d & 0 \\ 0 & d & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de $DF(P_0)$ é igual a

$$P(\lambda) = \lambda^4 + A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D,$$

onde,

$$\begin{aligned} A &= a+b+c, \\ B &= 2bc+c^2+d^2+a(b+2c-e), \\ C &= b(c^2+d^2)+a(2bc+c^2+d^2-e(b-c)), \\ D &= ab(c^2+d^2-ce). \end{aligned}$$

Com base nisso, uma condição para o ponto P_0 ser zero hopf é que $P(\lambda)=\lambda^2(\lambda^2+\omega^2)$, com $\omega>0$, o qual é possível sempre que

$$a=-2c, \quad b=0, \quad d=-\frac{\sqrt{c^2+\omega^2}}{\sqrt{3}} \quad e \quad e=\frac{4c^2+\omega^2}{3c}.$$

Sem perda de generalidade, pode-se assumir $\omega=1$.
Logo, tomando os seguintes valores nos parâmetros:

$$(a,b,c,d,e)=(-2\bar{c}+\epsilon\alpha, \epsilon\beta, \bar{c}+\epsilon\gamma, -\frac{\sqrt{1+\bar{c}^2}}{\sqrt{3}}+\epsilon\delta, \frac{1+4\bar{c}^2}{3\bar{c}}+\epsilon\theta),$$

e considerando a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x=\epsilon y_1 \\ y=\epsilon y_2 \\ z=\epsilon y_3 \\ w=\epsilon y_4, \end{cases} \tag{5.7}$$

para $\epsilon>0$ pequeno o suficiente, o sistema (5.6) é reescrito como

$$\begin{cases} \dot{y_1}=(\epsilon\alpha-2\bar{c})(y_2-y_1), \\ \dot{y_2}=-(\bar{c}+\epsilon\gamma)y_2-(\epsilon\delta-\frac{\sqrt{c^2+1}}{\sqrt{3}})y_3+(\frac{4c^2+1}{3c}+\epsilon\theta)y_1-\epsilon y_4 y_1, \\ \dot{y_3}=(\epsilon\delta-\frac{\sqrt{c^2+1}}{\sqrt{3}})y_2-(\bar{c}+\epsilon\gamma)y_3, \\ \dot{y_4}=-\epsilon\beta y_4+\epsilon y_1 y_2, \end{cases} \tag{5.8}$$

ou na forma matricial

$$Y' = BY + \epsilon G(Y),$$

com $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$,

$$B = \begin{pmatrix} 2\bar{c} & -2\bar{c} & 0 & 0 \\ \dfrac{4\bar{c}^2+1}{3\bar{c}} & -c & \dfrac{\sqrt{\bar{c}^2+1}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{\bar{c}^2+1}}{\sqrt{3}} & -\bar{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^4 \\ Y \mapsto G(Y) &= \begin{pmatrix} \alpha(y_2 - y_1) \\ -\gamma y_2 - \delta y_3 + \theta y_1 - y_4 y_1 \\ \delta y_2 - \gamma y_3 \\ -\beta y_4 + y_1 y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

No que segue, calcula-se calcular os autovetores da matriz B para levar-a à sua forma canônica de Jordan, isto é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Isso é necessário para transformar o sistema (5.6) nas hipóteses do Teorema 3.2. Os autovetores de B são

$$\begin{aligned}
V_1 &= (0,0,0,1)\\
V_2 &= \left(-\frac{\sqrt{3}\bar{c}}{\sqrt{\bar{c}^2+1}}, -\frac{\sqrt{3}\bar{c}}{\sqrt{\bar{c}^2+1}}, 1, 0\right)\\
V_3 &= \left(-\frac{2\sqrt{3}\bar{c}\sqrt{\bar{c}^2+1}}{2\bar{c}^2+3i\bar{c}-1}, -\frac{\sqrt{3}(\bar{c}-i)}{\sqrt{\bar{c}^2+1}}, 1, 0\right)\\
V_4 &= \left(\frac{2\sqrt{3}\bar{c}\sqrt{\bar{c}^2+1}}{1+\bar{c}(-2\bar{c}+3i)}, -\frac{\sqrt{3}(\bar{c}+i)}{\sqrt{\bar{c}^2+1}}, 1, 0\right).
\end{aligned}$$

Com eles, se define a matriz de transformação linear de coordenadas P

$$P = \begin{pmatrix}
-\frac{6\sqrt{3}\bar{c}^2\sqrt{\bar{c}^2+1}}{9\bar{c}^2+(2\bar{c}^2-1)^2} & -\frac{2\sqrt{3}\bar{c}\sqrt{\bar{c}^2+1}\,(2\bar{c}^2-1)}{9\bar{c}^2+(2\bar{c}^2-1)^2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}\bar{c}}{\sqrt{\bar{c}^2+1}}\\
-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\bar{c}^2+1}} & -\frac{\sqrt{3}\bar{c}}{\sqrt{\bar{c}^2+1}} & 0 & -\frac{\sqrt{3}\bar{c}}{\sqrt{\bar{c}^2+1}}\\
0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix},$$

a qual satisfaz $P^{-1}BP = A$.

Logo, fazendo $X = P^{-1}Y$ obtém-se que

$$\begin{aligned}
X' &= P^{-1}Y'\\
&= P^{-1}BY + \epsilon P^{-1}G(Y)\\
&= P^{-1}BPX + \epsilon P^{-1}G(PX)\\
&= AX + \epsilon H(X),
\end{aligned}$$

onde $H(X) = P^{-1}G(PX)$.

Deste modo, a partir da função H pode-se calcular a aplicação F do Teorema 3.2

$$F(r_1,r_2,r_3) = \begin{pmatrix}
\frac{1}{3}\pi r_1\left(-3\alpha + 4\sqrt{3}\sqrt{\bar{c}^2+1}\bar{c}\delta + 6\bar{c}^2(\theta - r_2)\right)\\
6\pi\bar{c}^2\left(\frac{2r_1^2}{4\bar{c}^2+1} + \frac{r_3^2}{\bar{c}^2+1}\right) - 2\pi\beta r_2\\
-\frac{4}{3}\pi\bar{c}r_3\left(2\sqrt{3}\sqrt{\bar{c}^2+1}\delta + 3\bar{c}(\theta - r_2)\right)
\end{pmatrix}.$$

Um zero simples da aplicação F acontece quando

$$(r_1, r_2, r_3) = \left(\frac{\sqrt{\beta \left(4\bar{c}^2+1\right) \left(-3\alpha + 4\sqrt{3}\sqrt{\bar{c}^2+1}\bar{c}\delta + 6\bar{c}^2\theta\right)}}{6\bar{c}^2}, -\frac{\alpha}{2\bar{c}^2} + \frac{2\sqrt{1+\bar{c}^2}\delta}{\sqrt{3}\bar{c}} + \theta, 0 \right),$$

e

$$\frac{8}{3}\pi^3\alpha\beta\left(3\alpha - 2\bar{c}\left(2\sqrt{3}\sqrt{1+\bar{c}^2}\delta + 3\bar{c}\theta\right)\right) \neq 0.$$

Em resumo, tem-se o seguinte resultado

Teorema 5.2. *Seja* $(a, b, c, d, e) = (-2\bar{c} + \epsilon\alpha, \epsilon\beta, \bar{c} + \epsilon\gamma, -\frac{\sqrt{1+\bar{c}^2}}{\sqrt{3}} + \epsilon\delta, \frac{1+4\bar{c}^2}{3\bar{c}} + \epsilon\theta)$ *onde* $\bar{c} \in \mathbb{R} \setminus 0$ *e* ϵ *um parâmetro pequeno o suficiente. Se*

$$\alpha \neq 0 \ e \ \beta(2\bar{c}(2\sqrt{3}\sqrt{c^2+1}\delta + 3\bar{c}\theta) - 3\alpha) > 0,$$

então o sistema de Lorenz-Haken (5.6) tem um ciclo limite persistente.

Para encontrar a órbita do sistema de Lorenz-Haken, partimos do fato de que $X' = AX + \epsilon H(X)$ tem uma órbita X que persiste após uma perturbação para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno com a seguinte representação

$$\begin{aligned} X(t, \beta(\epsilon), \epsilon) &= X(t, \xi_0, 0) + O_X(t, \epsilon) && (5.9) \\ &= (r_0 cost, r_0 sent, z_0, w_0) + O_X(t, \epsilon), && (5.10) \end{aligned}$$

onde $r_0 = r_1$, $r_0 = r_2$ e $r_0 = r_3$.

Como no caso do sistema de Rössler, temos que considerar o fato que $Y = PX$ e a mudança de variáveis (5.7) para obter a órbita periódica que persiste no sistema original. Logo, se

$$Y = Y(t, \epsilon) = \begin{pmatrix} y_1(t, \epsilon) \\ y_2(t, \epsilon) \\ y_3(t, \epsilon) \\ y_4(t, \epsilon) \end{pmatrix},$$

segue que

$$
\begin{aligned}
Y(t,\epsilon) &= PX(t,\xi_0,0) + PO_X(t,\epsilon) && (5.11)\\
&= \begin{pmatrix} 2\bar{c} & -2\bar{c} & 0 & 0 \\ \dfrac{4\bar{c}^2+1}{3\bar{c}} & -c & \dfrac{\sqrt{\bar{c}^2+1}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{\bar{c}^2+1}}{\sqrt{3}} & -\bar{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 cost \\ r_0 sent \\ z_0 \\ w_0 \end{pmatrix} + PO_X(t,\epsilon) && (5.12)\\
&= \begin{pmatrix} 2\bar{c}r_0 cost - 2\bar{c}r_0 sent \\ \dfrac{4\bar{c}^2+1}{3\bar{c}} r_0 cost - cr_0 sent + \dfrac{\sqrt{\bar{c}^2+1}}{\sqrt{3}} z_0 \\ -\dfrac{\sqrt{\bar{c}^2+1}}{\sqrt{3}} r_0 sent - \bar{c} z_0 \\ 0 \end{pmatrix} + O_Y(t,\epsilon) && (5.13)
\end{aligned}
$$

De (5.7) resulta que

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t,\epsilon) \\ y(t,\epsilon) \\ z(t,\epsilon) \\ w(t,\epsilon) \end{pmatrix} &= \epsilon \begin{pmatrix} y_1(t,\epsilon) \\ y_2(t,\epsilon) \\ y_3(t,\epsilon) \\ y_4(t,\epsilon) \end{pmatrix} && (5.14)\\
&= \begin{pmatrix} 2\epsilon\bar{c}r_0 cost - 2\epsilon\bar{c}r_0 sent \\ \dfrac{4\bar{c}^2+1}{3\bar{c}} \epsilon r_0 cost - \epsilon c r_0 sent + \epsilon\dfrac{\sqrt{\bar{c}^2+1}}{\sqrt{3}} z_0 \\ -\epsilon\dfrac{\sqrt{\bar{c}^2+1}}{\sqrt{3}} r_0 sent - \epsilon\bar{c} z_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \epsilon O_Y(t,\epsilon). && (5.15)
\end{aligned}
$$

Considerações finais

Este trabalho teve como ponto de partida a apresentação do 16º problema de Hilbert, o qual pergunta sobre o número e as posição de ciclos limites em sistemas diferenciais polinomiais no plano e também, sua versão fraca proposta por Arnold que direciona o problema na investigação do número máximo de ciclos limites que bifurcam de um centro. A partir disso, foi estudado e aplicado o método de integrais Abelianas para encontrar ciclos limites em modelos de equações diferenciais de dimensão maior ou igual a dois. Cabe mencionar, tendo em vista os trabalhos citados nessa dissertação, que esta metodologia é mais simples de aplicar do que as teorias clássicas de Averaging.

Para estudos futuros colocamos o problema da estabilidade dos ciclos limites determinados pela integral abeliana, bem como a prova da existência de outras soluções de interesse nos sistemas dinâmicos como as soluções quase-periódicas, isto é soluções não periódicas contidas em toros invariantes. Adaptação e aplicações da integral abeliana desenvolvida aqui em sistemas não suaves também são problemas futuros naturais.

Por fim, uma questão natural é generalizar a integral abeliana associada ao sistema (1.4) para um sistema Hamiltoniano qualquer nas duas primeiras variáveis, não necessariamente o centro linear no plano x_1x_2 de $(1.4)_{\epsilon=0}$. Em suma, motivados pelo caso linear perturbado, o que podemos dizer das órbitas persistentes para um sistema dinâmico na forma

$$
\begin{cases}
x_1' = -H_{x_2} + \epsilon g_1(x_1, ..., x_n), \\
x_2' = H_{x_1} + \epsilon g_2(x_1, ..., x_n), \\
x_3' = \epsilon g_3(x_1, ..., x_n), \\
\qquad \vdots \\
x_n' = \epsilon g_n(x_1, ..., x_n),
\end{cases}
\tag{5.16}
$$

para H hamiltoniana em x_1x_2 com um anél periódico.

Referências Bibliográficas

[1] Jing Y., Zhouchao W. e Irene M. *Periodic solutions for a fourdimensional hyperchaotic system.* Advances in Difference Equations(2020), p. 1-9.

[2] L. Liu, C.X. Liu, Y.B. Zhang. *Theoretical analysis and circuit implementation of a novel complicated hyperchaotic system.* Nonlinear Dyn. 66(4), 707-715, (2011).

[3] Llibre, Jaume. *Periodic Orbits in the Zero-Hopf Bifurcation of the Rossler System.* Em Romanian Astronomical Journal, (2014), Vol. 24(1), p. 49-60.

[4] Llibre, Jaume; Messias, Marcelo; Reinol, Alisson. *Global Dynamics and Bifurcation of Periodic Orbits in a Modified Nosé-Hoover Oscillator. Journal of Dynamical and Control Systems*, (2020).

[5] Mota A., Welington. *Uma Teoría de Continuação de Órbitas Periódicas em Equações Diferenciais Ordinárias.* Dissertação do Programa de Mestrado em Matemática, UNIFEI, 2016.

[6] Nosé, S. *A unified formulation of the constant temperature molecular-dynamics method*s. Em The Journal of Chemical and Physics, (1984), p. 511-519.

[7] Nosé, S. *A molecular dynamics method for simulations in the canonical ensemble.* Em Molecular Physics, (1984), p. 255-268.

[8] Perko, Lawrence. *Differential Equations and Dynamical Systems.* New York: Springer; 2000.

[9] Renteria Alva, S.I. and Mereu, A.C. *Bifurcação zero-Hopf e soluções periódicas para um sistema hipercaótico de Lorenz.* (2021) Dissertação repositório USP.

[10] Renteria, Sonia e Suárez, Pedro. *Four-dimensional zero-Hopf bifurcation for a Lorenz-Haken System*, math.DS, 12 Jan (2022).

[11] Rezende, Alex Carlucci. *Dois métodos para a investigação de ciclos limites que bifurcam de centros.* Dissertação, ICMC/USP - São Carlos, (2011).

[12] Rossler, Otto. *Continuous chaos-four prototype equations.* Em Annals of the New York Academy of Sciences Journal, 336 (1979), p. 376-392.

[13] Uribe, Marcos. *Limit Cycles, Abelian Integral and Hilbert's Sixteenth Problem*, Rio de Janeiro: IMPA, (2017).

[14] Yang, Q., Yang, T. *Complex dynamics in a generalized Langford system*, Nonlinear Dynamics, 91, (2018), 2241-2270.