

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Um estudo sobre centros globais em sistemas planares

Bruno de Souza Rangel

Orientador: Prof. Dr. Fabio Scalco Dias

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 23 DE FEVEREIRO DE 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Um estudo sobre centros globais em sistemas planares

Bruno de Souza Rangel

Orientador: Prof. Dr. Fabio Scalco Dias

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

ITAJUBÁ – MG

23 DE FEVEREIRO DE 2024

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por me conceder a graça de concluir mais esta jornada.

Aos meus pais Antonio e Maria, pelo apoio e incentivo que foram o alicerce para as minhas realizações.

Ao meu irmão Breno, pela amizade e cumplicidade durante todos esses anos.

À minha namorada Luana, pelo seu amor incondicional e companheirismo durante todo esse período.

Ao meu professor e orientador Dr. Fabio Scalco Dias, pelas valiosas contribuições dadas durante todo o mestrado.

À Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI) e o seu corpo docente, que demonstraram estarem comprometidos com a qualidade e excelência do ensino.

E também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro durante o mestrado.

Resumo

Nesta dissertação, em um primeiro momento, mostramos que um sistema diferencial polinomial de ordem par não tem um centro global. Em seguida, caracterizamos todos os sistemas polinomiais de Liénard tendo um centro global na origem. Em particular, fornecemos uma expressão explícita de todos os sistemas polinomiais de Liénard de grau três com um centro global na origem. Por fim, classificamos todos os sistemas Kukles de grau três e de grau cinco com um centro global na origem.

Palavras-chave: Centro Global, Sistema de Liénard, Sistema Kukles, Compactificação de Poincaré, Blow-up.

Abstract

In this dissertation, firstly, we show that a polynomial differential system of even order does not have a global center. Next, we characterize all Liénard polynomial systems having a global center at the origin. In particular, we provide an explicit expression of all Liénard polynomial systems of degree three with a global center at the origin. Finally, we classify all degree three and degree five Kukles systems with a global center at the origin.

Keywords: Global Center, Liénard System, Kukles System, Poincaré Compactification, Blow-up.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Índice	iv
Lista de Figuras	vi
1 Introdução	1
2 Preliminares	8
2.1 Estrutura Local dos Pontos de Equilíbrio	8
2.2 Pontos de Equilíbrio Semi-Hiperbólicos	10
2.3 A Técnica do Blow-Up Homogêneo	12
2.4 A Técnica do Blow-up Quase-Homogêneo	15
2.5 A Compactificação de Poincaré	16
2.6 Campos Topologicamente Equivalentes	22
3 Centro Global de um Sistema Diferencial Polinomial de Grau Par	27
4 Centro Global de um Sistema de Liénard	32
4.1 A Caracterização de um Sistema de Liénard com um Centro Global	33

4.2	A Caracterização de um Sistema de Liénard de Grau Três com um Centro Global	36
5	Centro Global de um Sistema Kukles de Grau Três	41
5.1	A Caracterização de um Sistema Kukles com um Centro Global	41
5.1.1	Caso (a)	44
5.1.2	Caso (b)	51
5.1.3	Caso (c)	57
5.1.4	Caso (d)	57
6	Centro Global de um Sistema Kukles de Grau Cinco	59
6.1	A Caracterização de um Sistema Kukles com um Centro Global	59
6.1.1	Caso (a)	63
6.1.2	Caso (b)	66
6.1.3	Caso (c)	67
	Conclusões	68
	Referências Bibliográficas	69

Lista de Figuras

1.1	Os possíveis retratos de fase global de um sistema Kukles de grau três e de grau cinco com um centro global.	5
2.1	Comportamento topológico local de um ponto de equilíbrio semi-hiperbólico.	12
2.2	Projeção central.	17
2.3	Cartas locais sobre a esfera de Poincaré.	18
2.4	Setores de um ponto de equilíbrio.	24
2.5	h_1 é um setor hiperbólico não degenerado do ponto de equilíbrio infinito q_1 e h_2 é um setor hiperbólico degenerado do ponto de equilíbrio infinito q_2	24
3.1	Fluxo das órbitas numa vizinhança de $(U, V) = (0, 0)$	30
4.1	Blow-up da origem da carta local U_2 do sistema (4.8).	38
4.2	Blow-up da origem da carta local U_2 do sistema (4.8).	39
4.3	Blow-up da origem da carta local U_2 do sistema (4.8).	40
5.1	Os possíveis retratos de fase global de um sistema Kukles (5.1) com um centro global.	43
5.2	Diagrama apresentando todos os casos em que a origem do sistema (5.1) é um centro global.	44
5.3	Blow-up da origem da carta local U_2 do sistema (5.3) quando $a_6 > 0$ (acima) e quando $a_6 < 0$ (abaixo).	46
5.4	Blow-up da origem da carta local U_1 do sistema (5.3) quando $a_6 < 0$	47
5.5	Blow-up da origem da carta local U_2 do sistema (5.3) com $a_6 = 0$ e $a_3 \neq 0$	50

5.6	Blow-up da origem da carta local U_1 do sistema (5.17) com $-a_2^2/4 < a_6 < 0$ e $a_4 = 0$	53
5.7	Blow-up da origem da carta local U_1 do sistema (5.17) com $a_6 = -a_2^2/4$ e $a_4 = 0$	54
5.8	Blow-up da origem da carta local U_1 do sistema (5.17) com $a_6 = 0$ e $-a_2^2/8 < a_4 < 0$	56
5.9	Blow-up da origem da carta local U_1 do sistema (5.17) com $a_6 = 0$ e $a_4 = -a_2^2/8$	56
6.1	Diagrama apresentando todos os casos em que a origem do sistema (6.1) é um centro global.	61
6.2	Blow-up da origem da carta local U_2 do sistema (6.2) quando $a_5 > 0$ (acima) e quando $a_5 < 0$ (abaixo).	63
6.3	Blow-up da origem da carta local U_2 do sistema (6.5) quando $a_3 > 0$ (acima) e quando $a_3 < 0$ (abaixo).	65
6.4	Blow-up da origem da carta local U_2 do sistema (6.5).	66

Capítulo 1

Introdução

A Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias inicia-se com os trabalhos de Poincaré em 1881. Veja [23]. Dentro desta teoria, dizemos que um ponto de equilíbrio p , de um campo vetorial no plano real, é um centro, se existe uma vizinhança V com $V \setminus \{p\}$ preenchida por órbitas periódicas. Além disso, p é um centro global se $V = \mathbb{R}^2$, ou seja, todo o plano é preenchido por órbitas periódicas, com exceção do ponto de equilíbrio p . A noção de centro remonta dos manuscritos de Poincaré e Dulac. Veja [10] e [23].

Um dos problemas mais clássicos e trabalhosos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais no plano é a caracterização de centros, em particular os globais. Um programa sistemático de estudo sobre centro global em sistemas polinomiais planares foi iniciado por Conti e seus colaboradores. Veja [7].

Destacamos o importante problema colocado por Conti.

Problema 1.1. (*[7], Problema 14.1, página 228*) *Identificar todos os sistemas polinomiais de grau ímpar tendo um centro global.*

Existem diversos resultados na literatura sobre a caracterização de sistemas com um centro global. Sistemas diferenciais polinomiais homogêneos cúbicos com centro global foram caracterizados em [6]. Em [12], os autores classificaram centros globais de campos vetoriais da forma linear mais termos cúbicos homogêneos. A caracterização de centros globais para campos vetoriais da forma linear mais termos homogêneos de grau cinco foi dada em [18] e em [19].

É bem conhecido que qualquer sistema polinomial quadrático (ou seja, $n = 2$) não possui centro global. A prova deste resultado é bem extensa e baseia-se em classificar todos os centros dos sistemas quadráticos e depois verificar que não são centros globais. Veja [2], [3], [8], [24] e [26]. Mais recentemente, com técnicas mais modernas, os autores de [17] mostraram que sistemas diferenciais polinomiais de grau par não possuem centro global. Baseado no artigo [17], provaremos o seguinte teorema no Capítulo 3.

Teorema 1.1. *Considere o sistema diferencial polinomial de grau d*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.1)$$

O sistema (1.1), com d par, não possui centro global.

Em vista do Teorema 1.1 e do Problema 1.1, devemos voltar nossa atenção ao estudo de centro global para sistemas polinomiais de grau ímpar. Visto que isto não é uma tarefa fácil, apresentaremos um estudo de centro global para sistemas de grau ímpar particulares e conhecidos na literatura.

Desta forma, no Capítulo 4, estudaremos o centro global em um sistema de Liénard. Esse sistema foi estudado no fim da década de 1920 por Liénard, no estudo de oscilações não lineares de fenômenos elétricos. Liénard obteve equações especiais de segunda ordem para as quais ocorriam os ciclos limites, como havia idealizado Poincaré. Veja [15]. Nas últimas décadas, esse sistema tem sido estudado intensamente e não há dúvidas sobre a importância dele.

Considere a equação

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (1.2)$$

onde f e g são polinômios não nulos tal que $g(x) = x + g_2(x)$ com $g_2(0) = 0$ e $g_2'(0) = 0$. Como de costume, o ponto denota a derivada em relação ao tempo t .

A equação diferencial de segunda ordem (1.2) pode ser escrita como um sistema diferencial de primeira ordem,

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + g_2(x) - f(x)y \quad (1.3)$$

onde

$$g_2(x) = \sum_{j=2}^l a_j x^j, \quad f(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j,$$

com $a_l b_m \neq 0$.

O sistema (1.3) é chamado de sistema diferencial polinomial generalizado de Liénard ou simplesmente de **sistema de Liénard**.

Neste trabalho, nos dedicamos a caracterizar o sistema de Liénard de grau três com um centro global na origem. Este estudo foi baseado no artigo [16]. Em outras palavras, demonstraremos o seguinte teorema.

Teorema 1.2. *Todo sistema de Liénard de grau três que possui um centro global na origem, após um redimensionamento das variáveis x , y e um reescalonamento no tempo t , pode ser escrito como*

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + bx^3 - xy, \quad (1.4)$$

com $b > 1/8$.

Para a existência de um centro global, necessitamos primeiramente que a origem seja um centro. Esse estudo, por si só, já não é uma tarefa fácil, pois está relacionado com o famoso **problema foco-centro** da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Quando a linearização de um sistema, em um ponto de equilíbrio, tem autovalores com partes reais e imaginárias não nulas, o ponto de equilíbrio é um foco (atrator ou repulsor). Se, no entanto, os autovalores são imaginários puros, então a estabilidade do ponto de equilíbrio depende dos termos não lineares de uma forma não trivial.

Um método geral, devido a Poincaré e Lyapunov, reduz o problema foco-centro ao de resolver um sistema infinito de equações polinomiais. Grosseiramente falando, precisamos encontrar uma coleção de polinômios, chamados de **coeficientes de Lyapunov**, tais que a variedade algébrica do ideal gerado por esses polinômios caracteriza o centro. Um exemplo desse estudo, para o sistema conhecido na literatura como **sistema Kukles**, pode ser encontrado em [5] e [13].

Depois de caracterizar os centros locais, precisamos estudar as órbitas fora de partes compactas, ou seja, no disco de Poincaré. Apresentamos uma introdução desta teoria no

Capítulo 2.

Por fim, nos Capítulos 5 e 6, estudaremos o centro global em sistema Kukles. Este sistema foi estudado pela primeira vez, por Kukles, em 1944. Veja [14]. O sistema é dado por

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3 \quad (1.5)$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, 7$ e o ponto denota a primeira derivada em relação ao tempo t .

Nosso principal objetivo é encontrar condições, em termos dos coeficientes a_i , $i \in \{1, \dots, 7\}$, para que a origem seja um centro global. Este estudo foi estruturado de acordo com o artigo [9]. Desta forma, no Capítulo 5, provaremos o seguinte teorema.

Teorema 1.3. *A origem é um centro global do sistema Kukles (1.5) se, e somente se, alguma das seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a_7 = 0$ e $a_6 < 0$, e todos os retratos de fase global são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 1.1(b).
- (ii) $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 0$, e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 1.1(c).
- (iii) $a_2 = a_5 = a_7 = 0$, $a_6 < 0$ e $a_4 < -a_1^2/4$, e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 1.1(a).
- (iv) $a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = a_7 = 0$ e $a_4 < -a_1^2/4$ e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 1.1(a).
- (v) $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = 0$, $a_4 < 0$ e $a_6 < 0$, e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 1.1(a).
- (vi) $a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = a_7 = 0$ e $a_6 < -a_2^2/4$, e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 1.1(b).
- (vii) $a_1 = a_3 = a_5 = a_6 = a_7 = 0$ e $a_4 < -a_2^2/8$, e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 1.1(a).

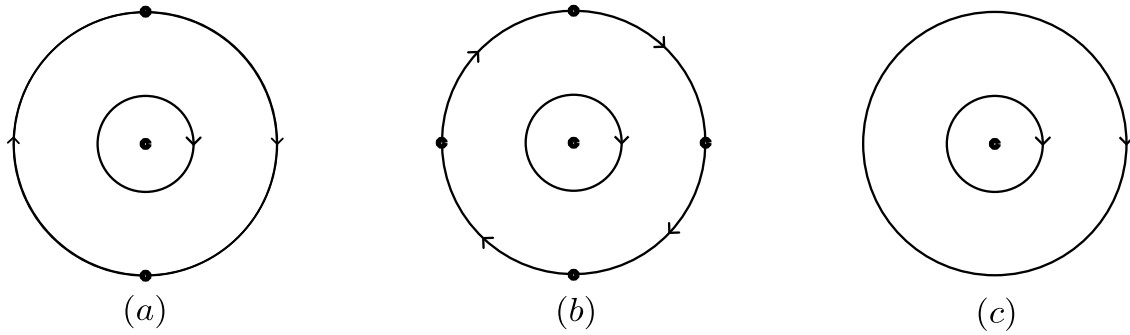


Figura 1.1: Os possíveis retratos de fase global de um sistema Kukles de grau três e de grau cinco com um centro global.

Através das técnicas vistas para o estudo de centro global, decidimos estudá-lo em um sistema Kukles com a segunda componente na forma linear mais termos homogêneos de grau cinco, ou seja, um sistema da forma

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + a_1x^5 + a_2x^4y + a_3x^3y^2 + a_4x^2y^3 + a_5xy^4 + a_6y^5 \quad (1.6)$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, 6$.

Nesta dissertação, chamaremos de **sistema Kukles de grau cinco** o sistema Kukles com a segunda componente na forma linear mais termos homogêneos de grau cinco, por simplicidade. Novamente, nosso objetivo é encontrar condições, em termos dos coeficientes a_i , $i \in \{1, \dots, 6\}$, para que a origem seja um centro global. Já iniciado o nosso estudo, encontramos o artigo [19], em que os autores determinam todos os retratos de fase global de um sistema Kukles da forma

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + Q_5(x, y),$$

onde $Q_5(x, y)$ é um polinômio homogêneo de grau cinco. Assim, basta olharmos dentre todos os possíveis retratos de fase, quais são centros globais. Independente dos resultados do artigo [19], obtivemos o seguinte teorema.

Teorema 1.4. *A origem é um centro global do sistema Kukles (1.6) se, e somente se, alguma das seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) $a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$ e $a_1, a_3 < 0$, e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 1.1(a).
- (ii) $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$ e $a_3 < 0$, e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 1.1(b).
- (iii) $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$ e $a_1 < 0$, e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 1.1(a).
- (iv) $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$, e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 1.1(c).

Em toda esta dissertação, consideramos conhecidos diversos conceitos e resultados básicos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Para mais detalhes sobre esses conceitos, consultar as excelentes referências [1], [11] e [25].

Utilizamos também, alguns softwares para geração das figuras tais como o Mathematica, o Inkscape e o P4.

Esta dissertação está estruturada da seguinte maneira:

- Capítulo 2: Apresentamos alguns conceitos preliminares como a estrutura local dos pontos de equilíbrio, a compactificação de Poincaré e o blow-up.
- Capítulo 3: Apresentamos a demonstração do Teorema 1.1. Este estudo foi baseado no artigo [17].
- Capítulo 4: Estudamos o centro global de um sistema de Liénard. Em particular, apresentamos a demonstração do Teorema 1.2. Este estudo foi baseado no artigo [16].
- Capítulo 5: Estudamos o centro global de um sistema Kukles de grau três. Em particular, apresentamos a demonstração do Teorema 1.3. Este estudo foi baseado no artigo [9].

- Capítulo 6: Estudamos o centro global de um sistema Kukles de grau 5. Em particular, apresentamos a demonstração do Teorema 1.4. Este estudo foi baseado no artigo [19].

Capítulo 2

Preliminares

Conforme dissemos na introdução, apresentaremos neste capítulo uma rápida revisão dos principais tópicos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias que serão utilizados em toda esta dissertação.

2.1 Estrutura Local dos Pontos de Equilíbrio

Para uma leitura mais aprofundada dos tópicos apresentados, recomendamos os livros [11] e [25].

Definição 2.1. *Seja p um ponto de equilíbrio do campo vetorial polinomial $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$. Dizemos que*

$$J(p) = \begin{pmatrix} P_x(p) & P_y(p) \\ Q_x(p) & Q_y(p) \end{pmatrix}$$

*é a **matriz Jacobiana** do campo X no ponto de equilíbrio p , $D(p) = P_x(p)Q_y(p) - P_y(p)Q_x(p)$ é o **determinante** da matriz Jacobiana e $T(p) = P_x(p) + Q_y(p)$ é o **traço** da matriz Jacobiana. Assim, os autovalores da matriz Jacobiana no ponto p satisfazem*

$$\lambda^2 - T(p)\lambda + D(p) = 0$$

e são dados por

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(T(p) - \sqrt{\Delta} \right) \quad e \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(T(p) + \sqrt{\Delta} \right)$$

onde $\Delta = T(p)^2 - 4D(p)$. Note que $T(p) = \lambda_1 + \lambda_2$ e $D(p) = \lambda_1\lambda_2$.

Definição 2.2. Dizemos que p é um ponto de equilíbrio:

- (i) **hiperbólico**, se ambos os autovalores de $J(p)$ possuem parte real não nula.
- (ii) **semi-hiperbólico**, se exatamente um autovalor de $J(p)$ é nulo.
- (iii) **nilpotente**, se ambos os autovalores de $J(p)$ são nulos, mas $J(p)$ é uma matriz cujas entradas são números reais não nulos.
- (iv) **linearmente nulo**, se $J(p)$ é uma matriz cujas entradas são nulas.

Agora, vamos definir os tipos de pontos de equilíbrio hiperbólicos a partir de $D(p)$ e $T(p)$.

Definição 2.3. Um ponto de equilíbrio hiperbólico p de X é chamado de **nó** se $D(p) \geq 0$ e $\Delta > 0$. Se $T(p) < 0$, p é dito ser um **nó atrator** e se $T(p) > 0$, um **nó repulsor**.

Definição 2.4. Um ponto de equilíbrio hiperbólico p de X é chamado de **sela** se $D(p) < 0$.

Definição 2.5. Um ponto de equilíbrio hiperbólico p de X é chamado de **foco** se $D(p) > 0$ e $\Delta < 0$. Se $T(p) < 0$, p é dito ser um **foco atrator** e se $T(p) > 0$, um **foco repulsor**.

Definição 2.6. Um ponto de equilíbrio p de X é chamado de **centro** se existe uma vizinhança V com $V \setminus \{p\}$ preenchida por órbitas periódicas. É chamado de **centro do tipo linear** se os autovalores de $J(p)$ são não nulos e imaginários puros.

Introduzimos a seguir a noção de conjugação topológica entre dois campos vetoriais, a qual permite comparar seus retratos de fase.

Definição 2.7. Sejam $\varphi_1: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\varphi_2: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ os fluxos gerados pelos campos $X_1: \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $X_2: \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, respectivamente. Dizemos que X_1 é **topologicamente conjugado** (resp. **C^r -conjugado**) a X_2 quando existe um homeomorfismo (resp. um difeomorfismo de classe C^r) $h: \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$ tal que $h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}^2$. O homeomorfismo h chama-se **conjugação topológica** (resp. **C^r -conjugação**) entre X_1 e X_2 .

O teorema a seguir diz que, localmente, em torno de um ponto regular, todo campo se comporta como um campo constante.

Teorema 2.1. (Fluxo Tubular) *Sejam $X: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial em um aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ e p um ponto regular de X . Então existe um difeomorfismo que conjuga X em uma vizinhança de p com o campo constante $Y = (1, 0)$ restrito a uma vizinhança da origem.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [25].

Por fim, o teorema a seguir garante que o comportamento numa vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico é sempre modelado pelo comportamento da parte linear do campo.

Teorema 2.2. (Hartman-Grobman) *Sejam $X: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial em um aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ e p um ponto de equilíbrio hiperbólico. Então, existem vizinhanças V de p em \mathcal{U} e W de 0 em \mathbb{R}^2 tais que $X|_V$ é topologicamente conjugado a $DX(p)|_W$.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [25].

2.2 Pontos de Equilíbrio Semi-Hiperbólicos

Tendo em vista o Teorema de Hartman-Grobman, podemos considerar satisfatório o conhecimento qualitativo local das órbitas de um campo vetorial em torno de pontos de equilíbrio hiperbólicos. No caso de pontos de equilíbrio semi-hiperbólicos, usaremos o Teorema 2.19, página 74, [11]. Este teorema é um resultado específico e muito útil para determinar o comportamento local numa vizinhança de um ponto de equilíbrio semi-hiperbólico.

Teorema 2.3. (Pontos de equilíbrio semi-hiperbólicos) *Seja $(0, 0)$ um ponto de equilíbrio isolado do campo vetorial X dado por*

$$\begin{cases} x' = A(x, y), \\ y' = \lambda y + B(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $\lambda > 0$ e A e B são funções analíticas em uma vizinhança de $(0,0)$, com seus desenvolvimentos de Taylor, começando, pelo menos, com termos quadráticos em x e y . Seja $y = f(x)$ uma solução da equação $\lambda y + B(x, y) = 0$ em uma vizinhança do ponto $(0,0)$ e suponha que a função $g(x) = A(x, f(x))$ tem a forma $a_m x^m + O(x^m)$, onde $m \geq 0$ e $a_m \neq 0$. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) Se m é ímpar e $a_m < 0$, então $(0,0)$ é topologicamente uma **sela**. Veja Figura 2.1

(a). O sistema (2.1) é C^∞ -conjugado a

$$\begin{cases} x' = -x^m(1 + ax^{m-1}), \\ y' = \lambda y, \end{cases} \quad (2.2)$$

e C^0 -conjugado a

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y. \end{cases} \quad (2.3)$$

(ii) Se m é ímpar e $a_m > 0$, então $(0,0)$ é topologicamente um **nó instável**. Veja Figura

2.1 (b). O sistema (2.1) é C^∞ -conjugado a

$$\begin{cases} x' = x^m(1 + ax^{m-1}), \\ y' = \lambda y, \end{cases} \quad (2.4)$$

e C^0 -conjugado a

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y. \end{cases} \quad (2.5)$$

(iii) Se m é par, então $(0,0)$ é uma **sela-nó**, ou seja, um ponto de equilíbrio cuja vizinhança é a união de um setor parabólico e dois hiperbólicos. Veja Figura 2.1 (c). O

sistema (2.1) é C^∞ -conjugado a

$$\begin{cases} x' = x^m(1 + ax^{m-1}), \\ y' = \lambda y, \end{cases} \quad (2.6)$$

e C^0 -conjugado a

$$\begin{cases} x' = x^2, \\ y' = y. \end{cases} \quad (2.7)$$

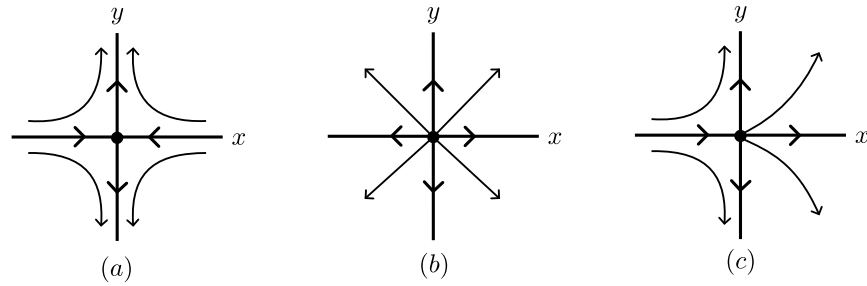


Figura 2.1: Comportamento topológico local de um ponto de equilíbrio semi-hiperbólico.

2.3 A Técnica do Blow-Up Homogêneo

Quando o ponto de equilíbrio p é linearmente nulo, ou seja, a matriz Jacobiana em p é nula, utilizaremos a técnica do blow-up para dessingularizar p . A técnica consiste em “explodir” o ponto de equilíbrio linearmente nulo por meio de uma mudança de variáveis, que não é um difeomorfismo, levando o ponto para algum dos eixos coordenados. Após a mudança de coordenadas, cancelamos os fatores em comum no campo, e então o novo campo apresenta novos pontos de equilíbrio no eixo, que serão mais simples que o ponto de equilíbrio original. Se esses novos pontos de equilíbrio forem linearmente nulos, repete-se o processo até obtermos pontos de equilíbrio elementares. As mudanças de variáveis que usaremos são

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (u, w) \end{aligned} \tag{2.8}$$

tal que:

- Na direção x , $x = u$ e $y = uw$.
- Na direção y , $x = uw$ e $y = w$.

Ao longo desta seção, tomaremos $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como um campo de vetores polinomial

com uma singularidade na origem, ou seja,

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (2.9)$$

com $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$.

Proposição 2.1. *Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como em (2.9). O campo, após a mudança de coordenadas (2.8), tem a seguinte expressão.*

- Na direção x ,

$$\begin{cases} \dot{u} = P(u, uw), \\ \dot{w} = \frac{Q(u, uw) - wP(u, uw)}{u}. \end{cases} \quad (2.10)$$

- Na direção y ,

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{P(uw, w) - uQ(uw, w)}{w}, \\ \dot{w} = Q(uw, w). \end{cases} \quad (2.11)$$

Demonstração. Obteremos apenas a expressão (2.10), já que na direção y a demonstração é análoga. Temos que $x = u$ e $y = uw$, logo $\dot{x} = \dot{u}$ e $\dot{y} = \dot{u}w + u\dot{w}$. Como $\dot{x} = P(x, y)$, segue que $\dot{u} = P(u, uw)$, e como $\dot{w} = (\dot{y} - \dot{u}w)/u$ e $\dot{y} = Q(x, y)$, segue que

$$\dot{w} = \frac{Q(u, uw) - wP(u, uw)}{u}$$

como queríamos. □

As proposições seguintes mostram algumas propriedades dessas mudanças de variáveis.

Proposição 2.2. *Seja T como em (2.8). Na direção x valem as seguintes afirmações:*

- (i) T transforma a origem na reta $u = 0$.
- (ii) A reta $y = ax$, com exceção da origem, é levada na reta $w = a$, com exceção da reta $u = 0$.
- (iii) O primeiro quadrante é levado no primeiro quadrante.

(iv) O quarto quadrante é levado no quarto quadrante.

(v) O segundo quadrante é levado no terceiro quadrante.

(vi) O terceiro quadrante é levado no segundo quadrante.

Demonstração. (i) Os pontos os quais a origem é levada satisfaz o sistema

$$\begin{cases} u = 0, \\ uw = 0, \end{cases}$$

cuja solução é a reta $u = 0$.

(ii) O conjunto de pontos $y = ax$ é levado em $uw = au$. Se $x \neq 0$, então $u \neq 0$ e assim $w = a$, como queríamos.

(iii) Se $x > 0$ e $y > 0$, então $u > 0$ e $w > 0$ e, portanto, o primeiro quadrante é levado no primeiro quadrante.

(iv) Se $x > 0$ e $y < 0$, então $u > 0$ e $w < 0$ e, portanto, o quarto quadrante é levado no quarto quadrante.

(v) Se $x < 0$ e $y > 0$, então $u < 0$ e $w < 0$ e, portanto, o segundo quadrante é levado no terceiro quadrante.

(vi) Se $x < 0$ e $y < 0$, então $u < 0$ e $w > 0$ e, portanto, o terceiro quadrante é levado no segundo quadrante.

□

Proposição 2.3. *Seja T como em (2.8). Na direção y valem as seguintes afirmações:*

(i) T transforma a origem na reta $w = 0$.

(ii) A reta $x = by$, com exceção da origem, é levada na reta $u = b$, com exceção da reta $w = 0$.

(iii) O primeiro quadrante é levado no primeiro quadrante.

(iv) O quarto quadrante é levado no terceiro quadrante.

(v) O segundo quadrante é levado no segundo quadrante.

(vi) O terceiro quadrante é levado no quarto quadrante.

Demonstração. A demonstração da Proposição 2.3 é análoga à da Proposição 2.2.

□

2.4 A Técnica do Blow-up Quase-Homogêneo

Embora a técnica do blow-up homogêneo aplicada de forma sucessiva seja suficiente para estudar as singularidades isoladas de um campo vetorial analítico, existe na literatura a chamada técnica do blow-up quase-homogêneo, uma extensão da técnica clássica. É muito útil, pois permite (geralmente) dessingularizar um ponto de equilíbrio linearmente nulo com menos etapas. Ver [1] e [11] para mais detalhes. As mudanças de variáveis são

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (u, w) \end{aligned} \tag{2.12}$$

tal que:

- Na direção positiva de x (resp. negativa), $x = u^\alpha$ e $y = u^\beta w$ (resp. $x = -u^\alpha$ e $y = u^\beta w$).
- Na direção positiva de y (resp. negativa), $x = uw^\alpha$ e $y = w^\beta$ (resp. $x = uw^\alpha$ e $-w^\beta$).

Os parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ são escolhidos convenientemente através do **diagrama de Newton**. Embora não tenhamos nos aprofundado neste estudo, o leitor poderá encontrar uma discussão sobre o assunto em [1] e [11]. Se α (resp. β) for ímpar, o blow-up na direção positiva de x (resp. y) também fornece informações do blow-up na direção negativa de x (resp. y). Se $\alpha = \beta = 1$ recuperamos a mudança de variáveis definida na Seção 2.3.

Além disso, se β for ímpar, então a mudança de variáveis na direção x troca o segundo e o terceiro quadrante; e se α é ímpar, a mudança de variáveis na direção y troca o terceiro e o quarto quadrante.

2.5 A Compactificação de Poincaré

A compactificação de Poincaré é utilizada para o estudo do comportamento no infinito de campos polinomiais e não somente em vizinhanças de pontos de equilíbrio.

Definição 2.8. *O grau do campo $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ é $d = \max\{n, m\}$, onde n e m são os graus dos polinômios P e Q , respectivamente.*

Considere a esfera

$$\mathbb{S}^2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\},$$

a qual chamaremos de **Esfera de Poincaré**, e o plano

$$T_{P_N}\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1\}$$

que é tangente a esfera \mathbb{S}^2 em $P_N = (0, 0, 1)$. Nesta seção, convencionaremos que as coordenadas y_i se referirão à esfera \mathbb{S}^2 e as coordenadas x_i ao plano $T_{P_N}\mathbb{S}^2$, $i = 1, 2, 3$.

Definição 2.9. *Definiremos*

$$H_+ = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 > 0\}$$

como sendo o hemisfério norte,

$$H_- = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 < 0\}$$

como sendo hemisfério sul e

$$\mathbb{S}^1 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 = 0\}$$

como sendo o equador.

A compactificação de Poincaré de X consiste em fazer duas cópias do fluxo de X , uma sobre H_+ e outra sobre H_- , usando a projeção central. Para isso, consideremos uma reta $L(t)$ que une a origem a um ponto de $T_{P_N}\mathbb{S}^2$,

$$L(t) = (0, 0, 0) + t(x_1, x_2, 1) = t(x_1, x_2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esta reta intercepta a esfera \mathbb{S}^2 em dois pontos, um no hemisfério norte e o outro no hemisfério sul. Ver Figura 2.2.

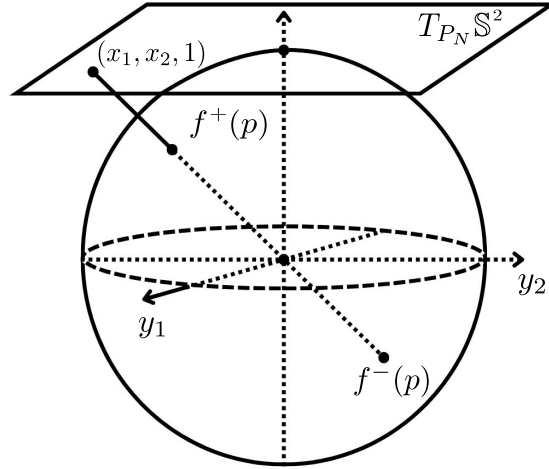


Figura 2.2: Projeção central.

Agora, considerando a projeção do campo vetorial X de $\mathbb{R}^2 \approx T_{P_N}\mathbb{S}^2$ para \mathbb{S}^2 dada pelas projeções centrais, temos dois difeomorfismos

$$f^+ : T_{P_N}\mathbb{S}^2 \rightarrow H_+ \quad \text{e} \quad f^- : T_{P_N}\mathbb{S}^2 \rightarrow H_-,$$

isto é, $f^+(p)$ (resp. $f^-(p)$) é a intersecção da reta que passa pelo ponto $p = (x_1, x_2, 1)$ ligando a origem com o hemisfério norte (resp. sul) de \mathbb{S}^2 , cujas expressões são dadas por

$$f^+(x_1, x_2, 1) = \frac{(x_1, x_2, 1)}{\Delta(x)} \quad \text{e} \quad f^-(x_1, x_2, 1) = -\frac{(x_1, x_2, 1)}{\Delta(x)}$$

onde $\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$.

Sem perda de generalidade, podemos considerar o campo X definido no plano tangente à esfera, isto é, $X : T_{P_N}\mathbb{S}^2 \rightarrow T_{P_N}\mathbb{S}^2$ e, assim, é possível definir um novo campo em \mathbb{S}^2 , ou seja, o campo \tilde{X} induzido em \mathbb{S}^2 , a partir de X , através dos difeomorfismos f^+ e f^- .

O campo \tilde{X} será dado por

$$\tilde{X}(y) = Df^+(x)X(x) \quad \text{se} \quad y = f^+(x) \in H^+$$

e

$$\tilde{X}(y) = Df^-(x)X(x) \quad \text{se} \quad y = f^-(x) \in H^-,$$

respectivamente.

Destacamos que \tilde{X} é um campo vetorial em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$, que é tangente à esfera. Para estudar o comportamento assintótico das órbitas não limitadas de X analisando \tilde{X} , é necessário estender \tilde{X} para o equador \mathbb{S}^1 obtendo, assim, um campo na esfera.

O estudo de \tilde{X} em uma vizinhança do equador nos dará informações sobre o comportamento do campo X no infinito. Entretanto, nem sempre é possível estender \tilde{X} ao equador. Veremos adiante que, quando X for um campo polinomial, podemos estender \tilde{X} analiticamente ao equador. Antes de estudar a extensão de \tilde{X} ao equador, vamos escolher um sistema de coordenadas conveniente para \mathbb{S}^2 e calcular a expressão de \tilde{X} nessas coordenadas.

Para \mathbb{S}^2 , usaremos seis cartas locais dadas por

$$U_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k > 0\}, \quad V_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k < 0\},$$

para $k = 1, 2, 3$. As aplicações locais correspondentes são dadas por $\phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\psi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ e definidas como

$$\phi_k(y) = -\psi_k(y) = \left(\frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k} \right),$$

para $m < n$ e $m, n \neq k$. Ver Figura 2.3.

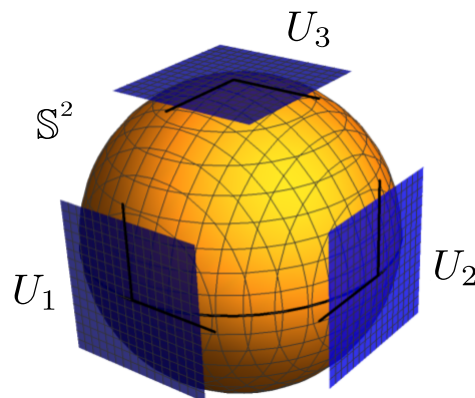


Figura 2.3: Cartas locais sobre a esfera de Poincaré.

Queremos agora encontrar a expressão do campo na carta local (U_1, ϕ_1) . Seja $y \in$

$U_1 \cap H_+$, então $y = f^+(x)$, $x \in T_{P_N} \mathbb{S}^2$ e

$$\begin{aligned} (\phi_1 \circ f^+)(x) &= \phi_1(f^+(x)) = \phi_1 \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) \\ &= \left(\frac{x_2}{\Delta(x)} \frac{\Delta(x)}{x_1}, \frac{1}{\Delta(x)} \frac{\Delta(x)}{x_1} \right) \\ &= \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right). \end{aligned}$$

Portanto, $\phi_1(x_1, x_2, 1) = (u, v)$, onde $u = x_2/x_1$ e $v = 1/x_1$. Observe que como $y \in U_1 \cap H_+$, então $x_1 \neq 0$. Como $\tilde{X}(y) = Df^+(x)X(x)$ quando $y = f^+(x)$, segue que

$$\begin{aligned} D\phi_1(y)\tilde{X}(y) &= D\phi_1(y) \circ Df^+(x)X(x) \\ &= D(\phi_1 \circ f^+)(x)X(x). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Considere $\tilde{X}(y)|_{U_1 \cap H_+}$ denotando o sistema de coordenadas definido como $D\phi_1(y)\tilde{X}(y)$ e, portanto, segue da equação (2.13) que

$$\begin{aligned} \tilde{X}(y)|_{U_1 \cap H_+} &= D(\phi_1 \circ f^+)(x)X(x) = \begin{pmatrix} -x_2/x_1^2 & 1/x_1 \\ -1/x_1^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_1^2} (-x_2P(x_1, x_2) + x_1Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)). \end{aligned}$$

Esta é a expressão de \tilde{X} em $U_1 \cap H_+$, nas coordenadas ϕ_1 . Vamos colocá-las em função de u e v para facilitar a análise. Tomando $x_1 = 1/v$, $x_2 = u/v$ e substituindo na equação acima, temos

$$\tilde{X}(y)|_{U_1 \cap H_+} = \left[-uvP \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + vQ \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right), -v^2P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right].$$

Em geral, \tilde{X} não permanece limitado quando nos aproximamos de \mathbb{S}^1 . Mas, se multiplicarmos o campo pelo fator $\rho(y) = y_3^{d-1}$, onde d é o grau do campo X , a extensão se torna possível. Então,

$$\rho(f^+(x)) = \frac{1}{\Delta(x)^{d-1}} = \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}},$$

onde $z = (u, v)$. Assim, $\rho\tilde{X}$ nas coordenadas (u, v) é dado por

$$\begin{aligned} \rho\tilde{X}(u, v) &= \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}} \left(-uvP \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + vQ \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right), -v^2P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right) \\ &= \frac{v^d}{\Delta(z)^{d-1}} \left(-uP \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + Q \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right), -vP \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Logo, (2.14) é a expressão do campo em $U_1 \setminus \mathbb{S}^1$. Verifica-se, facilmente que se $y \in U_1 \cap H_-$, obtém-se a mesma expressão.

Faremos agora, algumas considerações a respeito do que foi visto. Inicialmente, observamos que os pontos do equador $\mathbb{S}^1 \cap U_1$ são representados por $v = 0$ nas coordenadas ϕ_1 . Por outro lado, estes pontos correspondem ao infinito do plano $T_{P_N}\mathbb{S}^2$. Observe também, que é possível fazer $v = 0$ na expressão (2.14), resultando em

$$\rho\tilde{X}(u, 0) = (-uP_d + Q_d, 0),$$

onde P_d e Q_d são os termos de maior grau em P e Q , respectivamente. Na expressão de $\rho\tilde{X}(u, 0)$ temos a segunda componente do vetor igual a zero. Isto significa que o vetor $\rho\tilde{X}(u, 0)$ é tangente ao equador quando olhado na esfera \mathbb{S}^2 . Podemos concluir então, que o equador $\mathbb{S}^1 \cap U_1$ é invariante pelo campo $\rho\tilde{X}$.

Não é difícil remover o fator $1/\Delta(z)^{d-1}$ de (2.14), através de um reescalonamento no tempo. Assim, a expressão para o campo $\rho\tilde{X}$ na carta local (U_1, ϕ_1) é dada por

$$\begin{cases} \dot{u} = v^d \left[-uP \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + Q \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right], \\ \dot{v} = -v^{d+1}P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right). \end{cases} \quad (2.15)$$

Podemos calcular, analogamente, a expressão do campo $\rho\tilde{X}$ na carta (U_2, ϕ_2) , que será dada por

$$\begin{cases} \dot{u} = v^d \left[P \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) - uQ \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) \right], \\ \dot{v} = -v^{d+1}Q \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right). \end{cases} \quad (2.16)$$

Finalmente, a expressão do campo $\rho\tilde{X}$ na carta (U_3, ϕ_3) é dada por

$$\begin{cases} \dot{u} = P(u, v), \\ \dot{v} = Q(u, v). \end{cases} \quad (2.17)$$

Observação 2.1. *As expressões para $\rho\tilde{X}$ nas cartas (V_1, ψ_1) , (V_2, ψ_2) e (V_3, ψ_3) terão, respectivamente, as mesmas expressões que (2.15), (2.16) e (2.17) multiplicadas por $(-1)^{d-1}$. Observe que o fator $(-1)^{d-1}$ desempenha um papel fundamental no estudo das estabilidades dos pontos de equilíbrio em \mathbb{S}^1 . Assim, para conhecermos o comportamento dos pontos do infinito, basta olharmos as cartas (U_1, ϕ_1) e (U_2, ϕ_2) .*

Proposição 2.4. *Seja X um campo polinomial em \mathbb{R}^2 de grau d e defina $\rho : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como $\rho(y) = y_3^{d-1}$. Considere \tilde{X} o campo induzido em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ através de f^+ e f^- como definido acima. Então, $\rho\tilde{X}$ pode ser estendido a um campo analítico de \mathbb{S}^2 com equador invariante.*

Demonstração. Vimos acima que as expressões de $\rho\tilde{X}$ nas cartas

$$(U_1, \phi_1), \quad (V_1, \psi_1), \quad (U_2, \phi_2) \quad \text{e} \quad (V_2, \psi_2)$$

são dadas por (2.15) e (2.16), respectivamente, onde podemos ainda multiplicar pelo fator $(-1)^{d-1}$, quando for o caso. Note que as expressões (2.15) e (2.16) estão bem definidas para $v = 0$, isto é, no equador \mathbb{S}^1 , e como tais expressões são analíticas, podemos estendê-las analiticamente ao equador. Tomando $v = 0$ em (2.15) e (2.16), obtemos respectivamente

$$\rho\tilde{X}(u, 0) = (-uP_d + Q_d, 0) \quad \text{e} \quad \rho\tilde{X}(u, 0) = (P_d, 0),$$

concluindo que o equador será invariante por \tilde{X} .

□

Definição 2.10. *O campo vetorial estendido na esfera \mathbb{S}^2 pelas cartas locais (U_k, ϕ_k) e (V_k, ψ_k) , chama-se **compactificação de Poincaré** de X e será indicado por $\mathcal{P}(X)$.*

Definição 2.11. *A projeção de $H_+ \cup \mathbb{S}^1$ em \mathbb{R}^2 é chamada de **disco de Poincaré**.*

Definição 2.12. *Chamamos de **pontos de equilíbrio finitos** de X , os pontos de equilíbrio de $\mathcal{P}(X)$ em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$.*

Definição 2.13. *Chamamos de **pontos de equilíbrio infinitos** de X , os pontos de equilíbrio de $\mathcal{P}(X)$ em \mathbb{S}^1 .*

Vejam alguns resultados para pontos de equilíbrio infinitos. Já observamos que os pontos de equilíbrio infinitos são da forma $(u, 0)$. Podemos escrever as componentes P e Q do campo X da seguinte forma,

$$P(x, y) = P_m(x, y) + \cdots + P_d(x, y) \quad \text{e} \quad Q(x, y) = Q_m(x, y) + \cdots + Q_d(x, y)$$

onde P_j e Q_j são polinômios homogêneos de grau j de P e Q , com $j = m, \dots, d$ e $m > 0$.

Proposição 2.5. *Seja $X = (P, Q)$ um campo vetorial polinomial em \mathbb{R}^2 . As seguintes afirmações são verdadeiras.*

a) $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ é um ponto de equilíbrio infinito de $\mathcal{P}(X)$ se, e somente se,

$$F_1(u) \equiv Q_d(1, u) - uP_d(1, u) = 0.$$

b) $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$ é um ponto de equilíbrio infinito de $\mathcal{P}(X)$ se, e somente se,

$$F_2(u) \equiv Q_d(u, 1) - uP_d(u, 1) = 0.$$

Demonstração. No item a), considere o campo $\mathcal{P}(X)$ na carta (U_1, ϕ_1) . Da expressão dada em (2.15), temos que

$$\lim_{v \rightarrow 0} v^d \left[-uP \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) + Q \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) \right] = Q_d(1, u) - uP_d(1, u).$$

(\Rightarrow) Assumindo que $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ é um ponto de equilíbrio infinito de $\mathcal{P}(X)$, então $-uP_d(1, u) + Q_d(1, u) = 0$.

(\Leftarrow) Agora, assumimos que $F_1(u) = 0$. Da expressão (2.15), temos que

$$\lim_{v \rightarrow 0} -v^{d+1} P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) = 0.$$

Logo, $(u, 0)$ é um ponto de equilíbrio de $\mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$.

No item b), a prova para o caso $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$ é análoga. □

2.6 Campos Topologicamente Equivalentes

Veremos como caracterizar os retratos de fase global no disco de Poincaré de sistemas diferenciais polinomiais.

Definição 2.14. *Dizemos que dois campos vetoriais polinomiais X e Y são topologicamente equivalentes se existir um homeomorfismo em \mathbb{S}^2 preservando o infinito \mathbb{S}^1 e levando órbitas do fluxo induzido em $\mathcal{P}(X)$ em órbitas do fluxo induzido em $\mathcal{P}(Y)$, preservando ou invertendo, simultaneamente, o sentido de todas as órbitas.*

Uma **separatriz** de um campo vetorial $\mathcal{P}(X)$ no disco de Poincaré pode ser:

- Todas as órbitas de $\mathcal{P}(X)$ que estão na fronteira \mathbb{S}^1 do disco de Poincaré.
- Todos os pontos singulares finitos de $\mathcal{P}(X)$.
- Todos os ciclos limites de $\mathcal{P}(X)$.
- Todas as separatrizes de setores hiperbólicos dos pontos singulares finitos e infinitos de $\mathcal{P}(X)$.

Denotamos por $\mathcal{S}(\mathcal{P}(X))$ o conjunto formado por todas as separatrizes de $\mathcal{P}(X)$. Cada componente conexa de $\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{S}(\mathcal{P}(X))$ é chamada de **região canônica** de $\mathcal{P}(X)$. A união de $\mathcal{S}(\mathcal{P}(X))$ com uma solução escolhida (representante) de cada região canônica será chamada de **configuração de separatriz**.

Definição 2.15. *Dizemos que $\mathcal{S}(\mathcal{P}(X))$ e $\mathcal{S}(\mathcal{P}(Y))$ são equivalentes se existir um homeomorfismo em \mathbb{S}^2 preservando o infinito \mathbb{S}^1 e levando órbitas de $\mathcal{S}(\mathcal{P}(X))$ em órbitas de $\mathcal{S}(\mathcal{P}(Y))$, preservando ou invertendo, simultaneamente, o sentido de todas as órbitas.*

O seguinte teorema é devido a Markus [20], Neumann [21] e Peixoto [22].

Teorema 2.4. *Os retratos de fase no disco de Poincaré de dois sistemas diferenciais polinomiais compactificados $\mathcal{P}(X)$ e $\mathcal{P}(Y)$, com pontos singulares isolados, são topologicamente equivalentes se, e somente se, suas configurações de separatrizes $\mathcal{S}(\mathcal{P}(X))$ e $\mathcal{S}(\mathcal{P}(Y))$ são topologicamente equivalentes.*

A seguir, sem entrar em muitos detalhes, apresentaremos o conceito de setores de um ponto de equilíbrio.

Definição 2.16. *Chamamos de **setor elíptico**, **setor parabólico** e **setor hiperbólico** de um ponto de equilíbrio, um setor que é topologicamente equivalente ao setor mostrado na Figura 2.4 (a), (b) e (c), respectivamente.*

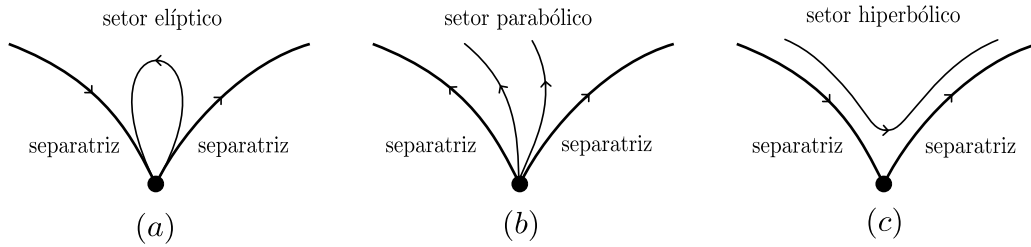


Figura 2.4: Setores de um ponto de equilíbrio.

Definição 2.17. *Seja q um ponto de equilíbrio infinito e seja h um setor hiperbólico de q . Dizemos que h é **degenerado** se suas duas separatrizes estão na fronteira do disco de Poincaré, ou seja, em \mathbb{S}^1 . Caso contrário, dizemos que h é um setor hiperbólico não degenerado. Veja a Figura 2.5.*

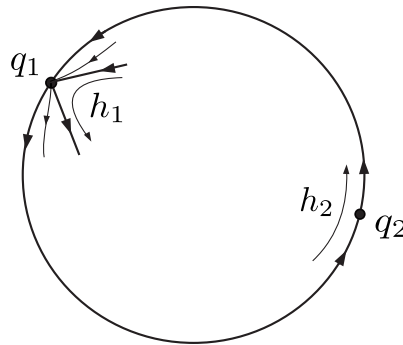


Figura 2.5: h_1 é um setor hiperbólico não degenerado do ponto de equilíbrio infinito q_1 e h_2 é um setor hiperbólico degenerado do ponto de equilíbrio infinito q_2 .

Considere um sistema diferencial polinomial em \mathbb{R}^2 com um único ponto de equilíbrio finito, que é um centro e cujo o \mathbb{S}^1 não é preenchido por pontos de equilíbrio. O resultado a seguir caracteriza quando este centro é global.

Proposição 2.6. *Considere um sistema diferencial polinomial em \mathbb{R}^2 com um único ponto de equilíbrio finito, que é um centro e cujo o \mathbb{S}^1 não é preenchido por pontos de equilíbrio. Então este centro é global se, e somente se, todos os pontos de equilíbrio infinitos,*

se existirem, forem tais que seus retratos de fase local sejam formados por dois setores hiperbólicos degenerados.

Demonstração. Assuma que o sistema diferencial polinomial em \mathbb{R}^2 tem um único ponto de equilíbrio finito, que é um centro e que este é global. Então o limite externo das órbitas periódicas deste centro é o \mathbb{S}^1 . Consequentemente, como o \mathbb{S}^1 não é preenchido por pontos de equilíbrio, se existe algum ponto de equilíbrio infinito, este deve ser formado por dois setores hiperbólicos degenerados.

Agora, suponha que o sistema diferencial polinomial em \mathbb{R}^2 tem um único ponto de equilíbrio finito, que é um centro, e que todos os pontos de equilíbrio infinitos, se existirem, são tais que seus retratos de fase local são formados por dois setores hiperbólicos degenerados. Em seguida, considere uma órbita periódica do centro. Seu limite interno é o centro e o seu limite externo γ é uma curva homeomorfa a um círculo. Se o círculo γ está contido em \mathbb{R}^2 , visto que o único ponto de equilíbrio finito é um centro, então γ deve ser uma órbita periódica, mas afirmamos que isso não é possível, ou seja, o círculo γ não está contido em \mathbb{R}^2 .

De fato, considere uma seção transversal local Σ à órbita periódica γ e a aplicação de Poincaré π definida em Σ . Então π , na órbita periódica, é a identidade. Uma vez que π é uma função analítica de uma variável, pois o sistema diferencial polinomial é um sistema diferencial analítico, segue que π também é a identidade fora da órbita periódica. Então γ está contido no interior da órbita periódica, uma contradição. Portanto, a afirmação está provada.

Como o círculo γ não pode estar contido em \mathbb{R}^2 , o seu limite externo deve conter alguns pontos de \mathbb{S}^1 , mas como todos os pontos de equilíbrio infinitos, se existirem, possuem seus retratos de fase local formados por dois setores hiperbólicos degenerados, então γ é o próprio \mathbb{S}^1 . Portanto, o centro é global.

□

Proposição 2.7. *Um ponto de equilíbrio infinito q formado por dois setores hiperbólicos degenerados, tem a matriz Jacobiana no ponto q identicamente nula.*

Demonstração. A prova dessa proposição segue da observação que todos os retratos de

fase locais de pontos de equilíbrio hiperbólicos, semi-hiperbólicos e nilpotentes estão completamente entendidos. Veja os Capítulos 2, 3 e os Teoremas 2.5, 2.19 e 3.5 de [11]. Como nenhum desses retratos tem um ponto de equilíbrio formado por dois setores hiperbólicos degenerados, concluimos que a matriz Jacobiana é nula.

□

Capítulo 3

Centro Global de um Sistema

Diferencial Polinomial de Grau Par

Sabemos que qualquer sistema polinomial quadrático (ou seja, $n = 2$) não possui centro global. A prova deste resultado baseia-se em classificar todos os centros dos sistemas quadráticos e depois verificar que não são centros globais. Mostraremos agora, que sistemas diferenciais polinomiais de grau par não possuem centro global.

Teorema 3.1. *Considere o sistema diferencial polinomial de grau d*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (3.1)$$

O sistema (3.1), com d par, não tem centro global.

Demonstração. Fixaremos a seguinte notação,

$$G_d(x, y) = yP_d(x, y) - xQ_d(x, y).$$

Sabemos, pela Proposição 2.5, que os pontos de equilíbrio infinitos do sistema (3.1) correspondem aos fatores lineares que dividem $G_d(x, y)$. Separamos a prova do Teorema 3.1 em duas partes, tratando dos casos em que $G_d \not\equiv 0$ e $G_d \equiv 0$.

Caso 1: $G_d \not\equiv 0$

Primeiro, vamos tratar do caso em que $G_d(x, y)$ não é o polinômio identicamente nulo. Faremos a prova por contradição. Assuma que o sistema (3.1) com grau par tem um centro global e $G_d(x, y) \not\equiv 0$. Sabemos que todo polinômio homogêneo de grau d pode ser fatorado como

$$\prod_{i=1}^{r_1} (a_i x + b_i y)^{l_i} \prod_{k=0}^{r_2} (\alpha_k x^2 + \beta_k xy + \gamma_k y^2)^{j_k}$$

onde $l_i \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, r_1$, $j_k \geq 0$ e $\beta_k^2 - 4\alpha_k \gamma_k < 0$ para $k = 0, \dots, r_2$ e $\sum_{i=1}^{r_1} l_i + \sum_{k=0}^{r_2} 2j_k = d$.

Como $G_d(x, y) \not\equiv 0$, temos que o equador da esfera de Poincaré não é formado apenas por pontos de equilíbrio. Assim, por uma rotação de coordenada em relação à origem, podemos assumir que todos os pontos de equilíbrio no infinito estão nas cartas $U_1 \cup V_1$. Introduzimos a seguinte notação,

$$G_{d-k}(x, y) = yP_{d-k}(x, y) - xQ_{d-k}(x, y), \quad k = 0, 1, \dots, d.$$

Escrevendo o sistema (3.1) na carta U_1 , obtemos

$$\begin{cases} \dot{u} = -G_d(1, u) + vG_{d-1}(1, u) + \dots + v^{d-1}G_0(1, u), \\ \dot{v} = -vP_d(1, u) - v^2P_{d-1}(1, u) - \dots - v^dP_0(1, u). \end{cases} \quad (3.2)$$

Considere $(\bar{u}, 0)$ um ponto de equilíbrio na carta U_1 , o qual existe pois G_d tem grau $(d+1)$ (ímpar), isto é $G_d(1, \bar{u}) = 0$. A matriz Jacobiana associada ao sistema (3.2) e aplicada no ponto $(\bar{u}, 0)$ é dada por

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial G_d}{\partial u}(1, \bar{u}) & G_{d-1}(1, \bar{u}) \\ 0 & -P_d(1, \bar{u}) \end{bmatrix}.$$

Como estamos assumindo que temos um centro global, pela Proposição 2.6, o ponto $(\bar{u}, 0)$ deve ser formado por dois setores hiperbólicos degenerados. Pela Proposição 2.7, a matriz Jacobiana no ponto deve ser linearmente nula, ou seja, temos que $G_d(1, \bar{u}) = 0$ e $\partial G_d(1, \bar{u})/\partial u = 0$, o que implica que o ponto $(\bar{u}, 0)$ deve ter multiplicidade dois como raiz do polinômio $G_d(1, u)$. Logo, G_d tem um fator linear real, com pelo menos multiplicidade

dois e, assim, podemos reescrever G_d da seguinte forma

$$G_d = \prod_{i=1}^{r_1} (a_i x + b_i y)^{l_i} \prod_{k=0}^{r_2} (\alpha_k x^2 + \beta_k xy + \gamma_k y^2)^{j_k} \quad (3.3)$$

onde $l_i \geq 2$ para todo $i = 1, \dots, r_1$, $j_k \geq 0$ e $\beta_k^2 - 4\alpha_k\gamma_k < 0$ para $k = 0, \dots, r_2$ e $\sum_{i=1}^{r_1} l_i + \sum_{k=0}^{r_2} 2j_k = d + 1$.

Como o grau de G_d é ímpar, existe pelo menos um $i \in \{1, \dots, r_1\}$ tal que l_i é ímpar, pois, caso contrário, G_d teria grau par. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que tal l_i ocorre para $i = 1$. Assim, devemos ter l_1 ímpar e $l_1 \geq 3$. Então,

$$G_d(x, y) = (a_1 x + b_1 y)^{l_1} \prod_{i=2}^{r_1} (a_i x + b_i y)^{l_i} \prod_{k=0}^{r_2} (\alpha_k x^2 + \beta_k xy + \gamma_k y^2)^{j_k}. \quad (3.4)$$

Como assumimos que todos os pontos de equilíbrio no infinito estão nas cartas $U_1 \cup V_1$, então $b_1 \neq 0$. Na carta U_1 , o polinômio homogêneo $G_d(x, y)$, dado em (3.4), se escreve como

$$G_d(1, u) = (a_1 + b_1 u)^{l_1} \prod_{i=2}^{r_1} (a_i + b_i u)^{l_i} \prod_{k=0}^{r_2} (\alpha_k + \beta_k u + \gamma_k u^2)^{j_k}.$$

Introduzindo uma nova variável, $a_1 + b_1 u = U$ em $G_d(1, u)$, obtemos que

$$G_d\left(1, \frac{U - a_1}{b_1}\right) = U^{l_1} \Gamma + \dots, \quad (3.5)$$

onde

$$\Gamma = \prod_{i=2}^{r_1} \left(\frac{a_i b_1 - b_i a_1}{b_1}\right)^{l_i} \prod_{k=0}^{r_2} \left(\frac{\alpha_k b_1^2 - \beta_k a_1 b_1 + \gamma_k a_1^2}{b_1^2}\right)^{j_k} \neq 0,$$

pois $U = 0$ tem exatamente multiplicidade l_1 e \dots representa os termos de ordens superiores, na variável U .

Considerando as novas variáveis $(U, v = V)$, segue de (3.2) e (3.5) que o sistema na carta local U_1 , restrito a $V = 0$, pode ser escrito como

$$\dot{U}|_{v=0} = -(U^{l_1} \Gamma + \dots), \quad \dot{V}|_{v=0} = 0,$$

ou seja, o eixo U é invariante. Como l_1 é ímpar, no semi eixo positivo $\{U > 0, V = 0\}$, numa vizinhança de $(U, V) = (0, 0)$, as órbitas fluem no sentido oposto às órbita no semi-eixo negativo $\{U < 0, V = 0\}$. Veja a Figura 3.1.

Assim o ponto $(U, V) = (0, 0)$ não pode ser formado por dois setores hiperbólicos degenerados. Isso contradiz a nossa suposição que o sistema (3.1) tem um centro global.

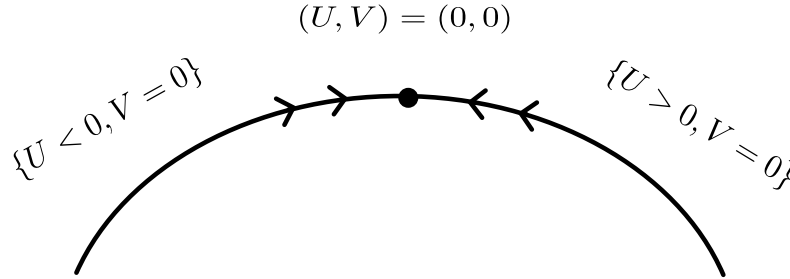


Figura 3.1: Fluxo das órbitas numa vizinhança de $(U, V) = (0, 0)$.

Caso 2: $G_d \equiv 0$

Considere que $G_d(x, y)$ é um polinômio identicamente nulo. Faremos essa parte da prova por contradição novamente. Assuma que o sistema (3.1) tem um centro global e $G_d(x, y) \equiv 0$.

Como $G_d(x, y) \equiv 0$, temos que o equador da esfera de Poincaré é formada apenas por pontos de equilíbrio e que $yP_d(x, y) = xQ_d(x, y)$. Assim, existe um polinômio $R_d(x, y)$ de grau $d - 1$ ímpar tal que

$$P_d(x, y) = xR_d(x, y) \quad \text{e} \quad Q_d(x, y) = yR_d(x, y).$$

Escrevendo o sistema (3.1) na carta U_1 , obtemos

$$\begin{cases} \dot{u} = vG_{d-1}(1, u) + \cdots + v^{d-1}G_0(1, u), \\ \dot{v} = -vR_d(1, u) - v^2P_{d-1}(1, u) - \cdots - v^dP_0(1, u). \end{cases} \quad (3.6)$$

Como já sabíamos, a reta no infinito $v = 0$ é formada por pontos de equilíbrio. Fazendo um reescalonamento na variável temporal da forma $ds = vdt$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = G_{d-1}(1, u) + vG_{d-2}(1, u) + \cdots + v^{d-2}G_0(1, u), \\ \dot{v} = -R_d(1, u) - vP_{d-1}(1, u) - \cdots - v^{d-1}P_0(1, u). \end{cases} \quad (3.7)$$

Como $R_d(x, y)$ é um polinômio de grau $d - 1$ (ímpar), temos que $R_d(1, u) \not\equiv 0$. Assim, existe \bar{u} tal que $R_d(1, \bar{u}) \neq 0$. Em outras palavras, temos que o ponto $(\bar{u}, 0)$ é um ponto regular do sistema (3.7). Por outro lado, temos que

$$\dot{v}|_{v=0} = -R_d(1, u) \not\equiv 0 \quad \text{e} \quad \dot{v}|_{(v=0, u=\bar{u})} = -R_d(1, \bar{u}) \neq 0,$$

e como $(\bar{u}, 0)$ é um ponto de equilíbrio do sistema (3.6), então $(\bar{u}, 0)$ é α -limite ou ω -limite de alguma órbita desse sistema. Isso contradiz novamente a nossa suposição que o sistema (3.1) tem um centro global.

□

Capítulo 4

Centro Global de um Sistema de Liénard

Neste capítulo, apresentamos o sistema de Liénard e caracterizamos este sistema com um centro global. Considere a equação diferencial de segunda ordem

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (4.1)$$

onde f e g são polinômios não nulos tal que $g(x) = x + g_2(x)$ com $g_2(0) = 0$ e $g_2'(0) = 0$. Como de costume, o ponto denota a primeira derivada em relação ao tempo t . A equação (4.1) pode ser escrita como um sistema diferencial de primeira ordem,

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + g_2(x) - f(x)y \quad (4.2)$$

onde

$$g_2(x) = \sum_{j=2}^l a_j x^j, \quad f(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j,$$

com $a_l b_m \neq 0$. Claramente, a origem é um ponto de equilíbrio do sistema (4.2). O sistema (4.2) é chamado de sistema diferencial polinomial generalizado de Liénard ou simplesmente de **sistema de Liénard**.

4.1 A Caracterização de um Sistema de Liénard com um Centro Global

O teorema a seguir se encontra em [4] e caracteriza de forma algébrica e efetiva o sistema de Liénard (4.2) com um centro do tipo linear na origem.

Teorema 4.1. *O sistema de Liénard (4.2), com $f(x)$ e $g(x)$ polinômios reais e $g(0) = 0$ e $g'(0) > 0$, possui um centro do tipo linear na origem se, e somente se, existem polinômios reais h , f_1 e g_1 tais que*

$$f(x) = f_1(h(x))h'(x), \quad g(x) = g_1(h(x))h'(x),$$

com $h'(0) = 0$ e $h''(0) \neq 0$.

A prova deste resultado utiliza ferramentas algébricas bastante específicas e não foram estudadas nesta dissertação. Apenas utilizaremos o resultado. O principal teorema deste capítulo será apresentado a seguir. O Teorema 4.2 caracteriza o sistema de Liénard (4.2) com um centro global na origem e sua prova consiste em utilizar o Teorema 4.1 para entender o centro na origem e as Proposições 2.6 e 2.7 para entender o infinito.

Teorema 4.2. *O sistema de Liénard (4.2), com $f(x)$ e $g(x)$ tal que $g(0) = 0$ e $g'(0) > 0$, possui um centro global na origem se, e somente se, as seguintes condições são válidas:*

(i) *A única raiz real do polinômio g é $x = 0$.*

(ii) *Existem polinômios reais h , f_1 e g_1 tais que*

$$f(x) = f_1(h(x))h'(x), \quad g(x) = g_1(h(x))h'(x),$$

com $h'(0) = 0$ e $h''(0) \neq 0$.

(iii) *$\text{grau}(g) = l$ é ímpar e $\text{grau}(g) > 1 + \text{grau}(f)$.*

(vi) *O retrato de fase local do ponto de equilíbrio localizado na origem do sistema*

$$\dot{u} = uv^{l-1}f\left(\frac{u}{v}\right) - uv^l g\left(\frac{u}{v}\right) - v^{l-1}, \quad \dot{v} = v^l \left(f\left(\frac{u}{v}\right) - vg\left(\frac{u}{v}\right) \right) \quad (4.3)$$

é formado por dois setores hiperbólicos degenerados.

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que é suficiente o sistema (4.2) possuir um centro global na origem para satisfazer as condições do teorema.

- Se o sistema (4.2) possui um centro global na origem, então a origem precisa ser o único ponto de equilíbrio. Como $g(0) = 0$, então $(x_0, 0)$ com $x_0 \neq 0$ não é raiz de g , ou seja, $x = 0$ deve ser a única raiz de g . Portanto, temos (i).
- Como o sistema de Liénard (4.2) com $f(x)$ e $g(x)$ tal que $g(0) = 0$ e $g'(0) > 0$ possui um centro global na origem, então a origem é um centro do tipo linear, ou seja, o Teorema 4.1 é satisfeito. Portanto, temos (ii).
- Do Teorema 3.1, se o sistema (4.2) tem um centro global, devemos assumir que o grau do sistema é ímpar. Veja o Capítulo 3. Usando a equação (2.15), o sistema de Liénard (4.2) na carta local U_1 se escreve na forma

$$\begin{cases} \dot{u} = u^2 v^{d-1} + v^{d-1} + \sum_{j=2}^{2n-1} a_j v^{d-j} - u \sum_{j=0}^m b_j v^{d-1-j}, \\ \dot{v} = uv^d \end{cases} \quad (4.4)$$

onde $d = \max\{l = 2n - 1, m + 1\}$.

Vamos considerar três casos:

Caso 1:

Seja $2n - 1 > m + 1$. Neste caso, temos $d = 2n - 1$ e $a_{2n-1} \neq 0$, ou seja, $\dot{u}|_{v=0} = a_{2n-1} \neq 0$. Portanto, não temos pontos de equilíbrio infinitos na carta local U_1 .

Caso 2:

Seja $2n - 1 = m + 1$. Neste caso, temos $d = 2n - 1 = m + 1$ e $a_{2n-1} b_m \neq 0$, ou seja, $\dot{u}|_{v=0} = a_{2n-1} - ub_m$. Portanto, existe um único ponto de equilíbrio, a saber;

$(u^*, 0) = (a_{2n-1}/b_m, 0)$ na carta local U_1 . A matriz Jacobiana do sistema (4.4), no ponto de equilíbrio $(u^*, 0)$, é dada por

$$\begin{pmatrix} -b_m & a_{2n-2} - \frac{a_{2n-1}}{b_m} b_{m-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz Jacobiana não é idênticamente nula, pelas Proposições 2.6 e 2.7, sabemos que o ponto de equilíbrio $(u^*, 0)$ não possui dois setores hiperbólicos degenerados. Portanto, neste caso, a origem não pode ser um centro global.

Caso 3:

Seja $2n-1 < m+1$. Neste caso, temos $d = m+1$ e $b_m \neq 0$, ou seja, $\dot{u}|_{v=0} = -ub_m$. Portanto, existe um único ponto de equilíbrio $(u^*, 0) = (0, 0)$ na carta local U_1 . A matriz Jacobiana do sistema (4.4), no ponto de equilíbrio $(u^*, 0)$, é dada por

$$\begin{pmatrix} -b_m & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $*$ pode ser 0 ou não. Novamente, como a matriz Jacobiana não é idênticamente nula, o ponto de equilíbrio $(u^*, 0)$ não possui dois setores hiperbólicos degenerados. Portanto, neste caso, a origem não pode ser um centro global.

Em resumo, como o sistema de Liénard (4.2) tem um centro global, ele deve estar no Caso 1, isto é, temos a condição (iii).

- Note que o único ponto de equilíbrio infinito sob a condição (iii) é exatamente a origem da carta local U_2 . Como a expressão do sistema (4.2) na carta local U_2 é o sistema (4.3), fica claro que a origem é um ponto de equilíbrio infinito. Então, a partir da Proposição 2.6, o retrato de fase local da origem da carta local U_2 deve ser formado por dois setores hiperbólicos degenerados, ou seja, temos a condição (iv).

Agora, mostraremos que é necessário o sistema (4.2) satisfazer as condições do teorema para possuir um centro global.

- Pela condição (i), a origem é o único ponto de equilíbrio finito do sistema.
- Pela condição (ii), a origem é um centro do tipo linear.
- Pela condição (iii), a carta local U_1 não possui pontos de equilíbrio.
- Pela condição (iv), o retrato de fase local da carta U_2 é formado por dois setores hiperbólicos degenerados.

Portanto, segue destas observações, que a origem do sistema (4.2) é um centro global. \square

4.2 A Caracterização de um Sistema de Liénard de Grau Três com um Centro Global

Teorema 4.3. *Todo sistema (4.2) de grau três que possui um centro global na origem, após um redimensionamento das variáveis x , y e um reescalamento no tempo t , pode ser escrito como*

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + bx^3 - xy, \quad (4.5)$$

com $b > 1/8$.

Demonstração. Como o grau(g) = $l = 3$ e o grau(f) = $m = 1$, então o grau(h) = 2. É fácil ver que $h(x)$ é da forma

$$h(x) = cx^2$$

com $c \neq 0$. Assim, pela condição (ii) do Teorema 4.2,

$$f(x) = f_1(cx^2)2cx \quad \text{e} \quad g(x) = g_1(cx^2)2cx.$$

Sendo $m = 1$, então $f_1(x) = a_1$, com $a_1 \neq 0$, pois, caso contrário, o sistema (4.2) não seria um sistema de Liénard. Sendo $l = 3$ e $g(x) = g_1(cx^2)2cx = x + g_2(x)$, então $g_1(x) = b_1x + 1/2c$, com $b_1 \neq 0$. Em resumo,

$$g(x) = x + 2b_1c^2x^3 = x + bx^3 \quad \text{e} \quad f(x) = 2a_1cx = ax$$

onde $b = 2b_1c^2$ e $a = 2a_1c$.

Portanto, o sistema (4.2) de grau três satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) do Teorema 4.2 é da forma

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + bx^3 - axy, \quad (4.6)$$

com $b > 0$, pela condição (i), e $a \neq 0$ para ser um sistema de Liénard.

Para reduzir o número de parâmetros de dois para um, faremos a reparametrização $(x, y, t) = (X/a, Y/a, t)$. Logo, o sistema (4.6) se escreve como

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + bx^3 - xy, \quad (4.7)$$

com $b > 0$, onde escrevemos x e y em vez de X e Y , respectivamente. Agora, estudaremos quando o sistema (4.7) satisfaz a condição (iv) do Teorema 4.2. Segue da equação (2.16), que o sistema (4.7), na carta local U_2 , é dado por

$$\dot{u} = -bu^4 - v(u^2(-1 + v) + v), \quad \dot{v} = -v(bu^3 + u(-1 + v)v). \quad (4.8)$$

Claramente, a origem $(u, v) = (0, 0)$ é um ponto de equilíbrio infinito com a matriz Jacobiana identicamente nula. Logo, para estudar seu retrato de fase local, devemos aplicar a técnica do blow-up. Para mais detalhes, veja [1].

Iniciamos o estudo do retrato de fase local na origem do sistema (4.8) fazendo o blow-up generalizado direcional $(u, v) \mapsto (u, u^2w)$. Desta forma, o sistema (4.8) se escreve como

$$\dot{u} = -u^4(b + w(-1 + w + u^2w)), \quad \dot{w} = u^3w(b + w(-1 + w(2 + u^2))). \quad (4.9)$$

Reescalando a variável independente da forma $dt_1 = u^3dt$, para eliminar o fator comum u^3 entre \dot{u} e \dot{w} , obtemos o sistema

$$\dot{u} = -u(b + w(-1 + w + u^2w)), \quad \dot{w} = w(b + w(-1 + w(2 + u^2))) \quad (4.10)$$

onde, agora, o ponto denota a derivada em relação à nova variável independente t_1 . Quando $u = 0$, os possíveis pontos de equilíbrio do sistema (4.10) são os pontos $(0, w_0)$ tais que w_0 são as raízes do polinômio $w(2w^2 - w + b) = 0$. Desta forma, temos os seguintes pontos:

$$E_0 = (0, 0) \quad \text{e} \quad E_{\pm} = \left(0, \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8b}}{4}\right).$$

Observe que neste caso, o sistema (4.8), após os blow-ups direcionais

$$(u, v) \mapsto (uw, \pm w^2)$$

não possui pontos de equilíbrio. Em outras palavras, esses blow-ups não fornecem nenhuma informação extra.

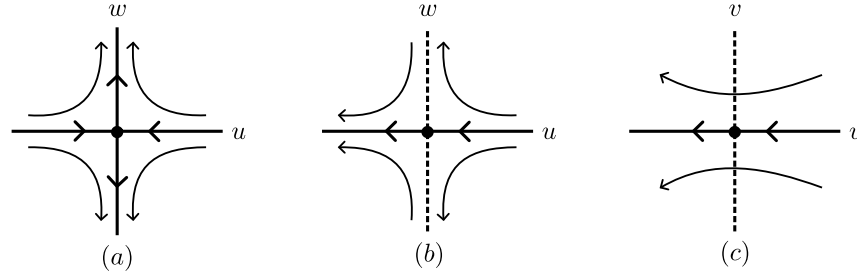


Figura 4.1: Blow-up da origem da carta local U_2 do sistema (4.8).

Para facilitar o entendimento do retrato de fase local na origem da carta U_2 , separamos o estudo em 3 casos, dependendo do parâmetro b .

Caso 1: $b > 1/8$

Assuma $b > 1/8$. Então, o sistema (4.10) tem E_0 como único ponto de equilíbrio. Os autovalores da matriz Jacobiana do sistema em E_0 são $\pm b$, ou seja, E_0 é uma sela hiperbólica. Efetuando o blow-down, o retrato de fase local na origem da carta local U_2 é formado por dois setores hiperbólicos degenerados.

Resumindo, provamos o Teorema 4.3 se mostrarmos que, quando $b \in (0, 1/8]$, o retrato de fase local na origem do sistema (4.8) não é formado por dois setores hiperbólicos degenerados.

Caso 2: $b = 1/8$

Assuma $b = 1/8$. Então, os pontos de equilíbrio E_- e E_+ colapsam dando origem ao ponto de equilíbrio $E = (0, 1/4)$. Como no Caso 1, a origem é uma sela hiperbólica.

Note que os dois autovalores da matriz Jacobiana do sistema, no ponto de equilíbrio E , são 0 e $1/16$, ou seja, esse ponto de equilíbrio é semi-hiperbólico. Para estudar o comportamento local de E , precisamos nos adequar as condições do Teorema 2.3.

Dessa forma, efetuando a mudança de variável $(u, w) \mapsto (w, u + 1/4)$, o sistema (4.10) se escreve da forma

$$\begin{cases} \dot{u} = A(u, w), \\ \dot{w} = \lambda w + B(u, w) \end{cases} \quad (4.11)$$

com

$$\begin{aligned} A(u, w) &= \frac{u^2}{2} + 2u^3 + \frac{1}{64} \left(1 + 4u\right) \left(w + 4wu^2w\right), \\ B(u, w) &= \lambda w + \lambda(-8u + 16u^2 + (w + 4uw)^2) \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde $\lambda = 1/16$. Na notação do Teorema 2.3, é fácil ver que $f(u) \equiv 0$ é solução de $\lambda w + B(u, w)$. Logo,

$$g(u) = A(u, f(u)) = \frac{u^2}{2} + 2u^3.$$

Concluimos que $m = 2$ e $a_m = 1/2$, ou seja, o retrato de fase local em E é uma sela-nó. Assim, obtemos quatro setores parabólicos e dois setores hiperbólicos, assim o retrato de fase local na origem da carta local U_2 não é formado por dois setores hiperbólicos degenerados. O blow-down é ilustrado na Figura 4.2.

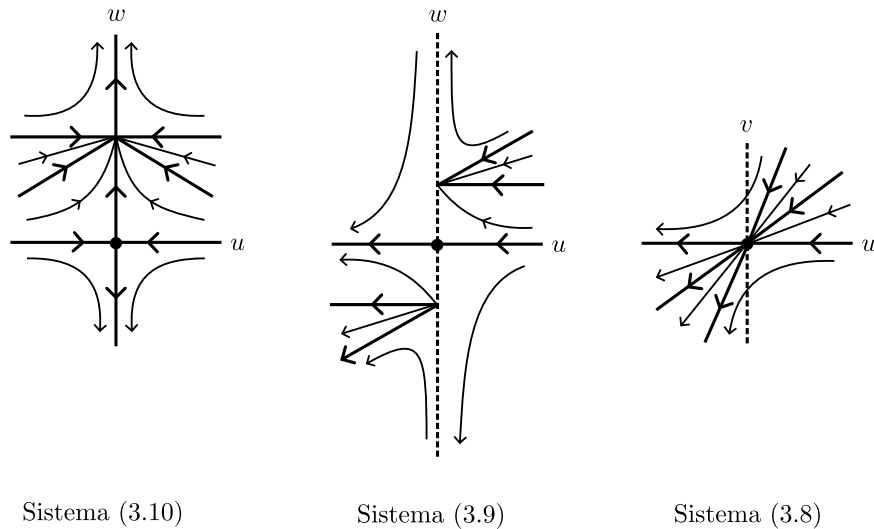


Figura 4.2: Blow-up da origem da carta local U_2 do sistema (4.8).

Caso 3: $b \in (0, 1/8)$

Assuma $b \in (0, 1/8)$. Então, o sistema (4.10) tem os três pontos de equilíbrio, E_0 e E_{\pm} , na reta $u = 0$. Como nos Casos 1 e 2, o ponto de equilíbrio E_0 é uma sela hiperbólica.

Tomando o determinante da matriz Jacobiana no ponto E_+ , no ponto E_- e considerando o produto dos determinantes temos

$$-b^3(1/8 - b) < 0.$$

Então temos uma sela hiperbólica e um nó hiperbólico. Como no Caso 2, a origem da carta local em U_2 não é formada por dois setores hiperbólicos degenerados. O blow-down é ilustrado na Figura 4.3.

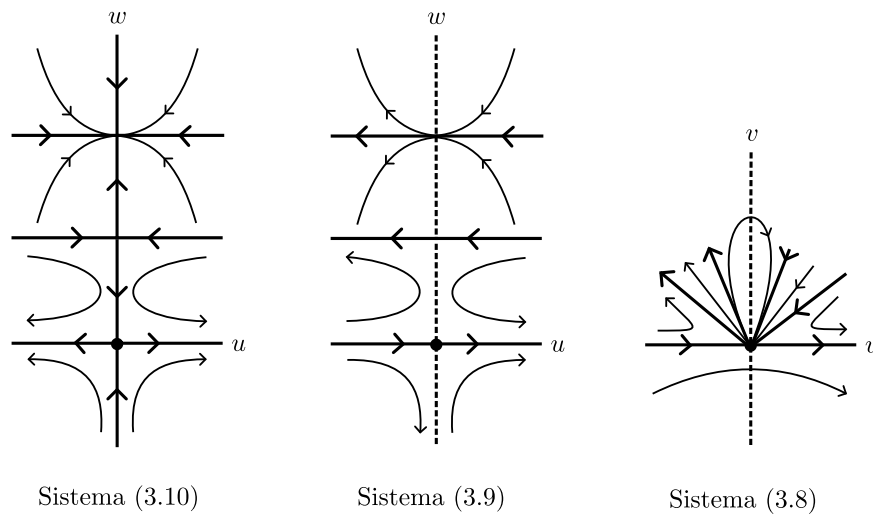


Figura 4.3: Blow-up da origem da carta local U_2 do sistema (4.8).

□

Capítulo 5

Centro Global de um Sistema Kukles de Grau Três

Neste capítulo, apresentamos o sistema conhecido na literatura como sistema Kukles de grau três e, posteriormente, damos condições para que o sistema tenha um centro global. Este estudo foi baseado no artigo [9]. Como já comentamos na introdução, o sistema Kukles de grau três se escreve como

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3 \quad (5.1)$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, 7$ e o ponto denota a primeira derivada em relação ao tempo t .

5.1 A Caracterização de um Sistema Kukles com um Centro Global

Afim de caracterizarmos o sistema Kukles (5.1) com um centro global, precisamos saber primeiramente as condições sobre os coeficientes a_i para termos um centro e assim, posteriormente, estudarmos o infinito. O teorema a seguir se encontra em [5] e caracteriza o sistema Kukles de grau três com um centro na origem. A prova deste teorema envolve o cálculo da base focal do sistema (5.1), com $a_7 = 0$. Os cálculos são bastante extensos e

por esse motivo, usaremos apenas o resultado, sem muitos detalhes.

Teorema 5.1. *A origem do sistema Kukles (5.1), com $a_7 = 0$, é um centro se, e somente se, uma das seguintes condições são válidas:*

(a) $a_2 = a_5 = 0$;

(b) $a_1 = a_3 = a_5 = 0$;

(c) $a_4 = a_5 = a_6 = 0$, $a_1 + a_3 = 0$;

(d) $a_4 = (a_1 + a_3)a_3$, $a_5 = -(a_1 + a_3)a_2$, $a_6(a_1 + 2a_3) + a_3^2(a_1 + a_3) = 0$.

O principal teorema deste capítulo será apresentado a seguir. O Teorema 5.2 caracteriza o sistema Kukles (5.1) com um centro global na origem.

Teorema 5.2. *A origem é um centro global do sistema Kukles (5.1) se, e somente se, alguma das seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a_7 = 0$ e $a_6 < 0$, e todos os retratos de fase global são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 5.1(b).

(ii) $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 0$, e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 5.1(c).

(iii) $a_2 = a_5 = a_7 = 0$, $a_6 < 0$ e $a_4 < -a_1^2/4$, e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 5.1(a).

(iv) $a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = a_7 = 0$ e $a_4 < -a_1^2/4$ e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 5.1(a).

(v) $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = 0$, $a_4 < 0$ e $a_6 < 0$, e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 5.1(a).

(vi) $a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = a_7 = 0$ e $a_6 < -a_2^2/4$, e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 5.1(b).

(vii) $a_1 = a_3 = a_5 = a_6 = a_7 = 0$ e $a_4 < -a_2^2/8$, e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 5.1(a).

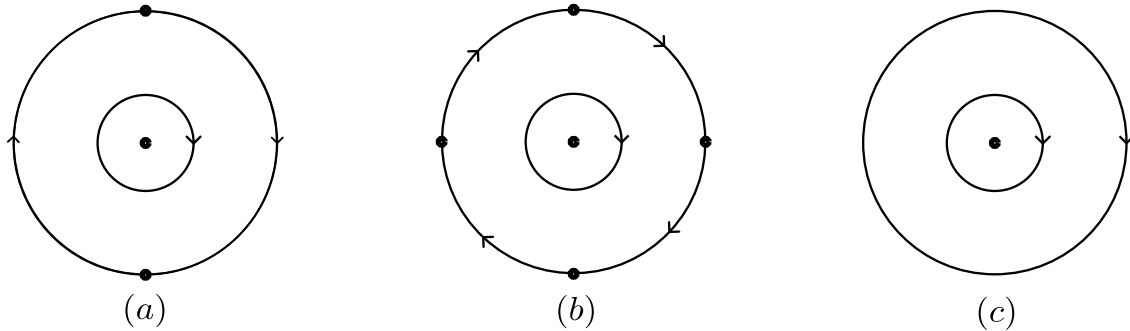


Figura 5.1: Os possíveis retratos de fase global de um sistema Kukles (5.1) com um centro global.

Demonstração. Segue da equação (2.16), que o sistema (5.1), na carta local U_2 , é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = -u(a_7 + a_6u + a_5u^2 + a_4u^3) + v(v + u^2v - a_1u^3 - a_2u^2 - a_3u), \\ \dot{v} = -v(a_7 + a_3v + a_6u + a_5u^2 + a_4u^3 - uv^2 + a_1u^2v + a_2uv). \end{cases} \quad (5.2)$$

A matriz Jacobiana do campo vetorial, que define (5.2), na origem, é dada por

$$A = \begin{pmatrix} -a_7 & 0 \\ 0 & -a_7 \end{pmatrix}.$$

Se $a_7 \neq 0$, então a origem é um ponto de equilíbrio infinito. Como os autovalores da matriz Jacobiana são $-a_7$, então a origem é um nó hiperbólico. Consequentemente, seu retrato de fase local não é formado por dois setores hiperbólicos degenerados. Portanto, pela Proposição 2.6, a condição $a_7 = 0$ é uma condição necessária para que o sistema (5.1) tenha um centro global. Com isso, estamos nas hipóteses do Teorema 5.1. A seguir, encontraremos condições para que a origem do sistema (5.1) seja um centro global para cada um dos casos do Teorema 5.1. O diagrama a seguir ilustra todos os casos em que a origem do sistema (5.1) é um centro global.

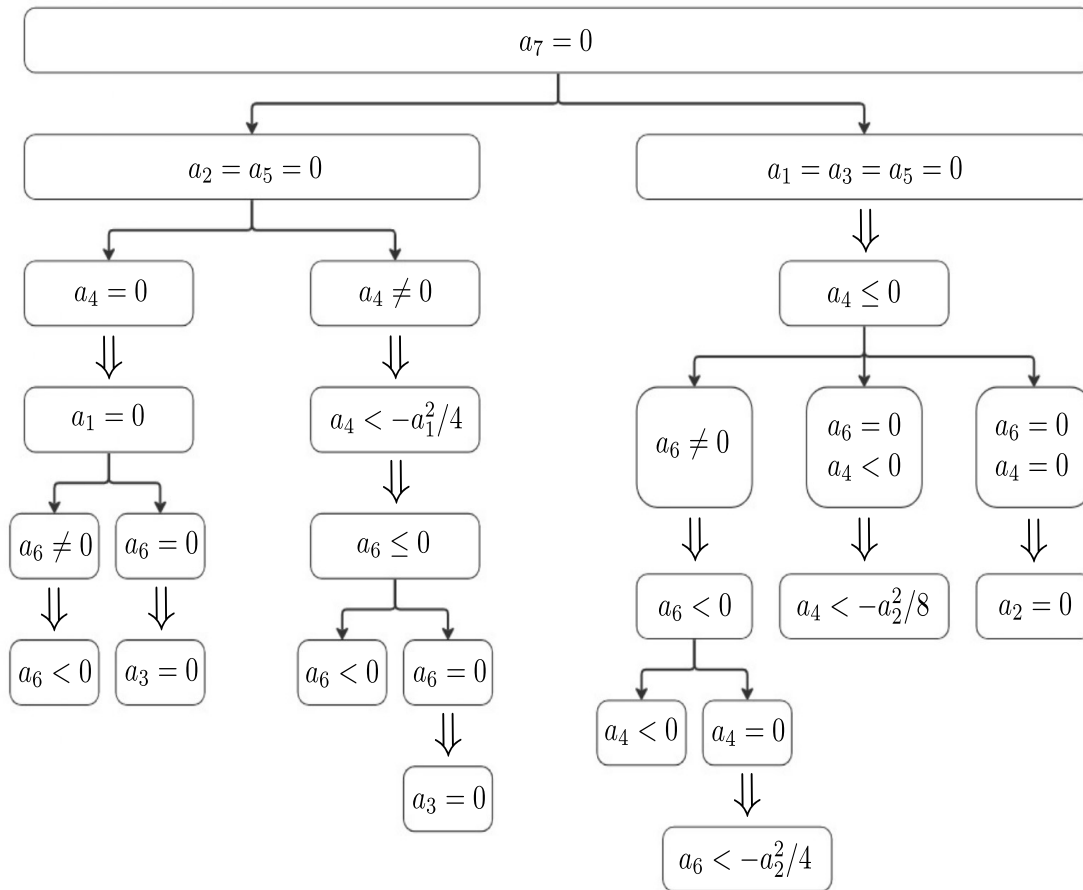


Figura 5.2: Diagrama apresentando todos os casos em que a origem do sistema (5.1) é um centro global.

5.1.1 Caso (a)

O sistema (5.1), com as condições $a_2 = a_5 = a_7 = 0$, é dado por

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + a_1x^2 + a_3y^2 + a_4x^3 + a_6xy^2. \quad (5.3)$$

Os candidatos a pontos de equilíbrio finitos do sistema (5.3) são $(x_0, 0)$, com x_0 uma raiz de $x(a_4x^2 + a_1x - 1) = 0$. Dividimos a análise deste caso em dois subcasos.

Subcaso 1: $a_4 = 0$

Neste caso, temos $a_1 = 0$, pois a origem deve ser o único ponto de equilíbrio finito. Consideramos dois subcasos diferentes.

Subcaso 1.1: $a_6 \neq 0$

Neste subcaso, na carta local U_2 , o sistema (5.3), com $a_1 = a_4 = 0$, é dado por

$$\dot{u} = v(v + u^2v - a_3u) - a_6u^2, \quad \dot{v} = -v(a_6u + a_3v - uv^2). \quad (5.4)$$

Quando $v = 0$, a origem é um ponto de equilíbrio do sistema (5.4) com a matriz Jacobiana identicamente nula. Usaremos o blow-up para descrever a dinâmica local neste ponto.

Como podemos considerar apenas o blow-up direcional $(u, v) \mapsto (u, uv)$, com esta mudança de variáveis, obtemos o seguinte sistema

$$\dot{u} = u^2(-a_6 - a_3w + w^2 + u^2w^2), \quad \dot{w} = -uw^3. \quad (5.5)$$

Reescalando a variável independente da forma $dt_1 = udt$, para eliminar o fator comum u em \dot{u} e \dot{w} , obtemos o sistema

$$\dot{u} = u(-a_6 - a_3w + w^2 + u^2w^2), \quad \dot{w} = -w^3 \quad (5.6)$$

onde, agora, o ponto denota a derivada em relação à nova variável independente t_1 .

Quando $u = 0$, a origem é o único ponto de equilíbrio infinito do sistema (5.6). Neste caso, a origem é um equilíbrio semi-hiperbólico, pois os autovalores da matriz Jacobiana na origem são $-a_6 \neq 0$ e 0 . Para estudar o comportamento local da origem, precisamos nos adequar as condições do Teorema 2.3.

Dessa forma, considere a mudança de coordenada $(u, w) \mapsto (w, u)$. Logo, o sistema (5.6) é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = A(u, w), \\ \dot{w} = \lambda w + B(u, w), \end{cases} \quad (5.7)$$

com

$$A(u, w) = -u^3 \quad \text{e} \quad B(u, w) = \lambda w - a_3uw + u^2w + u^2w^3$$

onde $\lambda = -a_6$. Se $a_6 < 0$, então, na notação do Teorema 2.3, é fácil ver que $f(u) \equiv 0$ é solução de $\lambda w + B(u, w)$. Logo,

$$g(u) = A(u, f(u)) = -u^3.$$

Concluimos então, que $m = 3$ e $a_m = -1$, ou seja, o retrato de fase local da origem é uma sela. Por outro lado, se $a_6 > 0$, reescalando a variável independente da forma $dt = -dt$, obtemos o sistema

$$\dot{u} = -u(-a_6 - a_3w + w^2 + u^2w^2), \quad \dot{w} = w^3$$

e dessa maneira, podemos aplicar novamente o Teorema 2.3. Assim, concluimos que o retrato de fase local da origem é um nó estável. Efetuando o blow-down, o retrato de fase local da origem da carta local U_2 é formado por dois setores hiperbólicos degenerados se $a_6 < 0$ e por dois setores elípticos se $a_6 > 0$. Ver Figura 5.3.

Portanto, se $a_6 > 0$, o sistema (5.3) não tem um centro global.

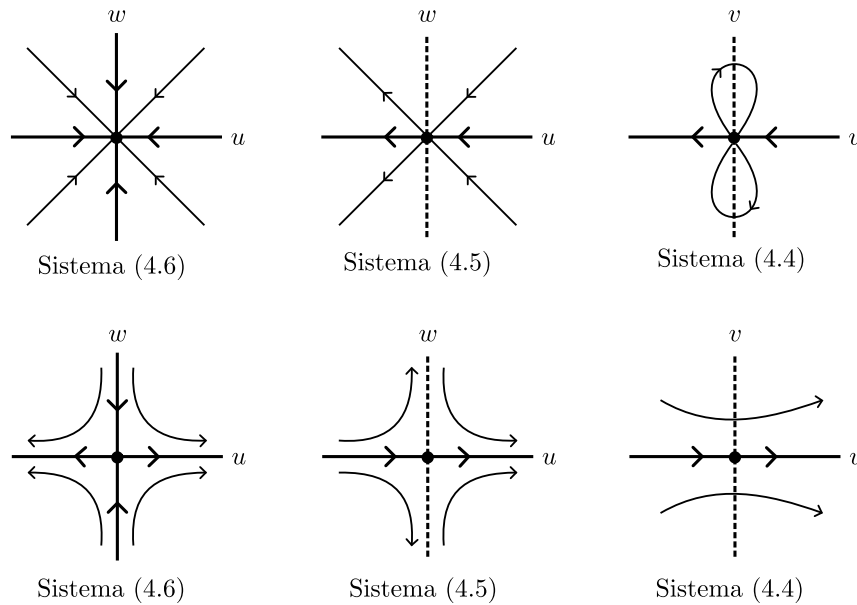


Figura 5.3: Blow-up da origem da carta local U_2 do sistema (5.3) quando $a_6 > 0$ (acima) e quando $a_6 < 0$ (abaixo).

A partir do estudo na carta local U_2 , basta estudar o sistema (5.3), na carta local U_1 quando $a_6 < 0$. Neste caso, o sistema (5.3), na carta local U_1 , é dado por

$$\dot{u} = -(1 + u^2)v^2 + a_3u^2v + a_6u^2, \quad \dot{v} = -uv^3. \quad (5.8)$$

Quando $v = 0$, a origem é o único ponto de equilíbrio e é linearmente nulo. Portanto, precisamos aplicar a técnica do blow-up para entender seu comportamento local. Considerando apenas o blow-up direcional $(u, v) \mapsto (u, uv)$ e eliminando o fator comum u em \dot{u} e \dot{v} , obtemos

$$\dot{u} = u(a_6 + a_3uw - w^2 - u^2w^2), \quad \dot{w} = -a_6w + w^3 - a_3w^2u. \quad (5.9)$$

Quando $u = 0$, os candidatos aos pontos de equilíbrio do sistema (5.9) são os pontos $(0, w_0)$ com w_0 sendo uma raiz de $w(w^2 - a_6) = 0$. Como $a_6 < 0$, a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema (5.9) e é uma sela hiperbólica. Através do blow-down, o retrato de fase local da origem da carta local U_1 é formado por dois setores hiperbólicos degenerados. Ver Figura 5.4.

Portanto, provamos a afirmação (i) do Teorema 5.2.

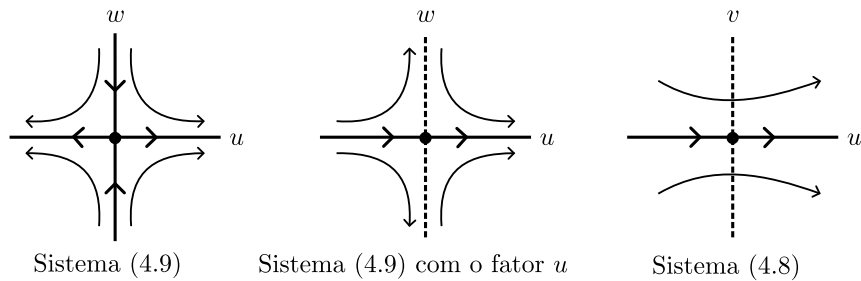


Figura 5.4: Blow-up da origem da carta local U_1 do sistema (5.3) quando $a_6 < 0$.

Subcaso 1.2: $a_6 = 0$

Na carta local U_2 , se $v = 0$, temos uma reta de equilíbrios. Fazendo um reescalamento na variável temporal da forma $dt = vdt$, o sistema (5.3) na carta local U_2 , com $a_6 = 0$, é da forma

$$\dot{u} = -a_3u + v + u^2v, \quad \dot{v} = -a_3v + uv^2. \quad (5.10)$$

Neste caso, a origem é um nó hiperbólico do sistema (5.10) se $a_3 \neq 0$ e, conseqüentemente, algumas órbitas começam ou terminam na origem da carta local U_2 . Portanto, o sistema (5.3) não poderia ter um centro global, ou seja, devemos assumir $a_3 = 0$ e, assim, provamos a afirmação (ii) do Teorema 5.2.

Subcaso 2: $a_4 \neq 0$

Neste caso, o sistema (5.3) tem a origem como o único ponto de equilíbrio se, e somente se, $a_4 < -a_1^2/4$. Em particular, segue que $a_4 < 0$. Na carta local U_1 , o sistema (5.3) é dado por

$$\dot{u} = -(1 + u^2)v^2 + (a_1 + a_3u^2)v + a_6u^2 + a_4, \quad \dot{v} = -uv^3. \quad (5.11)$$

Quando $v = 0$, os candidatos aos pontos de equilíbrio do sistema (5.11) são os pontos $(\pm\sqrt{-a_4/a_6}, 0)$. Observe que, como $a_4 < 0$, o sistema (5.11) possui pontos de equilíbrio se, e somente se, $a_6 > 0$. Assim, a matriz Jacobiana do campo vetorial que define (5.11), nos pontos $(\pm\sqrt{-a_4/a_6}, 0)$, é dada por

$$J_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm 2\sqrt{\frac{-a_4}{a_6}} & \frac{a_1a_6 - a_3a_4}{a_6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que a matriz J_{\pm} não é nula. Portanto, o sistema (5.3) não tem um centro global se $a_6 > 0$. Se $a_6 \leq 0$, o sistema (5.11) não possui pontos de equilíbrio, então temos que estudar a carta local U_2 . Nós a estudamos em duas subseções diferentes.

Subcaso 2.1: $a_6 < 0$

Na carta local U_2 , o sistema (5.3) é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = v(v + u^2v - a_1u^3 - a_3u) - u^2(a_4u^2 + a_6), \\ \dot{v} = -v(a_3v + a_6u - uv^2 + a_1u^2v + a_4u^3). \end{cases} \quad (5.12)$$

Quando $v = 0$, a origem é um ponto de equilíbrio do sistema (5.12), cuja parte linear é nula. Portanto, precisamos fazer um blow-up para descrever a dinâmica local neste ponto. Realizando o blow-up direcional $(u, v) \mapsto (u, uv)$ e eliminando o fator comum u em \dot{u} e

\dot{w} , obtemos

$$\dot{u} = -u(a_6 + a_3w + a_4u^2 - w^2 + a_1u^2w - u^2w^2), \quad \dot{w} = -w^3. \quad (5.13)$$

Quando $u = 0$, a origem é o único ponto de equilíbrio infinito do sistema (5.13). Neste caso, a origem é um equilíbrio semi-hiperbólico, pois os autovalores da matriz Jacobiana do campo vetorial que define o sistema (5.13), na origem, são $-a_6$ e 0. Como $a_6 < 0$, pelo Teorema 2.3, obtemos uma sela. Efetuando o blow-down, o retrato de fase local da origem da carta local U_2 é formado por dois setores hiperbólicos degenerados. A figura 5.4 ilustra este caso trocando a carta local U_1 , sistemas (5.9) e (5.8) pela carta local U_2 , sistemas (5.13) e (5.12), respectivamente. Assim, a afirmação (iii) do Teorema 5.2 está provada.

Subcaso 2.2: $a_6 = 0$

Na carta local U_2 , o sistema (5.3) com $a_6 = 0$ é da forma

$$\begin{cases} \dot{u} = v^2 + u^2v^2 - a_1u^3v - a_3uv - a_4u^4, \\ \dot{v} = -v(a_3v - uv^2 + a_1u^2v + a_4u^3). \end{cases} \quad (5.14)$$

Quando $v = 0$, a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema (5.14), cuja parte linear é nula. Portanto, precisamos fazer um blow-up para descrever a dinâmica local neste ponto. Suponha primeiro que $a_3 \neq 0$. Neste caso, faremos os blow-ups direcionais $(u, v) \mapsto (u, u^3w)$ e $(u, v) \mapsto (uw, w^3)$.

Considere a mudança de variáveis $(u, v) \mapsto (u, u^3w)$. Após a eliminação do fator comum u^3 em \dot{u} e \dot{w} , obtemos

$$\begin{cases} \dot{u} = -u(a_4 + a_3w + a_1u^2w - u^2w^2 - u^4w^2), \\ \dot{w} = w(2a_4 + 2a_3w + 2a_1u^2w - 3u^2w^2 - 2u^4w^2). \end{cases} \quad (5.15)$$

Quando $u = 0$, o sistema (5.15) tem a origem e $(0, -a_4/a_3)$ como pontos de equilíbrio. É fácil ver que a origem é uma sela hiperbólica do sistema (5.15), desde que $a_4 \neq 0$, enquanto que o outro ponto de equilíbrio é uma sela semi-hiperbólica.

Agora, considere a mudança de variáveis $(u, v) \mapsto (uw, w^3)$. Após a eliminação do fator comum w^3 em \dot{u} e \dot{w} , obtemos

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{(2u^2w^4 + w^2(3 - 2u^3a_1) - 2u(a_3 + u^3a_4))}{3}, \\ \dot{w} = \frac{w(uw^4 - u^2w^2a_1 - a_3 - u^3a_4)}{3}. \end{cases}$$

Quando $w = 0$, temos a origem como ponto de equilíbrio. É fácil ver que a origem é um nó hiperbólico. Neste caso, estamos interessados apenas no comportamento do sistema restrito ao eixo w .

O blow-up da origem da carta local U_2 e o retrato de fase local do sistema (5.14), com $a_3 \neq 0$, na origem são mostrados na Figura 5.5. Consequentemente, algumas órbitas começam ou terminam na origem da carta local U_2 e, portanto, o sistema (5.3) não tem um centro global.

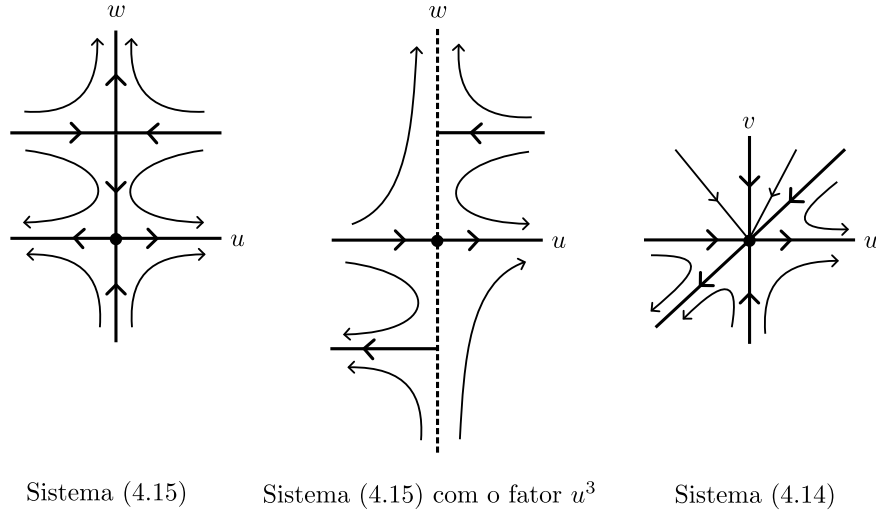


Figura 5.5: Blow-up da origem da carta local U_2 do sistema (5.3) com $a_6 = 0$ e $a_3 \neq 0$.

Suponha agora que $a_3 = 0$. Neste caso, faremos o blow-up generalizado direcional $(u, v) \mapsto (u, u^2w)$. Após a eliminação do fator comum u^3 em \dot{u} e \dot{w} , temos

$$\dot{u} = -u(a_4 - w^2 + a_1uw - u^2w^2), \quad \dot{w} = w(a_4 - 2w^2) + u(a_1w^2 - w^3u). \quad (5.16)$$

Quando $u = 0$, os possíveis pontos de equilíbrio do sistema (5.16) são $(0, w_0)$ com w_0 uma raiz de $w(a_4 - 2w^2) = 0$. Como $a_4 < 0$, a origem é o único ponto de equilíbrio infinito do sistema (5.16) na carta local U_2 . Note que a origem é uma sela hiperbólica. Efetuando o blow-down, a origem de U_2 é formada por dois setores hiperbólicos degenerados. Novamente, a ilustração deste caso é apresentada na Figura 5.4 alterando a carta local U_1 , condição $a_6 < 0$ e os sistemas (5.9) e (5.8) pela carta local U_2 , condição $a_4 < 0$ e sistemas (5.16) e (5.14) com $a_3 = 0$, respectivamente.

Observe que, neste caso, o sistema (5.14), após os blow-ups direcionais

$$(u, v) \mapsto (uw, \pm w^2),$$

não possui pontos de equilíbrio. Em outras palavras, esses blow-ups não fornecem nenhuma informação extra. Por fim, substituindo os valores de a_i obtidos anteriormente, ou seja, $a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = a_7 = 0$ e $a_4 < -a_1^2/4$ no sistema (5.3), provamos a afirmação (iv) do Teorema 5.2.

5.1.2 Caso (b)

O sistema (5.1) com as condições $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = 0$ é dado por

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + a_2xy + a_4x^3 + a_6xy^2. \quad (5.17)$$

É fácil ver que a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema (5.17) se, e somente se, $a_4 \leq 0$. Portanto, consideraremos $a_4 \leq 0$ no estudo do comportamento dos pontos de equilíbrio no infinito via compactificação de Poincaré. Dividiremos este estudo em três subcasos: $a_6 \neq 0$; $a_6 = 0$ e $a_4 < 0$; e finalmente, $a_4 = a_6 = 0$.

Subcaso 1: $a_6 \neq 0$

Começamos com a análise do comportamento da origem da carta local U_2 . O sistema (5.17) na carta local U_2 é dado por

$$\dot{u} = v(v + u^2v - a_2u^2) - u^2(a_4u^2 + a_6), \quad \dot{v} = -uv(a_6 + a_2v - v^2 + a_4u^2). \quad (5.18)$$

Portanto, a origem de U_2 é um ponto de equilíbrio infinito. Como a parte linear do sistema (5.18) na origem é identicamente nula, devemos fazer um blow-up para determinar seu retrato de fase local. Consideramos apenas o blow-up direcional $(u, v) \mapsto (u, uv)$. Após a eliminação do fator comum u em \dot{u} e \dot{v} , obtemos

$$\dot{u} = u((1 + u^2)w^2 - uwa_2 - u^2a_4 - a_6), \quad \dot{v} = -w^3. \quad (5.19)$$

Quando $u = 0$, a origem é o único ponto de equilíbrio infinito do sistema (5.19). Neste caso, a origem é um equilíbrio semi-hiperbólico, pois os autovalores da matriz Jacobiana do campo vetorial, que define o sistema (5.19), na origem são $-a_6$ e 0 . Pelo Teorema 2.3, obtemos uma sela se $a_6 < 0$ e um nó estável se $a_6 > 0$. Efetuando o blow-down, o retrato de fase local na origem da carta local U_2 é formado por dois setores hiperbólicos degenerados se $a_6 < 0$ e por dois setores elípticos se $a_6 > 0$. A ilustração deste blow-down é apresentada na Figura 5.3 alterando os sistemas (5.9) e (5.8) pelos sistemas (5.19) e (5.18), respectivamente. Portanto, se $a_6 > 0$, o sistema (5.17) não tem um centro global.

Na carta local U_1 , o sistema (5.17) com a condição $a_6 < 0$ é dado por

$$\dot{u} = -v((1 + u^2)v - a_2u) + a_4 + a_6u^2, \quad \dot{v} = -uv^3. \quad (5.20)$$

Quando $v = 0$, os possíveis pontos de equilíbrio do sistema (5.20) são $(\pm\sqrt{-a_4/a_6}, 0)$. Lembre-se que estamos assumindo $a_4 \leq 0$. Logo, se $a_4 < 0$, o sistema (5.20) não tem pontos de equilíbrio, caso em que provamos a afirmação (v) do Teorema 5.2. Por outro lado, se $a_4 = 0$, a origem é o único ponto de equilíbrio. Assim, precisamos estudar a carta local U_1 quando $a_6 < 0$ e $a_4 = 0$. Neste caso, temos

$$\dot{u} = -v((1 + u^2)v - a_2u) + a_6u^2, \quad \dot{v} = -uv^3. \quad (5.21)$$

Note que a origem é linearmente nula e novamente, precisamos de um blow-up para entender seu comportamento local. Fazendo o blow-up direcional $(u, v) \mapsto (u, uv)$ e eliminando do fator comum u em \dot{u} e \dot{v} , obtemos

$$\dot{u} = u(a_6 + a_2w - w^2 - u^2w^2), \quad \dot{v} = -a_6w - a_2w^2 + w^3. \quad (5.22)$$

Quando $u = 0$, os possíveis pontos de equilíbrio do sistema (5.22) são

$$E_0 = (0, 0), \quad E_{\pm} = \left(0, \frac{a_2 \pm \sqrt{4a_6 + a_2^2}}{2} \right).$$

Como $a_6 < 0$, o ponto E_0 é uma sela hiperbólica. Se $a_6 < -a_2^2/4$, então o sistema (5.22) tem apenas E_0 como ponto de equilíbrio. Efetuando o blow-down, obtemos que o retrato de fase local em E_0 (origem da carta local U_1) é formado por dois setores hiperbólicos degenerados. A ilustração deste blow-down é apresentada na Figura 5.4 alterando os sistemas (5.9) e (5.8) pelos sistemas (5.22) e (5.21), respectivamente. Desta forma, concluímos a prova da afirmação (vi) do Teorema 5.2. Por outro lado, se $-a_2^2/4 < a_6 < 0$ então temos dois casos a considerar:

Se $a_2 < 0$, então E_- é uma sela semi-hiperbólica e E_+ é um nó semi-hiperbólico atrator. Por outro lado, se $a_2 > 0$, então E_- é um nó semi-hiperbólico atrator e E_+ é uma sela semi-hiperbólica. Em ambos os casos, o blow-down é ilustrado na Figura 5.6.

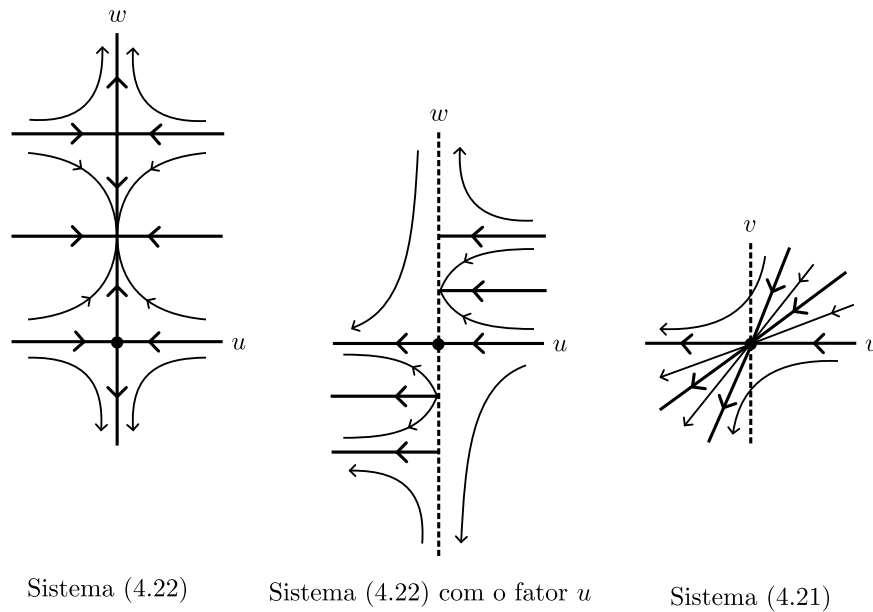


Figura 5.6: Blow-up da origem da carta local U_1 do sistema (5.17) com $-a_2^2/4 < a_6 < 0$ e $a_4 = 0$.

Finalmente, se $a_6 = -a_2^2/4$, então os pontos E_- e E_+ colapsam, dando origem ao ponto de equilíbrio $E = (0, a_2/2)$ linearmente nulo. Logo, faremos o blow-up generalizado direcional $(u, v) \mapsto (u, u^2w)$. Assim, obtemos quatro setores parabólicos e dois setores hiperbólicos para o retrato de fase local na origem da carta local U_1 . O blow-down é

ilustrado na Figura 5.7.

Observe que neste caso, o sistema (5.21), após os blow-ups direcionais

$$(u, v) \mapsto (uw, \pm w^2)$$

não possui pontos de equilíbrio. Em outras palavras, esses blow-ups não fornecem nenhuma informação extra.

Nestes dois últimos casos, efetuando o blow-down, temos que o nó ou o equilíbrio linearmente nulo fornecem órbitas que terminam ou começam na origem da carta local U_1 , e novamente, neste caso, o sistema (5.17) não tem um centro global.

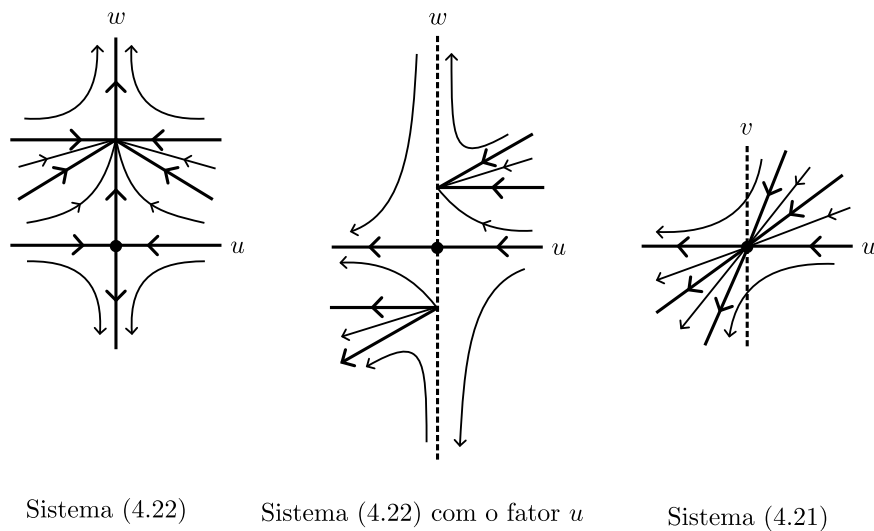


Figura 5.7: Blow-up da origem da carta local U_1 do sistema (5.17) com $a_6 = -a_2^2/4$ e $a_4 = 0$.

Subcaso 2: $a_6 = 0$ e $a_4 < 0$

É fácil ver que o sistema (5.17) na carta local U_1 , com $a_6 = 0$ e $a_4 < 0$, não tem pontos de equilíbrio. Assim, precisamos estudar o sistema (5.17), com $a_6 = 0$ e $a_4 < 0$, na carta local U_2 . Neste caso, o sistema é dado por

$$\dot{u} = v(v + u^2v - a_2u^2) - a_4u^4, \quad \dot{v} = -uv(a_2v - v^2 + a_4u^2). \quad (5.23)$$

Portanto, a origem de U_2 é um ponto de equilíbrio linearmente nulo. Fazendo o blow-up generalizado direcional $(u, v) \mapsto (u, u^2w)$ e eliminando o fator comum u^3 em \dot{u} e \dot{w} , obtemos

$$\dot{u} = -u(a_4 + a_2w - w^2 - u^2w^2), \quad \dot{w} = a_4w + a_2w^2 - 2w^3 - w^3u^2. \quad (5.24)$$

Quando $u = 0$, os candidatos aos pontos de equilíbrio do sistema (5.24) são $(0, w_0)$ com w_0 uma raiz de $w(-2w^2 + a_2w + a_4) = 0$. Denotamos esses pontos de equilíbrio por

$$E_0 = (0, 0), \quad E_{\pm} = \left(0, \frac{a_2 \pm \sqrt{8a_4 + a_2^2}}{4} \right).$$

Como $a_4 \neq 0$, o ponto de equilíbrio E_0 é uma sela hiperbólica. Se $a_4 < -a_2^2/8$, então E_0 é o único ponto de equilíbrio do sistema (5.24). Através do blow-down, obtemos que E_0 (origem da carta local U_2) é formado por dois setores hiperbólicos degenerados. Portanto, concluímos a prova da afirmação (vii) do Teorema 5.2. Por outro lado, se $-a_2^2/8 < a_4 < 0$ então temos dois casos a considerar:

Se $a_2 < 0$, então E_- é um nó hiperbólico atrator e E_+ é uma sela hiperbólica. Por outro lado, se $a_2 > 0$, então E_- é uma sela hiperbólica e E_+ é um nó hiperbólico atrator. Em ambos os casos, o blow-down é ilustrado na Figura 5.8.

Observe que neste caso, o sistema (5.23), após os blow-ups direcionais

$$(u, v) \mapsto (uw, \pm w^2)$$

não possui pontos de equilíbrio. Em outras palavras, esses blow-ups não fornecem nenhuma informação extra.

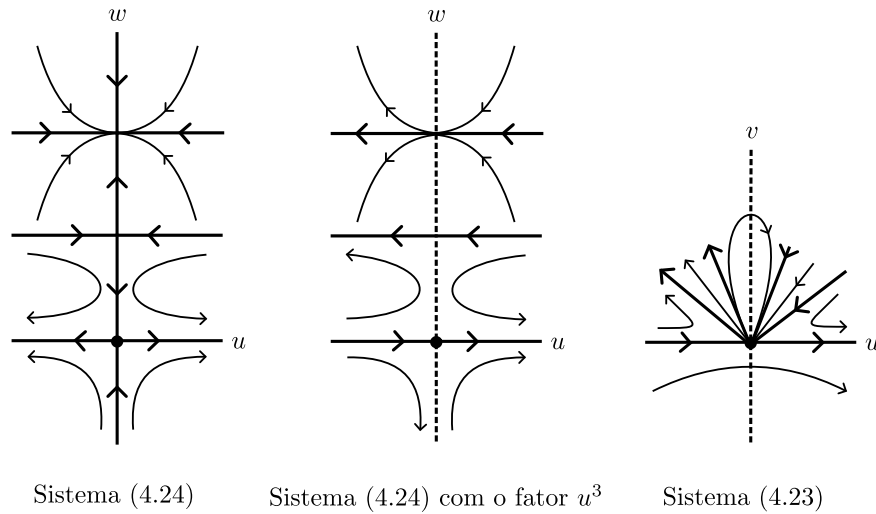


Figura 5.8: Blow-up da origem da carta local U_1 do sistema (5.17) com $a_6 = 0$ e $-a_2^2/8 < a_4 < 0$.

Finalmente, se $a_4 = -a_2^2/8$ então os pontos E_- e E_+ colapsam, dando origem a uma sela-nó. O blow-down é ilustrado na Figura 5.9. Nestes dois últimos casos, através do blow-down, o nó ou a sela-nó fornecem órbitas que terminam ou começam na origem da carta local U_2 , e novamente, neste caso, o sistema (5.17) não tem um centro global.

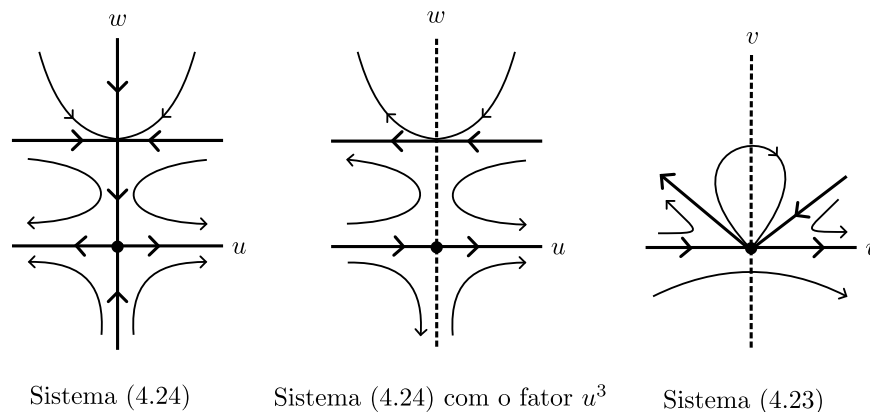


Figura 5.9: Blow-up da origem da carta local U_1 do sistema (5.17) com $a_6 = 0$ e $a_4 = -a_2^2/8$.

Subcaso 3: $a_6 = a_4 = 0$

O sistema Kukles (5.17) com $a_4 = 0$ e $a_6 = 0$ é dado por

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + a_2xy. \quad (5.25)$$

Se $a_2 \neq 0$, a origem não é um centro global, já que o campo vetorial polinomial que define (5.17) é par. Ver Teorema 3.1.

Portanto, $a_i = 0$ para $i = 1, \dots, 7$, e obtemos o centro do tipo linear dado na afirmação (ii) do Teorema 5.2.

5.1.3 Caso (c)

O sistema (5.1) com as condições $a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 0$ e $a_1 + a_3 = 0$ é dado por

$$\dot{u} = y, \quad \dot{y} = -x + a_1x^2 + a_2xy - a_1y^2. \quad (5.26)$$

Se $a_1 \neq 0$, então o sistema (5.26) tem mais um ponto de equilíbrio além da origem. Logo, a_1 deve ser igual a zero.

Portanto, o sistema (5.26) coincide com o sistema (5.25). Neste caso, o centro do tipo linear é o único sistema com um centro global na origem e assim, obtemos a afirmação (ii) do Teorema 5.2 novamente.

5.1.4 Caso (d)

O sistema (5.1) com as condições $a_4 = (a_1 + a_3)a_3$, $a_5 = -(a_1 + a_3)a_2$, $a_7 = 0$ e $a_6(a_1 + 2a_3) + a_3^2(a_1 + a_3) = 0$ é dado por

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + (a_1 + a_3)a_3x^3 - (a_1 + a_3)a_2x^2y + a_6xy^2. \quad (5.27)$$

Os possíveis pontos de equilíbrio do sistema (5.27) são $(x_0, 0)$ com x_0 uma raiz de $x(1 + a_3x)(a_3x + a_1x - 1) = 0$. Se a_1 ou a_3 forem diferentes de zero, então o sistema (5.27) tem outro ponto de equilíbrio além da origem. Logo, a_1 e a_3 devem ser iguais a zero. Então, o sistema (5.27) é dado por

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + a_2xy + a_6xy^2. \quad (5.28)$$

Neste caso, o sistema (5.28) é escrito como o sistema (5.17), mas com $a_4 = 0$. Portanto, o estudo deste sistema coincide com a análise feita no Subcaso 1, com $a_4 = 0$, e no Subcaso 3 do Caso (b). Em resumo, obtemos novamente as afirmações (vi) e (ii) do Teorema 5.2.

□

Capítulo 6

Centro Global de um Sistema Kukles de Grau Cinco

Como já comentamos na introdução, chamaremos de **sistema Kukles de grau cinco** o sistema Kukles com a segunda componente na forma linear mais termos homogêneos de grau cinco, por simplicidade. Neste capítulo, apresentamos o sistema Kukles de grau cinco e, posteriormente, damos condições para que o sistema tenha centro global. Tal sistema é da forma

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + a_1x^5 + a_2x^4y + a_3x^3y^2 + a_4x^2y^3 + a_5xy^4 + a_6y^5, \quad (6.1)$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, 6$.

6.1 A Caracterização de um Sistema Kukles com um Centro Global

A fim de caracterizarmos o sistema Kukles (6.1) com um centro global, precisamos saber primeiramente as condições sobre os coeficientes a_i para termos um centro e assim, posteriormente, estudarmos o infinito. O teorema a seguir se encontra em [13] e caracteriza o sistema Kukles (6.1) com um centro na origem. Novamente, a prova deste teorema envolve o cálculo da base focal do sistema (6.1) e por esse motivo, usaremos apenas o

resultado, sem muitos detalhes.

Teorema 6.1. *A origem do sistema Kukles (6.1) é um centro se, e somente se,*

$$a_2 = a_4 = a_6 = 0.$$

O teorema a seguir caracteriza o sistema Kukles (6.1) com um centro global na origem. Durante o nosso estudo, encontramos o artigo [19] com o mesmo resultado. A demonstração que apresentaremos foi obtida de forma independente.

Teorema 6.2. *A origem é um centro global do sistema Kukles (6.1) se, e somente se, alguma das seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) $a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$ e $a_1, a_3 < 0$, e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 5.1(a).
- (ii) $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$ e $a_3 < 0$, e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 5.1(b).
- (iii) $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$ e $a_1 < 0$, e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 5.1(a).
- (iv) $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$, e todos os retratos de fase globais são topologicamente equivalentes ao dado pela Figura 5.1(c).

Demonstração. O diagrama a seguir ilustra todos os casos em que a origem do sistema (6.1) é um centro global.

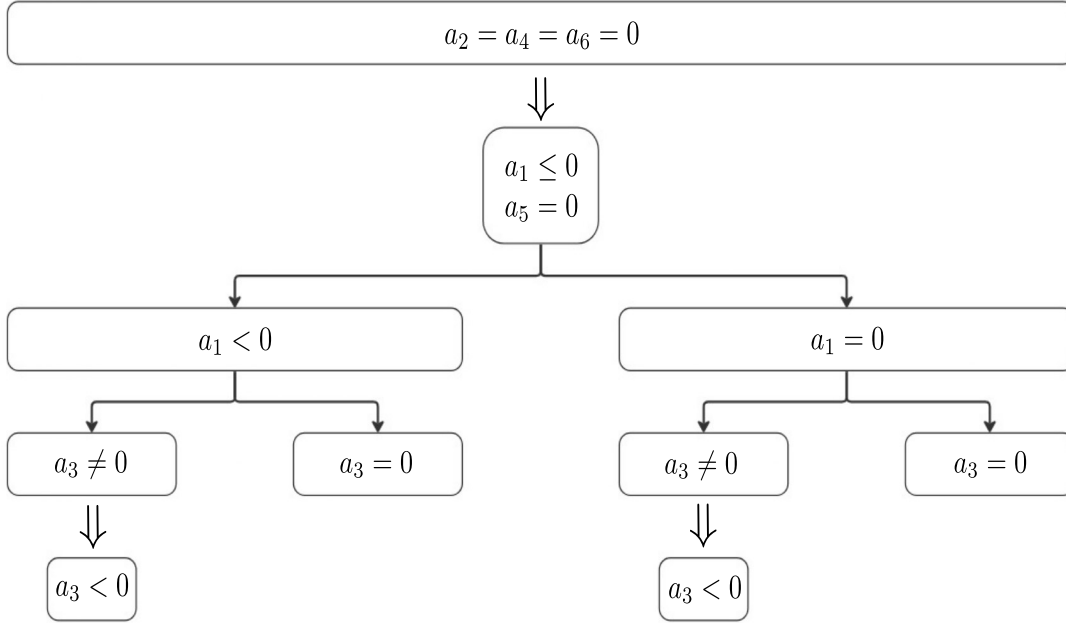


Figura 6.1: Diagrama apresentando todos os casos em que a origem do sistema (6.1) é um centro global.

O sistema (6.1) com as condições $a_2 = a_4 = a_6 = 0$ é dado por

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + a_1x^5 + a_3x^3y^2 + a_5xy^4. \quad (6.2)$$

Os candidatos a pontos de equilíbrio finitos do sistema (6.2) são $(x_0, 0)$, com x_0 uma raiz de $x(-1 + a_1x^4) = 0$. Para que a origem seja o único ponto de equilíbrio finito, devemos ter $a_1 \leq 0$.

Na carta local U_2 , o sistema (6.2) é dado por

$$\dot{u} = (1 + u^2)v^4 - u^2(a_1u^4 + a_3u^2 + a_5), \quad \dot{v} = -uv(-v^4 + a_1u^4 + a_3u^2 + a_5). \quad (6.3)$$

Quando $v = 0$, a origem é um ponto de equilíbrio do sistema (6.3) com a matriz Jacobiana identicamente nula. Usaremos o blow-up para descrever a dinâmica local neste ponto.

Neste caso, faremos os blow-ups direcionais $(u, v) \mapsto (\pm u^2, uv)$. Considere, primeiramente, a mudança de variáveis $(u, v) \mapsto (u^2, uv)$. Após a eliminação do fator comum u^2

em \dot{u} e \dot{w} , temos

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{-u(-((1+u^4)w^4) + a_1u^8 + a_3u^4 + a_5)}{2}, \\ \dot{w} = \frac{-w(-((1+u^4)w^4) + a_1u^8 + a_3u^4 + a_5)}{2}. \end{cases} \quad (6.4)$$

Quando $u = 0$, os possíveis pontos de equilíbrio do sistema (6.4) são $(0, w_0)$ com w_0 uma raiz de

$$\frac{1}{2}w(a_5 + w^4) = 0.$$

Como a matriz Jacobiana do campo vetorial que define (6.4) é dada por

$$J = \begin{pmatrix} -a_5/2 & 0 \\ 0 & -a_5/2 \end{pmatrix},$$

então se $a_5 > 0$, temos apenas a origem como ponto de equilíbrio, sendo este um nó hiperbólico. Por outro lado, se $a_5 < 0$, temos a origem e mais dois pontos como equilíbrios, a saber; $(0, \pm\sqrt[4]{-a_5})$. Neste caso, a origem é um nó hiperbólico e os outros dois pontos de equilíbrio são selas hiperbólicas. Por fim, considere a mudança de variáveis $(u, v) \mapsto (-u^2, uw)$. Analogamente, chegamos a mesma conclusão. O blow-down é ilustrado na Figura 6.2. Observe que, neste caso, o sistema (6.3), após o blow-up generalizado direcional $(u, v) \mapsto (uw^2, w)$, não possui pontos de equilíbrio. Em outras palavras, esse blow-up não fornece nenhuma informação extra. Portanto, em qualquer um destes casos, algumas órbitas começam ou terminam na origem da carta local U_2 , conseqüentemente a origem não é um centro global do sistema (6.3).

Assumiremos, daqui em diante, a condição $a_5 = 0$. Dividiremos o restante da demonstração em casos.

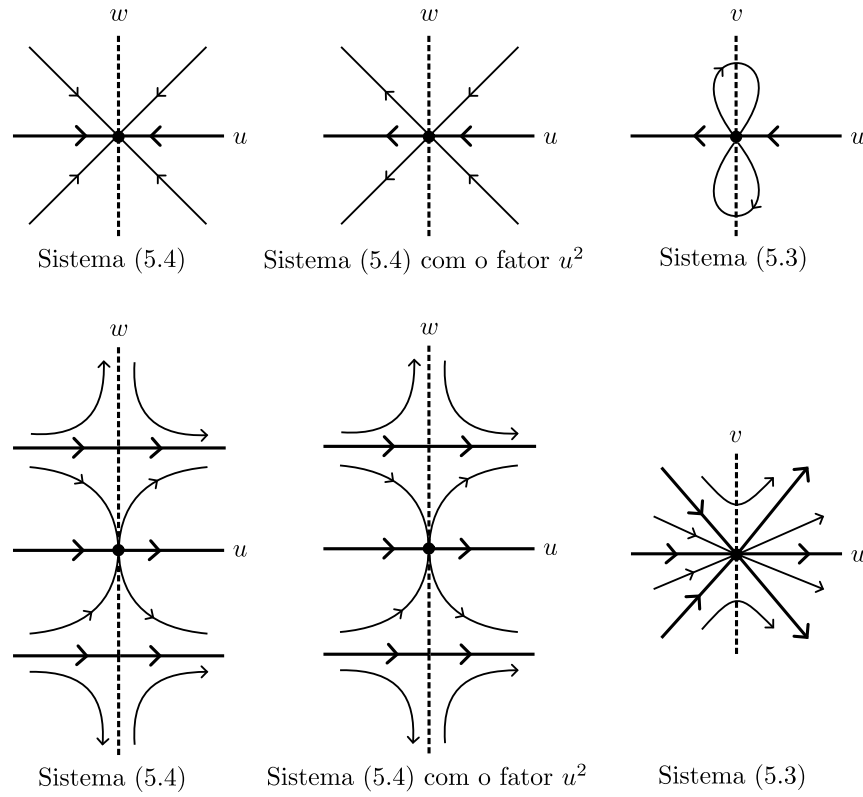


Figura 6.2: Blow-up da origem da carta local U_2 do sistema (6.2) quando $a_5 > 0$ (acima) e quando $a_5 < 0$ (abaixo).

6.1.1 Caso (a)

Agora, considere o sistema (6.1) com as condições $a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$ e $a_3 \neq 0$. Logo, o sistema (6.1) é dado por

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + a_1x^5 + a_3x^3y^2. \quad (6.5)$$

Na carta local U_2 , o sistema (6.5) é dado por

$$\dot{u} = (1 + u^2)v^4 - u^4(a_1u^2 + a_3), \quad \dot{v} = v(uv^4 - a_1u^5 - a_3u^3). \quad (6.6)$$

Quando $v = 0$, a origem é um ponto de equilíbrio do sistema (6.6) com a matriz Jacobiana identicamente nula. Usaremos o blow-up para descrever a dinâmica local neste ponto.

Considere o blow-up direcional $(u, v) \mapsto (u, uv)$. Após a eliminação do fator comum u^3 em \dot{u} e \dot{v} , temos

$$\dot{u} = u((1 + u^2)w^4 - a_1u^2 - a_3), \quad \dot{w} = -w^5. \quad (6.7)$$

Quando $u = 0$, a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema (6.7). Neste caso, a origem é um equilíbrio semi-hiperbólico, pois os autovalores da matriz Jacobiana do campo vetorial que define o sistema (6.7), na origem, são $-a_3$ e 0. Para estudar o comportamento local da origem, precisamos nos adequar às condições do Teorema 2.3.

Dessa forma, considere a mudança de coordenada $(u, w) \mapsto (w, u)$. Logo, o sistema (6.7) é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = A(u, w), \\ \dot{w} = \lambda w + B(u, w), \end{cases} \quad (6.8)$$

com

$$A(u, w) = -u^5 \quad \text{e} \quad B(u, w) = \lambda w + w((1 + w^2)u^4 - a_1w^2)$$

onde $\lambda = -a_3$. Se $a_3 < 0$, então, na notação do Teorema 2.3, é fácil ver que $f(u) \equiv 0$ é solução de $\lambda w + B(u, w)$. Logo,

$$g(u) = A(u, f(u)) = -u^5.$$

Concluimos então, que $m = 5$ e $a_m = -1$, ou seja, o retrato de fase local da origem é uma sela. Por outro lado, se $a_3 > 0$, reescalando a variável independente da forma $dt = -dt$, obtemos o sistema

$$\dot{u} = -u((1 + u^2)w^4 - a_1u^2 - a_3), \quad \dot{w} = w^5.$$

e dessa maneira, podemos aplicar novamente o Teorema 2.3. Assim, concluimos que o retrato de fase local da origem é um nó estável. Efetuando o blow-down, o retrato de fase local da origem da carta local U_2 é formado por dois setores hiperbólicos degenerados se $a_3 < 0$ e por dois setores elípticos se $a_3 > 0$. Concluimos que quando $a_3 > 0$, o sistema (6.5) não tem um centro global. Por outro lado, quando $a_3 < 0$, temos que continuar nossa análise pela carta U_1 . Ver Figura 6.3.

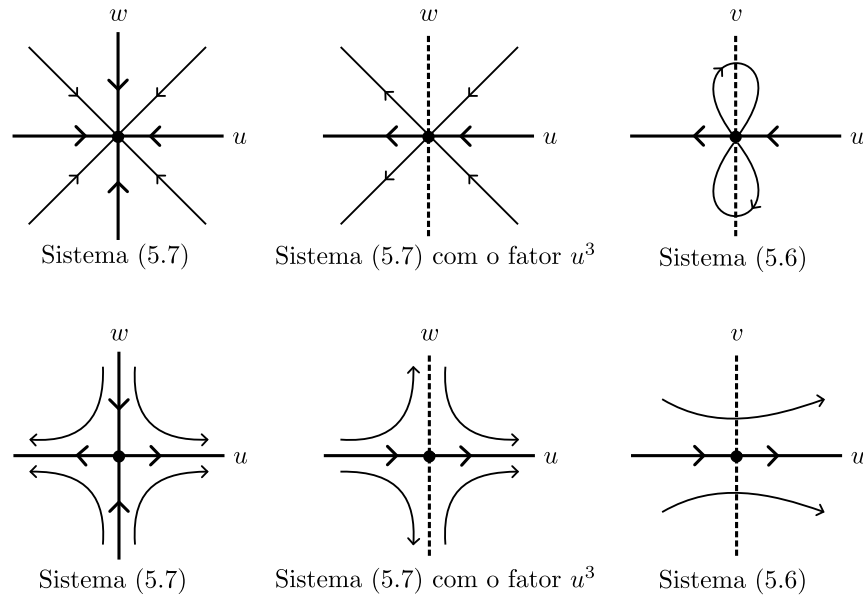


Figura 6.3: Blow-up da origem da carta local U_2 do sistema (6.5) quando $a_3 > 0$ (acima) e quando $a_3 < 0$ (abaixo).

Na carta local U_1 , o sistema (6.5) com a condição $a_3 < 0$ é dado por

$$\dot{u} = -((1 + u^2)v^4) + a_1 + a_3u^2, \quad \dot{v} = -uv^5. \quad (6.9)$$

Se $a_1 < 0$, então a origem não é um ponto de equilíbrio na carta local U_1 , ou seja, o sistema (6.5) tem um centro global. Por outro lado, se $a_1 = 0$, a origem é o único ponto de equilíbrio na carta local U_1 com a matriz Jacobiana identicamente nula. Usaremos o blow-up para descrever a dinâmica local neste ponto.

Neste caso, faremos os blow-ups direcionais $(u, v) \mapsto (\pm u^2, uw)$. Considere, primeiramente, a mudança de variáveis $(u, v) \mapsto (u^2, uw)$. Após a eliminação do fator comum u^2 em \dot{u} e \dot{w} , temos

$$\dot{u} = \frac{u(- (1 + u^4)w^4 + a_3)}{2}, \quad \dot{w} = \frac{-w((-1 + u^4)w^4 + a_3)}{2}. \quad (6.10)$$

Quando $u = 0$, a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema (6.10) e é uma sela hiperbólica. Agora, considere o a mudança de variáveis $(u, v) \mapsto (-u^2, uw)$. Analogamente, chegamos á mesma conclusão. O blow-down é ilustrado na Figura 6.4.

Observe que, neste caso, o sistema (6.5), após o blow-up generalizado direcional

$$(u, v) \mapsto (uw^2, w),$$

não possui pontos de equilíbrio. Em outras palavras, esse blow-up não fornece nenhuma informação extra.

Portanto, provamos as afirmações (i) e (ii) do Teorema 6.2.

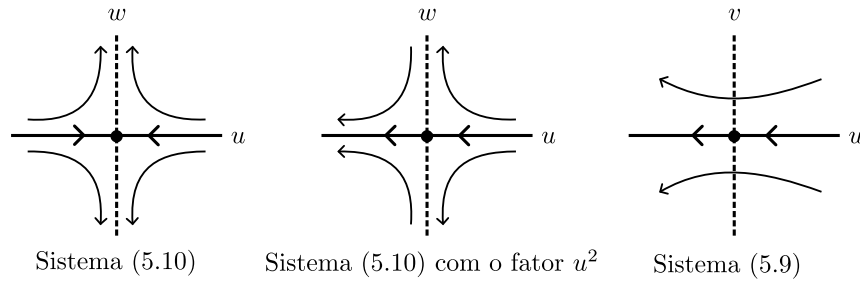


Figura 6.4: Blow-up da origem da carta local U_2 do sistema (6.5).

6.1.2 Caso (b)

Agora, considere o sistema (6.1) com as condições $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$ e $a_1 < 0$. Logo, o sistema (6.1) é dado por

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + a_1 x^5. \quad (6.11)$$

Na carta local U_2 , o sistema (6.11) é dado por

$$\dot{u} = (1 + u^2)v^4 - a_1 u^6, \quad \dot{v} = uv^5 - a_1 u^5 v. \quad (6.12)$$

Quando $v = 0$, a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema (6.12) com a matriz Jacobiana identicamente nula. Usaremos o blow-up para descrever a dinâmica local neste ponto.

Neste caso, considere o blow-up generalizado direcional $(u, v) \mapsto (u, u^2 w)$. Após a eliminação do fator comum u^5 em \dot{u} e \dot{w} , temos

$$\dot{u} = u^3 w^4 + u^5 w^4 - a_1 u, \quad \dot{w} = -2u^2 w^5 - u^4 w^5 + a_1 w. \quad (6.13)$$

Quando $u = 0$, a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema (6.13). Neste caso, a origem é uma sela hiperbólica. Observe que, neste caso, o sistema (6.12), após os blow-ups direcionais

$$(u, v) \mapsto (uw, \pm w^2),$$

tem a origem como o único ponto de equilíbrio com a matriz Jacobiana identicamente nula. Logo, devemos usar o blow-up novamente, para descrever a dinâmica local neste ponto. Através da mudança de variáveis, concluímos que a origem é uma sela hiperbólica. Logo, a origem da carta local U_2 é formada por dois setores hiperbólicos degenerados.

Na carta local U_1 , o sistema (6.11) é dado por

$$\dot{u} = -((1 + u^2)v^4) + a_1, \quad \dot{v} = -uv^5.$$

Note que, como $a_1 < 0$, a origem não é um ponto de equilíbrio da carta local U_1 .

Portanto, provamos a afirmação (iii) do Teorema 6.2.

6.1.3 Caso (c)

Por fim, o sistema (6.1) com $a_i = 0$ para $i = 1, \dots, 6$ é dado por

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x. \tag{6.14}$$

Assim, obtemos o centro do tipo linear dado na afirmação (iv) do Teorema 6.2.

□

Conclusões

Nesta dissertação, apresentamos um estudo sobre centro global de sistemas diferenciais polinomiais. Primeiramente, mostramos que um sistema polinomial de grau par não tem centro global, resultado este encontrado em [17]. Em seguida, caracterizamos todos os sistemas polinomiais de Liénard tendo um centro global na origem e obtivemos uma caracterização explícita desses sistemas com grau três. Este resultado pode ser encontrado em [16]. Por fim, caracterizamos todos os sistemas Kukles de grau três e cinco tendo um centro global na origem. Este estudo foi baseado nos artigos [9] e [19].

Referências Bibliográficas

- [1] M. J. ÁLVAREZ, A. FERRAGUT AND X. JARQUE, *A survey on the blow up technique*, Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng., 21(11) (2011), 3103-3118.
- [2] J. ARTÉS AND J. LLIBRE, *Quadratic Hamiltonian vector fields*, J. Differ. Equ., 107 (1994), 80-95.
- [3] J. ARTÉS AND J. LLIBRE, *Corrigendum: quadratic Hamiltonian vector fields*, J. Differ. Equ., 129 (1996), 559-560.
- [4] C. CHRISTOPHER, *An algebraic approach to the classification of centers in polynomial Liénard systems*, J. Math. Anal. Appl., 229 (1999), 319-329.
- [5] C.J. CHRISTOPHER AND N.G. LLOYD, *On the paper of Jin and Wang concerning the conditions for a centre in certain cubic systems*, Bull. London Math. Soc., 22 (1990), 5-12.
- [6] A. CIMA AND J. LLIBRE, *Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane*, J. Math. Anal. Appl., 147 (1990), 420-448.
- [7] R. CONTI, *Centers of planar polynomial systems. A review*, Matematiche, 53 (1998), 207-240.
- [8] T. DATE, *Classification and analysis of two-dimensional real homogeneous quadratic differential equation systems*, J. Differ. Equ., 32 (1979), 311-334.
- [9] F.S. DIAS, L.F. MELLO AND C. VALLS, *Kukles systems of degree three with global centers*, Bull. Braz. Math. Soc., New Series. 54, (2023).

- [10] H. DULAC, *Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielle ayant par point singulier un centre*, Bull. Sci. Math. Sér., (2) 32 (1908), 230-252.
- [11] F. DUMORTIER, J. LLIBRE AND J. ARTÉS, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer Verlag, New York, (2006).
- [12] J.D. GARCÍA SALDAÑA, J. LLIBRE AND C. VALLS, *Linear type global centers of linear systems with cubic homogeneous nonlinearities*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 69 (2020), 771-785.
- [13] J. GINÉ, *Conditions for the existence of a center for the Kukles homogeneous systems*, Computers and Mathematics with Applications, 43 (2002), 1261-1269.
- [14] I.S. KUKLES, *Sur quelques cas de distinction entre un foyer et un centre*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 42 (1944), 208-211.
- [15] A. LIÉNARD, *Etude des oscillations entretenues*, Rev. Générale de l'Electricité, 23 (1928), 335-357.
- [16] J. LLIBRE AND C. VALLS, *Global centers of the generalized polynomial Liénard differential systems*, J. Differ. Equ., 330 (2022), 66-80.
- [17] J. LLIBRE AND C. VALLS, *Polynomial differential systems with even degree have no global centers*, J. Math. Anal. Appl., 503 (2021), 125-281.
- [18] J. LLIBRE AND C. VALLS, *Reversible global centers with quintic homogeneous nonlinearities*, Dynamical Systems, 38:4 (2023), 632-653.
- [19] J. LLIBRE AND M.F. SILVA, *Global phase portraits of Kukles differential systems with homogenous polynomial nonlinearities of degree 5 having a center and their small limit cycles*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., vol. 26(3), 1650044 (25 pages), (2016).
- [20] L. MARKUS, *Global structure of ordinary differential equations in the plane*, Trans. Amer. Math Soc. 76 (1954), 127-148.

- [21] D. A. NEUMANN, *Classification of continuous flows on 2-manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. 48 (1975), 73-81.
- [22] M. M. PEIXOTO, *Dynamical Systems. Proceedings of a Symposium held at the University of Bahia*, Acad. Press, New York (1973), 389-420.
- [23] H. POINCARÉ, *Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles*, J. Math., 37 (1881), 375-422; Oeuvres de Henri Poincaré, Gauthier-Villars, Paris, 1951, pp. 3-84.
- [24] D. SCHLOMIUK, *Algebraic particular integrals, integrability and the problem of the center*, Trans. Am. Math. Soc., 338 (1993), 799-841.
- [25] J. SOTOMAYOR, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides. IMPA. Rio de Janeiro, (1979).
- [26] N. I. VULPE, *Affine invariant conditions for the topological distinction of quadratic systems with a center*, (Russian) Differ. Uravn., 19 (1983), 371-379, translation in Differ. Equ., 19 (1983), 273-280.