

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**  
**EM FÍSICA**

**Propagação de Campos Escalares e Ondas Gravitacionais em um espaço-tempo  
planarmente simétrico**

**Juliana Celestino**

Itajubá, 03 Abril de 2014

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**  
**EM FÍSICA**

Juliana Celestino

Propagação de Campos Escalares e Ondas Gravitacionais em um espaço-tempo planarmente simétrico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física

Área de Concentração: Teoria quântica de Campos, Cosmologia e Gravitação.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Eduardo da Silva Alves

Coorientador: Prof. Dr. Fabrício Augusto Barone Rangel

03 ABRIL DE 2014  
ITAJUBÁ

C392p

CELESTINO, Juliana

Propagação de Campos Escalares e Ondas Gravitacionais  
em um espaço-tempo planarmente simétrico / Juliana  
Celestino. – Itajubá, (MG) :[s.n.], 2014.

26 p.:il.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Eduardo da Silva Al-  
ves

Coorientador: Prof. Dr. Fabrício Augusto Barone Rangel  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá

1. Ondas Gravitacionais. 2. Métrica de Taub. 3. Re-  
latividade Geral. I ALVES, Márcio Eduardo da Silva,  
orient. II BARONE, Fabrício Rangel, co-orient. III  
Universidade Federal de Itajubá. IV. Título.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**  
**EM FÍSICA**

Juliana Celestino

Propagação de Campos Escalares e Ondas Gravitacionais em um espaço-tempo planarmente simétrico

Dissertação apresentada à banca examinadora em 03 de Abril de 2014, cuja aprovação confere ao autor o título de **Mestre em Ciências em Física**

**Banca Examinadora:**

Prof. Márcio E. da Silva Alves (Orientador)

Prof. Fabrício A. Barone Rangel (Coorientador)

Prof. José Carlos Neves de Araújo

Prof. Renato Klippert Barcellos

03 ABRIL DE 2014  
ITAJUBÁ

*A meus pais Benedito e Inês.*

# Agradecimentos

Agradeço imensamente a Deus por guiar meus passos e iluminar meus caminhos. Mesmo quando eu própria não sabia por onde caminhar, Sua presença me guiava e amparava em todos os momentos. A Ele que criou o universo em toda sua plenitude meu eterno muito obrigado.

Agradeço a meu orientador, o professor Márcio, por me chamar a atenção para esse tema de pesquisa. Além de ser sempre meu amigo, agradeço por todo o apoio e força para chegar até aqui, por sua disponibilidade com a qual sempre pude contar, pelos conselhos, pela atenção e pela paciência nos momentos de tensão e também pelas risadas. Posso dizer que muito do que sou hoje profissionalmente devo à confiança que depositou em mim desde o início, a qual foi essencial para o exercício de minha liberdade de pensamento. Ajudou-me não só academicamente, mas me mostrou com muita simplicidade sabedorias muito válidas para trilhar o caminho da vida.

Agradeço também ao coorientador e amigo, o professor Fabrício, por aceitar a empreitada deste trabalho com muita dedicação e disposição. Agradeço por toda a ajuda, orientação e pelo carinho com que atendeu minhas solicitações e dúvidas. Mesmo na correria nunca deixou de oferecer sua tão indispensável assistência. Sua visão foi literalmente essencial. Não poderia esquecer também de agradecê-lo pelo profissionalismo e veemência que aplica as lutas por melhorias no programa de mestrado em Física, deixando aos estudantes uma confortável condição de estudo.

Gostaria de deixar aqui meus agradecimentos a minha querida mãe Inês e a meu querido pai Benedito por todo o apoio e torcida, mas principalmente pela forma simples e com muito amor que vocês me ensinaram a encarar o mundo. Tudo o que sou devo à vocês. Agradeço ainda a meus irmãos Jonas e Joyce, pelo amor e alegria com os quais sempre me receberam. Eles sempre foram uma fonte de luz para a restauração de minhas forças durante essa caminhada.

Em especial agradeço ao meu querido namorado e futuro esposo, Ramon, por caminhar sempre a meu lado, ter sempre um olhar atento e carinhoso, por sempre procurar meios de me ajudar com meu trabalho e sempre ao meu lado foi tão presente em todas as horas. Sua determinação e disciplina me estimularam no desânimo e segurou minhas lágrimas me deixando cada vez mais forte, sua paciência deixou-me segura e suas mãos contribuíram para me manter forte até o fim.

Registro aqui minha eterna gratidão à minha segunda família: Elizabet, Rubens, Paulinha e Lígia pela grande amizade e nobre companhia em horas de aperto e também em momentos de descontração que se fizeram vital para que eu chegasse aqui.

Meu muito obrigado ao meu cunhado Neto, minha cunhada Taty, primos Giovanni e Talles e aos amigos pedralvenses Le, Mi, tio César, Rê, Elaine, Eli, Dhyogo, Nando, Juninho, Cyro,

entre tantos que recarregam minha alma com boas conversas, bons momentos, que choram comigo e ao mesmo tempo enchem meu coração de felicidade. Estar com vocês foi necessário para terminar esta etapa da minha vida.

Aos companheiros discentes participantes do programa de Física e Matemática, que me ajudaram nos debates e problemas provenientes das disciplinas cursadas. Dentro dos quais posso citar alguns: Ceará, Paulo Henrique (PH), Giancarlo Thales Camilo da Silva, Marcos Amarante, Leite, Natália Armarinho, Jarne Donizetti Ribeiro, Malú Maira da Silva, Marina Machado Cunha e Mello, Tatiane e Cleia. Aos amigos que a vida colocou no meu caminho e que foram realmente anjos na jornada chamada graduação e mestrado: Dani Reis, Flavinhaaaa, Patrícia, Heldeer, Carol Félix, Kalem, Marlon (Pinduca), Carlinha, Tiago Ribeiro, Hemily, Charlene, Altimare, Lucimara, Jorge, Matheus (canarinho) e Matheus Coli. Ninguém torna-se grande sozinho.

Aos professores Renato, Agenor, Álvaro, Newton, Farnésio, Resek, Gabriel Flores, Ricardo, Vitorio, Edsom, entre outros do Departamento de Física e do de Matemática a minha gratidão pelo profissionalismo, pela atenção, pelos puxões de orelha e principalmente pelo caráter e pela amizade que certamente permanecerá.

Gostaria de agradecer ainda a todos os membros da banca, por terem aceitado tão gentilmente o convite de participar de um momento tão especial para mim.

Finalmente, agradeço aos funcionários da UNIFEI que, nos bastidores do meio acadêmico, desempenham importantes missões e fazem um ótimo programa de pós-graduação em Física e obrigada ao pessoal da copa pelos cafés, aaaah...se não fossem eles.

E a CAPES, pelos auxílios financeiros concedidos.

“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes”. (Marthin Luther King).

# Resumo

A Teoria da Relatividade Geral de Einstein nos fornece a ideia de tempo e espaço relativos assim como na relatividade restrita, todavia, desta vez é a presença do campo gravitacional que faz esse papel. Nesse contexto surgem as equações de Einstein que relacionam a distribuição e a dinâmica de energia e matéria no universo com a geometria do espaço-tempo. Perturbações na malha espaço-temporal seriam ocasionadas por eventuais variações no conteúdo energético, tais perturbações podem gerar um campo gravitacional propagante: as ondas gravitacionais que foram previstas por Einstein em 1916. Bons candidatos a fontes geradoras de ondas gravitacionais são a morte de estrelas massivas e a coalescência de objetos compactos, por exemplo, sistemas binários de buracos negros, estrelas de nêutrons, entre outros. Entender sobre a natureza das ondas gravitacionais bem como seus efeitos nos forneceria grandes ferramentas para validar por completo a teoria de Einstein. Após um evento de emissão de radiação gravitacional, as ondas viajam pelo espaço e podem ser alteradas devido à presença de uma curvatura de fundo gerada, por exemplo, por buracos negros ou estrelas de nêutrons. Nesse contexto, pretendemos analisar o efeito desta interação na propagação das ondas gravitacionais. Como se daria a interação dessas ondas com outros campos gravitacionais? Sua velocidade de propagação, forma de onda e suas polarizações seriam alteradas? Essas são algumas das perguntas que pretendemos responder no presente trabalho. Buscaremos respostas para estas questões analisando a interação de campos escalares e das ondas gravitacionais com um campo de fundo planarmente simétrico descrito pela métrica de Taub, sem a presença de constante cosmológica. Considerando-se que a presença de uma métrica de fundo espacialmente anisotrópica afeta distintamente a equação de evolução de cada um dos modos de polarização, podemos dizer que o campo gravitacional de fundo se comporta como um meio polarizador.

**Palavras-chave:** Ondas Gravitacionais, Métrica de Taub, Relatividade Geral

# Abstract

The Theory of General Relativity gives us the idea of time and space as well as on special relativity, however, this time is the presence of the gravitational field that makes this role. In this context arise Einstein's equations that relate the distribution and dynamics of energy and matter in the universe with the geometry of spacetime. Perturbations in the spacetime structure caused by eventual variations in energetic content generate a propagating gravitational field: the gravitational waves that were forecasted by Einstein in 1916. Good candidates for sources of gravitational waves are the death of compact objects, e.g., binary systems of black holes, neutron stars, among others. Understanding about the nature of gravitational waves and their effects provides us with great tools to validate completely Einstein's theory. After an event of emission of gravitational radiation, the waves travel through space and can be changed due the presence of a background curvature generated, for instance, by black holes or neutron stars. In this context, we intend to analyze the effect of this interaction on the propagation of gravitational waves. How would be the interaction of these waves with other gravitational fields? The propagation velocity, waveform and its polarization would be changed? These are some of the questions we intend to answer in this paper. We will seek answers to these questions by analyzing the interaction of the scalar fields and of the gravitational waves with a plane-symmetric background field described by the metric of Taub , without the presence of cosmological constant. Considering that the presence of a spatially anisotropic background metric affects distinctly the equation of evolution of each polarization mode, we can say that the background gravitational field behaves like a polarizable medium.

**Keywords:** Gravitational Waves, Metric of Taub , General Relativity

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Métrica de Taub</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Propagação do Campo Escalar</b>	<b>9</b>
3.1	Solução Geral . . . . .	9
3.2	Solução exata para propagação perpendicular . . . . .	10
3.3	Solução para a Métrica de Taub linearizada . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Propagação de Ondas Gravitacionais</b>	<b>15</b>
4.1	Obtenção das equações de campo linearizadas . . . . .	15
4.2	Solução para a Métrica de Taub linearizada . . . . .	17
	<b>Conclusões</b>	<b>23</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>25</b>

# Lista de Figuras

1.1	Corpo massivo curvando a malha espaço-temporal, exemplo Sol-Terra. . . . .	1
3.1	Comportamento de $J_0(\bar{z})$ entre o plano massivo em $\bar{z} = 0$ e o plano singular $\bar{z} = 1$ para três valores de frequência, sendo eles $\omega' = 5, 10, 100$ . . . . .	11
3.2	Comportamento de $N_0(\bar{z})$ entre o plano massivo em $\bar{z} = 0$ e o plano singular $\bar{z} = 1$ para três valores de frequência, sendo eles $\omega' = 5, 10, 100$ . . . . .	12

# Capítulo 1

## Introdução

A Teoria da Relatividade Geral (RG) é uma teoria de gravitação descrita em termos geométricos que foi publicada em 1916 por Albert Einstein 11 anos após a publicação de sua Teoria da Relatividade Especial. Enquanto esta última teoria teve amplo impacto cultural, i.é., grande parte das pessoas reconhecem a expressão  $E = mc^2$ . A RG é amplamente reconhecida entre os físicos como uma verdadeira obra-prima de Einstein, um feito verdadeiramente notável maior do que todos os feitos de seu “Annus Mirabilis” em 1905. Foi descrito por Max Born como “o maior feito do pensamento humano sobre a natureza, a combinação mais surpreendente da penetração filosófica, física, intuição e habilidade matemática”[1]. A RG explica a gravitação como consequência da curvatura do espaço-tempo, enquanto que a curvatura do espaço-tempo é uma consequência da distribuição de matéria. A curvatura do espaço-tempo afeta o movimento da matéria ali presente, que reciprocamente determina a geometria e a evolução do espaço-tempo, como parafraseou John Wheeler: “O espaço-tempo diz à matéria como se mover, e a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar”[2].

Uma metáfora útil para a gravidade enquanto curvatura do espaço-tempo é visualizar uma espessa folha de borracha, esticada, que se deforma com a presença de um corpo maciço parecido com o que vemos no exemplo da Fig. (1.1).



Figura 1.1: Corpo massivo curvando a malha espaço-temporal, exemplo Sol-Terra.

Para entender melhor como Einstein chegou a essa teoria notável devemos primeiro considerar brevemente a sua Teoria da Relatividade Especial (RE) também chamada de Relatividade Restrita. A RG é uma generalização da Relatividade Especial, na qual Einstein se propôs a reformular as leis da física na RE, de tal forma que esta fosse válida em todo referencial inercial, i.é., em todos os referenciais em que a primeira e a segunda lei de Newton para o movimento são mantidas independentemente do movimento relativo. O postulado fundamental da Relatividade Restrita é de que a velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os observadores inerciais. Einstein mostrou que, como consequência desse postulado, o conceito Newtoniano de uma estrutura rígida de espaço e tempo não mais tinha sentido, medições de tempo e espaço

não poderiam ser absolutas e nem independentes, mas dependeriam agora da cinemática do observador e estariam relacionados através das chamadas Transformações de Lorentz.

O espaço e o tempo como entidades distintas deu lugar a um sistema unificado espaço-tempo, conhecido como espaço de Minkowski, que é descrito pela métrica  $\eta_{\mu\nu}$ . Só o intervalo entre os eventos desta nova entidade independe do referencial do observador. A RG é como uma extensão da ideia apresentada para referenciais inerciais, mas agora validada para todos os referenciais através do Princípio da Equivalência. Esse princípio diz que “em cada ponto do espaço-tempo na presença de um campo gravitacional arbitrário dado é possível escolher um sistema de coordenadas localmente inercial’ tal que, no interior de uma região suficientemente pequena no entorno do ponto em questão, as leis da natureza tomam a mesma forma daquelas expressas num sistema de coordenadas Cartesiano na ausência da gravidade”[3]. Em outras palavras, temos que a massa gravitacional é identicamente igual à massa inercial e das Equações de Einstein vemos que a Lei da Gravitação de Newton é um caso particular para campos gravitacionais muito fracos.

Ainda na busca da generalização desta teoria, Einstein também se valeu de um outro princípio chamado de princípio de covariância. Podemos definir o princípio de covariância como a afirmação de que as leis da Natureza devem ser expressas numa linguagem covariante e o cálculo diferencial permite que as equações dinâmicas possam ser escritas dessa forma. Einstein percebeu que os referenciais são definições arbitrárias que fazemos de maneira conveniente para cada situação. De acordo com este princípio, as leis da Natureza não podem depender da nossa escolha de referencial, uma vez que esta escolha é completamente arbitrária. Assim, as leis da Natureza devem permanecer inalteradas caso façamos uma transformação arbitrária de coordenada. O princípio de covariância nos diz que estas leis devem possuir a mesma forma tanto em sistemas acelerados quanto em sistemas inerciais (no sentido Newtoniano).

Mais ainda, qualquer teoria da gravitação que obedeça aos princípios da relatividade proíbe a propagação instantânea de interações, e necessariamente implica a existência de Ondas Gravitacionais (OG’s). De acordo com a RG qualquer aceleração assimétrica numa massa produz um campo propagante de spin 2, ou radiação gravitacional, que se propaga no vácuo com a velocidade da luz. Se levarmos em conta a dualidade onda-partícula, veremos surgir quantizando este campo gravitacional uma partícula sem massa a qual conhecemos da literatura como grávitons, analogamente ao que acontece quando se quantiza o campo eletromagnético e vemos surgir os ‘quanta’ de luz que denominamos fótons. Atualmente foram observadas assinaturas de ondas gravitacionais geradas possivelmente no início do universo, mas ainda não há nada de concreto sobre elas e sobre grávitons na literatura, o que existe ainda são especulações. As OG’s são usualmente associadas às componentes tensoriais - ou seja, à parte transversa e sem traço (TT)- das perturbações métricas.

O foco da presente dissertação é que, em posse do conhecimento prévio das Equações de Campo de Einstein linearizadas e de todo ferramental matemático da RG, nós possamos fazer interagir um campo gravitacional de spin 2 com um campo de fundo. Como ficam afetadas suas polarizações? Existirão mudanças significativas em suas frequências e velocidades?

Este trabalho compõe-se de duas partes, sendo a primeira parte uma revisão bibliográfica representada pelo capítulo 2, e a segunda parte, descrita pelos capítulos 3 e 4, o material original desenvolvido exclusivamente por mim e pelos meus orientador e coorientador. Este presente texto está distribuído da seguinte forma: no Capítulo 2, estudamos uma das soluções planarmente simétricas das Equações de Einstein da qual obtemos uma forma geral para uma métrica que descreve um plano infinito massivo, elétricamente carregado e sem a presença da constante cosmológica. Essa métrica foi primeiramente investigada por Taub e por isso levou o seu nome. No capítulo 3, investigamos a propagação do campo escalar minimamente acoplado com

a métrica de fundo (métrica de Taub) e obtemos as equações de movimento para o caso geral e também para o caso da métrica linearizada. No Capítulo 4, obtemos as equações de campo linearizadas para o caso geral, e em seguida, investigamos estas levando em conta a perturbação propagante e a propagação de fundo. Tomando os devidos cuidados com os limites considerados e analisando as possíveis soluções, investigamos as respostas das questões formuladas acima, as quais nos motivaram a este trabalho. Por fim, apresentamos nossas conclusões e perspectivas para a continuidade do presente tema no Capítulo 4.2.

Ao longo de todo o texto, utilizaremos o sistema de unidades  $8\pi G = c = 1$ . As coordenadas de espaço-tempo  $x^\mu$  são rotuladas por índices gregos ( $\mu, \nu, \alpha, \dots = 0, 1, 2, 3$ ), com  $x^0 = t$ , e as coordenadas espaciais  $x^i$  por índices latinos ( $i = 1, 2, 3$ ). E, por fim, a assinatura utilizada para a métrica de Minkowski  $\eta^{\mu\nu}$  é (+,-,-,-).

# Capítulo 2

## Métrica de Taub

O estudo das soluções planarmente simétricas das equações de campo de Einstein já percorreu um longo caminho até os dias de hoje. Desde a solução encontrada em 1918 por Levi-Civita [5] para o espaço-tempo fora de um plano massivo, outras soluções têm sido vislumbradas por diversos autores [6, 7, 8]. Investigações têm incluído a generalização dessas soluções para casos não estáticos [6, 9, 10], para contante cosmológica não nula [11, 12, 13], dentro de uma nuvem de poeira em colapso [14, 15, 16], em espaço-tempo com fluidos auto-gravitando [17, 18, 19, 20, 21], em colisão de ondas gravitacionais planas [22, 23, 24, 25], dentre outros. Embora as soluções para as equações de Einstein-Maxwell sejam bem estudadas, os resultados na literatura ainda aparecem isolados, com pouca ou nenhuma discussão que relacione as soluções e suas interpretações físicas. Nossa motivação para o estudo dessa métrica está no fato dela ser uma métrica essencialmente simples matematicamente e também bastante intuitiva, já que descreve um plano gerado por uma placa massiva infinita.

Neste capítulo<sup>1</sup>, estudaremos uma forma geral da métrica para um plano massivo, infinito, eletricamente carregado e sem a presença da constante cosmológica. Vamos resolver as equações de Einstein-Maxwell com fontes puramente eletromagnéticas. Nesse caso, o traço do tensor energia-momento é  $T \equiv T^\mu{}_\mu = 0$ , e as equações de forma geral, podem ser escritas da seguinte maneira:

$$R_{\mu\nu} = -2T_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

$$T_{\mu\nu} = F_\mu{}^\alpha F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (2.2)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (2.3)$$

$$F_{[\mu\nu;\alpha]} = 0. \quad (2.4)$$

onde na última expressão o colchetes representa a convenção anti-simetria e ainda a diferenciação vem representada pelo ponto e vírgula.

Considerando o plano  $xy$  como o plano de simetria, o elemento de linha pode ser escrito da seguinte maneira:

$$ds^2 = E dt^2 - G(dx^2 + dy^2) - F dz^2. \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>No presente capítulo utilizamos essencialmente a referência[4]

nesta expressão, em geral,  $E$ ,  $F$  e  $G$  são funções de  $z$  e  $t$ .

As equações de campo (2.1), com a métrica dada pela Eq.(2.5), ficam da seguinte forma

$$E'' - \frac{E'^2}{2E} - \frac{E'F'}{2F} + \frac{E'G'}{G} = 4FT_{00} - 2\lambda EF, \quad (2.6)$$

$$G'' + \frac{E'G'}{2E} - \frac{F'G'}{2F} = -4FT_{11} - 2\lambda FG, \quad (2.7)$$

$$E'' - \frac{E'^2}{2E} - \frac{E'F'}{2F} + \left(\frac{2E}{G}\right) \left(G'' - \frac{G'^2}{2G} - \frac{F'G'}{2F}\right) = -4ET_{33} - 2\lambda EF, \quad (2.8)$$

sendo as derivadas calculadas com respeito à componente  $x_3 = z$  e as derivadas com respeito ao tempo foram negligenciadas devido ao fato de nos restringirmos ao caso estático.

O tensor energia-momentum de um campo eletrostático direcionado no eixo  $z$  apresenta-se da seguinte maneira [26]:

$$T^\mu_\nu = \frac{\sigma_q^2}{8G^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

nesta expressão,  $\sigma_q$  descreve a carga no plano por unidade de área e esta densidade de carga é positiva por definição. Sendo assim as Eqs. (2.6), (2.7) e (2.8) ficam do seguinte modo:

$$\left[ \frac{2}{G(EF)^{\frac{1}{2}}} \right] \left[ \frac{GE'}{(EF)^{\frac{1}{2}}} \right]' = -\sigma_q^2 G^{-2} - 4\lambda, \quad (2.10)$$

$$\left[ \frac{1}{EGG'} \right] \left[ \frac{G'^2 E}{F} \right]' = -\sigma_q^2 G^{-2} - 4\lambda, \quad (2.11)$$

$$(EFG)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{G'}{(EFG)^{\frac{1}{2}}} \right]' = 0. \quad (2.12)$$

Integrando a última equação, teremos

$$(EF)^{\frac{1}{2}} = -(2\sigma)^{-1} G^{-\frac{1}{2}} G', \quad (2.13)$$

com  $G' \neq 0$ , e identificamos a constante de integração  $\sigma$  com a densidade de massa do plano em  $z = 0$  no limite Newtoniano, como veremos adiante. Substituindo a Eq. (2.13) na Eq. (2.10) e integrando duas vezes, obtemos o seguinte:

$$E = (\sigma_q^2/4\sigma^2 G^{-1}) - (\lambda/3\sigma^2)G + bG^{-\frac{1}{2}} + \kappa. \quad (2.14)$$

Demandando consistência com a Eq. (2.11), vemos que  $\kappa = 0$ . Fazendo  $E(z = 0) = 1$  e  $G(z = 0) = 1$  (i.é., temos o plano  $z = 0$  descrito pela métrica de Minkowski) temos:

$$b = 1 - \sigma_q^2/4\sigma^2 + \lambda/3\sigma^2. \quad (2.15)$$

Então:

$$E = aG^{-1} + bG^{-\frac{1}{2}} + cG, \quad (2.16)$$

$$F = (G'^2/4\sigma^2)(a + bG^{\frac{1}{2}} + cG^2)^{-1}, \quad (2.17)$$

$$a = \sigma_q^2/4\sigma^2, \quad (2.18)$$

$$c = -\lambda/3\sigma^2, \quad (2.19)$$

$$b = 1 - a - c. \quad (2.20)$$

Assim, reescrevendo o elemento de linha levando em conta todas essas considerações, temos:

$$ds^2 = (aG^{-1} + bG^{-\frac{1}{2}} + cG)dt^2 - G(dx^2 + dy^2) - (G'^2/4\sigma^2)(a + bG^{\frac{1}{2}} + cG^2)^{-1}dz^2. \quad (2.21)$$

Se desconsiderarmos as condições associadas com o plano massivo, as Eqs. (2.13), (2.14) e (2.17) nos dão a solução para todo  $z$  tal que  $z_- < z < z_+$ , sendo  $G(z_-) = +\infty$  e  $G(z_+) = 0$ . Logo vemos que existem dois limitantes para  $z$ , mas levando em conta o plano massivo podemos desconsiderar a singularidade  $z_-$  em  $z$  que será análoga à singularidade em  $z_+$ .

Para esta métrica o escalar formado pelo tensor de Ricci vem dado por

$$S_R = R^\mu_\nu R^\nu_\mu = \sigma_q^4/4G^4 + 4\lambda, \quad (2.22)$$

mostrando que  $z_+$  representa uma singularidade (real) no espaço-tempo. Outras singularidades aparecem na métrica para  $E \rightarrow 0$  e  $E \rightarrow +\infty$ , mas são somente singularidades de coordenada.

Ainda, podemos calcular a distância própria entre o plano massivo e a singularidade  $z_+$ :

$$\begin{aligned} \hat{z}_+ &= - \int_0^{z_+} F^{1/2} dz, \\ &= \frac{1}{2\sigma} \int_0^1 (a + bG^{1/2} + cG^2)^{-1/2} dG. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Percebemos que essa última equação nos dá  $z_+$  sem introduzirmos coordenadas específicas e esta singularidade está a uma distância própria finita do plano  $z = 0$ .

Agora, tomando  $\lambda = 0$  e  $\sigma_q = 0$ , e considerando  $G' \neq 0$ , a solução geral se reduz a:

$$ds^2 = G^{-1/2}dt^2 - G(dx^2 + dy^2) - (G'^2/4\sigma^2 G^{1/2})dz^2. \quad (2.24)$$

O caráter físico do espaço-tempo descrito por este elemento de linha pode ser estudado considerando o movimento de partículas teste, nesse sentido vamos analisar uma geodésica nula na direção de  $z$ :

$$t - t_0 = \pm 1/2\sigma \int_{z_0}^z G' dz = \pm 1/2\sigma [G(z) - G(z_0)], \quad (2.25)$$

Para o caso de uma partícula massiva, a geodésica pode ser escrita como

$$F\ddot{z} + \frac{1}{2}F'\dot{z}^2 + \gamma^2 E'/2E^2 = 0, \quad (2.26)$$

sendo o ponto a diferenciação feita com respeito ao tempo próprio e a vírgula, assim como antes, a diferenciação feita com respeito a componente  $z$ , e  $\gamma = Et = G^{-1/2}t$  reconhecemos como a constante total de energia da partícula.

A partir da Eq. (2.26), podemos agora, obter a aceleração local de uma partícula livre instantaneamente em repouso no plano:

$$\ddot{z}(0) \equiv -g = -\sigma/2, \quad (2.27)$$

e usando o teorema de Gauss no caso Newtoniano verificamos que  $\sigma$  é de fato a densidade de massa do plano, tal como mencionado anteriormente. Este espaço-tempo, descrito por este caso especial, possui curvatura: o invariante de curvatura de Kretschmann é

$$S_K = R^{\lambda\mu\nu\kappa}R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 12\sigma^4[G(z)]^{-3}. \quad (2.28)$$

Neste caso, a distância própria finita dada pela Eq. (2.23) será  $\hat{z}_+ = 1/|3g|$ . Quando tomamos coordenadas com medidas na direção de  $z$ , é vantajoso, tanto por razões de interpretação quanto, também, pelo fato da geodésica na Eq. (2.26) poder ser integrada mais facilmente, escolhendo  $F=1$ . Neste caso, a métrica da Eq. (2.24) fica na forma [27, 28, 29]

$$ds^2 = (1 - 3gz)^{-2/3} dt^2 - (1 - 3gz)^{4/3} (dx^2 + dy^2) - dz^2, \quad (2.29)$$

sendo  $g = \sigma/2$  a aceleração de um ponto fixo arbitrário no plano  $z = 0$ . Esta última equação nos fornece a métrica conhecida como métrica de Taub, a qual usaremos como a métrica de fundo na proposta deste trabalho. Agora, analisando a geodésica (2.26), temos que

$$\ddot{z} + g\gamma^2(1 - 3gz)^{-1/3} = 0, \quad (2.30)$$

o qual integrando uma vez nos dá

$$\dot{z} = [\gamma^2(1 - 3gz)^{2/3} - 1]^{1/2}, \quad (2.31)$$

de onde podemos obter  $z_m$ , i.é., a máxima altura que uma partícula massiva pode alcançar:

$$z_m = (1 - \gamma^{-3})/|3g|. \quad (2.32)$$

Isso mostra que  $z_m < z_+$  para todos valores finitos (positivos) de  $\gamma$ . Assim, uma partícula não pode se aproximar da singularidade  $z_+$ .

Integrando ainda a Eq. (2.31), obtemos o tempo próprio  $\tau$ , sendo este medida de um relógio que se move junto com a partícula. Para a partícula alcançar  $z_m$ , teremos que

$$\tau(z_m) = (2\gamma^3 g)^{-1}(\gamma^2 v_0 + \cosh^{-1} \gamma), \quad (2.33)$$

com  $\gamma = (1 - v_0^2)^{-1/2}$  e  $v_0$  sendo a velocidade da partícula em  $z=0$ , donde obtemos  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \tau(z_m) = 0$ .

Podemos fazer uma comparação da velocidade coordenada  $v$  de uma partícula massiva com a de um fóton  $v_f$ , por exemplo. Neste caso, temos que  $dx=dy=0$ , o que nos resulta, imediatamente, da Eq.(2.29),

$$v_f = (1 - 3gz)^{-1/3}. \quad (2.34)$$

Então, teremos também

$$v = \dot{z}/\dot{t} = v_f(1 - \gamma^{-2}v_f^2)^{1/2}, \quad (2.35)$$

o que nos mostra que no limite quando  $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $v = v_p$ .

Uma partícula disparada do plano em direção à singularidade com uma velocidade arbitrária próxima à da luz, segue um fóton até esta, sem ser mensuravelmente desacelerado. A geodésica para os fótons movendo na direção  $z$  vem dada por:

$$t = \pm[1 - (1 - 3gz)^{3/4}](4g)^{-1}. \quad (2.36)$$

Esta equação nos mostra porque os fótons são capazes de se aproximarem da singularidade do espaço-tempo em um tempo finito  $t_m = 1/4g$ , medido por um relógio padrão localizado em  $z=0$ . Usando a Equação para o efeito Doppler gravitacional, a frequência da luz medida localmente na posição  $z$  vem dada por

$$\omega = \omega_0 E^{-1/2} = (1 - 3gz)^{1/3} \omega_0, \quad (2.37)$$

sendo  $\omega_0$  a frequência da luz medida localmente do plano. Vemos que a frequência se torna nula a medida que a luz se aproxima da singularidade.

Existem duas possibilidades para o que acontece com a luz próximo à singularidade. Uma delas é que é possível continuar a métrica para  $z > z_+$ . Mas vemos da Eq. (2.25) que, a medida que  $z$  cresce, de modo que  $z > z_+$ , é preciso mudar o sinal na frente de  $(2\sigma)^{-1}$ , a fim de dar à coordenada  $t$  um valor real finito. Assim, a aceleração da gravidade é dirigida para fora a partir da parede de ambos os lados da mesma. Alguns autores nos motivam a associar esta parede singular com a posição de um plano de massa negativa. A fim de produzir a singularidade, a densidade de massa negativa do plano teria que ser infinita. A outra possibilidade é que até mesmo a luz, quando se aproxima de  $z = z_+$ , perde toda a sua energia intrínseca dada em Eq. (2.37), retornando ao plano em  $z = 0$ ; o que é consistente com a Eq. (2.36) com o sinal negativo, resultando em uma curva geodésica nula para  $t > t_m$ . E ainda, de acordo com essa interpretação, não há plano massivo na singularidade, mas sim um plano com massa positiva em  $z=0$ . Isto produz um campo gravitacional e o espaço-tempo é curvado fora do plano. A energia do campo gravitacional contribui para a aceleração gravitacional das partículas teste. Isso garante, ainda, que o universo acessível é fechado, não só para as partículas massivas (mesmo no caso de movimento não geodésico, devido à divergência em  $z_+$ ), mas também para a radiação. O universo físico fora do plano tem uma extensão finita, chegando apenas à  $z_+ = 1/|3g| = 2/3\sigma$ .

Nos deteremos apenas ao campo em  $z > 0$ , pois podemos notar que o campo gerado será simétrico, ou seja, o plano massivo infinito localizado em  $z = 0$  funciona como um espelho o que gerará um campo idêntico para  $z < 0$  com um ponto singular em  $z = z_- = -1/3g$ . Esse campo, possivelmente, ficaria oscilando entre  $z_+ = 1/|3g| = 2/3\sigma$  e  $z = z_- = -1/|3g|$ , como se ficasse preso neste espaço-tempo. Em trabalhos futuros, podemos explorar essa condição, a fim de entender melhor o que acontece quando consideramos também  $z < 0$ .

# Capítulo 3

## Propagação do Campo Escalar

A Teoria Quântica de Campos estabelece uma formulação na qual as funções de onda são tomadas como operadores quânticos, sendo chamados de operadores de campo. Diferentemente da Mecânica Quântica, que trata de quantizar as grandezas físicas relacionadas ao movimento de um número finito de partículas (sistemas discretos), a teoria Quântica de Campos trata a quantização de sistemas contínuos, logo é conveniente para tratar sistemas de muitas partículas. A forma de fazer isso é escrever os observáveis em termos de operadores que aumentam ou diminuem o número de certas quantidades do sistema que são conhecidas como quanta de excitação. Cada partícula elementar está relacionada à um campo quântico. O número de quanta desse campo é identificado com o número de partículas no sistema, cujas propriedades (como massa, carga elétrica e spin) se refletem nas propriedades do campo. Por exemplo, as partículas que resultam da quantização do campo eletromagnético são os fótons, que têm massa e carga nulas e spin 1 [30]. Trataremos aqui o campo escalar que possui também massa e carga nulas e spin 0. A motivação para tratar o problema proposto neste trabalho com campo escalar é que esse é um campo consideravelmente simples, já que, não possui spin. É um campo de muito interesse na comunidade científica atual, já que recentemente a possibilidade de obtê-lo experimentalmente ganhou força com a consecução nas medidas dos aceleradores de partículas para o campo de Higgs, que é um campo escalar. Vamos nos restringir ao regime de baixas energias, situação que nos permite tratar o campo em primeira quantização (função de onda).

### 3.1 Solução Geral

A equação para um campo escalar sem massa minimamente acoplado vem dada por:

$$\square\phi = 0, \quad (3.1)$$

sendo  $\square = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$  o operador D'Lambertiano. Podemos reescrever a Eq. (3.1) da seguinte maneira:

$$\frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}}\partial_\mu(\sqrt{-\tilde{g}}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) = 0, \quad (3.2)$$

sendo  $\tilde{g}$  o determinante da métrica de fundo  $g_{\mu\nu}$  que consideraremos aquela descrita pela Eq. (2.29).

Como vimos no capítulo anterior, essa métrica é planarmente simétrica e, neste presente trabalho, ela representa o campo gravitacional de uma placa com densidade superficial de massa  $\sigma$ , lembrando que  $\sigma = 2g$  conforme a Eq. (2.27).

Considerando o determinante da métrica  $\tilde{g} = -(1 - 3gz)^2$  e a Eq.(2.29) na Eq. (3.2), teremos

$$\partial_0(\sqrt{-\tilde{g}}g^{00}\partial_0\phi) + \partial_1(\sqrt{-\tilde{g}}g^{11}\partial_1\phi) + \partial_2(\sqrt{-\tilde{g}}g^{22}\partial_2\phi) + \partial_3(\sqrt{-\tilde{g}}g^{33}\partial_3\phi) = 0, \quad (3.3)$$

o que resulta em

$$(1 - 3gz)^{5/3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - (1 - 3gz)^{-1/3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - (1 - 3gz)^{-1/3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - (1 - 3gz) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 3g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \quad (3.4)$$

Supondo o campo  $\phi$  uma função separável, podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$\phi = X(x)Y(y)Z(z)e^{-i\omega t}. \quad (3.5)$$

Considerando a Eq. (3.5) podemos reescrever a Eq. (3.4) e assim obtermos que:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + (1 - 3gz)^2 \omega^2 - (1 - 3gz)^{1/3} 3g \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial z} + (1 - 3gz)^{4/3} \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0. \quad (3.6)$$

Supondo da Eq. (3.6) que  $\phi$  é uma função separável, então escolhendo uma constante positiva arbitrária  $K$ , teremos:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k_x^2, \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^2, \quad (3.8)$$

e para a coordenada  $Z$  teremos:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \frac{3g}{(1 - 3gz)} \frac{\partial Z}{\partial z} - k_{xy}^2 \frac{Z}{(1 - 3gz)^{4/3}} + Z(1 - 3gz)^{2/3} \omega^2 = 0, \quad (3.9)$$

sendo  $k_{xy}^2 = k_x^2 + k_y^2$ .

Por conveniência vamos chamar  $3gz = \bar{z}$  com  $\bar{z} \in [0, 1]$ , logo a equação geral para  $Z$  fica sendo:

$$\frac{d^2 Z}{d\bar{z}^2} - \frac{1}{(1 - \bar{z})} \frac{dZ}{d\bar{z}} + \left[ \omega'^2 - \frac{k_{xy}'^2}{(1 - \bar{z})^2} \right] (1 - \bar{z})^{2/3} Z = 0, \quad (3.10)$$

sendo  $\omega' = \frac{\omega}{3g}$  e  $k_{xy}' = \frac{k_{xy}}{3g}$ .

Ainda não obtivemos uma solução analítica para a Eq. (3.10), mas vamos reescrevê-la da seguinte forma fazendo  $\rho = -(1 - \bar{z})$ :

$$\frac{d^2 Z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dZ}{d\rho} + \left[ \omega'^2 - \frac{k_{xy}'^2}{\rho^2} \right] \rho^{2/3} Z = 0, \quad (3.11)$$

note que  $\rho \in [-1, 0]$ .

Não fomos capazes de encontrar uma solução exata para a equação (3.11). Vamos então considerar os dois casos particulares descritos a seguir.

## 3.2 Solução exata para propagação perpendicular

Consideramos, aqui, soluções com dependência apenas na coordenada  $z$ , que correspondem a configurações de campo que se propagam perpendicularmente à distribuição planar de massa. Para isso, tomamos a Eq. (3.11) no caso particular onde  $k_{xy}' = 0$ :

$$\frac{d^2 Z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dZ}{d\rho} + \omega'^2 \rho^{2/3} Z = 0. \quad (3.12)$$

Tomemos a seguinte transformação:

$$\rho' = \frac{3}{4}\omega'\rho^{4/3} \Rightarrow d\rho' = \omega'\rho^{1/3}d\rho. \quad (3.13)$$

Com isso, a Eq. (3.12) toma a seguinte forma:

$$\frac{d^2Z}{d\rho'^2} + \frac{1}{\rho'} \frac{dZ}{d\rho'} + Z = 0. \quad (3.14)$$

Reconhecemos então a Eq. (3.14) como sendo a Equação de Bessel de ordem 0, que possui como solução

$$Z(\rho') = C_1 J_0(\rho') + C_2 N_0(\rho'), \quad (3.15)$$

lembrando que  $\rho' = \frac{3}{4}\omega'(1 - \bar{z})^{4/3}$ . Temos que  $J_0(\rho')$  é a função de Bessel de primeiro tipo e  $N_0(\rho')$  é a função de Bessel de segundo tipo (também chamada de função de Neumann).

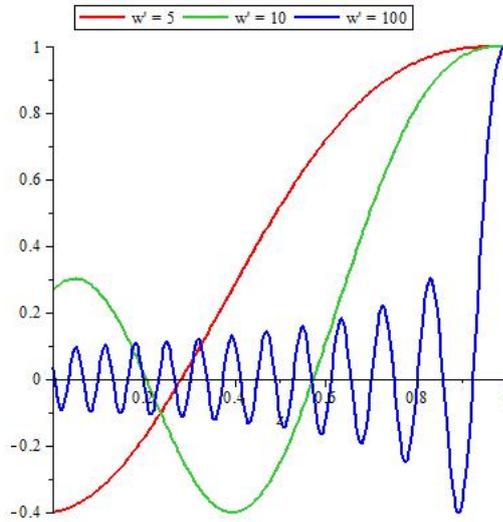


Figura 3.1: Comportamento de  $J_0(\bar{z})$  entre o plano massivo em  $\bar{z} = 0$  e o plano singular  $\bar{z} = 1$  para três valores de frequência, sendo eles  $\omega' = 5, 10, 100$ .

Podemos observar nas Figs. (3.1) e (3.2) que a função  $J_0(\bar{z})$  tem sempre um valor finito, para qualquer  $\omega$ , na região entre o plano massivo e o plano singular. Todavia, a função de Bessel do segundo tipo  $N_0(\bar{z})$  decresce abruptamente nas proximidades do plano singular e vai para  $-\infty$  em  $\bar{z} = 1$ . Quanto menor for a frequência do campo escalar mais cedo sua amplitude diminuirá, i.é., mais próximo do plano massivo. O fato da solução para  $\phi$  ser singular em  $\bar{z} = 1$  concorda com a singularidade no espaço-tempo de Taub, tal qual evidenciada pelo escalar de Kretschmann (ver a Eq. 2.28).

Resultado semelhante pode ser encontrado para o caso  $\omega = 0$  e  $k_{xy} \neq 0$ , para o qual a solução é dada em termos das funções de Bessel modificadas  $I_0(\bar{z})$  e  $K_0(\bar{z})$ . Para esse caso também, existirá uma singularidade no plano  $\bar{z} = 1$ .

### 3.3 Solução para a Métrica de Taub linearizada

Vamos considerar somente a solução em primeira ordem para  $\bar{z}$ , i.é., vamos linearizar a Eq. (3.9) e tomar  $\bar{z}$  muito pequeno, ou  $\bar{z} \ll 1$ . Assim, expandindo em Série de Taylor, teremos:

$$\frac{d^2Z}{d\bar{z}^2} - (1 + \bar{z}) \frac{dZ}{d\bar{z}} + \left[ \omega'^2 - k_{xy}^2 + \left( \frac{2}{3}\omega'^2 - \frac{4}{3}k_{xy}^2 \right) \bar{z} \right] Z = 0. \quad (3.16)$$

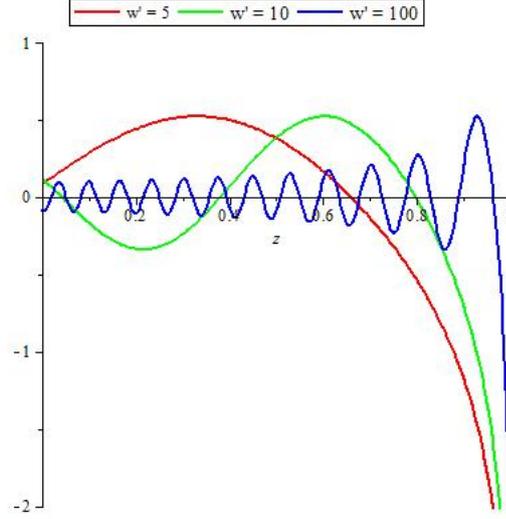


Figura 3.2: Comportamento de  $N_0(\bar{z})$  entre o plano massivo em  $\bar{z} = 0$  e o plano singular  $\bar{z} = 1$  para três valores de frequência, sendo eles  $\omega' = 5, 10, 100$ .

Desta forma, reconhecemos a Eq. (3.16) como sendo uma equação hipergeométrica confluyente, conhecida como Equação de Kummer, a qual possui como solução uma combinação linear de duas funções,  $M(a,b;j)$ , conhecida como função de Kummer de 1º tipo e  $U(a,b;j)$ , como a de 2º tipo. Sendo assim a solução vem dada por:

$$Z = e^{-\frac{2}{3}\bar{z}\omega^2 - \frac{4}{3}\bar{z}k_{xy}^2} [C_1 M(a, b; j) + C_2 U(a, b; j)], \quad (3.17)$$

sendo:

$$a = \frac{-8k_{xy}^4}{9} + \frac{k_{xy}^2(-16\omega^2 - 3)}{18} - \frac{2\omega^4}{9} - \frac{5\omega^2}{6}; \quad (3.18)$$

$$b = \frac{1}{2}; \quad (3.19)$$

$$j = \frac{(3\bar{z} + 4\omega^2 + 8k_{xy}^2 + 3)^2}{18}. \quad (3.20)$$

Uma vez que estamos trabalhando sob a restrição de que  $\bar{z} \ll 1$ , é legítimo considerar a solução (3.17) nesse contexto. Considerando o fato que  $\omega'$  e  $k_{xy}'$  podem ser variáveis grandes, vamos expandir em primeira ordem em  $\bar{z}$  somente o termo entre colchetes em (3.17).

Expandindo em primeira ordem em  $\bar{z}$ , obtemos para M e U

$$M(a, 1/2; j) \cong M(a, 1/2, \alpha^2/18) + 12a\alpha M(a+1, 3/2, \alpha^2/18)\bar{z}, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} U(a, 1/2; j) \cong & \sqrt{\pi} \left( \frac{U(a, 1/2, \alpha^2/18)}{\Gamma(a+1/2)} - \frac{\sqrt{2} M(a+1/2, 3/2, \alpha^2/18)}{3 \Gamma(a)} \right) + \\ & + \sqrt{\pi} \left( \frac{2a\alpha M(a+1, 3/2, \alpha^2/18)}{3 \Gamma(a+1/2)} - \frac{\sqrt{2} \alpha^2 (1+2a)}{27 \Gamma(a)} M(a+3/2, 5/2, \alpha^2/18) \right. \\ & \left. - \sqrt{2} \frac{1}{\Gamma(a)} M(a+1/2, 3/2, \alpha^2/18) \right) \bar{z}, \quad (3.22) \end{aligned}$$

onde  $\Gamma$  é a função Gamma de Euler, e definimos a quantidade

$$\alpha = 4\omega'^2 + 8k_{xy}'^2 + 3. \quad (3.23)$$

Podemos, então, finalmente, escrever a solução geral para  $\phi$  com  $\bar{z} \ll 1$ :

$$\phi = e^{-i(\omega t + k_x x + k_y y) - (2/3\omega'^2 + 4/3k_{xy}'^2)\bar{z}} [\Phi_0(\omega, k_{xy}) + \Phi_1(\omega, k_{xy})\bar{z}]. \quad (3.24)$$

onde definimos as funções

$$\begin{aligned} \Phi_0(\omega, k_{xy}) &= C_1 M(a, 1/2, \alpha^2/18) + C_2 \sqrt{\pi} \left( \frac{U(a, 1/2, \alpha^2/18)}{\Gamma(a+1/2)} - \frac{\sqrt{2} M(a+1/2, 3/2, \alpha^2/18)}{3 \Gamma(a)} \right) \\ \Phi_1(\omega, k_{xy}) &= 12a\alpha M(a+1, 3/2, \alpha^2/18) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(a)} M(a+1/2, 3/2, \alpha^2/18) \\ &\quad \sqrt{\pi} \left( \frac{2a\alpha M(a+1, 3/2, \alpha^2/18)}{3 \Gamma(a+1/2)} - \frac{\sqrt{2} \alpha^2 (1+2a)}{27 \Gamma(a)} M(a+3/2, 5/2, \alpha^2/18) \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

que não dependem de  $\bar{z}$ .

Cabe lembrar que estamos tratando o campo escalar real, e está implícito que deve ser tomada apenas a parte real da equação acima.

Sabemos que o tensor energia-momentum para um campo escalar vem dado por

$$T_{\mu\nu} = (1 - 2\xi) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + (2\xi - 1/2) g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi - 2\xi \phi \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + 2\xi \phi \square \phi g_{\mu\nu} + \xi G_{\mu\nu} \phi^2 - V(\phi) g^{\mu\nu}, \quad (3.26)$$

sendo  $G_{\mu\nu}$  o tensor de Einstein para a métrica de fundo da Eq. (2.29) linearizada e  $\xi$  é a constante de acoplamento do campo com a gravitação.

Para este caso, vamos tomar  $G_{\mu\nu} = 0$ ,  $V(\phi) = 0$ ,  $\xi = 0$  (campo minimamente acoplado) e  $\nabla_\lambda \phi$  se reduz a simplesmente  $\partial_\lambda \phi$ . Assim, podemos reescrever a Eq. (3.26) como

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu (Re\phi) \partial_\nu (Re\phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\lambda\rho} \partial_\lambda (Re\phi) \partial_\rho (Re\phi), \quad (3.27)$$

onde indicamos que somente a parte real de  $\phi$  deve ser considerada.

De acordo com essas considerações, a componente 00 do tensor energia-momentum é dada por

$$T_{00} = F + G\bar{z}, \quad (3.28)$$

sendo

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \left[ (\omega^2 + k_x^2 + k_y^2) \Phi_0(\omega, k_{xy}) \sin^2(\omega t - k_x x - k_y y) \right. \\ &\quad \left. + (3g)^2 (\Phi_1(\omega, k_{xy}) - \beta \Phi_0(\omega, k_{xy}))^2 \cos^2(\omega t - k_x x - k_y y) \right] e^{-2\beta\bar{z}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} G &= \left( (\omega^2 + k_x^2 + k_y^2) \Phi_0(\omega, k_{xy}) \Phi_1(\omega, k_{xy}) - \frac{1}{3} (k_x^2 + k_y^2) \Phi_0^2(\omega, k_{xy}) \right) \sin^2(\omega t - k_x x - k_y y) e^{-2\beta\bar{z}} \\ &\quad + \frac{(3g)^2}{3} (\Phi_1(\omega, k_{xy}) - \beta \Phi_0(\omega, k_{xy})) (\Phi_1(\omega, k_{xy}) - \beta \Phi_0(\omega, k_{xy}) - 3\beta \Phi_1(\omega, k_{xy})) \end{aligned}$$

$$\times \cos^2(\omega t - k_x x - k_y y) e^{-2\beta \bar{z}}, \quad (3.30)$$

com  $\beta$  definido por

$$\beta = 2/3\omega'^2 + 4/3k_{xy}'^2. \quad (3.31)$$

Das equações (3.28), (3.29) e (3.30), podemos perceber que a densidade de energia do campo escalar (3.24) diminui exponencialmente com o aumento de  $\bar{z}$ . Isso está de acordo com o que vimos no capítulo 2, no qual constatamos a diminuição de energia intrínseca de um raio de luz que viaja na direção de  $+z$  (veja a Eq. 2.37).

Realizando o mesmo cálculo similar para as demais componentes do tensor energia-momentum, somos levados a resultados totalmente análogos, onde as componentes desse tensor diminuem a medida em que  $\bar{z}$  aumenta.

# Capítulo 4

## Propagação de Ondas Gravitacionais

As equações da Relatividade Geral são altamente acopladas, indicando que o campo gravitacional interage consigo mesmo. Ao considerarmos a Relatividade Geral para campos fracos em mais baixa ordem, somos levados à teoria do campo tensorial simétrico de rank 2, cujas equações de movimento são lineares. Nesse regime, vale, então, o princípio da superposição e, na ausência de fontes externas, temos soluções na forma de ondas planas.

Sabemos que, após a emissão de radiação gravitacional, as ondas viajam pelo espaço e podem ser alteradas devido à presença de uma curvatura de fundo gerada, por exemplo, por buracos negros ou estrelas de nêutrons. Neste contexto, pretendemos analisar o efeito da interação dessas ondas gravitacionais com um campo gravitacional simples, tal como o representado pela métrica de Taub.

Todavia, nos restringiremos ao caso do campo de fundo também ser fraco, ou, equivalentemente, à propagação nas proximidades do plano massivo em  $z = 0$ , sendo pequena a densidade de massa.

Como se daria a interação dessas ondas gravitacionais com o campo de fundo? Como seria sua velocidade de propagação? Quais seriam as polarizações de seus modos normais de propagação?

### 4.1 Obtenção das equações de campo linearizadas

Partiremos das equações de Einstein para o vácuo

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (4.1)$$

sendo o tensor de Ricci dado por

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta, \quad (4.2)$$

e o símbolo de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  dado por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}). \quad (4.3)$$

A existência do tensor de curvatura afirma a questão de que o princípio da equivalência juntamente com o princípio da covariância geral determinam unicamente os efeitos da gravitação em sistemas arbitrários.

A utilização desses princípios do tensor métrico nos ajudarão a entender a interação entre a onda gravitacional e um campo gravitacional de fundo.

Considerando a métrica

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (4.4)$$

na Eq. (4.1), obtemos a seguinte equação para  $h$ , com termos até segunda ordem em  $h$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (h_{,\mu\nu} - h_{\mu\alpha, \nu}^{\alpha} - h_{\alpha\nu, \mu}^{\alpha} + h_{\mu\nu, \alpha}^{\alpha}) \\ & + \frac{1}{2} h^{\alpha\rho} (h_{\mu\alpha, \rho\nu} + h_{\rho\nu, \mu\alpha} - h_{\rho\alpha, \mu\nu} - h_{\mu\nu, \rho\alpha}) \\ & - \frac{1}{4} [h_{\beta, \mu}^{\alpha} h_{\alpha, \nu}^{\beta} + 2h^{\alpha\beta}{}_{, \alpha} (-h_{\beta\nu, \mu} - h_{\beta\mu, \nu} + h_{\mu\nu, \beta})] \\ & - \frac{1}{4} [h_{, \alpha} (h_{\mu, \nu}^{\alpha} + h_{\nu, \mu}^{\alpha} - h_{\mu\nu, \alpha}^{\alpha})] \\ & - \frac{1}{4} [2h_{\mu\alpha}{}^{, \beta} (-h_{\nu\beta}{}^{, \alpha} + h_{\nu}{}^{\alpha}{}_{, \beta})] = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Seja o campo  $h_{\mu\nu}$  formado pela composição:

$$h_{\mu\nu} = h^{(0)}{}_{\mu\nu} + h^{(p)}{}_{\mu\nu}, \quad (4.6)$$

na qual  $h^{(0)}{}_{\mu\nu}$  é um campo gravitacional estático de fundo e  $h^{(p)}{}_{\mu\nu}$  é uma perturbação propagante (ondas gravitacionais). Vamos considerar, em nossos cálculos, a seguinte hierarquia:

$$h^{(p)} \ll h^{(0)} \ll \eta, \quad (4.7)$$

ou seja, vamos considerar a magnitude (já que estamos tratando de matrizes) de  $h^{(p)}{}_{ij}$  muito pequena.

Assim, a métrica de fundo resultante é:

$$g^{(0)}{}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h^{(0)}{}_{\mu\nu}. \quad (4.8)$$

O campo propagante obedecerá as seguintes condições de calibre:

$$\nabla^{(0)}{}_{\nu} h_{\mu}{}^{(p)\nu} = 0, \quad (4.9)$$

$$g^{(0)\mu\nu} h^{(p)}{}_{\mu\nu} = 0, \quad (4.10)$$

e

$$h^{(p)}{}_{0\nu} = 0. \quad (4.11)$$

Observe que, nessas expressões, a derivada covariante, assim como o traço, são calculados utilizando a métrica de fundo  $g^{(0)}{}_{\mu\nu}$ . Assim, essas condições de calibre ficam:

$$\begin{aligned} & \nabla^{(0)}{}_{\beta} (g^{(0)\alpha\beta} h^{(p)}{}_{\mu\alpha}) = 0, \\ & \nabla^{(0)}{}_{\beta} h^{(p)}{}_{\mu}{}^{\beta} - \nabla^{(0)}{}_{\beta} (h^{(0)\alpha\beta} h^{(p)}{}_{\mu\alpha}) = 0, \\ & \partial_{\beta} h^{(p)}{}_{\mu}{}^{\beta} - \Gamma^{(0)\lambda}{}_{\mu\beta} h^{(p)}{}_{\lambda}{}^{\beta} + \Gamma^{(0)\beta}{}_{\lambda\beta} h^{(p)}{}_{\mu}{}^{\lambda} - h^{(0)\alpha\beta} \partial_{\beta} h^{(p)}{}_{\mu\alpha} - (\partial_{\beta} h^{(0)\alpha\beta}) h^{(p)}{}_{\mu\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Vejamos como fica o traço:

$$\begin{aligned} & g^{(0)\mu\nu} h^{(p)}{}_{\mu\nu} = 0 \\ & (\eta^{\mu\nu} - h^{(0)\mu\nu}) h^{(p)}{}_{\mu\nu} = 0 \\ & \eta^{\mu\nu} h^{(p)}{}_{\mu\nu} - h^{(0)\mu\nu} h^{(p)}{}_{\mu\nu} = 0 \\ & h = h^{(0)\mu\nu} h^{(p)}{}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde consideramos nessa última a notação  $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ .

Então, dadas as hierarquias (4.7) e as condições de calibre acima descritas, a Eq. (4.5) fica:

$$\begin{aligned}
& h^{(p)}_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha - h^{(0)\alpha\beta} h^{(p)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \\
& - \left( h^{(0)\lambda,\alpha}{}_\mu + h^{(0)\lambda\alpha}{}_{,\mu} - h^{(0)\alpha,\lambda}{}_\mu \right) h^{(p)\nu}{}_{\lambda,\alpha} \\
& + \left( h^{(0)\nu,\alpha}{}_\lambda + h^{(0)\nu\alpha}{}_{,\lambda} - h^{(0)\alpha,\nu}{}_\lambda \right) h^{(p)\lambda}{}_{\mu,\alpha} \\
& - \frac{1}{2} \left( 2h^{(0)\alpha\lambda}{}_{,\alpha} - h^{(0)\alpha,\lambda}{}_\alpha \right) h^{(p)\nu}{}_{\mu,\lambda} \\
& - \frac{1}{2} \left( h^{(0)\lambda,\alpha}{}_\mu + h^{(0)\lambda\alpha}{}_{,\mu} - h^{(0)\alpha,\lambda}{}_\mu \right) h^{(p)\nu}{}_\lambda \\
& + \frac{1}{2} \left( h^{(0)\nu,\alpha}{}_\lambda + h^{(0)\nu\alpha}{}_{,\lambda} - h^{(0)\alpha,\nu}{}_\lambda \right) h^{(p)\lambda}{}_\mu \\
& + \left( h^{(0)\alpha\mu,\alpha}{}^\lambda - h^{(0)\alpha\beta,\mu}{}^\nu - h^{(0)\nu}{}_{\mu,\alpha\beta} + h^{(0)\nu}{}_{\alpha,\mu\beta} \right) h^{(p)\alpha\beta} = 0.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Essa equação foi obtida considerando primeira ordem para  $h^{(p)}$  e para o produto  $h^{(0)}h^{(p)}$ , além de assumir as equações de campo satisfeitas pela métrica de fundo  $R^{(0)}_{\mu\nu} = 0$  para ordem arbitrária em  $h^{(0)}$ .

Essa última Equação para a dinâmica é uma equação diferencial de primeira ordem, homogênea e não-linear. Buscando suas soluções, encontraremos informações importantes acerca da polarização da onda propagante, da sua velocidade e frequências para qualquer campo gravitacional fraco de fundo. Note que, ao fazermos  $h^{(0)} = 0$  na Eq. (4.14), obtemos

$$h^{(p)}_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha = 0, \tag{4.15}$$

que é justamente a equação de uma onda gravitacional que se propaga no espaço-tempo de Minkowski.

## 4.2 Solução para a Métrica de Taub linearizada

Com o resultado da Eq. (4.14), podemos, agora, considerar a métrica de Taub, dada na Eq. (2.29), expandida em série de Taylor, onde serão mantidos somente os termos de primeira ordem em  $gz$ . Assim, temos

$$ds^2 = (1 + 2gz)dt^2 - (1 - 4gz)(dx^2 + dy^2) - dz^2, \tag{4.16}$$

donde podemos obter que:

$$\begin{aligned}
h^{(0)}{}_{00} &= h^{(0)00} = 2gz \\
h^{(0)}{}_{11} &= h^{(0)11} = 4gz \\
h^{(0)}{}_{22} &= h^{(0)22} = 4gz \\
h^{(0)}{}_{33} &= h^{(0)33} = 0.
\end{aligned}$$

Levando em conta o calibre da Eq. (4.11), teremos que <sup>1</sup>

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx} & h_{xy} & h_{xz} \\ 0 & h_{yx} & h_{yy} & h_{yz} \\ 0 & h_{zx} & h_{zy} & h_{zz} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

e, como  $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ , isso significa que temos somente 6 componentes independentes.

Tomemos, por simplicidade,  $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(t, x)$ , i.é.,  $z$  e  $y$  fixos e, considerando a Eq. (4.17), o traço nos fornece a seguinte relação:

$$h_{33} = -(1 + 4gz)(h_{11} + h_{22}), \quad (4.18)$$

As Eqs. (4.12) tornan-se

$$\begin{aligned} (1 + 4gz) \frac{\partial h_{11}}{\partial x} &= 3gh_{13} \\ (1 + 4gz) \frac{\partial h_{12}}{\partial x} &= 3gh_{23} \\ (1 + 4gz) \frac{\partial h_{13}}{\partial x} &= g(3h_{33} - 2h_{11} - 2h_{22}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Portanto, essas quatro condições de calibre, Eqs. (4.18)-(4.19), fazem que fiquemos apenas com 2 graus de liberdade independentes.

Finalmente, as equações para a propagação (4.14), ficam:

$$(1 - 2gz) \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial t^2} - (1 + 4gz) \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^2} + 8g \frac{\partial h_{13}}{\partial x} = 0, \quad (4.20)$$

$$(1 - 2gz) \frac{\partial^2 h_{22}}{\partial t^2} - (1 + 4gz) \frac{\partial^2 h_{22}}{\partial x^2} = 0, \quad (4.21)$$

$$(1 - 2gz) \frac{\partial^2 h_{33}}{\partial t^2} - (1 + 4gz) \frac{\partial^2 h_{33}}{\partial x^2} - 8g \frac{\partial h_{13}}{\partial x} = 0, \quad (4.22)$$

$$(1 - 2gz) \frac{\partial^2 h_{13}}{\partial t^2} - (1 + 4gz) \frac{\partial^2 h_{13}}{\partial x^2} + 4g \frac{\partial h_{33}}{\partial x} - 4g \frac{\partial h_{11}}{\partial x} = 0, \quad (4.23)$$

$$(1 - 2gz) \frac{\partial^2 h_{23}}{\partial t^2} - (1 + 4gz) \frac{\partial^2 h_{23}}{\partial x^2} - 4g \frac{\partial h_{12}}{\partial x} = 0, \quad (4.24)$$

$$(1 - 2gz) \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial t^2} - (1 + 4gz) \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^2} + 4g \frac{\partial h_{23}}{\partial x} = 0. \quad (4.25)$$

Note que a Eq. (4.21) é desacoplada de todos os outros modos, então obtemos para  $h_{22}$

$$h_{22} = A_{22} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (4.26)$$

onde a relação de dispersão em primeira ordem em  $gz$  fica:

$$\omega = (1 + 3gz)k. \quad (4.27)$$

---

<sup>1</sup>De agora em diante, vamos omitir o índice ( $p$ ) que se refere à perturbação propagante no termo  $h^{(p)}_{\mu\nu}$ , denotando-o  $h_{\mu\nu}$ .

Por outro lado, os modos  $h_{12}$  e  $h_{23}$  estão acoplados entre si através das equações (4.24) e (4.25). Supondo:

$$h_{ij} = \tilde{h}_{ij}(x)e^{-i\omega t}, \quad (4.28)$$

e tomando as definições:

$$\begin{aligned} a &= 4g(1 - 4gz), \\ b &= \omega^2(1 - 6gz), \\ c &= 8g(1 - 4gz), \end{aligned}$$

podemos reescrever essas equações na seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

onde  $'$  significa diferenciação com respeito a  $x$ . Essa expressão é equivalente a  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  e de onde temos  $y_1 = \tilde{h}_{23}$ ,  $y_2 = \tilde{h}'_{23}$ ,  $y_3 = \tilde{h}_{12}$  e  $y_4 = \tilde{h}'_{12}$ .

A solução para sistemas desse tipo vem dada pela equação [31]:

$$\mathbf{y} = \xi e^{rx}, \quad (4.30)$$

onde  $\xi$  é um auto vetor constante e  $r_a$  são os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$ . Esses autovalores são dados pela equação [31]:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I}r)\xi = 0, \quad (4.31)$$

para a qual devemos ter:

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}r) = 0. \quad (4.32)$$

Para o sistema dado em (4.29), obtemos os seguintes autovalores que serão importantes para encontrarmos a relação de dispersão e assim obtermos informações à cerca das velocidades. Vejamos:

$$\begin{aligned} r_1 = & + \sqrt{-\omega^2 + 4\sqrt{g^2(\omega^2 + 4g^2)} - 8g^2} \\ & + 4 \frac{\sqrt{-\omega^2 + 4\sqrt{g^2(\omega^2 + 4g^2)} - 8g^2}}{(\omega^2 + 4g^2)(-4\omega^2 + 16\sqrt{g^2(\omega^2 + 4g^2)} - 32g^2)} \\ & \times \left( 44\omega^2g^2 + 128g^4 + 3\omega^4 - 14\omega^2\sqrt{g^2(\omega^2 + 4g^2)} - 64g^2\sqrt{g^2(\omega^2 + 4g^2)} \right) gz \\ & + O((gz)^2), \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}
r_2 = & - \sqrt{-\omega^2 + 4 \sqrt{g^2 (\omega^2 + 4 g^2)} - 8 g^2} \\
& - 4 \frac{\sqrt{-\omega^2 + 4 \sqrt{g^2 (\omega^2 + 4 g^2)} - 8 g^2}}{(\omega^2 + 4 g^2) \left( -4 \omega^2 + 16 \sqrt{g^2 (\omega^2 + 4 g^2)} - 32 g^2 \right)} \\
& \times \left( 44 \omega^2 g^2 + 128 g^4 + 3 \omega^4 - 14 \omega^2 \sqrt{g^2 (\omega^2 + 4 g^2)} - 64 g^2 \sqrt{g^2 (\omega^2 + 4 g^2)} \right) g z \\
& + O\left((gz)^2\right), \tag{4.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_3 = & + \sqrt{-\omega^2 - 4 \sqrt{g^2 (\omega^2 + 4 g^2)} - 8 g^2} \\
& + 4 \frac{\sqrt{-\omega^2 - 4 \sqrt{g^2 (\omega^2 + 4 g^2)} - 8 g^2}}{(\omega^2 + 4 g^2) \left( -4 \omega^2 - 16 \sqrt{g^2 (\omega^2 + 4 g^2)} - 32 g^2 \right)} \\
& \times \left( 44 \omega^2 g^2 + 128 g^4 + 3 \omega^4 + 14 \omega^2 \sqrt{g^2 (\omega^2 + 4 g^2)} + 64 g^2 \sqrt{g^2 (\omega^2 + 4 g^2)} \right) g z \\
& + O\left((gz)^2\right), \tag{4.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_4 = & - \sqrt{-\omega^2 - 4 \sqrt{g^2 (\omega^2 + 4 g^2)} - 8 g^2} \\
& - 4 \frac{\sqrt{-\omega^2 - 4 \sqrt{g^2 (\omega^2 + 4 g^2)} - 8 g^2}}{(\omega^2 + 4 g^2) \left( -4 \omega^2 - 16 \sqrt{g^2 (\omega^2 + 4 g^2)} - 32 g^2 \right)} \\
& \times \left( 44 \omega^2 g^2 + 128 g^4 + 3 \omega^4 + 14 \omega^2 \sqrt{g^2 (\omega^2 + 4 g^2)} + 64 g^2 \sqrt{g^2 (\omega^2 + 4 g^2)} \right) g z \\
& + O\left((gz)^2\right). \tag{4.36}
\end{aligned}$$

Pela análise desses autovalores, notamos que as componentes  $h_{23}$  e  $h_{12}$  são propagantes, já que, por exemplo:

$$-\omega^2 + 4 \sqrt{g^2 (\omega^2 + 4 g^2)} - 8 g^2 < 0, \tag{4.37}$$

nos mostrando que o autovalor  $r_1$  será um imaginário puro indicando o caráter oscilatório da amplitude. Semelhante análise pode ser realizada para os demais autovalores.

Da mesma maneira, os modos  $h_{11}$ ,  $h_{33}$  e  $h_{13}$  estão acoplados através das equações (4.20) e (4.22) e (4.23). Então, da Eq. (4.28), obtemos essas equações matricialmente:

$$\begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \\ q'_4 \\ q'_5 \\ q'_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a & 0 & a & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix}, \tag{4.38}$$

onde temos  $q_1 = \tilde{h}_{11}$ ,  $q_2 = \tilde{h}'_{11}$ ,  $q_3 = \tilde{h}_{33}$  e  $q_4 = \tilde{h}'_{33}$ ,  $q_5 = \tilde{h}_{13}$  e  $q_6 = \tilde{h}'_{13}$ .

Para o sistema dado em (4.38), obtemos os seguintes autovalores:

$$r_1 = \omega(1 - 3gz) + O\left((gz)^2\right), \quad (4.39)$$

$$r_2 = -\omega(1 - 3gz) + O\left((gz)^2\right), \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} r_3 = & + \sqrt{\omega^2 + 8\sqrt{-g^2(\omega^2 - 16g^2)} - 32g^2} \\ & - \left( -176g^2\omega^2 + 2048g^4 + 3\omega^4 + 28\sqrt{-g^2(\omega^2 - 16g^2)}\omega^2 - 512\sqrt{-g^2(\omega^2 - 16g^2)}g^2 \right) \\ & \times \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 8\sqrt{-g^2(\omega^2 - 16g^2)} - 32g^2}} (\omega^2 - 16g^2)^{-1} gz + O\left((gz)^2\right), \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} r_4 = & - \sqrt{\omega^2 + 8\sqrt{-g^2(\omega^2 - 16g^2)} - 32g^2} \\ & + \left( -176g^2\omega^2 + 2048g^4 + 3\omega^4 + 28\sqrt{-g^2(\omega^2 - 16g^2)}\omega^2 - 512\sqrt{-g^2(\omega^2 - 16g^2)}g^2 \right) \\ & \times \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 8\sqrt{-g^2(\omega^2 - 16g^2)} - 32g^2}} (\omega^2 - 16g^2)^{-1} gz + O\left((gz)^2\right), \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} r_5 = & + \sqrt{\omega^2 - 8\sqrt{-g^2(\omega^2 - 16g^2)} - 32g^2} \\ & + \left( 176g^2\omega^2 - 2048g^4 - 3\omega^4 + 28\sqrt{-g^2(\omega^2 - 16g^2)}\omega^2 - 512\sqrt{-g^2(\omega^2 - 16g^2)}g^2 \right) \\ & \times \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - 8\sqrt{-g^2(\omega^2 - 16g^2)} - 32g^2}} (\omega^2 - 16g^2)^{-1} gz + O\left((gz)^2\right), \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} r_6 = & - \sqrt{\omega^2 - 8\sqrt{-g^2(\omega^2 - 16g^2)} - 32g^2} \\ & - \left( 176g^2\omega^2 - 2048g^4 - 3\omega^4 + 28\sqrt{-g^2(\omega^2 - 16g^2)}\omega^2 - 512\sqrt{-g^2(\omega^2 - 16g^2)}g^2 \right) \\ & \times \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - 8\sqrt{-g^2(\omega^2 - 16g^2)} - 32g^2}} (\omega^2 - 16g^2)^{-1} gz + O\left((gz)^2\right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Notamos dos autovalores acima que os modos  $h_{11}$ ,  $h_{33}$  e  $h_{13}$  podem ser oscilantes ou atenuados com exceção da solução dada pelos autovalores  $r_1$  e  $r_2$ . Para esses dois autovalores a onda sofrerá uma amplificação e uma atenuação, respectivamente. Todavia, tendo em vista a relação entre essas amplitudes e a amplitude  $h_{22}$  (sabendo que a mesma é propagante), dada

pelas condições de calibre (4.18) e (4.19), somos levados a descartar esses dois autovalores por não fornecerem soluções físicas, já que  $h_{11}$ ,  $h_{33}$  e  $h_{13}$  deveriam necessariamente ser propagantes.

Podemos notar da relação de dispersão, que a velocidade de fase,  $v_\phi$ , diminui para valores maiores de  $z$ . Podemos pensar que as ondas gravitacionais estão sendo freadas pelo campo gravitacional de fundo, sendo diferentes para cada valor do eixo  $z$  e diminuído à medida que  $z$  cresce.

Os outros quatro autovalores podem nos fornecer soluções propagantes, uma vez escolhida a relação adequada entre  $\omega$  e  $g$ .

# Conclusões e Perspectivas

No presente trabalho, foram desenvolvidos alguns aspectos da interação de campos escalares e ondas gravitacionais com um campo gravitacional de fundo no contexto da Relatividade Geral de Einstein. Investigamos alguns fenômenos físicos que ocorrem nas imediações de uma distribuição planar uniforme de massa usando como métrica de fundo a métrica de Taub. Analisamos a interação desses campos com o campo de fundo na finalidade de entender os modos de polarização, o vetor de onda e a velocidade nessa interação.

Primeiramente, obtemos a métrica de Taub, que é uma métrica planarmente simétrica e estática, partindo das equações de Einstein e considerando a métrica geral dada pela Eq. (2.5) e também o tensor energia-momento dado pela Eq. (2.9). Desconsideramos a constante cosmológica neste contexto. Vimos que a densidade de carga no plano infinito  $XY$  gera um plano singular em  $z_m$  e que até mesmo a luz quando se aproxima de  $z = z_+$ , perde toda a sua energia intrínseca, dada pela Eq. (2.37), retornando ao plano em  $z = 0$ . Isto é consistente e de acordo com essa interpretação, não há plano massivo na singularidade, mas sim um plano com massa positiva em  $z=0$  produzindo um campo gravitacional onde o espaço-tempo é curvado fora do plano.

Prosseguindo, investigamos a propagação de um campo escalar sem massa na presença da métrica de Taub. Buscamos sempre por soluções de campo propagante. Conseguimos encontrar uma solução exata para uma propagação perpendicular à distribuição de massa. No caso de uma propagação em uma direção qualquer, tivemos que nos restringir ao caso onde o campo gravitacional gerado pela distribuição de massa é pequeno. Encontramos, então, uma solução de campo propagante cuja amplitude cai exponencialmente com a distância à distribuição planar de massa. Utilizando a solução geral, das Figs. (3.1) e (3.2), vemos que a função  $J_0(\bar{z})$  tem sempre um valor finito, para qualquer  $\omega$ , na região entre o plano massivo e o plano singular, enquanto que a função de Bessel do segundo tipo  $N_0(\bar{z})$  decresce abruptamente nas proximidades do plano singular e vai para  $-\infty$  em  $\bar{z} = 1$ . Quanto menor for a frequência do campo escalar, mais cedo sua amplitude diminuirá, i.é., mais próximo do plano massivo. Calculamos a correspondente densidade de energia do campo. Em estudos futuros, poderemos analisar as relações entre  $\omega$  e  $k_{xy}$  nas equações de Bessel modificadas e, assim, obtermos informações físicas relevantes para o campo escalar quanto às suas frequências, entre outras.

Finalmente, para a interação das ondas gravitacionais com o campo gravitacional de fundo obtivemos as equações de movimento para o caso geral e para o caso com a métrica de Taub linearizada. Um dos resultados importantes para os modos de polarização é que a componente  $h_{22}$ , puramente perpendicular ao campo de fundo, é desacoplada dos outros modos e possui a solução já bem conhecida para a onda (4.26) e a relação de dispersão em primeira ordem para  $gz$  nesse caso é  $\omega = (1 + 3gz)k$ , em  $z = 0$  recuperamos  $\omega = k$ . Já os modos  $h_{12}$  e  $h_{23}$  estão acoplados através das equações (4.24) e (4.25), e concluímos que estes modos são propagantes, já que encontramos para a amplitude o caráter oscilatório.

Da mesma maneira, o modo puramente paralelo à propagação,  $h_{11}$ , o modo puramente perpendicular a propagação,  $h_{33}$ , e o modo  $h_{13}$ , estão acoplados através das equações (4.20) e

(4.22) e (4.23), e obtemos o interessante resultado de que esses também são, necessariamente, propagantes. Em um próximo estudo, poderemos tratar o caso de uma onda gravitacional que viaje não somente na direção  $x$ , mas também na direção de propagação do campo gravitacional de fundo, i.é., perpendicularmente à distribuição de massa. Como continuação natural desse resultado, devemos encontrar, futuramente, quais são os modos de propagação do campo gravitacional. Para isso devemos calcular as amplitudes do campo.

# Bibliografia

- [1] M. Born, Theory of Relativity of Einstein, Dover (New York, 1965), Introdução.
- [2] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, **5**, 1973.
- [3] Weinberg, 1972.
- [4] O. Gron, P. A. Amundsen, *General static plane-symmetric solutions of the Einstein-Maxwell equations*, Physical Review D, **27**, 1731, 1983.
- [5] T. Levi-Civita, Atti Accad. Naz. Rend. 27, 240, 1918.
- [6] E. Kasner, Trans. Amer. Math. Soc. 27, 155, 1925.
- [7] A. H. Taub, Ann. Math. 53, 472, 1951.
- [8] A. Das, J. Math. Phys. 12, 1136, 1971.
- [9] G. T. Carlson, thesis, 1977 (unpublished).
- [10] J. Novotny and J. Horsky, Scr. Fac. Sci. Nat. Univ. Purkynianae Brun. Phys. 7, 37, 1977.
- [11] J. Horsky and J. Novotny, Bull. Czech. Astron. Soc. 23, 266, 1972.
- [12] J. Novotny and J. Horsky, Czech. J. Phys. B24, 718, 1974.
- [13] J. Novotny, Scr. Fac. Sci. Nat. Univ. Purkynianae Brun. Phys. 5, 211, 1975.
- [14] U. K. De, Prog. Theor. Phys. 49, 1546, 1973.
- [15] J. Horsky, P. Lorene, and J. Novotny, Phys. Lett. 63A,
- [16] S. Chatterjee and S. Banerji, Int. J. Theo. Phys. +I, 599, 1980.
- [17] A. H. Taub, Phys. Rev. 103, 454, 1956.
- [18] A. H. Taub, in General Relativity: Papers in Honotr of J. L. Synge, editado por L. O'Raifeartaigh, Clarendon, Oxford, 133, 1972.
- [19] R. Tabensky and A. H. Taub, Commun. Math. Phys. 29, 61, 1973.
- [20] J. S. Shikin, Gen. Relativ. Gravit. 11, 411, 1979.
- [21] R. Tikekar, Indian J. Pure Appl. Math. 11, 1681, 1980.
- [22] P. Szekeres, Nature 228, 1183, 1970.

- [23] K. A. Khan and R. Penrose, *Nature* 229, 185, 1971.
- [24] M. J. Halil, *J. Math. Phys.* 20, 128, 1979.
- [25] B.J. Stoyanov, *Phys. Rev. D* 20, 2469, 1979.
- [26] C. McVittie, *Proc. R. Soc. London* 124, 366, 1929.
- [27] E. P. T. Liang, *Phys. Rev. D* 10, 447, 1974.
- [28] J. Horsky, *Czech. J. Phys.* B18, 569, 1968.
- [29] W. B. Bonnpr, *Phys. Lett.* 31A, 269, 1970.
- [30] M. E. Peskin e D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison Wesley, Reading, Mass, 1995.
- [31] W. Boyce, R. Diprima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 7<sup>a</sup> edição, 1999.