

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
MATEMÁTICA**

**Simetrias em Configurações Centrais**

**Mariane Urias da Silva**

**Itajubá, abril de 2014**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM**  
**MATEMÁTICA**

**Mariane Urias da Silva**

**Simetrias em Configurações Centrais**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática.

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes

**Abril de 2014**

**Itajubá**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
MATEMÁTICA**

**Mariane Urias da Silva**

**Simetrias em Configurações Centrais**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 30 de abril de 2014, conferindo à autora o título de **Mestre em Ciências em Matemática**.

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes (Orientador)

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Luci Any Francisco Roberto

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

**Itajubá  
2014**

# Agradecimentos

Aos meus pais, João Carlos e Jandira, e à minha irmã, Juliana, pelo apoio e compreensão.

Ao meu namorado, Thiago, pela força e presença constante mesmo à distância.

Ao meu orientador Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes, pelos ensinamentos, pela paciência e pela persistência.

À banca pela disposição e pelas sugestões feitas.

À minha amiga Thais, pela companhia e pelos momentos de conforto.

Aos companheiros de turma Antonio, Felipe, Fernando e Jarne pelos estudos compartilhados e pela companhia.

Aos médicos responsáveis pelo meu tratamento por terem tornado possível que eu chegasse ao fim deste trabalho com vida.

A todos os amigos e familiares que torceram por mais esta vitória.

À CAPES, pela concessão da bolsa.

# Resumo

Neste trabalho apresentamos quatro abordagens diferentes para problemas que envolvam simetria em configurações centrais. Para cada problema considerado usamos uma equação equivalente para configurações centrais. No final fazemos uma análise dos métodos utilizados em cada caso e comentamos as dificuldades em se utilizar métodos diferentes.

**Palavras-chave:** Problema de  $n$  Corpos, Solução Homográfica, Configuração Central, Simetria.

# Abstract

In this work we present four different approaches for problems involving symmetry in central configurations. For each considered problem we use an equivalent set of equations for central configurations. At the end we make an analysis of the methods used in each case and commented on the difficulties in using different methods.

**Keywords:**  $n$  Body Problem, Homographic Solution, Central Configurations, Symmetry.

# Lista de Figuras

1.1	Não é configuração central. . . . .	6
1.2	Uma possível configuração central. . . . .	7
2.1	Uma configuração central planar convexa de quatro massas. . . . .	12
2.2	Uma configuração central planar não convexa de quatro massas. . . . .	12
4.1	Uma configuração simétrica côncava. . . . .	37
4.2	O sinal de $p_1$ . . . . .	41
4.3	O sinal de $p_2$ . . . . .	41
4.4	As regiões $A$ e $B$ onde $m_4 > 0$ . . . . .	42
4.5	O sinal de $p_4$ . . . . .	43
4.6	As regiões $C$ e $D$ onde $m_i > 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$ . . . . .	43
4.7	Configuração do tipo pipa. . . . .	45
4.8	As regiões $A_1, A_2$ e $A_3$ . . . . .	46
5.1	Uma configuração de cinco corpos. . . . .	49
5.2	A curva $g(t, s) = 0$ . . . . .	51
5.3	O gráfico de $k(t)$ para $t \in (1/\sqrt{3}, \sqrt{3})$ com $a < 0$ . . . . .	54
5.4	O gráfico de $k(t)$ para $t \in (1/\sqrt{3}, \sqrt{3})$ com $a > 0$ . . . . .	54
5.5	Uma configuração empilhada de cinco corpos que não é uma configuração central. . . . .	55
5.6	Uma configuração simétrica com respeito a $m_2$ de cinco corpos que não é uma configuração central. . . . .	57
5.7	Configuração central simétrica com respeito ao perpendicular bissetor do segmento $\overline{r_1 r_3}$ . . . . .	57
5.8	As curvas $C = 0, \tilde{A}_{33} = 0, \tilde{A}_{12} = 0$ e $-\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33} + \tilde{A}_{13}\tilde{A}_{31} = 0$ . . . . .	60
5.9	O gráfico da função $l(s)$ . . . . .	61
5.10	Uma configuração empilhada simétrica de cinco corpos que não é uma configuração central. . . . .	62
5.11	As curvas correspondentes a $m_{2_{top}} = 0, m_{2_{bot}} = 0, m_{4_{top}} = 0, m_{4_{bot}} = 0, m_{5_{top}} = 0$ e $m_{5_{bot}} = 0$ . . . . .	65
5.12	As curvas correspondentes a $m_{2_{top}} = 0$ e $m_{2_{bot}} = 0$ e os sinais de $m_{2_{top}}$ e $m_{2_{bot}}$ fora destas curvas. As regiões sombreadas mostram pra quais valores de $t$ e $u$ temos $m_2 > 0$ . . . . .	66
5.13	As curvas correspondentes a $m_{4_{top}} = 0$ e $m_{4_{bot}} = 0$ e os sinais de $m_{4_{top}}$ e $m_{4_{bot}}$ fora destas curvas. As regiões sombreadas mostram pra quais valores de $t$ e $u$ temos $m_4 > 0$ . . . . .	66

- 5.14 As curvas correspondentes a  $m_{2_{top}} = 0$  e  $m_{2_{bot}} = 0$  e os sinais de  $m_{2_{top}}$  e  $m_{2_{bot}}$  fora destas curvas. As regiões sombreadas mostram pra quais valores de  $t$  e  $u$  temos  $m_2 > 0$ . . . . 67



# Índice

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>iv</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Configurações centrais planares de quatro corpos com massas iguais</b>	<b>11</b>
<b>3 Simetria das configurações centrais planares convexas de quatro corpos</b>	<b>24</b>
<b>4 Configurações Centrais Planares Côncavas Simétricas de Quatro Corpos</b>	<b>35</b>
<b>5 Simetria em Configurações Centrais de cinco corpos: Euler mais dois</b>	<b>48</b>
<b>6 Comparações e Conclusões</b>	<b>68</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>69</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A curiosidade é uma característica inata do ser humano, e é por causa desta característica que há muito tempo o homem já se perguntava como era a relação entre a Terra e o Sol. Muitas foram as teorias levantadas sobre tal relação, até em 1666 Newton formulou a chamada Lei da Gravitação Universal [7] que determina como se dá a relação entre o Sol e os planetas, e muito além disso trata da relação entre quaisquer corpos massivos.

A partir desta formulação surgiu o chamado problema de  $n$  corpos: *Dado um sistema isolado no espaço, formado por  $n$  corpos com massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  interagindo pela lei da gravitação universal, qual é a dinâmica das posições destes corpos?*

Newton resolveu este problema para o caso de  $n = 2$ . Depois Euler encontrou soluções colineares para  $n = 3$  e Lagrange resolveu para  $n = 3$ , onde os corpos se encontravam nos vértices de um triângulo equilátero.

Observe que as soluções de Euler e Lagrange são casos particulares do problema de 3 corpos. Por algum tempo estudiosos tentaram resolver tal problema para  $n \geq 3$ , mas em 1887 Bruns provou que o problema de  $n$  corpos, para  $n \geq 3$ , não pode ser resolvido por nenhum método de quadraturas envolvendo as integrais de movimento algébricas usuais, vide [3]. Assim começaram as investigações de soluções particulares para o problema de  $n$  corpos. Uma destas soluções particulares é a chamada solução homográfica, que são aquelas onde a configuração é preservada ao longo do tempo, a menos de homotetias e rotações. Pelo teorema de Laplace temos que a cada instante numa solução homográfica, a configuração dos corpos é uma configuração central, que é aquela onde a aceleração de cada corpo é proporcional à sua posição em cada instante. Abaixo segue a definição de uma configuração central.

**Definição 1.1.** *Considere  $n$  corpos com massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Uma configuração  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ , onde  $r_i$  é a posição da massa  $m_i$ , é dita uma configuração central, se existe uma constante  $\lambda$  tal que*

$$\ddot{r}_i = \lambda(r_i - c), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

onde  $c = \frac{1}{M} \sum_i m_i r_i$  é o centro de massa do sistema, com  $M = \sum_i m_i$ . Equivalentemente, temos

que  $r$  é uma configuração central se,

$$\lambda r_i = - \sum_{j \neq i} \frac{m_j (r_i - r_j)}{r_{ij}^3} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

onde  $r_{ij} = \|r_i - r_j\|$ .

Outra forma de escrevermos as equações (1.1) é

$$\frac{\partial U}{\partial r_i} = -\lambda \frac{\partial I}{\partial r_i}$$

onde  $U = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}$  é o potencial Newtoniano e  $I = \frac{1}{M} \sum_{i < j} m_i m_j r_{ij}^2$  é o momento de inércia.

Muitas vezes, o uso das equações (1.1) para a resolução de problemas é um pouco complicado, por isso temos algumas equações equivalentes para configurações centrais. Neste trabalho usaremos três equações equivalentes para a resolução de problemas envolvendo simetria em configurações centrais.

Uma das equações equivalentes para configurações centrais são as chamadas equações de Andoyer que são dadas por

$$f_{ij} = \sum_{k \neq i, j} m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} = 0 \quad (1.2)$$

para  $1 \leq i < j \leq n$ , onde  $R_{ij} = 1/r_{ij}^3$  e  $\Delta_{ijk} = (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k)$  que é duas vezes a área orientada do triângulo formado por  $r_i, r_j$  e  $r_k$ . Abaixo mostraremos a equivalência entre as equações de Andoyer e as equações (1.1).

**Proposição 1.1.** *Considere  $n$  massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  num mesmo plano e não-colineares, localizadas, respectivamente, em  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Então o sistema*

$$\lambda r_i = - \sum_{j \neq i} m_j \frac{(r_i - r_j)}{r_{ij}^3}$$

para  $1 \leq i < j \leq n$ , é equivalente ao sistema

$$f_{ij} = \sum_{k \neq i, j} m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} = 0 \quad (1.3)$$

para  $1 \leq i < j \leq n$ , onde  $R_{ij} = 1/r_{ij}^3$  e  $\Delta_{ijk} = (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k)$ .

**Demonstração.** Suponha que  $n$  massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  com posições  $r_1, r_2, \dots, r_n$  formam uma configuração central, ou seja, existe  $\lambda > 0$  tal que

$$\lambda r_i = - \sum_{k \neq i} m_k R_{ik} (r_i - r_k)$$

para  $1 \leq i \leq n$ . Tome  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  com  $j \neq i$ , assim

$$\lambda r_i = - \sum_{k \neq i, j} m_k R_{ik}(r_i - r_k) - m_j R_{ij}(r_i - r_j). \quad (1.4)$$

Da mesma forma tomando  $i \neq j$  em  $\{1, 2, \dots, n\}$  e para  $r_j$  temos

$$\lambda r_j = - \sum_{k \neq i, j} m_k R_{jk}(r_j - r_k) - m_i R_{ji}(r_j - r_i). \quad (1.5)$$

Logo, subtraindo (1.5) de (1.4), temos

$$\lambda(r_i - r_j) = - \sum_{k \neq i, j} m_k [R_{ik}(r_i - r_k) - R_{jk}(r_j - r_k)] - [m_j R_{ij} - m_i R_{ji}](r_i - r_j). \quad (1.6)$$

Tomando o produto vetorial por  $(r_i - r_j)$  em ambos os lados de (1.6), temos

$$\begin{aligned} 0 &= - \sum_{k \neq i, j} m_k [R_{ik}(r_i - r_k) \wedge (r_i - r_j) - R_{jk}(r_j - r_k) \wedge (r_i - r_j)] \\ &= - \sum_{k \neq i, j} m_k [R_{ik} \Delta_{ikj} + R_{jk} \Delta_{jki}] \\ &= - \sum_{k \neq i, j} m_k [-R_{ik} \Delta_{ijk} + R_{jk} \Delta_{ijk}] \\ &= \sum_{k \neq i, j} m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} \\ &= f_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto,  $f_{ij} = 0$  para todo  $1 \leq i < j \leq n$ .

Por outro lado, assumamos que  $f_{ij} = 0$  para todo  $1 \leq i < j \leq n$ , ou seja,

$$\sum_{k \neq i, j} m_k (R_{ik} - R_{jk})(r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k) = 0.$$

A equação acima pode ser escrita como

$$\sum_{k \neq i, j} m_k R_{ik}(r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k) = \sum_{k \neq i, j} m_k R_{jk}(r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k).$$

Observe que inserindo o  $j$ -ésimo termo na soma à esquerda, não há nenhuma alteração. Da mesma forma se inserirmos o  $i$ -ésimo termo na soma da direita. Assim, temos

$$\sum_{k \neq i} m_k R_{ik}(r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k) = \sum_{k \neq j} m_k R_{jk}(r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k)$$

ou seja,

$$(r_i - r_j) \wedge \sum_{k \neq i} m_k R_{ik}(r_i - r_k) = \sum_{k \neq j} m_k R_{jk} [r_i \wedge (r_j - r_k) + (r_j \wedge r_k)]$$

podemos escrever a igualdade acima da seguinte forma

$$(r_i - r_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} = \sum_{k \neq j} m_k R_{jk} [r_i \wedge (r_j - r_k) + (r_j \wedge r_k)],$$

onde  $F_i$  é a força sobre o corpo  $r_i$ .

Podemos acrescentar  $-r_j$  no último termo do lado direito sem alterá-lo, assim

$$(r_i - r_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} = \sum_{k \neq j} m_k R_{jk} [r_i \wedge (r_j - r_k) + r_j \wedge (-r_j + r_k)].$$

Assim,

$$\begin{aligned} (r_i - r_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} &= \sum_{k \neq j} m_k R_{jk} [r_i \wedge (r_j - r_k) - r_j \wedge (r_j - r_k)] \\ &= \sum_{k \neq j} m_k R_{jk} [(r_i - r_j) \wedge (r_j - r_k)] \\ &= (r_i - r_j) \wedge \frac{F_j}{m_j} \end{aligned}$$

logo,

$$(r_i - r_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} = (r_i - r_j) \wedge \frac{F_j}{m_j}$$

o que implica

$$(r_i - r_j) \wedge (m_j F_i - m_i F_j) = 0 \quad (1.7)$$

abrindo o produto vetorial temos

$$r_i \wedge m_j F_i - r_i \wedge m_i F_j - r_j \wedge m_j F_i + r_j \wedge m_i F_j = 0$$

assim,

$$m_j r_i \wedge F_i - m_i r_i \wedge F_j - m_j r_j \wedge F_i + m_i r_j \wedge F_j = 0$$

somando em  $j$  para  $j \neq i$  temos

$$(M - m_i) r_i \wedge F_i - m_i r_i \wedge \sum_{j \neq i} F_j - \left( \sum_{j \neq i} m_j r_j \right) \wedge F_i + m_i \sum_{j \neq i} r_j \wedge F_j = 0 \quad (1.8)$$

onde  $M$  é a massa total do sistema. Como o centro de massa está na origem do referencial temos

$$\sum_j m_j r_j \Rightarrow \sum_{j \neq i} m_j r_j = -m_i r_i. \quad (1.9)$$

Estamos trabalhando com um espaço homogêneo e isotrópico e nosso sistema está isolado,

então temos que as quantidades de momento linear e momento angular são conservadas, assim

$$\sum_j F_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j \neq i} F_j = -F_i \quad (1.10)$$

e

$$\sum_j (r_j \wedge F_j) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j \neq i} (r_j \wedge F_j) = -r_i \wedge F_i. \quad (1.11)$$

Substituindo (1.9), (1.10) e (1.11) em (1.8) obtemos

$$Mr_i \wedge F_i - m_i r_i \wedge F_i + m_i r_i \wedge F_i + m_i r_i \wedge F_i - m_i r_i \wedge F_i = 0.$$

Assim,  $Mr_i \wedge F_i = 0$ , o que implica que  $r_i$  e  $F_i$  são paralelas, ou seja,  $F_i = \lambda_i r_i$ , que pode ser escrito como  $\ddot{r}_i = (\lambda_i/m_i)r_i$ . De (1.7) temos

$$\left( \frac{F_i}{m_i} - \frac{F_j}{m_j} \right) \wedge (r_i - r_j) = 0$$

logo,

$$\left( \frac{\lambda_i}{m_i} r_i - \frac{\lambda_j}{m_j} r_j \right) \wedge (r_i - r_j) = 0.$$

Assim,

$$-\frac{\lambda_i}{m_i} r_i \wedge r_j - \frac{\lambda_j}{m_j} r_j \wedge r_i = 0,$$

o que implica

$$\left( \frac{\lambda_i}{m_i} - \frac{\lambda_j}{m_j} \right) (r_j \wedge r_i) = 0, \quad \forall i, j.$$

Se  $r_j$  for paralelo a  $r_i$  para todo  $j \neq i$  a igualdade acima é satisfeita, como a configuração é não colinear temos,

$$\frac{\lambda_i}{m_i} = \frac{\lambda_j}{m_j} = \lambda$$

para todo  $i, j$ . Portanto,

$$\ddot{r}_i = \lambda r_i$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  e portanto temos uma configuração central. ■

Uma consequência importante das equações de Andoyer é o Teorema do Perpendicular Bissetor que é uma ferramenta muito útil para determinarmos a não existência de configurações centrais.

**Teorema 1.1. (Perpendicular Bissetor)** *Considere uma configuração  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  formada por  $n$  corpos com massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  positivas. Tome dois corpos nas posições  $r_i$*

e  $r_j$ , trace a reta que contém estes dois corpos e o perpendicular bissetor do segmento  $r_i r_j$ , como nas figuras 1.1 e 1.2. Estas duas retas determinam dois cones no plano. Então, se  $r$  é uma configuração central, sempre que existirem massas em um dos cones abertos devem existir massas no outro cone, ou seja, se as outras  $(n - 2)$  massas estiverem localizadas em um dos cones abertos, então  $r$  não é uma configuração central.

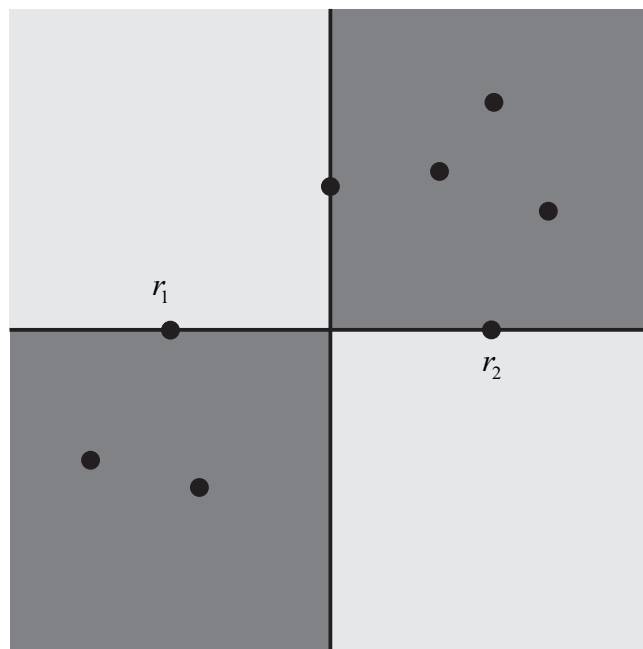


Figura 1.1: Não é configuração central.

**Demonstração.** Consideraremos que as retas dividem o plano em quatro quadrantes ordenados ciclicamente, como usual. Consideraremos também que a orientação positiva do plano é o sentido anti-horário. Sem perda de generalidade vamos considerar que os índices  $i$  e  $j$  são 1 e 2. Suponhamos, por contradição, que as massas  $m_3, m_4, \dots, m_n$  estejam todas no cone aberto formado pelo primeiro e pelo terceiro quadrantes, ou sobre o perpendicular bissetor, mas não todas sobre o perpendicular bissetor.

Como, por hipótese,  $r$  é uma configuração central, temos que as equações de Andoyer são satisfeitas, em particular,

$$f_{12} = \sum_{k=3}^n m_k (R_{1k} - R_{2k}) \Delta_{12k} = 0.$$

Vamos dividir a soma acima em três parcelas, a primeira com índice  $l$  para os corpos que estão no primeiro quadrante, a segunda com índice  $k$  para os corpos que estão no terceiro quadrante e a terceira com índice  $i$  para os corpos que estão sobre o perpendicular bissetor. Assim a soma fica,

$$f_{12} = \sum_l m_l (R_{1l} - R_{2l}) \Delta_{12l} + \sum_k m_k (R_{1k} - R_{2k}) \Delta_{12k} + \sum_i m_i (R_{1i} - R_{2i}) \Delta_{12i} = 0.$$

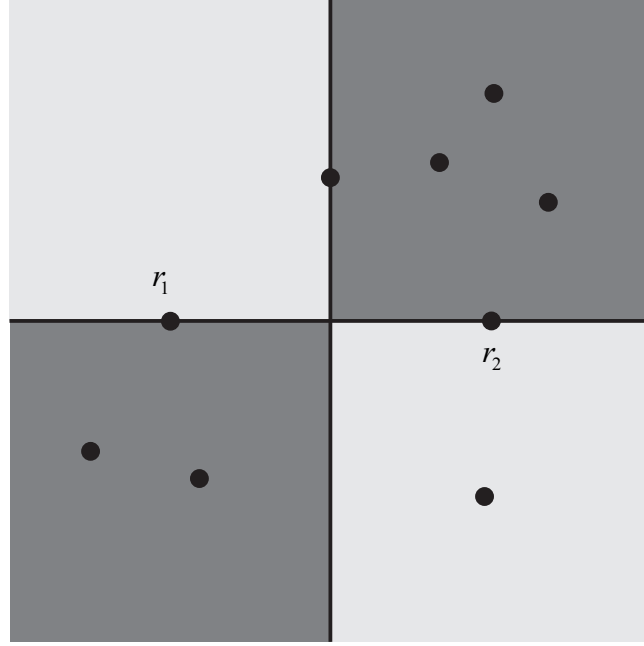


Figura 1.2: Uma possível configuração central.

Observe que a última parcela é nula, pois  $R_{1i} = R_{2i}$  para todo  $i$ . Na primeira parcela temos que  $\Delta_{12l} > 0$  e como  $r_{1l} > r_{2l}$  temos que  $R_{1l} < R_{2l}$ , logo a primeira parcela é negativa pois  $m_l > 0$  para todo  $l$ . Agora se observarmos a segunda parcela, temos que  $\Delta_{12k} < 0$  e como  $r_{1k} < r_{2k}$  segue que  $R_{1k} > R_{2k}$ , portanto a segunda parcela também é negativa, pois  $m_k > 0$  para todo  $k$ . Assim, temos que  $f_{12} < 0$  o que é uma contradição. Portanto, se existe uma massa em um dos cones abertos, existe massa no outro cone.

■

Agora veremos as chamadas equações de Dziobek. Na Definição 1.1 estamos considerando o potencial Newtoniano, mas se considerarmos o potencial mais geral dado por

$$U = \sum_{i < j} m_i m_j S_{ij},$$

onde  $S_{ij} = \|r_i - r_j\|^{2a}$  com  $a < 0$ , temos que as equações (1.1) ficam

$$\lambda(r_i - c) = - \sum_{j \neq i} m_j (r_i - r_j) S_{ij} \quad (1.12)$$

onde  $c$  é o centro de massa do sistema. Observe que tomando  $a = -3/2$  temos o potencial Newtoniano e voltamos para as equações (1.1). Para deduzirmos as equações de Dziobek usaremos as equações (1.12).

**Definição 1.2.** *Uma configuração de Dziobek é uma configuração de  $n$  partículas com massas*



não nulas, tal que existe um vetor não nulo  $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n) \in \mathbb{R}^n$  de forma que

$$\begin{cases} \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n = 0 \\ \Delta_1 r_1 + \Delta_2 r_2 + \dots + \Delta_n r_n = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

e tal que para algum par  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$  vale

$$S_{ij} = \xi + \eta d_i d_j$$

onde  $d_k = \frac{\Delta_k}{m_k}$ .

**Observação 1.1.** Dada uma solução não nula do sistema (1.13), podemos deduzir todas as outras soluções através de multiplicações por escalar.

**Proposição 1.2.** Toda configuração de Dziobek é uma configuração central.

**Demonstração.** Seja  $(r_1, \dots, r_n)$  uma configuração de Dziobek, ou seja, existem  $\xi, \eta \in \mathbb{R}$  tais que  $S_{ij} = \xi + \eta d_i d_j$ . Fixe um índice  $i$ . Assim,

$$\begin{aligned} M\xi(r_i - c) &= M\xi r_i - \xi \sum_j m_j r_j \\ &= \xi \left( \sum_j m_j r_i - \sum_j m_j r_j \right) \\ &= \sum_{j \neq i} \xi m_j (r_i - r_j) \\ &= \sum_{j \neq i} (S_{ij} - \eta d_i d_j) m_j (r_i - r_j) \\ &= \sum_{j \neq i} m_j S_{ij} (r_i - r_j) - \eta \sum_{j \neq i} \frac{\Delta_i \Delta_j}{m_i m_j} m_j (r_i - r_j) \\ &= \sum_{j \neq i} m_j S_{ij} (r_i - r_j) - \eta \frac{\Delta_i}{m_i} \left( \sum_j \Delta_j (r_i - r_j) \right) \\ &= \sum_{j \neq i} m_j S_{ij} (r_i - r_j) - \eta \frac{\Delta_i}{m_i} \left( r_i \sum_j \Delta_j - \sum_j \Delta_j r_j \right) \\ &= \sum_{j \neq i} m_j S_{ij} (r_i - r_j). \end{aligned}$$

Logo, tomando  $\lambda = M\xi$ , temos que a configuração  $(r_1, \dots, r_n)$  é uma configuração central. ■

**Proposição 1.3.** Toda configuração central de  $n$  corpos em dimensão  $n - 2$  é uma configuração de Dziobek.

**Demonstração.** Seja  $(r_1, \dots, r_n)$  uma configuração central, então

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j \neq i} m_j S_{ij} (r_i - r_j) - \lambda \left( r_i - \frac{1}{M} \sum_j m_j r_j \right) \\
&= \sum_{j \neq i} m_j S_{ij} (r_i - r_j) - \lambda \left( \frac{1}{M} \sum_j m_j r_i - \frac{1}{M} \sum_j m_j r_j \right) \\
&= \sum_{j \neq i} m_j S_{ij} (r_i - r_j) - \frac{\lambda}{M} \sum_{j \neq i} m_j (r_i - r_j) \\
&= \sum_{j \neq i} m_j \left( S_{ij} - \frac{\lambda}{M} \right) (r_i - r_j) \\
&= \sum_{j \neq i} m_j \check{S}_{ij} (r_i - r_j),
\end{aligned}$$

onde  $\check{S}_{ij} = S_{ij} - \frac{\lambda}{M}$ . Além disso, usando (1.13) temos que

$$\sum_{j \neq i} \Delta_j (r_i - r_j) = \sum_j \Delta_j r_i - \sum_j \Delta_j r_j = 0.$$

Pela unicidade de  $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$  a menos de uma constante multiplicativa, temos que existe  $\theta_i \in \mathbb{R}$  tal que  $\theta_i \Delta_j = m_j \check{S}_{ij}$ . Então

$$\begin{aligned}
m_i m_j \check{S}_{ij} = m_j m_i \check{S}_{ji} &\Rightarrow m_i \theta_i \Delta_j = m_j \theta_j \Delta_i \\
&\Rightarrow \theta_i \frac{\Delta_j}{m_j} = \theta_j \frac{\Delta_i}{m_i} \\
&\Rightarrow \theta_i d_j = \theta_j d_i.
\end{aligned}$$

Olhando para a matriz

$$J = \begin{pmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_n \\ d_1 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

vemos que seus subdeterminantes de ordem 2 são nulos, logo o posto de  $J$  é no máximo 1, mas como existe pelo menos um  $d_i = \frac{\Delta_i}{m_i}$  que não é nulo, segue que o posto de  $J$  é exatamente 1. Logo, existe  $\mu \in \mathbb{R}$  de forma que  $\theta_i = \mu d_i$ . Assim,

$$\begin{aligned}
m_j \check{S}_{ij} = \mu d_i \Delta_j &\Rightarrow \check{S}_{ij} = \mu d_i \frac{\Delta_j}{m_j} \\
&\Rightarrow \check{S}_{ij} = \mu d_i d_j \\
&\Rightarrow S_{ij} - \frac{\lambda}{M} = \mu d_i d_j \\
&\Rightarrow S_{ij} = \frac{\lambda}{M} + \mu d_i d_j.
\end{aligned}$$

Logo, tomando  $\xi = \frac{\lambda}{M}$  e  $\eta = \mu$ , temos que  $(r_1, \dots, r_n)$  é uma configuração de Dziobek.



Na Proposição 1.3 vimos que uma configuração central de dimensão  $n - 2$  é uma configuração de Dziobek onde  $\xi = \frac{\lambda}{M}$  e  $\eta = \mu$ , ou seja,

$$S_{ij} - \frac{\lambda}{M} = \mu \frac{\Delta_i \Delta_j}{m_i m_j}. \quad (1.14)$$

As equações (1.14) são chamadas de equações de Dziobek.

Neste trabalho vamos discutir quatro trabalhos que envolvem simetria em configurações centrais utilizando quatro abordagens diferentes: as equações de distâncias relativas, as equações de Dziobek, as equações da definição de configuração central e as equações de Andoyer.

No Capítulo 2 vamos usar as equações de distâncias relativas para mostrar que dados quatro corpos com massas iguais em uma configuração central planar, sempre haverá simetria, sendo a configuração convexa ou não.

No Capítulo 3, usamos as equações de Dziobek para mostrar que dada uma configuração central convexa de quatro corpos, essa configuração é simétrica com relação a uma diagonal se, e somente se, as massas que estão na outra diagonal são iguais, e além disso, se a configuração não é simétrica com relação a uma diagonal a menor massa da outra diagonal está mais próxima dela. No final do capítulo vemos que neste caso o uso de outras equações diferente das equações de Dziobek não é viável.

No Capítulo 4, veremos que dada uma configuração planar côncava simétrica de quatro corpos, onde três deles estão no vértice de um triângulo isósceles e o outro é colocado sobre o eixo de simetria e dentro do triângulo, então existem duas regiões abertas e limitadas onde esta configuração é uma configuração central e as massas são unicamente determinadas. Neste caso usaremos as equações da definição de configuração central, mas no final veremos que este problema pode ser abordado com as equações de Andoyer e isto facilita a discussão do problema.

No Capítulo 5, trabalharemos com configurações empilhadas de cinco corpos, ou seja, consideraremos uma configuração central colinear de três corpos e acrescentaremos mais dois corpos de maneira simétrica e vamos mostrar para que valores de massas esta nova configuração é uma configuração central.

No final desta dissertação faremos uma análise das abordagens escolhidas para cada problema estudado.

## Capítulo 2

# Configurações centrais planares de quatro corpos com massas iguais

Neste capítulo vamos estudar o trabalho de Albouy [1] sobre as simetrias das configurações centrais de quatro corpos com massas iguais, tanto no caso convexo (Figura 2.1) como no caso côncavo (Figura 2.2). Neste primeiro caso que estudaremos, vamos usar as equações de distâncias relativas para mostrar que sempre que tivermos uma configuração central com quatro massas iguais haverá simetria.

Sejam  $m_1, m_2, m_3, m_4$  as massas de quatro corpos nas posições  $r_1, r_2, r_3, r_4$ , respectivamente. Considere  $r_{ij} = \|r_i - r_j\|$ , para  $i \neq j$ .

Para facilitar a notação denotaremos por  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  e  $\Delta_4$  as áreas orientadas dos triângulos  $(2, 3, 4), (4, 3, 1), (1, 2, 4)$  e  $(3, 2, 1)$ , respectivamente, pois não usaremos os índices das áreas. Tais áreas satisfazem

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 0. \quad (2.1)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 &= \Delta_{234} + \Delta_{431} + \Delta_{124} + \Delta_{321} \\ &= (r_2 - r_3) \wedge (r_2 - r_4) + (r_4 - r_3) \wedge (r_4 - r_1) \\ &\quad + (r_1 - r_2) \wedge (r_1 - r_4) + (r_3 - r_2) \wedge (r_3 - r_1) \\ &= r_2 \wedge r_2 - r_2 \wedge r_4 - r_3 \wedge r_2 + r_3 \wedge r_4 + r_4 \wedge r_4 - r_4 \wedge r_1 - r_3 \wedge r_4 + r_3 \wedge r_1 \\ &\quad + r_1 \wedge r_1 - r_1 \wedge r_4 - r_2 \wedge r_1 + r_2 \wedge r_4 + r_3 \wedge r_3 - r_3 \wedge r_1 - r_2 \wedge r_3 + r_2 \wedge r_1 \\ &= 0 - r_2 \wedge r_4 - r_3 \wedge r_2 + r_3 \wedge r_4 + 0 - r_4 \wedge r_1 - r_3 \wedge r_4 + r_3 \wedge r_1 \\ &\quad + 0 + r_4 \wedge r_1 - r_2 \wedge r_1 + r_2 \wedge r_4 + 0 - r_3 \wedge r_1 + r_3 \wedge r_2 + r_2 \wedge r_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Estamos interessados em uma configuração planar, isto equivale à nulidade do determinante

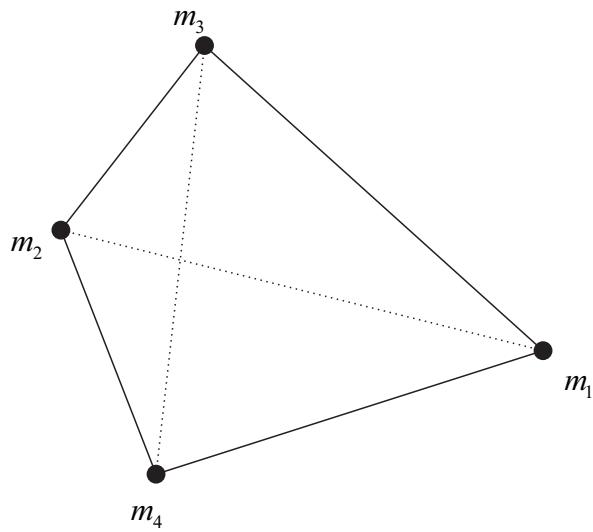


Figura 2.1: Uma configuração central planar convexa de quatro massas.

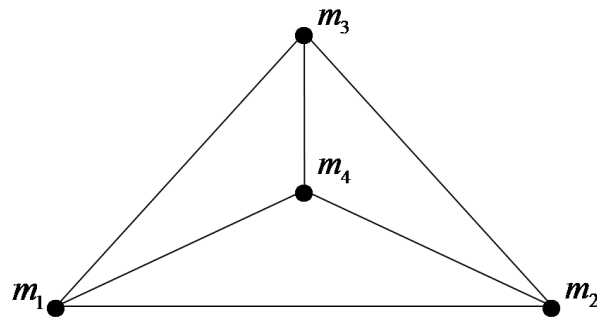


Figura 2.2: Uma configuração central planar não convexa de quatro massas.

de Cayley, que é o volume do tetraedro formado pelos quatro corpos e é dado por,

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & r_{14}^2 \\ 1 & r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & r_{24}^2 \\ 1 & r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & r_{34}^2 \\ 1 & r_{14}^2 & r_{24}^2 & r_{34}^2 & 0 \end{vmatrix},$$

ou seja, queremos  $S = 0$ .

Dziobek obteve a partir de investigações analíticas que

$$\frac{\partial S}{\partial r_{ij}^2} = 32\Delta_i\Delta_j. \quad (2.2)$$

Normalmente consideramos o potencial Newtoniano dado por

$$U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Mas aqui consideraremos um potencial mais geral dado por

$$U = \sum_{i<j} m_i m_j \psi(r_{ij}^2).$$

onde  $\psi$  é uma função real, onde  $\psi'$  seja crescente e côncava. Observe que se  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $\psi(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ , temos o potencial Newtoniano.

O momento de inércia é dado por

$$I = \frac{1}{M} \sum_{i<j} m_i m_j r_{ij}^2,$$

onde  $M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ . As configurações centrais satisfazem

$$\frac{\partial U}{\partial r_{ij}^2} = \mu \frac{\partial S}{\partial r_{ij}^2} + \lambda \frac{\partial I}{\partial r_{ij}^2}, \quad (2.3)$$

para algum  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , neste caso precisamos de mais um multiplicador de Lagrange  $\mu$ , pois estamos restritos ao caso planar.

Assumindo que  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$  temos

$$\frac{\partial U}{\partial r_{ij}^2} = m_i m_j \psi'(r_{ij}^2) = m^2 \psi'(r_{ij}^2)$$

e

$$\frac{\partial I}{\partial r_{ij}^2} = \frac{1}{4m} m^2 = \frac{m}{4}.$$

Assim, por (2.2) e (2.3)

$$m^2 \psi'(r_{ij}^2) = \mu 32 \Delta_i \Delta_j + \lambda \frac{m}{4},$$

tomando  $\nu = \frac{32\mu}{m^2}$  e  $\xi = \frac{\lambda}{4m}$  temos que

$$\psi'(r_{ij}^2) = \nu \Delta_i \Delta_j + \xi. \quad (2.4)$$

As coordenadas baricêntricas de  $r_i$  em relação a  $r_2, r_3$  e  $r_4$  são

$$\left( \frac{-\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{-\Delta_3}{\Delta_1}, \frac{-\Delta_4}{\Delta_1} \right),$$

ou seja,

$$r_1 = \frac{-\Delta_2}{\Delta_1} r_2 + \frac{-\Delta_3}{\Delta_1} r_3 + \frac{-\Delta_4}{\Delta_1} r_4. \quad (2.5)$$

Observando a seguinte quantidade

$$\Theta = \Delta_1 r_1 \cdot r_1 + \Delta_2 r_2 \cdot r_2 + \Delta_3 r_3 \cdot r_3 + \Delta_4 r_4 \cdot r_4$$

e usando as equações (2.1) e (2.5) temos

$$\begin{aligned} \Theta &= 2\Delta_1 r_1 \cdot r_1 - \Delta_1 r_1 \cdot r_1 + \Delta_2 r_2 \cdot r_2 + \Delta_3 r_3 \cdot r_3 + \Delta_4 r_4 \cdot r_4 \\ &= 2r_1 \cdot (\Delta_1 r_1) - \Delta_1 r_1 \cdot r_1 + \Delta_2 r_2 \cdot r_2 + \Delta_3 r_3 \cdot r_3 + \Delta_4 r_4 \cdot r_4 \\ &= -2r_1 \cdot (\Delta_2 r_2 + \Delta_3 r_3 + \Delta_4 r_4) + (\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4) r_1 \cdot r_1 + \Delta_2 r_2 \cdot r_2 + \Delta_3 r_3 \cdot r_3 + \Delta_4 r_4 \cdot r_4 \\ &= \Delta_2 (r_1 \cdot r_1 - 2r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_2) + \Delta_3 (r_1 \cdot r_1 - 2r_1 \cdot r_3 + r_3 \cdot r_3) + \Delta_4 (r_1 \cdot r_1 - 2r_1 \cdot r_4 + r_4 \cdot r_4) \\ &= \Delta_2 (r_1 - r_2) \cdot (r_1 - r_2) + \Delta_3 (r_1 - r_3) \cdot (r_1 - r_3) + \Delta_4 (r_1 - r_4) \cdot (r_1 - r_4) \\ &= \Delta_2 r_{12}^2 + \Delta_3 r_{13}^2 + \Delta_4 r_{14}^2. \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo processo para os outros termos  $\Delta_i r_i \cdot r_i$ , para  $i = 2, 3, 4$  temos

$$\begin{aligned} \Delta_2 r_{12}^2 + \Delta_3 r_{13}^2 + \Delta_4 r_{14}^2 &= \Delta_1 r_{12}^2 + \Delta_2 r_{23}^2 + \Delta_4 r_{24}^2 \\ &= \Delta_1 r_{13}^2 + \Delta_2 r_{23}^2 + \Delta_4 r_{34}^2 \\ &= \Delta_1 r_{14}^2 + \Delta_2 r_{24}^2 + \Delta_4 r_{34}^2. \end{aligned}$$

Observe que  $S$  é homogênea de grau 3, logo pelo Teorema de Euler temos

$$\sum_{i < j} \frac{\partial S}{\partial r_{ij}^2} r_{ij}^2 = 3 \cdot S.$$

Assim, como  $S = 0$  e usando (2.2) temos

$$\sum_{i < j} \Delta_i \Delta_j r_{ij}^2 = 0. \quad (2.6)$$

Sejam  $a = r_{12}^2, b = r_{13}^2, c = r_{14}^2, d = r_{23}^2, e = r_{24}^2$  e  $f = r_{34}^2$ . Então, as equações (2.3), (2.4) e (2.6) implicam

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \Psi'(a) & \Psi'(b) & \Psi'(c) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ \Psi'(a) & \Psi'(b) & \Psi'(c) \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ \Psi'(f) & \Psi'(e) & \Psi'(d) \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$

**Definição 2.1.** Dizemos que uma configuração planar é

- *convexa se*

$$\Delta_1 \leq \Delta_2 < 0 < \Delta_3 \leq \Delta_4$$

- *não convexa se*

$$\Delta_1 < 0 < \Delta_2 \leq \Delta_3 \leq \Delta_4$$

Qualquer configuração pode se enquadrar em um destes dois casos, por renumeração dos vértices e escolha da orientação do plano.

**Definição 2.2.** Dizemos que uma configuração planar é simétrica se

$$r_{12}^2 = r_{13}^2 \quad e \quad r_{34}^2 = r_{24}^2,$$

ou

$$r_{12}^2 = r_{34}^2 \quad e \quad r_{13}^2 = r_{24}^2.$$

**Lema 2.1.** As configurações centrais planares satisfazem

$$\Delta_3\Delta_4 - \Delta_1\Delta_2 = (\Delta_2 + \Delta_3)(\Delta_2 + \Delta_4).$$

*Demonstração.* Usando a identidade (2.1) temos,

$$\begin{aligned} (\Delta_2 + \Delta_3)(\Delta_2 + \Delta_4) - \Delta_3\Delta_4 + \Delta_1\Delta_2 &= \Delta_2^2 + \Delta_2\Delta_4 + \Delta_3\Delta_2 + \Delta_3\Delta_4 - \Delta_3\Delta_4 + \Delta_1\Delta_2 \\ &= \Delta_2(\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4) + \Delta_1\Delta_2 \\ &= -\Delta_1\Delta_2 + \Delta_1\Delta_2. \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

**Lema 2.2.** Todas as configurações planares não simétricas satisfazem

$$\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_4 \quad e \quad \Delta_1 + \Delta_4 < 0 < \Delta_2 + \Delta_3.$$

Isso pode ser facilmente visto nas Figuras 2.1 e 2.2.

**Teorema 2.1.** Toda configuração central planar e convexa de quatro massas iguais é simétrica.

*Demonstração.* Assuma que tenhamos uma configuração central convexa com quatro massas iguais e não simétrica. Assim pelo Lema 2.2 temos que

$$\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_4. \tag{2.8}$$



Multiplicando (2.8) por  $\Delta_1$  que é negativo, temos

$$\Delta_1^2 > \Delta_1\Delta_2 > \Delta_1\Delta_3 > \Delta_1\Delta_4.$$

Assim por (2.4), temos

$$\frac{\Psi'(r_{12}^2) - \xi}{v} > \frac{\Psi'(r_{13}^2) - \xi}{v} > \frac{\Psi'(r_{14}^2) - \xi}{v}.$$

Como  $v$  é positivo temos

$$\Psi'(r_{12}^2) > \Psi'(r_{13}^2) > \Psi'(r_{14}^2).$$

Logo,

$$r_{12}^2 > r_{23}^2 > r_{14}^2$$

pois,  $\Psi$  é crescente.

Da mesma forma multiplicando (2.8) por  $\Delta_2$  que é negativo, pois por hipótese a configuração é convexa, obtemos

$$r_{12}^2 > r_{23}^2 > r_{24}^2.$$

Agora, multiplicando (2.8) por  $\Delta_3$  e  $\Delta_4$ , que são positivos obtemos

$$r_{13}^2 < r_{23}^2 < r_{34}^2$$

e

$$r_{14}^2 < r_{24}^2 < r_{34}^2.$$

Até aqui conseguimos as seguintes relações

$$\begin{aligned} r_{14}^2 &< r_{13}^2 < r_{23}^2 < r_{12}^2, \\ r_{14}^2 &< r_{24}^2 < r_{23}^2 < r_{34}^2. \end{aligned}$$

Então, para conseguirmos ordenar todas as distâncias mútuas precisamos encontrar uma relação entre  $r_{12}^2$  e  $r_{34}^2$  e uma relação entre  $r_{13}^2$  e  $r_{24}^2$ .

Pelos Lema 2.1 e 2.2 temos que

$$\Delta_1 + \Delta_4 < \Delta_2 + \Delta_3 = \frac{\Delta_3\Delta_4 - \Delta_1\Delta_2}{\Delta_2 + \Delta_4}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \Delta_3\Delta_4 - \Delta_1\Delta_2 &> (\Delta_2 + \Delta_4)(\Delta_1 + \Delta_4) \\
 &= \Delta_1\Delta_2 + \Delta_2\Delta_4 + \Delta_1\Delta_4 + \Delta_4^2 \\
 &= \Delta_1\Delta_2 + \Delta_4(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_4) \\
 &= \Delta_1\Delta_2 + \Delta_3\Delta_4.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta_1\Delta_2 < \Delta_3\Delta_4$$

o que implica que  $r_{12}^2 < r_{34}^4$ . Além disso, como  $\Delta_1 < \Delta_2$  e  $\Delta_3 + \Delta_4 > 0$ , temos

$$\Delta_1\Delta_3 + \Delta_1\Delta_4 < \Delta_2\Delta_3 + \Delta_2\Delta_4 \quad (2.9)$$

e como  $\Delta_3 < \Delta_4$  e  $\Delta_1 + \Delta_2 < 0$ , temos

$$\Delta_1\Delta_4 + \Delta_2 + \Delta_4 < \Delta_1\Delta_3 + \Delta_2\Delta_3. \quad (2.10)$$

Subtraindo (2.9) e (2.10), temos

$$\Delta_1\Delta_3 < 2\Delta_2\Delta_4,$$

o que implica,  $r_{13}^2 < r_{24}^2$ . Portanto, temos a seguinte ordem

$$r_{14}^2 < r_{13}^2 < r_{24}^2 < r_{23}^2 < r_{12}^2 < r_{34}^2.$$

Agora, utilizando a ordem que conseguimos, vamos estimar o sinal dos determinantes envolvidos na equação (2.7). Seja

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_{12}^2 & r_{13}^2 & r_{14}^4 \\ \Psi'(r_{12}^2) & \Psi'(r_{13}^2) & \Psi'(r_{14}^2) \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_{34}^2 & r_{24}^2 & r_{23}^4 \\ \Psi'(r_{12}^2) & \Psi'(r_{13}^2) & \Psi'(r_{14}^2) \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_{34}^2 & r_{24}^2 & r_{23}^4 \\ \Psi'(r_{34}^2) & \Psi'(r_{24}^2) & \Psi'(r_{23}^2) \end{vmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
A &= r_{13}^2 \psi'(r_{14}^2) + r_{14}^2 \psi'(r_{12}^2) + r_{12}^2 \psi'(r_{13}^2) - r_{13}^2 \psi'(r_{12}^2) - r_{12}^2 \psi'(r_{14}^2) - r_{14}^2 \psi'(r_{13}^2) \\
&= r_{13}^2 (\psi'(r_{14}^2) - \psi'(r_{12}^2)) + r_{14}^2 (\psi'(r_{12}^2) - \psi'(r_{13}^2)) + r_{12}^2 (\psi'(r_{13}^2) - \psi'(r_{14}^2)) \\
&= r_{13}^2 (\psi'(r_{14}^2) - \psi'(r_{13}^2)) + r_{13}^2 (\psi'(r_{13}^2) - \psi'(r_{12}^2)) + r_{14}^2 (\psi'(r_{12}^2) - \psi'(r_{13}^2)) \\
&\quad + r_{12}^2 (\psi'(r_{13}^2) - \psi'(r_{14}^2)) \\
&= (\psi'(r_{13}^2) - \psi'(r_{14}^2))(r_{12}^2 - r_{13}^2) - (\psi'(r_{12}^2) - \psi'(r_{13}^2))(r_{12}^2 - r_{13}^2).
\end{aligned}$$

Como  $\psi$  é côncava, olhando para  $\psi$  restrita ao intervalo  $[r_{14}^2, r_{12}^2]$ , temos que esta restrição ainda é côncava e como  $r_{13}^2 \in [r_{14}^2, r_{12}^2]$ , temos

$$\frac{\psi'(r_{13}^2) - \psi'(r_{14}^2)}{r_{13}^2 - r_{14}^2} \geq \frac{\psi'(r_{12}^2) - \psi'(r_{14}^2)}{r_{12}^2 - r_{14}^2} \geq \frac{\psi'(r_{13}^2) - \psi'(r_{12}^2)}{r_{13}^2 - r_{12}^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
A &= (\psi'(r_{13}^2) - \psi'(r_{14}^2))(r_{12}^2 - r_{13}^2) - (\psi'(r_{12}^2) - \psi'(r_{13}^2))(r_{12}^2 - r_{13}^2) \\
&\geq (\psi'(r_{13}^2) - \psi'(r_{14}^2))(r_{12}^2 - r_{13}^2) - (\psi'(r_{13}^2) - \psi'(r_{14}^2))(r_{12}^2 - r_{13}^2) \\
&= (r_{12}^2 - r_{13}^2) \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Agora como  $\psi$  é crescente temos que

$$\begin{aligned}
B &= r_{24}^2 \psi'(r_{14}^2) + r_{23}^2 \psi'(r_{12}^2) + r_{34}^2 \psi'(r_{13}^2) - r_{24}^2 \psi'(r_{12}^2) - r_{34}^2 \psi'(r_{14}^2) - r_{23}^2 \psi'(r_{13}^2) \\
&= r_{24}^2 (\psi'(r_{14}^2) - \psi'(r_{12}^2)) + r_{23}^2 (\psi'(r_{12}^2) - \psi'(r_{13}^2)) + r_{34}^2 (\psi'(r_{13}^2) - \psi'(r_{14}^2)) \\
&= r_{24}^2 (\psi'(r_{14}^2) - \psi'(r_{13}^2)) + r_{24}^2 (\psi'(r_{13}^2) - \psi'(r_{12}^2)) + r_{23}^2 (\psi'(r_{12}^2) - \psi'(r_{13}^2)) \\
&\quad + r_{34}^2 (\psi'(r_{13}^2) - \psi'(r_{14}^2)) \\
&= (\psi'(r_{13}^2) - \psi'(r_{14}^2))(r_{34}^2 - r_{24}^2) + (\psi'(r_{12}^2) - \psi'(r_{13}^2))(r_{23}^2 - r_{24}^2) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Por último vamos estimar o sinal de  $C$ . Observe que,

$$\begin{aligned}
C &= r_{24}^2 \psi'(r_{23}^2) + r_{23}^2 \psi'(r_{34}^2) + r_{34}^2 \psi'(r_{24}^2) - r_{24}^2 \psi'(r_{34}^2) - r_{34}^2 \psi'(r_{23}^2) - r_{23}^2 \psi'(r_{24}^2) \\
&= r_{24}^2 (\psi'(r_{23}^2) - \psi'(r_{34}^2)) + r_{23}^2 (\psi'(r_{34}^2) - \psi'(r_{24}^2)) + r_{34}^2 (\psi'(r_{24}^2) - \psi'(r_{23}^2)) \\
&= r_{24}^2 (\psi'(r_{23}^2) - \psi'(r_{34}^2)) + r_{23}^2 (\psi'(r_{34}^2) - \psi'(r_{23}^2)) + r_{23}^2 (\psi'(r_{23}^2) - \psi'(r_{24}^2)) \\
&\quad + r_{34}^2 (\psi'(r_{24}^2) - \psi'(r_{23}^2)) \\
&= (\psi'(r_{23}^2) - \psi'(r_{34}^2))(r_{24}^2 - r_{23}^2) + (\psi'(r_{23}^2) - \psi'(r_{24}^2))(r_{23}^2 - r_{34}^2).
\end{aligned}$$

Novamente, usando o fato de  $\psi$  restrita ao intervalo  $[r_{24}^2, r_{34}^2]$  ser côncava, temos que  $r_{23}^2 \in [r_{24}^2, r_{34}^2]$  e assim

$$\frac{\Psi'(r_{23}^2) - \Psi'(r_{24}^2)}{r_{23}^2 - r_{24}^2} \geq \frac{\Psi'(r_{34}^2) - \Psi'(r_{24}^2)}{r_{34}^2 - r_{24}^2} \geq \frac{\Psi'(r_{23}^2) - \Psi'(r_{34}^2)}{r_{23}^2 - r_{34}^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} C &= (\Psi'(r_{23}^2) - \Psi'(r_{34}^2))(r_{24}^2 - r_{23}^2) + (\Psi'(r_{23}^2) - \Psi'(r_{24}^2))(r_{23}^2 - r_{34}^2) \\ &\leq -(r_{23}^2 - r_{34}^2)(\Psi'(r_{23}^2) - \Psi'(r_{24}^2)) + (r_{23}^2 - r_{34}^2)(\Psi'(r_{23}^2) - \Psi'(r_{24}^2)) \\ &= (r_{23}^2 - r_{34}^2) \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, temos que  $A + B > 0$  e  $C \leq 0$ , mas isto contradiz a equação (2.7), que garante  $A + B = 2C$ . Portanto, a configuração é simétrica. ■

**Teorema 2.2.** *Toda configuração central planar e não convexa de quatro massas iguais é simétrica.*

**Demonstração.** Suponha que tenhamos uma configuração central planar não convexa de quatro massas iguais e não simétrica. Assim, pelo Lema (2.2) temos que,

$$\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_4. \quad (2.11)$$

Multiplicando (2.11) por  $\Delta_1$  que é negativo, temos

$$\Delta_1 \Delta_2 > \Delta_1 \Delta_3 > \Delta_1 \Delta_4.$$

Usando (2.4) como na demonstração do Teorema 2.1 obtemos

$$r_{12}^2 > r_{13}^2 > r_{14}^2.$$

Da mesma forma, multiplicando (2.11) por  $\Delta_2$  que é positivo, pois a configuração é não convexa, obtemos

$$r_{12}^2 < r_{23}^2 < r_{24}^2.$$

E por último multiplicando (2.11) por  $\Delta_4$  que também é positivo, obtemos

$$r_{14}^2 < r_{24}^2 < r_{34}^2.$$

Assim,

$$r_{14}^2 < r_{13}^2 < r_{12}^2 < r_{23}^2 < r_{24}^2 < r_{34}^2.$$

Considerando  $A$ ,  $B$ , e  $C$  como na demonstração do Teorema 2.1, temos que  $A \geq 0$ , pois a ordem das distâncias mútuas envolvidas neste determinante, não se alteram. Por outro lado temos que

$$\begin{aligned}
C &= r_{24}^2 \Psi'(r_{23}^2) + r_{23}^2 \Psi'(r_{34}^2) + r_{34}^2 \Psi'(r_{24}^2) - r_{24}^2 \Psi'(r_{34}^2) - r_{34}^2 \Psi'(r_{23}^2) - r_{23}^2 \Psi'(r_{24}^2) \\
&= r_{24}^2 (\Psi'(r_{23}^2) - \Psi'(r_{34}^2)) + r_{23}^2 (\Psi'(r_{34}^2) - \Psi'(r_{24}^2)) + r_{34}^2 (\Psi'(r_{24}^2) - \Psi'(r_{23}^2)) \\
&= r_{24}^2 (\Psi'(r_{23}^2) - \Psi'(r_{24}^2)) + r_{24}^2 (\Psi'(r_{24}^2) - \Psi'(r_{34}^2)) + r_{23}^2 (\Psi'(r_{34}^2) - \Psi'(r_{24}^2)) \\
&\quad + r_{34}^2 (\Psi'(r_{24}^2) - \Psi'(r_{23}^2)) \\
&= (\Psi'(r_{23}^2) - \Psi'(r_{24}^2))(r_{24}^2 - r_{34}^2) + (\Psi'(r_{24}^2) - \Psi'(r_{34}^2))(r_{24}^2 - r_{23}^2).
\end{aligned}$$

Como  $\Psi$  é côncava no intervalo  $[r_{14}^2, r_{12}^2]$  e  $r_{13}^2 \in [r_{14}^2, r_{12}^2]$ , temos que

$$\frac{\Psi'(r_{24}^2) - \Psi'(r_{23}^2)}{r_{24}^2 - r_{23}^2} \geq \frac{\Psi'(r_{34}^2) - \Psi'(r_{23}^2)}{r_{34}^2 - r_{23}^2} \geq \frac{\Psi'(r_{24}^2) - \Psi'(r_{34}^2)}{r_{24}^2 - r_{34}^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
C &= (\Psi'(r_{23}^2) - \Psi'(r_{24}^2))(r_{24}^2 - r_{34}^2) + (\Psi'(r_{24}^2) - \Psi'(r_{34}^2))(r_{24}^2 - r_{23}^2) \\
&\geq -(\Psi'(r_{24}^2) - \Psi'(r_{34}^2))(r_{24}^2 - r_{23}^2) + (\Psi'(r_{24}^2) - \Psi'(r_{34}^2))(r_{24}^2 - r_{23}^2) \\
&= (r_{24}^2 - r_{23}^2) \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Fixando os números  $\Psi'(r_{23}^2)$ ,  $\Psi'(r_{24}^2)$  e  $\Psi'(r_{34}^2)$ , vamos considerar a região do espaço  $(x, y, z)$  definida pelas desigualdades abaixo

$$x < y < z \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & y & x \\ \Psi'(r_{34}^2) & \Psi'(r_{24}^2) & \Psi'(r_{23}^2) \end{vmatrix} > 0.$$

Observe que o ponto  $(r_{23}^2, r_{24}^2, r_{34}^2)$  pertence a esta região.

Agora o que faremos é tentar contradizer (2.7). Para isso, mostraremos que a forma linear

$$F = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & y & x \\ \Psi'(r_{34}^2) & \Psi'(r_{24}^2) & \Psi'(r_{23}^2) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & y & x \\ \Psi'(r_{12}^2) & \Psi'(r_{13}^2) & \Psi'(r_{14}^2) \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

é negativa na região definida.

Observe que se  $x = y = z$  temos que  $F$  é nulo. Mostremos que  $F$  é negativo nos semi-planos de fronteira da região acima definida e portanto será negativo em toda a região. Os semi-planos de fronteira serão  $x = y$  e onde o determinante que define a região for nulo, ou seja, onde o ponto

$(x, y, z)$  for um múltiplo de  $(1, 1, 1)$  ou de  $(\Psi'(r_{34}^2), \Psi'(r_{24}^2), \Psi'(r_{23}^2))$ .

No plano  $x = y$ , temos que  $F$  é dado por

$$\begin{aligned}
 F &= 2[x(\Psi'(r_{34}^2) - \Psi'(r_{24}^2)) + y(\Psi'(r_{23}^2) - \Psi'(r_{34}^2)) + z(\Psi'(r_{24}^2) - \Psi'(r_{23}^2))] \\
 &\quad - [x(\Psi'(r_{12}^2) - \Psi'(r_{13}^2)) + y(\Psi'(r_{14}^2) - \Psi'(r_{12}^2)) + z(\Psi'(r_{13}^2) - \Psi'(r_{14}^2))] \\
 &= 2x(\Psi'(r_{23}^2) - \Psi'(r_{24}^2)) + 2z(\Psi'(r_{24}^2) - \Psi'(r_{23}^2)) - x(\Psi'(r_{14}^2) - \Psi'(r_{12}^2)) \\
 &\quad - z(\Psi'(r_{13}^2) - \Psi'(r_{14}^2)) \\
 &= 2(\Psi'(r_{24}^2) - \Psi'(r_{23}^2))(z - x) + (\Psi'(r_{14}^2) - \Psi'(r_{13}^2))(z - x) \\
 &= (z - x)(2\Psi'(r_{24}^2) - 2\Psi'(r_{23}^2) + \Psi'(r_{14}^2) - \Psi'(r_{13}^2)).
 \end{aligned}$$

Como na região temos que  $x < z$ , o sinal de  $F$  é igual ao sinal da expressão que multiplica  $z - x$ . Usando (2.4), temos que

$$(2\Psi'(r_{24}^2) - 2\Psi'(r_{23}^2) + \Psi'(r_{14}^2) - \Psi'(r_{13}^2)) = v[2\Delta_2\Delta_4 - \Delta_2\Delta_3 + \Delta_1\Delta_4 - \Delta_1\Delta_3].$$

Sabemos que  $v$  é positivo, logo o sinal da expressão que estamos interessados é o mesmo de

$$\begin{aligned}
 2\Delta_2\Delta_4 - \Delta_2\Delta_3 + \Delta_1\Delta_4 - \Delta_1\Delta_3 &= 2\Delta_2(\Delta_4 - \Delta_3) + \Delta_1(\Delta_4 - \Delta_3) \\
 &= (2\Delta_2 + \Delta_1)(\Delta_4 - \Delta_3).
 \end{aligned}$$

Observe que  $\Delta_4 - \Delta_3 > 0$ , e além disso, usando (2.3), temos

$$\begin{aligned}
 2\Delta_2 + \Delta_1 &= 2\Delta_2 - \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4 \\
 &= \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4 \\
 &< 0.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $F$  é negativo no semi-plano  $x = y$ .

No outro semi-plano temos que  $(x, y, z)$  é um múltiplo de  $(\Psi'(r_{34}^2), \Psi'(r_{24}^2), \Psi'(r_{23}^2))$ , pois no outro caso temos  $x = y = z$  e já sabemos que  $F = 0$ . Assim temos que

$$F = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & y & x \\ \Psi'(r_{12}^2) & \Psi'(r_{13}^2) & \Psi'(r_{14}^2) \end{vmatrix}.$$

Sem perda de generalidade, podemos tomar  $(x, y, z) = (\Psi'(r_{34}^2), \Psi'(r_{24}^2), \Psi'(r_{23}^2))$ , assim

$$F = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Psi'(r_{34}^2) & \Psi'(r_{24}^2) & \Psi'(r_{23}^2) \\ \Psi'(r_{12}^2) & \Psi'(r_{13}^2) & \Psi'(r_{14}^2) \end{vmatrix}.$$

Usando (2.4), temos

$$F = -v^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Delta_3\Delta_4 & \Delta_2\Delta_4 & \Delta_2\Delta_3 \\ \Delta_1\Delta_2 & \Delta_1\Delta_3 & \Delta_1\Delta_4 \end{vmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} F &= -v^2[\Delta_1\Delta_2\Delta_4^2 + \Delta_1\Delta_2^2\Delta_3 + \Delta_1\Delta_3^2\Delta_4 - \Delta_1\Delta_2^2\Delta_4 - \Delta_1\Delta_3\Delta_4^2 - \Delta_1\Delta_2\Delta_3^2] \\ &= -v\Delta_1[\Delta_4^2(\Delta_2 - \Delta_3) + \Delta_2^2(\Delta_3 - \Delta_4) + \Delta_3^2(\Delta_4 - \Delta_2)]. \end{aligned}$$

Sabemos que  $-v\Delta_1 > 0$ . Suponha que  $\Delta_4^2(\Delta_2 - \Delta_3) + \Delta_2^2(\Delta_3 - \Delta_4) + \Delta_3^2(\Delta_4 - \Delta_2) \geq 0$ , assim,

$$\begin{aligned} \Delta_4^2(\Delta_3 - \Delta_2) &\leq \Delta_2^2(\Delta_3 - \Delta_4) + \Delta_3^2(\Delta_4 - \Delta_2) \\ &< \Delta_3^2(\Delta_3 - \Delta_4) + \Delta_3^2(\Delta_4 - \Delta_2) \\ &= \Delta_3^2(\Delta_3 - \Delta_2). \end{aligned}$$

Logo,  $\Delta_4 \leq \Delta_3$ , o que é um absurdo, pois por hipótese  $\Delta_3 < \Delta_4$ . Então,  $F < 0$  em toda a fronteira da região, logo  $F < 0$  na região o que como vimos é uma contradição. Portanto, a configuração é simétrica. ■

Concluimos, então, que sempre que tivermos uma configuração planar de quatro corpos com massas iguais, teremos simetria. Mas isto não é verdade se aumentarmos o número de massas ou mudarmos a dimensão. Observe que a convexidade e a concavidade foram extremamente importantes para a demonstração dos resultados, mas como corolário do Teorema do Perpendicular Bissetor, temos que as configurações de quatro massas no plano podem ser divididas em convexas e não convexas.

Aqui utilizamos uma formulação das equações de distâncias relativas, pois trabalhamos com um potencial que não é o Newtoniano. Mas mesmo que utilizássemos o potencial Newtoniano, e tentássemos uma abordagem, por exemplo com as equações de Andoyer, teríamos um trabalho muito grande, pois teríamos que resolver o seguinte sistema

$$\begin{aligned} f_{12} &= m(R_{13} - R_{23})\Delta_{123} + m(R_{14} - R_{24})\Delta_{124} = 0, \\ f_{13} &= m(R_{12} - R_{23})\Delta_{132} + m(R_{14} - R_{34})\Delta_{134} = 0, \\ f_{14} &= m(R_{12} - R_{24})\Delta_{142} + m(R_{13} - R_{34})\Delta_{143} = 0, \\ f_{23} &= m(R_{12} - R_{13})\Delta_{231} + m(R_{24} - R_{34})\Delta_{234} = 0, \\ f_{24} &= m(R_{12} - R_{14})\Delta_{241} + m(R_{23} - R_{34})\Delta_{243} = 0, \\ f_{34} &= m(R_{13} - R_{14})\Delta_{341} + m(R_{23} - R_{24})\Delta_{342} = 0. \end{aligned}$$

que não tem nenhum tipo de característica que possa diminuir o número de equações e se tentarmos resolver utilizando a ordenação dos  $r_{ij}^2$  que conseguimos nas demonstrações dos teoremas acima não chegamos a lugar nenhum, pois não conseguimos mostrar as igualdades necessárias para provar a simetria. O mesmo ocorre se tentarmos utilizar as equações da definição.

Por outro lado, se assumíssemos a simetria podemos facilmente mostrar a igualdade das massas usando as equações de Andoyer. De fato, consideremos primeiro o caso convexo, então temos as seguintes simetrias:  $r_{12} = r_{34}$ ,  $r_{13} = r_{24}$  e  $r_{14} = r_{23}$ . Assim,

$$\begin{aligned} f_{12} &= m_3(R_{13} - R_{23})\Delta_{123} + m_4(R_{14} - R_{24})\Delta_{124} \\ &= -(m_3 - m_4)(R_{13} - R_{23})\Delta_{123} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Observe que  $\Delta_{123} \neq 0$ , logo  $m_3 = m_4$  ou  $R_{13} = R_{14}$ . Se  $R_{13} = R_{14}$  temos que a configuração é um quadrado, mas quando isto acontece temos que  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$  como mostram Mello, Chaves e Fernandes em [6]. Logo,  $m_3 = m_4$ . Da mesma forma, por  $f_{23} = 0$  temos  $m_1 = m_4$  e por  $f_{34} = 0$  temos  $m_1 = m_2$ . Portanto,  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ . De maneira análoga mostramos para o caso côncavo. Assim, dependendo do problema que estamos estudando, a abordagem a ser feita pode tornar o problema simples ou complexo. No próximo capítulo vamos nos concentrar apenas nas configurações centrais planares convexas de quatro corpos e estudar a relação entre as massas e as características geométricas da configuração.



## Capítulo 3

# Simetria das configurações centrais planares convexas de quatro corpos

Neste capítulo estudaremos o trabalho de Alain Albouy, Yanning Fu e Shanzhong Sun [2] que fazem uma discussão da relação entre as massas e as propriedades geométricas das configurações centrais simétricas.

Mostraremos que no problema de quatro corpos planar, uma configuração central convexa é simétrica em relação a uma diagonal se, e somente se, as massas da outra diagonal são iguais. Além disso, se duas massas em uma diagonal não são iguais, então a menor massa está mais próxima da outra diagonal. Para isso usaremos as equações de Dziobek.

Sejam  $r_1, \dots, r_n$ , as posições em um espaço euclidiano de  $n$  partículas com massas  $m_1, \dots, m_n$  positivas, respectivamente. Considere  $S_{ik} = S_{ki} = \|r_i - r_k\|^{2a}$ , onde  $a < 0$ .

Aqui consideraremos o potencial dado por

$$U = \sum_{i < j} m_i m_j S_{ij}.$$

Observe que tomando  $a = 3/2$  temos o potencial Newtoniano.

Neste caso temos que se  $M = m_1 + \dots + m_n$  é a massa total e  $r_G = \frac{1}{M}(m_1 r_1 + \dots + m_n r_n)$  é o centro de massa, as equações de configuração central ficam

$$\lambda(r_i - r_G) = \sum_{k \neq i} m_k S_{ik}(r_i - r_k), \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sempre temos  $\lambda > 0$ .

Usaremos as equações de Dziobek que são dadas por

$$S_{ij} - \frac{\lambda}{M} = \mu \frac{\Delta_i \Delta_j}{m_i m_j}. \quad (3.1)$$

Observe que a quantidade

$$\Lambda = \Delta_1 \|x - r_1\|^2 + \dots + \Delta_n \|x - r_n\|^2.$$

não depende de  $x$ . De fato,

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Delta_1 \|x - r_1\|^2 + \dots + \Delta_n \|x - r_n\|^2 \\ &= \Delta_1 (x - r_1) \cdot (x - r_1) + \dots + \Delta_n (x - r_n) \cdot (x - r_n) \\ &= \Delta_1 (x \cdot x - x \cdot r_1 - r_1 \cdot x + r_1 \cdot r_1) + \dots + \Delta_n (x \cdot x - x \cdot r_n - r_n \cdot x + r_n \cdot r_n) \\ &= x \cdot x (\Delta_1 + \dots + \Delta_n) - x \cdot (\Delta_1 r_1 + \dots + \Delta_n r_n) - (\Delta_1 r_1 + \dots + \Delta_n r_n) \cdot x \\ &\quad + \Delta_1 r_1 \cdot r_1 + \dots + \Delta_n r_n \cdot r_n \\ &= \Delta_1 r_1 \cdot r_1 + \dots + \Delta_n r_n \cdot r_n. \end{aligned}$$

Seja  $s_{ij} = \|r_i - r_j\|^2$ . Está claro que  $s_{ij} = s_{ji}$  e considerando  $t_i = \sum_{j \neq i} \Delta_j s_{ij}$ , temos

$$t_1 = t_2 = \dots = t_n$$

pois,

$$\begin{aligned} t_i &= \Delta_1 s_{1i} + \dots + \Delta_{i-1} s_{i(i-1)} + \Delta_{i+1} s_{i(i+1)} + \dots + \Delta_n s_{in} \\ &= r_i \cdot r_i \left( \sum_{j \neq i} \Delta_j \right) - r_i \cdot \left( \sum_{j \neq i} \Delta_j r_j \right) - \left( \sum_{j \neq i} \Delta_j r_j \right) \cdot r_i + \sum_{j \neq i} \Delta_j r_j \cdot r_j \\ &= -\Delta_i r_i \cdot r_i + 2\Delta_i r_i \cdot r_i + \sum_{j \neq i} \Delta_j r_j \cdot r_j \\ &= \sum_{k=1}^n \Delta_k r_k \cdot r_k. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= t_i - t_j \\ &= \sum_{k \neq i} \Delta_k s_{ik} - \sum_{k \neq j} \Delta_k s_{jk} \\ &= \Delta_j s_{ij} + \sum_{k \neq i, j} \Delta_k s_{ik} - \Delta_i s_{ij} - \sum_{k \neq i, j} \Delta_k s_{jk} \\ &= (\Delta_j - \Delta_i) s_{ij} + \sum_{k \neq i, j} \Delta_k (s_{ik} - s_{jk}). \end{aligned}$$

Logo,

$$t_i - t_j = (\Delta_j - \Delta_i) s_{ij} + \sum_{k \neq i, j} \Delta_k (s_{ik} - s_{jk}). \quad (3.2)$$

**Lema 3.1.** Para uma configuração central de  $n$  corpos de dimensão  $n - 2$ , a desigualdade

$$\left( \frac{\Delta_i}{m_i} - \frac{\Delta_j}{m_j} \right) (\Delta_i - \Delta_j) \geq 0$$

é válida para quaisquer  $i$  e  $j$ , com  $1 \leq i < j \leq n$ .

**Demonstração.** Sabemos que  $a < 0$ . Então,  $s_{ik} - s_{jk}$  tem o sinal de  $s_{jk}^a - s_{ik}^a$ , mas por (3.1) temos

$$\begin{aligned} s_{jk}^a - s_{ik}^a &= S_{jk} - S_{ik} \\ &= \frac{\lambda}{M} + \mu \frac{\Delta_j \Delta_k}{m_j m_k} - \frac{\lambda}{M} - \mu \frac{\Delta_i \Delta_k}{m_i m_k} \\ &= \mu \frac{\Delta_k}{m_k} \left( \frac{\Delta_j}{m_j} - \frac{\Delta_i}{m_i} \right). \end{aligned}$$

Assim,  $\Delta_k(s_{ik} - s_{jk})$  tem o sinal de  $\mu \frac{\Delta_k^2}{m_k} \left( \frac{\Delta_j}{m_j} - \frac{\Delta_i}{m_i} \right)$ , que tem o sinal de  $\mu \left( \frac{\Delta_j}{m_j} - \frac{\Delta_i}{m_i} \right)$ . Logo,  $\sum_{k \neq i, j} \Delta_k(s_{ik} - s_{jk})$  tem o sinal de  $\mu \frac{\Delta_k}{m_k} \left( \frac{\Delta_j}{m_j} - \frac{\Delta_i}{m_i} \right)$ . Sabemos que  $(\Delta_j - \Delta_i)s_{ij}$  tem o sinal de  $(\Delta_j - \Delta_i)$  que por sua vez tem o sinal de  $\mu \frac{\Delta_k}{m_k} \left( \frac{\Delta_j}{m_j} - \frac{\Delta_i}{m_i} \right)$ . Como pelo menos um par de  $\Delta_i$ 's tem sinais opostos, temos que  $\mu < 0$ . Logo,  $(\Delta_i - \Delta_j)$  e  $\left( \frac{\Delta_i}{m_i} - \frac{\Delta_j}{m_j} \right)$  tem o mesmo sinal, ou seja,

$$\left( \frac{\Delta_i}{m_i} - \frac{\Delta_j}{m_j} \right) (\Delta_i - \Delta_j) \geq 0.$$

■

Podemos restringir o nosso estudo ao das configurações centrais normalizadas, escolhendo a normalização  $\lambda = M$ . Olhando para a equação

$$-\ddot{r}_i = \lambda(r_i - r_G)$$

vemos que podemos obter uma configuração central normalizada de qualquer configuração central através de uma mudança de escala.

Configurações centrais normalizadas satisfazem

$$s_{ij}^a - 1 = \mu \frac{\Delta_i \Delta_j}{m_i m_j}.$$

Vimos que  $(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$  é definida por um único vetor a menos de multiplicação por escalar. Podemos fixar este fator e remover o parâmetro  $\mu$ , que pela demonstração do Lema 3.1 é negativo. Assim, para uma configuração central normalizada de dimensão  $n - 2$ , associamos um único vetor  $(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \in \mathbb{R}^n$  satisfazendo (3.1). Logo, pelas equações de Dziobek temos

$$s_{ij} = \left( 1 - \frac{\Delta_i \Delta_j}{m_i m_j} \right)^\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{a}. \quad (3.3)$$

Como  $s_{ij} > 0$ , temos que  $\Delta_i \Delta_j < m_i m_j$ . Assim, conhecidos os  $\Delta_i$ 's podemos encontrar as distâncias mútuas.

**Lema 3.2.** *Sejam  $\rho_1$  e  $\rho_2$  números reais satisfazendo  $\rho_1 < \rho_2 \leq 0$  e  $\rho_1 \rho_2 < 1$ . Tome  $\rho \in (\rho_1^{-1}, +\infty)$  e  $\alpha \in (-\infty, 0)$ . Considere*

$$s_{12} = (1 - \rho_1 \rho_2)^\alpha,$$

$$s_{13} = (1 - \rho_1 \rho)^\alpha,$$

$$s_{23} = (1 - \rho_2 \rho)^\alpha,$$

$$A(\rho_1, \rho_2, \rho) = (\rho_2 - \rho_1)s_{12} - (\rho_1 + \rho_2)(s_{13} - s_{23}).$$

Então,  $A(\rho_1, \rho_2, \rho) > 0$ .

**Demonstração.** Para estimar o sinal de  $A$ , vamos minimizar  $A$ . Primeiro vamos minimizar  $A$  com respeito a  $\rho$ . Para isso é suficiente minimizar

$$g(\rho) = s_{13} - s_{23} = (1 - \rho_1 \rho)^\alpha - (1 - \rho_2 \rho)^\alpha.$$

Assim,

$$g'(\rho) = \alpha(1 - \rho_1 \rho)^{\alpha-1}(-\rho_1) - \alpha(1 - \rho_2 \rho)^{\alpha-1}(-\rho_2).$$

Temos que encontrar  $\rho$  de forma que  $g'(\rho) = 0$ , ou seja,

$$-\rho_1(1 - \rho_1 \rho)^{\alpha-1} = -\rho_2(1 - \rho_2 \rho)^{\alpha-1}$$

isto é,

$$(-\rho_1)^{\frac{1}{\alpha-1}}(1 - \rho_1 \rho) = (-\rho_2)^{\frac{1}{1-\alpha}}(1 - \rho_2 \rho),$$

logo, esta equação é linear em  $\rho$ , portanto tem no máximo uma raiz, que podemos encontrar isolando  $\rho$ ,

$$\begin{aligned} (-\rho_1)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \rho_1(-\rho_1)^{\frac{1}{\alpha-1}}\rho &= (-\rho_2)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \rho_2(-\rho_2)^{\frac{1}{\alpha-1}}\rho \\ \Rightarrow (\rho_1(-\rho_1)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \rho_2(-\rho_2)^{\frac{1}{\alpha-1}})\rho &= (-\rho_1)^{\frac{1}{\alpha-1}} - (-\rho_2)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ \Rightarrow \rho &= \frac{(-\rho_1)^{\frac{1}{\alpha-1}} - (-\rho_2)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\rho_1(-\rho_1)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \rho_2(-\rho_2)^{\frac{1}{\alpha-1}}}. \end{aligned}$$

Tomando  $u = \frac{1}{\alpha-1}$ , temos  $u + 1 = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ . Como  $\alpha < 0$  segue que  $-1 < u < 0$ . Fazendo  $q = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ , temos que  $0 < q < 1$ , pois  $\rho_1 < \rho_2 \leq 0$ . Com estas mudanças de variáveis temos

$$\begin{aligned} B = \frac{A}{-\rho_1} &= \frac{1}{-\rho_1}((\rho_2 - \rho_1)s_{12} - (\rho_1 + \rho_2)(s_{13} - s_{23})) \\ &= (1 - q)(1 - \rho^2 q)^\alpha + (1 + q)g(\rho). \end{aligned}$$

Para minimizar  $B$  em  $\rho$ , basta substituir  $g(\rho)$  por  $g(\rho_0)$ , pois o segundo termo de  $B$  não depende de  $\rho_1$  e  $\rho_2$  e é positivo, logo basta fazermos  $\rho_1 = 0$ . Observe que,

$$\rho_0 = \frac{(-\rho_1)^{\frac{1}{\alpha-1}} - (-\rho_2)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\rho_1((-\rho_1)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{\rho_2}{\rho_1}(-\rho_2)^{\frac{1}{\alpha-1}})},$$

logo,

$$\begin{aligned} \rho_1 \rho_2 &= \frac{1 - \frac{(-\rho_2)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{(-\rho_1)^{\frac{1}{\alpha-1}}}}{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{(-\rho_2)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{(-\rho_1)^{\frac{1}{\alpha-1}}}} \\ &= \frac{1 - q^u}{1 - q q^u} \\ &= \frac{1 - q^u}{1 - q^{u+1}}. \end{aligned}$$

Observe que  $\rho_1 \rho_2 < 0$ , pois  $q < 1$  e  $-1 < u < 0$ . Substituindo  $\rho_0$  em  $g(\rho)$  obtemos o valor mínimo de  $s_{13} - s_{23}$ ,

$$\begin{aligned} g(\rho_0) &= (1 - \rho_1 \rho_0)^\alpha - (1 - \rho_2 \rho_0)^\alpha \\ &= \left(1 - \frac{1 - q^u}{1 - q^{u+1}}\right)^\alpha - (1 - q \rho_1 \rho_0)^\alpha \\ &= \left(1 - \frac{1 - q^u}{1 - q^{u+1}}\right)^\alpha - \left(1 - q \left(\frac{1 - q^u}{1 - q^{u+1}}\right)\right)^\alpha \\ &= \left(\frac{q^u - q^{u+1}}{1 - q^{u+1}}\right)^\alpha - \left(\frac{1 - q^{u+1} - q - q^{u+1}}{1 - q^{u+1}}\right)^\alpha \\ &= \left(\frac{q^{\frac{u+1}{\alpha}} (1 - q)}{1 - q^{u+1}}\right)^\alpha - \left(\frac{1 - q}{1 - q^{u+1}}\right)^\alpha \\ &= (q^{u+1} - 1) \left(\frac{1 - q}{1 - q^{u+1}}\right)^\alpha. \end{aligned}$$

Nas variáveis  $(q, \rho_1, \rho)$  o problema de minimizar  $A$  pode ser convertido em minimizar  $B = \frac{A}{-\rho_1}$ .

Temos que,

$$\begin{aligned}
 B > C &= (1-q) + (1+q)g(\rho_0) \\
 &= (1-q) + (1+q)(q^{u+1} - 1) \left( \frac{1-q}{1-q^{u+1}} \right)^\alpha \\
 &= (1-q) - (1+q)(1-q^{u+1})(1-q) \frac{(1-q)^{\alpha-1}}{(1-q^{u+1})^\alpha} \\
 &= (1-q) - (1-q)(1+q) \frac{(1-q)^{\alpha-1}}{(1-q^{u+1})^{\alpha-1}} \\
 &= (1-q) \left( 1 - \frac{(1+q)(1-q)^{\alpha-1}}{(1-q^{u+1})^{\alpha-1}} \right).
 \end{aligned}$$

Assim, para mostrar que  $C > 0$ , só precisamos mostrar que

$$\frac{(1+q)(1-q)^{\alpha-1}}{(1-q^{u+1})^{\alpha-1}} < 1.$$

Elevando ambos os lados a  $u = \frac{1}{\alpha-1} < 0$ , temos

$$\frac{(1+q)^u(1-q)}{1-q^{u+1}} > 1.$$

Para concluir nossa prova, vamos mostrar que a desigualdade acima é verdadeira para  $q \in (0, 1)$  e  $u \in (-1, 0)$ . Para isso mostraremos que

$$(1+q)^u(1-q) > -q^{u+1} + 1$$

ou seja,

$$f(q) = (1+q^u)(1-q) + q^{u+1} - 1 > 0.$$

Escrevendo  $1-q = -(1+q) + 2$  temos

$$\begin{aligned}
 f(q) &= (1+q)^u(-(1+q) + 2) + q^{u+1} - 1 \\
 &= -(1+q)^{u+1} + 2(1+q)^u + q^{u+1} - 1.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 f'(q) &= -(u+1)(1+q)^u + 2u(1+q)^{u-1} + (1+u)q^u \\
 &= (1+q)^u \left( -(u+1) + 2u(1+q)^{-1} + (1+u) \frac{q^u}{(1+q)^u} \right).
 \end{aligned}$$

Fazendo  $x = \frac{q}{1+q}$  temos

$$f'(q) = (1+q)^u(-(u+1) + 2u(1-x) + (1+u)x^u).$$

Observe que  $x \in (0, \frac{1}{2})$ . Vamos ver algumas propriedades de  $f$ ,

- $f(0^+) = 0^+$ .
- $f(1) = -2^{u+1} = 2^{u+1} + 1 - 1 = 0$ .
- $f'(1) = -(u+1)2^u = 2^u \frac{2^u}{2} + (1+u) = -2^u + 1 + u < 0$ .
- $f'(0^+) = +\infty$ .

Olhando para as duas primeiras características vemos que, ou  $f$  não possui raízes em  $(0, 1)$ , ou seja, ela é estritamente positiva, ou possui duas raízes. Mas isso significa que  $f'$  possui uma raiz ou exatamente três raízes. Então o que faremos é mostrar que  $f'$  possui no máximo duas raízes. Para isso vamos olhar para as raízes de

$$\psi(x) = -(u+1) + 2u(1-x) + (1+u)x^u, \quad x \in (0, \frac{1}{2}),$$

pois  $(1+q)^u \neq 0$ , para todo  $q \in (0, 1)$ . Temos que

$$\psi''(x) = (1+u)u(u-1)x^{u-2} > 0.$$

Logo,  $\psi$  é côncava, ou seja, possui no máximo duas raízes. Portanto,  $f'$  possui no máximo duas raízes e  $f$  é estritamente positiva, como queríamos demonstrar. ■

**Lema 3.3.** *Seja  $s_{ik} = \left(1 - \frac{\Delta_i \Delta_k}{m_i m_k}\right)^{\frac{1}{a}}$ . Considere  $t_i = \sum_{k \neq i} \Delta_k s_{ik}$  como uma função de  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  e dos parâmetros  $a < 0$ ,  $m_1 > 0, \dots, m_n > 0$ , onde  $\Delta_1 + \dots + \Delta_n = 0$ . Se  $\frac{\Delta_1}{m_1} < \frac{\Delta_2}{m_2} \leq 0$ ,  $\Delta_1 \Delta_2 < m_1 m_2$ ,  $\Delta_i \geq 0$ ,  $i \geq 3$ , então  $m_1 \geq m_2$  implica  $t_1 > t_2$ .*

**Demonstração.** Por (3.2) temos que

$$t_i - t_j = (\Delta_j - \Delta_i)s_{ij} + \sum_{k \neq i, j} \Delta_k (s_{ik} - s_{jk}).$$

Podemos renumerar as partículas de forma que

$$s_{13} - s_{23} \leq s_{14} - s_{24} \leq \dots \leq s_{1n} - s_{2n}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
t_1 - t_2 &= (\Delta_2 - \Delta_1)s_{12} + \Delta_3(s_{13} - s_{23}) + \dots + \Delta_n(s_{1n} - s_{2n}) \\
&\geq (\Delta_2 - \Delta_1)s_{12} + \Delta_3(s_{13} - s_{23}) + \dots + \Delta_n(s_{13} - s_{23}) \\
&= (\Delta_2 - \Delta_1)s_{12} + (\Delta_3 + \dots + \Delta_n)(s_{13} - s_{23}) \\
&= (\Delta_2 - \Delta_1)s_{12} - (\Delta_1 + \Delta_2)(s_{13} - s_{23})
\end{aligned}$$

Considere  $Z = (\Delta_2 - \Delta_1)s_{12} + (\Delta_3 + \dots + \Delta_n)(s_{13} - s_{23})$ .

Defina,

$$s_1 = -s_{12} - s_{13} + s_{23}$$

$$s_2 = s_{12} - s_{13} + s_{23}$$

Observe que,

$$s_{12} = \left(1 - \frac{\Delta_1 \Delta_2}{m_1 m_2}\right)^\alpha > 1, \text{ pois } \Delta_1 \Delta_2 < m_1 m_2 \text{ e } \alpha < 0,$$

$$s_{13} = \left(1 - \frac{\Delta_1 \Delta_3}{m_1 m_3}\right)^\alpha < 1, \text{ pois } \Delta_1 < 0, \Delta_3 > 0 \text{ e } \alpha < 0,$$

$$s_{23} = \left(1 - \frac{\Delta_2 \Delta_3}{m_2 m_3}\right)^\alpha < 1, \text{ pois } \Delta_2 < 0, \Delta_3 > 0 \text{ e } \alpha < 0.$$

Assim,  $s_1 < 0$  e  $s_2 > 0$  e

$$\begin{aligned}
\frac{Z}{m_2} &= \frac{\Delta_2}{m_2}s_{12} - \frac{\Delta_1}{m_2}s_{12} - \frac{\Delta_1}{m_2}(s_{13} - s_{23}) - \frac{\Delta_2}{m_2}(s_{13} - s_{23}) \\
&= \frac{\Delta_1}{m_2}(-s_{12} - s_{13} + s_{23}) + \frac{\Delta_2}{m_2}(s_{12} - s_{13} + s_{23}) \\
&= \frac{\Delta_1}{m_2}s_1 + \frac{\Delta_2}{m_2}s_2 \\
&\geq \frac{\Delta_1}{m_1}s_1 + \frac{\Delta_2}{m_2}s_2 \\
&= \frac{\Delta_1}{m_1}(-s_{12} - s_{13} + s_{23}) + \frac{\Delta_2}{m_2}(s_{12} - s_{13} + s_{23}) \\
&= -\frac{\Delta_1}{m_1}s_{12} - \frac{\Delta_1}{m_1}s_{13} + \frac{\Delta_1}{m_1}s_{23} + \frac{\Delta_2}{m_2}s_{12} - \frac{\Delta_2}{m_2}s_{13} + \frac{\Delta_2}{m_2}s_{23} \\
&= \left(\frac{\Delta_2}{m_2} - \frac{\Delta_1}{m_1}\right)s_{12} - \frac{\Delta_1}{m_1}(s_{13} - s_{23}) - \frac{\Delta_2}{m_2}(s_{13} - s_{23}) \\
&= \left(\frac{\Delta_2}{m_2} - \frac{\Delta_1}{m_1}\right)s_{12} - \left(\frac{\Delta_1}{m_1} + \frac{\Delta_2}{m_2}\right)(s_{13} - s_{23}) \\
&= A\left(\frac{\Delta_1}{m_1}, \frac{\Delta_2}{m_2}, \frac{\Delta_3}{m_3}\right) \\
&> 0,
\end{aligned}$$



pelo Lema 3.2. Portanto,  $t_1 - t_2 > Z > 0$ , ou seja,  $t_1 > t_2$ . ■

**Teorema 3.1.** *Seja  $(r_1, r_2, r_3, r_4)$  uma configuração central planar que é um quadrilátero convexo tendo  $[r_1, r_2]$  e  $[r_3, r_4]$  como diagonais. Então:*

- (a) *Esta configuração é simétrica com respeito ao eixo  $[r_3, r_4]$  se, e somente se,  $m_1 = m_2$ .*
- (b) *Esta configuração é simétrica com respeito ao eixo  $[r_1, r_2]$  se, e somente se,  $m_3 = m_4$ .*
- (c)  *$m_1 < m_2$  se, e somente se,  $|\Delta_{134}| < |\Delta_{234}|$ .*
- (d)  *$m_3 < m_4$  se, e somente se,  $|\Delta_{123}| < |\Delta_{124}|$ .*

**Demonstração.** (a) Assuma que a configuração é simétrica com respeito ao eixo  $[r_3, r_4]$ , então  $s_{13} = s_{23}$  e  $s_{14} = s_{24}$ . Assim,

$$\left(1 - \frac{\Delta_1 \Delta_3}{m_1 m_3}\right)^\alpha = \left(1 - \frac{\Delta_2 \Delta_3}{m_2 m_3}\right)^\alpha,$$

ou seja,

$$\frac{\Delta_1}{m_1} = \frac{\Delta_2}{m_2}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} 0 &= t_1 - t_2 \\ &= (\Delta_2 - \Delta_1)s_{12} + \Delta_3(s_{13} - s_{23}) + \Delta_4(s_{14} - s_{24}) \\ &= (\Delta_2 - \Delta_1)s_{12}. \end{aligned}$$

Como  $s_{12} \neq 0$  segue que  $\Delta_1 = \Delta_2$ . Logo,  $m_1 = m_2$ . Agora assuma que  $m_1 = m_2$ . Observe que podemos escrever

$$r_1 = \gamma r_2, \quad \gamma < 0$$

,

$$r_3 = \sigma r_4, \quad \sigma < 0$$

. Por (1.13) temos que

$$(\Delta_1 + \gamma \Delta_2)r_1 + (\Delta_3 + \sigma \Delta_4)r_3 = 0.$$

Como  $r_1$  e  $r_3$  são linearmente independentes temos que  $\Delta_1 + \gamma \Delta_2 = 0$ , como  $\gamma < 0$ , segue que  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  tem o mesmo sinal. Da mesma forma vemos que  $\Delta_3$  e  $\Delta_4$  tem o mesmo sinal. Mas por (1.13) temos que  $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 0$ , logo  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  tem sinal oposto de  $\Delta_3$  e  $\Delta_4$ . Sem perda de generalidade podemos assumir,  $\Delta_1, \Delta_2 < 0$  e  $\Delta_3, \Delta_4 > 0$ .

Assumindo que  $\Delta_1 < \Delta_2$  temos pelo Lema 3.3 que  $t_1 > t_2$ , mas sabemos que toda configuração central satisfaz  $t_1 = t_2$ , logo temos uma contradição. Por outro lado, se  $\Delta_2 < \Delta_1$  temos a mesma contradição. Assim,  $\Delta_1 = \Delta_2$ . Segue então,

$$s_{13} = \left(1 - \frac{\Delta_1 \Delta_3}{m_1 m_3}\right)^\alpha = \left(1 - \frac{\Delta_2 \Delta_3}{m_2 m_3}\right)^\alpha = s_{23},$$

$$s_{14} = \left(1 - \frac{\Delta_1 \Delta_4}{m_1 m_4}\right)^\alpha = \left(1 - \frac{\Delta_2 \Delta_4}{m_2 m_4}\right)^\alpha = s_{24}.$$

Portanto, a configuração é simétrica com relação ao eixo  $[r_3, r_4]$ .

**(b)** Análoga ao item (a).

**(c)** Observe que dizer que  $|\Delta_{134}| < |\Delta_{234}|$  é o mesmo que dizer que  $s_{13} < s_{23}$  e  $s_{14} < s_{24}$ . Assim,

$$\begin{aligned} m_1 < m_2 &\Leftrightarrow s_{13} < s_{23} \text{ e } s_{14} < s_{24} \\ &\Leftrightarrow \frac{\Delta_1}{m_1} < \frac{\Delta_2}{m_2} \\ &\Leftrightarrow \Delta_1 < \Delta_2. \end{aligned}$$

Assim, basta-nos mostrar que

$$m_1 < m_2 \Leftrightarrow \Delta_1 < \Delta_2.$$

Já vimos que podemos assumir  $\Delta_1, \Delta_2 < 0$ .

Assuma que  $\Delta_1 < \Delta_2$ , então pelo Lema 3.3, temos que  $m_1 \geq m_2 \Rightarrow t_1 - t_2 > 0$ . Como  $t_1 - t_2 = 0$  segue que  $m_1 < m_2$ . Agora se  $\Delta_2 < \Delta_1$ , temos pelo Lema 3.3 que  $m_2 \geq m_1 \Rightarrow t_2 - t_1 \geq 0$ . Como  $t_2 - t_1 = 0$ , segue que  $m_2 < m_1$ , ou seja,  $\Delta_2 < \Delta_1 \Rightarrow m_2 < m_1$ , que é equivalente a  $m_1 \leq m_2 \Rightarrow \Delta_1 \leq \Delta_2$ . Mas sabemos que a igualdade só acontece nos casos simétricos. Portanto a prova está concluída. ■

Mostramos, portanto, que em configurações centrais planares convexas de quatro massas, duas massas iguais é equivalente à simetria. Aqui utilizamos as equações de Dziobek. Pelas equações de Andoyer temos se há simetria, então

$$f_{34} = m_1(R_{13} - R_{14})\Delta_{341} + m_2(R_{23} - R_{24})\Delta_{342} = 0.$$

Observe que  $R_{13} = R_{24}$ ,  $R_{14} = R_{23}$  e  $\Delta_{341} = -\Delta_{342} \neq 0$ , assim

$$(R_{13} - R_{14})\Delta_{341}(m_1 - m_2) = 0.$$

Como  $R_{13} \neq R_{14}$  temos que  $m_1 = m_2$ . Mas no caso da recíproca a demonstração fica muito complexa e não vale a pena tentarmos uma demonstração alternativa. Já no próximo capítulo vamos ver a relação das massas com as características das configurações centrais planares côncavas de

quatro corpos e no final veremos que com uma abordagem diferente podemos facilitar o estudo destas configurações.

## Capítulo 4

# Configurações Centrais Planares Côncavas Simétricas de Quatro Corpos

Neste capítulo estudaremos o trabalho de Chunhua Deng e Shiqing Zhang [4] que consideram o seguinte problema: dada uma configuração planar simétrica côncava (Figura 4.1), encontrar massas positivas, se houverem, para as quais a configuração é central. Em primeiro lugar vamos considerar uma configuração planar côncava de quatro massas, onde três delas estão localizadas em um triângulo isósceles e a quarta massa localizada no centro de massa do sistema. Depois consideraremos a mesma configuração, mas com a quarta massa fora do centro de massa do sistema.

Aqui usaremos as equações da definição de configurações centrais. Tais equações para uma configuração central de quatro corpos são:

$$\begin{cases} m_2 \frac{(r_2-r_1)}{|r_2-r_1|^3} + m_3 \frac{(r_3-r_1)}{|r_3-r_1|^3} + m_4 \frac{(r_4-r_1)}{|r_4-r_1|^3} = -\lambda(r_1 - c) \\ m_1 \frac{(r_1-r_2)}{|r_1-r_2|^3} + m_3 \frac{(r_3-r_2)}{|r_3-r_2|^3} + m_4 \frac{(r_4-r_2)}{|r_4-r_2|^3} = -\lambda(r_2 - c) \\ m_1 \frac{(r_1-r_3)}{|r_1-r_3|^3} + m_2 \frac{(r_2-r_3)}{|r_2-r_3|^3} + m_4 \frac{(r_4-r_3)}{|r_4-r_3|^3} = -\lambda(r_3 - c) \\ m_1 \frac{(r_1-r_4)}{|r_1-r_4|^3} + m_2 \frac{(r_2-r_4)}{|r_2-r_4|^3} + m_3 \frac{(r_3-r_4)}{|r_3-r_4|^3} = -\lambda(r_4 - c). \end{cases} \quad (4.1)$$

Assuma o centro de massa  $c = (c_x, c_y)$ . Dado  $r_1 = (-1, 0)$ ,  $r_2 = (1, 0)$ ,  $r_3 = (0, t)$  e  $r_4 = (0, s)$ , onde  $t > s > 0$ . O sistema (4.1) em termos das coordenadas acima fica

$$\begin{cases} \frac{m_2}{2^3} (2, 0) + \frac{m_3}{(\sqrt{1+t^2})^3} (1, t) + \frac{m_4}{(\sqrt{1+s^2})^3} (1, s) = \lambda(1 + c_x, c_y) \\ \frac{m_1}{2^3} (-2, 0) + \frac{m_3}{(\sqrt{1+t^2})^3} (-1, t) + \frac{m_4}{(\sqrt{1+s^2})^3} (-1, s) = -\lambda(1 - c_x, -c_y) \\ \frac{m_1}{(\sqrt{1+t^2})^3} (-1, -t) + \frac{m_2}{(\sqrt{1+t^2})^3} (1, -t) + \frac{m_4}{(t-s)^3} (0, s-t) = -\lambda(-c_x, t - c_y) \\ \frac{m_1}{(\sqrt{1+s^2})^3} (-1, -s) + \frac{m_2}{(\sqrt{1+s^2})^3} (1, -s) + \frac{m_3}{(t-s)^3} (0, t-s) = -\lambda(-c_x, s - c_y). \end{cases} \quad (4.2)$$

Assim, podemos dividir o sistema (4.2) em dois, um na primeira coordenada e um na segunda coordenada. Então temos os dois sistema abaixo

$$\begin{cases} \frac{2}{2^3}m_2 + \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3}m_3 + \frac{1}{(\sqrt{1+s^2})^3}m_4 = \lambda(1+c_x) \\ \frac{-2}{2^3}m_1 + \frac{-1}{(\sqrt{1+t^2})^3}m_3 + \frac{-1}{(\sqrt{1+s^2})^3}m_4 = -\lambda(1-c_x) \\ \frac{-1}{(\sqrt{1+t^2})^3}m_1 + \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3}m_2 = \lambda c_x \\ \frac{-1}{(\sqrt{1+s^2})^3}m_1 + \frac{1}{(\sqrt{1+s^2})^3}m_2 = \lambda c_x, \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3}m_3 + \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3}m_4 = \lambda c_y \\ \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3}m_3 + \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3}m_4 = \lambda c_y \\ \frac{-t}{(\sqrt{1+t^2})^3}m_1 + \frac{-t}{(\sqrt{1+t^2})^3}m_2 + \frac{s-t}{(t-s)^3}m_4 = -\lambda(t-c_y) \\ \frac{-s}{(\sqrt{1+s^2})^3}m_1 + \frac{-s}{(\sqrt{1+s^2})^3}m_2 + \frac{t-s}{(t-s)^3}m_3 = -\lambda(s-c_y). \end{cases} \quad (4.4)$$

Em (4.4) as duas primeiras equações são iguais.

Subtraindo a quarta equação de (4.3) da terceira equação de (4.3), temos que

$$\left( \frac{-1}{(\sqrt{1+t^2})^3} - \frac{-1}{(\sqrt{1+s^2})^3} \right) m_1 + \left( \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3} - \frac{1}{(\sqrt{1+s^2})^3} \right) m_2 = 0.$$

Logo

$$\left( \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3} - \frac{1}{(\sqrt{1+s^2})^3} \right) (m_2 - m_1) = 0.$$

Para  $t > s > 0$  temos que

$$\left( \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3} - \frac{1}{(\sqrt{1+s^2})^3} \right) \neq 0$$

logo,

$$m_1 = m_2.$$

Somando as duas primeiras equações de (4.3) e usando o fato de que  $m_1 = m_2$ , temos que

$$\lambda c_x = 0.$$

Como  $\lambda > 0$ , segue que  $c_x = 0$ . Assim, reduzimos o sistema (4.2), no sistema abaixo

$$\begin{cases} \frac{2}{2^3}m_2 + \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3}m_3 + \frac{1}{(\sqrt{1+s^2})^3}m_4 = \lambda \\ \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3}m_3 + \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3}m_4 = \lambda c_y \\ \frac{-2t}{(\sqrt{1+t^2})^3}m_2 + \frac{s-t}{(t-s)^3}m_4 = -\lambda(t-c_y) \\ \frac{-2s}{(\sqrt{1+s^2})^3}m_2 + \frac{t-s}{(t-s)^3}m_3 = -\lambda(s-c_y). \end{cases} \quad (4.5)$$

**Teorema 4.1.** *Seja  $r_1 = (-1, 0)$ ,  $r_2 = (1, 0)$ ,  $r_3 = (0, t)$  e  $r_4 = (0, s)$ , onde  $t > s > 0$  (Figura 4.1). Assuma que o centro de massa  $c = C/M = r_4$ . A configuração simétrica côncava  $r = (r_1, r_2, r_3, r_4)$  é uma configuração central se, e somente se,  $t = \sqrt{3}$ ,  $s = \sqrt{3}/3$ , com  $m_1 = m_2 =$*

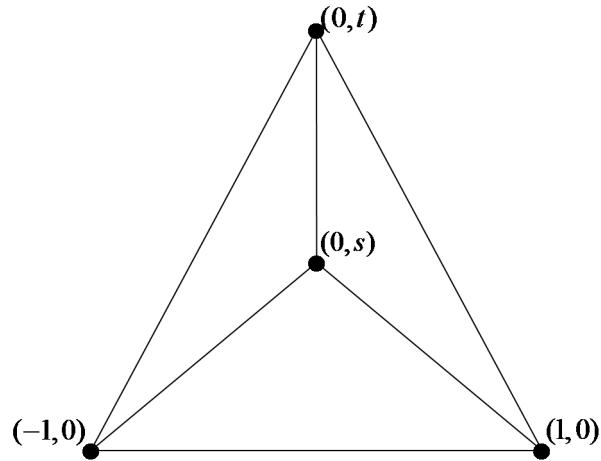


Figura 4.1: Uma configuração simétrica côncava.

$m_3 > 0$  e  $m_4 > 0$ .

**Demonstração.** Assumamos que o centro de massa  $c = r_4$ , isto é,  $c_y = s$ . O sistema (4.5) para configurações centrais neste caso, fica

$$\begin{cases} \frac{2}{2^3}m_2 + \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3}m_3 + \frac{1}{(\sqrt{1+s^2})^3}m_4 = \lambda \\ \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3}m_3 + \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3}m_4 = \lambda s \\ \frac{-2t}{(\sqrt{1+t^2})^3}m_2 + \frac{s-t}{(t-s)^3}m_4 = -\lambda(t-s) \\ \frac{-2s}{(\sqrt{1+s^2})^3}m_2 + \frac{t-s}{(t-s)^3}m_3 = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

A quarta equação de (4.6) pode ser escrita como

$$m_2 = \frac{t-s}{(t-s)^3} \frac{(\sqrt{1+s^2})^3}{2s} m_3. \quad (4.7)$$

Substituindo (4.7) na terceira equação de (4.6), temos

$$\frac{-2t}{(\sqrt{1+t^2})^3} \frac{1}{(t-s)^3} \frac{(\sqrt{1+s^2})^3}{2s} m_3 + \frac{s-t}{(t-s)^3} m_4 = -\lambda(t-s), \quad (4.8)$$

para  $t > s > 0$ , temos

$$\frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3} \frac{1}{(t-s)^3} \frac{(\sqrt{1+s^2})^3}{s} m_3 + \frac{1}{(t-s)^3} m_4 = \lambda. \quad (4.9)$$

Da segunda equação em (4.6) e da equação (4.9) acima, temos

$$\frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3} m_3 + \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3} m_4 = \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3} \frac{1}{(t-s)^3} (\sqrt{1+s^2})^3 m_3 + \frac{s}{(t-s)^3} m_4,$$

logo,

$$\frac{1}{(t-s)^3} = 1$$

ou seja,

$$\sqrt{1+s^2} = (t-s). \quad (4.10)$$

Assim as últimas três equações em (4.6) são equivalentes a

$$\begin{cases} (t-s) = \sqrt{1+s^2} \\ m_4 = \lambda(\sqrt{1+s^2})^3 - \frac{2}{(\sqrt{1+t^2})^3} \frac{(\sqrt{1+s^2})^3}{t-s} m_2 \\ m_3 = \frac{2s}{t-s} m_2. \end{cases} \quad (4.11)$$

Substituindo (4.11) na primeira equação em (4.6), temos

$$\frac{2}{2^3} m_2 + \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3} \frac{2s}{t-s} m_2 + \frac{1}{(\sqrt{1+s^2})^3} \left( \lambda(\sqrt{1+s^2})^3 - \frac{2t}{(\sqrt{1+t^2})^3} \frac{(\sqrt{1+s^2})^3}{t-s} m_2 \right) = \lambda.$$

Assim,

$$m_2 \left( \frac{2}{2^3} + \frac{2s}{(\sqrt{1+t^2})^3(t-s)} - \frac{2t}{(\sqrt{1+t^2})^3(t-s)} \right) = 0$$

logo,

$$\frac{1}{2^3} + \frac{s-t}{(\sqrt{1+t^2})^3(t-s)} = 0.$$

Portanto, usando (4.10) temos

$$t = \sqrt{3} \quad \text{e} \quad s = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (4.12)$$

Assim, por (4.11),

$$m_3 = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}} m_2 = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{3}}{2\frac{\sqrt{3}}{3}} m_2 = m_2.$$

Logo,  $m_1 = m_2 = m_3$ . Além disso,

$$\begin{aligned} m_4 &= \lambda \sqrt{1+3/9}^3 - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}^3} \frac{\sqrt{1+3/9}^3}{\sqrt{3} - \sqrt{3}/3} m_2 \\ &= \lambda \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^3 - \frac{3}{8} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^3 m_2 \\ &= \frac{8}{9} \sqrt{3} \lambda - \frac{\sqrt{3}}{3} m_2. \end{aligned}$$

Assim, para qualquer massa positiva  $m_4$ , podemos encontrar  $\lambda > 0$  tal que  $m_4 = \frac{8}{9} \sqrt{3} \lambda - \frac{\sqrt{3}}{3} m_2$ . Portanto, dada três massas iguais  $m_1, m_2, m_3 > 0$  e  $m_4 > 0$ , encontramos  $\lambda > 0$  que torna

nossa configuração central e portanto o teorema está provado. ■

**Teorema 4.2.** *Seja  $r_1 = (-1, 0)$ ,  $r_2 = (1, 0)$ ,  $r_3 = (0, t)$  e  $r_4 = (0, s)$ , onde  $t > s > 0$ . Assuma que o centro de massa  $c = C/M \neq r_4$ . Existem duas regiões abertas e limitadas,  $C$  e  $D$ , tais que a configuração  $r = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ , é uma configuração central com massas positivas, onde*

$$m_1 = m_2 = \lambda \frac{2^3(\sqrt{1+t^2})^3(t-c_y)(t-s)^3 - (\sqrt{1+s^2})^3}{2t(\sqrt{1+s^2})^3(t-s)^3 \left(\frac{2}{\sqrt{1+s^2}}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t-s}\right)^3}, \quad (4.13)$$

$$m_3 = \frac{\lambda s(\sqrt{1+t^2})^3}{\sqrt{1+s^2}^6(t-s)^3} \frac{((\sqrt{1+s^2})^3 - 2^3)((\sqrt{1+s^2})^3 - (t-s)^3)}{\left(\frac{t-s}{(t-s)^3} + \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3} - \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3}\right)\left(\left(\frac{2}{\sqrt{1+s^2}}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t-s}\right)^3\right)}, \quad (4.14)$$

$$m_4 = \frac{\lambda(t-c_y)}{(t-s)} \frac{(2^3 - (\sqrt{1+t^2})^3)}{\left(\frac{2}{\sqrt{1+s^2}}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t-s}\right)^3}. \quad (4.15)$$

**Demonstração.** Assuma que o centro de massa  $c \neq r_4$ , isto é,  $c_y \neq s$ . Multiplicando a segunda equação de (4.5) por  $(s-t)/(t-s)^3$  temos

$$\frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3} \frac{s-t}{(t-s)^3} m_3 + \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3} \frac{s-t}{(t-s)^3} m_4 = \lambda c_y \frac{s-t}{(t-s)^3}. \quad (4.16)$$

Agora, multiplicando a terceira equação de (4.5) por  $s/(\sqrt{1+s^2})^3$  temos

$$\frac{2t}{(\sqrt{1+t^2})^3} \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3} m_2 + \frac{t-s}{(t-s)^3} \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3} m_4 = \lambda(t-c_y) \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3}. \quad (4.17)$$

Somando (4.16) e (4.17) temos

$$\frac{2t}{(\sqrt{1+t^2})^3} \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3} m_2 + \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3} \frac{s-t}{(t-s)^3} m_3 = \lambda \left( \left( \frac{s-t}{(t-s)^3} - \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3} \right) c_y + \frac{ts}{(\sqrt{1+s^2})^3} \right). \quad (4.18)$$

Agora multiplicando a quarta equação de (4.5) por  $-t/(\sqrt{1+t^2})^3$  temos

$$\frac{2t}{(\sqrt{1+t^2})^3} \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3} m_2 + \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3} \frac{s-t}{(t-s)^3} m_3 = \lambda(c_y - s) \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3}. \quad (4.19)$$

Observe que o primeiro termo de (4.18) é igual ao primeiro termo de (4.19) assim temos que uma condição necessária para a resolução de (4.5) é

$$\left( \left( \frac{s-t}{(t-s)^3} - \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3} \right) c_y + \frac{ts}{(\sqrt{1+s^2})^3} \right) = (c_y - s) \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3} \quad (4.20)$$



assim,

$$c_y = \left( \frac{ts}{(\sqrt{1+s^2})^3} + \frac{st}{(\sqrt{1+t^2})^3} \right) / \left( \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3} + \frac{t-s}{(t-s)^3} + \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3} \right) \quad (4.21)$$

O sistema (4.5) para configurações centrais fica

$$\begin{cases} c_y = \left( \frac{ts}{(\sqrt{1+s^2})^3} + \frac{st}{(\sqrt{1+t^2})^3} \right) / \left( \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3} + \frac{t-s}{(t-s)^3} + \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3} \right) \\ \frac{2}{2^3}m_2 + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}^3}m_3 + \frac{1}{(\sqrt{1+s^2})^3}m_4 = \lambda \\ \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3}m_3 + \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3}m_4 = \lambda c_y \\ \frac{-2t}{(\sqrt{1+t^2})^3}m_2 + \frac{s-t}{(t-s)^3}m_4 = -\lambda(t - c_y). \end{cases} \quad (4.22)$$

A terceira e a quarta equações em (4.22) podem ser escritas como

$$\frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3}m_3 = \frac{1}{t} \left( \lambda c_y - \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3}m_4 \right), \quad (4.23)$$

$$\frac{2}{2^3}m_2 = \left( \lambda(t - c_y) - \frac{t-s}{(t-s)^3}m_4 \right). \quad (4.24)$$

Assim substituindo as duas equações acima na segunda equação de (4.22), obtemos

$$\left( \lambda(t - c_y) - \frac{t-s}{(t-s)^3}m_4 \right) \frac{(\sqrt{1+t^2})^3}{2t} \frac{2}{2^3} + \frac{1}{t} \left( \lambda c_y - \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3}m_4 \right) + \frac{1}{(\sqrt{1+s^2})^3}m_4 = \lambda$$

então,

$$m_4 = \frac{\lambda(t - c_y)}{(t-s)} \frac{(2^3 - (\sqrt{1+t^2})^3)}{\left( \left( \frac{2}{\sqrt{1+s^2}} \right)^3 - \left( \frac{\sqrt{1+t^2}}{t-s} \right)^3 \right)}. \quad (4.25)$$

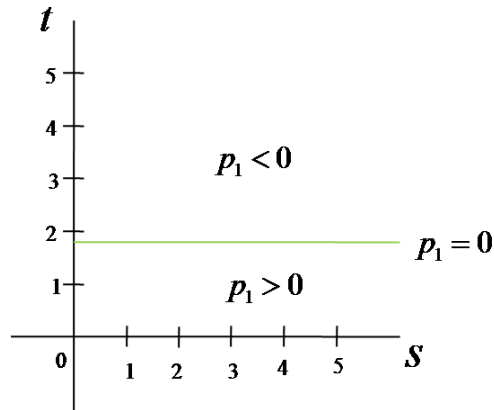
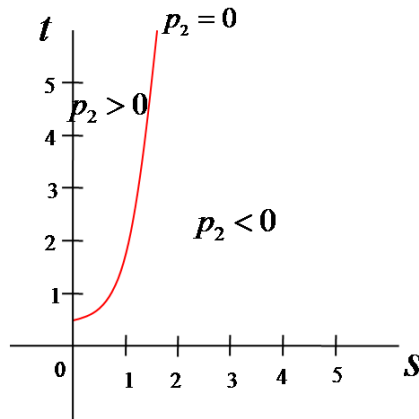
Substituindo (4.25) em (4.23) e simplificando obtemos

$$m_3 = \frac{\lambda s (\sqrt{1+t^2})^3}{(\sqrt{1+s^2})^6 (t-s)^3} \frac{((\sqrt{1+s^2})^3 - 2^3)((\sqrt{1+s^2})^3 - (t-s)^3)}{\left( \frac{t-s}{(t-s)^3} + \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3} - \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3} \right) \left( \left( \frac{2}{\sqrt{1+s^2}} \right)^3 - \left( \frac{\sqrt{1+t^2}}{t-s} \right)^3 \right)}. \quad (4.26)$$

Substituindo (4.25) em (4.23) e simplificando, encontramos uma expressão para  $m_2$  e consequentemente encontramos uma expressão para  $m_1$ ,

$$m_1 = m_2 = \lambda \frac{2^3 (\sqrt{1+t^2})^3 (t - c_y) ((t-s)^3 - (\sqrt{1+s^2})^3)}{2t (\sqrt{1+s^2})^3 (t-s)^3 \left( \left( \frac{2}{\sqrt{1+s^2}} \right)^3 - \left( \frac{\sqrt{1+t^2}}{t-s} \right)^3 \right)}. \quad (4.27)$$

As equações (4.27), (4.26) e (4.25) nos fornecem expressões para as massas  $m_1, m_2, m_3, m_4$ . Então o que precisamos fazer é analisar tais funções e encontrar a região do plano  $st$  onde as funções das massas são positivas.

Figura 4.2: O sinal de  $p_1$ .Figura 4.3: O sinal de  $p_2$ .

Com cálculos simples, vemos que o centro de massa do nosso sistema é dado por

$$c = (c_x, c_y) = \left( 0, \frac{sm_4 + tm_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \right).$$

então,  $t - c_y > 0$  para  $0 < s < t$ . Sejam  $p_1 = 2^3 - (\sqrt{1+t^2})^3$  e  $p_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{1+s^2}}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t-s}\right)^3$ . Assim, para que  $m_4$  seja positivo é necessário que  $\frac{p_1}{p_2} > 0$ . Nas figuras 4.2 e 4.3 vemos as curvas  $p_1 = 0$  e  $p_2 = 0$  e os sinais de  $p_1$  e  $p_2$  para  $s, t > 0$ . Assim,  $m_4 > 0$  nas regiões onde  $p_1$  e  $p_2$  tem o mesmo sinal e  $0 < s < t$ , estas regiões são mostradas na Figura 4.4.

Agora, vamos considerar

$$\begin{aligned} p_3 &= (\sqrt{1+s^2})^3 - 2^3, \\ p_4 &= (\sqrt{1+s^2})^3 - (t-s)^3, \\ p_5 &= \frac{t-s}{(t-s)^3} + \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3} - \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3}. \end{aligned}$$

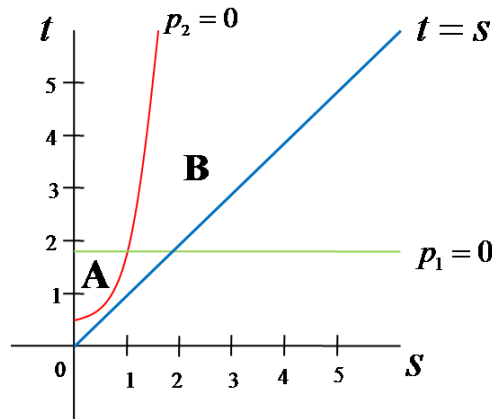


Figura 4.4: As regiões A e B onde  $m_4 > 0$ .

Assim, para que  $m_3$  seja positivo é preciso que  $\frac{p_3 p_4}{p_5 p_2} > 0$ .

Como  $t > s$  e  $t - s < \sqrt{1 + t^2}$  temos que

$$\begin{aligned}
 p_5 &= \frac{t-s}{(t-s)^3} + \frac{s}{(\sqrt{1+s^2})^3} - \frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3} \\
 &= t \left( \frac{1}{(t-s)^3} - \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3} \right) + s \left( \frac{1}{(\sqrt{1+s^2})^3} - \frac{1}{(t-s)^3} \right) \\
 &> s \left( \frac{1}{(t-s)^3} - \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3} \right) + s \left( \frac{1}{(\sqrt{1+s^2})^3} - \frac{1}{(t-s)^3} \right) \\
 &= s \left( \frac{1}{(\sqrt{1+s^2})^3} - \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3} \right) \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

Além disso, a equação  $p_3 = 0$  é dada pela reta  $s = \sqrt{3}$  no plano  $st$  e temos que  $p_3$  é positiva à direita desta reta e negativa à esquerda desta reta. A equação  $p_4 = 0$  determina uma curva monótona crescente e  $p_4$  é negativa abaixo desta curva e positiva acima desta curva (ver Figura 4.5). Assim, o que determina o sinal de  $m_3$  é  $p_1$  e  $p_2$ . As curvas  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 0$  e  $p_4 = 0$  tem um único ponto de interseção que é  $(\sqrt{3}/3, 3)$  para  $0 < s < t$ . Isto pode ser visto na Figura 4.6. Assim, a região onde  $m_4, m_3 > 0$  é a união dos conjuntos abertos não vazios  $C$  e  $D$  indicados na Figura 4.6

Como podemos escrever

$$m_1 = m_2 = -\lambda \frac{2^3 (\sqrt{1+t^2})^3 (t - c_y) p_4}{2t (\sqrt{1+s^2})^3 (t-s)^3 p_2}$$

o que determina o sinal de  $m_1$  e  $m_2$  também é  $p_2$  e  $p_4$ . Portanto, temos que a região onde  $m_i > 0$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  é a união das regiões  $C$  e  $D$  mostradas na Figura 4.6.

Portanto, encontramos duas regiões abertas e limitadas onde a configuração  $r$  é uma configuração central.

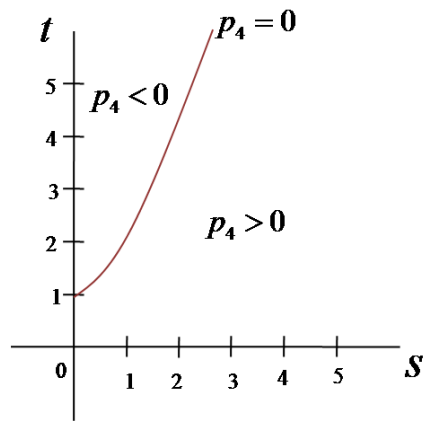


Figura 4.5: O sinal de  $p_4$ .

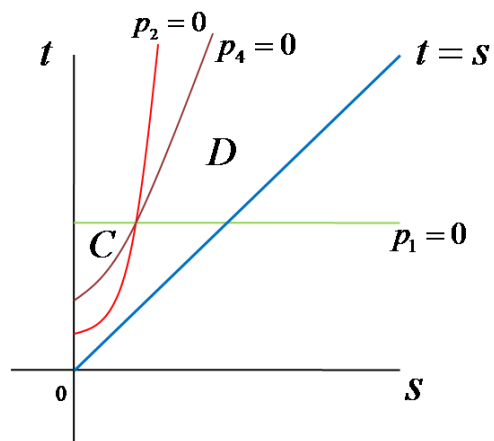


Figura 4.6: As regiões  $C$  e  $D$  onde  $m_i > 0$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ .



Vimos neste capítulo que se colocarmos três corpos nos vértices de um triângulo isósceles e um quarto corpo no centro de massa do sistema, esta configuração é uma configuração central se, e somente se, os três corpos que estão nos vértices do triângulo tem massas iguais e o triângulo seja equilátero. Depois vimos que se colocarmos o quarto corpo sobre a mediatriz do triângulo, mas fora do centro de massa do sistema, existem duas regiões abertas e limitadas onde esta configuração é uma configuração central, com massas unicamente determinadas e os corpos da base do triângulo tendo massas iguais.

Observe que o fato de termos assumido simetria é essencial para conseguirmos trabalhar com as equações da definição. Se não assumimos a simetria teríamos duas variáveis a mais para trabalhar e isto tornaria os cálculos bem mais complexos.

Aqui, Deng e Zhang [4] abordaram este problema usando as equações da definição de configuração central, mas Mello, Chaves e Fernandes em [6] abordaram este problema usando as equações de Andoyer. O problema proposto foi:

**Teorema 4.3.** *Considere quatro corpos com massas  $m_1, m_2, m_3$  e  $m_4$  localizadas em  $(-x, 0)$ ,  $(x, 0)$ ,  $(0, \sqrt{3}/2)$  e  $(0, y)$  com  $x > 0$  e  $y < \sqrt{3}/2$  conforme a Figura 4.7. Então para cada*

$$x_0 \in \left( \frac{2\sqrt{3}-3}{2}, \frac{1}{2} \right) \cup \left( \frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{3}+3}{2} \right)$$

*existe um intervalo aberto não vazio  $I - x_0$  tal que para cada  $y_0 \in I_{x_0}$ , existem massa positivas  $m_1 = m_2, m_3$  e  $m_4$  de modo que os quatro corpos estejam em uma configuração central.*

Aqui faremos um breve esboço da demonstração para vermos a facilidade de se trabalhar com as equações de Andoyer neste caso.

Observe que  $r_{13} = r_{23}$ ,  $r_{14} = r_{24}$  e  $\Delta_{143} = \Delta_{234}$ , assim

$$f_{12} = m_3(R_{13} - R_{14})\Delta_{123} + m_4(R_{14} - R_{24})\Delta_{124} = 0$$

é trivialmente satisfeita. Além disso,

$$\begin{aligned} f_{34} &= m_1(R_{13} - R_{14})\Delta_{341} + m_2(R_{23} - R_{24})\Delta_{342} \\ &= (m_1 - m_2)(R_{13} - R_{14})\Delta_{341} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como  $\Delta_{341}$  não se anula temos que  $m_1 = m_2$  ou  $R_{13} = R_{14}$ , mas se o último caso ocorre temos um quadrado, que não estamos interessados no momento. Assim,  $m_1 = m_2$ . Sem perda de generalidade vamos assumir que  $m_1 = m_2 = 1$ . Temos então que  $f_{13} = -f_{23}$  e  $f_{14} = -f_{24}$ . Portanto, só precisamos encontrar uma solução para  $f_{13} = 0$  e  $f_{14} = 0$  com valores positivos

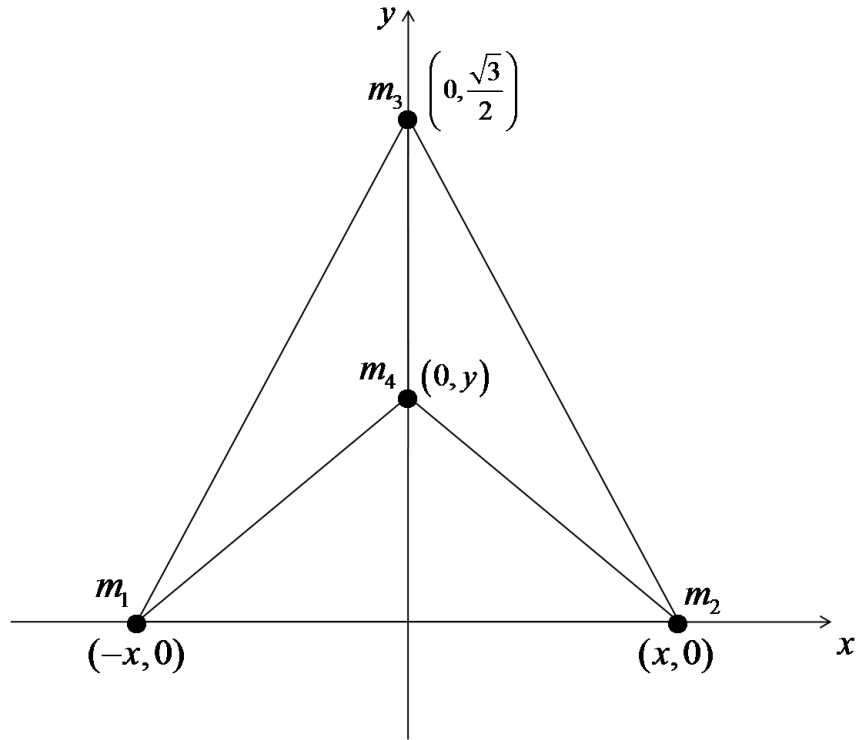


Figura 4.7: Configuração do tipo pipa.

para  $m_3$  e  $m_4$ . Usando  $f_{13} = 0$  e  $f_{14} = 0$ , temos

$$m_3 = \frac{(R_{12} - R_{42})\Delta_{142}}{(R_{34} - R_{13})\Delta_{143}},$$

$$m_3 = \frac{(R_{12} - R_{23})\Delta_{132}}{(R_{34} - R_{14})\Delta_{134}}.$$

Substituindo as coordenadas conforme indicado na Figura 4.7 temos

$$R_{12} - R_{24} < 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ x > 0, -\sqrt{3}x < y < \sqrt{3}x \right\},$$

$$R_{34} - R_{14} < 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ x > 0, y < \frac{-\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right\},$$

$$R_{34} - R_{13} < 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ x > 0, y < \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3 + 4x^2}}{2} \right\},$$

$$R_{12} - R_{32} < 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ x > \frac{1}{2}, y < \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Se considerarmos  $0 < y < \sqrt{3}/2$  temos  $\Delta_{142} < 0$ ,  $\Delta_{143} > 0$ ,  $\Delta_{132} < 0$  e  $\Delta_{134} < 0$ . Assim,  $m_3$

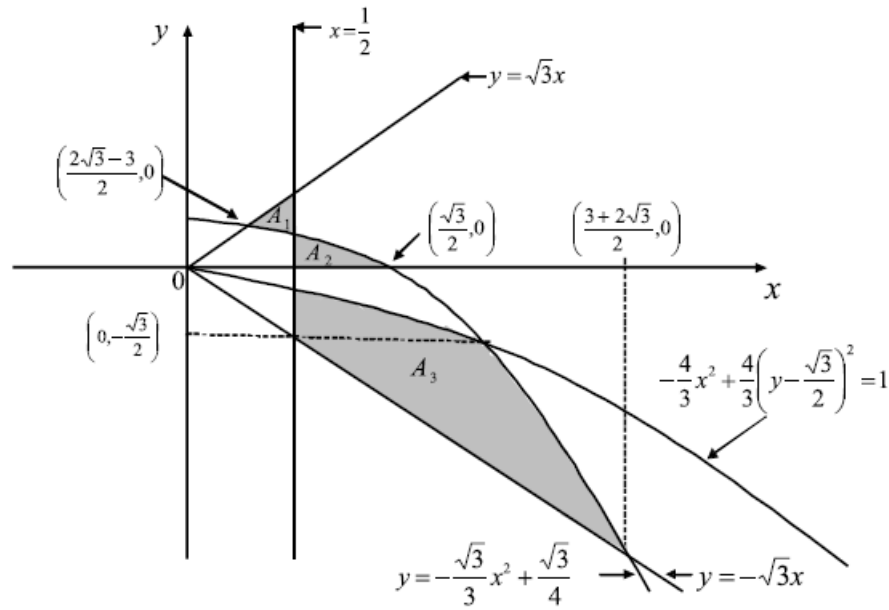


Figura 4.8: As regiões  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ .

e  $m_4$  são positivas para  $(x, y) \in A_1 \cup A_2$ , onde

$$A_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2\sqrt{3}-3}{2} < x < \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} < y < \sqrt{3}x \right\},$$

$$A_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 < y < -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right\}.$$

Considerando agora,  $y < 0$  temos  $\Delta_{142} > 0$ ,  $\Delta_{143} > 0$ ,  $\Delta_{132} < 0$  e  $\Delta_{134} < 0$  e assim  $m_3$  e  $m_4$  são positivas se  $(x, y) \in A_3 = B_1 \cup B_2$  onde

$$B_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3}x < y < \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3+4x^2}}{2} \right\},$$

$$B_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2} < x < \frac{2\sqrt{3}+3}{2}, -\sqrt{3}x < y < -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right\}.$$

Não precisamos considerar o caso  $y = 0$ , pois pelo Teorema do Perpendicular Bissetor não há configuração central quando isto ocorre.

Concluimos então que se  $(x, y) \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$  temos que  $m_1 = m_2 = 1$  e  $m_3$  e  $m_4$  são unicamente determinadas por  $(x, y)$ . Na Figura 4.8 temos ilustradas as regiões  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ .

Observe que a partir do momento que assumimos simetria, mostrar a igualdade das massas é bem mais fácil utilizando as equações de Andoyer. Quando utilizamos as equações da definição de configuração central as expressões que precisamos trabalhar são bem mais complexas e muitas vezes elas se tornam tão complexas que impossibilitam a continuação do estudo.

No próximo capítulo trabalharemos com as equações de Andoyer para resolver um problema com cinco massas, o que tornaria o trabalho com as equações da definição mais difícil, visto que estas teriam um termo a mais.



## Capítulo 5

# Simetria em Configurações Centrais de cinco corpos: Euler mais dois

Neste capítulo estudaremos o trabalho de Marian Gidea e Jaume Llibre [5], onde começando com uma configuração central colinear de três corpos analisaremos possíveis maneiras de acrescentar mais dois corpos de maneira simétrica de forma que o resultado continue sendo uma configuração central. Aqui usaremos as equações de Andoyer (1.2). O resultado que iremos demonstrar é o que segue.

**Teorema 5.1.** *Seja  $r = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$  uma configuração com massas  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$ . Considere que três dos corpos formem uma configuração central colinear, com  $m_1 = m_3$  e  $r_2$  no meio do segmento  $\overline{r_1 r_3}$ . As outras duas massas  $m_4, m_5$  são colocadas simetricamente com respeito à configuração colinear, como segue nos quatro casos abaixo. Em cada caso concluímos que existe uma configuração central do tipo especificado.*

- (a) *Assuma que  $m_4$  e  $m_5$  estão localizadas simetricamente com respeito ao segmento  $\overline{r_1 r_3}$ . Considere que  $m_4 = m_5$ . Então existe uma família contínua de configurações centrais com o segmento que contém  $m_4$  e  $m_5$  passando por  $m_2$ , isto é,  $m_1, m_3, m_4, m_5$  estão nos vértices de um losango com  $m_2$  no centro. Quando o losango for um quadrado, temos  $m_1 = m_3 = m_4 = m_5$  e  $m_2$  é indeterminada. Caso contrário, as massas  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$  são unicamente determinadas para cada configuração central possível.*
- (b) *Assuma que  $m_4$  e  $m_5$  estão localizadas simetricamente com respeito a  $m_2$  sem nenhuma outra simetria, ou seja,  $m_4$  e  $m_5$  não são simétricas com respeito nem à reta que contém  $m_1$  e  $m_3$ , nem ao perpendicular bissetor do segmento  $\overline{r_1 r_3}$ . Aqui não assumiremos  $m_4 = m_5$ . Então, não existe uma configuração central deste tipo.*
- (c) *Assuma que  $m_4$  e  $m_5$  estão localizadas simetricamente com respeito ao perpendicular bissetor do segmento  $\overline{r_1 r_3}$  e estão de um mesmo lado deste segmento. Assuma  $m_4 = m_5$ . Então existe uma família contínua de configurações centrais deste tipo, consistindo de trapézios com os lados  $r_1 r_3$  e  $r_4 r_5$  paralelos e  $r_2$  no meio do lado  $r_1 r_3$ . As*

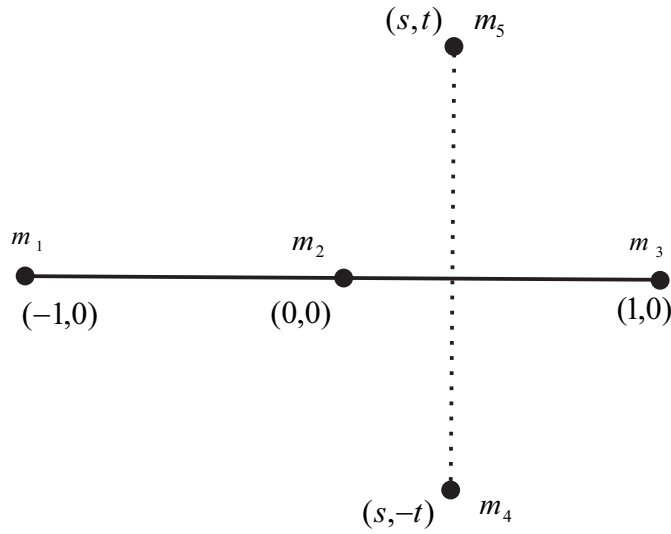


Figura 5.1: Uma configuração de cinco corpos.

massas  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$  são unicamente determinadas para cada configuração central possível.

- (d) Assuma que  $m_4$  e  $m_5$  estão no perpendicular bissetor do segmento  $\overline{r_1 r_3}$ . Suponha que  $m_4 \neq m_5$ . Então esta não é uma configuração central (exceto para o caso encontrado no item (a)).

**Demonstração do item (a).** Considere uma configuração empilhada simétrica de cinco corpos, em que três destes corpos formam uma configuração central colinear de massas  $m_1, m_2, m_3$ , de forma que  $m_1 = m_3$  e estão nas extremidades do segmento. Os outros dois corpos, também com massas iguais,  $m_4 = m_5$ , estão localizadas simetricamente com respeito ao segmento  $\overline{r_1 r_3}$ , em dois lados deste segmento. Ver Figura 5.1.

As equações (1.2) para esta configuração tem as seguintes relações:  $f_{12} = f_{13} = f_{23} = f_{45} = 0$ ,  $f_{14} = -f_{15}$ ,  $f_{24} = -f_{25}$  e  $f_{34} = -f_{35}$ . Assim, as equações (1.2) se reduzem ao seguinte sistema de equações:

$$f_{14} = m_2(R_{12} - R_{42})\Delta_{142} + m_2(R_{13} - R_{43})\Delta_{143} + m_5(R_{15} - R_{45})\Delta_{145} = 0, \quad (5.1)$$

$$f_{34} = m_1(R_{31} - R_{41})\Delta_{341} + m_2(R_{32} - R_{42})\Delta_{342} + m_5(R_{35} - R_{45})\Delta_{345} = 0, \quad (5.2)$$

$$f_{24} = m_1(R_{21} - R_{41})\Delta_{241} + m_3(R_{23} - R_{43})\Delta_{243} + m_5(R_{25} - R_{45})\Delta_{245} = 0. \quad (5.3)$$

Observe que  $R_{14} = R_{15}$ ,  $R_{24} = R_{25}$  e  $R_{34} = R_{35}$ , além disso,  $R_{12} = R_{23} = 1$ ,  $R_{13} = 1/2^3$ . Temos também que  $\Delta_{124} = \Delta_{234} = \frac{1}{2}\Delta_{134}$ , pois os correspondentes paralelogramos tem todos a mesma altura e os dois primeiros tem bases iguais que é a metade da base do terceiro paralelogramo.

O problema depende apenas de dois parâmetros  $(s, t)$ , onde  $s$  denota a distância entre  $r_2$  e o segmento  $\overline{r_4 r_5}$ , e  $t$  denota a distância entre  $r_4$  ao segmento  $\overline{r_1 r_3}$ .

Como  $m_1 = m_3$  e  $m_4 = m_5$ , podemos escrever (5.1), como o sistema linear homogêneo  $A(m_1, m_2, m_4)^t = 0$ , onde

$$A = \begin{pmatrix} -(\frac{1}{2^3} - R_{34})\Delta_{134} & -(1 - R_{24})\Delta_{124} & -(R_{14} - R_{45})\Delta_{154} \\ (\frac{1}{2^3} - R_{14})\Delta_{134} & (1 - R_{24})\Delta_{124} & (R_{35} - R_{45})\Delta_{345} \\ (-R_{14} + R_{34})\Delta_{124} & 0 & -(R_{24} - R_{45})\Delta_{254} \end{pmatrix}.$$

Uma condição suficiente para que este sistema tenha solução não-trivial em  $(m_1, m_2, m_4)$  é que o determinante da matriz  $A$  seja nulo. Temos que

$$\begin{aligned} \det(A) &= \left(\frac{1}{2^3} - R_{34}\right)\Delta_{134}(1 - R_{24})\Delta_{124}(R_{24} - R_{45})\Delta_{254} \\ &\quad - (1 - R_{24})\Delta_{124}(R_{35} - R_{45})\Delta_{345}(-R_{14} + R_{34})\Delta_{124} \\ &\quad + (R_{14} - R_{45})\Delta_{154}(1 - R_{24})\Delta_{124}(-R_{14} + R_{34})\Delta_{124} \\ &\quad - (1 - R_{24})\Delta_{124}\left(\frac{1}{2^3} - R_{14}\right)\Delta_{134}(R_{24} - R_{45})\Delta_{254} \\ &= (\Delta_{124})^2(1 - R_{24})[2(R_{24} - R_{45})\Delta_{254}\left(\frac{1}{2^3} - R_{34} - \frac{1}{2^3} + R_{14}\right) \\ &\quad - (R_{35} - R_{45})(R_{34} - R_{14})\Delta_{345} + (R_{14} - R_{45})(R_{34} - R_{14})\Delta_{154}] \\ &= (\Delta_{124})^2(R_{34} - R_{14})(1 - R_{24}) \\ &\quad [(R_{14} - R_{45})\Delta_{154} - (R_{35} - R_{45})\Delta_{345} - 2(R_{24} - R_{45})\Delta_{254}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Observe que  $\Delta_{345} + \Delta_{254} = \Delta_{154} - \Delta_{254}$ , logo o último fator do determinante de  $A$  fica

$$R_{14}\Delta_{154} - R_{35}\Delta_{345} - 2R_{254}.$$

Assim, para que o determinante de  $A$  seja 0, temos três opções:

- (i)  $R_{14} = R_{34}$ ;
- (ii)  $R_{24} = 1$ ;
- (iii)  $R_{14}\Delta_{154} - R_{35}\Delta_{345} - 2R_{254} = 0$ .

Observe que caso (i) ocorra, teremos que  $r_1, r_3, r_4, r_5$  estão nos vértices de um losango com  $m_2$  no centro. Caso (ii) ocorra, temos que  $r_1, r_3, r_4, r_5$  estão todos em um círculo de raio 1 centrado em  $m_2$ . Com respeito aos parâmetros  $t$  e  $s$  temos que  $R_{14} = ((1 + s)^2 + t^2)^{-\frac{3}{2}}$ ,  $R_{24} = (s^2 + t^2)^{-\frac{3}{2}}$ ,  $R_{34} = ((1 - s)^2 + t^2)^{-\frac{3}{2}}$ ,  $\Delta_{124} = \Delta_{234} = \frac{1}{2}\Delta_{134} = t$ ,  $\Delta_{154} = 2(1 + s)t$ ,  $\Delta_{254} = 2st$  e

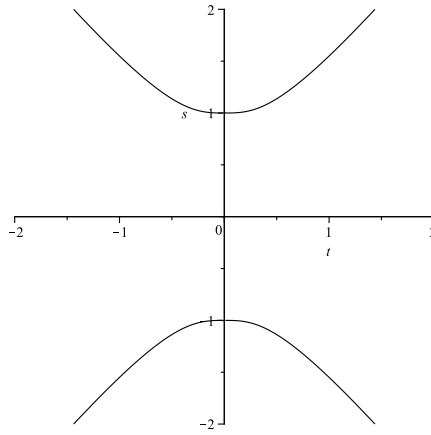


Figura 5.2: A curva  $g(t, s) = 0$ .

$\Delta_{345} = 2(1-s)t$ . Assim, a equação (iii) expressa nas variáveis  $(s, t)$  fica:

$$g(t, s) = \frac{2(1+s)t}{((1+s)^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2(1-s)t}{((1-s)^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4st}{(s^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

logo,

$$g(t, s) = \frac{(1+s)t}{((1+s)^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(1-s)t}{((1-s)^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2st}{(s^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} = 0. \quad (5.4)$$

Note que,

$$g(t, 0) = \frac{2t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4 \cdot 0 \cdot t}{(s^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Logo,  $(t, 0)$  é uma solução para  $g(t, s) = 0$ , quando  $s = 0$ , temos que o segmento  $\overline{r_4 r_5}$  contém  $r_2$  e portanto a configuração forma um losango com  $r_2$  no centro como no caso (i). Observe que  $t \neq 0$ , pois caso contrário, teríamos colisão de  $r_4$  e  $r_5$ . Além da solução  $(t, 0)$  a equação  $g(t, s) = 0$  tem mais um par de soluções  $(t, s_1(t))$  e  $(t, s_2(t))$  simétricas com respeito a  $m_2$ , com  $s_1(t) < -1$  e  $s_2(t) > 1$ , para todo  $t > 0$ . Isto pode ser visto pelo gráfico da curva  $g(t, s) = 0$  mostrado na Figura 5.2. Os pontos desta curva com  $(t, s) = (0, \pm 1)$  correspondem às colisões de  $m_4$  e  $m_5$ , assim podem ser excluídas. Os pontos  $(t, s)$  em  $g(t, s) = 0$  com  $t \neq 0$  correspondem ao par de possíveis configurações tendo o segmento  $\overline{r_4 r_5}$  disjunto do segmento  $\overline{r_1 r_3}$ , sendo para esquerda ou para a direita.

Vamos encontrar condições necessárias para a existência de configurações centrais de cinco corpos do tipo descrito. Veremos que cada tipo realmente existe. Consideremos o sistema linear  $A(m_1, m_2, m_4)^t = 0$ , com  $A$  expressa em termos de  $(s, t)$  e vamos estudar a existência de solução em cada um dos três casos.

Nos caso (i) temos  $s = 0$  e em termos de  $(t, s)$  temos

- $R_{14} = R_{34} = (1 + t^2)^{-3/2}$ ;
- $R_{24} = t^{-3}$ ;

- $R_{45} = (2t)^{-3}$ ;
- $|\Delta_{154}| = |\Delta_{345}| = 2t$ ;
- $\Delta_{254} = 0$ .

Assim, o sistema fica

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\right)(2t) & -\left(1 - \frac{1}{t^3}\right)t & -\left(\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} - \frac{1}{(2t)^3}\right)(2t) \\ \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\right)(2t) & \left(1 - \frac{1}{t^3}\right)t & \left(\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} - \frac{1}{(2t)^3}\right)(2t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Observe que a primeira equação é a segunda equação multiplicada por  $-1$ . Assim, basta resolver uma única equação que é

$$\left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\right)(2t)m_1 + \left(1 - \frac{1}{t^3}\right)tm_2 + \left(\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} - \frac{1}{(2t)^3}\right)(2t)m_4 = 0.$$

Simplificando tal expressão temos

$$t^3((1+t^2)^{3/2} - 8)m_1 + 4(1+t^2)^{3/2}(t^3 - 1)m_2 + (8t^3 - (1+t^2)^{3/2})m_4 = 0.$$

Então, a equação que temos que resolver é

$$a_1(t)m_1 + a_2(t)m_2 + a_3(t)m_4 = 0, \quad (5.5)$$

onde

$$a_1(t) = t^3((1+t^2)^{3/2} - 8),$$

$$a_2(t) = 4(1+t^2)^{3/2}(t^3 - 1),$$

$$a_3(t) = 8t^3 - (1+t^2)^{3/2}.$$

Sem perda de generalidade assumiremos  $m_1 = 1$ . Vamos mostrar que para quaisquer massas  $m_2, m_4 > 0$  existe uma única solução para (5.5) com  $t > 0$ .

Observe que se  $t > \sqrt{3}$  temos  $a_1(t) > 0$ ,  $a_2(t) > 0$  e  $a_3(t) > 0$ . Como  $m_1, m_2, m_4 > 0$  segue que  $t < \sqrt{3}$ . Por outro lado, temos que se  $t < 1/\sqrt{3}$ , temos que  $a_1(t) < 0$ ,  $a_2(t) < 0$  e  $a_3(t) < 0$ . Como  $m_1, m_2, m_4 > 0$ , temos que  $t > 1/\sqrt{3}$ . Assim para que (5.5) seja satisfeita temos uma condição necessária que é  $1/\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$ . Estudando o sinal da função

$$t \mapsto h(t) := a_1(t)m_1 + a_2(t)m_2 + a_3(t)m_4$$

temos

$$\begin{aligned}
 h(1/\sqrt{3}) &= \frac{\sqrt{3}}{9} \left( \frac{8\sqrt{3}}{9} - 8 \right) + 4 \frac{8\sqrt{3}}{9} \left( \frac{\sqrt{3}}{9} - 1 \right) m_2 + \left( \frac{8\sqrt{3}}{9} - \frac{8\sqrt{3}}{9} \right) m_4 \\
 &= \frac{8}{27} (1 + m_2) - \frac{8\sqrt{3}}{9} (1 + m_2) \\
 &= -\frac{8}{27} (-1 + 3\sqrt{3})(1 + 4m_2) \\
 &< 0
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 h(\sqrt{3}) &= 3\sqrt{3}(8 - 8) + 8(3\sqrt{3} - 1)4m_2 + 8(3\sqrt{3} - 1)m_4 \\
 &= 8(3\sqrt{3} - 1)(4m_2 + m_4) \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

Assim, (5.5) tem pelo menos uma solução em  $(1/\sqrt{3}, \sqrt{3})$ , para quaisquer  $m_2, m_4 > 0$ . Mostremos então que tal solução é única.

Assuma que  $m_4 = 1$ , assim

$$\begin{aligned}
 0 &= t^3(1+t^2)^{3/2} - 8t^3 + 4(1+t^2)^{3/2}(t^3 - 1)m_2 + 8t^3 - (1+t^2)^{3/2} \\
 &= (1+t^2)^{3/2}(t^3 - 1) + 4(1+t^2)^{3/2}(t^3 - 1)m_2 \\
 &= (1+t^2)^{3/2}(t^3 - 1)(1 + 4m_2).
 \end{aligned}$$

Logo, a única solução é  $t = 1$ . Observe que a solução independe de  $m_2$ . Neste caso, a configuração central é um quadrado com as massas  $m_1, m_3, m_4$  e  $m_5$  nos vértices e  $m_2$  no centro. Além disso,  $m_1 = m_3 = m_4 = m_5 = 1$ . A massa  $m_2$  não é unicamente determinada.

Agora, consideremos  $m_4 \neq 1$  e podemos escrever

$$\begin{aligned}
 h(t) &= t^3((1+t^2)^{3/2} - 8) + 4(1+t^2)^{3/2}(t^3 - 1)m_2 + ((2t)^3 - (1+t^2)^{3/2})m_4 \\
 &= (1+t^2)^{3/2}((4m_2 + 1)t^3 - (4m_2 + m + 4)) + 8t^3(m_4 - 1).
 \end{aligned}$$

Sejam  $k(t) = h(t)/(m_4 - 1)$  e  $a = (4m_2 + 1)/(m_4 - 1)$ , obtemos então

$$k(t) = (1+t^2)^{3/2}(at^3 - (a+1)) + 8t^3.$$

Note que quando  $m_4 < 1$  temos  $a < 0$  e quando  $m_4 > 1$  temos  $a > 0$ . Como  $h(t)$  tem uma mudança de sinal em  $(1/\sqrt{3}, \sqrt{3})$  segue que  $k(t)$  também tem uma mudança de sinal em  $(1/\sqrt{3}, \sqrt{3})$ . Esta mudança de sinal é única. De fato, usando o teste da primeira derivada podemos verificar que para  $a < 0$ , a função  $k(t)$  assume um valor positivo em  $t = 1/\sqrt{3}$ , cresce para um valor máximo em  $(1/\sqrt{3}, \sqrt{3})$  e então decresce para um valor negativo em  $t = \sqrt{3}$  (ver

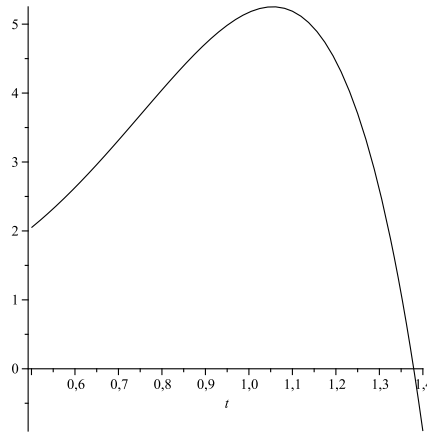


Figura 5.3: O gráfico de  $k(t)$  para  $t \in (1/\sqrt{3}, \sqrt{3})$  com  $a < 0$ .

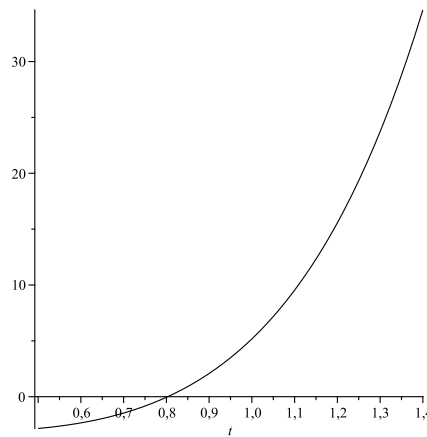


Figura 5.4: O gráfico de  $k(t)$  para  $t \in (1/\sqrt{3}, \sqrt{3})$  com  $a > 0$ .

Figura 5.3). Também usando o teste da primeira derivada vemos que para  $a > 0$ , a função  $k(t)$  assume um valor negativo em  $t = 1/\sqrt{3}$  e então cresce para um valor positivo em  $t = \sqrt{3}$  (ver Figura 5.4). Assim, em cada um dos casos existe uma única raiz de  $k(t)$  em  $(1/\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

Concluindo, para cada escolha de  $m_1, m_2, m_4$  existe uma única configuração central com  $m_1 = m_3, m_4 = m_5$  nos vértices de um losango e  $m_2$  no centro do losango. Neste caso, quando  $m_4 = m_5 = 1$  o losango se torna um quadrado de lado  $\sqrt{2}$  e a massa  $m_2$  não é unicamente determinada. Isto completa o caso (i).

No caso (ii) temos  $R_{24} = 1$ , então  $s^2 + t^2 = 1$ . Como  $t \neq 0$ , podemos restringir  $0 < s < 1$  e  $0 < t < 1$ , pois quando  $s = 0$  e  $t = 1$  voltamos para o caso (i). A matriz  $A$  fica

$$A = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{((1-s)^2+t^2)^{3/2}}\right)(2t) & 0 & -2\left(\frac{1}{((1+s)^2+t^2)^{3/2}} - \frac{1}{(2t)^3}\right)(1+s)t \\ \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{((1+s)^2+t^2)^{3/2}}\right)(2t) & 0 & 2\left(\frac{1}{((1-s)^2+t^2)^{3/2}} - \frac{1}{(2t)^3}\right)(1-s)t \\ \left(-\frac{1}{((1+s)^2+t^2)^{3/2}} + \frac{1}{((1-s)^2+t^2)^{3/2}}\right)t & 0 & -2\left(1 - \frac{1}{(2t)^3}\right)st \end{pmatrix}.$$

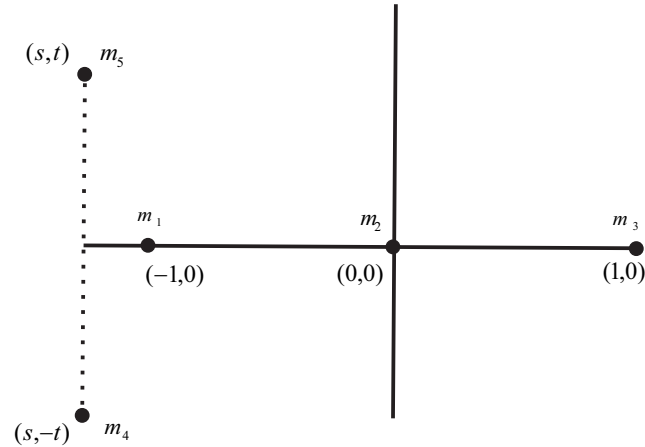


Figura 5.5: Uma configuração empilhada de cinco corpos que não é uma configuração central.

Logo, o sistema não depende de  $m_2$ . Como  $s^2 + t^2 = 1$  a segunda equação fica

$$m_4 = -\frac{\frac{1}{2^3} - \frac{1}{(2+2s)^{3/2}}}{\left(\frac{1}{(2-2s)^{3/2}} - \frac{1}{8(1-s^2)^{3/2}}\right)(1-s)} m_1.$$

Como  $0 < s < 1$  o numerador é sempre negativo, assim para  $m_4 > 0$  o denominador tem que ser positivo, e isso só ocorre se  $0 < s < 1/2$ . A primeira equação fica

$$m_4 = -\frac{\frac{1}{2^3} - \frac{1}{(2-2s)^{3/2}}}{\left(\frac{1}{(2+2s)^{3/2}} - \frac{1}{8(1-s^2)^{3/2}}\right)(1+s)} m_1.$$

Observe que neste caso o numerador é sempre positivo para  $0 < s < 1$  e o denominador é sempre negativo, logo a expressão é sempre positiva para  $0 < s < 1$ . As duas expressões de  $m_4$  são satisfeitas somente se  $s = 0$ , como a primeira expressão é uma função crescente de  $s$  e a segunda expressão é uma função decrescente de  $s$  para  $s \in (0, 1/2)$ . Quando  $s = 0$  temos que a terceira equação é identicamente nula e voltamos para caso (i) quando as massas  $m_1, m_3, m_4, m_5$  estão no vértice de um quadrado de lado  $\sqrt{2}$  e a massa  $m_2$  no centro do quadrado não é unicamente determinado.

Concluindo, não existe configuração central com  $m_4 = m_5$  localizadas em um círculo de raio 1.

No caso (iii), a solução corresponde a um par de possíveis configurações com o segmento  $\overline{r_4 r_5}$  disjunto do segmento  $\overline{r_1 r_3}$ , para esquerda ou para a direita (ver Figura 5.5).

O sistema em  $(m_1, m_2, m_4)$  se reduz a

$$n_{11}m_1 + n_{12}m_2 + n_{13}m_4 = 0, \quad (5.6)$$

$$n_{21}m_1 + n_{22}m_2 + n_{23}m_4 = 0. \quad (5.7)$$



onde  $s = s_1(t)$  ou  $s = s_2(t)$ , e

$$\begin{aligned}
 n_{11} &= \left( \frac{1}{((1-s)^2 + t^2)^{3/2}} - \frac{1}{2^3} \right) (2t), \\
 n_{12} &= \left( \frac{1}{(s^2 + t^2)^{3/2}} - 1 \right) t, \\
 n_{13} &= \left( \frac{1}{(2t)^3} - \frac{1}{((1+s)^2 + t^2)^{3/2}} \right) (2(1+s)t), \\
 n_{21} &= \left( \frac{1}{2^3} - \frac{1}{((1+s)^2 + t^2)^{3/2}} \right) (2t), \\
 n_{22} &= \left( 1 - \frac{1}{(s^2 + t^2)^{3/2}} \right) t, \\
 n_{23} &= \left( \frac{1}{((1-s)^2 + t^2)^{3/2}} - \frac{1}{(2t)^3} \right) (2(1-s)).
 \end{aligned}$$

As equações (5.6) e (5.7) representam dois planos no espaço  $(m_1, m_2, m_4)$ . Assim, a fim de termos soluções positivas para  $(m_1, m_2, m_4)$  precisamos que todos os componentes de

$$\begin{aligned}
 (n_1, n_2, n_3) &= (n_{11}, n_{12}, n_{13}) \wedge (n_{21}, n_{22}, n_{23}) \\
 &= (n_{12}n_{23} - n_{13}n_{22}, n_{13}n_{21} - n_{11}n_{23}, n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})
 \end{aligned}$$

tenham o mesmo sinal. Observe que

$$\begin{aligned}
 n_1 &= 2t \left( 1 - \frac{1}{(s^2 + t^2)^{3/2}} \right) \left( \frac{(1-s)t}{((1-s)^2 + t^2)^{3/2}} - \frac{(1+s)t}{((1+s)^2 + t^2)^{3/2}} + \frac{2st}{(2t)^3} \right) \\
 &= -2t \left( 1 - \frac{1}{(s^2 + t^2)^{3/2}} \right) g(t, s) = 0,
 \end{aligned}$$

onde  $g(t, s)$  é a função definida em (5.4). Assumimos que  $g(t, s) = 0$  neste caso. Assim,  $n_1 = 0$  nos mostra que a interseção dos dois planos está localizada no plano  $m_1 = 0$ . Portanto, não existem configurações centrais deste tipo.

Assim terminamos a prova deste item e vimos que a única forma de colocarmos as massas  $m_4$  e  $m_5$  de maneira simétrica com relação ao segmento  $\overline{r_1 r_3}$  e dos dois lados deste segmento é colocando tais massas de maneira que  $m_1, m_3, m_4, m_5$  estejam nos vértices de um losango com  $m_2$  no centro deste losango.

**Demonstração do item (b).** Neste item consideramos uma configuração empilhada simétrica de cinco corpos, em que três deles formam uma configuração central colinear com as massas  $m_1, m_2$  e  $m_3$  com  $m_1 = m_3$  e  $m_2$  no meio do segmento  $\overline{r_1 r_3}$ , e os outros dois corpos de massas  $m_4 = m_5$  estão localizados simetricamente com respeito a  $m_2$ , nos dois lados do segmento  $\overline{r_1 r_3}$  (Figura 5.6).

Mas tal configuração não é possível, pois viola o Teorema do Perpendicular Bissetor (Teorema 1.1). Considerando os cones abertos formados pelo segmento formado pelas massas  $m_1$  e  $m_3$  e pelo perpendicular bissetor do mesmo. Notamos que o cone aberto formado pelo segundo e pelo quarto quadrantes contém as massas  $m_4$  e  $m_5$ , enquanto o cone formado pelo primeiro e pelo terceiro quadrantes não contém massas. Portanto tal configuração central é impossível.

**Demonstração do item (c).** Considere agora uma configuração empilhada simétrica de cinco

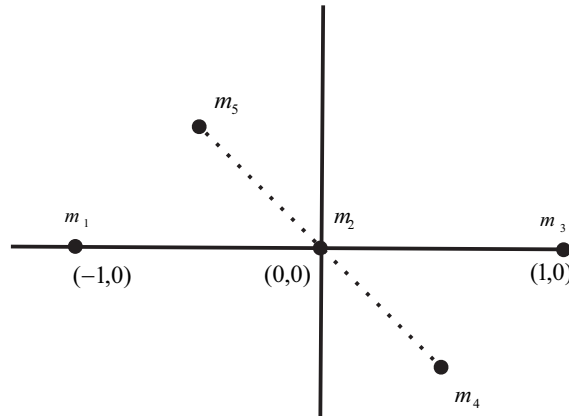


Figura 5.6: Uma configuração simétrica com respeito a  $m_2$  de cinco corpos que não é uma configuração central.

corpos, onde as massas  $m_1, m_2, m_3$  formam uma configuração central colinear, com  $m_1 = m_3$  e  $m_2$  no meio do segmento  $\overline{r_1 r_3}$  e com  $m_4 = m_5$ , localizadas simetricamente com respeito ao perpendicular bissetor do segmento  $\overline{r_1 r_3}$  em ambos os lados deste, como na Figura (5.7)

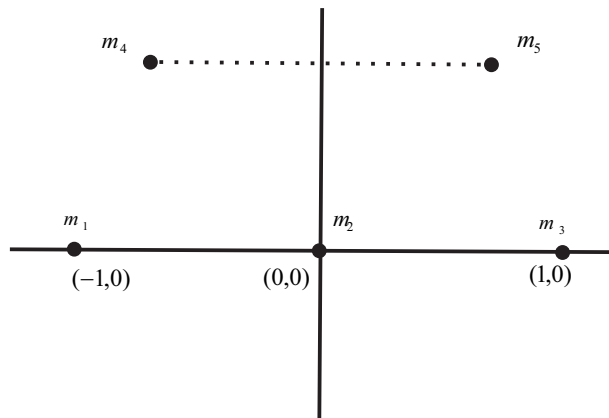


Figura 5.7: Configuração central simétrica com respeito ao perpendicular bissetor do segmento  $\overline{r_1 r_3}$ .

As equações (1.2) para esta configuração tem as seguintes simetrias e relações:

- $f_{12} = -f_{23}$ ,
- $f_{24} = -f_{25}$ ,

- $f_{15} = -f_{34}$ ,
- $f_{13} = f_{45} = 0$ .

Logo observando estas simetrias e relações e sabendo que  $R_{13} = R_{23}$  temos que as equações (1.2) se reduzem as seguintes equações

$$f_{12} = m_4(R_{14} - R_{24})\Delta_{124} + m_5(R_{15} - R_{25})\Delta_{125} = 0, \quad (5.8)$$

$$f_{14} = m_2(R_{12} - R_{42})\Delta_{142} + m_3(R_{13} - R_{43})\Delta_{143} + m_5(R_{15} - R_{45})\Delta_{145} = 0, \quad (5.9)$$

$$f_{15} = m_2(R_{12} - R_{52})\Delta_{152} + m_3(R_{13} - R_{53})\Delta_{153} + m_4(R_{14} - R_{54})\Delta_{154} = 0, \quad (5.10)$$

$$f_{24} = m_1(R_{21} - R_{41})\Delta_{241} + m_3(R_{23} - R_{43})\Delta_{243} + m_5(R_{25} - R_{45})\Delta_{245} = 0. \quad (5.11)$$

Como  $\Delta_{124} = \Delta_{125}$ ,  $R_{24} = R_{25}$  e  $m_4 = m_5$ , temos

$$\begin{aligned} f_{12} &= m_4\Delta_{124}(R_{14} - R_{24} + R_{15} - R_{25}) \\ &= m_4\Delta_{124}(R_{14} + R_{15} - 2R_{24}) = 0. \end{aligned}$$

Sabemos que  $m_4 \neq 0$  e  $\Delta_{124} \neq 0$ , logo podemos ver a equação (5.8) como a seguinte condição geométrica

$$C = R_{14} + R_{15} - 2R_{24} = 0. \quad (5.12)$$

Tendo em conta que  $m_1 = m_3$ ,  $m_4 = m_5$ ,  $R_{14} = R_{35}$ ,  $R_{15} = R_{34}$ ,  $R_{24} = R_{25}$ ,  $R_{12} = R_{13} = 1$ ,  $R_{13} = \frac{1}{2^3}$  e  $\Delta_{124} = \Delta_{125} = \Delta_{234} = \frac{1}{2}\Delta_{134} = \frac{1}{2}\Delta_{135}$  podemos escrever (5.9), (5.10) e (5.11) como um sistema linear homogêneo em  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_4$  associado à matriz

$$A = \begin{pmatrix} -(1/2^3 - R_{34})\Delta_{134} & -(1 - R_{24})\Delta_{124} & -(R_{15} - R_{45})\Delta_{154} \\ -(1/2^3 - R_{14})\Delta_{134} & -(1 - R_{24})\Delta_{124} & (R_{14} - R_{45})\Delta_{154} \\ (R_{34} - R_{14})\Delta_{124} & 0 & -(R_{24} - R_{45})\Delta_{154} \end{pmatrix}.$$

Uma condição suficiente para que o sistema  $A(m_1 \ m_2 \ m_3)^t = 0$  tenha solução não trivial é que  $\det(A) = 0$ . Multiplicando a primeira linha de  $A$  por  $-1$  e somando com a segunda linha temos

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -(1/2^3 - R_{34})\Delta_{134} & -(1 - R_{24})\Delta_{124} & -(R_{15} - R_{45})\Delta_{154} \\ (R_{14} - R_{34})\Delta_{134} & 0 & (R_{14} + R_{15} - 2R_{45})\Delta_{154} \\ (R_{34} - R_{14})\Delta_{124} & 0 & -(R_{24} - R_{45})\Delta_{154} \end{pmatrix}.$$

Agora multiplicando a primeira linha de  $\tilde{A}$  por  $(-1)$  e usando a condição geométrica (5.12) temos a matriz

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} (1/2^3 - R_{34})\Delta_{134} & (1 - R_{24})\Delta_{124} & (R_{15} - R_{45})\Delta_{154} \\ (R_{14} - R_{34})\Delta_{134} & 0 & 2(R_{24} - R_{45})\Delta_{154} \\ (R_{34} - R_{14})\Delta_{124} & 0 & -(R_{24} - R_{45})\Delta_{154} \end{pmatrix},$$

que satisfaz  $-\det(\tilde{A}) = \det(A)$ . Como  $\Delta_{124} = \frac{1}{2}\Delta_{134}$  temos que a terceira linha de  $\tilde{A}$  é igual à segunda linha multiplicada por  $-1/2$ . Assim, a condição  $\det(\tilde{A}) = 0$  é sempre satisfeita sob a condição geométrica (5.12).

Sejam  $s$  a distância de  $m_4$  ou  $m_5$  ao perpendicular bissetor do segmento  $\overline{r_1 r_3}$ , e  $t$  a distância de  $m_4$  ou  $m_5$  ao segmento  $\overline{r_1 r_3}$ . Então,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= (1/2^3 - R_{34})\Delta_{134} = \left( \frac{1}{2^3} - \frac{1}{((1+s)^2 + t^2)^{3/2}} \right) (2t), \\ \tilde{A}_{12} &= (1 - R_{24})\Delta_{124} = \left( 1 - \frac{1}{(s^2 + t^2)^{3/2}} \right), \\ \tilde{A}_{13} &= (R_{15} - R_{45})\Delta_{154} = \left( \frac{1}{((1+s)^2 + t^2)^{3/2}} - \frac{1}{(2s)^3} \right) (2st), \\ \tilde{A}_{21} &= -2\tilde{A}_{31}, \\ \tilde{A}_{22} &= 0, \\ \tilde{A}_{23} &= -2\tilde{A}_{33}, \\ \tilde{A}_{31} &= (R_{34} - R_{14})\Delta_{124} = \left( \frac{1}{((1+s)^2 + t^2)^{3/2}} - \frac{1}{((1-s)^2 + t^2)^{3/2}} \right) t, \\ \tilde{A}_{32} &= 0, \\ \tilde{A}_{33} &= -(R_{24} - R_{45})\Delta_{154} = - \left( \frac{1}{(s^2 + t^2)^{3/2}} - \frac{1}{(2s)^3} \right). \end{aligned}$$

Queremos resolver o sistema associado a  $\tilde{A}$  para  $m_1, m_2, m_4 > 0$ . Observe que podemos desconsiderar a equação associada à segunda linha da matriz visto que esta é equivalente à terceira linha. Assim, o sistema que nos interessa é o seguinte

$$\tilde{A}_{11}m_1 + \tilde{A}_{12}m_2 + \tilde{A}_{13}m_4 = 0, \quad (5.13)$$

$$\tilde{A}_{31}m_1 + \tilde{A}_{33}m_4 = 0. \quad (5.14)$$

Logo, temos

$$m_4 = -\frac{\tilde{A}_{31}}{\tilde{A}_{33}}m_1$$

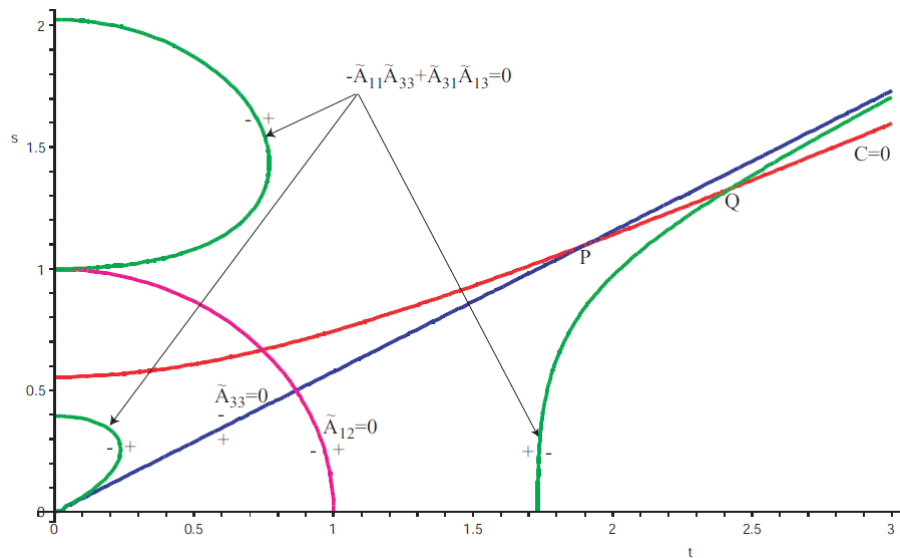


Figura 5.8: As curvas  $C = 0$ ,  $\tilde{A}_{33} = 0$ ,  $\tilde{A}_{12} = 0$  e  $-\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33} + \tilde{A}_{31}\tilde{A}_{13} = 0$ .

e

$$m_2 = \frac{-\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33} + \tilde{A}_{13}\tilde{A}_{31}}{\tilde{A}_{12}\tilde{A}_{33}} m_1.$$

Assuma primeiro que  $\tilde{A}_{33} \neq 0$  e  $\tilde{A}_{12} \neq 0$ , então  $m_2$  e  $m_4$  são unicamente determinados pelos parâmetros  $s$  e  $t$  e pela massa  $m_1$ . Na Figura (5.8) mostramos as curvas em  $t > 0$ ,  $s > 0$  correspondentes a  $C = 0$ ,  $\tilde{A}_{33} = 0$ ,  $\tilde{A}_{12} = 0$ ,  $-\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33} + \tilde{A}_{13}\tilde{A}_{31} = 0$  e os correspondentes sinais dessas expressões para pontos fora destas curvas. Observe que a curva  $-\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33} + \tilde{A}_{13}\tilde{A}_{31} = 0$  tem três componentes em  $t > 0$ ,  $s > 0$ . Estamos interessados nos pares  $(t, s)$  que satisfazem a condição geométrica  $C = 0$  e que tenham soluções positivas para  $m_1, m_2$  e  $m_4$ .

Por hipótese temos que  $R_{34} < R_{14}$ , logo  $\tilde{A}_{31} < 0$ . Assim a fim de que  $m_1, m_4 > 0$  em (5.14) é necessário que  $\tilde{A}_{33} > 0$ . Isto corresponde à porção da curva  $C = 0$  que está abaixo da curva  $\tilde{A}_{33}$  que é a porção da curva  $C = 0$  tal que  $t > t_P$ , onde  $P = (1, 90262127, 1.098478903)$  que é a interseção de  $C = 0$  com  $\tilde{A}_{33} = 0$ .

Além disso, para que  $m_2 > 0$ , precisamos que  $-\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33} + \tilde{A}_{13}\tilde{A}_{31}$  e  $\tilde{A}_{12}$  tenham o mesmo sinal. Na região de  $C = 0$  onde  $\tilde{A}_{33} > 0$  também temos  $\tilde{A}_{12} > 0$ , portanto precisamos que  $-\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33} + \tilde{A}_{13}\tilde{A}_{31} > 0$ . Isto corresponde à porção da curva  $C = 0$  com  $t < t_Q$  onde  $Q = (2, 419489969, 1, 328380127)$  é a interseção entre  $C = 0$  e  $-\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33} + \tilde{A}_{13}\tilde{A}_{31} = 0$ . Assim, o conjunto de pontos  $(t, s)$  na curva  $C = 0$  em que  $m_1, m_2, m_4 > 0$  é dada pela porção de  $C = 0$  com  $t_P < t < t_Q$ .

Note que para cada par  $(t, s)$  em  $C = 0$  com  $t_P < t < t_Q$  existe uma única configuração central. Além disso, quando  $t = t_P$  temos que as massas  $m_2$  e  $m_4$  tendem ao infinito, e quando  $t = t_Q$  temos que a massa  $m_2$  é identicamente nula, logo para estes valores de  $t$  não existem configurações centrais.

Agora veremos o caso quando  $\tilde{A}_{33} = 0$  e  $\tilde{A}_{12} = 0$ .

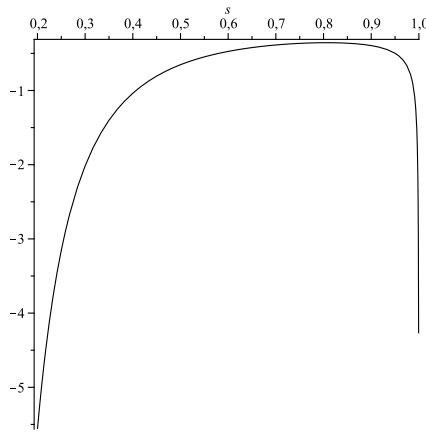


Figura 5.9: O gráfico da função  $l(s)$ .

Assuma que  $\tilde{A}_{33} = 0$ , isto acontece se, e somente se,  $R_{24} = R_{45}$ , isto é,  $m_2, m_4$  e  $m_5$  formam um triângulo equilátero, pois  $R_{24} = R_{25}$ . Neste caso, a equação (5.14), fica  $\tilde{A}_{31}m_1 = 0$  tendo como única solução  $m_1 = 0$ , pois  $\tilde{A}_{31} = (R_{34} - R_{14})\Delta_{124} \neq 0$ . Assim, não há configurações centrais neste caso.

Por outro lado, temos que  $\tilde{A}_{12} = 0$  se, e somente se,  $R_{24} = 1$ , ou seja,  $m_1, m_3, m_4$  e  $m_5$  estão em um círculo centrado em  $m_2$ , isto é,  $s^2 + t^2 = 1$ . As equações (5.13) e (5.14) ficam

$$\left( \frac{1}{2^3} - \frac{1}{((1+s)^2 + t^2)^{3/2}} \right) m_1 + \left( \frac{1}{(2+2s)^{3/2}} - \frac{1}{(2s)^3} \right) (s)m_4 = 0, \quad (5.15)$$

$$\left( \frac{1}{((1+s)^2 + t^2)^{3/2}} - \frac{1}{((1-s)^2 + t^2)^{3/2}} \right) m_1 - \left( 1 - \frac{1}{(2s)^3} \right) (2s)m_4 = 0. \quad (5.16)$$

Note que este sistema não depende de  $m_2$ . Uma condição suficiente para termos uma solução não trivial em  $(m_1, m_4)$  é que o determinante seja zero. Calculando este determinante temos

$$\begin{aligned} \det = & - \left( \frac{1}{2^3} - \frac{1}{((1+s)^2 + t^2)^{3/2}} \right) \left( 1 - \frac{1}{(2s)^3} \right) (2s) \\ & - \left( \frac{1}{(2+2s)^{3/2}} - \frac{1}{(2s)^3} \right) \left( \frac{1}{((1+s)^2 + t^2)^{3/2}} - \frac{1}{((1-s)^2 + t^2)^{3/2}} \right) (s) = 0, \end{aligned}$$

usando o fato de que  $s^2 + t^2 = 1$  podemos escrever tal determinante como uma função de  $s$

$$\begin{aligned} l(s) = & - \left( \frac{1}{2^3} - \frac{1}{(2+2s)^{3/2}} \right) \left( 1 - \frac{1}{(2s)^3} \right) (2s) \\ & - \left( \frac{1}{(2+2s)^{3/2}} - \frac{1}{(2s)^3} \right) \left( \frac{1}{(2+2s)^{3/2}} - \frac{1}{(2-2s)^{3/2}} \right) (s) = 0. \end{aligned}$$

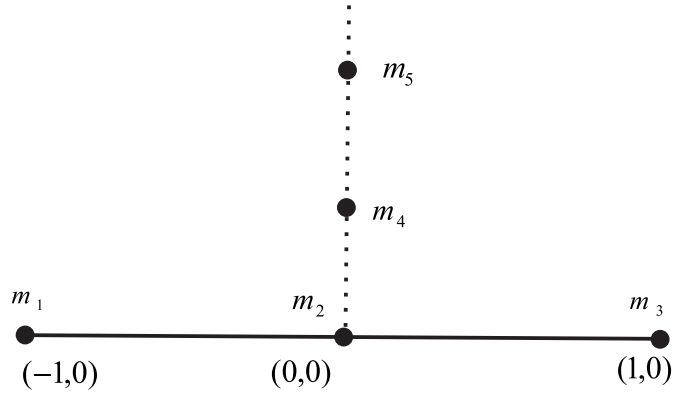


Figura 5.10: Uma configuração empilhada simétrica de cinco corpos que não é uma configuração central.

Contudo, para  $0 < s < 1$  a função  $l(s)$  é estritamente negativa, o que podemos observar na Figura (5.9). Portanto, não existem configurações centrais deste tipo.

Concluimos então que as únicas configurações centrais do tipo considerado neste item são trapézios com os lados  $m_1m_3$  e  $m_4m_5$  paralelos, e  $m_2$  no meio do segmento  $\overline{r_1r_3}$ . Estes trapézios formam uma família contínua que corresponde à porção da curva  $C = 0$  entre os pontos  $P$  e  $Q$ , mostrados na Figura (5.8)

**Demonstração do item (d).** Consideremos uma configuração empilhada simétrica de cinco corpos, em que  $m_1, m_2, m_3$  formam uma configuração central colinear com  $m_1 = m_3$  e  $m_2$  no meio do segmento  $\overline{r_1r_3}$  e onde as massas  $m_4$  e  $m_5$  estão localizadas no perpendicular bissetor do segmento  $\overline{r_1r_3}$ . Neste caso não exigimos que  $m_4 = m_5$ . com estas hipóteses temos duas possibilidades:

- (i)  $m_4$  e  $m_5$  estão no mesmo lado do segmento  $\overline{r_1r_3}$ .
- (ii)  $m_4$  e  $m_5$  estão em lados opostos do segmento  $\overline{r_1r_3}$ .

O caso (i) viola o Teorema do Perpendicular Bissetor (Teorema 1.1. De fato, considerando os cones abertos formados pelo segmento  $\overline{r_1r_3}$  e pelo perpendicular bissetor deste segmento, temos que o cone formado pelos quadrante um e três possui duas massas e o cone formado pelos quadrantes dois e quatro não possui massas. Portanto, não existem configurações centrais deste tipo. Podemos ver isto na Figura 5.10.

No caso (ii) as equações (1.2) tem as seguintes relações e simetrias:

- $f_{13} = f_{24} = f_{25} = f_{45} = 0$ ,
- $f_{23} = -f_{12}$ ,
- $f_{34} = -f_{14}$ ,

- $f_{35} = -f_{15}$ .

Logo, as equações (1.2) se resumem ao seguinte sistema

$$f_{12} = m_4(R_{14} - R_{24})\Delta_{124} + m_5(R_{15} - R_{25})\Delta_{125} = 0, \quad (5.17)$$

$$f_{14} = m_2(R_{12} - R_{42})\Delta_{142} + m_3(R_{13} - R_{43})\Delta_{143} + m_5(R_{15} - R_{45})\Delta_{145} = 0, \quad (5.18)$$

$$f_{15} = m_2(R_{12} - R_{52})\Delta_{152} + m_3(R_{13} - R_{53})\Delta_{153} + m_4(R_{14} - R_{54})\Delta_{154} = 0. \quad (5.19)$$

Sejam  $t$  a distância de  $m_4$  a  $m_2$  e  $u$  a distância de  $m_5$  a  $m_2$ . Então,

$$R_{14} = R_{34} = \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}},$$

$$R_{15} = R_{35} = \frac{1}{(1+u^2)^{3/2}},$$

$$R_{24} = \frac{1}{t^3},$$

$$R_{25} = \frac{1}{u^3},$$

$$R_{45} = \frac{1}{(u+t)^3},$$

$$\Delta_{124} = -\Delta_{142} = -t,$$

$$\Delta_{152} = -\Delta_{125} = -u,$$

$$\Delta_{143} = 2t,$$

$$\Delta_{153} = 2u,$$

$$\Delta_{154} = -\Delta_{145} = -(u+t).$$

Reescrevendo (5.17), (5.18) e (5.19) em termos de  $t$  e  $u$  temos

$$B_{31}m_4 - B_{32}m_2 = 0, \quad (5.20)$$

$$B_{11}m_1 - B_{12}m_2 + B_{13}m_5 = 0, \quad (5.21)$$

$$B_{21}m_1 - B_{22}m_2 + B_{23}m_4 = 0, \quad (5.22)$$

onde



$$\begin{aligned}
B_{31} &= (R_{14} - R_{24})\Delta_{124} = \left( \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} - \frac{1}{t^3} \right) t, \\
B_{32} &= (R_{15} - R_{25})\Delta_{125} = \left( \frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} - \frac{1}{u^3} \right) u, \\
B_{11} &= (R_{13} - R_{43})\Delta_{143} = \left( \frac{1}{2^3} - \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} \right) (2t), \\
B_{12} &= (R_{12} - R_{42})\Delta_{142} = \left( 1 - \frac{1}{t^3} \right) t, \\
B_{13} &= (R_{15} - R_{45})\Delta_{145} = \left( \frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} - \frac{1}{(u+t)^3} \right) (u+t), \\
B_{21} &= (R_{13} - R_{53})\Delta_{153} = \left( \frac{1}{2^3} - \frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} \right) (-2u), \\
B_{22} &= (R_{12} - R_{52})\Delta_{152} = \left( 1 - \frac{1}{u^3} \right) (-u), \\
B_{23} &= (R_{14} - R_{54})\Delta_{154} = - \left( \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} - \frac{1}{(u+t)^3} \right) (u+t).
\end{aligned}$$

Se  $t = u$  voltamos ao caso do item (a). Sendo assim, assumamos que  $t \neq u$ . Por (5.20) temos

$$m_4 = \frac{B_{32}}{B_{31}} m_5. \quad (5.23)$$

Observe que não há problemas com a expressão acima, visto que  $B_{31} \neq 0$ . Agora substituindo (5.23) em (5.22) temos

$$m_5 = \frac{-B_{21}B_{31}}{B_{23}B_{32}} m_1 - \frac{B_{22}B_{31}}{B_{23}B_{32}} m_2. \quad (5.24)$$

Agora substituindo (5.24) em (5.21) obtemos

$$m_2 = \frac{-B_{11}B_{23}B_{32} + B_{21}B_{13}B_{31}}{B_{12}B_{23}B_{32} - B_{22}B_{13}B_{31}} m_1. \quad (5.25)$$

Substituindo (5.25) em (5.21) temos

$$m_5 = \frac{-B_{11}(B_{12}B_{23}B_{32} - B_{22}B_{13}B_{31}) - B_{12}(-B_{11}B_{23}B_{32} + B_{21}B_{13}B_{31})}{B_{13}(B_{12}B_{23}B_{32} - B_{22}B_{13}B_{31})} m_1. \quad (5.26)$$

Por último, substituindo (5.25) em (5.22) temos

$$m_4 = \frac{-B_{21}(B_{12}B_{23}B_{32} - B_{22}B_{13}B_{31}) - B_{22}(-B_{11}B_{23}B_{32} + B_{21}B_{13}B_{31})}{B_{23}(B_{12}B_{23}B_{32} - B_{22}B_{13}B_{31})} m_1. \quad (5.27)$$

A fim de termos soluções positivas em  $m_2$ ,  $m_4$  e  $m_5$ , precisamos que o numerador e o denominador em (5.25), (5.26) e (5.27) tenham o mesmo sinal. Vamos considerar  $m_{i_{top}}$  o numerador

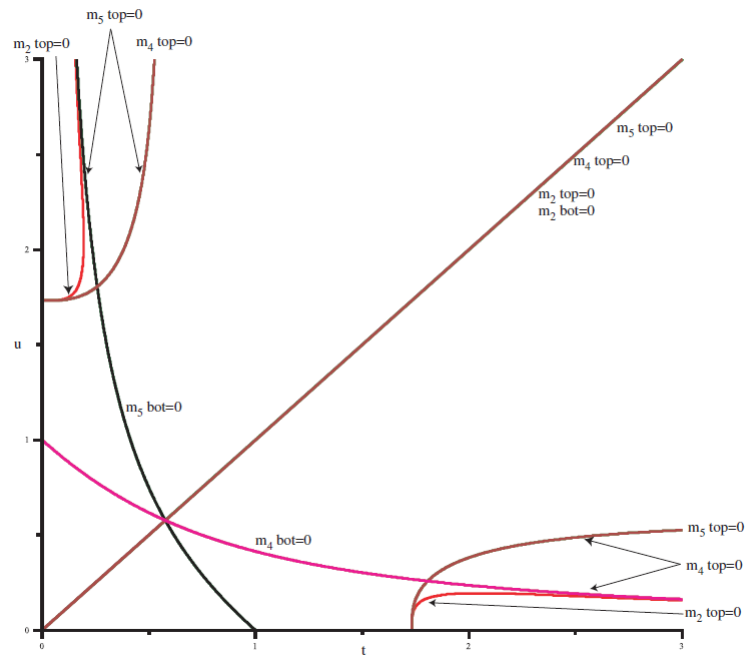


Figura 5.11: As curvas correspondentes a  $m_{2_{top}} = 0$ ,  $m_{2_{bot}} = 0$ ,  $m_{4_{top}} = 0$ ,  $m_{4_{bot}} = 0$ ,  $m_{5_{top}} = 0$  e  $m_{5_{bot}} = 0$ .

de  $m_i$  e  $m_{i_{bot}}$  o denominador de  $m_i$ , para  $i = 2, 4, 5$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 m_{2_{top}} &= -B_{11}B_{23}B_{32} + B_{21}B_{13}B_{31}, \\
 m_{2_{bot}} &= B_{12}B_{23}B_{32} - B_{22}B_{13}B_{31}, \\
 m_{4_{top}} &= -B_{21}(B_{12}B_{23}B_{32} - B_{22}B_{13}B_{31}) - B_{22}(-B_{11}B_{23}B_{32} + B_{21}B_{13}B_{31}), \\
 m_{4_{bot}} &= B_{23}(B_{12}B_{23}B_{32} - B_{22}B_{13}B_{31}), \\
 m_{5_{top}} &= -B_{11}(B_{12}B_{23}B_{32} - B_{22}B_{13}B_{31}) - B_{12}(-B_{11}B_{23}B_{32} + B_{21}B_{13}B_{31}), \\
 m_{5_{dem}} &= B_{13}(B_{12}B_{23}B_{32} - B_{22}B_{13}B_{31}).
 \end{aligned}$$

As curvas correspondentes a  $m_{2_{top}} = 0$ ,  $m_{2_{bot}} = 0$ ,  $m_{4_{top}} = 0$ ,  $m_{4_{bot}} = 0$ ,  $m_{5_{top}} = 0$  e  $m_{5_{bot}} = 0$  dividem a região do espaço  $ts$ , onde  $t > 0$  e  $u > 0$  em certas regiões correspondentes a diferentes combinações de sinais, como podemos ver na Figura 5.11.

A região onde  $m_{4_{bot}} > 0$  consiste na interseção entre as regiões  $B_{23} > 0$  e  $m_{2_{bot}} > 0$ , união com a interseção entre  $B_{23} < 0$  e  $m_{2_{bot}} < 0$ . Da mesma forma  $m_{5_{bot}} > 0$  consiste na interseção entre as regiões  $B_{13} > 0$  e  $m_{2_{bot}} > 0$ , união com a interseção entre as regiões  $B_{13} < 0$  e  $m_{2_{bot}} < 0$ . Para cada uma das expressões de  $m_2$ ,  $m_5$  e  $m_4$  em (5.25), (5.26) e (5.27) plotamos as curvas correspondentes e sombreamos as regiões onde  $m_2 > 0$ ,  $m_5 > 0$  e  $m_4 > 0$ , respectivamente. A interseção de todas estas regiões sombreadas, que correspondem, no espaço  $t > 0$  e  $u > 0$ , onde  $m_2 > 0$ ,  $m_5 > 0$  e  $m_4 > 0$  é o conjunto vazio. Ver Figuras 5.12, 5.13 e 5.14. Concluimos então

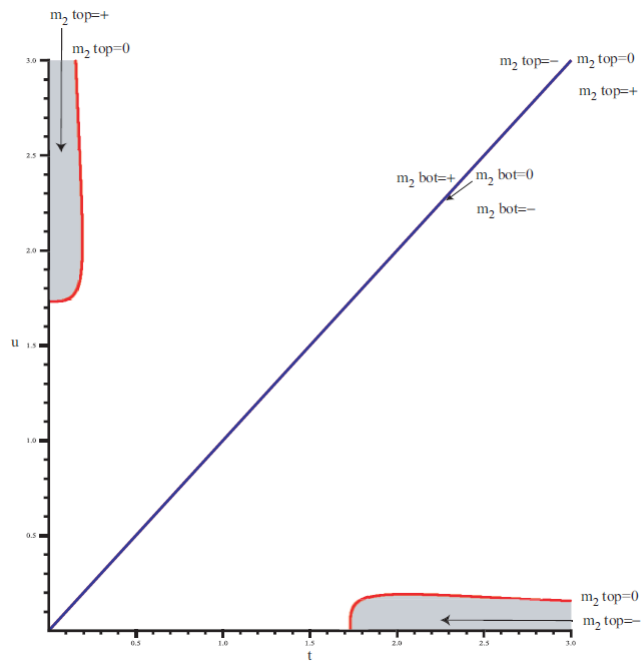


Figura 5.12: As curvas correspondentes a  $m_{2_{top}} = 0$  e  $m_{2_{bot}} = 0$  e os sinais de  $m_{2_{top}}$  e  $m_{2_{bot}}$  fora destas curvas. As regiões sombreadas mostram pra quais valores de  $t$  e  $u$  temos  $m_2 > 0$ .

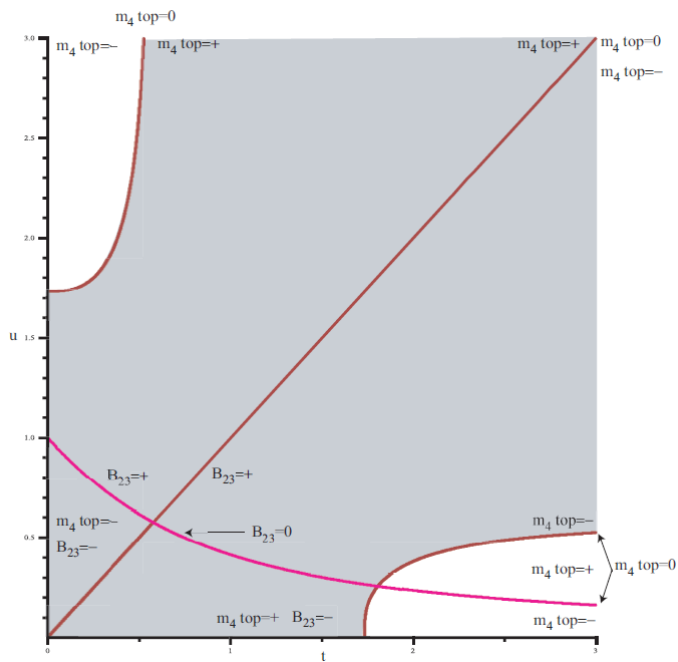


Figura 5.13: As curvas correspondentes a  $m_{4_{top}} = 0$  e  $m_{4_{bot}} = 0$  e os sinais de  $m_{4_{top}}$  e  $m_{4_{bot}}$  fora destas curvas. As regiões sombreadas mostram pra quais valores de  $t$  e  $u$  temos  $m_4 > 0$ .

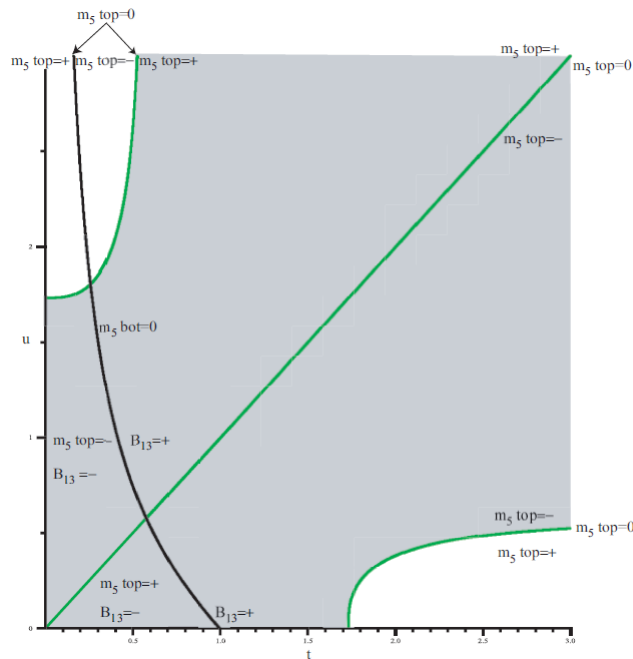


Figura 5.14: As curvas correspondentes a  $m_{2_{top}} = 0$  e  $m_{2_{bot}} = 0$  e os sinais de  $m_{2_{top}}$  e  $m_{2_{bot}}$  fora destas curvas. As regiões sombreadas mostram pra quais valores de  $t$  e  $u$  temos  $m_2 > 0$ .

que não existem configurações centrais deste tipo, exceto no caso especial onde  $t = u$  que foi discutido na demonstração do item *a*).

■

Neste capítulo fizemos um estudo das configurações centrais planares empilhadas simétricas de cinco corpos, onde três destes corpos formam uma configuração colinear. Primeiro vimos que a única maneira de colocar as outras duas massas simetricamente com relação ao segmento  $\overline{r_1 r_3}$  e dos dois lados deste segmento é de forma que quatro destes corpos formem um losango com a quinta massa no meio deste losango. E depois vimos que a única maneira de colocar as outras duas massas simetricamente com relação ao perpendicular bissetor do segmento  $\overline{r_1 r_3}$  é de forma que quatro destas massas formem um trapézio e a quinta massa fique no meio de uma das bases do trapézio.

Observe que para o uso das equações de Andoyer neste caso foi de extrema importância assumirmos a simetria no problema. Sem a simetria não conseguiríamos reduzir as 10 equações de Andoyer nas três que utilizamos para demonstração do resultado. Aqui se fôssemos trabalhar com as equações da definição teríamos 5 equações para trabalhar que possuem um certo grau de dificuldade.

## Capítulo 6

### Comparações e Conclusões

Neste trabalho vimos que existem diferentes abordagens para resolver problemas que envolvam simetria em configurações centrais. A abordagem escolhida depende das hipóteses que consideramos. No Capítulo 2 supomos as massas iguais, por isso precisamos trabalhar com equações em que envolvessem distâncias mútuas que são as informações que tínhamos para mostrar a simetria. Trabalhando com as equações de distâncias mútuas facilitamos o trabalho de mostrar a igualdade dos lados.

No Capítulo 3 trabalhamos com as equações de Dziobek, pois elas envolvem as áreas orientadas dos triângulos, que é a melhor maneira de mostrar a distância dos corpos da diagonal da configuração convexa. Sempre que assumimos simetria e queremos mostrar igualdade das massas, as equações de Andoyer tornam o trabalho mais simples, mas quando queremos mostrar a simetria a partir da igualdade das massas, muitas vezes essas equações aumentam o trabalho. Da mesma forma para ordenar as distâncias mútuas as equações da definição ou as equações de Andoyer tornam o trabalho mais complexo.

No Capítulo 4 usamos as equações da definição, pois ao assumirmos a simetria conseguimos reduzir o número de equações. Mas no final vimos que a abordagem deste problema feita através das equações de Andoyer diminuem o trabalho e as expressões que determinam as regiões onde as configurações centrais planares côncavas simétricas são possíveis são mais simples.

Por último, no Capítulo 5, usamos as equações de Andoyer para mostrar as possíveis configurações centrais planares empilhadas simétricas de cinco corpos. Novamente o fato de termos como hipótese a simetria, nos ajuda a reduzir o número de equações, o que torna possível encontrarmos soluções.

Portanto, sempre que formos escolher qual das equações equivalentes para configurações centrais vamos usar, é preciso analisar quais as hipóteses que temos para encontrar as equações que melhor se enquadram no problema em questão.

# Bibliografia

- [1] ALBOUY, A. **Symétrie des configurations centrales de quatre corps**. Paru dans C. R. Acad. Sci. Paris 320, série 1, pp. 217-220, 1995.
- [2] ALBOUY, A. FU, Y. SUN, S. Symmetry of planar four-body convex central configurations. **Proc. R. Soc. London. Ser. A** **464**, p.1355-1365, 2008.
- [3] BRUNS, E. H. Über des integrales der Vielkörperproblem. **Acta Mathematica**, vol. 11, 1887.
- [4] DENG, C.; ZHANG, S. Planar Symmetric Concave Central Configurations in Four-body Problem. eprint arXiv:1207.2372, 2012
- [5] GIDEA, M.; LLIBRE, J. Symmetric Planar Central Configurations of Five Bodies: Euler Plus Two. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Volume 110, Issue 1, pp.43-52, 2011.
- [6] MELLO, L. F.; CHAVES, F. E.; FERNANDES, A. C. Configurações centrais planares do tipo pipa. **Rev. Bras. Ens. Fís.**, v. 31, n. 1, p.1302-1-1302-7, 2009.
- [7] NEWTON, I. **Philosophia Naturalis Principia Mathematica**. Royal Society, London, 1687.