

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS

BRUNO CAVALCANTE MARTINS NORONHA

**Contribuições do estudo de episódios históricos para a
formação inicial: uma análise de conhecimentos de
professores de Matemática**

ITAJUBÁ
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS

BRUNO CAVALCANTE MARTINS NORONHA

**Contribuições do estudo de episódios históricos para a
formação inicial: uma análise de conhecimentos de
professores de Matemática**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, da Universidade Federal de Itajubá, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Educação em Ciências.

Área de concentração: Educação em Ciências

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Mariana Feiteiro Cavalari

ITAJUBÁ
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS

BRUNO CAVALCANTE MARTINS NORONHA

**Contribuições do estudo de episódios históricos para a
formação inicial: uma análise de conhecimentos de
professores de Matemática**

Banca Examinadora:

Prof. Dra. Mariana Feiteiro Cavalari
Prof. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira
Prof. Dr. Evandro Fortes Rozentalski
Prof. Dr. João Ricardo Neves da Silva

ITAJUBÁ
2023

*Dedico esse trabalho à minha vó, Maria José,
e ao meu amigo, irmão que encontrei
nas esquinas da vida, Eduardo.
Saudades eternas.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer meus pais, Maria Francisca e José Nézio, por todo o apoio oferecido, pela compreensão de minhas ausências, por estarem sempre dispostos a me ajudar, sempre se doando ao máximo para que meus objetivos possam se concretizar. Sem vocês nada disso, que aconteceu e está acontecendo, seria possível.

Gostaria de agradecer, também minha companheira, Isabela, por estar juntamente a mim, durante todo este árduo processo de investigação.

Meus sinceros agradecimentos a Profa. Dra. Mariana, minha professora e orientadora desde a época da graduação, fazendo-se presente desde minha primeira pesquisa de Iniciação Científica e, posteriormente, no Trabalho de Conclusão de Curso. Agradeço por todo conhecimento e carinho que foram compartilhados ao longo desses anos.

Gostaria de agradecer a banca avaliadora, Prof. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira, Prof. Dr. Evandro Fortes Rozentalski e Prof. Dr. João Ricardo Neves da Silva, pelas contribuições feitas, de modo que puderam enriquecer ainda mais esta investigação.

Agradeço aos professores que compõe o Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências. O conhecimento e as reflexões que foram proporcionadas no decorrer do mestrado, auxiliarão minha formação.

Quero também agradecer aos participantes do Grupo de Pesquisa em Práticas Formativas e Educativas em Ciências e Matemática (PFECiM) por todas as reflexões que foram propostas e debatidas nos encontros.

Gostaria de agradecer imensamente os licenciandos participantes deste trabalho. O comprometimento e a vontade de conhecer que tiveram foram/são motivacionais para minha formação.

Agradeço aos meus amigos e amigas da minha cidade e, em especial aos amigos que conheci durante a graduação, Jean e Sadhu. A amizade de todos vocês auxiliaram a deixar o árduo trabalho de pesquisador mais leve.

Por fim, gostaria de agradecer a Universidade Federal de Itajubá pela bolsa de fomento interno, cuja qual pude ser contemplado. Tal fomento foi essencial para que pudesse me dedicar de maneira integral à pesquisa.

*Não sou nada.
Nunca serei nada.
Não posso querer ser nada.
À parte isso, tenho em mim todos os sonhos do mundo.*

(Tabacaria, Álvaro de Campos [Fernando Pessoa]).

RESUMO

NORONHA, B. C. M. **Contribuições do estudo de episódios históricos para a formação inicial:** uma análise de conhecimentos de professores de Matemática. 2023. 131f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências), Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, 2023.

Pesquisas acerca das contribuições da História da Matemática na formação de professores vêm sendo desenvolvidas por diversos pesquisadores no âmbito nacional ao longo dos últimos anos. Nesse sentido, nos questionamos: Quais são as contribuições do estudo de episódios históricos da Matemática para a formação de professores de Matemática? Diante disso, buscou-se identificar e analisar conhecimentos de professores de Matemática mobilizados por licenciandos em Matemática no estudo de episódios históricos. Para tanto, os dados foram coletados em um grupo de estudos com licenciandos em Matemática de uma Universidade Federal do sul de Minas Gerais, que fora criado com intuito de discutir episódios históricos da matemática. Foram realizados cinco encontros, de modo que os quatro primeiros aconteceram por meio da plataforma de encontros online Google Meet e o último presencialmente. Todos os encontros foram gravados e posteriormente transcritos pelo pesquisador. Nestes encontros foram discutidos três episódios, a saber: (i) o surgimento da geometria não-euclidiana; (ii) o surgimento do cálculo infinitesimal; e (iii) o surgimento dos números complexos. As transcrições foram analisadas de modo a identificar indícios dos conhecimentos de professores evidenciados nas falas e comentários dos participantes. Os resultados desta investigação indicam que o estudo de episódios históricos pode contribuir para a mobilizações de diversos conhecimentos de professores, tais como o domínio de Conhecimento do Conteúdo e seus subdomínios: Conhecimento de Matemática (CdM) e o Conhecimento sobre Matemática (CsM) e, também, o domínio de Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) e seus subdomínios como o Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS) e o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT).

Palavras chave: Formação inicial de professores. História da Matemática. Episódios históricos. Conhecimento docente. Conhecimento Matemático para o Ensino.

ABSTRACT

NORONHA, B. C. M. **Contributions of the study of historical episodes to initial training: an analysis of Mathematics teachers' knowledge**. 2023. 131f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências), Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, 2023.

Research about the contributions of the History of Mathematics in teacher training has been developed by several researchers at the national level over the last few years. In this sense, we ask ourselves: What are the contributions of the study of historical episodes of Mathematics to the formation of Mathematics teachers? In view of this, we sought to identify and analyze the knowledge of Mathematics teachers mobilized by Mathematics undergraduates in the study of historical episodes. For this purpose, data were collected in a study group with undergraduate students in Mathematics at a Federal University in the south of Minas Gerais, which was created with the aim of discussing historical episodes in mathematics. Five meetings were held, so that the first four took place through the online dating platform Google Meet and the last one in person. All meetings were recorded and later transcribed by the researcher. In these meetings, three episodes were discussed, namely: (i) the emergence of non-Euclidean geometry; (ii) the emergence of infinitesimal calculus; and (iii) the emergence of complex numbers. The transcripts were analyzed in order to identify evidence of teachers' knowledge evidenced in the participants' speeches and comments. The results of this investigation indicate that the study of historical episodes can contribute to the mobilization of different knowledge of teachers, such as the Content Knowledge domain and its subdomains: Knowledge of Mathematics (CdM) and Knowledge about Mathematics (CsM) and, also, the Pedagogical Content Knowledge domain (PCK) and its subdomains such as Common Content Knowledge (CCK), Content and Student Knowledge (KCS) and Content and Teaching Knowledge (KCT).

Keywords: Initial teacher education. History of Mathematics. Historical episodes. Teaching knowledge. Mathematical Knowledge for Teaching.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- CC – *Curricular Knowledge*: Conhecimentos Curriculares
- CCK – *Common Content Knowledge*: Conhecimento Comum do Conteúdo
- CdM – Conhecimento de Matemática
- CK – *Subject Matter Knowledge*: Conhecimento do conteúdo
- CsM – Conhecimento sobre Matemática
- DAP – Diário de Anotações do Pesquisador
- GDE – Gravações das apresentações e dos encontros
- GPHM – Grupo de Pesquisa em História da Matemática e/ou suas relações com a Educação Matemática
- HCK – *Horizon Content Knowledge*: Conhecimento do Horizonte do Conteúdo
- HM – História da Matemática
- IC – Iniciação Científica
- KCT – *Knowledge of Content and Teaching*: Conhecimento do Conteúdo e do Ensino
- KCS – *Knowledge of Content and Student*: Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes
- MKT – *Mathematical Knowledge for Teaching*: Conhecimento Matemático para o Ensino
- OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
- PCK – *Pedagogical Content Knowledge*: Conhecimento Pedagógico do Conteúdo
- PIBID – Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
- SBHMat – Sociedade Brasileira de História da Matemática
- SCK – *Specialized Content Knowledge*: Conhecimento Especializado do Conteúdo
- SNHM – Seminário Nacional de História da Matemática
- TCC – Trabalho de Conclusão de Curso

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Domínios do Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)..... 53

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Características e frequência do Conhecimento de Matemática evidenciadas	102
Tabela 2 - Características e frequência do Conhecimento sobre Matemática evidenciadas	104
Tabela 3 - Características e frequência do Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes evidenciadas	115
Tabela 4 - Características e frequência do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino evidenciadas	117

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - Base de Conhecimento docente de Shulman	44
QUADRO 2 - Cronogramas dos encontros	62
QUADRO 3 - Material indicado	65
QUADRO 4 - Códigos elaborados para os instrumentos de coleta de dados ..	67
QUADRO 5 - Domínio do Conhecimento do Conteúdo e Pedagógico do Conteúdo.....	70
QUADRO 6 - Divisão dos subgrupos e escolha dos episódios	72
QUADRO 7 - Resposta sobre a primeira opção de curso	78
QUADRO 8 - Experiência docente	80

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	19
2 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA E FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA	24
2.1 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA	24
2.2 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA.....	30
3 CONHECIMENTO DOCENTE	36
3.1 SABERES E CONHECIMENTOS DOCENTES	36
3.2 A BASE DE CONHECIMENTO PROFISSIONAL DOCENTE PROPOSTA POR SHULMAN	38
3.3 O CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO (PCK)	44
4 O CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO (MKT)	50
4.1 O CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO PROPOSTO POR BALL E COLABORADORES.....	50
4.2 A ESTRUTURA DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO (MKT)	52
4.3 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E O CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO (MKT).....	57
5 PROCEDIMENTO METODOLÓGICO	60
5.1 ABORDAGEM METODOLÓGICA DA PESQUISA.....	60
5.2 PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DOS DADOS	61
5.3 A COLETA DE DADOS	66
5.4 ANÁLISE DOS DADOS.....	68
5.5 DESCRIÇÃO DOS ENCONTROS	72
5.5.1 O encontro inicial.....	72
5.5.2 Encontro 2: O surgimento das geometrias não-euclidianas	73
5.5.3 Encontro 3: O surgimento do cálculo infinitesimal.....	74

5.5.4 Encontro 4: O surgimento dos números complexos.....	75
5.5.5 Encontro 5: Fechamento das discussões.....	76
6 OS CONHECIMENTOS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EVIDENCIADOS NO GRUPO DE ESTUDOS	78
6.1 DESCRIÇÃO DOS PARTICIPANTES.....	78
6.2 ANALISANDO OS CONHECIMENTOS DO CONTEÚDO (CK)	81
6.2.1 Analisando aspectos relacionados ao Conhecimento de Matemática (CdM)	81
6.2.2 Analisando aspectos relacionados ao Conhecimento sobre Matemática (CsM)	90
6.2.3 Síntese dos Conhecimentos do Conteúdo evidenciados nos encontros.....	102
6.3 ANALISANDO O CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO (PCK)	105
6.3.1 Analisando aspectos relacionados ao Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS).....	106
6.3.2 Analisando aspectos relacionados ao Conhecimento do Conteúdo e Ensino (KCT).....	111
6.3.3 Síntese dos Conhecimentos Pedagógicos do Conteúdo (PCK) evidenciados durante os encontros.....	115
7 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	119
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	122
APÊNDICE A – QUESTÕES REFERENTES AO ENCONTRO ACERCA DO SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS.....	129
APÊNDICE B – QUESTÕES REFERENTES AO ENCONTRO ACERCA DO SURGIMENTO DO CÁLCULO INFINITESIMAL	130
APÊNDICE C – QUESTÕES REFERENTES AO ENCONTRO ACERCA DO SURGIMENTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS	131

APRESENTAÇÃO DO PESQUISADOR

O início dos estudos no ensino superior, no curso de Matemática Licenciatura, pela Universidade Federal de Itajubá (Unifei), não foi dos melhores. A Matemática formal que se apresentava possuía pouca relação com a matemática estudada por mim até aquele momento. Diante disso, grandes esforços foram feitos para que pudesse estar neste momento escrevendo essas palavras.

Como já disse um professor: “O conhecimento dói”, e através desses obstáculos enfrentados, disciplinas após disciplinas, toda essa Matemática formal que se apresentava, dia após dia, se tornava bela aos meus olhos.

Durante o percurso para tornar-me graduado em Matemática Licenciatura, além das disciplinas que estavam presentes na grade do curso, dos seminários e encontros voltados à educação proporcionados pela universidade, surgiram algumas oportunidades de aprimoramentos em minha experiência docente e, posteriormente, no âmbito acadêmico de pesquisa. A primeira oportunidade surgiu após a universidade participar do Programa Residência Pedagógica (RP), de modo que o tema proposto era a interdisciplinaridade. Diante disso, tive a possibilidade de acompanhar, junto de estudantes das outras licenciaturas presentes na universidade – Física, Química e Biologia – uma professora da educação básica por 18 meses.

Tal experiência adquirida propiciou-me um aprofundamento prático da estrutura de funcionamento de uma escola, de forma a que pude compreender melhor as hierarquias presentes no âmbito docente, a função da direção, da supervisão, do professorado em geral, dos profissionais de apoio e os profissionais de serviços gerais, que tornam possível o surgimento de uma escola. Além disso, o RP me proporcionou inúmeras reflexões sobre o trabalho docente, sobre a rotina e os desafios de ser um professor em uma sociedade que tão pouco valoriza à educação, possibilitou-me, também, o trabalho interdisciplinar com outros estudantes de outras licenciaturas relacionadas à ciências, de modo a produzirmos aulas, projetos e trabalhos que foram desenvolvidos e aplicados em turmas da educação básica, nos ensinando assim

a importância de se trabalhar em conjunto, interligando assim os conhecimentos dessas áreas, e ampliando aos estudantes a percepção de que as disciplinas, que antes eram vistas como singulares, compunham um conjunto maior de conhecimento, conhecido como ciência.

Outro momento de grande aprendizagem relaciona-se a pesquisa de Iniciação Científica (IC) e o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) que pude desenvolver dentro da universidade. Na pesquisa de IC estudamos e analisamos com enfoque histórico os 23 problemas de Hilbert, evidenciando assim qual a situação em que se encontram atualmente. Já no TCC estudamos e analisamos especificamente o segundo problema proposto por Hilbert, resolvido por Gödel através dos Teoremas da Incompletude, relacionando assim os impactos que desses teoremas no cenário científico internacional. Os resultados destes trabalhos foram apresentados respectivamente no Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM, 2021) e o Encontro Mineiro de Educação Matemática (EMEM, 2021).

Essas pesquisas me possibilitaram ter um contato inicial com aspectos referentes à produção do conhecimento científico, o processo de escrita e divulgação dos resultados, a seriedade no desenvolvimento de uma proposta metodológica e à ética existente em pesquisas acadêmicas. Nesse sentido, proporcionaram também o interesse acerca do trabalho do pesquisador no campo da educação, despertando o entusiasmo em continuar a desenvolver pesquisas na pós-graduação.

Após ser aprovado no processo seletivo do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências (PPGEC) da Unifei em 2021 e ao discutir junto à minha orientadora acerca desta pesquisa, as reflexões sobre a HM e a natureza do conhecimento matemático tornaram-se objetivo de estudo. Posteriormente, após variadas discussões e delineamentos, decidimos desenvolver a presente pesquisa, que busca identificar e analisar os conhecimentos mobilizados por futuros professores de Matemática ao estudar episódios históricos matemáticos.

Vale ressaltar que durante meu primeiro ano como discente do PPGEC, enquanto desenvolvía a investigação e concluía os créditos disciplinares necessários para a obtenção do título de mestre, tive a oportunidade de trabalhar

como professor da educação básica do estado de Minas Gerais, atuando na disciplina de Núcleo de Inovação Matemática do Novo Ensino Médio, em turmas do 2º ano do Ensino Médio e posteriormente na disciplina de Matemática, em turmas do 8º ano do Ensino Fundamental. Apesar de serem poucas experiências e por poucos meses, mostraram-me uma perspectiva mais integrada do que é na prática o trabalho do docente, agregando gradativamente minha formação profissional.

INTRODUÇÃO

As contribuições da inclusão de elementos da História da Matemática (HM) no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, vêm sendo foco crescente de investigações em Educação Matemática. Dessa forma, diversos autores (BROLEZZI, 1993; VIANNA, 1995; MIGUEL, 1997; FRIED, 2008; D'AMBROSIO, 2012a, 2012b; SAITO, 2013), tanto no âmbito nacional quanto no internacional, têm norteado suas pesquisas para contribuir com essa temática.

Miguel (1997), após um estudo na literatura, elaborou alguns argumentos que reforçam as potencialidades pedagógicas do uso da HM no ensino de Matemática. Dentre tais potencialidades, podemos destacar, que a HM contribui para a desmistificação da Matemática, dessa maneira estudos históricos auxiliam professores e estudantes na compreensão da Matemática como uma área de conhecimento desenvolvida por seres humanos, em construção e constante desenvolvimento e que é falível em certos momentos.

Segundo Batista e Luccas (2004), o enfrentamento de problemas e a busca por soluções, historicamente, têm auxiliado o desenvolvimento da humanidade e, mediante a isso, destacam que o estudo desses problemas partindo de uma abordagem histórico-filosófica, possui potencial de estimular a compreensão, aprendizagem e o desenvolvimento científico dos estudantes.

Nessa perspectiva, houve também ao longo das últimas décadas, um crescente interesse por parte dos professores e educadores pela área da HM, de modo que existem debates na literatura que se voltam para as contribuições da HM para a formação de professores de Matemática.

De acordo com Barbin (2000) as duas razões mais utilizadas para a inclusão de dimensões históricas referem-se ao fato de que a HM pode oferecer elementos que permitam o desenvolvimento de uma visão mais ampla do conhecimento matemático, além de poder contribuir para uma melhor compreensão de conceitos e teorias matemáticas.

Diante disso, Barbin (2000) argumenta que, a HM proporciona uma conscientização, reflexão e um entendimento do professor sobre matemática

que posteriormente, pode influenciar a forma de ensinar a matemática, que por sua vez, pode auxiliar na forma pela qual os estudantes percebem e entendem a matemática.

De forma semelhante, Balestri (2008) ao estudar a concepção de professores e pesquisadores de História da Matemática estabeleceu algumas categorias que apresentam a relevância da História da Matemática na formação inicial de professores. Dentre essas categorias, podemos destacar, o entendimento da Matemática enquanto conhecimento e sua relação com outras áreas; a compreensão de conteúdos matemáticos, visto que por meio dela é possível argumentar no contexto escolar as condições e necessidades que permitiram à humanidade o desenvolvimento de certos conceitos matemáticos; e o conhecimento da Matemática como uma manifestação cultural.

Destaca-se que entender o desenvolvimento da Matemática como um processo sociocultural, que compreenda como esta área de conhecimento está ligada à cultura humana, é fundamental para o futuro professor (D'AMBROSIO, B., 2007). Tal afirmação corrobora a Vianna (1995) que afirma que o estudo da História da Matemática é importante para a compreensão de seu aspecto cultural e da natureza do conhecimento matemático e, assim como, contribui para a descaracterização do papel “seletivo” atribuído ao conhecimento matemático¹.

Sendo assim, o estudo de aspectos da HM pode envolver questões referentes à História e Filosofia da Ciência (ARAMAN, 2011). Mediante a isso, a autora salienta que a HM pode contribuir, para discussões relacionadas ao campo da Filosofia da Ciência, como ocorre no estudo de casos históricos-epistemológicos e históricos-axiológicos.

Dessa maneira, Batista e Luccas (2004) e Araman (2011) afirmam que a HM pode contribuir com abordagens epistemológicas e metodológicas que auxiliam a compreensão de como ocorre o desenvolvimento do conhecimento matemático, e assim, possibilitam ao professor uma formação que proporcione discussões acerca da natureza da matemática.

¹ Embora este trabalho de Vianna (1995) se refere à HM na Educação Matemática, entendemos que essa reflexão também serve para a formação de professores.

De modo semelhante, Souza e Linhares (2012) destacam que o estudo de episódios históricos propicia investigar cuidadosamente um fato de uma determinada época, favorecendo a percepção do processo de construção da ciência, o que corrobora com Silva e Moura (2008) que ressaltam que

O estudo de episódios históricos pode oferecer uma ampla discussão sobre o processo de construção e divulgação de determinadas teorias científicas, suas influências sobre a sociedade da época e a sua eventual rejeição, o que mostra que a natureza da ciência não é simples e tampouco de fácil entendimento, mas rica em detalhes e extremamente fascinante aos olhos de quem a vê (SILVA; MOURA, 2008, p. 1609).

Consideramos, nesta investigação, que um episódio histórico da Matemática se refere a um momento ou situação histórica que contribuiu para o desenvolvimento do conhecimento matemático.

Neste contexto, nos questionamos: Quais são as contribuições do estudo de episódios históricos da Matemática para a formação de professores de Matemática?

Uma das formas de analisar essas contribuições é ter como base os conhecimentos de professores. De modo especial, destaca-se os trabalhos de Lee Shulman (1986, 1987) que apresentam categorias de conhecimentos fundamentais para os professores, sobretudo, o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (do inglês: *Pedagogical Content Knowledge* - PCK), e os trabalhos de Ball *et al.* (2008) que apresentam o Conhecimento Matemático para o Ensino (do inglês: *Mathematical Knowledge for Teaching* - MKT) que se dedica especificamente aos conhecimentos do professor de matemática.

Assim, a presente pesquisa propõe identificar e analisar os conhecimentos de professores de Matemática, que são mobilizados por licenciandos em Matemática, no estudo de episódios históricos. De maneira específica, pretendemos identificar e analisar os conhecimentos matemáticos (de e sobre matemática) e conhecimentos pedagógicos do conteúdo mobilizados pelos estudantes no processo de apresentação e discussão dos episódios históricos.

Nesta pesquisa, definimos Conhecimento de Matemática como sendo o conhecimento acerca dos conteúdos matemáticos, tais como, axiomas,

postulados, teoremas, teorias, definições, termos, representações, conceitos, técnicas e procedimentos que são utilizados pelos matemáticos, tanto na resolução de problemas exclusivos da matemática ou que envolvem matemática. Já o Conhecimento sobre Matemática definimos como sendo o conhecimento de motivações, influências sociais, políticas, econômicas, científicas e culturais intrínsecas no desenvolvimento matemático, bem como o conhecimento do trabalho de um pesquisador em matemática e do papel da comunidade matemática para a aceitação, difusão ou negação de uma teoria².

Para a presente pesquisa, foram selecionados os episódios relacionados com: (i) o surgimento das geometrias não-euclidianas; (ii) o surgimento do cálculo infinitesimal; e (iii) o surgimento dos números complexos. Diante disso, a pesquisa realizada teve como contexto um grupo de estudos constituído por nove discentes do curso de Matemática Licenciatura de uma Universidade Federal, que já haviam cursado ao menos metade do curso. Tal grupo de estudos foi criado exclusivamente para esta investigação, como intuito discutir questões referentes a história desses episódios. Ao longo dos encontros deste grupo foi realizada a coleta de dados da presente investigação.

Os encontros tiveram cerca de 90 minutos de duração, e foram realizados, sobretudo, de forma online, através da plataforma *Google Meet*. A escolha dessa plataforma para a realização da pesquisa, ocorreu, pois, alguns dos participantes não poderiam estar de maneira presencial no local previsto para a realização da investigação.

Para apresentação dos resultados desta investigação, o presente texto está dividido em oito capítulos. No capítulo dois, apresentamos, com base na literatura, algumas contribuições do estudo da HM para o ensino de Matemática e para a formação de professores de Matemática.

No terceiro capítulo, apresentamos um dos referenciais teóricos utilizados na investigação referente aos conhecimentos de professores. Descrevemos inicialmente as diferentes definições existentes no âmbito literário entre conhecimentos e saberes docentes. Posteriormente, apresentamos a Base de

² O Conhecimento de (e sobre) Matemática foram baseados nas ideias de Estruturas Sintáticas e Substantivas de Shulman (1986) e do Conhecimento de (e sobre) Ciência Cutrera (2013).

Conhecimento para o Ensino (do inglês: *Knowledge Base*) proposta por Shulman (1986, 1987), com enfoque especial, no Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge* - sigla comumente usada: PCK).

O capítulo quatro volta-se exclusivamente para outro referencial teórico adotado na presente pesquisa que se reporta ao modelo de Conhecimento Matemático para o Ensino (do inglês: *Mathematical Knowledge for Teaching* – sigla comumente usada: MKT), proposto por Ball *et al.* (2008), de modo que descrevemos os domínios e subdomínios de conhecimentos propostos pelos autores.

Já no capítulo cinco, descrevemos o percurso metodológico abordado durante a investigação desta pesquisa. Dessa forma, apresentamos o contexto da investigação, a maneira como criamos e organizamos o grupo de estudos para discutir acerca dos episódios históricos da Matemática. Descrevemos os instrumentos para coleta dos dados e a forma que os dados foram analisados e, por fim, apresentamos informações acerca do perfil dos participantes voluntários que aceitaram participar desta investigação.

No sexto capítulo, apresentamos as análises desenvolvidas referentes aos episódios históricos da Matemática, de modo que debatemos com base na literatura as falas e comentários dos participantes ao longo da investigação.

Por fim, apresentamos “Algumas Considerações” nas quais retomamos os resultados da investigação e apresentamos considerações acerca da pesquisa realizada.

2 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA E FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

O presente capítulo tem como intuito apresentar discussões presentes na literatura acerca da utilização da História da Matemática para o ensino de Matemática e apresentar os debates existentes sobre as potencialidades da História da Matemática para a formação de professores de Matemática.

2.1 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Discussões sobre a inclusão de elementos da História da Matemática no ensino vem sendo foco de diversas conferências, congressos, mesas redondas, grupos de estudos e encontros, relacionados à Educação Matemática (BATISTA; LUCAS, 2004; VIANA, 1995). Segundo os mesmos autores, a defesa da incorporação dos elementos históricos no ensino está relacionada a uma abordagem mais abrangente, adequada, consciente e didática no âmbito educacional, proporcionando uma aprendizagem crítica e reflexiva sobre a Matemática por parte dos estudantes.

Nesse sentido, Saito (2013) realça que diferentes propostas que visam uma aproximação entre História da Matemática e ensino de matemática são discutidas já há algum tempo. O autor salienta que tais propostas fornecem recursos para a compreensão do papel da história no ensino e, além disso, pontuam diferentes vertentes pedagógicas e/ou didáticas, associando-as ao uso da História da Matemática, a fim de propor novos caminhos de abordagem.

Baroni, Teixeira e Nobre (2011), destacam que os estudos relacionados a História da Matemática no cenário de pesquisas nacional, sobretudo em seus aspectos relacionados à Educação Matemática, iniciaram ao final da década de 1990. De acordo com estes autores, os principais temas abordados na época podiam ser classificados em quatro blocos, são eles: 1) História da Educação Matemática; 2) Concepções de professores de Matemática em relação à História da Matemática; 3) História da Matemática na formação do matemático e do

professor de Matemática; e 4) Utilização da História da Matemática para o ensino de matemática.

Para os autores, a História da Matemática no Brasil começou a se estruturar com maior força, em especial, com a realização do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM) e a criação da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), no ano de 1999, possibilitando assim que a História da Matemática conquistasse maior visibilidade, tanto nacional quanto internacionalmente.

Nessa perspectiva, diversos autores, (BROLEZZI, 1991; VIANNA, 1995; MIGUEL, 1993, 1997; BRITO, 2004; BATISTA, LUCCAS, 2004; FRIED, 2008; BARONI, TEIXEIRA, NOBRE, 2011; D'AMBROSIO, 2012a, 2012b; SAITO, 2013), nortearam suas pesquisas com objetivo de evidenciar as contribuições da inclusão de elementos da História da Matemática no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Miguel (1997) apresenta variados argumentos que reforçam as potencialidades pedagógicas do uso da História da Matemática. Dentre estes, destacamos que a abordagem de aspectos da História da Matemática em sala de aula, pode:

(1) contribuir para uma motivação para o ensino aprendizagem da Matemática, sendo assim, o conhecimento de uma história dos processos matemáticos estimularia os estudantes a se interessarem pelo conteúdo a ser estudado;

(2) se constituir em uma fonte de objetivos para o ensino da Matemática, pois é possível encontrar suporte na História da Matemática para atingir com os estudantes objetivos pedagógicos que os levem a notar, por exemplo, “[...] a) a matemática como criação humana; b) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; [...] g) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova” (p. 77);

(3) possibilitar a desmistificação da Matemática e a desalienação de seu ensino, pois, a maneira lógica através da qual o conteúdo matemático é normalmente exposto aos estudantes, não retrata a maneira de como o conhecimento foi produzido historicamente, apresentando assim a falsa impressão de uma

Matemática harmoniosa, que está pronta e acabada. Portanto, a História da Matemática pode desmistificar essa estrutura de ensino, exibindo a Matemática como uma ciência em construção.

Nessa perspectiva, Vianna (1995), evidencia uma lista de possibilidades do uso didático da História da Matemática, dentre as quais podemos destacar:

- 6) um instrumento na formalização de conceitos matemáticos (**História-Formalização**);
- 7) um instrumento na construção de um pensamento independente e crítico (**História-Dialética**);
- 8) um instrumento unificador dos vários campos da matemática (**História-Unificação**);
- 9) um instrumento promotor de atitudes e valores (**História-Axiologia**);
- 10) um instrumento de conscientização epistemológica (**História-Conscientização**); [...]
- 12) um instrumento de resgate da identidade cultural (**História-Cultura**);
- 13) um instrumento revelador da natureza da matemática (**História-Epistemologia**) (VIANNA, 1995, p. 24-25, grifo original).

Nesse sentido, Miguel e Miorim (2011) após analisar a participação do discurso histórico em produções do cenário nacional referentes à Matemática escolar e dos pontos de vista propostos por autores que utilizam da HM no âmbito da educação matemática, identificaram as “[...] diferenças entre as características das histórias abordadas, os argumentos utilizados para justificar a participação dessas histórias no ensino-aprendizagem e a forma como, efetivamente, a história acaba participando” (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 60).

Em vista disso, os autores identificaram a existência de duas categorias diferenciadas, porém, segundo eles, não necessariamente excludentes, ao analisarem os argumentos usados para justificar a participação da HM no processo de ensino aprendizagem da Matemática, são elas: as de natureza epistemológica³ e as de natureza ética. Dentre os argumentos de natureza epistemológica, podemos ressaltar a HM como:

- (i) fonte de identificação de obstáculos epistemológicos de origem epistemológica para se enfrentar certas dificuldades que

³ De acordo com os autores, o adjetivo “epistemológico” é utilizado no sentido de que os argumentos que foram exibidos estão focalizados centralmente o conhecimento matemático propriamente dito, e não em outros domínios da Filosofia, tais como: axiológico, estético, metodológico, dentre outros.

se manifestam entre os estudantes no processo de ensino-aprendizagem da Matemática escolar;
(ii) fonte de tópicos, problemas ou episódios considerados motivadores da aprendizagem da Matemática escolar na atualidade (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 61).

Já os argumentos de natureza ética, podemos evidenciar que a HM como uma fonte:

(i) que possibilita um trabalho pedagógico no sentido de tomada de consciência da unidade da Matemática;
(ii) que possibilita um trabalho pedagógico no sentido da conquista da autonomia intelectual (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 62).

Em sua pesquisa, Brolezzi (1991) aponta três componentes considerados por ele como sendo principais que destacam o valor didático que a História da Matemática possui. O autor inicia evidenciando que um importante componente do valor didático da História da Matemática é a sua relação com a lógica, que se encontra ligada de forma intrínseca ao ensino da Matemática elementar. Brolezzi (1991) ressalta que noções como lógica e demonstração não são exclusividades da linguagem matemática, porém possuem uma ampla aplicação e, diante disso, tal noção ampla é elucidadora dos processos de ensino e aprendizagem. Dessa maneira,

A visão da Matemática em construção é precisamente a que obtemos pelo estudo da História da Matemática, a qual surge assim como a grande fonte para a apreensão da organização lógica mais adequada ao ensino da Matemática, principalmente no nível elementar, onde os padrões lógico-formais estão ainda mais distantes dos alunos. A forte relação da lógica com o ensino constitui, portanto, um componente decisivo para a avaliação do uso da História da Matemática como recurso pedagógico, revelando com muita profundidade seu valor didático (BROLEZZI, 1991, p. 49).

O segundo componente do valor didático da História da Matemática que recebe destaque de Brolezzi (1991) relaciona-se com a representação da Matemática em linguagem simbólica. Para o autor, um dos motivos da Matemática se tornar objetivo de aversão dos estudantes, está ligado ao fato deles terem dificuldade em compreenderem sua linguagem. Mediante a isso, o autor ressalta que a HM pode ser um fator importante para o entendimento da interpretação dessa linguagem simbólica e, desse modo, pode auxiliar a aprendizagem servindo como fonte de motivação para os estudantes.

Sendo assim, Brolezzi (1991) apresenta que para um trabalho pedagógico ser adequado a simbologia da linguagem matemática é fundamental uma visão profunda da Matemática enquanto Ciência. Para tanto, baseando-se nas ideias de Bochenski (1958), o autor evidencia argumentos que fornece três razões para justificar a necessidade dos símbolos para linguagem científica em geral e, em especial, da Matemática, são elas:

(i) Em primeiro lugar, a Ciência é obra coletiva, e portanto há a necessidade de comunicação do saber, que se dá através dos signos, símbolos, palavras; (ii) Esses símbolos, sendo algo material, facilitam o desenrolar do entendimento humano, que está mais capacitado para a apreensão de objetos materiais; (iii) Ao procurar expressar suas idéias por meio de símbolos, ocorre um processo de elaboração e delineamento das próprias idéias, o que é muito útil para o processo científico (BOCHENSKI, 1958, p. 72 *apud* BROLEZZI, 1991, p. 53).

Essas razões, de acordo com autor, parecem suficientes para justificar o trabalho com símbolos no ensino da Matemática. Dessa forma, a linguagem simbólica utilizada na Matemática é uma característica do desenvolvimento dessa ciência e, perante isso, não deve ser considerada como um mal necessário para a aprendizagem da Matemática.

Por fim, o terceiro e último componente do valor didático da História da Matemática relaciona-se à visão de totalidade e conjunto que a HM proporciona. Segundo Brolezzi (1991) no estudo da Matemática elementar, grande parte das vezes é árduo, por parte dos estudantes, de se ter uma visão ampla acerca da disciplina como um todo.

Nesse sentido, o autor destaca que inserido no currículo elementar, diversos assuntos se apresentam isolados uns dos outros não permitindo uma visão de convergência dos conjuntos estudados. Brolezzi (1991) ressalta que a divisão de um conteúdo é necessária, tendo em vista adequação da matéria, entretanto é necessário também o cuidado ao fragmentar o currículo para que não se perca a noção de conjunto da matéria.

Batista e Luccas (2004) constataram que o enfrentamento de problemas e a busca por suas soluções, historicamente, têm auxiliado o desenvolvimento da humanidade. Diante de tal constatação, as autoras evidenciam a crença de que o estudo e a análise de tais problemas, a partir de uma abordagem histórico-

filosófica, tem potencial para estimular a compreensão, a aprendizagem e, além disso, o desenvolvimento científico.

Desse modo, tal abordagem histórico-filosófica tem contribuído para compreensão de problemas atuais, de modo que a

[...] análise epistêmica, lógica, ontológica e metodologia da estrutura e das articulações que um determinado conhecimento apresenta desde sua criação até o desenvolvimento atual, e a habilidade que o mesmo apresenta para solucionar problemas, caracterizam-se como de fundamental importância para a evolução da capacidade crítica e consciente do ser humano (BATISTA; LUCCAS, 2004, p. 106)

As autoras prosseguem destacando que o acesso à investigação histórica, por parte dos estudantes, os permite conhecer a filosofia e conceitualmente alguns assuntos matemáticos, entre eles o surgimento, desenvolvimento, sistematização, aplicabilidade, seus criadores, e assuntos não matemáticos, tais como a ampliação da visão sobre determinadas épocas e povos, capacidade humana de superar os problemas e desafios, entre outros aspectos (BATISTA; LUCCAS, 2004).

Saito (2013) destaca que é de suma importância que através da História da Matemática procure-se formas de avaliar e analisar o objeto matemático, considerando assim não apenas as questões de natureza interna, mas também a natureza externa que são implicadas na criação e desenvolvimento de tais objetos. Segundo o autor, os episódios históricos da matemática podem ser utilizados como facilitadores para questões epistemológicas relevantes, por meio das quais seja possível a elaboração de abordagens que viabilizassem a articulação entre história e ensino (SAITO, 2013).

Diante de tais apontamentos, nota-se a importância de compreender as potencialidades do uso da História da Matemática para o ensino. Perante o estudo que buscava compreender tal importância, constatamos na literatura a existência de um grupo de pesquisadores(as) que orientaram suas pesquisas objetivando identificar e refletir aproximações entre a História da Matemática e a formação de professores de Matemática. Mediante a isso, a próxima seção, terá como objetivo apresentar algumas discussões presentes na literatura sobre tal temática.

2.2 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Outro debate que recebe destaque na literatura envolve o uso da História da Matemática e as suas contribuições para a formação de professores de Matemática.

Barbin (2000) alega que ao longo dos últimos anos, tem-se intensificado o interesse pela história por parte dos professores e educadores. Diante disso, diversos autores (CAVALARI, 2019; ARAMAN; BATISTA, 2013; ARAMAN, 2011; MENDES, 2010; BALESTRI; CYRINO, 2010; CYRINO; CORRÊA, 2009; BALESTRI, 2008; B. D'AMBROSIO, 2007; BRITO, 2004; BARBIN, 2000) no âmbito nacional e internacional apontaram variadas reflexões em tal aproximação.

Nesse sentido, Cavalari (2019) afirma que a HM, nas últimas décadas, tem assumido um papel relevante na formação inicial de professores no Brasil, segundo a autora, tal fato pode ser identificado

[...] tanto pela produção acadêmica sobre questões relativas à História da Matemática na formação de professores, quanto pelo aumento da oferta de disciplinas que abordam temáticas relativas à HM nos cursos que formam professores de Matemática em território nacional (CAVALARI, 2019, p. 40).

Borges e Cavalari (2021), ao analisarem propostas didáticas direcionadas para a formação inicial de professores de Matemática que utilizam a HM, em teses e dissertações no âmbito nacional, evidenciaram que “[...] os elementos da HM são abordados de formas variadas, sendo que a maior parte das atividades que compõem tais propostas se volta para o trabalho com conteúdos matemáticos” (p. 195).

De acordo com Brito (2004) por meio do conhecimento dos fatos históricos o professor tem a possibilidade de conhecer os pressupostos epistemológicos, teleológicos e axiológicos que fundamentam a Matemática e, com base nisso, conseguiria se decidir sobre a adequação ou não de tal abordagem de conteúdos matemáticos. Além disso, a História da Matemática “[...] pode levar o professor

a uma visão interdisciplinar de tal conhecimento e instrumentalizá-lo para responder a freqüente questão dos alunos: Para quê serve isto?” (BRITO, 2004, p. 6).

Para o mesmo autor, a História da Matemática possui a capacidade de introduzir para o professor o reconhecimento de que os conhecimentos desenvolvidos pela ciência compõem uma parte entre aqueles que buscam dar explicações aos fenômenos naturais e sociais, e além disso, demonstra que o que consideramos atualmente como conhecimento científico, em diversa das vezes, teve sua origem através de questões de natureza religiosa, mitológica ou esteve entrelaçado a elas em diferentes momentos históricos (BRITO, 2004).

Diante disso, a História da Matemática possibilita que o professor reconheça de que diferentes povos e/ou épocas históricas, possuem/possuíam diferentes formas de conceber o conhecimento. Nesse sentido, Brito (2004) destaca que

[...] o professor pode perceber a necessidade de considerar, em sua prática docente, a diversidade de conhecimentos e crenças que seus alunos trazem de sua realidade extra-escolar, evitando que a aprendizagem se dê apenas como uma sobreposição de conhecimentos que os alunos aceitam devido à autoridade do professor (BRITO, 2004, p. 7).

Balestri (2008), ao analisar na ótica de professores e pesquisadores que atuam com a História da Matemática, elaborou algumas justificativas, que ressaltam a importância da HM na formação inicial de professores de matemática. Dentre essas justificativas podemos destacar: 1) a compreensão de conteúdos matemáticos; 2) o entendimento da Matemática enquanto área de conhecimento, auxiliando o futuro professor a superar a concepção de uma matemática fragmentada; 3) a cooperação para a percepção de relação com outras áreas; 4) o conhecimento da Matemática como uma criação humana, uma manifestação cultural; 4) o auxílio em discussões acerca das condições necessárias para o desenvolvimento matemático; e, por fim, 5) a possibilidade de gerar reflexões sobre possíveis encaminhamentos da prática pedagógica do futuro professor.

Para este autor, uma abordagem da História da Matemática poderia contribuir para uma “compreensão de conteúdos matemáticos”, pois para ele

“Por meio da história da matemática é possível discutir em sala de aula quais foram as necessidades e condições que permitiram à humanidade o desenvolvimento de determinado conteúdo ou ramo da matemática” (p.72).

Além disto, segundo Balestri (2008), aspectos da História da Matemática poderiam contribuir para mostrar a matemática enquanto conhecimento e sua relação com outras áreas, já que em tal abordagem o futuro professor teria a possibilidade de entender a Matemática enquanto área de conhecimento e sua relação com outras áreas de conhecimento. A História da Matemática possibilitaria, ainda, a oportunidade de conhecer de forma mais aprofundada a própria Matemática, ou seja, como ela se desenvolveu, quais foram as necessidades para tal desenvolvimento, etc.

Abordagem de elementos da História da Matemática, pode ainda, veicular a matemática como uma criação humana, uma manifestação cultural. Diante disso, a História da Matemática exhibe, ao futuro professor, “[...] a matemática como uma construção humana, decorrente da sua própria atividade e feita por pessoas que encontraram dificuldades em sua construção, desmistificando a ideia de que a matemática é construída por “gênios”” (BALESTRI, 2008, p. 74). Ademais, o autor destaca que a História da Matemática, revela que o processo de construção da Matemática é dinâmico, constituído de avanços e retrocessos, tal qual uma teoria considerada irrelevante em um dado momento, pode tornar-se essencial em outros (BALESTRI, 2008).

Por fim, a História da Matemática gera reflexões sobre possíveis encaminhamentos da prática pedagógica do futuro professor, pois os conhecimentos históricos da Matemática auxiliam o futuro docente a conhecer, selecionar e propor aos seus estudantes problemas que favoreçam a aprendizagem; bem como, fornece elementos para responder algumas indagações matemática que podem surgir em sala de aula (BALESTRI, 2008; BALESTRI; CYRINO, 2010).

Barbin (2000) apresenta duas razões que para ele são as mais utilizadas para fundamentar a inclusão de uma dimensão histórica na formação de professores, são elas: (i) a primeira razão baseia-se no fato de que a História da Matemática possibilita a oportunidade de ampliar a visão sobre o que é esta área

de conhecimento denominada Matemática; e (ii) já a segunda razão relaciona-se ao fato de que a História da Matemática pode auxiliar para uma melhor compreensão de conceitos e teorias. Em face ao exposto, essas razões podem auxiliar o professor de Matemática a entender mais sobre a disciplina que leciona e, além disso, também tem potencial para uma de possível mudança de percepção sobre a Matemática, influenciando na maneira em que essa disciplina é ensinada e, posteriormente a isso, intervindo na forma pela qual os estudantes percebem e entendem a Matemática.

O mesmo autor salienta que através de uma análise histórica e epistemológica, o professor pode ser capaz de entender o “por que” de alguns conceitos serem mais difíceis para a compreensão dos estudantes e, diante disso, terá a possibilidade de reorientar suas estratégias didáticas em sala de aula, para que tais conceitos tornem-se menos árduos para os estudantes.

Para Saito (2013), se faz necessário aprofundar o diálogo entre historiadores da matemática e professores de matemática, pois assim é possível delinear as concepções da natureza epistemológica e historiográfica da História da Matemática.

O autor destaca que o estudo histórico pode auxiliar o professor a promover diálogo acerca da Matemática entre seus estudantes, possibilitando o desenvolvimento de uma visão mais crítica em relação à Matemática e a construção dessa área de conhecimento. Nesse sentido, Saito (2013), ressalta que é importante para o professor ter a consciência de que a História da Matemática não está pronta e acabada.

Diante disso, Beatriz D’Ambrosio (2007) evidencia a relevância do futuro professor entender o desenvolvimento da Matemática como parte de um processo sociocultural compreendendo como a Matemática está ligada a cultura humana. Nesse sentido, a autora destaca que professores

[...] que têm uma perspectiva histórica da evolução da matemática como processo de construção humana, são capazes de utilizar a experiência e a realidade cultural dos seus alunos para escolher problemas motivadores e contextuais (D’AMBROSIO, B., 2007, p. 401).

Para Araman (2011), a História da Matemática incorpora um domínio mais abrangente do conhecimento do professor, a saber o domínio da história e filosofia da ciência. Dessa maneira, as pesquisas voltadas ao domínio da História da Matemática “[...] podem contribuir, ainda que de forma subjacente, para discussões relacionadas ao campo da filosofia da ciência, como no caso de estudos histórico-epistemológicos e histórico-axiológicos” (ARAMAN, 2011, p. 74-75).

Nesse sentido, a autora considera que a História da Matemática, através de seu enfoque epistemológico e metodológico, pode contribuir para a formação de professores de Matemática. A autora destaca que para o futuro professor de Matemática é um aspecto relevante a compreensão do que é a Matemática e a sua natureza, tendo em vista que, muitas das vezes, a formação inicial não fornece um entendimento apropriado de tal questão. Nesse sentido, a falta de um entendimento adequado sobre a Matemática, faz com que o docente seja induzido a compreender a Matemática como um corpo de conhecimento que se resume a um conjunto de fórmulas, estruturado por uma linguagem que não consegue justificar e contextualizar em sala de aula. Posto isso, destacamos que “[...] estudos históricos colaboram para que o mesmo se insira em alguns debates filosóficos que podem conduzi-lo a um melhor entendimento da natureza do conhecimento matemático” (ARAMAN, 2011, p. 95, grifo nosso).

Liu (2009) destaca através de sua investigação as que crenças epistemológicas que lidam com a natureza do conhecimento e os processos de conhecer, pode contribuir significativamente no desempenho de estudantes. Diante disso, o autor evidencia algumas crenças epistemológicas acerca da natureza do conhecimento matemático, entre elas podemos destacar: a instrumentalidade do conhecimento matemático; dinâmica do pensamento matemático e; a criatividade no pensamento matemático.

A partir dessas reflexões, o autor salienta que

A matemática, como uma ciência exata arquetípica, é comumente vista como um corpo de conhecimento absoluto e rígido, que é estruturado lógica e dedutivamente e, portanto, é irrefutável. Essa compreensão convencional, no entanto, é inconsistente com as visões epistemológicas contemporâneas da matemática. A essência da matemática está em sua aventura

intelectual, beleza de forma abstrata e aplicação no mundo físico (LIU, 2009, p. 475, tradução nossa).

Diante disso, o autor enfatiza que uma das formas de se ter uma ampliação do conhecimento matemático envolve o seu desenvolvimento histórico. Sendo assim, a História da Matemática contribui para a compreensão e reflexão da natureza desse conhecimento, demonstrando assim a natureza dinâmica, potencialmente falível e sociocultural da Matemática.

Araman, com base em uma pesquisa realizada por Charalambous *et al.* (2009), indica três diferentes perspectivas de entender o conhecimento matemático, são elas: 1) a perspectiva platônica que considera a Matemática como um corpo de conhecimento estático e unificado que existe e aguarda-se para ser descoberto; 2) relaciona-se a uma perspectiva instrumentalista, de modo que à Matemática é um corpo de conhecimento organizado de instrumentos, como as regras, operações e algoritmos e, dessa maneira, pode ser relacionada com uma visão formalista à respeito da Matemática, e 3) uma perspectiva experimental acerca do conhecimento matemático, que pode ser entendida como processo dinâmico e em constante desenvolvimento, dessa maneira, a Matemática é vista como uma criação humana, de forma que os resultados são passíveis de revisão.

A autora afirma que as distintas maneiras de se conceber a Matemática, tem potencialidade de influenciar diretamente na maneira como o professor entende o processo de ensino e aprendizagem. Dessa maneira, a História da Matemática é capaz de proporcionar oportunidades de “[...] reflexão a respeito da natureza do conhecimento matemático que podem conduzir o professor a uma compreensão da matemática em seu processo dinâmico de criação humana, que está em constante evolução e revisão” (ARAMAN, 2011, p. 95).

Com base nas informações apresentadas, podemos identificar que diversas pesquisas indicam que abordagens de aspectos referentes à História da Matemática podem contribuir para o desenvolvimento ou ampliação de conhecimentos matemáticos ou pedagógicos de conteúdo do futuro professor.

Posto isso, o próximo capítulo tem como objetivo discutir os conhecimentos docentes, sendo esse o referencial teórico utilizado nessa investigação.

3 CONHECIMENTO DOCENTE

Nesse capítulo propomo-nos a discutir sobre os conhecimentos profissionais docentes na perspectiva de dois importantes referenciais na educação matemática. Para tanto, se inicia apresentando a diferenciação entre saberes e conhecimentos docentes. Posteriormente a isso, apresentamos a Base de Conhecimento Profissional proposta por Lee Shulman (1986, 1987) e, finalmente, é apresentado o modelo de conhecimento especializado para professores de Matemática proposto por Ball *et al.* (2008).

3.1 SABERES E CONHECIMENTOS DOCENTES

As discussões sobre a formação e profissão docente surgiram no cenário internacional entre as décadas de 1980 e 1990, após pesquisas sobre formação docente indicarem uma revisão da compreensão da prática-pedagógica do professor, que nesse momento passava a ser considerada como um mobilizador de saberes profissionais (NUNES, 2001, TARDIF; RAYMOND, 2000). Nunes (2001) apresenta que um dos motivos que favoreceram a emergência dessas discussões é recorrente do “[...] movimento de profissionalização do ensino e suas consequências para a questão do conhecimento dos professores na busca de um repertório de conhecimentos, visando a garantir a legitimidade da profissão” (NUNES, 2001, p. 27), dessa maneira, desencadeou-se uma ampliação tanto qualitativa quanto quantitativa desse campo de pesquisa.

Apesar dos termos saberes e conhecimentos serem utilizados grande parte das vezes como sinônimos, estes provêm de correntes teóricas distintas (FERNANDEZ, 2015; FREIRE; SKEIKA, 2015). Estes autores afirmam que na literatura existem alguns pesquisadores que têm utilizado o termo saberes e, dessa maneira, sendo este um campo mais amplo de competências e habilidades que o professor adquire durante sua prática docente.

Ao analisar as pesquisas disponíveis na literatura, nota-se que diversos autores fazem parte da corrente teórica que utilizam o termo “*saberes*” docente

(TARDIF; LESSARD; LAHAYE, 1991; TARDIF; RAYMOND, 2000; BORGES, 2001; NUNES, 2001; GAUTHIER *et al.*, 2013). Por outro lado, nota-se também autores que fazem parte da corrente teórica que utilizam o termo “*conhecimento*” docente (SHULMAN, 1986, 1987, GROSSMAN, 1990, FERNANDEZ, 2011, 2014, FERNANDEZ, GOES 2014, BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Fiorentini, Souza Junior e Melo (2003) os diferenciam estes termos de modo que

[...] “conhecimento” aproximar-se-ia mais com a produção científica sistematizada e acumulada historicamente com regras mais rigorosas de validação tradicionalmente aceitas pela academia; o “saber”, por outro lado, representaria um modo de conhecer/saber mais dinâmico, menos sistematizado ou rigoroso e mais articulado a outras formas de saber e fazer relativos à prática não possuindo normas rígidas formais de validação (FIORENTINI; SOUZA JUNIOR; MELO, 2003, p. 312).

Tardif e Raymond, atribui à noção de saber em um sentido mais amplo que “[...] engloba os conhecimentos, as competências, as habilidades (ou aptidões) e as atitudes dos docentes, ou seja, aquilo que foi muitas vezes chamado de saber, de saber-fazer e de saber-ser” (TARDIF; RAYMOND, 2000, p. 212). Nessa perspectiva, Geraldi (2003) define saberes como sendo um conjunto de práticas sociais, que não chegam a ser sistematizadas, entretanto, orientam a prática pedagógica docente em ações voltadas ao cotidiano. Sendo assim “[...] enquanto o saber é produto das práticas sociais, o conhecimento é a organização desse produto das práticas sociais de forma sistemática, racional, na atividade científica” (GERALDI, 2003, p. 18).

Já Fernandez (2015) afirma que o conhecimento pode ser entendido como a especialização do saber, sendo assim, o conhecimento “[...] passa pela reflexão do saber fazer, elevando a prática a um nível de consciência, reflexão, análise, sistematização e intenção” (p. 503 - 504).

De acordo com Roldão (2007) a importância dessa sistematização das atividades profissionais docente deve-se ao fato de que

A atividade de ensinar – como sucedeu com outras atividades profissionais – praticou-se muito antes de sobre ela se produzir conhecimento sistematizado. Estas profissões transportam por isso uma inevitável “praticidade” que, a não ser questionada/teorizada, jamais transformaria a atividade em ação profissional

e mantê-la-ia prisioneira de rotinas não questionadas e incapazes de responder à realidade (ROLDÃO, 2007, p. 97).

A autora destaca, também, que tal sistematização ao ato de ensinar implica a consideração de um acervo de conhecimentos de variada natureza, possíveis de diversas formalizações teóricas científicas e científicas pedagógicas, que se integram ao um único saber situado e contextual – como ensinar aqui e agora –, configurando-se assim como “prático”.

Com base nestas distinções entre *saberes* e *conhecimentos* e a importância que ambos possuem na prática profissional docente, entendemos que os conhecimentos profissionais docentes, por serem uma sistematização dos saberes (FERNANDEZ, 2015), e por aproximar-se mais do rigor científico (FIORENTINI *et. al*, 2003) assemelha-se mais dos objetivos desta investigação que irá procurar indícios dos conhecimentos especializados evidenciados por futuros professores de matemática no estudo de episódios históricos da Matemática.

Nessa perspectiva, a presente investigação utilizou referenciais teóricos que abordam discussões acerca dos conhecimentos profissionais docentes, tendo em vista o contexto de formação inicial de professores de Matemática que se ocorreu a pesquisa.

Diante disso, utilizamos como referenciais teóricos os trabalhos de Lee Shulman (1986, 1987), no que diz respeito as bases de conhecimentos especializados dos professores, e os trabalhos de Ball *et al.* (2008) que tratam sobre os conhecimentos especializados dos professores de Matemática.

A próxima seção tem como objetivo discutir acerca da Base de Conhecimento Profissional Docente proposta por Shulman.

3.2 A BASE DE CONHECIMENTO PROFISSIONAL DOCENTE PROPOSTA POR SHULMAN

A visão da docência como uma profissão demanda um campo de conhecimentos que possam ser sistematizados e relacionados a outros

(SHULMAN, 1986; FERNANDEZ, 2015), já que toda profissão possui um *corpus* de conhecimentos específicos, que delimita e identifica seus agentes como possuidores desses conhecimentos, garantindo que possam desempenhá-los perante a sociedade (FERNANDEZ, 2015).

Segundo Puentes, Aquino e Quilici Neto (2009) um dos assuntos mais discutido, dentro a temática de reivindicação do status profissional do professor, têm sido:

[...] 1) a conceitualização da profissionalização docente; 2) os aspectos integrantes do processo de profissionalização; 3) as etapas na profissionalização; 4) as condições indispensáveis ou necessárias para a profissionalização; 5) os saberes, conhecimentos, competências e desempenhos considerados necessários à profissão; 6) os problemas que afetam a profissionalização, além de outros (PUENTES, AQUINO, QUILICI NETO, 2009, p. 171).

Shulman (1987) destaca que a ausência de uma sistematização dos conhecimentos próprios à profissão docente a torna uma atuação provisória de outros profissionais que não formaram para serem professores, como é o caso de engenheiros que atuam como docentes na educação básica. Tal ausência tem sido alvo de investigadores da área e comumente combatida por esses pesquisadores.

Nesse sentido, para atuação profissional como professor o processo formativo é considerado fundamental, tanto na formação inicial do docente como na formação continuada, uma vez que a profissão docente requer aperfeiçoamento constante de práticas, conhecimentos e saberes (FREIRE; SKEIKA, 2015). De acordo com as autoras, os conhecimentos que os professores utilizam em sua prática docente ao ensinar qualquer conteúdo são possíveis de aperfeiçoamento e aprendizagem ao longo da formação inicial e continuada.

Em 1980, inseridos no movimento de reforma educacional, diversos pesquisadores apoiaram-se no pressuposto de que existe uma base de conhecimentos necessários para ensinar (CRISPIM; SÁ, 2019; MORIEL Jr; WIELEWSKI; 2017; FERNANDEZ, 2014; BALL, THAMES, PHELPS, 2008). Dessa forma, são abundantes os estudos referentes a teorização relativas à

natureza do conhecimento profissional docente que desde a década de 1980 ocupam lugar de destaque na formação de professores (ALMEIDA *et. al*, 2019).

A partir disso, neste estudo, o interesse incide sobre as abordagens teóricas desenvolvidas por Lee Shulman (1986, 1987) no programa de pesquisa intitulado “*Knowledge Growth in a Profession: Development of Knowledge in Teaching*”, desenvolvido em 1980, na Universidade de Stanford. A proposta de Shulman “[...] tem sido a mais difundida e utilizada como fundamento teórico na preparação docente e, sobretudo, em pesquisas, acumulando mais de 17 mil citações em estudos acadêmico-científicos das mais diversas áreas da Educação” (MORIEL Jr; WIELEWSKI; 2017, p. 126).

Para Ball *et al.* (2008), a primeira contribuição de Shulman volta-se a reformulação feita no estudo do conhecimento do professor, de forma que atendesse ao papel do conteúdo no ensino. Segundo estes autores, a segunda contribuição feita por Shulman está relacionada à representação da compreensão do conteúdo como um tipo de conhecimento técnico fundamental para a profissão de ensino.

Shulman (1986) evidencia a existência de uma distinção entre conhecimento e pedagogia, e ressalta a ausência de um paradigma presente na formação de professores. Para o autor, a ausência desse paradigma refere-se “[...] a um ponto cego com relação ao conteúdo que agora caracteriza a maioria das pesquisas sobre ensino e, como consequência, a maioria de nossos programas de nível estatal de avaliação e certificação de professores” (SHULMAN, 1986, p. 7-8, tradução nossa). Para Crispim e Sá (2019) o “paradigma perdido” referido por Shulman, trata-se de um elemento fundamental em relação ao ensino, que relacionava o estudo do conteúdo específico e a sua interação com a pedagogia, que mais tarde foi denominado como Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (do inglês: *Pedagogical Content Knowlegde*), amplamente conhecido e utilizado em pesquisas acadêmicas pela sigla PCK.

Segundo Lemes (2022), Shulman, em 1986, propôs três categorias distintas de conhecimento do conteúdo, são elas: (a) Conhecimento do Conteúdo da Matéria; (b) Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, e (c) conhecimento curricular. Porém, o próprio autor refina tais conhecimentos, e em

1987, ao propor sete categorias para o conhecimento base docente, conforme mostrado a seguir:

- (i) Conhecimento de conteúdo (do inglês: *content knowledge*);
- (ii) Conhecimento pedagógico geral (do inglês: *general pedagogical knowledge*);
- (iii) Conhecimento do currículo (do inglês: *curriculum knowledge*), com conhecimento particular dos materiais e programas que servem como "ferramentas de trabalho" para professores;
- (iv) Conhecimento dos estudantes e suas características (do inglês: *knowledge of learners and their characteristics*);
- (v) Conhecimento de contextos educacionais (do inglês: *knowledge of educational context*);
- (vi) Conhecimento dos fins, propósitos e valores educacionais, e seus fundamentos filosóficos e históricos (do inglês: *knowledge of educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical grounds*);
- (vii) Conhecimento pedagógico do conteúdo (do inglês: *pedagogical content knowledge*).

Segundo Shulman (1987), o *Conhecimento de Conteúdo* pode ser entendido como o domínio que o professor tem sobre os conceitos, estruturas e conteúdos próprios da disciplina que leciona. Dessa maneira, para se pensar adequadamente sobre o Conhecimento do Conteúdo é necessário ir além da compreensão dos fatos ou conceitos sobre um determinado domínio. De acordo com autor, é necessário também compreender as estruturas do assunto, da maneira definida por pensadores como Schwab. Estas estruturas são indicadas por ele como as *estruturas substantivas* “[...] que se referem as variedades de maneiras pelas quais os conceitos e princípios básicos das disciplinas são organizados para incorporar seus fatos” (SHULMAN, 1986, p. 9, tradução nossa), e as *estruturas sintáticas* que se referem a um conjunto de formas pelas quais a verdade ou a falsidade, validade ou nulidade são estabelecidas.

Diante disso, o autor destaca ainda que

Quando existem reivindicações concorrentes a respeito de um determinado fenômeno, a sintaxe de uma disciplina fornece as

regras para determinar qual reivindicação tem maior garantia. Uma sintaxe é como uma gramática. É o conjunto de regras para determinar o que é legítimo dizer em um domínio disciplinar e o que "quebra" as regras (SHULMAN, 1986, p. 9, tradução nossa).

Nesse sentido, Shulman (1986) afirma que, o professor deve ser capaz de definir as “verdades” aceitas em um domínio de conhecimento, entender os motivos e razões pelas quais uma proposição é considerada verdadeira, como se relaciona com outras proposições, tanto de forma teórica, quanto de forma prática. Além disso, é necessário também que o professor compreenda o porquê de um determinado tópico é considerado central na disciplina, enquanto outro pode ser considerado periférico.

O *Conhecimento Curricular* abrange a compreensão do professor quanto aos tópicos, materiais e recursos programáticos disponíveis para o ensino em determinado nível, tendo em vista os objetivos a serem atingidos (SHULMAN, 1986). O autor destaca que além do conhecimento curricular da matéria ou de um tópico de assunto, existem ainda dois aspectos adicionais do conhecimento curricular, são eles: o *Conhecimento Curricular Horizontal*, que diz respeito a capacidade do professor de relacionar o conteúdo que também está sendo discutido em outros anos escolares; e o *Conhecimento Curricular Vertical* que corresponde a familiaridade com os tópicos ensinados na mesma área disciplinar durante os anos anteriores e posteriores na escola (SHULMAN, 1986).

Já o *Conhecimento Pedagógico Geral* se refere as estratégias mais abrangentes de gerenciamento e organização de sala de aula e do conhecimento do currículo horizontal e vertical, de forma a realizar escolhas coerentes, ultrapassando assim o domínio do conhecimento do conteúdo e alcançando objetivos amplos relacionados à educação (BALLERINI, 2014).

O *Conhecimento dos estudantes e de suas características* refere-se ao entendimento do professor sobre os processos de aprendizagem dos alunos, levando em consideração: as particularidades e o contexto em que os alunos estão inseridos, os conhecimentos prévios que cada estudante carrega consigo, além de suas habilidades, interesses e aspirações (BALLERINI, 2014).

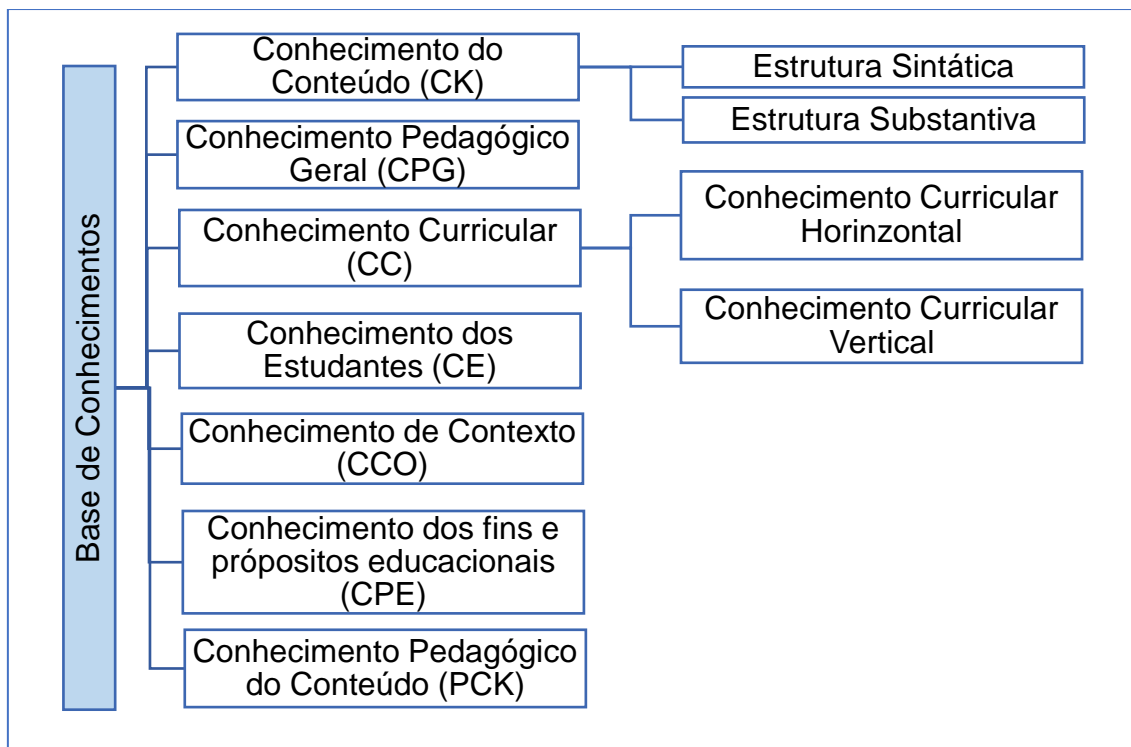
O *Conhecimento de Contextos Educacionais* abrange aspectos organizacionais e institucionais relacionados ao funcionamento do sistema

educacional. Permeia assim, o conhecimento que percorre desde a funcionalidade de um grupo ou da sala de aula, gestão e financiamento do sistema escolar, as hierarquias presente em tal contexto, até as características das comunidades e suas culturas, como por exemplo, o contexto socioeconômico da região onde está situada a escola. Todos esses fatores influenciam a aprendizagem dos estudantes e a forma de ensino docente (BALLERINI, 2014; SHULMAN, 1987).

O *Conhecimento dos Fins e Propósitos da Educação e de sua base histórica* refere-se a compreensão do docente acerca dos objetivos e metas educacionais que permeiam o ambiente escolar.

Por fim, o *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo*, que excede o domínio da matéria em si, configurando-se como o conhecimento da matéria para o ensino, uma amálgama entre conteúdo e pedagogia que pertence exclusivamente aos professores, e sua forma de compreensão profissional (SHULMAN, 1986).

O quadro abaixo esquematiza os conhecimentos profissionais docentes elaborados por Shulman, em 1987.

QUADRO 1 - Base de Conhecimento docente de Shulman

Fonte: Elaborado pelo pesquisador com base em Shulman (1987).

De acordo com Ball *et al.* (2008), Shulman não tinham objetivo de construir uma lista ou catálogo do que os professores necessitam saber em qualquer área específica, sendo assim, procurou proporcionar uma orientação conceitual e um conjunto de distinções analíticas que atraíram a comunidade científica e política sobre os tipos de conhecimentos necessários à docência.

Diante disso, Goes (2014), salienta que o PCK passa a ser considerado um dos conhecimentos básicos para a profissão docente, não mais uma subcategoria do conhecimento do conteúdo, como foi proposto por Shulman, em 1986. Como destacado por Shulman (1987), o PCK possui lugar de destaque na base de conhecimentos profissional docente proposta pelo autor. Diante disso, na próxima seção será exclusiva para entendermos, de forma mais abrangente, a relevância do PCK nas pesquisas em educação.

3.3 O CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO (PCK)

As pesquisas que se voltam para o estudo do PCK evidenciam que ele possuiu extrema importância quando se trata dos conhecimentos profissionais docentes na perspectiva de Shulman (1987). Goes e Fernandez (2018) em um trabalho, do tipo Estado da Arte, destacaram que tanto nas pesquisas brasileiras, quanto em pesquisas internacionais, os estudos que envolvem o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK), têm se intensificado nos últimos anos nas áreas de Ciência da Natureza e Matemática, o que corrobora com Ball *et al.* (2008) que evidencia que o pesquisas relacionadas ao PCK estão presentes em milhares de artigos, capítulos de livros e relatórios, em diversas áreas temáticas, tais como: educação física, estudos sociais, química, engenharia, ensino superior e entre outros.

A primeira manifestação do termo PCK ocorreu em uma Conferência na Universidade Texas, situada nos Estados Unidos da América, em 1983. Em tal ocasião, o pesquisador Lee Shulman discursava sobre o “Paradigma perdido” na investigação sobre o ensino, este paradigma evidenciado, tratava-se de um importante elemento sobre o ensino, que se relacionava ao conhecimento do conteúdo específico e sua interação com a pedagogia, posteriormente denominado de Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (CRISPIM; SÁ, 2019; GOES, 2014),

De acordo com Shulman (1987), dentre as categorias de conhecimento proposta por ele:

[...] o conhecimento pedagógico do conteúdo é de especial interesse, porque identifica os distintos corpos de conhecimento necessários para ensinar. Ele representa a combinação de conteúdo e pedagogia no entendimento de como tópicos específicos, problemas ou questões são organizados, representados e adaptados para os diversos interesses e aptidões dos alunos, e apresentados no processo educacional em sala de aula. O conhecimento pedagógico do conteúdo é, muito provavelmente, a categoria que melhor distingue a compreensão de um especialista em conteúdo daquela de um pedagogo. (SHULMAN, 1987, p. 8, tradução nossa)

Para Goes (2014), no modelo proposto por Shulman, o PCK compreende dois componentes, são eles: as estratégias instrucionais e as dificuldades de aprendizado do conteúdo dos alunos. Sendo assim, é o autor propõe que o

professor utilize das estratégias instrucionais com objetivo de fazer com que os estudantes compreendam os conteúdos em sala de aula.

Fernandez (2015) destaca que quando Shulman faz uso da expressão Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, está equiparando o *status* do que o professor produz na prática (PCK) aos conhecimentos que são produzidos na academia e que influenciam e são influenciados pelo PCK. A autora ressalta ainda que o PCK tem sido enfatizado cada vez mais na literatura dentre os conhecimentos que são importantes para os professores e, assim, passa a denominá-lo como conhecimento profissional específico de professores.

Nesse sentido, Crispim e Sá (2019) afirmam que atualmente várias definições do PCK podem ser encontradas na literatura. Grossman (1990) foi a primeira a sistematizar os componentes da base de conhecimentos de professores e sua relação com o PCK, que na ocasião era aluna de doutorado de Shulman (CRISPIM; SÁ, 2019; FERNANDEZ, 2015).

Crispim e Sá (2019), ressaltam que de acordo com Grossman (1990), o PCK:

[...] é resultante de uma transformação do conhecimento do conteúdo, do conhecimento pedagógico e do conhecimento do contexto que engloba quatro conhecimentos: conhecimento dos alunos; conhecimento do currículo; conhecimento das estratégias instrucionais e; concepções dos propósitos para ensinar um conteúdo (p. 545).

Nos trabalhos de Goes (2014) e Giroto Jr. (2015), são identificados pesquisadores que contribuíram na literatura ao apresentarem diferentes definições para o PCK, com objetivo de categorizar, buscar definições, e propor modelos que visavam a investigação desse conhecimento, podemos destacar: Geddis *et al.* (1993); *National Science Education Standards* (NSES) (1996); Van Driel, Verloop e Desvos (1998); Veal e Makinster (1999); Magnusson, Krajcik e Borko (1999); Baxter e Lederman (1999); Park e Oliver (2008); Berry, Loughran e Van Driel (2008); Kind (2009), dentre outros.

Dessa forma, Goes (2014) destaca que apesar de existir tantas definições distintas do PCK na literatura, os autores(as) concordam com Shulman em dois momentos: i) o PCK é um conhecimento de conteúdo específico; e ii) o PCK sofre influência de uma gama de domínios de conhecimento, dentre os quais

está presente o conhecimento do conteúdo, que apesar de ser considerado essencial, não é suficiente para o desenvolvimento do PCK.

Perante a dificuldade e das inúmeras propostas de definição do PCK, e concebendo a sua importância para a formação de professores e desenvolvimento dos conhecimentos profissionais docentes (GIROTTTO Jr., 2015), uma conferência foi realizada com pesquisadores internacionais de Ensino de Ciências, que possuíam como temática de suas pesquisas o PCK. Esta conferência que ficou conhecida como “Cúpula do PCK” tinha por objetivo explorar modelos e métodos atuais para ter-se acesso ao PCK, encontrando assim uma definição para um modelo unificado do PCK (GIROTTTO Jr., 2015; GOES, 2014).

De acordo com Goes (2014), após a apresentação das concepções individuais de cada grupo reunido na conferência, os pesquisadores envolvidos chegaram no consenso de que a concepção do PCK, seria:

Conhecimento do raciocínio por trás, e planejamento para o ensino de um tópico particular em um modo particular para um propósito particular para alunos particulares com intuito de melhoria dos resultados dos alunos (reflexão sobre a ação, explícito).

O ato de ensinar um tópico particular de um modo particular para um propósito particular para alunos particulares de modo a obter a melhoria dos resultados dos alunos (reflexão na ação, tácito ou explícito) (CÚPULA DO PCK, 2012, apud GOES, 2014).

Mediante a tais levantamentos, alguns autores (PATRONO; FERREIRA, 2021; MOREIRA; FERREIRA, 2013), destacam que os estudos acerca do PCK são importantes na formação de professores de matemática, pois, para estes autores, o PCK se constitui como uma das formas para se pensar, de maneira inovadora e abrangente, no lugar da matemática nos cursos de licenciatura. Desse modo, os autores, afirmam que o PCK tem influenciado, atualmente, o desenvolvimento de investigações em várias partes do mundo.

Entretanto, o modelo proposto por Shulman descreve, de forma geral, os conhecimentos docentes necessários para ensinar, não especificando determinada área de conhecimento, como Geografia, Química, Física ou Matemática (MORIEL Jr.; WIELEWSKI, 2017).

Com relação à Matemática, Moreira e Ferreira (2013) afirmam que

[...] é possível acomodar em duas grandes vertentes o espectro (mais ou menos contínuo) de visões subjacentes aos estudos dos últimos 30 anos que se referem, direta ou indiretamente, ao conhecimento matemático do professor e ao lugar da matemática na sua formação inicial, usando como divisor de águas a categoria PCK de Shulman (MOREIRA; FERREIRA, 2013, p. 999).

De acordo com estes autores, a primeira vertente é relacionada aos trabalhos que partem de uma visão mais próxima da tradicional⁴ 3+1 de modo que se valoriza o conhecimento do conteúdo na prática docente na educação básica e na definição do lugar da matemática na formação do professor (MOREIRA; FERREIRA, 2013). A outra vertente relaciona-se aos estudos que tem como objetivo compreender o conhecimento matemático relevante para a profissão, relacionados a prática docente escolar em matemática e não a disciplina acadêmica em si.

Moreira e Ferreira (2013) fundamentam que mediante as diferentes elaborações que a categoria PCK possui, surge na literatura uma diferenciação fundamental entre a matemática do professor de matemática e a matemática que é ensinada para a formação de outros tipos de profissionais. Nesse momento, os autores exemplificam estudiosos que defendem a ideia de que a matemática da formação de professores, intitulada por Conhecimento Matemático para o Ensino (do inglês: *Mathematical Knowledge for Teaching*), conhecida na literatura pela sigla MKT, faz parte de um ramo especial e qualitativamente diferente quando se relaciona com a matemática dos outros tipos de profissão. Os principais trabalhos dessa vertente são de Ball *et al.* (2008).

Dessa maneira, corroboramos com as ideias de Conhecimento Matemático para o Ensino proposta por Ball *et al.*, de forma que tal conhecimento específico para professores que ensinam matemática, tem potencial de nos auxiliar a atingir os objetivos apresentados na presente pesquisa. Visto que tais estudos influenciaram e continuam influenciando o desenvolvimento de

⁴ Ensino tradicional 3+1 refere-se a antiga tradição de 3 anos de bacharelado + 1 ano de didática.

pesquisas e propostas de formação docente em todo o mundo, inclusive aqui no Brasil (PATRONO; FERREIRA, 2021).

Isto posto, a próxima seção abordará os trabalhos de Deborah Ball *et al.* no que diz respeito os conhecimentos necessários dos professores de matemática.

4 O CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO (MKT)

Este capítulo tem como propósito discutir outro referencial teórico utilizado nesta investigação, a saber o Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) proposto por Ball *et al.* (2008). Deste modo, abordamos a estrutura das Categorias de Conhecimentos específicos para professores de Matemática existentes no MKT, e por fim discorreremos acerca das potencialidades presentes no uso do MKT em pesquisas que envolvem a História da Matemática.

4.1 O CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO PROPOSTO POR BALL E COLABORADORES

Segundo Ball *et al.* (2008), para considerar o conhecimento que o ensino proporciona, é necessário investigar o que o próprio ensino exige. Dessa forma, os autores desenvolveram uma abordagem de maneira empírica, com intenção de compreender o conhecimento necessário para o ensino, ao invés de raciocinar partindo do currículo escolar para uma lista de tópicos que os professores devem saber.

As pesquisas de Ball *et al.*, que foram desenvolvidas da Universidade de Michigan, se realizavam no âmbito do “Projeto Ensinar e Aprender a Ensinar Matemática” (do inglês: *Mathematics Teaching and Learning to Teach Project*) e “Projeto Aprendendo Matemática para Ensinar” (do inglês: *Learning Mathematics for Teaching Project*). De acordo com os autores, o primeiro projeto concentrou-se no trabalho que os professores realizam no ensino da matemática. Sendo assim, foram utilizados estudos da prática de ensino com intuito de analisar as demandas matemáticas do ensino, desenvolvendo assim um conjunto de hipóteses testáveis sobre a natureza do conhecimento matemático para o ensino. Relacionado a isto, o segundo projeto desenvolveu medidas de levantamento do conhecimento do conteúdo para o ensino de matemática. Nesse sentido, esses estudos levaram a elaborar alguns refinamentos ao conceito de conhecimento pedagógico do conteúdo e sobre o conceito mais geral de conhecimento do conteúdo para o ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Diante disso, Ball *et al.* (2008) destacam que uma grande parcela dos trabalhos que utilizaram as propostas de Shulman, evidenciaram como as orientações dos professores relacionado ao conteúdo, influenciaram as maneiras pelas quais ensinavam esse conteúdo. Mediante a isso, os autores afirmam que Ball (1990), introduziu a frase “conhecimento sobre matemática” com objetivo de contrastar com “conhecimento de matemática” e, ainda, para ressaltar a natureza do conhecimento da disciplina (de onde vem, como muda e como a verdade é estabelecida) (BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

Para Ball *et al.* (2008), o *Conhecimento Matemático para o Ensino* (MKT) refere-se ao

[...] o conhecimento matemático necessário para realizar o trabalho de ensino da matemática. É importante notar aqui que nossa definição começa com ensino, não com professores. Está preocupado com as tarefas envolvidas no ensino e as demandas matemáticas dessas tarefas. Como o ensino envolve mostrar aos alunos como resolver problemas, respondendo às perguntas dos alunos e verificando o trabalho dos alunos, exige uma compreensão do conteúdo do currículo escolar (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 395, tradução nossa).

Segundo os autores, as perguntas que nortearam suas análises qualitativas foram: Quais são as tarefas e problemas recorrentes no ensino da matemática? O que os professores fazem ao ensinar matemática? Quais tipo de conhecimentos matemáticos, habilidades e sensibilidade são necessários para gerenciar essas tarefas?

Para estes autores um dos momentos mais relevantes da investigação refere-se à constatação de que o ensino pode exigir uma forma de conhecimento especializada do assunto “puro”. Segundo os autores, é “puro” pois não tem relação com o conhecimento do pedagógico ou dos alunos, ou seja, é distinto do PCK identificado por Shulman, é “especializado” pois volta-se apenas para o ensino, não sendo necessário a utilização em outros contextos se não o educacional.

Perante o exposto, entendemos que o Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT), desenvolvido por Ball *et al.*, assume-se como um importante referencial teórico para a presente pesquisa. Dessa forma, as próximas seções, propomos a identificar e analisar a estrutura deste conhecimento e, por fim,

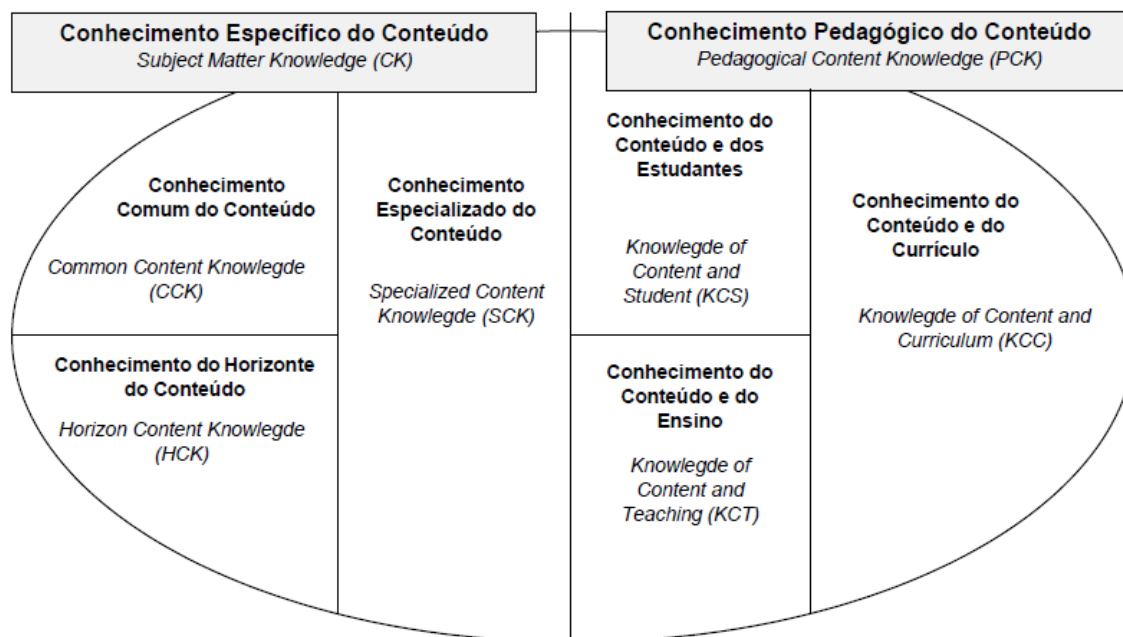
evidenciaremos as relações entre tal conhecimento e a História da Matemática (HM).

4.2 A ESTRUTURA DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO (MKT)

Como destacado acima, essa seção tem por objetivo apresentar a estrutura do MKT destacando assim os domínios propostos por Ball *et al.* (2008).

Conforme é ressaltado pelos autores, em suas análises referentes ao trabalho do professor de Matemática no que se refere ao ensino da matemática, constataram que a natureza e a habilidade matemática utilizadas pareciam ser de diferentes tipos. Diante disso, baseados na análise das demandas matemáticas de ensino, foi formulada a hipótese de que o Conhecimento do Conteúdo, proposto por Shulman (1987), poderia ser refinada em dois domínios, a saber, o Conhecimento Comum do Conteúdo e o Conhecimento Especializado do Conteúdo, e da mesma maneira, o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, também poderia ser refinado em Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes e Conhecimento do Conteúdo e do Currículo.

A figura 1, a seguir, representa as bases de conhecimento do MKT.

FIGURA 1 - Domínios do *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT)

Fonte: Adaptado de Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403)

O Conhecimento do conteúdo (do inglês: *Subject Matter Knowledge* - CK) foi dividido em: Conhecimento Comum do Conteúdo (do inglês: *Common Content Knowledge* - CCK) e Conhecimento Especializado do Conteúdo (do inglês: *Specialized Content Knowledge* - SCK).

O primeiro domínio proposto por Ball *et al.* (2008) é o *Conhecimento Comum do Conteúdo* (CCK) que é definido como o conhecimento matemático e a habilidade usada em outros ambientes que não o ensino. Dessa maneira, refere-se ao conhecimento que o professor deve possuir sobre o conteúdo que leciona. Ele deve ser capaz de entender o conteúdo que ensinam, reconhecer se há erros ou imprecisões nas respostas dos estudantes ou até mesmo identificar quando o livro utilizado fornece uma definição imprecisa do conteúdo. Sendo assim, no CCK os professores devem ser capazes de executar as tarefas que designam para seus estudantes. O termo “comum” diz respeito ao conhecimento e habilidades referentes à Matemática que outros profissionais também possuem e, sendo assim, não é exclusiva aos professores que ensinam matemática (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

O Conhecimento Comum do Conteúdo pode ser identificado, por exemplo, quando estudamos as equações do 2º grau, de modo que saber

solucionar problemas desse tipo, conhecer que existem duas raízes nesse tipo de equação ou perceber quando uma solução está certa ou errada, é considerado como Conhecimento Comum do Conteúdo.

Já o segundo domínio, *Conhecimento Especializado do Conteúdo* (SCK), é o conhecimento matemático e a habilidade exclusiva para o ensino. Diante disso, tal domínio de conhecimento não se aplica em outros locais que não o ensino. Refere-se, por exemplo, na habilidade do professor de ser capaz de identificar erros padronizados dos estudantes, de avaliar se uma abordagem não convencional funcionaria de forma geral, de compreender diferentes tipos de resoluções, de justificar e explicar suas ideias matemáticas e/ou usar representações matemáticas de maneira eficaz, tornando assim o professor um profissional que realiza um certo tipo de trabalho que outros profissionais não fazem (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Esse conhecimento específico para professores aparece, tomando o mesmo exemplo acima acerca das equações do 2º grau, quando o professor além de ter o Conhecimento Comum do Conteúdo acerca desse assunto, é capaz, também, de perceber a relação desse conhecimento com a geometria ou saber resolver os mesmos problemas fazendo uso de diferentes abordagens como, por exemplo, o método de Al-Khwarizmi para encontrar soluções de uma equação quadrática. Esse tipo de conhecimento é considerado específico do conteúdo.

De acordo com Patrono e Ferreira (2021), uma terceira categoria, o *Conhecimento do Horizonte do Conteúdo* (do inglês: *Horizon Content Knowledge* - HCK), foi incluída nesse domínio. Entretanto, Ball *et al.* (2008) não possuem certeza se ela é parte do Conhecimento Comum do Conteúdo ou se pode ser utilizada em outras categorias. Esse conhecimento se refere ao entendimento de como os conteúdos matemáticos se relacionam no currículo.

O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) também foi dividido em: Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (do inglês: *Knowledge of Content and Student* – KCS) e Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (do inglês: *Knowledge of Content and Teaching* – KCT).

O domínio do *Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes* (KCS), é o conhecimento que combina saberes sobre os alunos e sobre matemática. Nesse domínio, os professores devem antever o que os estudantes provavelmente terão dificuldade, em vista disso, os exemplos escolhidos pelos professores, deverão ser motivadores e interessantes para os estudantes. Esta mesma ideia se aplica às tarefas propostas, de modo que, os professores precisam antever quais acharão fácil ou difícil e, ainda, quais serão capazes de resolver. Dessa maneira, os professores devem ser capazes de ouvir e interpretar os pensamentos emergentes e incompletos dos alunos (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

O domínio do *Conhecimento de Conteúdo e Ensino* (KCT), combina saber sobre ensinar e saber sobre matemática. De acordo com os autores “Muitas das tarefas matemáticas de ensino requerem um conhecimento matemático do projeto de instrução. Os professores ordenam o conteúdo específico para instrução” (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 401, tradução nossa). Dessa maneira, os professores devem escolher quais são os exemplos que serão utilizados na introdução de um novo conteúdo e quais exemplos devem ser empregados para envolver os estudantes mais profundamente no conteúdo. Segundo os mesmos autores, nesse domínio, os professores avaliam as vantagens e desvantagens instrucionais utilizadas para ensinar um conteúdo específico, e posteriormente devem identificar quais os métodos aplicáveis possíveis para o ensino. Essas tarefas solicitam por parte do professor uma interação entre a compreensão matemática específica e uma compreensão pedagógica que afetam a aprendizagem do estudante (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Segundo Patrono e Ferreira (2021), a categoria *Conhecimentos Curriculares* proposta por Shulman (1986) foi posicionada pelos autores nesse domínio. Entretanto, Ball *et al.* afirmam não ter certeza se pode ser uma categoria em si, se é parte da categoria conhecimento do conteúdo e do ensino ou se pode ser trabalhada em várias categorias.

Nessa perspectiva, Jankvist *et al.* (2015) destacam que o MKT é relativo ao nível de ensino e ao que está sendo ensinado, diante disso, o MKT é diferente para um professor que leciona a disciplina de álgebra e um professor que leciona

a disciplina de geometria, da mesma forma que é diferente para um professor que leciona no ensino fundamental e outro que leciona no ensino médio.

Os estudos de Ball *et al.* influenciaram e influenciam o desenvolvimento de pesquisas e propostas de formação em todo o mundo (PATRONO; FERREIRA, 2021). Tal afirmação corrobora com Carrillo *et. al.* (2013)⁵ que destaca o modelo do MKT demonstrou-se eficiente na descrição dos conhecimentos que são exigidos pelos docentes em sua prática, visto que destaca ligações do conhecimento matemático e outros elementos envolvidos no processo de ensino como, por exemplo, os estudantes, a sua aprendizagem e o currículo, e as ligações entre eles. Além disso, os autores evidenciam também pioneirismo do MKT na importância do conhecimento matemático do ponto de vista do ensino, incluindo o conhecimento da disciplina, as normas que regem seu funcionamento e uma reflexão relacionada sobre os conteúdos e suas relações.

Em uma investigação recente, Patrono e Ferreira (2021) realizaram um levantamento da produção do MKT em teses e dissertações brasileiras. Os resultados desta investigação indicam que, as pesquisas que foram realizadas com professores da educação básica reforçam a “[...] importância de se proporcionar oportunidades de desenvolvimento profissional para os professores que ensinam Matemática, principalmente, no que se refere aos conhecimentos próprios da profissão” (PATRONO; FERREIRA, 2021, p. 14). Já as pesquisas que foram realizadas com licenciandos em matemática revelaram-se importantes pois oportunizaram a eles, uma reflexão sobre formas de ensinar; uma ampliação dos conhecimentos matemáticos; momentos de discussão; compreensão de estratégias que podem aprimorar o conhecimento do conteúdo, do currículo e a construção de conceitos e atitudes (PATRONO; FERREIRA, 2021).

Diante disso, as autoras evidenciam que a realização de tal investigação reforça a necessidade de pesquisas que ampliem os conhecimentos específicos

⁵ Destacamos que posteriormente, Carrillo passou a entender que o MKT não era o modelo mais adequado e apresentou algumas críticas a ele. Assim, desenvolveu seu próprio modelo intitulado "Conhecimento Especializado do Professor de Matemática" (do inglês: *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge – MTSK*).

dos professores, em especial, de matemática, pois tais conhecimentos contribuí tanto para a melhoria dos processos de ensino de aprendizagem de matemática como beneficia a profissionalização dos professores de matemática.

Dessa maneira, o MKT apresenta-se como um modelo teórico adequado a pesquisas que têm como objetivo o estudo dos conhecimentos de professores e futuros professores de matemática, que é o foco de desenvolvimento desta pesquisa. Perante o exposto, na próxima seção, discutiremos as relações existentes entre o esse modelo de conhecimento e a História da Matemática.

4.3 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E O CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO (MKT)

Iniciamos nossa discussão a partir das reflexões de Jankvist *et al.* (2015) que analisaram três casos considerados por eles como ‘clássicos’ do uso da História da Matemática na formação de professores e os reinterpretem utilizando a estrutura do MKT.

A questão norteadora para tal investigação baseia-se em: Como a estrutura do MKT e seus componentes separados podem contribuir para a pesquisa realizada sobre o uso da HM na educação matemática? (JANKVIST *et al.*, 2015).

Diante disso, o primeiro caso analisado pelos autores é o caso em que o produto de dois negativos é igual a um positivo. Jankvist *et al.* (2015) ao estudarem os trabalhos de Arcavi *et al.* (1983) que mostraram, de forma convincente, que o uso de fontes originais para tal estudo, auxiliam os professores na compreensão do assunto em si. Nessa perspectiva, os autores destacam que os próprios professores que participaram dessa pesquisa relataram que “[...] além de aprender sobre a definição de números negativos, eles também aprenderam sobre a importância das definições na matemática em geral - o que novamente ampliou sua compreensão dos números negativos” (JANKVIST *et al.*, 2015, p. 499). Sendo assim, para os autores, o estudo histórico permite conhecer várias definições matemáticas que, desse modo, auxiliam os

professores no Conhecimento Especializado do Conteúdo, uma das categorias proposta por Ball *et al.* (2008) dentro do contexto do ensino de matemática.

Já o segundo caso analisado pelos autores foi o uso do sistema decimal. Eles ressaltam que é consenso na literatura geral de educação matemática que desenvolver a compreensão do sistema decimal de forma adequada auxilia a compreensão dos estudantes na aprendizagem da aritmética. Isto posto, entender sobre outras bases numéricas como, por exemplo, a sexagesimal, base binária, dentre outras, pode contribuir para uma melhor formação do professor.

O exemplo analisado pelos pesquisadores, relaciona-se ao estudo do sistema numérico egípcio, que não possuía um sistema de valor posicional, o sistema sexagesimal da Babilônia, que é um sistema de valor posicional com base 60, a matemática grega e seu sistema decimal e, por fim, o sistema numérico indiano e chinês.

Ao ser relacionado com o MKT percebe-se que a compreensão do sistema decimal pode ser interpretada como o Conhecimento Comum do Conteúdo e, diferentemente, analisar estratégias geradas por alunos mais ou menos comumente usadas para problemas de vários dígitos, no entanto, requer uma compreensão adequada do sistema de numeração decimal e, além disso, a compreensão de como os diferentes sistemas numéricos se encaixam nas estruturas e hierarquias do conhecimento matemático coletivo e compartilhado é interpretada como Conhecimento Especializado do Conteúdo.

Por fim, o terceiro caso histórico envolve equações do segundo grau e o método de completar quadrado. A solução usual de uma equação do segundo grau pode ser considerada como conhecimento comum do conteúdo, entretanto, o método de Al-Khwarizmi para encontrar soluções de uma equação quadrática – usando como base o texto original do século XIV – representando uma abordagem geométrica, é considerado um Conhecimento Especializado do Conteúdo.

Vale ressaltar que por meio desses casos, é intrinsecamente importante que o professor tenha conhecimento sobre o ritmo de aprendizagem dos estudantes e/ou as principais dificuldades na utilização dessas abordagens, que é para Ball *et al.* (2008) caracterizado como Conhecimento do Conteúdo e dos

Estudantes. Por outro lado, entender o conhecimento que tais conteúdos podem ser relacionados, de modo que o professor consiga articular sobre o conteúdo anteriormente ensinado e o próximo conteúdo a ser ensinado, corresponde ao que Ball *et al.* considera como Conhecimento do Conteúdo e do Currículo.

Diante disso, Jankvist *et al.* (2015) argumentam que esses casos, ao serem analisados na perspectiva do MKT, são importantes indicadores de como a História da Matemática pode ser relevante para a formação de professores de Matemática. Sendo assim, a estrutura de conhecimento para o ensino proposta por Ball *et al.* (2008), pode ser utilizada para refletir sobre os potenciais benefícios da História da Matemática como auxiliadora para formação de professores de matemática.

Em que pese o fato de que haja algumas limitações a utilização de modelos de conhecimento de professores, como a Base de Conhecimento para o Ensino, proposta por Shulman (1987) e o Conhecimento Matemático para o Ensino, proposto por Ball *et al.* (2008), essas referências são uma forma reconhecida de avaliar as contribuições da HM para a formação de professores de Matemática, e serviram de base para o desenvolvimento de novas categorias para as análises, que serão apresentadas no capítulo seguinte.

5 PROCEDIMENTO METODOLÓGICO

Pretende-se neste capítulo, descrever o processo metodológico utilizado nesta pesquisa. Para tanto, descrevemos: (i) a abordagem metodológica utilizada na investigação; (ii) o processo de construção dos dados; (iii) detalhes acerca de como ocorreu a coleta de dados; (iv) o processo de análise dos dados feita pelo pesquisador; e, por fim (v) uma breve descrição dos encontros com o grupo de estudos.

5.1 ABORDAGEM METODOLÓGICA DA PESQUISA

A presente pesquisa, conforme já exposto, objetivou identificar e analisar os conhecimentos de professores de Matemática, que são mobilizados por licenciandos em Matemática no estudo de episódios históricos. De maneira específica, pretendemos identificar e analisar os conhecimentos matemáticos e conhecimentos pedagógicos do conteúdo mobilizados pelos estudantes no processo de apresentação e discussão dos episódios históricos.

A partir do objetivo proposto para a realização desta pesquisa, justifica-se a escolha da abordagem qualitativa. De acordo com Goldenberg (2004, p. 14) em uma abordagem qualitativa “[...] a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de organização, de uma instituição, de uma trajetória, etc”.

Nessa perspectiva, Bogdan e Biklen (1994, p. 47 – 51) destacam que uma investigação de cunho qualitativo possui cinco características, embora nem todos estudos que possam ser considerados qualitativos evidenciam tais características com a mesma expressividade, são elas: 1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; 2. A investigação qualitativa é descritiva; 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; 4. Os investigadores qualitativos

tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Entendemos que a presente pesquisa evidencia todas as características destacadas por Bogdan e Biklen (1994), tendo em vista os objetivos propostos para tal investigação.

Na educação, os investigadores qualitativos estão a todo momento questionando os participantes da investigação, objetivando notar o que experimentam, a forma como interpretam as suas experiências e como estruturam o mundo social em que vivem. A forma de condução de uma pesquisa qualitativa pode ocorrer por meio do diálogo entre os pesquisadores e os participantes, de modo que os dados coletados não serão analisados pelo pesquisador de maneira neutra (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

5.2 PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DOS DADOS

Os dados desta investigação foram construídos a partir de informações obtidas em um grupo de estudo que foi criado especificamente para esta pesquisa. Este foi constituído por nove discentes do curso de Matemática Licenciatura de uma Universidade Federal do sul de Minas Gerais, que no ano 2022 já haviam cursado ao menos metade do curso.

Para a formação deste grupo, o pesquisador identificou duas disciplinas do curso de Matemática Licenciatura em que os estudantes matriculados já haviam cursado ao menos metade do curso. O pesquisador foi em aulas destas disciplinas e explanou a proposta e os objetivos da investigação, que culminaria na formação de um grupo de estudos que tinha por interesse debater episódios históricos da Matemática e que, além disso, serviria como momento de coleta de dados por parte do pesquisador. Vale ressaltar que os estudantes foram informados que também poderiam participar do grupo de estudos e não, necessariamente, participar da pesquisa. Por fim, nesse primeiro contato com os alunos foi disponibilizado aos estudantes o contato particular do pesquisador para sanar quaisquer dúvidas referentes à investigação e para que os alunos pudessem manifestar interesse em fazer parte do grupo de estudos.

Sendo assim, os participantes que se sentiram interessados em participar do grupo de estudos entraram em contato com o pesquisador ou por meio do telefone e e-mail disponibilizados em sala de aula ou de maneira presencial. Posteriormente a formação do grupo de estudos, o pesquisador em posse do telefone dos participantes, criou um grupo de conversas no aplicativo de mensagens instantâneas, *WhatsApp*, para definir junto dos voluntários da investigação a data de início e o formato de encontros do grupo de estudos.

Após a formação do grupo, foram realizados cinco encontros, no período de maio a julho de 2022, que tiveram duração aproximada de 90 minutos cada. Os quatro primeiros foram desenvolvidos através da plataforma de encontros *online*, *Google Meet*, e o último encontro, a pedido do grupo de estudos, foi realizado de forma presencial. Todos os encontros foram gravados e, posteriormente, analisados pelo pesquisador com base no referencial teórico utilizado nesta investigação.

Destaca-se que a escolha pelo formato remoto para as primeiras reuniões foi uma escolha dos participantes, devido ao fato de não conseguirem estar presentes no local previsto para a realização da investigação. Entretanto, apesar dos encontros serem de forma remota, percebeu-se que tal formato foi adequado, tendo em vista que os participantes se envolveram de maneira ativa nas discussões propostas pelo pesquisador.

Nesse sentido, Tarouco *et al.* (2003) evidenciam que os sistemas de videoconferências são importantes meios de comunicação audiovisual, pois permitem o compartilhamento de informações, reflexões, e trabalho cooperativo, entre um grupo de pessoas independentemente de suas posições geográficas.

Um cronograma e informações importantes acerca dos cinco encontros realizados podem ser encontrados no quadro 2, a seguir.

QUADRO 2 - Cronogramas dos encontros

Encontros	Atividades	Duração	Objetivos
Encontro 1 (05/05)	- Explicação detalhada da pesquisa;	- 90 minutos	- Conhecer os participantes; - Explicar a investigação;

	<ul style="list-style-type: none"> - Apresentação dos participantes; - Conhecimento prévios dos participantes acerca da História da Matemática e suas potencialidades; - Divisão dos subgrupos. 		<ul style="list-style-type: none"> - Explicação acerca da relevância do TCLE.
Encontro 2 (19/05)	<ul style="list-style-type: none"> - Tópico: A Geometria euclidiana e as Geometrias não-euclidianas; - Apresentação do segundo grupo; - Discussões acerca do tema apresentado; 	<ul style="list-style-type: none"> - Cerca de 30 minutos para a apresentação; - Cerca de uma hora para discussões e reflexões; 	<ul style="list-style-type: none"> - Discutir existência de verdades absolutas na Matemática; - Discutir as formas de validação do conhecimento na Matemática; - Discutir a percepção de como é desenvolvido o trabalho de um(a) matemático(a); - Abordar como esse episódio contribui para a formação docente.
Encontro 3 (26/05)	<ul style="list-style-type: none"> - Tópico: Cálculo infinitesimal; - Apresentação do terceiro grupo; - Discussões acerca do tema apresentado; - Fichamento das principais reflexões mobilizadas através do grupo de estudo; 	<ul style="list-style-type: none"> - Cerca de 30 minutos para a apresentação; - Cerca de uma hora para discussões e reflexões; 	<ul style="list-style-type: none"> - Discutir os conceitos filosóficos da matemática; - Discutir como o contexto histórico influencia na forma pela qual o próprio conhecimento é produzido; - Abordar como esse episódio contribui para a formação docente.
Encontro 4 (09/06)	<ul style="list-style-type: none"> - Tópico: O surgimento dos números complexos; - Apresentação do primeiro grupo; - Discussões acerca do tema apresentado; 	<ul style="list-style-type: none"> - Cerca de 30 minutos para a apresentação; - Cerca de uma hora para discussões e reflexões; 	<ul style="list-style-type: none"> - Discutir acerca de como é produzido o conhecimento matemático e como esse conhecimento é validado dentro da comunidade matemática; - Abordar como esse episódio contribui para a formação docente.
Encontro 5 (07/07)	<ul style="list-style-type: none"> - Fechamento das discussões do grupo de estudos. 	<ul style="list-style-type: none"> - Cerca de 90 minutos para discussão e reflexão. 	<ul style="list-style-type: none"> - Discutir os objetivos dos encontros anteriores.

Fonte: Autoria própria do pesquisador

No encontro 1, os participantes foram informados sobre a necessidade de assinar o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE, sendo que este documento foi entregue pelo pesquisador aos participantes individualmente na Universidade. Destaca-se que a presente investigação passou por um processo de avaliação e aprovação no comitê de ética em pesquisa⁶. Neste encontro, também, foram escolhidas as datas para os próximos encontros, os grupos e os temas que escolheram para a apresentação dos episódios. Além disso, os participantes foram comunicados que os materiais utilizados para o estudo estavam disponibilizados para todos lerem e o grupo responsável pelo episódio desenvolveria uma apresentação para os demais participantes, e posteriormente a esse momento iniciaria a discussão acerca do episódio em questão.

Os encontros 2, 3 e 4, seguiram a mesma dinâmica, se iniciavam com a apresentação do grupo de estudos referente ao episódio histórico da Matemática escolhido. Vale ressaltar que todos os grupos optaram em apresentar com slides. Logo após a apresentação, o pesquisador junto com a professora orientadora desta investigação, fomentava discussões acerca do episódio em questão. As questões levantadas no decorrer dos encontros foram elaboradas antecipadamente pelo investigador, de modo que cada episódio histórico debatido possuía questões específicas.

No encontro 5, foi desenvolvido um fechamento com os participantes, com intuito de abordar as possíveis lacunas existentes no decorrer dos encontros. Além disso, o pesquisador e a professora orientadora puderam entender dos participantes sobre a experiência que tiveram em participar desta investigação acadêmica⁷. Uma descrição pormenorizada dos encontros poderá ser encontrada no capítulo subsequente.

Destacamos que a escolha do material para estudo, deve-se ao fato de sua relevância no âmbito de pesquisas em História da Matemática e que coincidem com a escolha dos episódios históricos que seriam abordados no decorrer do grupo de estudos. Diante disso, o pesquisador previamente fez a escolha da base de artigos, livros e vídeos que poderiam ser utilizados para os

⁶ CAAE: 55995521.6.0000.5094. Número do Parecer: 5.264.251.

⁷ O próximo capítulo apresenta os encontros de forma detalhada.

estudos dos episódios históricos. A disponibilização desse material ocorreu por meio de uma pasta compartilhada aos participantes no *Google drive*, de modo que pudessem ler e apresentar suas principais reflexões ao longo dos encontros. Vale destacar que caso os participantes entendessem que seria necessário, poderiam utilizar outros materiais selecionados por eles próprios.

O Quadro 3, abaixo, apresenta os materiais indicados para leitura dos participantes da investigação.

QUADRO 3 - Material indicado

Surgimento das geometrias não-euclidianas		
Material indicado	Tipo de material	Referência
Leitura obrigatória	Livro	EVES, H. As primeiras décadas do século XIX e a Libertação da geometria e da álgebra. In: EVES, H. Introdução à história da matemática . Unicamp, 1995, p. 593 - 545.
Leitura obrigatória	Artigo	SOUZA, A. C. C. Aspectos históricos das Geometrias não-euclidianas. Bolema , Rio Claro-SP, v. 8, n.9, 1993.
Leitura obrigatória	Artigo	GOMES, L. F. A história das geometrias não euclidianas para formação do professor: uma proposta baseada no uso de vídeos didáticos. XX EBRAPEM , nov. 2016.
Surgimento do cálculo infinitesimal		
Material indicado	Tipo de material	Referência
Leitura obrigatória	Artigo	MENEGHETTI, R. C. G; BICUDO, I. O que a história do desenvolvimento do cálculo pode nos ensinar quando questionamos o saber matemático, seu ensino e seus fundamentos. Revista Brasileira de História da Matemática , v. 2, n. 3, p. 103 – 118, 2002.
Leitura obrigatória	Capítulo de livro	EVES, H. O cálculo e conceitos relacionados. In: EVES, H. Introdução à história da matemática . Unicamp, 1995, p. 417-445.
Leitura complementar	Capítulo de livro	WUSSING, H. La revolución científica: la elaboración de la matemática infinitesimal. In: WUSSING, H. Lecciones de Historia de Las Matemáticas . Siglo XIX de España Editores, 1989, p. 289-338.
Surgimento dos números complexos		
Material indicado	Tipo de material	Referência

Leitura obrigatória	Artigo	SILVA, M. A. Da teoria à prática uma análise histórica do desenvolvimento conceitual dos complexos. Revista Brasileira de História da Ciência , Rio de Janeiro, v. 4, n. 1, p. 79-91, jan-jun. 2011.
Vídeo obrigatório	Vídeo aula	História da Matemática para professores: Números negativos e complexos. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=xjG2Z5XgS4o&list=PL4oMd-wbcGW80E3_ad9CG43br5CKsS39z&index=16 .
Leitura Complementar	Capítulo de livro	KATZ, V. J. História da Matemática . Editora Fundação Calouste Gulbenkian, 2010, p. 450-462.

Fonte: Autoria própria do pesquisador

Na seção, a seguir, apresentaremos informações sobre como ocorreu a coleta de dados.

5.3 A COLETA DE DADOS

Conforme já apontado, os dados da investigação foram coletados ao longo da realização dos encontros descritos anteriormente. Para tal, foram realizadas gravações em áudio e vídeo dos encontros que ocorreram na plataforma de encontros *online*, *Google Meet*, por meio da ferramenta *Open Broadcaster Software* (OBS) e gravação em áudio do encontro presencial.

As gravações em vídeo, para Garcez, Duarte e Eisenberg (2011) são uma importante ferramenta para pesquisas em educação, visto que através delas é possível capturar aspectos que outras ferramentas não teriam capacidade, tais como as expressões corporais, faciais e verbais utilizada em situações cotidianas e reações dos sujeitos participantes frente a uma atividade ou questão levantada pelo pesquisador.

Estas gravações foram transcritas e as transcrições foram lidas, de modo a selecionar as falas e comentários dos participantes no decorrer do processo de apresentação e discussão dos episódios históricos da Matemática que indicavam indícios dos conhecimentos docentes. Além disto, o pesquisador utilizou um diário de anotações para registros dos encontros. Em Araújo *et al.*

(2013), podemos notar a relevância do diário de anotações do pesquisador para uma pesquisa científica, pois esse

[...] é utilizado para retratar os procedimentos de análise do material empírico, as reflexões dos pesquisadores e as decisões na condução da pesquisa; portanto ele evidencia os acontecimentos em pesquisa do delineamento inicial de cada estudo ao seu término (p. 54).

Para Bogdan e Biklen (1994) as anotações de campo consistem em dois tipos de materiais. O primeiro é descritivo, desse modo a preocupação do pesquisador é caracterizar o local, pessoas, ações e conversas observadas. O segundo é reflexivo, em que apreende mais o ponto de vista do pesquisador, as ideias e preocupações. Desse modo, tendo em vista as considerações feitas pelos autores, entendemos que nesta investigação as anotações de campo utilizadas pelo pesquisador, voltava-se ao caráter descritivo.

Neste diário, o pesquisador relatou as interações e reflexões dos participantes em relação a questões referentes à História da Matemática e como tais reflexões acerca desse conteúdo podem auxiliá-los em sua formação docente. Buscou, ainda, identificar indícios da mobilização dos conhecimentos de professores nas falas e comentários dos participantes.

Neste processo de seleção de falas e comentários dos participantes e de trechos do diário, para manter o anonimato dos participantes, elaboramos os códigos (P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8 e P9) para identificá-los.

Os instrumentos utilizados para a coleta de dados, também foram codificados pelo pesquisador, sendo que estes são apresentados no Quadro 4, a seguir.

QUADRO 4 - Códigos elaborados para os instrumentos de coleta de dados

Instrumentos	Momento	Código
Gravações do encontro 1	Apresentação e discussão com os participantes	GDE1
Gravações do encontro 2	Apresentação e discussão com os participantes	GDE2
Gravações do encontro 3	Apresentação e discussão com os participantes	GDE3
Gravações do encontro 4	Apresentação e discussão com os participantes	GDE4

Gravações do encontro 5	Apresentação e discussão com os participantes	GDE5
Diário de anotações do pesquisador	Após o término dos encontros	DAP

Fonte: Autoria própria do pesquisador

Na seção seguinte, iremos descrever a análise dos dados coletados no decorrer da investigação.

5.4 ANÁLISE DOS DADOS

Posteriormente a seleção de falas e comentários dos participantes e de trechos do diário que pudessem apresentar indícios da mobilização dos conhecimentos de professores considerados nesta investigação, iniciamos a análise dos dados.

Estes foram analisados por meio de semelhança de domínios, sendo que tais domínios foram elaborados com base nos dados obtidos e tendo como referência especialmente as ideias sobre conhecimentos docentes propostas por Shulman (1986, 1987) e Ball *et al.* (2008). Portanto, estes domínios foram criados de maneira mista. Vale ressaltar que utilizamos o termo “domínio” e “subdomínio” de conhecimentos, seguindo, assim, a nomenclatura usada por Ball *et al.*

Para as análises foram considerados (i) o Conhecimento de Conteúdo (CK), subdividido em: Conhecimento de Matemática (CdM) e Conhecimento sobre Matemática (CsM); e (ii) o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, subdividido em: Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS), Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT) e Conhecimento Curricular (CC). Os domínios e subdomínios de Conhecimentos serão definidos a seguir.

Para definirmos, nesta investigação, o conceito de Conhecimento de Matemática (CdM) nos baseamos na forma como Cutrera (2003) define “Conhecimento em Ciência”. Para o autor, o Conhecimento em Ciência refere-se ao “[...] conhecimento dos próprios conteúdos e dos métodos da ciência -isto é, leis, modelos, teorias, conceitos, técnicas e procedimentos experimentais- utilizados pelos cientistas” (CUTRETA, 2003, p. 1, tradução nossa).

Nesse sentido, definiremos CdM como sendo o conhecimento acerca dos conteúdos matemáticos, tais como, axiomas, postulados, teoremas, teorias, definições, termos, representações, conceitos, notações e métodos que são utilizados pelos matemáticos para a resolução de problemas provenientes tanto da própria matemática como do cotidiano ou de outras ciências.

Definimos, na presente investigação, o conceito de Conhecimento sobre Matemática (CsM) fundamentando em como Cutrera (2003) define “Conhecimento sobre a Ciência”. Para este autor, o Conhecimento sobre a Ciência diz respeito ao empreendimento científico, ou seja,

[...] o conhecimento sobre como os cientistas desenvolvem e usam o conhecimento científico - como decidem o que investigar, como obtêm e interpretam os dados científicos e como decidem se aceitam ou não os resultados publicados (CUTRETA, 2003, p. 1, tradução nossa).

Nessa perspectiva, definimos o CsM como sendo o conhecimento de motivações, influências sociais, políticas, econômicas, científicas e culturais intrínsecas no desenvolvimento matemático, bem como o conhecimento do trabalho de um pesquisador matemático e do papel da comunidade matemática para a aceitação, difusão ou negação de uma teoria.

O Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS) está presente no Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) proposto por Ball *et al.* (2008). Segundo os autores, o KCS é o conhecimento que relaciona saberes sobre os estudantes e sobre a Matemática. Sendo assim, os professores terem conhecimento que os permitam antever o que os estudantes provavelmente terão mais dificuldades e, dessa maneira, poderão escolher exemplos que sejam motivadores e interessantes para os estudantes.

O Conhecimento de Conteúdo e Ensino pertencente ao MKT de Ball *et al.* (2008), e refere-se à combinação entre o ensino e a Matemática. Este seria referente ao conhecimento que possibilita que professores escolham quais exemplos serão utilizados na introdução de um novo tópico de conteúdo e quais serão empregados para envolver os estudantes mais profundamente no conteúdo. Além disto, possibilita que os professores avaliem as vantagens e desvantagens instrucionais usadas para ensinar um conteúdo específico, e de

maneira posterior, identificar quais os métodos aplicáveis que melhor se adaptam ao ensino.

Por fim, o Conhecimento Curricular pertencente ao MKT, concerne ao Conhecimento do Currículo e dos conteúdos que são lecionados na educação, bem como esses conteúdos podem ser relacionados a outros conteúdos.

Após a elaboração dos domínios e subdomínios, com base em tal referencial, foram elencadas as características que compunham cada subdomínio. Estes são apresentados no quadro 5 a seguir, juntamente às suas características e os códigos.

QUADRO 5 - Domínio do Conhecimento do Conteúdo e Pedagógico do Conteúdo

Conhecimento do Conteúdo – CK		
Subdomínios	Características	Referência
Conhecimento de Matemática (CdM)	A1: ter compreensão e domínio da matemática lecionada na educação básica A2: resolver problemas matemáticos corretamente A3: reconhecer uma resposta errada A4: usar termos, notações e linguagem matemática corretamente A5: reconhecer uma definição imprecisa A6: explicar e justificar conceitos e ideias matemáticas A7: reconhecer quando uma resolução particular é válida A8: conhecer diferentes formas de solucionar um problema A9: reconhecer os entes matemáticos envolvidos no uso de representações matemáticas A10: conhecer e relacionar os diferentes entes matemáticos A11: relacionar o conhecimento matemático à outras áreas de conhecimento A13: utilizar de diferentes representações para entes matemáticos	Adaptado de: Ball <i>et al.</i> (2008), Hurrell (2013) e Cutrera (2013).
Conhecimento sobre Matemática (CsM)	B1: reconhecer como é o processo de avaliação e validação o conhecimento matemático B2: reconhecer e entender a importância da divulgação da pesquisa em meios de comunicação	Adaptado de: Shulman (1986, 1987), Kuhn (1977) e Cutrera (2013).

	<p>B3: reconhecer e entender que o contexto social, político e científico interfere na produção do conhecimento matemático</p> <p>B4: entender e reconhecer como são organizados os conceitos matemáticos</p> <p>B5: reconhecer a inexistência de verdades absolutas na matemática</p> <p>B6: sabe a importância da comunidade científica em seus diversos níveis</p> <p>B7: reconhecer e entender o trabalho individual e coletivo na produção do conhecimento matemático</p> <p>B8: entender e reconhecer as distintas formas de conceber o conhecimento</p> <p>B9: entender que existem pessoas que não receberam os créditos por suas produções científicas</p> <p>B10: entender e reconhecer a linearidade e não linearidade do desenvolvimento do conhecimento matemático</p> <p>B11: reconhecer a universalidade dos símbolos matemáticos</p>	
Conhecimento Pedagógico do Conteúdo – PCK		
Subdomínios	Características	Referências
Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS)	<p>C1: prever o que os estudantes acharão fácil ou difícil ou conhecer as dificuldades que os estudantes frequentemente apresentam</p> <p>C2: prever o que os estudantes acharão interessante e motivador</p> <p>C3: conhecer os equívocos comuns que os estudantes possuem quando estudam um determinado tópico da matemática</p>	Adaptado de: Ball <i>et al.</i> (2008) e Hurrell (2013)
Conhecimento do Conteúdo e Ensino (KCT)	<p>D1: conhecer a sequência que os conteúdos matemáticos são comumente lecionados na educação básica</p> <p>D2: saber selecionar exemplos adequados para aprofundar o conteúdo matemático</p> <p>D3: saber selecionar representações apropriadas para ilustrar o conteúdo</p>	Adaptado de: Ball <i>et al.</i> (2008) e Hurrell (2013)
Conhecimento Curricular (CC)	<p>E1: conhecer o currículo e os conteúdos matemáticos que são lecionados na educação básica</p> <p>E2: articular como tópicos matemáticos que estão sendo ensinados em um ano escolar se relacionam com outros lecionados posteriormente.</p>	Adaptado de: Ball <i>et al.</i> (2008) e Hurrell (2013)

Fonte: Adaptado de Shulman (1986, 1987), Kuhn (1977), Ball *et al.* (2008), Cutrera (2013) e Hurrell (2013)

Tendo como base as características apresentadas neste quadro, buscamos identificar nos comentários dos participantes indícios da mobilização dos conhecimentos apresentados acima. Nesse sentido, apresentamos os

excertos das falas dos participantes da investigação no processo analítico que foram evidenciados no decorrer dos encontros com o grupo de estudos. Os excertos foram destacados com grifos em negrito, seguidos da identificação dos domínios do conhecimento e a identificação dos participantes que evidenciaram tais conhecimentos.

Apresentaremos, na próxima seção, uma breve descrição acerca dos encontros, com intuito de facilitar a leitura das análises e dos resultados.

5.5 DESCRIÇÃO DOS ENCONTROS

5.5.1 O encontro inicial

O primeiro encontro foi realizado no dia 05 de maio e teve o intuito de que os participantes se apresentassem e o pesquisador explicasse a pesquisa. Tal encontro também foi utilizado para que o pesquisador, juntamente com os participantes, pudesse escolher as melhores datas possíveis para a realização dos demais encontros.

Foi ainda solicitado que os participantes se dividissem em três subgrupos, de modo que cada subgrupo ficasse responsável pela apresentação de um dos episódios históricos, dentre aqueles já selecionados anteriormente pelo pesquisador. Os episódios históricos estabelecidos foram:

- i) o surgimento das geometrias não-euclidianas
- ii) o surgimento do cálculo infinitesimal
- iii) o surgimento dos números complexos.

O quadro, a seguir, apresenta os episódios históricos escolhidos pelos subgrupos.

QUADRO 6 - Divisão dos subgrupos e escolha dos episódios

Episódios históricos	Participantes responsáveis
Surgimento das geometrias não-euclidianas	P3 e P8
Surgimento do cálculo infinitesimal	P2, P5, P6 e P9

Fonte: Autoria própria do pesquisador

Conforme já apontado, os encontros subsequentes foram voltados para as discussões das apresentações feitas dos episódios históricos e o último encontro com os participantes foi voltado a um fechamento das discussões que foram feitas durante o grupo de estudos.

5.5.2 Encontro 2: O surgimento das geometrias não-euclidianas

No dia 19 de maio de 2022, às 10 horas da manhã, o grupo de estudos se reuniu com o intuito de discutir o primeiro episódio histórico, escolhido pelo pesquisador, que retrata, como visto acima, o surgimento das geometrias não-euclidianas.

A escolha desse episódio, em especial, tinha como objetivo discutir com os participantes da investigação, questões referentes a história deste conteúdo, a existência de verdades absolutas na Matemática, as formas de validação do conhecimento na Matemática e, por fim, discutir a percepção de como é desenvolvido o trabalho de um matemático.

Nesse encontro, os participantes P3 e P8 formaram a equipe que se propôs a apresentar perante todos os demais participantes e o pesquisador, suas considerações acerca desse episódio específico. Os participantes P2, P4, P5, P6 e P9⁸, juntamente com a professora orientadora, estavam presentes para contribuir com suas reflexões acerca do tema abordado.

A equipe responsável pela introdução do episódio histórico elaborou uma apresentação na qual utilizavam *slides*, para destacar as informações apresentadas nos textos disponibilizados que eles julgavam mais relevantes para a compreensão acerca do surgimento histórico das geometrias não-

⁸ As participantes P1 e P7 não puderam participar deste encontro, sendo que elas avisaram, de forma antecipada, o pesquisador de suas ausências.

euclidianas. A apresentação, também, abordou aspectos referentes a como que esse conteúdo poderia ser ensinado na educação básica.

A apresentação da equipe durou aproximadamente 25 minutos e, durante esse momento, alguns conhecimentos de professores foram evidenciados, conforme será discutido no capítulo subsequente.

Posteriormente a apresentação desenvolvida pelos participantes P3 e P8, o investigador mediou uma discussão com os demais participantes presentes nesse encontro. Dessa maneira, foram realizados diversos questionamentos acerca das informações da apresentação, do episódio específico, de aspectos da natureza do conhecimento matemático e questões relacionadas às possíveis contribuições que esse encontro proporcionou para uma melhor formação docente dos participantes.

5.5.3 Encontro 3: O surgimento do cálculo infinitesimal

No dia, 26 de maio, às 10 horas da manhã, o grupo de estudos se reunia novamente para discutir o segundo episódio histórico, separado de maneira antecipada pelo pesquisador, a saber: o surgimento do cálculo infinitesimal. A equipe responsável pela apresentação, escolheu no primeiro encontro esse tema.

A escolha deste episódio, por parte do pesquisador, tinha como objetivo, discutir com os participantes da investigação conceitos filosóficos da matemática e, diante disso, ressaltar como as formas de se entender o conhecimento influenciam na forma pela qual o próprio conhecimento é produzido. Nessa perspectiva, o intuito desse episódio foi discutir os aspectos históricos e algumas correntes filosóficas, em especial, do racionalismo e do empirismo na matemática, retratados nos textos, respectivamente, pelos estudiosos Gottfried Leibniz e Isaac Newton que estavam envolvidos, de forma direta, no surgimento do cálculo infinitesimal.

A equipe responsável pela apresentação desse episódio foi formada pelos participantes P2, P5, P6 e P9. Também estavam presentes durante esse

encontro os participantes⁹ P1, P3 e P8, juntamente com a professora orientadora.

A equipe apresentou o tema escolhido por eles, utilizando *slides*, nos quais foram expostos trechos dos textos indicados para a leitura que mais chamaram-lhes a atenção. Cada participante ficou responsável por discutir um trecho que mais se sentia confortável. A apresentação da equipe durou cerca de 25 minutos.

Posteriormente à apresentação da equipe, o pesquisador mediu uma discussão os participantes que estavam presentes no encontro, de modo a questioná-los sobre reflexões que esse episódio, em específico, poderia contribuir para sua formação docente, tanto no âmbito matemático quanto no âmbito pedagógico.

Vale destacar que, por motivo de horário disponível, este encontro foi interrompido antes do término das questões e discussões previstas pesquisador. Sendo assim, as questões que faltaram ser abordadas acerca do episódio que descreve o surgimento do cálculo infinitesimal, foram propostas pelo pesquisador minutos antes do início do próximo encontro.

5.5.4 Encontro 4: O surgimento dos números complexos

No dia 09 de junho, às 10 horas da manhã, o grupo de estudos reunia-se, uma vez mais, com objetivo de discutir com os participantes da investigação reflexões acerca do surgimento dos números complexos.

O intuito, por parte do pesquisador, para que esse episódio histórico fosse estudado era o desenvolvimento de discussões acerca de como é produzido o conhecimento matemático e, além disto, abordar aspectos referentes a como esse conhecimento é validado dentro da comunidade matemática.

A equipe responsável pela apresentação histórica desse episódio foi formada pelos participantes P1, P4 e P7, que fizeram uso de *slides* para

⁹ Os participantes P4 e P7 não puderam estar presentes nesse encontro, porém, de maneira antecipada, avisaram o pesquisador desta investigação.

exemplificar e discutir as principais informações, que julgaram ser importantes, para a compreensão do surgimento dos números complexos. Também estavam presentes nesse encontro, os participantes¹⁰ P2, P5, P6, P8 e P9 e a professora orientadora.

Nesse sentido, a equipe apresentou as principais contribuições para esse episódio em aproximadamente 25 minutos, de modo que cada membro da equipe retratou sobre um momento histórico que mais sentiu-se confortável.

Seguidamente ao término da apresentação, foi mediada uma discussão com os participantes da pesquisa que estavam presentes no encontro, por parte do pesquisador. As questões foram voltadas a entender dos participantes quais foram as contribuições, tanto pedagógicas como matemáticas, que esse episódio histórico possibilitou para suas formações docentes.

5.5.5 Encontro 5: Fechamento das discussões

O último encontro do grupo de estudo ocorreu no dia 07 de julho sendo realizado de maneira presencial no Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade em que os participantes estudavam.

A escolha por ser feito de maneira presencial¹¹, deve-se ao fato de os estudantes participantes da investigação optarem, tendo em vista que a vacinação contra o vírus SARS-CoV-2 ter abrangido grande parte da população do país e, juntamente a isso, o número de casos de infecção pelo vírus apresentar uma constante queda.

O encontro tinha como objetivo, discutir com os participantes da pesquisa reflexões gerais sobre tudo que foi abordado durante os encontros anteriores, evidenciando questões que, de certa forma, foram pouco discutidas no decorrer

¹⁰ O participante P3 não pode estar presente nesse encontro, porém, de maneira antecipada, avisou o pesquisador desta investigação.

¹¹ Ressaltamos que, com o fato de o encontro ter acontecido de maneira presencial, todos os participantes da investigação acataram as medidas de isolamento, higienização e utilização de máscaras, propostas pela instituição e pelas autoridades de saúde e controle da pandemia.

das reuniões. Para tal encontro, estavam presentes os participantes P2, P3, P4, P6, P8 e P9, juntamente com a professora orientadora.

Após a apresentação do procedimento metodológico desenvolvido para a presente investigação, a próxima seção, tem como objetivo destacar os conhecimentos de professores que foram evidenciados pelos estudantes ao longo do processo investigativo no grupo de estudos.

6 OS CONHECIMENTOS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EVIDENCIADOS NO GRUPO DE ESTUDOS

O presente capítulo tem o intuito apresentar a análise dos dados da investigação, destacando nos relatos dos licenciandos os conhecimentos mobilizados por eles no estudo e discussão dos episódios históricos referentes ao surgimento das geometrias não-euclidianas, do cálculo infinitesimal, dos números complexos e do fechamento dos encontros propostos.

Antes de discutir os conhecimentos de professores de Matemática que foram evidenciados no decorrer dos encontros, entendemos ser relevante descrever brevemente o perfil dos participantes envolvidos na investigação.

6.1 DESCRIÇÃO DOS PARTICIPANTES

Os participantes, no momento da investigação, tinham entre 20 e 30 anos, estavam todos matriculados no curso de Matemática Licenciatura da Universidade e haviam cursado mais da metade do curso.

A maioria dos participantes estava cursando a primeira graduação, sendo as exceções P7 e P8, que já haviam estudado em outros cursos de ensino superior, mesmo que não tenham se graduado, como é o caso de P7.

Além disto, pouco mais da metade dos participantes haviam escolhido a licenciatura em Matemática como primeira opção, conforme mostra o quadro 6 a seguir.

QUADRO 7 - Resposta sobre a primeira opção de curso

Matemática Licenciatura era minha primeira opção.	Matemática Licenciatura não era minha primeira opção.	Matemática (licenciatura ou bacharelado) era minha primeira opção.
P1, P4, P6, P8, P9	P5, P7	P2, P3

Fonte: Autoria própria do pesquisador, com base em dados da pesquisa.

Com relação a opção pelo curso de Licenciatura em Matemática, P1 ressalta:

Excerto 1: *[...] e o curso de matemática Licenciatura era minha primeira opção, mas eu não joguei a minha nota do SISU para matemática licenciatura, porque minha família não queria que eu fizesse Matemática Licenciatura... eu joguei para outra opção, mas depois no meio do ano eu fiz transferência pra matemática licenciatura (P1, GDE1).*

Sendo assim, a participante tinha desde o início a convicção de que gostaria de cursar Matemática Licenciatura, porém por pressão familiar, optou-se para outro curso e transferiu-se para Matemática Licenciatura, somente após alguns meses.

No relato abaixo, o participante P2 evidencia que Matemática era sua primeira opção, mas que não conhecia a diferença entre Licenciatura e Bacharelado. Essa falta de diferenciação também estava presente no discurso de P3.

Excerto 2: *[...] eu não vou falar que curso de matemática licenciatura foi minha primeira opção, vou falar que matemática foi. Eu não sabia a diferença entre matemática bacharel e licenciatura, tanto que no segundo período eu tentei fazer uma mudança, [...] que acabou atrasando um pouco as coisas, mas não foi nada grave (P2, GDE1).*

Quando questionados sobre a relação que possuíam com a História da Matemática, apenas os participantes P1 e P3 relataram que não haviam nenhuma relação com área de conhecimento, entretanto P3 declarou que possuía um apreço pela História. Já os demais participantes relataram interesse por essa área de conhecimento. Diante disso, alguns participantes, como é o caso de P5, P6 e P9, evidenciaram que HM é a área de conhecimento que estudavam no trabalho de conclusão de curso (TCC), e no caso de P5, também na pesquisa de Iniciação Científica (IC).

Já com relação ao motivo pelo qual aceitaram participar do grupo de estudos e da pesquisa, P1 relatou que quer entender os motivos pelo qual não possuía interesse pela HM. Já os participantes P2, P5, P6 e P7, sentiram-se interessados pela temática abordada no grupo de estudos, e, também, por se sentirem interessados pela disciplina de HM, considerando que as discussões que dos encontros poderiam servir para um maior aprofundamento de seus

conhecimentos. Para P8, o motivo que o fez participar estava relacionado as pessoas que iriam compor o grupo de estudos. Já P3 ressaltou a oportunidade de participar de uma pesquisa, segundo o participante:

Excerto 3: *[...] é só agora, nesses últimos anos, que eu estou tendo mais oportunidades de projetos de estudos, sabe? Conhecer mais o que é a graduação, o que é uma área de pesquisa, então sempre [que] essas pesquisas que estão acontecendo, e sempre que surge a oportunidade, eu estou tentando participar, porque eu acho que isso vai agregar bastante conhecimento para mim (P3, GDE1).*

Obtivemos, também, informações dos participantes no que diz respeito às suas experiências como docentes. Todos os participantes já haviam tido alguma experiência em sala de aula. Essas experiências docentes eram referentes: i) ao estágio supervisionado, que é obrigatório para os licenciandos em Matemática; ii) à programas de formação docente, como é o caso do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID; (iii) ao curso interno do programa de Matemática da Universidade que auxiliava estudantes do ensino médio e fundamental, a conquistarem medalhas olímpicas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP; (iv) às monitorias internas na universidade e, por fim, v) à experiência profissional docente.

O quadro abaixo apresenta uma síntese das experiências dos participantes da pesquisa em relação as experiências docentes.

QUADRO 8 - Experiência docente

Participantes	Estágio Supervisionado	Programas de formação docente	Curso interno (OBMEP)	Monitoria	Docência
P1	X	X			
P2	X	X			
P3	X		X		
P4	X				
P5	X				X
P6	X	X		X	
P7	X	X			X
P8	X		X		
P9	X	X			

Fonte: Autoria própria do pesquisador

Destacamos também, que enquanto os participantes P5, P7 e P8 já haviam cursado a disciplina de História da Matemática, os participantes P1, P2, P3, P4, P6 e P9 estavam cursando a disciplina naquele momento.

Por fim, perguntamos aos participantes qual a pretensão que tinham após o término do curso. Os participantes P1, P2, P6 e P7, alegaram que pretendiam fazer um mestrado em educação matemática, posteriormente ao término da graduação. Já P3 e P5, possuíam dúvidas relacionadas a uma segunda graduação ou o mestrado em educação. Finalmente, o participante P8, indicou que possuía o desejo de trabalhar em um cargo público, entretanto, afirmou que enquanto não consegue esse objetivo, pode prestar o exame para o mestrado na área de exatas.

Diante dessas respostas, percebemos que nenhum dos participantes que aceitaram participar da investigação tinha como intuito trabalhar como professor da educação básica imediatamente após o término da graduação.

Após tal relato acerca do perfil dos participantes, a próxima seção tem como intuito analisar os conhecimentos evidenciados pelos participantes ao longo dos encontros realizados.

6.2 ANALISANDO OS CONHECIMENTOS DO CONTEÚDO (CK)

Nessa seção, analisaremos o domínio do Conhecimento do Conteúdo. Os subdomínios de conhecimentos evidenciados pelos participantes acerca desse domínio foram: o Conhecimento de Matemática (CdM) e Conhecimento sobre Matemática (CsM).

6.2.1 Analisando aspectos relacionados ao Conhecimento de Matemática (CdM)

Um dos subdomínios do Conhecimento do Conteúdo que consideramos, nessa pesquisa, é o Conhecimento de Matemática (CdM).

As características do CdM que foram consideradas nessa investigação, conforme já apontado, são: A1: ter compreensão e domínio da matemática lecionada na educação básica; A2: resolver problemas matemáticos corretamente; A3: reconhecer uma resposta errada; A4: usar termos, notações e linguagem matemática corretamente; A5: reconhecer uma definição imprecisa; A6: explicar e justificar conceitos e ideias matemáticas; A7: reconhecer quando uma resolução particular é válida; A8: conhecer diferentes formas de solucionar um problema; A9: reconhecer os entes matemáticos envolvidos no uso de representações matemáticas; A10: conhecer e relacionar os diferentes entes matemáticos; A11: relacionar o conhecimento matemático à outras áreas de conhecimento; e A12: utilizar de diferentes representações para entes matemáticos.

No encontro realizado acerca do surgimento das geometrias não-euclidianas, o Conhecimento de Matemática foi evidenciado em 11 oportunidades. Apresentaremos, a seguir, os excertos das falas e comentários dos participantes juntamente com os momentos em que foram possíveis que os conhecimentos fossem evidenciados.

Um momento da discussão que esse conhecimento foi evidenciado deu-se no início da apresentação do grupo, quando o participante P8 considerou relevante diferenciar as ideias associadas a axioma, postulado e teorema, como será apresentado no excerto 1, a seguir:

Excerto 1 [CdM: A10] – *Antes de começar só relembrando algumas coisas básicas que é o axioma. **No caso o axioma, é um conceito matemático, que no caso não precisa de prova, não precisa de demonstração para ser verdade. [...] E o teorema, ele é... ele é uma dedução lógica que pode ser provada, a partir de deduções baseadas em axiomas e postulados** (P8, GDE2, grifo nosso).*

Perante esse excerto, nota-se que o participante evidencia a característica A10: *conhecer e relacionar os diferentes entes matemáticos*, de modo que conhece diferentes entes matemáticos utilizados na estruturação de uma teoria matemática. Após esse momento, o participante apresenta alguns exemplos de axiomas e postulados existentes na matemática.

Outro momento, que podemos destacar, que foi possível evidenciar indícios do CdM, foi quando estávamos discutindo acerca dos postulados existentes na introdução do estudo das geometrias euclidianas, especificamente, o quinto postulado. Os participantes já haviam relatado que não tinham conhecimento dessas geometrias e, diante disso, tiveram dificuldades para entender, de fato, o que seriam as geometrias não-euclidianas.

Nesse contexto, visto que estava sendo a primeira vez em que os participantes conheceram estudos voltados às geometrias não-euclidianas, eles foram questionados se, de certo modo, essas geometrias desafiavam os “sentidos” que eles possuíam da matemática ou até mesmo da geometria que conheciam. Os participantes, de maneira unânime, ressaltaram que sim, as geometrias não-euclidianas, desafiam os sentidos matemáticos que possuíam até aquele momento, pois, segundo eles, é “contra intuitivo”.

Tendo essa discussão como base, e ao ouvir as falas e comentários dos outros participantes, P3 evidencia o seguinte conhecimento, destacado no excerto abaixo:

Excerto 2 [CdM: A1] – *Eu acho que vai contra... é difícil você fazer matemática porque vai contra. Por exemplo, você vai aprender que a geometria euclidiana é assim, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180, aí você vai estudar outra matéria, aí o professor te fala “ó o que você aprendeu aqui está certo, mais existe uma outra geometria que dependendo dos 3 pontos que você pegar vai dar muito mais do que 180 graus”* (P3, GDE2, grifo nosso).

Perante o exposto, entendemos que P3 evidencia o Conhecimento de Matemática, especificamente a característica A1: *ter compreensão e domínio da matemática lecionada na educação básica*, ao relatar que, tendo como base a geometria euclidiana, um triângulo possui a soma dos ângulos internos sendo 180 graus e, além disso, compreender que em geometrias que não são consideradas euclidianas, a soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser diferente de 180 graus, especificamente com relação à geometria não-euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que 180º graus. Diante disso, o participante evidencia ter a compreensão de conteúdos matemáticos que são estudados tanto na educação básica quanto no curso de

Matemática Licenciatura da Universidade em que a presente investigação ocorreu.

Esse excerto exposto por P3, evidencia como o estudo de episódios históricos da Matemática pode auxiliar os futuros professores na ampliação dos conteúdos matemáticos, como neste caso as diferenças entre a soma dos ângulos internos de um triângulo em diferentes geometrias.

No encontro acerca do surgimento do cálculo infinitesimal o CdM foi evidenciado em oito momentos. Apresentaremos alguns excertos das falas e comentários dos participantes da investigação, juntamente com o contexto que permitiu que tais conhecimentos fossem evidenciados.

Vale destacar que todos os participantes já haviam cursado a disciplina Cálculo I, que aborda conceitos relacionados ao estudo do cálculo diferencial e integral. Entretanto, os participantes relataram que a abordagem histórica não foi estudada nesta disciplina. Os participantes P5, P7 e P8, como destacado anteriormente, já cursaram a disciplina de HM e, dessa forma, tiveram seu primeiro contato com o estudo histórico do cálculo infinitesimal no decorrer de tal disciplina. Os participantes P1, P2, P3, P4, P6 e P9 estavam cursando durante a realização da pesquisa, a disciplina de História da Matemática, porém tiveram a oportunidade de ter o primeiro contato com o surgimento do cálculo infinitesimal no decorrer da investigação.

Dessa forma, um dos momentos em que o CdM foi evidenciado no estudo do surgimento do cálculo infinitesimal, o pesquisador indagou os participantes se, para eles através das leituras indicadas, existia alguma semelhança entre os estudos de Arquimedes, Eudoxo e Kepler. Sendo assim, o participante P2, evidencia que a relação por ele identificada refere-se à ideia intuitiva de integral.

Diante desta fala de P2, a professora orientadora, que também estava presente durante os encontros, questiona os participantes se esta relação dita pelo participante foi identificada por eles ou se, de alguma forma, foi mostrada para eles. Nesse momento, a participante P5 responde o questionamento relatando que tal relação da disciplina de Cálculo I com o que foi lido nos textos não foi apresentada. Sendo assim, a própria participante afirmou que associou

os textos que destacavam o contexto histórico do surgimento do cálculo infinitesimal com a disciplina de Cálculo.

No decorrer dessa discussão, P2 e P3 manifestam características do CdM, especificamente A6: *explicar e justificar conceitos e ideias matemáticas*, como relatado no excerto 3 abaixo:

Excerto 3 [CdM: A6] – A gente é apresentado, é dividido em retângulo [o cálculo da área sob a curva dada], mas depois acaba. Mas, por exemplo, a ideia do Arquimedes de achar a área da circunferência [se referindo a parábola] por meio de triângulos... A gente vai assimilando, então eles [triângulos] vão tudo diminuindo de tamanho, até ser tudo igual. Então, é uma relação que a gente percebe, não necessariamente é apresentada para a gente (P2, GDE3, grifo nosso).

[...] Quando a gente aprende a integral, que é parte do cálculo. **As primeiras ideias que a gente tem de integral é por aproximação de áreas também. Quanto mais partições você cria, você consegue aproximar mais a área. Então, você pode aproximar o círculo por triângulos, ou seja, você está aproximando a área cada vez mais desse círculo.** Então, eu associo os dois [as ideias estudadas na disciplina de cálculo com a ideia apresentada por Arquimedes], essa ideia de aproximar. Então, você estuda essa ideia dos pensadores e faz essa ligação (P3, GDE3, grifo nosso).

Nesse excerto, entendemos que o participante P2 consegue explicar e justificara conceitos e ideias matemática, tendo em vista a proximidade entre as ideias de integração propostas pelos estudiosos que foram citados acima.

Estes excertos manifestados por P2 e P3 convergem, em certo momento, com a visão expressa por Balestri e Cyrino (2010) de que o estudo da HM contribui para compreensão de matemática como uma área de conhecimento “[...] auxiliando o futuro professor a superar a visão fragmentada com que frequentemente vê a matemática” (p. 112). De acordo com os autores, ao conhecer a HM os futuros professores também terão a oportunidade de conhecer mais sobre a matemática e, neste caso, identificar semelhanças em pensamentos de matemáticos desenvolvidos em distintos momentos históricos.

Outro momento, durante o encontro acerca do surgimento do cálculo infinitesimal, em que o CdM foi evidenciado, o pesquisador questiona os participantes se eles entendiam que a maneira de se fazer matemática alterou

depois do desenvolvimento do cálculo, ou se eles consideravam que a forma de se fazer matemática se manteve a mesma.

Após algum tempo de reflexão, alguns participantes iniciaram suas observações com certas incertezas em relação aos próprios comentários. Dentre essas falas e comentários, P3 evidencia o que consideramos uma das características do Conhecimento de Matemática, A11: *relacionar o conhecimento matemático à outras áreas de conhecimento*, ao relatar que:

Excerto 4 [CdM: A12] – *Eu tendo que, por exemplo, começou a ser desenvolvido lá trás, né? As primeiras ideias do cálculo. Mas a partir do século 18, 19 até o século 20, não só a matemática, mas como todas as outras ciências, começou também há ter um destaque, começou a ser bastante estudada. **Acho que a matemática teve um boom nessa época, ela começou a desenvolver muito mais rápida, ela começou a ser muito mais trabalhada, não só no cálculo, mas também em outras áreas, porque ela começou a ser útil em outras áreas também, como por exemplo na astronomia, no estudo de corpos celestes e tudo mais, e também nas engenharias. Então, a matemática, através de todas estas outras ciências, ela necessitou de uma evolução rápida também. Então, acho que uma coisa levou a outra, e isso vale pra tudo, eu acho** (P2, GDE3, grifo nosso).*

Nesse excerto 4, evidenciado pelo participante P3, ele relaciona o conhecimento matemático a outras áreas de conhecimento, como destacado pelo participante, a relação do conhecimento matemático com o estudo de corpos celestes e da engenharia. Segundo o participante, o desenvolvimento do conhecimento matemático também auxilia o desenvolvimento de outras áreas científicas, embora a utilização da Matemática nas áreas de conhecimento citadas pelo participante, não necessariamente iniciaram entre os séculos 18 e 19. Tal excerto também pode ser entendido de modo que para P2, o motivo do desenvolvimento da Matemática ocorreu devido a sua aplicabilidade em outras áreas de conhecimento, apresentando, assim, a Matemática como uma ferramenta que auxilia outras áreas de conhecimento a se desenvolverem.

Conforme é ressaltado por Batista (2007) e Araman (2011), os estudos com enfoque históricos possibilitam reflexões para os professores acerca das relações existentes entre distintas áreas de conhecimento científico e como o conhecimento desenvolvido em determinada área de conhecimento colabora para o desenvolvimento científico de outra. Nesse sentido, Batista (2007)

descreve que o trabalho histórico defendido de maneira não linear, ou seja, que apresenta as muitas idas e vindas que ocorrem na produção e sistematização de um conhecimento de âmbito científico, que é possível

[...] compreender como se dá a produção de um determinado conhecimento que se desenvolve por meio do estabelecimento de articulações com outros assuntos, inserindo-se em uma teoria mais abrangente e, conseqüentemente, num corpo maior da ciência estudada (BATISTA, 2007, p. 269).

Já no encontro sobre o surgimento dos números complexos o CdM foi evidenciado nas falas e comentários dos participantes em 5 momentos. Nos excertos abaixo, apresentaremos as falas e comentários dos participantes que evidenciaram este conhecimento ao longo do encontro.

O CdM foi evidenciado inicialmente, no momento em que o pesquisador os questionava se os participantes já possuíam conhecimento do episódio histórico que relatava o surgimento dos números complexos. Desta forma, alguns participantes, como é o caso de P1, já cursou a disciplina de Variável Complexa, obrigatória para os estudantes do curso de Matemática Licenciatura na Universidade em que foi desenvolvida a investigação. Outros participantes relataram possuir conhecimento sobre o que são os números complexos, pois já haviam estudado tal conteúdo durante a educação básica. E, por fim, alguns participantes já possuíam a noção do surgimento dos números complexos, pois já cursaram a disciplina de História da Matemática, também obrigatória na Universidade.

Sendo assim, o pesquisador indaga os participantes se para eles, o surgimento dos números complexos ocorreu rapidamente ou foi através de muito esforço de diversos matemáticos de diferentes contextos históricos. P1 ressalta que para ela o surgimento dos números complexos envolveu muito tempo e com numerosas discussões. A participante finaliza manifestando em sua fala características do CdM, em especial a característica A1: *ter compreensão e domínio da matemática básica*, ao afirmar que:

Excerto 5 [CdM: A1] – *Então quando vão ensinar raiz quadrada, Bhaskara, esses conceitos, eles já ensinam que o delta não pode ser negativo, eles já têm essa ideia que não tem negativo, só que quando vê número complexo é uma coisa muito nova* (P1, GDE4, grifo nosso).

Nessa fala evidenciada por P1, nota-se que a participante possui o entendimento e compreensão da Matemática estudada na Educação Básica, principalmente no que se refere ao estudo das raízes de uma função quadrática.

Desse modo, encontramos em Barbin (2000) a afirmação de que a importância do estudo histórico da matemática, volta-se ao fato de que ela pode oportunizar para os professores e futuros professores a visão do que é a matemática e, conseqüentemente, colaborar na compreensão de conceitos e teorias matemáticas, evidenciando, por exemplo, no que diz respeito ao surgimento dos números complexos.

Outro momento em que o CdM foi evidenciado, estávamos discutindo os fatores que possibilitaram a aceitação dos números complexos na comunidade matemática. Diante disso, o participante P6 evidencia que para ele, com base nas leituras indicadas, o fato de ter uma representação geométrica auxiliou para que os números complexos fossem aceitos naquela época, visto que nesse momento histórico, representações geométricas eram fator de peso no que diz respeito a aceitação de alguma nova área de estudos na matemática.

Nessa lógica, o pesquisador questionou os participantes, se atualmente para uma área de conhecimento matemático ser aceito matematicamente é necessário que se tenha uma representação geométrica. Diante da indagação, o participante P2, destaca o que consideramos como sendo uma das características presente no CdM, ao conseguir *A6: explicar e justificar conceitos e ideias matemáticas*, como ressaltamos no excerto abaixo:

Excerto 6 [CdM: A6]: *Hoje em dia, acho que não é tão preciso, principalmente por causa do avanço, tanto que já saiu do tridimensional, então não dá para fazer um apelo geométrico mais. Lógico, não é para tudo, mas vale para algumas áreas mais específicas (P2, GDE4, grifo nosso).*

O participante, nesse excerto, destaca ter conhecimento das dificuldades de utilizar do apelo geométrico em construções matemáticas em mais de três dimensões. Além disso, P2 evidencia a noção de que um ente matemático não necessariamente precisa de uma prova geométrica para ser considerado aceito na comunidade matemática.

Nesse sentido, Araman (2011) evidencia que a contemplação de discussões dos aspectos históricos na matemática, pode contribuir para uma melhor compreensão dos conteúdos matemáticos por parte do professor, como também para o seu próprio desenvolvimento, suas justificativas e relações com outras áreas de conhecimento.

Por fim, no último encontro com o grupo de estudos, que tinha como intuito fazer um fechamento com os estudantes participantes desta investigação acerca dos episódios históricos que foram abordados durante a pesquisa, o CdM foi evidenciado em 7 momentos.

Em um desses momentos em que o CdM foi evidenciado, estávamos discutindo se o estudo dos desses episódios históricos de alguma forma mudaram a compreensão dos participantes sobre como eles enxergavam o fazer matemática.

Nesse sentido, o excerto abaixo destaca a fala do participante P9 em relação à esta questão:

Excerto 7 [CdM: A11] – *Por eu já estudar um pouco à HM há algum tempo, acho que tenho essa noção que a gente não sabe muito bem como surgiu tal coisa, como ela foi desenvolvida, e quando a gente conhece, a gente tem uma proporção muito maior sobre isso. Então, eu já tenho uma noção que, tipo assim, a gente não conhece tal coisa, mas a gente sabe que, por exemplo, os logaritmos que é a área que eu estudo, que hoje ele é usado totalmente para um fim que ele não foi desenvolvido. Ele foi desenvolvido para facilitar os cálculos, e hoje em dia [...] não tem mais esse objetivo, porque tem outras coisas que facilitam os cálculos. [...], hoje em dia a gente usa essas coisas para outras coisas, para outros fins, outros meios (P9, GDE5, grifo nosso).*

O participante P9, que já desenvolveu uma pesquisa de IC na área de HM, evidencia compreender que o conhecimento matemático pode auxiliar outras áreas de conhecimento. Tal pensamento, corrobora com Araman (2011) que afirma que a reconstrução histórica auxilia na compreensão dos professores a notar inter-relações que o conhecimento matemático possui com outras áreas de conhecimento.

Diante do exposto, corroboramos com Batista e Luccas (2004) que afirmam que o estudo histórico, especificamente, matemático, pode proporcionar

aos professores e, no nosso caso, aos futuros professores, relacionar conceitualmente e filosoficamente conteúdos matemáticos relacionados ao surgimento e desenvolvimento, seu(s) criador(es), o processo de sistematização, entre outros aspectos.

Nesse ponto de vista, as autoras evidenciam que a possibilidade de entender o motivo de determinado matemático ou matemática desenvolveu uma teoria e com passar do tempo tal teoria “[...] contribui de maneira decisiva para a organização e o desenvolvimento de alguns setores da sociedade atual parece ser um estímulo plausível para conhecê-la histórica e filosoficamente” (BATISTA; LUCCAS, 2004, p. 124).

A próxima seção, tem como objetivo apresentar os Conhecimentos sobre Matemática (CsM), evidenciados durante os encontros com o grupo de estudos.

6.2.2 Analisando aspectos relacionados ao Conhecimento sobre Matemática (CsM)

O Conhecimento sobre a Matemática, na presente investigação, se configura como um subdomínio do Conhecimento do Conteúdo refere-se ao domínio que o professor possui acerca dos conceitos, estruturas e conteúdos próprios da Matemática.

Consideramos, nesse caso, as seguintes características do CsM, são elas: B1: reconhecer como é o processo de avaliação e validação o conhecimento matemático; B2: reconhecer e entender a importância da divulgação da pesquisa em meios de comunicação; B3: reconhecer e entender que o contexto social, político e científico interfere na produção do conhecimento matemático; B4: entender e reconhecer como são organizados os conceitos matemáticos; B5: reconhecer a inexistência de verdades absolutas na matemática; B6: sabe a importância da comunidade científica em seus diversos níveis; B7: reconhecer e entender o trabalho individual e coletivo na produção do conhecimento matemático; B8: entender e reconhecer as distintas formas de conceber o conhecimento; B9: entender que existem pessoas que não receberam os créditos por suas produções científicas; B10: entender e

reconhecer a linearidade e não linearidade do desenvolvimento do conhecimento matemático; e B11: reconhecer a universalidade dos símbolos matemáticos.

Diante disso, o CsM foi o conhecimento mais evidenciado pelos participantes durante o decorrer do encontro acerca do surgimento das geometrias não-euclidianas. Ao todo esse conhecimento foi evidenciado em 14 momentos nas falas e comentários dos participantes. A seguir, apresentaremos os momentos que foram possíveis a mobilização desse conhecimento.

Em um desses momentos, estávamos questionando os participantes acerca do material indicado para a leitura. O participante P3 destacou que o livro¹² indicado trouxe uma compreensão mais aprofundada sobre o surgimento das geometrias não-euclidianas. Nessa perspectiva, P3 evidencia que dos materiais indicados o que mais considerou interessante foi o artigo que ressaltava maneiras de aplicar aspectos relacionados a esse conteúdo na educação básica.

A partir disso, o participante P8 evidencia uma das características existentes no CsM, *B10: entender e reconhecer a linearidade e não linearidade do desenvolvimento do conhecimento matemático*, destacada no excerto abaixo:

Excerto 8 [CsM: B10] – [...] tem o estudo dos fatos que mostra a importância do caminho historicamente, ele percorreu todos os pesquisadores, em relação a educação matemática, e ele utiliza o exemplo do quinto postulado, como que não se constrói somente com acertos, no caso, ele parte de algo que todo o mundo estava dizendo que estava errado e que surgiu uma matemática disso, uma geometria disso, entende? Então, a construção da matemática nem sempre segue uma linha reta, ela pode vir de algo que todo o mundo está dizendo que está errado (P8, GDE2, grifo nosso).

Ao refletir acerca do desenvolvimento do conhecimento matemático, tendo como base a leitura do artigo disponível, P8 evidencia uma visão de descontinuidade no desenvolvimento dessa ciência.

Miguel e Miorim (2011), apontam em sua obra algumas perspectivas teóricas que estão presentes em investigações que envolvem a utilização da

¹² EVES, H. W. Introdução à história da matemática. Unicamp, 1995.

História da Matemática na Educação Matemática, dentre elas podemos destacar a: Perspectiva Evolutiva Descontínua.

Para os autores, essa perspectiva é influenciada pela obra de Gaston Bachelard intitulada “A formação do espírito científico”. Nessa concepção, os obstáculos de origem epistemológica podem ser constatados com os obstáculos de natureza histórica na construção de um determinado conhecimento. Nesse sentido, a História da Matemática pode ser entendida como um campo de conhecimento que possibilita a identificação de obstáculos epistemológicos que surgiram no decorrer do percurso histórico do desenvolvimento do conhecimento matemático.

Em outro momento, em que os participantes presentes no encontro evidenciaram característica acerca do Conhecimento sobre Matemática, ocorreu quando foram questionados acerca de suas concepções de como é o trabalho do(a) matemático(a), ou seja, se o(a) pesquisador(a) trabalha sozinho(a) ou em conjunto de outros(as) pesquisadores(as). Ao pensarem sobre a questão, o participante P2, destaca as seguintes reflexões transcritas no excerto 9:

Excerto 9 [CsM: B7] – Hoje em dia, até mesmo com o passar do tempo, acho que é bem difícil você ter um matemático que trabalha sozinho [...] quando você desenvolve um trabalho você precisa de crítica. Normalmente é difícil você visualizar alguns problemas naquilo que você mesmo desenvolveu, então você precisa de outras opiniões (P2, GDE2, grifo nosso).

Diante disso, P2 relata a característica B7: *reconhecer e entender o trabalho individual e coletivo de um pesquisador matemático*. Diante disso, P2 apresenta considerações importantes acerca do trabalho do pesquisador matemático.

O CsM também foi evidenciado pelos participantes após serem questionados se existem verdades que são absolutas na Matemática. O participante P8 prontamente argumentou sobre os axiomas que permeiam qualquer teoria matemática e o fato de serem verdades indemonstráveis. Diante desse comentário, questionamos o participante se: “O fato de um axioma ser tomado como uma verdade indemonstrável, o tornava também uma verdade absoluta?”. Algum tempo após tal indagação, a participante P5 evidenciou a

característica *B5*: reconhecer a inexistência de verdades absolutas na matemática, em suas reflexões, como ressalta o excerto, a seguir:

Excerto 10 [CsM: B5] – *Mas por absoluto também quer dizer que é independente do contexto, né? Uma verdade absoluta é independente do contexto. Então acho que não existe, mas existe a verdade para aquele contexto* (P5, GDE2, grifo nosso).

A participante P5, em sua fala concebe a ideia de que as verdades e falsidades de um domínio de conhecimento na matemática, depende do contexto cujo qual esse conhecimento será aplicado. Nessa perspectiva, percebe-se que para P5 é relevante observar o contexto em que uma teoria matemática deve ser utilizada e, juntamente a isso, que a ideia de que não existem verdades absolutas na matemática.

Diante desse excerto, o estudo histórico da matemática auxiliou que o participante mobilizasse conhecimentos sobre a dinamicidade do conhecimento científico, evidenciando assim o caráter provisório desse conhecimento, cujo o qual envolve em seu desenvolvimento rupturas e mudanças de paradigmas (SANTOS, 2021).

Nessa perspectiva, corroboramos com Barbin (2000) que destaca que durante os anos escolares e na formação universitária, é desenvolvida a concepção de matemática como sendo uma área de conhecimento definitiva e composta por verdades irrefutáveis e imutáveis. Porém, o autor afirma que a dimensão histórica possibilita pensar na matemática por vezes como um processo contínuo e de melhoria ao longo do tempo e, também como processo descontínuo de conhecimento. Sendo assim, os programas de formação docente devem considerar essa vertente e não somente a história como fonte de informações.

No encontro que tinha como objetivo discutir o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, o CsM foi evidenciado em 15 momentos nas falas e comentários dos participantes. Abaixo apresentamos os excertos junto com os momentos que foram possíveis que o CsM pudesse ser evidenciado.

Um dos momentos em que o CsM foi evidenciado, essencialmente *B9*: *entender que existem pessoas que não receberam os créditos por suas produções científicas*, no momento em que discutíamos juntamente com o grupo

de estudos se eles já conheciam esse episódio histórico. Mediante a essa indagação, o participante P8 que já concluiu a disciplina de História da Matemática comenta que já possuía conhecimento acerca deste episódio em especial. Entretanto, o que mais destacou durante o comentário de P8 foi que o participante evidencia entender que, por diversas vezes, existem pessoas que não receberam os devidos créditos por suas produções científicas, como destacamos no excerto abaixo:

Excerto 11 [CsM: B9] – *Outro fator interessante também, foi as mulheres na matemática. [...] então isso também levou outra realidade tanto social e na Matemática, trazendo o porquê de as mulheres não terem tanta visibilidade, e se tem, porque que elas não levaram tanto crédito* (P8, GDE3, grifo nosso).

Essa concepção ressaltada por P8 através do estudo da HM são consideradas por Lederman (2002) como apropriadas para se pensar sobre empreendimento científico. Para o autor, “A ciência como um empreendimento humano é praticada no contexto de uma cultura mais ampla e seus praticantes são o produto dessa cultura” (LEDERMAN, 2002, p. 501, tradução nossa). Diante disso, o autor afirma que a ciência influencia e é influenciada por diversos elementos da esfera intelectual e cultural em que está inserida. Para Silva (2012, p. 20) “[...] o mundo da ciência se estruturou em bases quase exclusivamente masculinas, ora excluindo as mulheres, ora negando as suas produções científicas, através de discursos e práticas nada neutros”.

Outro momento, durante o encontro acerca do surgimento do cálculo infinitesimal, em que o CsM foi evidenciado, os participantes da investigação haviam sido questionados se notaram alguma diferença no cálculo desenvolvido pelos estudiosos Gottfried Wilhelm Leibniz e Isaac Newton. Nesse momento, a participante P5 relata que na essência ambos iam para o mesmo “caminho”, de modo que os resultados eram similares, de certa forma. Deste modo, o excerto abaixo destaca as reflexões feitas pela participante P5:

Excerto 12 [CsM: B8] – *[...] Leibniz era racionalista, então ele era mais rigoroso [...] matematicamente. Então, era meio que Newton trabalhava no campo das ideias e tinha seu próprio rigor, que não era exatamente o rigor matemático considerado “universal”..., mais fácil de se ter, mais fácil de se utilizar, não era tão padronizado, quando o do Leibniz, por exemplo* (P5, GDE3, grifo nosso).

Por esse excerto, a participante apresenta *B8: entender e reconhecer as distintas formas de conceber o conhecimento*, em especial o matemático, ao relatar correntes filosóficas como a racionalista, cujo matemático e filósofo alemão, Leibniz, compunha, e a corrente filosófica empirista da qual fazia parte o Newton.

Perante o excerto do participante, consideramos que estudos históricos possibilitam a mobilização de aspectos filosóficos que permeiam a natureza do conhecimento matemático. Diante disso, corroboramos com os ideais de Batista e Luccas (2004, p. 107), de modo que consideram que a

[...] produção de um trabalho sob uma perspectiva que envolva simultaneamente a história da Matemática e a filosofia da Matemática pode gerar um ambiente ainda mais favorável à análise e à reflexão de objetos de estudo, com vistas a perceber o processo dinâmico que permeia o conhecimento.

Mathews (1995) atribui alguns fatores positivos na utilização da história e filosofia no ensino de ciências. Para o autor, a história e filosofia, por exemplo, podem auxiliar na humanização da ciência e, dessa forma, aproximá-las dos interesses éticos, culturais e políticos da comunidade; e além disso, também proporcionam uma melhor formação do profissional docente contribuindo para o entendimento de uma epistemologia da ciência mais rica e autêntica, de modo que favoreça a compreensão da estrutura das ciências e também do espaço que a mesma ocupa tanto na sociedade quanto no sistema intelectual.

Outro momento que podemos destacar acerca do CsM ser manifestado nos comentários dos participantes, volta-se a discussão sobre elitização do conhecimento matemático. A ocasião em que esse conhecimento surgiu, estávamos debatendo acerca da abstração no conhecimento matemático, em especial as demonstrações existentes na essência da Matemática. Os participantes ressaltaram a presença de livros utilizados durante a graduação, de modo que algumas demonstrações consideradas pelo autor como “triviais”, e que ficariam a cargo do leitor para demonstração, não seriam, de certa forma, tão triviais como enunciada pelo autor.

De acordo com os participantes, este aspecto existente nos livros anunciados pelos participantes tende a dificultar a compreensão dos próprios no

processo de aprendizagem e, de certo modo, excluindo-os do conhecimento necessário para suas formações.

Nesse sentido, a professora orientadora questionou os participantes se consideram a possível tendência de elitização da Matemática. Em respeito à essa indagação, o participante P8 afirma que considera que o processo de elitização está presente em diversos âmbitos de conhecimento, inclusive na Matemática. P8 destaca ainda, por exemplo, a elitização da Matemática em cursos do Ensino Superior, quando evidencia que o curso de Matemática Bacharelado da Universidade em que estuda está mudando de um curso noturno para um curso integral e, assim sendo, os estudantes que anteriormente poderiam trabalhar e estudar já não possuem essa opção. O excerto abaixo apresenta o relato feito pelo participante:

Excerto 13 [CsM: B3] – *Então, você fica vendo assim: “Pô, se eu não tenho uma condição boa, eu não posso fazer matemática?”. Isso reflete muito também, naquela característica que te falei que quando estudei a história nas mulheres na matemática. **Se você olhar as grandes matemáticas, elas sempre tiveram alguém na família, pai, tio, que fizeram matemática, ou seja, era alguém que estava ali proporcionando. Quantas outras poderiam ter a capacidade de fazer algo mais, porém simplesmente não estavam na elite? A matemática pode ter perdido grandes matemáticos, grandes conteúdos, enfim, simplesmente porque a pessoa não era da classe** (P8, GDE3, grifo nosso).*

O participante, então, mobiliza CsM que pode ser identificado pela característica *B3: reconhecer e entender que o contexto social, político e científico interfere na produção do conhecimento matemático*, de modo que entende que os fatores sociais, em especial, neste caso, os fatores econômicos interferem na possibilidade ou não de uma pessoa se dedicar a produção do conhecimento matemático.

Já no encontro acerca do surgimento dos números complexos, o CsM foi manifestado nos comentários dos participantes da investigação em 15 oportunidades que serão apresentados nos excertos abaixo.

Uma das situações em que foi possível esse conhecimento ser evidenciado pelos estudantes participantes do grupo de estudos, estávamos debatendo sobre o que uma ideia ou teoria matemática necessita para ser aceita

na comunidade matemática. Nesse contexto, a resposta dos participantes foi definir que quando uma teoria é provada para todos os casos, ou seja, generalizada, é válida para ser aceita no âmbito matemático.

Diante disso, a professora orientadora desta investigação questiona os participantes ao perguntar: “Quem decide o que é aceito ou não é aceito? Quem verifica?”. Sendo assim, o participante P9 ressalta o que consideramos como sendo uma das características do CsM, B6: *saber a importância da comunidade científica em seus diversos níveis*. O excerto abaixo esclarece o comentário do participante:

Excerto 14 [CsM: B6] – Um doutorado? *Eu acho que, tipo, os doutores [...], sempre tem um doutor específico em uma área e, quando você prova algo em matemática, um ente, eu acho que sempre vai ter algum especialista, que vai estar muito próximo dessa área, que realmente vai ter [...] reconhecimento internacionalmente, que vai poder falar sobre aquilo, julgar, provar, negar. Eu acho que é assim. Hoje em dia, várias pessoas, de vários países, doutores de diversas áreas que provavelmente vai ter alguém muito próximo da sua área que vai conseguir falar sobre aquilo também* (P9, GDE4, grifo nosso).

Neste excerto em questão, o participante demonstra entender e reconhecer a importância de uma verificação/validação por especialistas (ou por pares) de uma ideia ou teoria.

Essa característica do desenvolvimento científico que ressalta a importância da existência de especialista apontada por P9, através do estudo da HM, também é ressaltada por Thomas Kuhn (1998) ao descrever o progresso científico nas ciências naturais. Nessa perspectiva, Mendonça e Videira (2007) ao analisarem o ensaio de Kuhn, intitulado “A estrutura das revoluções científicas”, afirmam que

[...] é justamente a especialização que garante a possibilidade do progresso científico acontecer de modo notório [...]. Para exprimir de forma mais precisa, a pesquisa especializada é o pré-requisito indispensável para que possa haver aprofundamento no conhecimento de determinados fatos da natureza (MENDONÇA; VIDEIRA, 2007, p. 170).

Pode também ser evidenciado na fala de P9, o pensamento de comunidade científica. Essa perspectiva apresentada pelo participante converge com o pensamento apresentado por Fleck (2010) em sua obra intitulada “Gênese

e desenvolvimento de um fato científico”, de forma que o autor afirma que o processo de construção do desenvolvimento científico é resultado de uma atividade social que ultrapassa o processo individual de uma “consciência em si” teórica, de modo que, segundo o autor “[...] o respectivo estado do saber ultrapassa os limites dados a um indivíduo” (FLECK, 2010, p. 82).

Nesse sentido, Fleck (2010) define, assim, o termo “coletivo de pensamento” que para o autor envolve a comunidade das pessoas que

[...] trocam pensamentos ou se encontram numa situação de influência recíproca de pensamentos, temos, em cada uma dessas pessoas, um portador do desenvolvimento histórico de uma área de pensamento, de um determinado estado do saber e da cultura, ou seja, de um estilo específico de pensamento (p. 82).

Kuhn (1998) se baseou no pensamento de Fleck, de modo que em seu ensaio intitulado “A estrutura das Revoluções Científicas” evidencia o importante papel desempenhado pela comunidade científica para o desenvolvimento da ciência. Para o autor, a comunidade científica é composta por um grupo de especialistas que tem a função de verificação de novas hipóteses de uma determinada teoria, aceitando-a ou rejeitando-a.

Ainda nessa situação, a professora orientadora, após a fala destacada acima de P9, questiona novamente os participantes perguntando como os especialistas terão acesso aos resultados de uma pesquisa. Nesse instante, P9 destaca novamente que:

Excerto 15 [CsM: B2] – *Provavelmente, você vai ter que publicar um estudo sobre isso para você provar. Então, provavelmente a outra pessoa vai olhar esse estudo e vai tentar provar [...] se aquilo também é verdade para ela, se ela consegue chegar naquela conclusão. Com certeza, ela vai ter bastante conhecimento para saber o que você está falando no estudo (P9, GDE4, grifo nosso).*

À vista deste excerto, o participante P9 demonstra durante o estudo e discussão desse episódio histórico, a característica *B2: reconhecer e entender a importância da divulgação da pesquisa em meios de comunicação*.

Conforme explicitado por Forattini (1996), a importância da escrita e divulgação de artigos pode ser entendida de duas formas, sem, contudo, apresentarem coexistência obrigatória. Na primeira, deve-se ao impacto cultural

que a divulgação de um artigo pode acarretar, de modo que possibilita enriquecer o acervo de conhecimentos, independentemente de qualquer consequência prática que possa haver. Já a segunda, relaciona-se ao impacto à natureza intrínseca do estudo aplicado, que, de certa forma, fomenta o crescimento econômico, de modo que pode ser medido pelos produtos resultantes do aperfeiçoamento tecnológico.

Por fim, no último encontro do grupo de estudos, em que finalizamos as discussões feitas nos encontros anteriores, o CsM foi evidenciado em 25 situações. Abaixo, exibiremos os excertos do CsM que foram exteriorizados nas falas dos participantes e o contexto que possibilitou esses conhecimentos serem evidenciados.

Em uma dessas situações, em que as características do CsM foram exteriorizadas nas falas dos participantes, nesse caso *B3: reconhecer e entender que o contexto social, político e científico interfere na produção do conhecimento matemático*, enquanto debatíamos se o contexto tem alguma influência na forma de fazer-se matemática. Nessa situação, o participante P6 evidencia que:

Excerto 16 [CsM: B3] – *Sim. Você está em uma situação de que precisa fazer tal coisa, e a partir desse problema você elabora uma maneira de resolver esse problema. Na matemática é do mesmo jeito, se você está precisando de [...], deixa eu pensar em um exemplo, na parte do Egito, eles utilizavam as contas por conta da cheia do rio Nilo. Então, por conta desse acontecimento, desse problema, o rio enche e transborda, eles precisavam de arrumar um jeito de calcular quando vai transbordar, por exemplo. Daí a matemática surge para isso, através de diversos contextos a matemática vai surgindo e evoluindo* (P6, GDE5, grifo nosso).

Nesse excerto, P6 afirma compreender que o contexto social interfere na produção de um determinado conhecimento científico e, que nesse caso, como a própria matemática de uma determinada região era desenvolvida para solucionar problemas típicos daquela região. Embora o pensamento de P6 seja correto, em considerar a influência do contexto social na produção de um determinado conhecimento, vale considerar que nem sempre o conhecimento matemático surge com a finalidade de resolver problemas específicos de uma região. Desse modo, existem casos em que uma determinada área, ideia ou

procedimento matemático surge para solucionar, agregar ou inovar ao conhecimento já existente.

Portanto, o estudo histórico da matemática proporcionou ao participante refletir indícios de que matemática possui, como qualquer outra forma de conhecimento, “[...] a sua dimensão política e não se pode negar que seu progresso tem tudo a ver com o contexto social, econômico, político e ideológico. Isso é muitas vezes ignorado e até mesmo negado” (D’AMBROSIO, 2012, p. 164). O autor também reforça essa ideia afirmando que a importância, e até mesmo a necessidade, da invenção matemática deve-se a sua dependência com contexto político, social, econômico e ideológico.

Nessa perspectiva, Balestri (2008) contextualiza que por meio da HM é possível que o professor ao ensinar a disciplina de matemática tenha condições de discutir quais foram as necessidades e condições que estavam dispostas e que permitiram à humanidade o desenvolvimento da matemática.

Outro momento em que características do CsM, *B8: entender e reconhecer as distintas formas de conceber o conhecimento*, foram evidenciadas nos comentários dos participantes, o pesquisador questiona se eles consideravam que a Matemática antiga era superior, ou não, quando comparada a Matemática que vem sendo desenvolvida atualmente. Mediante a esse questionamento, os participantes dividiram suas opiniões, pois muitos consideravam que a Matemática desenvolvida há séculos atrás era suficiente para o momento em que viviam, como é o caso de P2 que evidencia o seguinte excerto abaixo:

Excerto 17 [CsM: B8] – *Elas eram o suficiente para eles naquele momento, que nem a matemática que a gente tem hoje é suficiente para a gente. Lógico que sempre precisa de aperfeiçoar para descobrir novas coisas, mas a gente consegue resolver muito com o que já está descoberto, igual naquela época* (P2, GDE5, grifo nosso).

Esse argumento explanado por P2, evidencia indícios do que Kuhn (1998) considerou para relatar a “incomensurabilidade das tradições científicas”, de modo que, neste caso, os padrões científicos ou até mesmo as definições de ciência consideradas em alguns ramos da matemática em tempos anteriores não são os mesmos considerados atualmente. Para Kuhn (1998, p. 190) algumas

áreas “[...] veem coisas diferentes, que são visualizadas mantendo relações diferentes entre si. É por isso que uma lei, que para um grupo não pode nem mesmo ser demonstrada, pode, ocasionalmente, parecer intuitivamente óbvia a outro”.

Ainda relacionado a questão levantada acima, outros participantes consideravam que a Matemática desenvolvida na contemporaneidade é, de certa maneira, superior, como é o caso de P8 que expõe o seguinte excerto abaixo:

Excerto 18 [CsM: B13] – *É complicado. Dá pra dizer então que a Matemática hoje é melhor do que de antes. Porque, tecnicamente, como falei, antigamente tinha muito conhecimento espalhado. Hoje em dia você tem uma linguagem só, hoje, então, você consegue juntar todo conhecimento. Então, vejo que hoje ela está traduzida e está unificada, ela está mais fácil, mais fácil de ler, qualquer um que tenha conhecimento está mais fácil para chegar e ler, ela é melhor. Hoje você consegue ver, analisar e aplicar, antigamente não, se você, por exemplo, um grego e um egípcio fazendo [matemática], [...] eles não conseguiriam linkar [unir]* (P8, GDE5, grifo nosso).

Diante dessa fala, o participante, em busca de defender seu argumento, evidencia a importância que a unificação da escrita da Matemática teve para o seu desenvolvimento, evidenciando, portanto, a característica *B11: reconhecer a universalidade dos símbolos matemáticos*. No entanto, perante esse excerto, nota-se que P8 compreende que pelo fato possuir uma escrita unificada a Matemática atual é, conseqüentemente, melhor do que a desenvolvida em outrora. Nesse sentido, entendemos que P8 apresenta uma visão equivocada ao relatar a superioridade da Matemática atual quando comparada a Matemática desenvolvida, por exemplo, pelos egípcios ou gregos, desconsiderando, assim, a diferença entre os padrões científicos, o contexto social e temporal que separam ambas teorias.

Na próxima seção, descreveremos a síntese dos indícios do Conhecimento do Conteúdo (CK) que foram evidenciados nas falas dos participantes no decorrer dos encontros juntamente com o grupo de estudos.

6.2.3 Síntese dos Conhecimentos do Conteúdo evidenciados nos encontros

No decorrer do desenvolvimento dos encontros com o grupo de estudos, que tinha como objetivo discutir episódios históricos matemáticos, foram evidenciados indícios dos subdomínios do Conhecimento de Matemática (CdM) e do Conhecimento sobre Matemática (CsM), pertencentes ao domínio do Conhecimento do Conteúdo (CK), nas falas e comentários dos participantes.

A seguir, apresentamos a Tabela 1, na qual apresenta-se as características do Conhecimento de Matemática (CdM) que foram evidenciados no decorrer dos encontros com o grupo de estudos, juntamente com a frequência que ocorreram.

Tabela 1 - Características e frequência do Conhecimento de Matemática evidenciadas

Conhecimento de Matemática (CdM)		
Episódios	Frequência	Características
Surgimento das Geometrias Não-Euclidianas	11	A1, A6(3x), A10(2x), A11(5x),
Surgimento do Cálculo Infinitesimal	8	A6(4x), A11(4x)
Surgimento dos Números Complexos	5	A1, A4(2x), A6(2x)
Fechamento do grupo de estudos	7	A6, A11(6x),
Total	31	

Fonte: Autoria própria do pesquisador

Acerca do Conhecimento de Matemática (CdM) foi possível identificar características desse subdomínio em todos os encontros referentes ao estudo de episódios históricos. Ao todo, o CdM foi evidenciado em 31 momentos, de modo que o episódio histórico em que mais vezes foi ressaltado nas falas dos participantes foi sobre o surgimento das geometrias não-euclidianas, em 11 oportunidades.

No episódio que ressaltava o surgimento das geometrias não-euclidianas, os participantes mostraram, em diversos momentos, ter compreensão e conhecimento para explicar e justificar ideias e conceitos matemáticos sempre que exigiam usar de exemplos matemáticos para fundamentar suas opiniões.

Vale ressaltar que dentre os episódios históricos escolhidos, este foi o episódio em que os estudantes relataram não conhecer ou pouco conhecer, visto que não foi abordado durante a educação básica e, além disso, também não tiveram contato com esse conhecimento durante a graduação em Matemática Licenciatura. Diante disso, quando questionados se o estudo desse episódio “desafiava os sentidos” que possuíam de geometria, os participantes confirmaram de maneira positiva. Entendemos que na busca para superar este obstáculo na compreensão das geometrias não euclidianas, os participantes apoiavam-se em exemplos para reconhecer e entender a aplicação deste conhecimento no cotidiano.

No encontro sobre o surgimento do cálculo infinitesimal, apesar de alguns participantes não terem contato com o contexto histórico, todos afirmaram ter contato com a disciplina de cálculo no decorrer da graduação no curso de Matemática Licenciatura. Nesse sentido, o CdM foi ressaltado, por exemplo, em momentos que os participantes faziam aproximações do método usado por pensadores, tais como: Kepler, Eudoxo e Arquimedes, com os métodos usados por Newton e Leibniz.

Já no encontro acerca do surgimento dos números complexos, alguns participantes revelaram não ter conhecimento dessa área de estudos. Os participantes que possuíam esse conhecimento, afirmaram que foi de maneira sucinta durante a educação básica e, por fim, alguns participantes relataram não ter contato com os números complexos durante a educação básica, porém cursaram a disciplina obrigatória para o curso de Matemática Licenciatura que abordava esse tema. Assim sendo, o CdM foi evidenciado nos comentários dos participantes ao usar termos, notações e linguagem matemática de forma correta, ao longo de suas explicações.

No último encontro do grupo de estudos, os participantes evidenciaram em diversos momentos ter Conhecimento de Matemática ao relacionar o conhecimento matemático à outras áreas de conhecimento e, além disso, ao reconhecer as aplicações do conhecimento matemático em situações cotidianas.

Já a Tabela 2, apresentada a seguir, destaca as características do Conhecimento sobre Matemática (CsM) que foram evidenciados no

desenvolvimento do grupo de estudos, junto com a frequência que elas ocorreram.

Tabela 2 - Características e frequência do Conhecimento sobre Matemática evidenciadas

Conhecimento sobre Matemática (CsM)		
Episódios	Frequência	Características
Surgimento das Geometrias Não-Euclidianas	14	B1(8x), B3(2x), B5, B10(3x)
Surgimento do Cálculo Infinitesimal	15	B1(2x), B4(3x), B8(6x), B9(2x), B10(2x)
Surgimento dos Números Complexos	15	B1(4x), B2(2x), B3(5x), B6(2x), B8, B10
Fechamento do grupo de estudos	25	B1, B2(4x), B3(3x), B5, B6(4x), B8(8x), B10, B11(3x)
Total	69	

Fonte: Autoria própria do pesquisador

Os indícios do Conhecimento sobre Matemática (CsM) foram possíveis serem identificados ao todo em 69 momentos, de modo que diferentes características consideradas nesse subdomínio do Conhecimento do Conteúdo foram evidenciadas ao longo das discussões com o grupo de estudos. Destaca-se que este foi o conhecimento mais evidenciado nas falas e comentários dos participantes, devido aos objetivos propostos para esta investigação.

Na discussão acerca do surgimento das geometrias não-euclidianas, as características do CsM foram evidenciadas em 14 oportunidades, sendo o episódio histórico que menos vezes foram manifestadas durante o decorrer dos encontros. Ainda sobre esse episódio, em diversos momentos, os participantes ressaltaram reconhecer como as verdades e falsidades são estabelecidas na Matemática e, além do mais, destacamos que em outros momentos também foi evidenciado nas falas dos participantes reconhecimento de como é validado o conhecimento matemático.

No encontro acerca do surgimento do cálculo infinitesimal, a característica do CsM que mais apareceu nos comentários dos participantes foi relacionada a

entender e reconhecer as distintas formas de conceber o conhecimento, em especial, o matemático. De forma geral, apesar dos participantes já possuírem conhecimento teórico do cálculo infinitesimal, as discussões históricas e filosóficas que rodeiam o desenvolvimento dessa área de conhecimento eram, de certo modo, pouco conhecidas pelos participantes da investigação. Nesse sentido, as correntes filosóficas referentes ao Empirismo e ao Racionalismo, foram conhecimentos que participantes consideram cruciais para notarem a diferença da abordagem do cálculo desenvolvido por Newton e Leibniz.

No encontro sobre o surgimento dos números complexos podemos evidenciar nas falas dos participantes indícios de entenderem, em 5 oportunidades, que o contexto social e científico interfere na maneira de se pesquisar na Matemática. Outro momento relevante nesse episódio foi o indício dos participantes de reconhecerem a importância para o desenvolvimento da ciência e da matemática em si, dos especialistas no âmbito científico.

Por fim, no último encontro o CsM foi evidenciado em 25 momentos, tornando assim, o encontro em que mais vezes o Conhecimento sobre Matemática exteriorizou-se nas falas dos participantes da investigação. Nessa perspectiva, os participantes demonstraram, por exemplo, indícios do reconhecimento e entendimento da importância da divulgação científica em meios de comunicação, tendo em vista a perspectiva que esse fator auxilia o desenvolvimento científico.

A próxima seção, tem como intuito apresentar a análise do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) que foram evidenciados no perpassar desse encontro.

6.3 ANALISANDO O CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO (PCK)

Analisaremos neste momento, o domínio do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo. Dessa maneira, os subdomínios de conhecimentos evidenciados pelos participantes dessa pesquisa, foram: o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS), o Conhecimento do Conteúdo e Ensino (KCT) e o Conhecimento Curricular (CC).

6.3.1 Analisando aspectos relacionados ao Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS)

Outro subdomínio de conhecimento docente considerado nesta investigação refere-se ao Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS).

Nesse sentido, as características do KCS consideradas na investigação, são: C1: prever o que os estudantes acharão fácil ou difícil ou conhecer as dificuldades que os estudantes frequentemente apresentam; C2: prever o que os estudantes acharão interessante e motivador; e C3: conhecer os equívocos comuns que os estudantes possuem quando estudam um determinado tópico da matemática.

As indagações referentes as possibilidades didáticas foram realizadas ao final de cada encontro. Dessa maneira, no encontro que abordamos o conteúdo referente ao surgimento das geometrias não-euclidianas, indícios do KCS foram evidenciados em seis oportunidades no decorrer desse encontro.

Em uma dessas oportunidades os participantes foram questionados se o entendimento e as reflexões sobre o surgimento das geometrias não-euclidianas e a respeito da História da Matemática, os auxiliariam, de alguma maneira, em discussões em sala de aula.

Perante isso, o participante P3 evidencia em sua fala características que consideramos como sendo parte do Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes, nesse caso *C1: prever o que os estudantes acharão fácil ou difícil ou conhecer as dificuldades que os estudantes frequentemente apresentam*, ao relatar uma preocupação como os estudantes iriam entender esse conteúdo. Destacamos as reflexões de P3 no excerto 6, abaixo:

Excerto 19 [KCS: C1] – Sala de aula na educação básica, entra no ponto que tipo, até que ponto isso é benéfico ou fator dificultativo, por que se vamos levar no contexto da educação no Brasil. Às vezes, a gente não consegue nem aplicar a geometria euclidiana, imagina introduzir uma questão de geometrias não-euclidianas? (P6, GDE2, grifo nosso).

P3 que possui experiência como professor, demonstra indícios de que conhece as dificuldades de se ensinar matemática na educação básica, visto

que o ensino de conteúdos, considerados menos complexos do que as geometrias não-euclidianas, já são difíceis de serem compreendidos pelos estudantes.

Em relação ao mesmo questionamento feito aos participantes, destacamos as reflexões de P8 que evidencia a característica C2: *prever o que os estudantes acharão interessante e motivador*, como descrita no excerto 7, a seguir:

Excerto 20 [KCS: C2] – [...] dependendo do ano que você utilizar, você mostrar o surgimento da história das geometrias não-euclidianas, **faz com que o aluno se prenda e se motive a não se prender, a estar sempre certo, sempre decorar, sempre “Ah é isso, e tem que ser isso”, pode tentar algo diferente, entende? A matemática ela [...] depois da prova (negação) do quinto postulado, ela se tornou livre. Ela já era engessada, então com essa prova acabou sendo mais livre. E você falar isso, nos anos iniciais, motiva o aluno a entender mais, a se dedicar mais, a não seguir basicamente o passo a passo de cada coisa, ele compreende e pode fazer do jeito dele** (P8, GDE2, grifo nosso).

Para o participante, apresentar o surgimento das geometrias não-euclidianas pode possibilitar motivação nos estudantes a respeito da disciplina de matemática. Entretanto, como é ressaltado por Fossa (2008), o estudo de fatos históricos pode servir de motivação para alguns estudantes, porém não é garantia de que irá motivar todos os estudantes.

Além disso, para ele, ao ressaltar as motivações que os matemáticos tiveram, e possibilitaram o surgimento dessas geometrias, pode auxiliar na compreensão dos estudantes proporcionando uma visão uma menos engessada do conhecimento matemático.

Desse modo, o pensamento de P8 converge com que Saito (2013), de modo para o autor a HM pode proporcionar importantes reflexões para os estudantes a respeito de uma visão mais crítica em relação à matemática e a construção do conhecimento matemático. Entretanto, é relevante que o professor tenha consciência de que a HM, assim como a matemática, não se encontra pronta e acabada.

No que diz respeito as discussões do encontro que tinha como objetivo estudar o surgimento do cálculo infinitesimal, indícios do KCS foi evidenciado em um momento nos comentários dos participantes.

O momento em que o indício desse subdomínio foi evidenciado, estávamos discutindo se os participantes já conheciam esse episódio. Desse modo, o participante P8, que já cursou a disciplina de HM, evidenciou que um dos momentos mais interessantes para ele da disciplina foi a rivalidade criada entre Leibniz e Newton. Então, quando perguntado sobre o que considerou relevante em tal rivalidade, P8 manifestou o excerto abaixo:

Excerto 21 [KCS: C2] – [...] você trazer um fato histórico para motivar o aluno... estou pensando em mim, tanto em sala de aula quando (ensinando) para uma criança, (...) e todo mundo prendia a atenção. Motivava mais, todo mundo queria falar mais, mesmo estando certo ou errado, todo mundo participava. [...] No caso isso motivou todo mundo quer participar da aula (P8, GD3, grifo nosso).

Ressaltamos que nesse excerto o participante introduz o argumento de que a HM pode ser vista como uma “mera” curiosidade para os estudantes, porém, como evidenciado por Cachapuz *et al.* (2005), essa ideia pode proporcionar ao estudante uma visão errônea do desenvolvimento da ciência. De acordo com Marques (2010)

O ensino de conceitos científicos em um enfoque histórico requer um estudo e um bom planejamento de modo a levar aos estudantes o caminho percorrido pelos cientistas, suas conseqüências, seus acertos e erros e como tal fato influenciou o passado e o presente, possibilitando assim uma visão reflexiva e crítica da Ciência enquanto atividade humana (MARQUES, 2010, p. 60).

Diante disso, quando analisamos os argumentos que reforçam as potencialidades da HM no ensino, como já discutimos anteriormente, propostos por Miguel (1997), a história é entendida como uma fonte de motivação para o ensino aprendizagem da matemática.

Segundo Miguel (1997), “[...] o conhecimento histórico dos processos matemáticos despertaria o interesse do aluno pelo conteúdo matemático que está sendo ensinado” (p. 75). O próprio autor demonstra cautela ao afirmar que

a história, por si só, necessariamente sirva de motivação, e quando podendo motivar, não motiva a todos de maneira semelhante e da mesma forma.

No encontro acerca do surgimento dos números complexos, os indícios do KCS foram manifestados em três momentos nas falas dos participantes.

No primeiro momento, estávamos no fim do encontro quando o pesquisador questionou os participantes: “Vocês entendem que esse conhecimento e as reflexões feitas a partir desse episódio, elas podem contribuir para uma discussão em sala de aula?”. Diante de tal indagação, o participante P2 evidencia o seguinte excerto 22, abaixo:

Excerto 22 [KCS: C1] – Acho que sim, daria para levar para sala de aula. Logicamente, não com os pequenos, seria mais pro pessoal do terceiro ano. Porém, dependeria de como estão as situações dos alunos, a carga horária, por que no cenário atual eles estão com grande déficit, então perderam basicamente dois anos de ensino [referindo-se à pandemia] (P2, GDE4, grifo nosso).

Perante este excerto, P2 apresenta indícios de *C1: prever o que os estudantes acharão fácil ou difícil ou conhecer as dificuldades que os estudantes frequentemente apresentam*, ao descrever possíveis déficits que os alunos atualmente possuem na disciplina de Matemática, agravado ainda mais posteriormente ao momento pandêmico.

Ainda relacionado a questão levantada anteriormente pelo pesquisador aos participantes, P6 expressa em sua fala indícios de outra característica que consideramos compor o KCS, como destacamos no excerto 23, a seguir:

Excerto 23 [KCS: C2] – E eu acho que uma abordagem histórica daria mais bagagem para os alunos entenderem [...] e se aproximarem mais do conceito, terem mais vontade de estudar o que eles vão aprender (P6, GDE4, grifo nosso).

Pelo excerto evidenciado acima, percebemos que P6 manifestou a característica *C2: prever o que os estudantes acharão interessante e motivador*, ao aplicar o conteúdo referente aos números complexos em sala de aula partindo, especificamente, de uma abordagem histórica.

No último encontro desenvolvido com os participantes, tinha como objetivo um elaborar um fechamento das discussões propostas nos encontros anteriores, o KCS foi evidenciado em nove momentos.

Em um desses momentos, o pesquisador questionou os participantes sobre qual dos episódios históricos foi mais significativo para seus aprendizados. Nesse sentido, P3 ao relatar que o episódio acerca do surgimento das geometrias não-euclidianas foi o que considerou mais significativo evidencia indícios de características propostas no KCS. O excerto 24, a seguir, apresenta o comentário do participante.

Excerto 24 [KCS: C2] – *Eu acho que [...] eu diria que é mais atual, em relação ao mundo hoje, e é mais palpável, eu diria, pois se você foi explicar para uma criança, vai fazer mais sentido, por exemplo, **números complexos é mais difícil de você ensinar. Mas tipo, uma geometria não euclidiana é algo novo [...] eu acho mais interessante também, porque é algo que foge da casinha do que eles aprendem na escola, e algo no mundo, né?** (P3, GDE5, grifo nosso).*

Entendemos, mediante a este excerto que P3, partindo da sua experiência no estudo das geometrias não-euclidianas, manifesta que ensino desse conteúdo poderia ser interesse para os estudantes da educação básica, evidenciando, então, C2: *prever o que os estudantes acharão motivador e interessante*. Diante da fala de P3, entende-se indícios de uma visão de totalidade que a HM pode propiciar aos estudantes, auxiliando assim na resolução de problemas práticos da matemática, reforçando, assim, Brolezzi (1991) que salienta que a HM tem um valor didático recorrente da visão de totalidade que ela possibilita. Segundo mesmo autor “A dificuldade de lidar com a questão das aplicações práticas do conhecimento matemático elementar também é decorrente dessa falta de visão de totalidade” (BROLEZZI, 1991, p. 60).

Outro momento em que indícios do KCS foi evidenciado na fala dos participantes, P1 estava comentando que considerou o episódio histórico que ressaltava o surgimento dos números complexos como o mais significativo para sua aprendizagem. Diante disso, expressa o seguinte excerto, a seguir:

Excerto 25 [KCS: C1] – *[...] **porque para levar para o ensino médio dá para levar e para ser trabalhado [...] a história mais fácil de entender, mais fácil de compreender do que os outros** (P1, GDE5, grifo nosso).*

Nesse sentido, a participante apresenta indícios de C1: *prever o que os estudantes acharão fácil ou difícil ou conhecer as dificuldades que os estudantes*

frequentemente apresentam, no ensino dos números complexos, de modo que para ela, a história do surgimento dos complexos foi de mais fácil compreensão, quando comparada aos demais episódios históricos abordados no grupo de estudos e, por esse motivo, também considera que os estudantes terão mais facilidade no estudo desse conteúdo. Para Miguel (1997) um dos argumentos que reforçam as potencialidades pedagógicas da utilização da HM no ensino de matemática, volta-se ao fato de que a história se constitui numa fonte de métodos adequados de ensino da matemática, de modo que através da HM pode ser possível a utilização de métodos adequados e interessantes para abordar conteúdos matemáticos no ensino.

Esta seção teve como intuito discutir os indícios do KCS que foram evidenciados nas falas dos participantes durante os encontros com o grupo de estudos. Na próxima seção analisaremos os Conhecimentos do Conteúdo e Ensino (KCT) que foram evidenciados nos comentários dos participantes no decorrer dos encontros propostos.

6.3.2 Analisando aspectos relacionados ao Conhecimento do Conteúdo e Ensino (KCT)

O conhecimento do Conteúdo e Ensino, proposto por Ball *et al.* (2008) foi considerado nesta investigação como subdomínio de conhecimento.

A partir disso, as características desse subdomínio que serão empregadas nessa investigação, são: D1: conhecer a sequência que os conteúdos matemáticos são comumente lecionados na educação básica; D2: saber selecionar exemplos adequados para aprofundar o conteúdo matemático; e D3: saber selecionar representações apropriadas para ilustrar o conteúdo.

No encontro que discutimos o surgimento das geometrias não-euclidianas, indícios do KCT foram evidenciados em cinco momentos nas falas dos participantes durante o decorrer desse encontro.

Na primeira vez que esse conhecimento foi evidenciado, o participante P3 estava refletindo sobre o artigo que fazia aproximações entre o ensino de

matemática e as geometrias não-euclidianas. Nessa situação, P3 relembra sua formação na educação básica, e destaca que essas geometrias foram ensinadas como um adendo pelo professor. Após isto, o participante evidencia indícios de características consideradas nessa investigação, como parte do subdomínio de conhecimento KCT, em especial *D2: saber selecionar exemplos adequados para aprofundar o conteúdo matemático*, como é ressaltado no excerto 26, a seguir:

Excerto 26 [KCT: D2] – [...] o professor vai e fala que existe essa geometria né? **Naquele famoso exemplo, que se você pegar uma reta que sai da Europa e vem para cá, ela não vai ser uma reta né, ela vai ser uma curva.** Acho que muitos livros de matemática, assim, sempre citam esse exemplo, né? [...] **esse é o melhor exemplo, é o exemplo mais plausível, assim, que pode utilizar para uma pessoa entender. Que nos livros já vi vários deles, mas só trazem como curiosidade, que não adianta muito, não vai explicar o que que é, não faz sentido** (P3, GDE2, grifo nosso).

Nessa fala, notamos que o participante propõe um exemplo que considera ser adequado para iniciar os estudos relativos às geometrias não-euclidianas. Entretanto, vale destacar que P3 não considera apenas a apresentação desse conteúdo como fonte de curiosidade ou um “adendo” como algo positivo para a aprendizagem dos estudantes, sendo necessário uma melhor abordagem desse conteúdo.

Em outro momento, após os participantes serem questionados se esse episódio histórico contribuiu para que eles soubessem mais matemática, o KCT novamente foi evidenciado. Diante disso, o participante P2 ao refletir sobre a questão, apresentou maneiras de abordar o conteúdo das geometrias não-euclidianas na educação básica, como abordamos no excerto 27, a seguir:

Excerto 27 [KCT: D3] – Posso algum dia tentar abordar em sala de aula? Logicamente não com todo rigor matemático, por que até mesmo eu não sei, eu não estudei essa parte ainda para poder falar, mas pelo menos com um ponto de curiosidade e não necessariamente só falar: “Ó existe uma geometria não euclidiana”. **Eu posso tentar usar o Geogebra, só para exemplificar alguma coisa, falar do contexto aqui na Terra mesmo, que não é necessariamente uma parte reta** (P2, GDE2, grifo nosso).

Dessa forma, analisamos a partir desse excerto que o participante evidenciou o Conhecimento do Conteúdo e Ensino (KCT), particularmente *D3: saber selecionar representações apropriadas para ilustrar o conteúdo*, ao pensar

em trazer aproximações das geometrias não-euclidianas em sala de aula, exhibe, o que para ele, seria uma forma para representar adequadamente esse conteúdo utilizando uma ferramenta de ensino conhecida como GeoGebra, com intuito de facilitar e adequar o entendimento do conteúdo.

Já no encontro acerca do surgimento do cálculo infinitesimal, indícios do KCT foram evidenciados nos comentários dos participantes em sete momentos. Vale destacar que os sete momentos em que foi possível identificar indícios do KCT, apenas a característica D3 foi evidenciada na fala dos participantes.

Nesse sentido, primeiro momento em que indícios do KCT foram evidenciados, estávamos discutindo se os participantes já conheciam esse episódio histórico que abordava o surgimento do cálculo infinitesimal. Nesse contexto, o participante P8, que já cursou a disciplina de HM, obrigatória da grade de Matemática Licenciatura da Universidade, manifestou se lembrar desse episódio, considerando um dos momentos mais interessantes da disciplina foi a rivalidade entre Leibniz e Newton. Ao ser questionado sobre o que considerou como sendo interessante nessa rivalidade, P8 manifesta o excerto 28, abaixo:

Excerto 28 [KCT: D3] – *Quando fui dar aula pela primeira vez eu fiquei nervoso, **então para introduzir algum conteúdo, contava algum fato interessante (se referindo à HM)** (P8, GDE3, grifo nosso).*

Nesse excerto, P8 apresenta selecionar ideias históricas para ilustrar a introdução de conteúdos matemáticos, de tal maneira que para o participante motiva os estudantes a participarem de maneira mais ativa em sala de aula.

O encontro que teve por objetivo discutir acerca do surgimento dos números complexos, o KCT foi evidenciado em cinco oportunidade, dentre as quais apenas a característica D3 foi manifestada nas falas dos participantes.

Diante disso, um dos momentos em que foi possível identificar os indícios do KCT, o pesquisador indagou os participantes se eles compreendem que o conhecimento e as reflexões feitas a partir desse episódio poderiam contribuir para discussões em sala de aula. Perante a indagação, P2 evidenciou que:

Excerto 29 [KCT: D3] – *Acho que sim, daria para levar para sala de aula. Logicamente, não com os pequenos, seria mais pro pessoal do terceiro ano. [...], **mas poderiam ser como uma introdução, e até***

mesmo só como uma curiosidade, até para não deixar muito assustados com os complexos (P2, GDE4, grifo nosso).

Para P2, as reflexões e conhecimentos compreendidos durante o estudo histórico dos números complexos podem ser debatidos em sala de aula na Educação Básica, porém como uma curiosidade. Nesse sentido, D'Ambrosio (2012b) afirma que o professor ao utilizar de abordagens históricas para o estudo de algum conteúdo matemático em sala de aula, deve-se atentar que, em diversos momentos, as matemáticas desenvolvidas por outras culturas, acabam sendo exibidas como mera curiosidade ou como fato isolado, descontextualizando, assim, sua inserção no cultural. Essa abordagem pode prejudicar os estudantes entregando-lhes, desse modo, uma falsa impressão do desenvolvimento do conhecimento matemático.

Já no último encontro, indícios de características referentes ao KCT apareceram nas falas dos participantes em apenas um momento.

Nesse sentido, o encontro que teve como proposta fazer um fechamento das discussões desenvolvidas durante os encontros com o grupo de estudos, o KCT foi evidenciado após o pesquisador questionar os participantes se as discussões feitas no decorrer dos encontros os auxiliariam como professores na construção de atividades em sala de aula. Dessa forma, P9 manifesta o seguinte excerto 30, abaixo:

Excerto 30 [KCT: D2] – *Agora, do conteúdo, né? Cálculo e geometrias não-euclidianas, eu acho um pouco mais difícil, **mas, números complexos podemos usar o exemplo visto em sala de aula, e levar para eles. O exemplo da rotação... do vetor de 180 graus, da balança dos números negativos*** (P9, GDE5, grifo nosso).

Para P3, as discussões dos encontros propiciaram maneiras diferentes de abordar, em especial, conteúdos voltados ao estudo dos números complexos. Destacamos o fato de que apesar dos encontros terem o intuito a apresentação do surgimento histórico que proporcionaram o desenvolvimento dos números complexos no âmbito matemático, o participante exibiu em sua fala alguns exemplos para ensinar tal conteúdo em sala de aula que não necessariamente possam existir alguma relação com abordagens históricas.

A próxima seção, tem como objetivo apresentar uma síntese dos Conhecimentos Pedagógicos do Conteúdo que foram manifestados pelos participantes da investigação ao longo dos encontros.

6.3.3 Síntese dos Conhecimentos Pedagógicos do Conteúdo (PCK) evidenciados durante os encontros

Durante o desenvolvimento dos encontros com o grupo de estudos, foram manifestados nas falas dos participantes indícios dos subdomínios de conhecimentos pertencentes ao Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK), pertencente a domínio de conhecimentos descritos por Ball *et al.* (2008), a saber: o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS) e o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT).

A Tabela 3, apresentada abaixo, evidencia a frequência e as características evidenciadas na fala dos participantes ao longo dos encontros, referentes ao Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS).

Tabela 3 - Características e frequência do Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes evidenciadas

Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS)		
Episódios	Frequência	Características
Surgimento das Geometrias Não-Euclidianas	6	C1(4x), C2(2x),
Surgimento do Cálculo Infinitesimal	1	C2
Surgimento dos Números Complexos	3	C1, C2(2x)
Fechamento do grupo de estudos	9	C1, C2(8x)
Total	19	

Fonte: Autoria própria do pesquisador

Diante da Tabela 3, apresentada anteriormente, identificamos que indícios do KCS foram possíveis de serem evidenciados no decorrer de todos os encontros propostos no grupo de estudos. De maneira geral, indícios do KCS foram manifestados nos comentários dos participantes em 19 momentos ao longo dos encontros.

O encontro em que foi desenvolvido um fechamento das discussões do grupo de estudos com os participantes, foi o encontro em que esse subdomínio do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo foi mais vezes evidenciado, contabilizando assim, em nove oportunidades.

Vale ressaltar que dentre todas as características consideradas para este subdomínio de conhecimento, puderam ser evidenciadas, ao longo dos encontros, as características C1, C2 e C3. Diante disso, conseqüentemente, indícios das características C4 e C5, não puderam ser evidenciadas nas falas dos participantes da investigação em nenhum dos encontros realizados com o grupo de estudos.

No episódio que tinha como objetivo ressaltar o surgimento das geometrias não-euclidianas, os participantes manifestaram, na maioria de seus comentários, prever o que os estudantes acharão interessante e motivador ao estudarem conteúdos referentes a essa área de conhecimento da matemática.

O episódio que evidenciava o surgimento do cálculo infinitesimal, foi manifestado apenas em um momento indícios do KCS na fala dos participantes. A característica que foi manifestada refere-se ao tentar antecipar o que os estudantes acharam fácil ou difícil ao introduzir abordagens históricas no contexto de sala de aula.

Já no encontro acerca do surgimento dos números complexos, indícios do KCS foram identificados em dois momentos nas falas dos participantes. Novamente, os participantes estavam interessados, ao aplicar esse conhecimento em sala de aula, em prever o que os estudantes acharam interessante e motivador e, para mais, em antecipar o que os estudantes acharão fácil ou difícil em conhecer esse conteúdo. Ambas as características que foram identificadas no encontro sobre o surgimento dos números complexos, também foram evidenciadas no encontro final com o grupo de estudos.

O outro subdomínio de conhecimento pertencente ao PCK, a saber, o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT), também foi possível de ser identificado ao longo de todos os encontros.

A Tabela 4, a seguir, apresenta as características e a frequência com que indícios do KCT puderam ser identificados nas falas e comentários dos participantes.

Tabela 4 - Características e frequência do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino evidenciadas

Conhecimento do Conteúdo e Ensino (KCT)		
Episódios	Frequência	Características
Surgimento das Geometrias Não-Euclidianas	5	D2(3x), D3(2x)
Surgimento do Cálculo Infinitesimal	7	D3(7x)
Surgimento dos Números Complexos	5	D3(5x)
Fechamento do grupo de estudos	1	D2
Total	18	

Fonte: Autoria própria do pesquisador

Ao todo temos que indícios do KCT foram identificados em 18 momentos no decurso dos encontros. Nota-se que dentre todas as características consideradas no subdomínio do KCT apenas duas características, especificamente, D2 e D3, foram possíveis de serem identificadas.

O encontro acerca do surgimento das geometrias não-euclidianas foi o único encontro em que ambas as características foram, simultaneamente, manifestadas nas falas dos participantes. Já nos encontros que tinham como propostas estudar o surgimento do cálculo infinitesimal e dos números complexos, os estudantes/participantes da investigação evidenciaram apenas entender a importância de selecionar representações apropriadas para ilustrar o conteúdo de um conceito ou área de conhecimento em sala de aula. Por fim, no encontro que tinha como objetivo fazer um fechamento das discussões desenvolvidas durante o grupo de estudos, apenas um indício do KCT foi evidenciado nos comentários dos participantes, que se referia a selecionar exemplos adequados para aprofundar o conteúdo matemático.

Salientamos que no decorrer dos encontros um dos subdomínios de conhecimento, o Conhecimento Curricular (CC), que para Shulman (1987) refere-se a compreensão do professor aos tópicos, materiais e recursos disponíveis para determinados níveis de ensino, posicionado por Ball *et al.* (2008) como subdomínio do PCK, foi evidenciado em apenas um momento na

fala dos participantes. Ressaltamos que o fato deste conhecimento não ter sido manifestado nas falas e comentários dos participantes, não implica que os mesmos não possuem tal conhecimento.

Por fim, a presente investigação apresenta possibilidades de discussões em relação às contribuições do estudo da História da Matemática na formação inicial de professores de Matemática, pois como evidenciado nesta pesquisa, diversos conhecimentos necessários à docência puderam ser mobilizados nas falas e comentários dos participantes.

No próximo capítulo, apresentaremos algumas considerações finais desta investigação.

7 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta investigação teve como questão fundamental compreender: *Quais são as contribuições do estudo de episódios históricos para a formação de professores de Matemática?*

Nesse sentido, nos propomos a identificar e analisar quais conhecimentos de professores de Matemática são mobilizados por licenciandos em Matemática no estudo de episódios históricos. De maneira específica, buscamos identificar e analisar conhecimentos matemáticos (conhecimentos de Matemática e sobre Matemática) e Conhecimentos Pedagógicos do Conteúdo, que foram mobilizados pelos estudantes no processo de apresentação e discussão dos episódios históricos.

Entendemos que uma das formas mais significativas para analisar os conhecimentos especializados de professores é ter como base as categorias de conhecimentos fundamentais para os professores, proposta por Shulman (1986, 1987) e, também, os trabalhos de Ball *et al.* (2008), no que diz respeito ao Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT), que no caso dedica-se exclusivamente ao conhecimento do professor de Matemática.

Diante disso, desenvolvemos um grupo de estudos com intuito de estudar três episódios históricos da Matemática, escolhidos, *a priori*, pelo pesquisador e orientadora desta investigação. Os episódios escolhidos foram: (i) o surgimento das geometrias não-euclidianas; (ii) o surgimento do cálculo infinitesimal; e (iii) o surgimento dos números complexos.

Este grupo era formado por licenciandos em matemática de uma Universidade Federal do sul de Minas Gerais. Ao todo foram realizados cinco encontros ao longo dos quais realizou-se a coleta de dados da investigação.

Os dados da pesquisa voltavam-se para as falas e comentários dos participantes que apresentavam indícios da mobilização dos conhecimentos de professores. Estes dados foram analisados tendo como referência dois domínios de conhecimentos e seus subdomínios, a saber, o *Conhecimento do Conteúdo* (constituído de dois subdomínios: Conhecimento de Matemática e Conhecimento sobre Matemática que foram elaborados a partir dos trabalhos de

Ball *et al.* (2008); Shulman (1987) e Cutrera (2013)) e o *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo* (constituído de três subdomínios: Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes, Conhecimento do Conteúdo e Ensino e Conhecimento Curricular que foram elaborados partindo das ideias de Ball *et al.* (2008)).

Os resultados da investigação mostram que o estudo dos episódios históricos selecionados pôde proporcionar que os estudantes refletissem sobre conhecer Matemática e à Natureza do Conhecimento Matemático, de modo que se propõe a discutir e investigar nas falas dos participantes questões tais como: Como é o trabalho do pesquisador matemático? Como as maneiras de se entender o conhecimento, interferem na forma de se pesquisar na Matemática? O papel da comunidade científica na aceitação ou rejeição de uma teoria matemática? Qual a relação da Matemática com outras áreas de conhecimento? Qual é a interferência do contexto histórico no desenvolvimento matemático? Existem verdades absolutas quando pensamos no conhecimento matemático? Pode também possibilitar aos estudantes reflexões sobre conhecimentos pedagógicos necessários à docência, com indagações da maneira: Você entende que o conhecimento e as reflexões acerca deste episódio da HM pode auxiliar em discussões em sala de aula? Em que esses episódios podem ajudá-los na construção de uma atividade docente? Como essa discussão auxiliou você nos conhecimentos relacionados à docência?

Perante o exposto, a presente investigação, também, foi capaz de oportunizar, aos participantes, reflexões acerca das potencialidades da utilização de elementos históricos da Matemática em sala de aula, contribuindo, assim, para uma melhor formação inicial desses estudantes.

Para além disso, essa investigação colabora com as discussões existentes relacionadas a formação inicial de professores de Matemática e com aquelas voltadas a inserção da HM nos cursos de licenciaturas, de modo que apresenta uma possibilidade de estudo de episódios históricos da Matemática que tem o potencial de auxiliar os estudantes na mobilização de conhecimentos necessários à docência, a entenderem ou refletirem sobre como ocorre o desenvolvimento do conhecimento matemático, a (re)pensar a Matemática

(algumas ideias/conceitos matemáticos) e, também, formas de ensiná-la na Educação Básica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, P. C. A. et al. Categorias teóricas de Shulman: revisão integrativa en el ámbito de la formación docente. **Cadernos de Pesquisa**, v. 49, n. 174, p. 130-149, 2019.

ARAMAN, E. M. O. **Contribuições da história da matemática para a construção dos saberes do professor de matemática**. 2011. 238 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina. 2011.

ARAMAN, E. M. O.; BATISTA, I. L. Contribuições da História da Matemática para a Construção dos Saberes do Professor de Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 45, p. 1-30, 2013.

BALESTRI, R. D. **A participação da história da matemática na formação inicial de professores de Matemática na ótica de professores e pesquisadores**. 2008. 104f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina: 2008.

BALESTRI, R. D.; CYRINO, M. C. C. T. A História da Matemática na Formação Inicial de Professores de Matemática. **Alexandria: Revista de Educação em Ciências e Tecnologia**, v. 3, n. 1, p. 103-120, mai. 2010.

BALL, D. L; HOOVER, M; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special. **Journal of teacher education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BALLERINI, J. K. **Características da base de conhecimentos de professores no ensino de biologia celular a partir de um curso de formação continuada**. 2014. 252f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência). Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru, 2014.

BARBIN, E. et al. **Integrating history**: Research perspectives. In: History in mathematics education. Springer, Dordrecht, p. 63-90, 2002.

BARONI, R. L. S.; TEIXEIRA, M. V.; NOBRE, S. R. História da Matemática em contextos da Educação Matemática: contribuições do GPHM. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 153-172, dez, 2011.

BATISTA, I. L. Reconstruções histórico-filosóficas e a pesquisa em Educação Científica e Matemática. In: NARDI, R. **A pesquisa em Ensino de Ciências no Brasil: alguns recortes**. Escrituras Editora, São Paulo, 2007, p. 257 – 273.

BATISTA, I. L.; LUCCAS, S. Abordagem histórico-filosófica e Educação Matemática – uma proposta de interação entre domínios de conhecimento. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 6, n. 1, p. 101-133, 2004.

BORGES, C. Saberes docentes: diferentes tipologias e classificações de um campo de pesquisa. **Educação & Sociedade**, v. 22, p. 59-76, 2001.

BORGES, L. C., CAVALARI, M. F. A história da matemática em propostas didáticas para a formação de professores: um estudo em teses e dissertações brasileiras. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 10, n. 22, p. 174-199, 2021.

BRITO, A. J. A História da Matemática e a da Educação Matemática na Formação de Professores. In... **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2004.

BROLEZZI, A. C. **A arte de contar**: uma introdução ao estudo do valor didático da História da Matemática. 1991. 79 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1991.

CACHAPUZ *et al.* A Emergência da Didática das Ciências como Campo Específico de Conhecimentos. IN: CACHAPUZ A., GIL-PEREZ, D., CARVALHO A. M. P., PRAIA J., VILCHES, A. (orgs.) **A Necessária Renovação do Ensino de Ciências**. São Paulo: Cortez Editora, 2005.

CARRILLO, J. et al. Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching. In: UBUZ, B.; HASER, C. et al. **Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**, n. 8, p. 2985 – 2994, 2013.

CAVALARI, M. F. A inserção da História da Matemática na Formação Inicial de Professores: breves considerações. In: **Anais do XIII Seminário Nacional de História da Matemática**. Fortaleza, CE: SBHMat, 2019. Disponível em: https://www.sbhmat.org/download/download?ID_DOWNLOAD=7. Acesso em: 12 dez. de 2022.

CHARALAMBOUS, C. *et al.* Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers' beliefs and attitudes: insights from evaluating a teacher education program. **Educational Studies in Mathematics**, New York, v. 71, n. 2, p. 161-180, 2009.

CRISPIM, C. V.; SÁ, L. P. O conhecimento pedagógico do conteúdo no desenvolvimento de ações voltadas à formação inicial de professores de química. **Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias**, v. 18, n. 3, p. 543-561, 2019.

CUTRERA, G.E. La Actividad Científica y la Génesis del Conocimiento Científico en los Textos Escolares de Ciencias Naturales: Un análisis de clasificación. **Revista Iberoamericana De Educación**, 2003.

CYRINO, M. C. C. T.; CORRÊA, J. F. Reflexões sobre a constituição de uma história orientada para a formação inicial de professores de matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 15, n. 2, p. 413-424, 2009.

D'AMBROSIO, U. Tendências e perspectivas historiográficas e novos desafios na História da Matemática e na Educação Matemática. **Educação Matemática**

Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 14, n. 3, p. 336-347, 2012a.

_____. Priorizar a História e Filosofia da Matemática na Educação. **Tópicos Educacionais**, Recife, v. 18, n. 1-2, p. 159-175, jun./dez. 2012b.

D'AMBROSIO, B. S. Reflexões sobre a História da Matemática na formação de professores. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Especial n. 1, p. 399-406, 2007.

ETCHEVERRIA, T. C. **Educação continuada em grupos de estudos:** possibilidades com foco no ensino da geometria. 100f. 2008. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. 2008.

FERNANDEZ, C. **A base de conhecimentos para o ensino e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) de professores de Química.** 2014. 329 f. Tese de Livre Docência – Instituto de Química, Universidade de São Paulo, 2014.

_____. Revisitando a base de conhecimentos e o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) de professores de ciências. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)**, v. 17, p. 500-528, 2015.

Disponível em:

<https://www.scielo.br/j/epec/a/jcNkTj9wx5GScw956ZGD4Bh/?lang=pt>. Acesso em: 25 out. de 2021.

_____. PCK-Conhecimento Pedagógico do Conteúdo: perspectivas e possibilidades para a formação de professores. **Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências**, v. 8, p. 1-12, 2011.

FERNANDEZ, C.; GOES, L. F. Conhecimento pedagógico do conteúdo: estado da arte no ensino de ciências e matemática. In: GARRITZ, A. et al. (Org.). **Conocimiento Didáctico del Contenido: Uma perspectiva Iberoamericana.** 1ª ed. Saarbrücken, Alemanha: Editorial Académica Española, p. 65-99, 2014.

FIORENTINI, D.; SOUZA JÚNIOR., A. J.; MELO, G. F, A. Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos. In: GERALDI, C.M.G. et al. (Orgs.). **Cartografias do trabalho docente:** professor(a) pesquisador(a). Campinas: Mercado de Letras, p. 307-355, 2003.

FORATTINI, O. P. A tríade da publicação científica. **Revista Saúde Pública**, n.30, v. 1, p. 3-12, 1996. Disponível em:

http://www.scielosp.org/pdf/rsp/v30n1/5037.pdf?origin=publication_detail.

Acesso em: 24 dez. 2022.

FOSSA, J. A. Matemática, história e compreensão. **Revista Cocar**, v. 2, n. 4, p. 7-16, 2008.

FREIRE, L. I. F., SKEIKA, T. Conhecimentos e saberes necessários para a docência: contribuições do processo formativo e da experiência profissional. In: **Educere-XII Congresso Nacional de Educação**, xii, 2015, Curitiba: Pontifícia Universidade Católica do Paraná, p. 17065-17074, 2015.

FRIED, M. History of mathematics in mathematics education: A Saussurean perspective. **The Mathematics Enthusiast**, v. 5, n. 2, p. 185-198, 2008.

GAUTHIER, C. et al. **Por uma teoria da pedagogia**: pesquisas contemporâneas sobre o saber. Ijuí, RS: Ed. UNIJUÍ, 3ªed, 2013.

GERALDI, W. A aula como acontecimento. **Anais... Semana da Prática Pedagógica**, Universidade de Aveiro, Portugal, CIFOP, 2003.

GIROTTI Jr., G. **Análise do conhecimento pedagógico do conteúdo de professores de Química a partir da perspectiva dos educandos**. 2015. 247f. Tese Doutorado – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

GOES, L. F. **Conhecimento Pedagógico do Conteúdo**: Estado da Arte no Campo da Educação e no Ensino de Química. 2014. 155f. Dissertação (Mestrado) apresentada ao Instituto de Física, ao Instituto de Química, ao Instituto de Biociências e à Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

GOES, L. F., FERNANDEZ, C. Reflexões metodológicas sobre pesquisas do tipo estado da arte: investigando o conhecimento pedagógico do conteúdo. **Revista Eletrônica de Enseñanza de las Ciencias**, v. 17, n. 1, p. 94 – 118, 2018.

GROSSMAN, P. L. **The making of a teacher**: teacher knowledge and teacher education. New York: Teachers College Press, 1990.

HURRELL, D. P. What Teachers Need to Know to Teach Mathematics: An argument for a reconceptualised model. **Australian Journal of Teacher Education**, v. 38, n. 11, 2013.

HYGINO, C. B.; SOUZA, N. S.; LINHARES, M. P. Reflexões sobre a natureza da ciência em aulas de física: estudo de um episódio histórico do Brasil colonial. **Experiências em Ensino de Ciências**, v. 7, n. 2, 2012.

JANKVIST, U. T. et al. Analysing the use of history of mathematics through MKT. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 46, n. 4, p. 495-507, 2015.

KUHN, T. S. **A estrutura das revoluções científicas**. Editora Perspectiva SA, São Paulo, 5ª ed., 1998.

_____. **A tensão essencial**. Trad. Rui Pacheco. Lisboa, Portugal. Ed. 70, 1977.

- LEMES, J. C. **Propostas com Materiais Manipulativos e Jogos para o ensino da Matemática na perspectiva inclusiva: um estudo com foco nos conhecimentos de futuros professores**. 2022. 234f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências), Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, 2022.
- LIU, P. History as a platform for developing college students' epistemological beliefs of mathematics. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Penang, n. 7, p. 473-499, 2009.
- MARQUES, D. M. **Dificuldades e possibilidades da utilização da história da ciência no ensino de química: um estudo de caso com professores em formação inicial**. 2010. 118 p. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências, 2010. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/102023>. Acesso em: 10 jan. de 2023.
- MATHEWS, M. R. História, filosofia e ensino de ciências: a tendência atual de reaproximação. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 12, n. 3, p. 164-214, dez. 1995. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/7084/6555>. Acesso: 25 dez de 2022.
- MENDES, I. A. A investigação histórica na formação de professores de matemática. **Revista Cocar**, Belém, v. 4, n. 7, p. 37-48, 2010.
- MENDONÇA, A. L. O; VIDEIRA, A. A. P. Progresso científico e incomensurabilidade em Thomas Kuhn. **Scientiae studia**, v. 5, p. 169-183, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1590/S1678-31662007000200003>. Acesso em: 03 jan de 2023.
- MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetiké**, v. 5, n. 2, p. 73-106, 1997.
- MIGUEL, A.; MIORIM, M. **História na educação matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2ª ed., 2011.
- MOREIRA, P. C.; FERREIRA, A. C. O lugar da matemática na Licenciatura em Matemática. **Bolema**, v. 27, n. 47, p. 981-1005, dez. 2013.
- MORIEL Jr, J. G.; WIELEWSKI, G. D. Base de conhecimento de professores de matemática: do genérico ao especializado. **Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas**, v. 18, n. 2, p. 126-133, 2017.
- NUNES, C. M. F. Saberes docentes e formação de professores: um breve panorama da pesquisa brasileira. **Educação & sociedade**, v. 22, p. 27-42, 2001. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/es/a/3RwPLmZMRk35bjpfhPGDsTv/?lang=pt>. Acesso em: 11 jun. de 2021.

PATRONO, R. M.; FERREIRA, A. C. Levantamento de pesquisas brasileiras sobre o Conhecimento Matemático para o Ensino e Formação de Professores. **Revemp**, Ouro Preto, v. 3, p. 1-24, 2021.

PUNTES, R. V.; AQUINO, O. F.; QUILLICI NETO, A. Profissionalização dos professores: conhecimentos, saberes e competências necessários à docência. **Educar em Revista**, p. 169-184, 2009. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/er/a/W8zSkmsQGRnYTvPJhXCR5Hc/abstract/?format=html&lang=pt>>. Acesso em: 25 out. 2021.

ROLDÃO, M. C. Função docente: natureza e construção do conhecimento profissional. **Revista brasileira de educação**, v. 12, p. 94-103, 2007. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/rbedu/a/XPqzwwYZ7YxTjLVPJD5NWgp/?lang=pt>>. Acesso em: 25 out. de 2021.

SAITO, F. História da Matemática e educação matemática: uma proposta para atualizar o diálogo entre historiadores e educadores. In: **Actas VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática**, 3979-3987. Montevideo: FISEM/SEMUR, 2013.

SANTOS, E. L. P. C. **A mobilização dos aspectos da Natureza da Ciência e Conhecimento Pedagógico de Conteúdo na formação inicial de professores de física**. 2021. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá: 2021.

SHULMAN, L. S. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

_____. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard educational review**, v. 57, n. 1, p. 1-23, 1987.

SILVA, C. C.; MOURA, B. A. A natureza da ciência por meio do estudo de episódios históricos: o caso da popularização da óptica newtoniana. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 30, n. 1, 1602 – 1602-9, 2008.

SILVA, F. F. **Mulheres na ciência: vozes, tempos, lugares e trajetórias**. Tese (Doutorado em Educação em Ciências). Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2012. Disponível em: <http://repositorio.furg.br/handle/1/5028>. Acesso em: 10 ago. de 2017.

TARDIF, M; LESSARD, C.; LAHAYE, L. Os professores face ao saber: esboço de uma problemática do saber docente. **Teoria e educação**, v. 4, p. 215-233, 1991.

TARDIF, M.; RAYMOND, D. Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério. **Educação & sociedade**, v. 21, p. 209-244, 2000. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/es/a/Ks666mx7qLpbLThJQmXL7CB/abstract/?lang=pt>. Acesso em: 08 jun. 2020.

VIANNA, C. R. **Matemática e História**: algumas relações e implicações pedagógicas. 228 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

APÊNDICE A – QUESTÕES REFERENTES AO ENCONTRO ACERCA DO SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

- O que vocês acharam da leitura dos textos indicados?
- Vocês já conheciam esse episódio específico da História da Matemática?
- Parte fundamental para o surgimento das geometrias não-euclidianas? (negação do postulado 5 de Euclides)
- O fato de terem surgido novas geometrias, através da negação de um postulado de Euclides, invalida a teoria euclidiana? Porque?
- Foi simples negar o 5º postulado de Euclides? Porque?
- O conhecimento matemático é desenvolvido de forma linear?
- Podemos afirmar que existem verdades (absolutas) na matemática?
- Você entende que o conhecimento deste episódio da HM contribuiu para que você soubesse mais matemática? Por que?
- Você entende que o conhecimento e as reflexões acerca deste episódio da HM pode auxiliar em discussões em sala de aula? Como?

APÊNDICE B – QUESTÕES REFERENTES AO ENCONTRO ACERCA DO SURGIMENTO DO CÁLCULO INFINITESIMAL

- O que vocês acharam da leitura dos textos indicados?
- Vocês já conheciam esse episódio específico da História da Matemática?
- Similaridade dos esforços feitos por Kepler, Eudoxo, Arquimedes com o que estudamos na disciplina de cálculo?
- Vocês já conheciam tais métodos?
- Os esforços para o desenvolvimento do cálculo surgiram de maneira rápida? Ou esses esforços foram sendo construídos através da História da Matemática?
- A maneira de se fazer matemática mudou após o desenvolvimento do cálculo?
- O desenvolvimento do cálculo feito por Newton difere do desenvolvimento do cálculo feito por Leibniz? Se sim, de qual modo?
- Esse episódio histórico contribuiu para uma reflexão sobre a forma de se fazer matemática? Porque?
- Você entende que o conhecimento deste episódio da HM contribuiu para que você soubesse mais matemática? Por que?
- Você entende que o conhecimento e as reflexões acerca deste episódio da HM pode auxiliar em discussões em sala de aula? Como?

APÊNDICE C – QUESTÕES REFERENTES AO ENCONTRO ACERCA DO SURGIMENTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

- O que vocês acharam da leitura dos textos indicados?
- Vocês já conheciam esse episódio específico da História da Matemática?
- O que levou ao desenvolvimento da área de conhecimento? Quais os problemas que os estudiosos queriam resolver?
- Os esforços para o desenvolvimento dos números complexos, surgiram de maneira rápida? Ou esses esforços foram sendo construídos através dos anos?
- Por que essa teoria sobre os números complexos demorou tanto tempo para ser aceita no meio matemático?
- O que uma teoria/ideia precisa para ser aceita?
- O contexto influencia na aceitação de uma teoria matemática? Por que?
- Você entende que o conhecimento deste episódio da HM contribuiu para que você soubesse mais matemática? Por que?
- Você entende que o conhecimento e as reflexões acerca deste episódio da HM pode auxiliar em discussões em sala de aula? Como?