UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS–GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Estudo de Sistemas Dinâmicos Multívocos Monótonos

Liomar Carvalho Ramos

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 11 DE MARÇO DE 2024

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Estudo de Sistema Dinâmicos Multívocos Monótonos

Liomar Carvalho Ramos

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise Matemática

Itajubá – MG
11 de março de 2024

Dedico este trabalho à minha família.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, o autor de toda obra viva, pela força que me deu nos momentos mais difíceis dessa longa jornada.

À minha família, em especial aos meus pais, Luzimar e Lusilene, por sempre me incentivar a lutar pelos meus sonhos, e às minhas irmãs, Elielma e Lucielma, pelo apoio e incentivo.

Ao meu orientador, Jacson Simsen, pelos inúmeros ensinamentos, conselhos, dedicação e pela infinita paciência.

A todos os professores do IMC, em especial ao Luis Fernando, Maicon, Antônio, Bráulio, Fábio e Mariza.

Aos meus colegas de mestrado, em especial ao Eric, Juan, Jorge, Jefferson, Natan, Brayan, Yelsin, Alejandro, Gaby, Anderson, Lizzeth, Mariana, Marina, Estiven, Geovane, Aldecio, Alex e Debora por todos os momentos vividos.

Aos professores da minha antiga Universidade (UEMA), em especial ao Coimbra, Franjossan e Lélia, pelo apoio e conselhos. Agradeço ainda, meus colegas de república, André, Marcus, Hugo, Luis, Lucas, Natan, Kairo, Léo e Dimitri, pela recepção, amizade e brincadeiras que tivemos durante esse período.

Agradeço imensamente à minha amiga Josa pelo estímulo e suporte financeiro durante o período em que não tive uma bolsa de estudo. Serei eternamente grato a você.

Aos amigos do futebol nas sextas e sábados.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Obrigado a todos!

“[...] Lâmpada para meus pés é tua palavra, e luz para meu caminho [...]” (Salmos 119 : 105).

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo da teoria abstrata de sistemas dinâmicos multívocos monótonos em um espaço métrico completo abstrato, e da aplicação desta teoria à uma equação diferencial sem unicidade de solução.

Palavras–chave: Sistemas dinâmicos, Semigrupo multívoco monótono, Atrator global, Aplicação.

Abstract

In this work, we present a study of the abstract theory of multivalued monotone dynamical systems on a complete metric space and the application of this theory to a differential equation without uniqueness of solution.

Keywords: Dynamic systems, Monotone multivalued semigroup, Global attractor, Application.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A proposta deste trabalho é reunir um texto com resultados abstratos sobre sistemas dinâmicos multívocos monótonos em espaços métricos completos, sendo o artigo [2] a parte central e as referências [3, 9] complementações da teoria. Apresentamos uma definição precisa de um semigrupo multívoco monótono (ou preservador de ordem), denominado G, com amplas aplicações em diversos modelos.

Demonstramos sob certas condições a existência de equilíbrios máximos e mínimos em um atrator global compacto, fornecendo informações sobre a estabilidade desses equilíbrios e a estrutura do atrator. Em particular, sob algumas condições mostramos a existência de dois equilíbrios que atraem todos os conjuntos limitados alocados, respectivamente, 'acima' ou 'abaixo' desses valores.

Por fim, aplicamos nossa teoria a um sistema modelado por uma equação diferencial ordinária sem unicidade de solução, de modo que o semigrupo multívoco associado a esse sistema, sob certas condições é monótono. Portanto, podemos aplicar nossos resultados. Neste trabalho adotamos a convenção [ ] para indicar onde podem ser encontradas as definições e resultados, caso o leitor queira saber mais detalhes. Esta dissertação está organizada da seguinte forma: No Capítulo 2, enunciamos algumas definições e resultados de Análise Matemática, Análise Funcional, Espaços Métricos, Equações Diferenciais Ordinárias e Topologia. No Capítulo 3, apresentamos a teoria abstrata de sistemas dinâmicos multívocos monótonos. Finalmente no Capítulo 4, aplicaremos nossa teoria em um sistema modelado por uma equação diferencial ordinária sem unicidade de solução.

Capítulo 2

Pré-Requisitos

2.1 Uma Coletânea de Resultados

Nesta seção, apresentamos algumas definições e resultados importantes que serão utilizados para o desenvolvimento deste trabalho.

Definição 2.1.1. *[8] Uma relação R em um conjunto não vazio X é chamada relação de ordem em X, se R satisfaz as três propriedades a seguir:*

(i) *Reflexividade.*

Se $x \in X$, então xRx.

(ii) *Antissimétrica.*

Se $x, y \in X$, xRy e yRx, então $x = y$.

(iii) *Transitividade.*

Se $x, y, z \in X$, xRy e yRz, então xRz.

Costuma-se dizer que X é ordenado por R.

Usaremos para as relações de ordem, aos invés de R, como notação $\preceq$.

Definição 2.1.2. *[6] Seja X um conjunto não vazio. Dizemos que uma métrica sobre X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$, que associa cada par ordenado $(x, y) \in X \times X$ a um* *número real $d(x, y)$, o qual chamamos de distância de x a y, de modo que satisfaça as seguintes propriedades para quaisquer $x, y, z \in X$:*

(i) $d(x, y) = 0$, *se* $x = y$.

(ii) $d(x, y) > 0$, *se* $x \neq y$.

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$.

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 2.1.3. *[6] Um espaço métrico X é um conjunto munido de uma métrica. Em outras palavras, é um par (X, d), onde X é um conjunto não vázio e d é uma métrica sobre X.*

Definição 2.1.4. *[6] Dizemos que um espaço métrico (X, d) é completo se toda sequência de Cauchy em X converge a um elemento desse espaço.*

Teorema 2.1.5. *[5] Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são funções contínuas no ponto $a \in X$ e $f(a) < g(a)$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$ com $|x - a| < \delta$.*

Corolário 2.1.6. *[5] Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$ e $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Se $f(a) < k$, então existe um $\delta > 0$ tal que $f(x) < k$ para todo $x \in X$ com $|x - a| < \delta$.*

Definição 2.1.7. *[6] Seja (X, d) um espaço métrico. Um subconjunto M de X chama-se limitado quando existe uma constante $C > 0$ tal que $d(m_1, m_2) \leq C$ para quaisquer $m_1, m_2 \in M$.*

Corolário 2.1.8. *[6] Um subconjunto M de um espaço métrico (X, d) é dito fechado, se e somente se, para toda sequência $\xi_n \in M$ com $\xi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \in X$, tem-se $\xi \in M$.*

Proposição 2.1.9. *[6] Sejam X, Y espaços métricos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é dita contínua num ponto $x \in X$ se, e somente se, toda sequência $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ em X implique $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ em Y.*

Definição 2.1.10. *[6] Um espaço métrico* (X, d) *é dito compacto se, para toda cobertura aberta* $\{A_\lambda\}_{\lambda=1}^{\infty}$ *existe uma subcobertura finita* $\{A_{\lambda_1}, ..., A_{\lambda_j}\}$ *tal que* $X \subset \bigcup_{n=1}^{j} A_{\lambda_n}$*, ou seja, um espaço métrico é compacto quando toda cobertura aberta possui uma subcobertura finita.*

De maneira equivalente, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.1.11. *[6] Um espaço métrico* (X, d) *é compacto se toda sequência* (x_n) *em* X *possui uma subsequência convergente.*

Proposição 2.1.12. *[6] Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto. Reciprocamente, um subconjunto compacto de qualquer espaço métrico é fechado.*

Corolário 2.1.13. *[6] Um subconjunto* $K \subset \mathbb{R}^N$ *é compacto se, e somente se, é limitado e fechado.*

Definição 2.1.14. *[6] Um espaço métrico* (X, d) *é sequencialmente compacto, se toda sequência em* X *possui uma subsequência convergente.*

Proposição 2.1.15. *[6] Um espaço métrico é sequencialmente compacto, se e somente se, é compacto.*

Proposição 2.1.16. ***(Weierstrass)*** *[6] Se* X *é compacto, toda função real contínua* $f : X \to \mathbb{R}$ *é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo em* X*. Mais precisamente: Existem* $x_0, x_1 \in X$ *tais que* $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ *para qualquer* $x \in X$*.*

Definição 2.1.17. *[10] Seja* (X, d) *um espaço métrico. Um conjunto* $A \subset X$ *é relativamente compacto se seu fecho* $\overline{A}$ *é compacto.*

Equivalentemente a esta definição tem-se:

Teorema 2.1.18. *[10] Um conjunto* A *em um espaço métrico* (X, d) *é relativamente compacto se, e somente se, toda sequência* (x_n) *em* A *possui uma subsequencia convergente.*

Definição 2.1.19. *[10] Seja (X, d) um espaço métrico. Um conjunto $A \subset X$ é dito precompacto se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um conjunto finito de pontos em X, $x_1, x_2, ..., x_n$, tal que A está contido na união de bolas abertas $B(x_i, \epsilon)$, $i = 1, ..., n$, onde*

$$B(x_i, \varepsilon) = \{x : d(x, x_i) < \varepsilon\}.$$

Teorema 2.1.20. *[10] Um conjunto relativamente compacto em um espaço métrico é precompacto.*

Teorema 2.1.21. *[10] Um conjunto A em um espaço métrico completo (X, d) é relativamente compacto se, e somente se, é precompacto.*

Definição 2.1.22. *[6] Um subconjunto $K \subset C([a, b], X) = \{f : [a, b] \to X; f \text{ é contínua}\}$ é dito equicontínuo em $t_0 \in [a, b]$, se dado um $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\rho(x, t_0) < \delta$ em $[a, b]$ implique $\rho(f(x), f(t_0)) < \varepsilon$, para toda $f \in K$. Dizemos que K é equicontínuo em $[a, b]$ se ele é equicontínuo em cada $t \in [a, b]$.*

Teorema 2.1.23. ***(Ascoli-Arzelá)*** *[6] Um subconjunto $K \subset C([a, b], X)$ é relativamente compacto se, e somente se, K é equicontínuo em $[a, b]$ e para cada $t \in [a, b]$*

$$K(t) = \{f(t); f \in K\}$$

é relativamente compacto em X.

Lema 2.1.24. ***(Desigualdade de Young)*** *[4] Sejam $\theta, \theta' \in (0, +\infty)$ expoentes conjugados, ou seja, $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$. Então para quaisquer números reais positivos a, b, temos*

$$ab \leq \frac{1}{\theta} a^\theta + \frac{1}{\theta'} b^{\theta'}.$$

Lema 2.1.25. ***(Gronwall)*** *[1] Sejam $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas com $v \geq 0$ e seja $c \in \mathbb{R}$. Se*

$$u(t) \leq c + \int_a^t u(s)v(s)ds$$

para qualquer $t \in [a, b]$, então

$$u(t) \leq ce^{\int_a^t v(s)ds},$$

para qualquer $t \in [a, b]$.

Definição 2.1.26. *[6] Seja (X, d) um espaço métrico. Definimos o diâmetro de um conjunto limitado $M \subset X$ como sendo o número real*

$$diam(M) = \sup\{d(m_1, m_2); m_1, m_2 \in M\}.$$

Lema 2.1.27. ***(Número de Lebesgue)*** *[7] Seja $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta de um espaço métrico (X, d). Se X é compacto, existe um $\delta > 0$ (chamado número de Lebesgue da cobertura $\mathcal{A}$) tal que cada subconjunto de X tendo diâmetro menor do $\delta > 0$ está inteiramente contido em algum elemento de $\mathcal{A}$.*

Lema 2.1.28. ***(Lema da colagem)*** *[7] Seja $X = A \bigcup B$, com A e B subconjuntos fechados em X. Sejam $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ funções contínuas. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \bigcap B$, então f e g combinadas geram uma função contínua $h : X \to Y$ definida tomando-se $h(x) = f(x)$ se $x \in A$ e $h(x) = g(x)$ se $x \in B$.*

Proposição 2.1.29. *[6] A composta de duas aplicações contínuas é contínua. Mais precisamente, se $f : X \to Y$ é contínua no ponto x e $g : Y \to Z$ é contínua no ponto $f(x)$, então $g \circ f : X \to Z$ é contínua no ponto x.*

Corolário 2.1.30. *[6] Toda restrição de uma aplicação contínua é contínua. Mais precisamente, se $f : X \to Y$ é contínua no ponto $m \in M \subset X$, então $f|_M : M \to Y$ é contínua no ponto m.*

Teorema 2.1.31. ***(Teorema fundamental do cálculo)*** *[5] Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Então são equivalentes:*

(1) *a função*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, a \leq x \leq b,$$

é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e satisfaz $\dot{F}(x) = f(x)$, ou equivalentemente,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x).$$

(2) *F é uma primitiva de f e*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

• Soluções e problemas de valor inicial de uma equação diferencial ordinária:

Dada uma função contínua $f : D \to \mathbb{R}^n$ num aberto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, consideramos a equação diferencial ordinária

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.1}$$

onde a incógnita desta equação é a função $x = x(t)$.

Definição 2.1.32. *[1] Dizemos que uma função $x :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 (com extremos do intervalo $a \geq -\infty$ e $b \leq +\infty$) é uma solução da equação diferencial (2.1) se:*

(i) *$(t, x(t)) \in D$ para cada $t \in]a, b[$;*

(ii) *$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ para cada $t \in]a, b[$.*

Definição 2.1.33. *[1] Para cada $(t_0, y_0) \in D$, o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

consiste em determinar um intervalo aberto $]a, b[$ que contém o instante t_0 e uma solução $x :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ da equação (2.1) tal que $x(t_0) = y_0$. Chamamos $x(t_0) = y_0$ a condição inicial do problema.

Teorema 2.1.34. *(**Peano**) [1] Se $f : D \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua num aberto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, então para cada $(t_0, y_0) \in D$, existe pelo menos uma solução do problema de valor inicial (2.2) em algum intervalo aberto contendo t_0.*

Capítulo 3

Sistemas Dinâmicos Multívocos Monótonos

Neste capítulo, apresentamos a teoria de sistemas dinâmicos multívocos monótonos. Essa teoria é usada para estudar o comportamento de sistemas que evoluem ao longo do tempo, sendo assim muito importante para aplicações em diversas áreas, como na matemática aplicada, na modelagem de fenômenos físicos, químicos, biológicos, entre outros.

3.1 Preliminares

Sejam (X, ρ) um espaço métrico completo e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos não-vazios de X. Usaremos a partir dessa seção as seguintes notações:

$$\mathcal{B}(X) := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ é limitado}\}.$$

$$\mathcal{C}(X) := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ é fechado}\}.$$

$$\mathcal{K}(X) := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ é compacto}\}.$$

A distância entre quaisquer dois conjuntos $A, B \subset X$ é dada por:

$$\operatorname{dist}(A, B) = \sup_{x \in A}\{\rho(x, B)\}$$

com $\rho(x,B) = \inf_{y\in B}\{\rho(x,y)\}$. Além disso, para cada $\varepsilon > 0$ e $A \in \mathcal{P}(X)$, definiremos o conjunto $\mathcal{O}_\varepsilon(A) = \{x \in X : \rho(x,A) < \varepsilon\}$ como sendo uma ε-vizinhança de A. Observamos que pode acontecer $\mathrm{dist}(A,B) \neq \mathrm{dist}(B,A)$.

Definição 3.1.1. *[2] Uma função $G : \mathbb{R}_+ \times X \to \mathcal{P}(X)$ é dita ser um semigrupo multívoco em X se:*

(i) *$G(0,.) = Id$ é a aplicação identidade;*

(ii) *$G(t+s,x) \subset G(t,G(s,x))$ para todo $x \in X$, $t,s \in \mathbb{R}_+$.*

Sendo que

$$G(t,G(s,x)) := \bigcup_{y\in G(s,x)} G(t,y).$$

Definição 3.1.2. *[2] O semigrupo multívoco é chamado de estrito (ou exato) se na Definição 3.1.1, tivermos*

$$G(t+s,x) = G(t,G(s,x)).$$

Definição 3.1.3. *[3] Dado $x \in X$. A semitrajetória positiva do ponto x é definida por*

$$\gamma_t^+(x) = \bigcup_{\tau\geq t} G(\tau,x), t \geq 0.$$

Definição 3.1.4. *[3] Dado $A \subset X$, $A \neq \phi$. A semitrajetória positiva do conjunto A é definida por*

$$\gamma_\tau^+(A) = \bigcup_{x\in A} \gamma_\tau^+(x) = \bigcup_{t\geq\tau} G(t,A), \tau \geq 0.$$

Definição 3.1.5. *[3] Dados $A \subset X, A \neq \phi$ e $x \in X$, definimos o conjunto ω-limite de A e x como sendo*

$$\omega(A) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_\tau^+(A)} \text{ e } \omega(x) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_\tau^+(x)}.$$

Lema 3.1.6. *[9] O conjunto* $\omega(A) = \left\{\xi \in X : \xi = \lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n, \xi_n \in G(t_n,A), t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\right\}$.

Demonstração: Encontra-se em [Proposição 2.1.2, pg. 11 em [9]].

O leitor que não estiver habituado com a teoria de semigrupos não lineares poderá ver definições básicas sobre o caso unívoco no **Apêndice A**.

3.2 Semigrupos Multívocos Monótonos

Nesta seção, introduziremos o conceito de semigrupo multívoco monótono (ou preservador de ordem). Esta propriedade tem possibilitado a prova de algumas importantes propriedades sobre o comportamento assintótico de soluções para problemas ordinários e equações diferenciais parciais.

Definição 3.2.1. *[2] Dizemos que um semigrupo multívoco $G : \mathbb{R}_+ \times X \to \mathcal{C}(X)$ é dito monótono se existe uma relação de ordem "$\preceq$" tal que, se $x_0 \preceq y_0$, então $G(t, x_0) \preceq G(t, y_0)$, para todo $t \geq 0$, no sentido de que*

(a) *Existe $\underline{x}(t) \in G(t, x_0)$ tal que*

$$\underline{x}(t) \preceq y(t), \text{ para todo } y(t) \in G(t, y_0).$$

(b) *Existe $\overline{y}(t) \in G(t, y_0)$ tal que*

$$x(t) \preceq \overline{y}(t), \text{ para todo } x(t) \in G(t, x_0).$$

Observação 3.2.2. *[2]*

(i) *Note que $\underline{x}(t)$ depende somente de x_0 e independe de y_0 com $x_0 \preceq y_0$ e $x_0 \neq y_0$. Analogamente, $\overline{y}(t)$ depende somente de y_0 e independe de x_0 com $x_0 \preceq y_0$ e $x_0 \neq y_0$.*

(ii) *Note que pela propriedade da reflexividade da relação de ordem, temos que $x_0 \preceq x_0$. Daí, segue como caso particular dos itens* (**a**) *e* (**b**) *da Definição 3.2.1 que o conjunto $G(t, x_0)$ tem um elemento mínimo e um elemento máximo.*

Definição 3.2.3. *[2] Dizemos que a ordem em X é compatível com a topologia em X se:*

(1) *qualquer subconjunto limitado B de X está contido num intervalo $[a, b] := \{x \in X : a \preceq x \preceq b\}$ com $a, b \in X$.*

(2) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ *e* $x_n \preceq y_n$, *então* $x \preceq y$.

(3) *se* $x \preceq y \preceq z$, *então* $\rho(x,y) \preceq \rho(x,z)$ *e* $\rho(y,z) \preceq \rho(x,z)$ *para todo* $x, y, z \in X$.

Observação 3.2.4. *[2] De* $(\mathbf{1})$ *e* $(\mathbf{2})$ *implica que qualquer intervalo* $[a, b]$ *é fechado.*

De fato, seja uma sequência qualquer $(x_n)_{n\geq 1} \subset [a, b]$ *com* $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. *Vamos mostrar que* $x \in [a, b]$.

Usando $(\mathbf{1})$, *temos para cada* n *que* $a \preceq x_n \preceq b$. *Como a sequência constante* $z_n = a$ *converge para* a, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ *e* $z_n \preceq x_n$ *para todo* n, *temos de* $(\mathbf{2})$ *que*

$$a \preceq x.$$

Analogamente, conclui-se que $x \preceq b$. *Portanto,* $x \in [a, b]$.

Vamos assumir neste capítulo que a ordem em X é compatível com a topologia em X.

3.3 Atratores Globais para Semigrupos Multívocos Monótonos

Neste seção, apresentamos alguns conceitos e resultados importantes da teoria de atratores para semigrupos multívocos.

Definição 3.3.1. *[2] Seja um semigrupo multívoco* $G : \mathbb{R}_+ \times X \to \mathcal{P}(X)$. *Um conjunto* $\mathcal{A} \subset X$ *é dito ser um atrator global associado a* G *se:*

(i) *(negativamente invariante)*

$$\mathcal{A} \subset G(t, \mathcal{A}), \text{ para todo } t \geq 0.$$

(ii) *(atração)* $\mathcal{A}$ *atrai qualquer subconjunto limitado* $D \subset X$, *i.e,*

$$\lim_{t\to+\infty} dist(G(t, D), \mathcal{A}) = 0.$$

Geometricamente, o item $(\mathbf{ii})$ significa que dado $\varepsilon > 0$, existe um $t_0 = t_0(\varepsilon, D) \geq 0$ tal que

$$G(t, D) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A}), \forall t \geq t_0.$$

Definição 3.3.2. *[9] Dizemos que o conjunto $\mathcal{A}$ é positivamente invariante em relação ao semigrupo multívoco G, se $G(t, \mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ para todo $t \geq 0$.*

Definição 3.3.3. *[9] Dizemos que o conjunto $\mathcal{A}$ é invariante em relação ao semigrupo multívoco G, se ele é negativamente invariante e positivamente invariante, ou seja, $\mathcal{A} = G(t, \mathcal{A})$ para todo $t \geq 0$.*

Observação 3.3.4. *Em aplicações é desejável que o atrator $\mathcal{A}$ seja um conjunto compacto em X e invariante.*

Definição 3.3.5. *[2] Dizemos que o semigrupo multívoco $G : \mathbb{R}_+ \times X \to \mathcal{P}(X)$ é semicontínuo superiormente, se para todo $t \geq 0$, dado $x \in X$ e uma vizinhança $\mathcal{O}(G(t, x))$ de $G(t, x)$, existe $\delta > 0$ tal que se $\rho(x, y) < \delta$. Então*

$$G(t, y) \subset \mathcal{O}(G(t, x)).$$

Observação 3.3.6. **(i)** *Se na Definição 3.3.5 trocar a vizinhança $\mathcal{O}(G(t, x))$ por $\mathcal{O}_\varepsilon(G(t, x))$, então diremos que $G : \mathbb{R}_+ \times X \to \mathcal{P}(X)$ é fracamente semicontínua superiormente.*

(ii) *Se $G(t, .)$ for unívoca, i.e, $G : X \to X$, então a definição de fracamente semicontínua superiormente é equivalente a definição de função contínua no sentido usual.*

Agora apresentaremos condições suficientes que garantem a existência de um atrator global para semigrupos multívocos. Dado um semigrupo multívoco $G : \mathbb{R}_+ \times X \to \mathcal{P}(X)$, consideraremos as seguintes condições:

($\mathcal{H}_1$) G é B-dissipativo, ou seja, existe $B_0 \in \mathcal{B}(X)$ tal que para todo $B \in \mathcal{B}(X)$, existe $t(B) \geq 0$ para o qual

$$G(t, B) \subset B_0, \quad \text{para todo } t \geq t(B).$$

($\mathcal{H}_2$) A semitrajetória positiva

$$\gamma_0^+(B) := \bigcup_{t \geq 0} G(t, B)$$

é limitada para todo $B \in \mathcal{B}(X)$. Além disso, G é assintoticamente compacto, ou seja, qualquer sequência $\xi_n \in G(t_n, B)$, onde $t_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$, é precompacta para todo $B \in \mathcal{B}(X)$.

$(\mathcal{H}_3)$ $G : \mathbb{R}_+ \times X \to \mathcal{C}(X)$ é semicontínua superiormente.

No **Apêndice B** apresentamos condições que implicam na B-dissipatividade da G.

Proposição 3.3.7. *[9] Sejam G um semigrupo multívoco e $\mathcal{A}$ um atrator global associado a G. Então são verdadeiras as seguintes propriedades:*

(i) *para qualquer conjunto B limitado e negativamente invariante em X, tem-se $B \subset \overline{\mathcal{A}}$.*

(ii) *se $\mathcal{A}$ é limitado, então para qualquer atrator global M fechado, tem-se $\mathcal{A} \subset M$. Portanto, se $\mathcal{A}$ é também fechado, ele é o minimal entre todos os atratores globais fechados.*

Demonstração: [Ver proposição 2.2.4, pg.16 em [9]].

Proposição 3.3.8. *[9] Se uma aplicação multívoca $G(t, .)$ for semicontínua superiormente e tem valores fechados, ou seja, $G(t, .) : X \to \mathcal{C}(X)$, então o gráfico de $G(t, .)$ é fechado.*

Demonstração: [Ver proposição 2.1.4, pg. 12 em [9]].

Teorema 3.3.9. *[2] Se as condições $(\mathcal{H}_\mathbf{1}) - (\mathcal{H}_\mathbf{3})$ são verdadeiras, então G tem um atrator global compacto $\mathcal{A} \neq \varnothing$ que é o minimal entre todos os atratores globais fechados que atraem conjuntos limitados de X. Além disso, se G é um semigrupo estrito, então $\mathcal{A}$ é invariante.*

Demonstração. Suponha que as condições $(\mathcal{H}_\mathbf{1}) - (\mathcal{H}_\mathbf{3})$ sejam verdadeiras. Então pela condição $(\mathcal{H}_\mathbf{1})$, existe um conjunto $B_0 \in \mathcal{B}(X)$ tal que para todo $B \in \mathcal{B}(X)$, existe $t(B) \geq 0$ para o qual

$$G(t, B) \subset B_0, \text{ para todo } t \geq t(B).$$

Pela condição $(\mathcal{H}_\mathbf{2})$, temos que $\gamma_0^+(B_0)$ é limitada. Defina $B_1 = \gamma_0^+(B_0)$ e $\mathcal{A} = \omega(B_1)$.

Afirmação 1: $\mathcal{A}$ é um conjunto não vazio.

De fato, seja uma sequência qualquer $\xi_n \in G(t_n, B_1)$ com $t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Pela condição $(\mathcal{H}_\mathbf{2})$, G é um semigrupo multívoco assintoticamente compacto, então existe uma subsequência $\{\xi_{n_j}\}_{j\geq 1}$ de $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ tal que $\xi_{n_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \xi$. Então pelo Lema 3.1.6, $\xi \in \omega(B_1) = \mathcal{A}$.

Portanto, $\mathcal{A} \neq \varnothing$.

Afirmação 2: $\mathcal{A}$ é um atrator global.

(i) $\mathcal{A}$ é negativamente invariante:

realmente, sejam $\xi \in \mathcal{A}$ e $t \geq 0$ arbitrários. Então pelo Lema 3.1.6, existe uma sequência $\xi_n \in G(t_n, B_1)$ com $t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que

$$\xi = \lim_{n\to+\infty} \xi_n.$$

Assim, para todo $t_n \geq t$ temos que $G(t_n, B_1) = G(t_n+t-t, B_1) \subset G(t, G(t_n-t, B_1))$. Então para alguma sequência $\theta_n \in G(t_n - t, B_1)$ tem-se $\xi_n \in G(t, \theta_n)$. Como G é assintoticamente compacto e $t_n - t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, existe uma subsequência $\{\theta_{n_m}\}_{m\geq 1}$ de $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$ tal que $\theta_{n_m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \theta \in \mathcal{A}$. Como G é semicontínua superiormente e tem valores fechados, temos pela Proposição 3.3.8 que o gráfico de $G(t, .)$ é fechado. Portanto,

$$\xi \in G(t, \theta) \subset G(t, \mathcal{A}).$$

Como ξ e t foram arbitrários, concluímos que $\mathcal{A} \subset G(t, \mathcal{A})$, para todo $t \geq 0$.

(ii) $\mathcal{A}$ atrai conjuntos limitados de X:

mostraremos primeiramente que $\mathcal{A}$ atrai B_1.

Com efeito, suponha por contradição, que $\mathcal{A}$ não atrai B_1. Então existe algum $\varepsilon_0 > 0$ e alguma sequência $\xi_n \in G(t_n, B_1)$ com $t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que

$$\operatorname{dist}(\xi_n, \mathcal{A}) \geq \varepsilon_0. \tag{3.1}$$

Como G é um semigrupo multívoco assintoticamente compacto, existe uma subsequência $\{\xi_{n_j}\}_{j\geq 1}$ de $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ tal que $\xi_{n_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \xi \in \mathcal{A}$ (Pelo Lema 3.1.6). Logo, $\operatorname{dist}(\xi_{n_j}, \mathcal{A}) < \varepsilon_0$, para todo j suficientemente grande, o que contradiz (3.1). Portanto, $\mathcal{A}$ atrai B_1.

Agora mostraremos que $\mathcal{A}$ atrai qualquer conjunto limitado de X.

De fato, como G é B-dissipativo, já sabemos que para todo conjunto limitado $B \subset X$, existe $T(B) \geq 0$ tal que $G(t, B) \subset B_0$, para todo $t \geq T(B)$. Visto que $\mathcal{A}$ atrai B_1, então dado $\varepsilon > 0$, existe $T(\varepsilon, B_1) \geq 0$ tal que

$$G(t, B_1) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A}).$$

Então dado um conjunto limitado $B \subset X$ arbitrário, temos

$$G(t, B) \subset B_0 \subset \gamma_0^+(B_0) = B_1, \forall t \geq T(B).$$

Tomando $T_1(B, \varepsilon) := T(B) + T(\varepsilon, B_1)$ e $t \geq T_1(\varepsilon, B)$, obtemos

$$G(t, B) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A}), \forall t \geq T_1(\varepsilon, B).$$

Portanto, $\mathcal{A}$ atrai B. Como B é um conjunto limitado arbitrário, concluímos que $\mathcal{A}$ atrai qualquer limitado de X.

Afirmação 3: $\mathcal{A}$ é compacto.

De fato, seja $\{x_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência qualquer em $\mathcal{A}$. Então pelo Lema 3.1.6, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $\{z_j^n\}_{j\in\mathbb{N}} \subset G(t_j^n, B_1)$ tal que $x_n = \lim\limits_{j\to+\infty} z_j^n$ com $t_j^n \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Considere a seguência formada pela diagonal em:

$$\begin{array}{lclllll}
n = 1 & : & z_1^1 & z_2^1 & z_3^1 & \cdots \to & x_1 \\
n = 2 & : & z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & \cdots \to & x_2 \\
n = 3 & : & z_1^3 & z_2^3 & z_3^3 & \cdots \to & x_3 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
n = m & : & z_1^m & z_2^m & z_3^m & \cdots \to & x_m.
\end{array}$$

Note que $\{z_n^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G(t_n^n, B_1)$. Como G é um semigrupo multívoco assintoticamente compacto e $t_n^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, existe uma subsequência $\{z_{n_j}^{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{z_n^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_{n_j}^{n_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z \in \mathcal{A}$. Observe que para concluirmos que $\mathcal{A}$ é compacto, basta mostrarmos que $x_{n_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z$.

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho(x_{n_j}, z) \leq \rho(x_{n_j}, z_{n_j}^{n_j}) + \rho(z_{n_j}^{n_j}, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall j \geq j_0.$$

Logo, $x_{n_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z$. Portanto, existe uma subsequência $\{x_{n_j}\}_{j\geq 1}$ de $\{x_n\}_{n\geq 1}$ que converge em $\mathcal{A}$. Como $\{x_n\}_{n\geq 1}$ é arbitrária, concluímos que $\mathcal{A}$ é compacto.

Afirmação 4: $\mathcal{A}$ é o atrator global minimal fechado que atrai limitados de X.

De fato, como $\mathcal{A}$ é um atrator global limitado e fechado (pois é compacto), então pelo item (**ii**) da Proposição 3.3.7, para qualquer outro atrator global fechado M tem-se $\mathcal{A} \subset M$. Portanto, $\mathcal{A}$ é o atrator minimal entre todos os atratores globais fechados que atrai conjuntos limitados de X.

Suponhamos agora que G é um semigrupo multívoco estrito, i.e,

$$G(t+s,x) = G(t, G(s,x)), \forall x \in X, t, s \in \mathbb{R}_+.$$

Afirmação 5: $\mathcal{A}$ é invariante, ou seja, $\mathcal{A} = G(t,\mathcal{A}),$ para todo $t \geq 0$.

De fato, já sabemos que $\mathcal{A}$ é negativamente invariante, i.e, $\mathcal{A} \subset G(t,\mathcal{A}),$ para todo $t \geq 0$. Agora mostraremos que $\mathcal{A}$ é positivamente invariante, i.e, $G(t,\mathcal{A}) \subset \mathcal{A},$ para todo $t \geq 0$.

Com efeito, seja $t \geq 0$ fixado. Como $\mathcal{A} \subset G(s,\mathcal{A})$, para todo $s \geq 0$, temos

$$G(t,\mathcal{A}) \subset G(t, G(s,\mathcal{A})) = G(t+s,\mathcal{A}), \forall s \geq 0.$$

Como $\mathcal{A}$ é um atrator global compacto, em particular é um conjunto limitado. Visto que $\mathcal{A}$ atrai limitados de X, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $S(\varepsilon,\mathcal{A}) \geq 0$ tal que

$$G(t + S(\varepsilon,\mathcal{A}),\mathcal{A}) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A}).$$

Como $\varepsilon > 0$ foi arbitrário, temos

$$G(t,\mathcal{A}) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}.$$

Logo, $G(t,\mathcal{A}) \subset \mathcal{A},$ para todo $t \geq 0$. Portanto, $\mathcal{A} = G(t,\mathcal{A}),$ para todo $t \geq 0$. $\square$

Proposição 3.3.10. *[3] O atrator global compacto e invariante $\mathcal{A}$ do Teorema 3.3.9 é o maximal compacto e invariante que atrai limitados de X. Portanto, $\mathcal{A}$ é o atrator global minimal fechado e maximal compacto invariante que atrai limitados de X.*

Demonstração. Seja M um conjunto compacto e invariante qualquer associado ao semigrupo multívoco G de X. Mostraremos que $M \subset \mathcal{A}$.

De fato, temos $\mathcal{A}$ é um atrator compacto e invariante. Como M é invariante, segue que

$$G(t, M) = M, \forall t \geq 0.$$

Por outro lado, como M é limitado e $\mathcal{A}$ é um atrator global, temos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $t(\varepsilon, M) \geq 0$ tal que

$$M = G(t(\varepsilon, M), M)) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A}).$$

Como $\varepsilon > 0$ foi arbitrário, temos que $M \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. Logo $M \subset \mathcal{A}$. Portanto, $\mathcal{A}$ é o atrator global maximal compacto e invariante que atrai limitados de X. □

Definição 3.3.11. *[2] Dizemos que um ponto $x \in X$ é ponto de equilíbrio (ou ponto fixo) de um semigrupo multívoco G, se:*

$$x \in G(t, x), \text{ para todo } t \geq 0.$$

O seguinte resultado fornece condições suficientes para a existência de equilíbrios maximal e minimal no atrator, bem como algumas informações sobre a estrutura do atrator global.

Teorema 3.3.12. *[2] Sejam G um semigrupo multívoco estrito monótono satisfazendo as condições $(\mathcal{H}_\mathbf{1}) - (\mathcal{H}_\mathbf{3})$ e $\mathcal{A}$ o atrator global compacto invariante associado a G. Então existem equilíbrios $x_*, y^* \in \mathcal{A}$ de modo que:*

(1) *$x_* \preceq y^*$ e*

$$\mathcal{A} \subseteq [x_*, y^*]. \tag{3.2}$$

(2) *x_* é minimal e y^* maximal no sentido de que qualquer outros pontos fixos de G estão contidos no intervalo $[x_*, y^*]$.*

Se as soluções correspondentes às condições iniciais x_*, y^* são únicas, ou seja, se $G(t, x_*) = x_*$ e $G(t, y^*) = y^*$, para todo $t \in \mathbb{R}$, então:

(3) *x_* atrai globalmente de baixo, ou seja, para todo $v \in X$ com $v \preceq x_*$, temos que*

$$\lim_{t\to+\infty} dist(G(t,v), x_*) = 0.$$

(4) *y^* atrai globalmente de cima, ou seja, para todo $v \in X$ com $y^* \preceq v$, temos que*

$$\lim_{t\to+\infty} dist(G(t,v), y^*) = 0.$$

Demonstração. (**1**): Note que $\mathcal{A}$ é limitado, pois é um conjunto compacto. Assim, pelo item (**1**) da compatibilidade da ordem com a topologia em X na Definição 3.2.3, existem $\underline{x}$ e $\overline{y}$ em X com $\underline{x} \preceq \overline{y}$ tal que $\mathcal{A} \subseteq [\underline{x}, \overline{y}]$. Logo,

$$\underline{x} \preceq u \preceq \overline{y}, \text{ para todo } u \in \mathcal{A}.$$

Como G é um semigrupo multívoco monótono, $G(t,\underline{x}) \preceq G(t,u) \preceq G(t,\overline{y}),$ para todo $t \geq 0$, de modo que existam $\underline{x}(t,u) \in G(t,\underline{x})$ e $\overline{y}(t,u) \in G(t,\overline{y})$ tais que

$$\underline{x}(t,u) \preceq z \preceq \overline{y}(t,u), \text{ para todo } z \in G(t,u), u \in \mathcal{A}.$$

Note que $G(t,x) \preceq G(t,x)$, para todo $x \in X$. Logo $G(t,x)$ tem um elemento minimal e maximal. Usando isto para $\underline{x}$ e $\overline{y}$, temos que existem $\underline{x}^{min}(t) \in G(t,\underline{x})$ e $\overline{y}^{max}(t) \in G(t,\overline{y})$ tais que

$$\underline{x}^{min}(t) \preceq \underline{x}(t,u) \preceq z \preceq \overline{y}(t,u) \preceq \overline{y}^{max}(t), \text{ para todo } z \in G(t,u), u \in \mathcal{A}.$$

Assim, $\underline{x}^{min}(t) \preceq z \preceq \overline{y}^{max}(t),$ para todo $z \in G(t,u), u \in \mathcal{A}$.

Visto que $\mathcal{A}$ é negativamente invariante, i.e, $\mathcal{A} \subset G(t,\mathcal{A})$, para todo $t \geq 0$, então

$$\underline{x}^{min}(t) \preceq u \preceq \overline{y}^{max}(t), \text{ para todo } u \in \mathcal{A}.$$

Como $\mathcal{A}$ é um atrator global, ele atrai os conjuntos limitados unitários $\{\underline{x}\}$ e $\{\overline{y}\}$. Logo, $\lim\limits_{t\to+\infty} \text{dist}(G(t,\underline{x}),\mathcal{A}) = 0$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} \text{dist}(G(t,\overline{y}),\mathcal{A}) = 0$. Uma vez que $\underline{x}^{min}(t) \in G(t,\underline{x})$ e $\overline{y}^{max}(t) \in G(t,\overline{y})$, temos que $\lim\limits_{t\to+\infty} \text{dist}(\underline{x}^{min}(t),\mathcal{A}) = 0$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} \text{dist}(\overline{y}^{max}(t),\mathcal{A}) = 0$. Assim, dado $\varepsilon = \frac{1}{n},(n \in \mathbb{N})$, existe $t_n \geq 0$ tal que $\underline{x}^{min}(t_n) \in \mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(\mathcal{A})$. Logo, existe uma sequência $x_n \in \mathcal{A}$ tal que

$$\rho(\underline{x}^{min}(t_n), x_n) < \frac{1}{n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, como $\{x_n\} \subset \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é compacto, existe uma subsequência de $\{x_n\}_{n\geq 1}$ em $\mathcal{A}$ que continuaremos chamando de $\{x_n\}_{n\geq 1}$ e $x_* \in \mathcal{A}$ tal que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_*$.

Afirmação: $\underline{x}^{min}(t_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_*$.

De fato,

$$\rho(\underline{x}^{min}(t_n), x_*) \leq \rho(\underline{x}^{min}(t_n), x_n) + \rho(x_n, x_*) < \frac{1}{n} + \rho(x_n, x_*) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto, $\underline{x}^{min}(t_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_*$.

Analogamente, existe $y^* \in \mathcal{A}$ tal que $\overline{y}^{max}(t_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y^*$. Assim, pelo item (**2**) da compatibilidade da ordem com a topologia em X na Definição 3.2.3, temos que

$$x_* \preceq u \preceq y^*, \text{ para todo } u \in \mathcal{A}. \tag{3.3}$$

Portanto, $\mathcal{A} \subseteq [x_*, y^*]$ com $x_* \preceq y^*$.

Afirmação: x_* e y^* são pontos de equilíbrios de G, i.e, $x_* \in G(t, x_*)$ e $y^* \in G(t, y^*)$, para todo $t \geq 0$.

Mostraremos primeiramente a unicidade de x_* e y^* em (3.3).

Realmente, suponha que existam x_*^1 e x_*^2 em $\mathcal{A}$ satisfazendo (3.3), então

$$x_*^1 \preceq x_*^2 \text{ e } x_*^2 \preceq x_*^1.$$

Portanto, $x_*^1 = x_*^2$. Analogamente, mostra-se a unicidade de y^*.

Como $\mathcal{A}$ é negativamente invariante e G é um semigrupo multívoco monótono, existem $\underline{x}(t) \in G(t, x_*)$ e $\overline{y}(t) \in G(t, y^*)$, $t \geq 0$, tais que

$$\underline{x}(t) \preceq u \preceq \overline{y}(t), \text{ para todo } u \in \mathcal{A}.$$

De fato, dado um arbitrário $u \in \mathcal{A} \subset G(t, \mathcal{A})$, para todo $t \geq 0$, existe $u = y(t) \in G(t, \overline{u})$, para algum $\overline{u} \in \mathcal{A}$. Note que de (3.3), $x_* \preceq \overline{u}$. Como G é monótono, $G(t, x_*) \preceq G(t, \overline{u})$, para todo $t \geq 0$, i.e, existe um $\underline{x}(t) \in G(t, x_*)$ tal que $\underline{x}(t) \preceq z(t)$, para todo $z(t) \in G(t, \overline{u})$. Em particular, $\underline{x}(t) \preceq y(t) = u$. Analogamente, $u \preceq \overline{y}(t)$, para todo $u \in \mathcal{A}$. Portanto, $\underline{x}(t) \preceq u \preceq \overline{y}(t)$, para todo $u \in \mathcal{A}$.

Por outro lado, $\mathcal{A}$ é positivamente invariante, assim temos que

$$\underline{x}(t) \in G(t, x_*) \subset G(t, \mathcal{A}) \subset \mathcal{A}.$$

Analogamente, $\overline{y}(t) \in \mathcal{A}$. Assim, pela unicidade de x_* e y^*, temos que $\underline{x}(t) = x_*$ e $\overline{y}(t) = y^*$. Como $t \geq 0$ foi arbitrário, concluímos que

$$x_* \in G(t, x_*) \text{ e } y^* \in G(t, y^*), \text{ para todo } t \geq 0.$$

(**2**) : Seja z_* um ponto de equilíbrio qualquer de G, i.e, $z_* \in G(t, z_*)$, para todo $t \geq 0$.

Visto que $x_* \preceq u \preceq y^*$, para todo $u \in \mathcal{A}$. Basta mostrarmos que $z_* \in \mathcal{A}$.

De fato, como $\mathcal{A}$ é um atrator global, ele atrai os conjuntos limitados de X. Em particular, ele atrai o conjunto unitário $\{z_*\}$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $t_1 := t_1(\varepsilon, \{z_*\}) \geq 0$ tal que

$$z_* \in G(t, z_*) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A}), \text{ para todo } t \geq t_1.$$

Como $\varepsilon > 0$ foi arbitrário, temos que

$$z_* \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}.$$

Portanto, $z_* \in \mathcal{A}$.

A partir de agora suponhamos que as soluções correspondentes as condições x_* e y^* são únicas, i.e, $G(t, x_*) = x_*$ e $G(t, y^*) = y^*$, para todo $t \geq 0$.

(**3**): Seja $v \in X$ qualquer com $v \preceq x_*$. Queremos mostrar que

$$\lim_{t \to +\infty} \text{dist}(G(t, v), x_*) = 0. \tag{3.4}$$

De fato, da monotonicidade do semigrupo multívoco G, temos

$$G(t, v) \preceq G(t, x_*) = x_*, \text{ para todo } t \geq 0. \tag{3.5}$$

Como $\mathcal{A}$ é um atrator global, ele atrai o conjunto limitado unitário $\{v\}$, ou seja, $\lim\limits_{t \to +\infty} \text{dist}(G(t, v), \mathcal{A}) = 0$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $t(\varepsilon, \{v\}) \geq 0$ tal que

$$\sup_{z \in G(t,v)} \inf_{w \in \mathcal{A}} \{\rho(z, w)\} < \varepsilon, \text{ para todo } t \geq t(\varepsilon, \{v\}). \tag{3.6}$$

Note por (3.5) que $z \preceq x_*$, para todo $z \in G(t, v)$, para todo $t \geq 0$. Além disso, note que para cada arbitrário $z_t \in G(t, v)$, tem-se que $\inf_{w \in \mathcal{A}}\{\rho(z_t, w)\} < \varepsilon$, para todo $t \geq$

$t(\varepsilon, \{v\})$, pois vale (3.6).

Afirmação: $\inf_{w\in\mathcal{A}}\{\rho(z_t, w)\} = \rho(z_t, x_*)$, para cada $t \geq t(\varepsilon, \{v\})$.

De fato, como $z_t \preceq x_* \preceq w$ para todo $w \in \mathcal{A}$, então pela compatibilidade da ordem com a topologia em X na Definição 3.2.3, item (**3**), $\rho(z_t, x_*) \preceq \rho(z_t, w)$, para todo $w \in \mathcal{A}$. Em particular, temos que $\rho(z_t, x_*) \preceq \inf_{w\in\mathcal{A}}\{\rho(z_t, w)\}$, para cada $t \geq t(\varepsilon, \{v\})$.
Como $x_* \in \mathcal{A}$, obtemos que

$$\rho(z_t, x_*) \preceq \inf_{w\in\mathcal{A}}\{\rho(z_t, w)\} \preceq \rho(z_t, x_*), \text{ para cada } t \geq t(\varepsilon, \{v\}).$$

Portanto, $\inf_{w\in\mathcal{A}}\{\rho(z_t, w)\} = \rho(z_t, x_*)$, para cada $t \geq t(\varepsilon, \{v\})$. Logo, $\mathrm{dist}(G(t, v), x_*) = \sup_{z_t\in G(t,v)}\{\rho(z_t, x_*)\} < \varepsilon$, para todo $t \geq t(\varepsilon, \{v\})$. Portanto, vale (3.4).
(**4**): Dado $v \in X$ com $y^* \preceq v$. Mostraremos que

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{dist}(G(t, v), y^*) = 0. \tag{3.7}$$

Com efeito, da monotonicidade do semigrupo multívoco G, temos

$$y^* = G(t, y^*) \preceq G(t, v), \text{ para todo } t \geq 0. \tag{3.8}$$

Como $\mathcal{A}$ é atrator global, ele atrai o conjunto limitado unitário $\{v\}$, ou seja, $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{dist}(G(t, v), \mathcal{A}) = 0$. Em outras palavras, dado $\varepsilon > 0$, existe $t(\varepsilon, \{v\}) \geq 0$ tal que

$$\sup_{z\in G(t,v)} \inf_{w\in\mathcal{A}}\{\rho(z, w)\} < \varepsilon, \text{ para todo } t \geq t(\varepsilon, \{v\}). \tag{3.9}$$

Note por (3.8) que $y^* \preceq z$, para todo $z \in G(t, v)$, para todo $t \geq 0$. Além disso, note por (3.9) que para qualquer $z_t \in G(t, v)$, o $\inf_{w\in\mathcal{A}}\{\rho(z_t, w)\} < \varepsilon$, para todo $t \geq t(\varepsilon, \{v\})$.

Afirmação: $\inf_{w\in\mathcal{A}}\{\rho(z_t, w)\} = \rho(z_t, y^*)$, para cada $t \geq t(\varepsilon, \{v\})$.

De fato, como $w \preceq y^* \preceq z_t$, para todo $w \in \mathcal{A}$. Então pela compatibilidade da ordem com a topologia em X na Definiçao 3.2.3, item (**3**), $\rho(y^*, z_t) \preceq \rho(w, z_t)$, para todo $w \in \mathcal{A}$. Em particular, temos que $\rho(y^*, z_t) \preceq \inf_{w\in\mathcal{A}}\{\rho(w, z_t)\}$, para cada $t \geq t(\varepsilon, \{v\})$. Como $y^* \in \mathcal{A}$, obtemos que

$$\rho(y^*, z_t) \preceq \inf_{w\in\mathcal{A}}\{\rho(w, z_t)\} \preceq \rho(y^*, z_t), \text{ para cada } t \geq t(\varepsilon, \{v\}).$$

Portanto, $\rho(y^*, z_t) = \inf_{w\in\mathcal{A}}\{\rho(w, z_t)\}$, para cada $t \geq t(\varepsilon)$. Logo, $\mathrm{dist}(G(t, v), y^*) = \sup_{z_t\in G(t,v)}\{\rho(z_t, y^*)\} < \varepsilon$, para todo $t \geq t(\varepsilon, \{v\})$. Portanto, vale (3.7). □

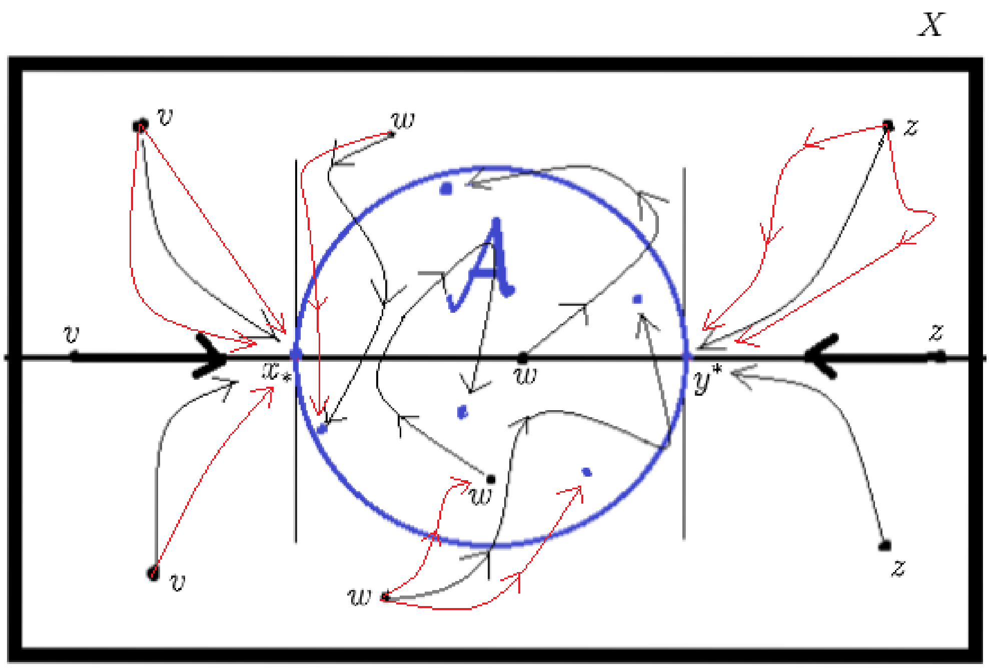

Figura 3.1: Representação Geométrica do Atrator Global do Teorema 3.3.12. Nesta ilustração $v \preceq x_*$ e $y^* \preceq z$.

Capítulo 4

Aplicação: Equações Diferenciais Ordinárias com Lado Direito Contínuo

Neste capítulo, aplicaremos nossa teoria a um sistema modelado por uma equação diferencial ordinária sem unicidade de solução, de modo que um semigrupo multívoco correspondente é monótono, para que nossos resultados anteriores possam ser aplicados.

4.1 Caso N-Dimensional: Um Sistema Cooperativo.

Considere a ordem usual em $\mathbb{R}^N$, ou seja,

$$x \leq y \Longleftrightarrow x_i \leq y_i, \text{ para todo } i = 1, ..., N.$$

Dizemos que $x < y$, se $x \leq y$ e existe $j \in \{1, ..., N\}$ tal que $x_j < y_j$.

Agora vamos considerar o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

com $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ contínua e satisfazendo a hipótese

$$\langle f(x), x \rangle \leq c_1 ||x||^2 + c_2, c_1 \in \mathbb{R}, c_2 > 0. \tag{4.2}$$

As notações $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e $||\cdot||$ são respectivamente, o produto interno e a norma em $\mathbb{R}^N$. Suponha também a seguinte hipótese de monotonicidade em f :

$$f_i(x) \leq f_i(y), \text{ se } x, y \in \mathbb{R}^N, x_i = y_i \text{ e } x \leq y, i = 1, ..., N. \tag{4.3}$$

Observação 4.1.1. *[1] Note que $x(t)$ é solução de (4.1) se, e somente se,*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds.$$

Exemplo. *Dois exemplos de funções que satisfazem as hipóteses (4.2) e (4.3) :*

(a) a função identidade $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ dada por $f(x) = x$;

(b) a função $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ dada por $f(x) = k_1x + k_2$, onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Agora apresentaremos um exemplo de uma função que satisfaz apenas a condição de continuidade e monotonicidade.

Exemplo. *Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2, x_1 + x_2^2)$*

Verificaremos primeiramente que f é contínua. Para isso, mostraremos que as funções coordenadas de f são contínuas.

De fato, mostraremos que f_1 é contínua (para f_2 é análoga). Seja uma sequência qualquer $(\psi_n, \xi_n) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$(\psi_n, \xi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\psi, \xi) \tag{4.4}$$

Mostraremos que $f_1(\psi_n, \xi_n) \longrightarrow f_1(\psi, \xi)$.

Realmente, $f_1(\psi_n, \xi_n) = \psi_n^2 + \xi_n$. Passando o limite em ambos os lados com $n \to \infty$ e usando a convergência em (4.4), obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} f_1(\psi_n, \xi_n) = \lim_{n\to+\infty} (\psi_n^2 + \xi_n) = \lim_{n\to+\infty} \psi_n^2 + \lim_{n\to+\infty} \xi_n = \psi^2 + \xi = f_1(\psi, \xi).$$

Portanto, f_1 é contínua.

Agora mostraremos que $f_i(x) \leq f_i(y)$, sempre que $x_i = y_i$ e $x \leq y$ com $x, y \in \mathbb{R}^2$,ou seja, a monotonicidade da f.

Considere $x, y \in \mathbb{R}^2$ com $x \leq y$.

(1) *Se $x_1 = y_1$, vamos mostrar que $f_1(x) \leq f_1(y)$.*

De fato, suponha que $x_1 = y_1$, então temos

$$f_1(x) = x_1^2 + x_2 = y_1^2 + x_2 \leq y_1^2 + y_2 = f_1(y).$$

(2) *Suponha agora que $x_2 = y_2$. Temos*

$$f_2(x) = x_1 + x_2^2 = x_1 + y_2^2 \leq y_1 + y_2^2 = f_2(y).$$

Observação 4.1.2. *[1] Pelo Teorema de Peano (2.1.34), o problema (4.1) tem ao menos uma solução local.*

Proposição 4.1.3. *[2] Se a função contínua $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ satisfaz a condição (4.2), então qualquer solução de (4.1) é definida globalmente no tempo e para qualquer $T > 0$, o conjunto das soluções no intervalo $[0, T]$ é uniformemente limitado em conjuntos limitados de dados iniciais.*

Demonstração. Seja $T > 0$ fixado arbitrariamente. Seja $B \subset X$ um conjunto limitado qualquer e seja $x(\cdot)$ uma solução arbitrária do problema (4.1) com $x(0) = x_0 \in B$. Como B é limitado, existe um $r > 0$ tal que $\|b\| \leq r$, para todo $b \in B$. Em particular, $||x_0|| < r$. Observe agora que

$$\frac{d}{dt}||x(t)||^2 = \frac{d}{dt}\langle x(t), x(t)\rangle = \langle \frac{d}{dt}x(t), x(t)\rangle + \langle x(t), \frac{d}{dt}x(t)\rangle = 2\langle \dot{x}(t), x(t)\rangle. \tag{4.5}$$

Fazendo o produto interno da equação em (4.1) com $x(t)$ e usando a condição (4.2), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||x(t)||^2 = \langle \dot{x}(t), x(t)\rangle = \langle f(x(t)), x(t)\rangle \leq c_1||x(t)||^2 + c_2, \text{ onde } c_1 \in \mathbb{R} \text{ e } c_2 > 0.$$

Integrando de 0 a $t \leq T$, temos pelo Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\frac{1}{2}\|x(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|x(0)\|^2 \leq c_1 \int_0^t \|x(s)\|^2\, ds + c_2 t, \text{ onde } c_1 \in \mathbb{R} \text{ e } c_2 > 0.$$

Logo,

$$\|x(t)\|^2 \leq r^2 + 2c_2 T + 2c_1 \int_0^t \|x(s)\|^2\, ds, \forall t \in [0, T].$$

Aplicando o Lema de Gronwall, obtemos

$$\begin{aligned}\|x(t)\|^2 &\leq (r^2 + 2c_2T)e^{2\int_0^t c_1\,ds} = (r^2 + 2c_2T)e^{2c_1t}\\ &\leq (r^2 + 2c_2T)e^{2c_1T} =: \widehat{C}(B,T), \forall t \in [0,T].\end{aligned}$$

Tomando a raiz quadrada em ambos os lados da desigualdade anterior, obtemos

$$||x(t)|| \leq \sqrt{\widehat{C}(B,T)} =: C(B,T), \forall t \in [0,T].$$

Portanto, $\sup\limits_{t\in[0,T]} ||x(t)|| \leq C(B,T)$. Como queríamos demonstrar. □

Denote por $S(x_0) \subset C([0,+\infty), \mathbb{R}^N_+)$ o conjunto de todas as soluções com condição inicial x_0.

Defina também o conjunto

$$S(x_0,T) = \{x(\cdot) \in C([0,T], \mathbb{R}^N) : x(\cdot) \text{ é uma solução de } (4.1) \text{ com } x(0) = x_0\}.$$

Proposição 4.1.4. *[2] O conjunto $S(x_0,T)$ é relativamente compacto em $C([0,T], \mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Basta mostrarmos que $S(x_0,T)$ satisfaz as hipóteses do Teorema Ascoli-Arzelá, ou seja:

1 $S(x_0,T)$ é equicontínuo $[0,T]$.

2 $S(x_0,T)(t) = \{x(t) : x(\cdot) \in S(x_0,T)\}$ é relativamente compacto em $\mathbb{R}^N$, para cada $t \in [0,T]$.

Mostraremos primeiramente que $S(x_0,T)$ é equicontínuo em $[0,T]$.

Dado $\varepsilon > 0$. Sejam $t, s \in [0,T]$ quaisquer com $s < t$ e considere $x(\cdot) \in S(x_0,T)$ uma solução arbitrária. Assim,

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau))\,d\tau \quad \text{e} \quad x(s) = x_0 + \int_0^s f(x(\tau))\,d\tau.$$

Mostraremos que $||x(t)-x(s)|| < \varepsilon$, sempre que $|t-s| < \delta$ (para algum $\delta > 0$ que depende de $\varepsilon > 0$ e independe de $x(\cdot)$).

De fato, seja $r > 0$ tal que $||x(\tau)|| \leq r$, para todo $\tau \in [0, T]$. Assim, $x(\tau) \in \overline{B(0, r)} \subset \mathbb{R}^N$, para todo $\tau \in [0, T]$. Defina $K = \overline{B(0, r)}$ e considere a restrição $f|_K : K \to \mathbb{R}^N$. Como $f|_K$ é contínua e K é compacto, existe $M = \max\limits_{\tau \in [0,T]} \{||f(x(\tau))||\} < +\infty$. Então,

$$\begin{aligned}
\|x(t) - x(s)\| &= \left\| \int_0^t f(x(\tau))d\tau - \int_0^s f(x(\tau))d\tau \right\| \\
&= \left\| \int_s^t f(x(\tau))d\tau \right\| \\
&\leq \int_s^t \|f(x(\tau))\| d\tau \\
&\leq \int_s^t M d\tau \\
&= M(t - s) < \varepsilon,
\end{aligned}$$

sempre que $|t - s| < \delta := \frac{\varepsilon}{M}$, para todo $x(\cdot) \in S(x_0, T)$. Portanto, $S(x_0, T)$ é equicontínuo em $[0, T]$.

Por fim, mostraremos que $S(x_0, T)(t)$ é relativamente compacto ($t \in [0, T]$ fixado).

De fato, basta mostrarmos que o fecho $\overline{S(x_0, T)(t)}$ é limitado em $\mathbb{R}^N$.

Fixe um $t > 0$. Suponha por contradição que $\overline{S(x_0, T)(t)}$ não seja limitado. Então existem pelo menos duas funções $g_1, g_2 \in \overline{S(x_0, T)(t)}$ tal que

$$d(g_1(t), g_2(t)) > M, \forall M > 0. \tag{4.6}$$

Fixando um $K > 0$, existem soluções $x_1(\cdot), x_2(\cdot) \in S(x_0, T)$ tais que $d(g_1(t), x_1(t)) < \frac{K}{2}$ e $d(g_2(t), x_2(t)) < \frac{K}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned}
d(g_1(t), g_2(t)) &\leq d(g_1(t), x_1(t)) + d(x_1(t), x_2(t)) + d(x_2(t), g_2(t)) \\
&< \frac{K}{2} + \frac{K}{2} + d(x_1(t), x_2(t)) \\
&\leq K + d(x_1(t), 0) + d(0, x_2(t)) \\
&\leq K + ||x_1(t)|| + ||x_2(t)|| \\
&\leq K + 2C(\{x_0\}, T).
\end{aligned}$$

Uma contradição com (4.6). Portanto, $\overline{S(x_0, T)(t)}$ é limitado. $\square$

Definição 4.1.5 (Concatenação). *[9] Sejam as aplicações $\phi, \psi : [0, +\infty) \to X$ com $\psi(0) = \phi(\pi)$. Definimos a aplicação concatenada $\theta : [0, +\infty) \to X$ dada por*

$$\theta(t) = \begin{cases} \phi(t) & , \text{ se } 0 \leq \ t \leq \pi; \\ \psi(t-\pi) & , \text{ se } t > \pi. \end{cases}.$$

Proposição 4.1.6. *[2] A função $G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, definida por*

$$G(t, x_0) = \{x(t) : x(\cdot) \in S(x_0)\},$$

assume valores compactos.

Demonstração. Dado $(t, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$. Mostraremos que de fato $G(t, x_0) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^N)$.

Tome $T \geq t$. Observe que $G(t, x_0) = S(x_0, T)(t)$ e pela Proposição 4.1.3, temos que $G(t, x_0)$ é limitado.

Mostraremos agora que $G(t, x_0)$ é fechado.

De fato, seja uma sequência qualquer $\xi_n = u_n(t) \in S(x_0, T)(t)$ com $\xi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi$. Mostraremos que $\xi \in S(x_0, T)(t)$, ou seja, $\xi = u(t)$ com $u(\cdot) \in S(x_0, T)$.

Considerando a sequência de soluções $\{u_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S(x_0, T)$, obtemos pelo Teorema de Ascoli-Arzelá, que existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{u_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{n_k}(\cdot) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u(\cdot)$ em $C([0, T], \mathbb{R}^N)$. Como $u_{n_k}(\cdot)$ é solução, sabemos que

$$\begin{array}{ccccc} u_{n_k}(\ell) & = & x_0 & + & \displaystyle\int_0^\ell f(u_{n_k}(\tau))d\tau \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ u(\ell) & = & x_0 & + & \displaystyle\int_0^\ell f(u(\tau))d\tau \end{array}$$

quando $k \to \infty$. Assim,

$$\xi_{n_k} = u_{n_k}(t) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \xi \text{ e } u_{n_k}(t) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u(t).$$

Pela unicidade do limite, temos $\xi = u(t)$. Portanto, $\xi \in S(x_0, T)(t)$.

Afirmação: $\displaystyle\int_0^\ell f(u_{n_k}(\tau))d\tau \longrightarrow \int_0^\ell f(u(\tau))d\tau$ quando $k \to \infty, \forall \ell \in [0, T]$.

Dado $\varepsilon > 0$ e $\ell \in [0, T]$ fixado, mostraremos que existe $k_\varepsilon > 0$ tal que

$$\left\| \int_0^\ell f(u_{n_k}(\tau))d\tau - \int_0^\ell f(u(\tau))d\tau \right\| < \varepsilon, \forall k \geq k_\varepsilon.$$

Note que se $\ell = 0$, é evidente.

Suponha agora que $\ell \in (0, T]$. Como $u_{n_k}(\cdot) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u(\cdot)$ em $[0, T]$ e f é contínua, então existe $k_\varepsilon > 0$ tal que

$$\|f(u_{n_k}(\tau)) - f(u(\tau))\| < \frac{\varepsilon}{\ell}, \text{ quando } k \geq k_\varepsilon, \forall \tau \in [0, T].$$

Temos

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^\ell f(u_{n_k}(\tau))d\tau - \int_0^\ell f(u(\tau))d\tau \right\| &= \left\| \int_0^\ell (f(u_{n_k}(\tau)) - f(u(\tau)))d\tau \right\| \\
&\leq \int_0^\ell \|f(u_{n_k}(\tau)) - f(u(\tau))\| \, d\tau \\
&= \int_0^\ell \frac{\varepsilon}{\ell} d\tau = \frac{\varepsilon}{\ell}\tau \bigg|_0^\ell = \varepsilon,
\end{aligned}$$

$\forall k \geq k_\varepsilon$. □

Observação 4.1.7. *[2] A função $G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \to \mathcal{K}(\mathbb{R}^N)$ é um semigrupo multívoco estrito.*

De fato, mostraremos que G satisfaz as condições da Definição 3.1.1:

(i) $G(0, x_0) = \{x(0) : x(\cdot) \in S(x_0)\} = \{x_0\} = x_0$.

(ii) Considere $z \in \mathbb{R}^N$ e $t, s \in \mathbb{R}_+$. Tome $y \in G(t+s, z)$, logo $y = x(t+s)$ com $x(\cdot) \in S(z)$.

Note que $y = \phi^s(t)$ com $\phi^s \in S(x(s))$ sendo definida por $\phi^s(\ell) = x(s + \ell)$.

Note também que $x(s) \in G(s, z)$. Assim,

$$y \in G(t, x(s)) \subset G(t, G(s, z)).$$

Mostraremos agora que G é estrito.

Dado $z \in \mathbb{R}^N$ e $t, s \in \mathbb{R}_+$. Tome $y \in G(t, G(s, z))$. Logo $y = y(t)$ com $y(0) \in G(s, z)$. Então existe $\psi(\cdot) \in S(z)$ tal que $y(0) = \psi(s)$.

Considere a função concatenada

$$\theta(\tau) = \begin{cases} \psi(\tau) & , \text{ se } 0 \leq \tau \leq s; \\ y(\tau - s) & , \text{ se } \tau > s. \end{cases}.$$

Pelo Lema da colagem, θ é uma função contínua e temos que $\theta(0) = z$ e

$$\dot{\theta}(\tau) = f(\theta(\tau)), \forall \tau > 0.$$

Portanto, $y = \theta(t+s) \in S(z,T)(t+s) = G(t+s,z)$. Como y foi arbitrário, $G(t, G(s,z)) \subset G(t+s,z)$.

Observação 4.1.8. *[2] Note que o conjunto dos pontos fixos do semigrupo multívoco G coincide com o conjunto dos zeros da função contínua f.*

De fato, seja $x_0 \in \mathbb{R}^N$ um ponto fixo de G, i.e, $x_0 \in G(t, x_0)$, para todo $t \geq 0$. Mostraremos que $f(x_0) = 0$. Suponha, por contradição, que $f_i(x_0) \neq 0$, para algum $i \in \{1, ..., N\}$. Suponhamos agora sem perda de generalidade que $f_i(x_0) > 0$ (o caso $f_i(x_0) < 0$ é análogo). Usando a continuidade da $f_i \circ x$ com $x(\cdot) \in S(x_0)$ qualquer, existe um $\delta > 0$ tal que $\dot{x}_i(t) = f_i(x(t)) > 0$, para $t \in [0, \delta]$. Portanto, $x_i(t) > x_i(0) = x_{0_i}$ em $t \in (0, \delta]$ e $x_0 \notin G(t, x_0)$, o que é uma contradição. Portanto, $f(x_0) = 0$.

Por outro lado, se $f(x_0) = 0$, então $x(t) = x_0$, para todo $t \geq 0$, é uma solução de (4.1). Assim, $x_0 \in G(t, x_0)$, para todo $t \geq 0$. Portanto, x_0 é ponto fixo de G.

Em muitas aplicações físicas e biológicas as variáveis x_i precisam ser não negativas. Portanto, precisamos definir um semigrupo multívoco no espaço de fase $\mathbb{R}^N_+$ em vez de $\mathbb{R}^N$.

Teorema 4.1.9. *[2] Suponha que*

$$f_i(x) \geq 0, \forall i \text{ e } x \in \mathbb{R}^N_+ \text{ tal que } x_i = 0. \tag{4.7}$$

Então para qualquer $x_0 \geq 0$ ($i.é, x_{0_i} \geq 0, \forall i$), existe pelo menos uma solução global tal que $x(t) \geq 0$, para qualquer $t \geq 0$.

Demonstração. Defina as funções aproximadas $f^\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \boldsymbol{d}, \varepsilon > 0$, onde $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{(1, ..., 1)}$. Note que $f_i^\varepsilon(x) \geq \varepsilon$, para todo i e $x \in \mathbb{R}^N_+$ tal que $x_i = 0$. Considere a seguinte família de problemas (em $\varepsilon > 0$):

$$\begin{cases} \dot{x}^\varepsilon(t) = f^\varepsilon(x^\varepsilon(t)) \\ x^\varepsilon(0) = x_0 \geq 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Mostraremos que para cada $\varepsilon > 0$ fixado, $x^{\varepsilon}(t) \geq 0$, para todo $t \geq 0$. Sem perda de generalidade, assumiremos que $\varepsilon \leq 1$.

Suponha, por contradição, que exista um $t_0 \geq 0$ tal que $x^{\varepsilon}(t_0) \ngeq 0$, i.e, existe $i_0 \in \{1, ..., N\}$ tal que $x^{\varepsilon}_{i_0}(t_0) < 0$. Como $x^{\varepsilon}_{i_0}(\cdot)$ é contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$x^{\varepsilon}_{i_0}(t) < 0, \text{ para todo } t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta). \tag{4.9}$$

Além disso, como $x^{\varepsilon}_{i_0}(\cdot)$ é solução de (4.8), $x^{\varepsilon}_{i_0}(0) \geq 0$ de modo que pela continuidade de $x^{\varepsilon}_{i_0}(\cdot)$, existe $t_1 \in [0, t_0 - \delta)$ tal que $x^{\varepsilon}_{i_0}(t_1) = 0$. Logo, $\dot{x}^{\varepsilon}_{i_0}(t_1) = f^{\varepsilon}_{i_0}(x^{\varepsilon}(t_1)) \geq 0$. Assim, existe $\gamma > 0$ tal que $x^{\varepsilon}_{i_0}(t) \geq 0$, para todo $t \in (t_1 - \gamma, t_1 + \gamma)$, o que contradiz (4.9). Portanto, $x^{\varepsilon}(t) \geq 0$, para todo $t \geq 0$.

Dado $t \geq 0$, tome $T \geq t$. Como f é contínua, temos que f^{ε} também é. Note que f^{ε} satisfaz a condição (4.2):

$$\begin{aligned} \langle f^{\varepsilon}(x), x\rangle &= \langle f(x) + \varepsilon \boldsymbol{d}, x\rangle \\ &= \langle f(x), x\rangle + \langle \varepsilon \boldsymbol{d}, x\rangle \\ &\leq c_1||x||^2 + c_2 + \varepsilon\langle \boldsymbol{d}, x\rangle \\ &= c_1||x||^2 + c_2 + \varepsilon(x_1 + ... + x_n). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Pela desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} \langle f^{\varepsilon}(x), x\rangle &\leq c_1||x||^2 + c_2 + \varepsilon(x_1 + ... + x_n) \\ &\leq c_1||x||^2 + c_2 + \varepsilon(\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2}x_n^2 + \frac{1}{2}) \\ &= \underbrace{(c_1 + \frac{\varepsilon}{2})}_{\tilde{C_1}^{\varepsilon}}||x||^2 + \underbrace{(c_2 + N\frac{1}{2}\varepsilon)}_{\tilde{C_2}^{\varepsilon}} \\ &\leq \underbrace{(c_1 + \frac{1}{2})}_{\tilde{C_1}}||x||^2 + \underbrace{(c_2 + \frac{N}{2})}_{\tilde{C_2}} \\ &= \tilde{C_1}||x||^2 + \tilde{C_2}. \end{aligned}$$

Note que pela Proposição 4.1.3, $x^{\varepsilon}(\cdot)$ é uniformemente limitada em $C([0, T], \mathbb{R}^N)$.

Afirmação 1: $\frac{d}{dt}x^{\varepsilon}(t)$ é uniformemente limitada em $C([0, T], \mathbb{R}^N)$.

De fato,

$$\begin{aligned}||\frac{d}{dt}x^{\varepsilon}(t)|| &= ||f^{\varepsilon}(x^{\varepsilon}(t)|| \\ &= ||f(x^{\varepsilon}(t)) + \varepsilon d|| \\ &\leq ||f(x^{\varepsilon}(t))|| + ||\varepsilon d|| \\ &= ||f(x^{\varepsilon}(t))|| + \varepsilon\sqrt{N} \\ &\leq ||f(x^{\varepsilon}(t))|| + \sqrt{N} \\ &\leq C + \sqrt{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall t \in [0,T].\end{aligned}$$

Pois, $x^{\varepsilon}(t) \in \overline{B(0, C(\tilde{C_1}, \tilde{C_2}, x_0, T))} =: K$ e f é contínua no compacto K. Portanto, possui máximo e mínimo.

Afirmação 2: $x^{\varepsilon}(\cdot)$ é equicontínua em $[0,T]$.

De fato, dado $\gamma > 0$, temos pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned}\|x^{\varepsilon}(t) - x^{\varepsilon}(s)\| &= \left\| \int_s^t \frac{d}{d\tau} x^{\varepsilon}(\tau) d\tau \right\| \\ &\leq \int_s^t \left\| \frac{d}{d\tau} x^{\varepsilon}(\tau) \right\| d\tau \\ &< (C + \sqrt{N})(t-s) < \gamma, \forall \varepsilon > 0,\end{aligned}$$

sempre que $|t-s| < \delta := \frac{\gamma}{C+\sqrt{N}}$ com $t, s \in [0,T]$. Assim, $x^{\varepsilon}(\cdot)$ é equicontínua em $[0,T]$.

Tome $\varepsilon_n = \frac{1}{n} + \varepsilon$. Pelo Teorema de Ascoli-Arzelá, existe uma subsequência de $\{x^{\varepsilon_n}(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (que continuaremos chamando da mesma forma) tal que $x^{\varepsilon_n}(\cdot) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x(\cdot)$ em $C([0,T], \mathbb{R}^N)$. Note que para cada $t \in [0,T]$, $x(t) = \lim_{n\to\infty} x^{\varepsilon_n}(t) \geq 0$. Resta justificar que $x(\cdot)$ é solução de (4.8).

De fato, como $x^{\varepsilon_n}(\cdot)$ é solução de (4.8), temos pela Observação 4.1.1, que

$$\begin{array}{ccccc} x^{\varepsilon_n}(t) & = & x_0 & + & \displaystyle\int_0^t f^{\varepsilon_n}(x^{\varepsilon_n}(\tau))d\tau \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x(t) & = & x_0 & + & \displaystyle\int_0^t f(x(\tau))d\tau \end{array}$$

quando $n \to \infty$ e $\varepsilon \to 0$. A passagem do limite pode ser justificada de forma análoga como foi feita na demonstração da Proposição 4.1.6. Portanto, $x(\cdot)$ é solução de (4.1), para todo $t \in [0, T]$. Repetindo o mesmo processo nos intervalos $[T, 2T], [2T, 3T]$, etc, e usando o argumento diagonal, obtemos uma solução globalmente definida $x(\cdot)$ tal que $x(t) \geq 0$. Portanto, $x(\cdot) \in S(y_0, T)$, onde $x(t) \geq 0$. $\square$

Observação 4.1.10. *[2] Note que o Teorema 4.1.9 não garante que todas as soluções sejam não negativas, como pode ser verificado no seguinte exemplo.*

Exemplo. *Considere o seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \operatorname{sign}(x)\sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

onde,

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ se } x < 0; \\ 0 & , \text{ se } x = 0; \\ 1 & , \text{ se } x > 0. \end{cases}$$

Tomando $f(x) = \operatorname{sign}(x)\sqrt{|x|}$, note que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}_+$ tal que $x = 0$ (pois $f(0) = 0$). Assim, f satisfaz as hipóteses do teorema anterior. Por outro lado, note que as seguintes funções $x_1(\cdot), x_2(\cdot)$ e $x_3(\cdot)$ são soluções do problema de valor inicial (4.11), para todo $t \geq 0$:

(1) $x_1(t) = 0$, *para todo* $t \geq 0$.

De fato, $\dot{x_1}(t) = 0$, *para todo* $t > 0$. *Assim, temos*

$$\dot{x_1}(t) = 0 = f(x_1(t)) \text{ e } x_1(0) = 0.$$

(2) $x_2(t) = \frac{t^2}{4}$, *para todo* $t \geq 0$.

De fato, $\dot{x_2}(t) = \frac{t}{2}$, *para todo* $t > 0$. *Assim, temos*

$$\dot{x_2}(t) = \frac{t}{2} = f(x_2(t)) \text{ e } x_2(0) = 0.$$

(3) $x_3(t) = -\frac{t^2}{4}$, *para todo* $t \geq 0$.

De fato, $\dot{x_3}(t) = -\frac{t}{2}$, *para todo* $t > 0$. *Assim, temos*

$$\dot{x_3}(t) = -\frac{t}{2} = f(x_3(t)) \text{ e } x_3(0) = 0.$$

Portanto, $x_1(\cdot), x_2(\cdot)$ *e* $x_3(\cdot)$ *são soluções de* (4.11)*, com* $x_1(t), x_2(t) \geq 0,$ *para todo* $t \geq 0,$ *mas* $x_3(t) < 0,$ *para todo* $t > 0.$

Denote por $D(x_0) \subset C([0, +\infty), \mathbb{R}^N_+)$ o conjunto de todas as soluções com condição inicial x_0, de modo que $x(t) \geq 0,$ para todo $t \geq 0.$

Defina também o conjunto $D(x_0, T) = \{x : [0, T] \to \mathbb{R}^N; x(\cdot) \in D(x_0)\}.$

Proposição 4.1.11. *[2] O conjunto* $D(x_0, T)$ *é um subconjunto fechado de* $S(x_0, T)$*. Portanto, é compacto, pois* $\overline{S(x_0, T)}$ *é compacto.*

Demonstração. Dado $t \geq 0$, tome $T \geq t$. Note primeiramente que $D(x_0, T) \subset S(x_0, T)$, pois qualquer $\xi = u(\cdot) \in D(x_0, T)$, tem-se que $\xi \in S(x_0, T)$.
Mostraremos que $D(x_0, T)$ é fechado.

De fato, seja uma sequência qualquer $\xi_n = u_n(\cdot) \in D(x_0, T)$ com $\xi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi$. Mostraremos que $\xi \in D(x_0, T)$, ou seja, que existe $u(\cdot) \in D(x_0, T)$ tal que $u(\cdot) = \xi$.

Considerando que $u_n(\cdot) \in D(x_0, T) \subset S(x_0, T)$ e $S(x_0, T)$ é compacto, existe uma subsequência $\{u_{n_j}(\cdot)\}_{j\geq 1}$ de $\{u_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$ tal que $u_{n_j}(\cdot) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u(\cdot)$ em $C([0, T], \mathbb{R}^N)$.

Note que para cada $t \in [0, T]$, $u(t) = \lim_{j\to\infty} u_{n_j}(t) \geq 0$, pois $u_{n_j}(t) \geq 0,$ para todo $t \geq 0.$

Como $u_{n_j}(\cdot)$ é solução do problema de valor inicial (4.1), temos pela Observação 4.1.1, que

$$\begin{array}{ccccc} u_{n_j}(\ell) & = & x_0 & + & \displaystyle\int_0^\ell f(u_{n_j}(\tau))d\tau \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ u(\ell) & = & x_0 & + & \displaystyle\int_0^\ell f(u(\tau))d\tau \end{array}$$

quando $j \to \infty$. Portanto, $u(\cdot) \in D(x_0, T)$. Assim, obtemos que

$$\xi_{n_j} = u_{n_j}(t) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \xi(t) \text{ e } u_{n_j}(t) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u(t), \text{ para todo } t \in [0, T].$$

Pela unicidade do limite, temos que $\xi(t) = u(t),$ para todo $t \geq 0$. Portanto, $\xi = u \in D(x_0, T)$, concluindo assim que $D(x_0, T)$ é fechado em $S(x_0, T)$. Portanto, $D(x_0, T)$ é compacto. $\square$

Proposição 4.1.12. *[2] A função* $U : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^N_+)$*, definida por*

$$U(t, x_0) = \{x(t) : x(\cdot) \in D(x_0)\},$$

assume valores compactos.

Demonstração. Dado $(t, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N_+$. Mostraremos que de fato $U(t, x_0) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^N_+)$. Tome $T \geq t$ e observe que $U(t, x_0) = D(x_0, T)(t)$, onde $D(x_0, T)(t) = \{x(t) : x(\cdot) \in D(x_0, T)\}$. Mostraremos que $D(x_0, T)(t)$ é limitado e fechado em $\mathbb{R}^N_+$.
Mostraremos primeiramente que $D(x_0, T)(t)$ é limitado.

De fato, seja $t_1 \in [0, T]$ fixado. Sejam $\xi, \pi \in D(x_0, T)(t_1)$ arbitrários, ou seja, $\xi = u_1(t_1)$ e $\pi = u_2(t_1)$ com $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in D(x_0, T)$. Mostraremos que existe um $K > 0$ tal que

$$d(u_1(t_1), u_2(t_1)) < K.$$

Considerando que $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in D(x_0, T)$ e $D(x_0, T)$ é compacto, existe um $K > 0$ tal que

$$d(u_1(t), u_2(t)) < K, \text{ para todo } t \in [0, T].$$

Em particular, vale para t_1. Portanto, $D(x_0, T)(t_1)$ é limitado.
Agora mostraremos que $D(x_0, T)(t)$ é fechado.

De fato, seja $t_1 \in [0, T]$ fixado. Seja uma sequência qualquer $\xi_n \in D(x_0, T)(t_1)$ com $\xi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi$, ou seja, $\xi_n = u_n(t_1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi$ com $u_n(\cdot) \in D(x_0, T)$. Mostraremos que $\xi \in D(x_0, T)(t_1)$, ou seja, que $\xi = u(t_1)$ com $u(\cdot) \in D(x_0, T)$.

Como $D(x_0, T)$ é compacto e $u_n(\cdot) \in D(x_0, T)$, existe uma subsequência $\{u_{n_j}(\cdot)\}_{j\geq 1}$ de $\{u_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$ tal que $u_{n_j}(\cdot) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u(\cdot)$ em $C([0, T], \mathbb{R}^N_+)$.

Note que para cada $t \in [0, T]$, $u(t) = \lim_{j\to\infty} u_{n_j}(t) \geq 0$, pois $u_{n_j}(t) \geq 0$, para todo $t \geq 0$. Assim, como $u_{n_j}(\cdot)$ é solução do problema de valor inicial (4.1), temos pela Observação 4.1.1, que

$$\begin{array}{ccccc} u_{n_j}(\ell) & = & x_0 & + & \displaystyle\int_0^\ell f(u_{n_j}(\tau))d\tau \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ u(\ell) & = & x_0 & + & \displaystyle\int_0^\ell f(u(\tau))d\tau \end{array}$$

quando $j \to \infty$. Portanto, $u(\cdot) \in D(x_0, T)$. Então obtemos que

$$\xi_{n_j} = u_{n_j}(t_1) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \xi \text{ e } u_{n_j}(t) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u(t), \text{ para todo } t \in [0, T].$$

Pela unicidade do limite, temos que $\xi = u(t_1)$. Assim, $\xi \in D(x_0, T)(t_1)$. Como t_1 e ξ_n foram arbitrários, concluimos que $D(x_0, T)(t)$ é fechado. Portanto, $D(x_0, T)(t)$ é compacto para todo $t \in [0, T]$. O que equivale a $U(t, x_0)$ também ser compacto. $\square$

Observação 4.1.13. *[2] A função $U : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N_+ \to \mathcal{K}(\mathbb{R}^N_+)$ é um semigrupo multívoco estrito.*

De fato, mostraremos primeiramente que a função U satisfaz as condições da Definição 3.1.1:

(i) $U(0, x_0) = \{x(0) : x(\cdot) \in D(x_0)\} = \{x_0\} = x_0$.

(ii) considere $z \in \mathbb{R}^N_+$ e $t, s \in \mathbb{R}_+$. Tome $y \in U(t+s, z)$, logo $y = x(t+s)$ com $x(\cdot) \in D(z)$.

Note que $y = \phi^s(t)$ com $\phi^s(\cdot) \in D(x(s))$ sendo definida por $\phi^s(\ell) = x(s+\ell)$. Além disso, note que $x(s) \in U(s, z)$. Assim,

$$y \in U(t, x(s)) \subset U(t, U(s, z)).$$

Mostraremos agora que U é estrito:

dado $z \in \mathbb{R}^N_+$ e $t, s \in \mathbb{R}_+$, tome $y \in U(t, U(s, z))$. Logo, $y = x(t)$ com $x(0) \in U(s, z)$. Então existe $\phi(\cdot) \in D(z)$ tal que $x(0) = \phi(s)$.

Considere a função concatenada

$$\theta(\tau) = \begin{cases} \phi(\tau) & , \text{ se } 0 \leq \tau \leq s; \\ x(\tau - s) & , \text{ se } \tau > s. \end{cases}.$$

Pelo Lema da colagem, θ é uma função contínua e temos que $\theta(0) = z$ e

$$\dot{\theta}(\tau) = f(\theta(\tau)), \forall \tau > 0.$$

Portanto, $y = \theta(t+s) \in D(z, T)(t+s) = U(t+s, z)$. Como y foi arbitrário, $U(t, G(s, z)) \subset U(t+s, z)$. Portanto, U é um semigrupo multívoco estrito.

Vamos mostrar que os semigrupos multívocos estritos G e U preservam a ordem. Começaremos com o semigrupo multívoco estrito G.

Teorema 4.1.14. *[2] Suponha que as condições (4.2) e (4.3) sejam verdadeiras . Então para qualquer $x_0 \leq y_0$, existem duas soluções $\overline{y}(\cdot) \in S(T, y_0)$ e $\underline{x}(\cdot) \in S(T, x_0)$, tais que:*

(1) $x(t) \leq \overline{y}(t)$, *para todo* $t \in [0, T]$ *e* $x(\cdot) \in S(x_0, T)$.

(2) $\underline{x}(t) \leq y(t)$, *para todo* $t \in [0, T]$ *e* $y(\cdot) \in S(y_0, T)$.

Portanto, G é um semigrupo multívoco estrito monótono.

Demonstração. Sejam $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^N$ quaisquer com $x_0 \leq y_0$. Mostraremos primeiramente a existência do $\overline{y}(t)$.

Defina as funções aproximadas $g^\varepsilon(x) = f(x) + \boldsymbol{d}\varepsilon, \varepsilon > 0$, onde $\boldsymbol{d} = \mathbf{(1, ..., 1)}$. Note que $g^\varepsilon(\cdot)$ é contínua, pois f é contínua. Além disso, note que da condição (4.3), $g^\varepsilon(\cdot)$ satisfaz a seguinte desigualdade:

$$g_i^\varepsilon(y) \geq f_i(x) + \varepsilon, \text{ se } x \leq y \text{ e } x_i = y_i. \tag{4.12}$$

De fato, sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$ quaisquer com $x \leq y$ e $x_i = y_i$. Então por (4.3), $f_i(x) \leq f_i(y)$. Assim,

$$g_i^\varepsilon(y) = f_i(y) + \varepsilon \geq f_i(x) + \varepsilon. \tag{4.13}$$

Considere $y^\varepsilon(\cdot)$ a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y}^\varepsilon(t) = g^\varepsilon(y^\varepsilon(t)) \\ y^\varepsilon(0) = y_0. \end{cases} \tag{4.14}$$

Dado $t \geq 0$, tome $T \geq t$. Seja agora uma solução arbitrária $x(\cdot) \in S(x_0, T)$.
Afirmação: $y^\varepsilon(t) \geq x(t)$, para todo $t \in [0, T]$.

Suponha, por contradição, que exista $t_1 \in (0, T)$ tal que $y^\varepsilon(t_1) \ngeq x(t_1)$, i.e, existe $i_0 \in \{1, ..., N\}$ tal que $y_{i_0}^\varepsilon(t_1) < x_{i_0}(t_1)$. Seja $\bar{t}_1$ o menor dos t_1 descritos acima. Assim, existe $t_0 \in (0, \bar{t}_1)$ tal que

$$x_{i_0}(t_0) = y_{i_0}^\varepsilon(t_0), y^\varepsilon(t_0) \geq x(t_0) \text{ e } y_{i_0}^\varepsilon(t) < x_{i_0}(t), \forall t \in (t_0, t_0 + \delta] \tag{4.15}$$

para algum $\delta > 0$. Note que de (4.12), obtemos $g_{i_0}^\varepsilon(y^\varepsilon(t_0)) \geq f_{i_0}(x(t_0)) + \varepsilon$.

Como $g^\varepsilon(\cdot)$ e f são funções contínuas, existe $\tilde{\delta} > 0$, com $\tilde{\delta} \leq \delta$ tal que

$$g_{i_0}^\varepsilon(y^\varepsilon(t)) - f_{i_0}(x(t)) \geq \varepsilon, \forall t \in [t_0, t_0 + \tilde{\delta}).$$

Então, para todo $t \in [t_0, t_0 + \tilde{\delta})$, temos

$$\frac{d}{dt}(y_{i_0}^\varepsilon(t) - x_{i_0}(t)) = g_{i_0}^\varepsilon(y^\varepsilon(t)) - f_{i_0}(x(t)) \geq \varepsilon > 0.$$

Assim, $y_{i_0}^\varepsilon(t) - x_{i_0}(t) > y_{i_0}^\varepsilon(t_0) - x_{i_0}(t_0) = 0,$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \tilde{\delta})$. Logo, $y_{i_0}^\varepsilon(t) > x_{i_0}(t),$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \tilde{\delta})$, o que é uma contradição com (4.15). Portanto, $y^\varepsilon(t) \geq x(t),$ para todo $t \in [0, T]$.

Visto que $g^\varepsilon(\cdot)$ é uma função contínua, temos analogamente a (4.10), que $g^\varepsilon(\cdot)$ satisfaz a condição (4.2) e pela Proposição 4.1.3, $y^\varepsilon(\cdot)$ é uniformemente limitada em $C([0,T], \mathbb{R}^N)$. Note também que analogamente a demonstração da **Afirmação 1** do Teorema 4.1.9, $\frac{d}{dt}y^\varepsilon(t)$ é uniformemente limitada em $C([0,T], \mathbb{R}^N)$.

Além disso, temos analogamente a demonstração da **Afirmação 2** do mesmo teorema que $y^\varepsilon(\cdot)$ é equicontínua em $[0,T]$. Tome $\varepsilon_n = \frac{1}{n} + \varepsilon$. Pelo Teorema de Ascoli-Arzelá, existe uma subsequência de $\{y^{\varepsilon_n}(\cdot)\}_{n\geq 1}$ (que continuaremos chamando da mesma forma) tal que $y^{\varepsilon_n}(\cdot) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{y}(\cdot)$ em $C([0,T], \mathbb{R}^N)$.

Note que para cada $t \in [0,T]$, $\overline{y}(t) = \lim\limits_{n\to\infty} y^{\varepsilon_n}(t) \geq x(t)$, pois $y^{\varepsilon_n}(t) \geq x(t)$.

Para concluir o item (**1**), resta mostrar que $\overline{y}(\cdot) \in S(y_0, T)$:

Como $y^{\varepsilon_n}(\cdot)$ é solução de (4.14), temos analogamente a Observação 4.1.1, que

$$\begin{array}{ccccc} y^{\varepsilon_n}(\ell) & = & y_0 & + & \displaystyle\int_0^\ell g^{\varepsilon_n}(y^{\varepsilon_n}(\tau))d\tau \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \overline{y}(\ell) & = & y_0 & + & \displaystyle\int_0^\ell g^\varepsilon(\overline{y}(\tau))d\tau \end{array}$$

quando $n \to \infty$. Portanto, $\overline{y}(\cdot)$ é solução de (4.14) com $\overline{y}(t) \geq x(t),$ para todo $t \in [0,T]$.

Assim, tomando o limite sobre $\overline{y}(\ell) = y_0 + \displaystyle\int_0^\ell g^\varepsilon(\overline{y}(\tau))d\tau$ com $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{y}(\ell) &= y_0 + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\ell g^\varepsilon(\overline{y}(\tau))d\tau \\
&= y_0 + \int_0^\ell \lim_{\varepsilon\to 0} g^\varepsilon(\overline{y}(\tau))d\tau \\
&= y_0 + \int_0^\ell \lim_{\varepsilon\to 0}(f(\overline{y}(t)) + \boldsymbol{d}\varepsilon)d\tau \\
&= y_0 + \int_0^\ell \lim_{\varepsilon\to 0} f(\overline{y}(\tau))d\tau + \overbrace{\int_0^\ell \lim_{\varepsilon\to 0}\boldsymbol{d}\varepsilon d\tau}^{0} \\
&= y_0 + \int_0^\ell f(\overline{y}(\tau))d\tau, \quad \forall \ell \in [0,T].
\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{y}(\cdot) \in S(y_0,T)$, onde $\overline{y}(t) \geq x(t),$ para todo $t \in [0,T]$, para $x_0 \leq y_0$. Então existe $\overline{y}(\cdot) \in S(y_0,T)$ tal que $\overline{y}(t) \geq x(t),$ para todo $t \in [0,T]$ e $\underline{x}(\cdot) \in S(x_0,T)$, concluindo assim, a existência de $\overline{y}(t)$.

Agora mostraremos de maneira semelhante a existência do $\underline{x}(t)$.

Defina as funções aproximadas $g^\varepsilon(x) = f(x) - \varepsilon\boldsymbol{d}, \varepsilon > 0$, onde $\boldsymbol{d = (1, ..., 1)}$. Note que analogamente a demonstração do item (**1**), $g^\varepsilon(\cdot)$ é contínua e satisfaz a seguinte desigualdade:

$$g_i^\varepsilon(y) \geq f_i(x) - \varepsilon, \text{ se } x \leq y \text{ e } x_i = y_i. \tag{4.16}$$

Considere $x^\varepsilon(\cdot)$ a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}^\varepsilon(t) = g^\varepsilon(x^\varepsilon(t)) \\ x^\varepsilon(0) = x_0. \end{cases} \tag{4.17}$$

Dado $t \geq 0$, tome $T \geq t$. Seja uma solução arbitrária $y(\cdot) \in S(y_0,T)$.

Afirmação: $x^\varepsilon(t) \leq y(t),$ para todo $t \in [0,T]$.

Suponha, por contradição, que exista $t_1 \in (0,T)$ tal que $x^\varepsilon(t_1) \nleq y(t_1)$, i.e, existe $i_0 \in \{1, ..., N\}$ tal que $x_{i_0}^\varepsilon(t_1) > y_{i_0}(t_1)$. Seja $\bar{t}_1$ o menor dos t_1 descritos acima. Assim, existe um $t_0 \in (0, \bar{t}_1)$ tal que $y_{i_0}(t_0) = x_{i_0}^\varepsilon(t_0), y(t_0) \geq x^\varepsilon(t_0)$ e

$$x_{i_0}^\varepsilon(t) > y_{i_0}(t), \forall t \in (t_0, t_0+\delta), \text{ para algum } \delta > 0. \tag{4.18}$$

Note que de (4.16), obtemos $g^{\varepsilon}_{i_0}(y(t_0)) \geq f_{i_0}(x^{\varepsilon}(t_0)) - \varepsilon$.

Usando a continuidade de f e $g^{\varepsilon}(\cdot)$, temos que existe $\tilde{\delta} > 0$ com $\tilde{\delta} \leq \delta$ tal que

$$g^{\varepsilon}_{i_0}(y(t)) - f_{i_0}(x^{\varepsilon}(t)) \geq -\varepsilon, \text{ para todo } t \in (t_0, t_0 + \tilde{\delta})$$

Então, para todo $t \in [t_0, t_0 + \tilde{\delta})$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(y_{i_0}(t) - x^{\varepsilon}_{i_0}(t)) &= f_{i_0}(y(t)) - g^{\varepsilon}_{i_0}(x^{\varepsilon}(t)) \\
&= g^{\varepsilon}_{i_0}(y(t)) + \varepsilon - (f_{i_0}(x^{\varepsilon}(t)) - \varepsilon) \\
&= g^{\varepsilon}_{i_0}(y(t)) - f_{i_0}(x^{\varepsilon}(t)) + 2\varepsilon \\
&\geq -\varepsilon + 2\varepsilon \\
&= \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

Assim, $y_{i_0}(t) - x^{\varepsilon}_{i_0}(t) > y_{i_0}(t_0) - x^{\varepsilon}_{i_0}(t_0) = 0,$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \tilde{\delta})$, ou seja, $y_{i_0}(t) > x^{\varepsilon}_{i_0}(t),$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \tilde{\delta})$, o que é uma contradição com (4.18). Portanto, $x^{\varepsilon}(t) \leq y(t), \forall t \in [0, T]$.

Considerando que $g^{\varepsilon}(\cdot)$ é uma função contínua, temos analogamente ao (4.10), que $g^{\varepsilon}(\cdot)$ satisfaz a condição (4.2) e pela Proposição 4.1.3, $x^{\varepsilon}(\cdot)$ é uniformemente limitada em $C([0, T], \mathbb{R}^N)$. Além disso, temos analogamente a **Afirmação 1** do Teorema 4.1.9, que $\frac{d}{dt}x^{\varepsilon}(t)$ é uniformemente limitada em $C([0, T], \mathbb{R}^N)$ e analogamente a **Afirmação 2** do mesmo teorema que $x^{\varepsilon}(\cdot)$ é equicontínua em $[0, T]$.

Portanto, tomando novamente $\varepsilon_n = \frac{1}{n} + \varepsilon$ temos pelo Teorema de Ascoli Arzelá que existe uma subsequência $x^{\varepsilon_n}(\cdot) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \underline{x}(\cdot)$ em $C([0, T], \mathbb{R}^N)$. Note que para cada $t \in [0, T]$, $\underline{x}(t) = \lim_{n\to\infty} x^{\varepsilon_n}(t) \leq y(t)$, pois $x^{\varepsilon_n}(t) \leq y(t)$.

Para concluir o item (**2**), mostraremos que $\underline{x}(\cdot) \in S(x_0, T)$:

Como $x^{\varepsilon_n}(\cdot)$ é solução de (4.17), temos analogamente a Observação 4.1.1, que

$$\begin{array}{ccccc}
x^{\varepsilon_n}(\ell) & = & x_0 & + & \displaystyle\int_0^{\ell} g^{\varepsilon_n}(x^{\varepsilon_n}(\tau))d\tau \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\underline{x}(\ell) & = & x_0 & + & \displaystyle\int_0^{\ell} g^{\varepsilon}(\underline{x}(\tau))d\tau
\end{array}$$

quando $n \to \infty$. Portanto, $\underline{x}(\cdot)$ é solução de (4.17) com $y(t) \geq \underline{x}(t),$ para todo $t \in [0,T]$. Logo, tomando o limite sobre $\underline{x}(\ell) = x_0 + \displaystyle\int_0^\ell g^\varepsilon(\underline{x}(\tau))d\tau$ com $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\underline{x}(\ell) &= x_0 + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\ell g^\varepsilon(\underline{x}(\tau))d\tau \\
&= x_0 + \int_0^\ell \lim_{\varepsilon\to 0} g^\varepsilon(\underline{x}(\tau))d\tau \\
&= x_0 + \int_0^\ell \lim_{\varepsilon\to 0}(f(\underline{x}(t)) + \boldsymbol{d}\varepsilon)d\tau \\
&= x_0 + \int_0^\ell \lim_{\varepsilon\to 0} f(\underline{x}(\tau))d\tau + \overbrace{\int_0^\ell \lim_{\varepsilon\to 0}\boldsymbol{d}\varepsilon d\tau}^{0} \\
&= x_0 + \int_0^\ell f(\underline{x}(\tau))d\tau, \quad \forall \ell \in [0,T].
\end{aligned}$$

Portanto, $\underline{x}(\cdot)$ é solução de (4.1), ou seja, $\underline{x}(\cdot) \in S(x_0, T)$, com $y(t) \geq \underline{x}(t)$ para todo $t \in [0,T]$, para $x_0 \leq y_0$. Assim, concluimos a existência de $\underline{x}(t)$. Portanto, G é um semigrupo multívoco estrito monótono. $\square$

Temos o seguinte resultado.

Teorema 4.1.15. *[2] Suponha que as condições (4.2) e (4.3) sejam verdadeiras. Assuma também que as condições ($\mathcal{H}_\mathbf{1}$) e ($\mathcal{H}_\mathbf{2}$) do Capítulo 3 sejam verdadeiras. Então, G também satisfaz a condição ($\mathcal{H}_\mathbf{3}$) e a afirmação do Teorema 3.3.12 é verdadeira.*

Observação 4.1.16. *[2] Neste caso, a condição ($\mathcal{H}_\mathbf{2}$) é equivalente ao fato do conjunto $\gamma_0^+(B)$ ser limitado para qualquer conjunto B limitado.*

Demonstraremos agora o teorema anterior.

Demonstração. Dado $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$, tome $T \geq t$. Pela Proposição 4.1.6, $G(t,x)$ é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^N$.

Agora, para concluir a condição ($\mathcal{H}_\mathbf{3}$), mostraremos que G é semicontínua superiormente.

De fato, suponha por contradição, que G não seja semicontínua superiormente, i.e, existem $t_0 \in \mathbb{R}_+, x_0 \in \mathbb{R}^N$ e alguma vizinhança $\mathcal{O}\left(G(t_0,x_0)\right)$ de $G(t_0,x_0)$ tais que para todo $\delta > 0$, existe algum $y \in \mathbb{R}^N$ com $\rho(x_0,y) < \delta$ de modo que

$$G(t_0,y) \not\subset \mathcal{O}\left(G(t_0,x_0)\right).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, considere $\delta_n = \frac{1}{n}$. Assim, podemos considerar uma sequência $y_n \in G(t_0, x_n), x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x_0$ e uma vizinhança $\mathcal{N}$ de $G(t_0, x_0)$ tal que

$$y_n \notin \mathcal{N}, \text{ para todo } n. \tag{4.19}$$

Considerando que $y_n \in G(t_0, x_n)$, existe uma solução $z_n \in S(x_n)$ tal que

$$z_n(0) = x_n \text{ e } y_n = z_n(t_0). \tag{4.20}$$

Note que $z_n(\cdot)$ é solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{z}_n(t) = f(z_n(t)) \\ z_n(0) = x_n, \end{cases} \tag{4.21}$$

com $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ contínua e satisfazendo as condições (4.2) e (4.3).

Afirmação 1: $z_n(\cdot)$ é uniformemente limitada em $C([0,T], \mathbb{R}^N)$:

como x_n é convergente, x_n é limitada, i.e, existe $r > 0$ tal que $||x_n|| \leq r$, para todo n.

Analogamente a (4.5), temos

$$\frac{d}{dt}||z_n(t)||^2 = \frac{d}{dt}\langle z_n(t), z_n(t)\rangle = \langle \frac{d}{dt}z_n(t), z_n(t)\rangle + \langle z_n(t), \frac{d}{dt}z_n(t)\rangle = 2\langle \dot{z}_n(t), z_n(t)\rangle.$$

Fazendo o produto interno da equação em (4.21) com $z_n(t)$ e usando a condição (4.2), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||z_n(t)||^2 = \langle \dot{z}_n(t), z_n(t)\rangle = \langle f(z_n(t)), z_n(t)\rangle \leq c_1||z_n(t)||^2 + c_2, \text{ onde } c_1 \in \mathbb{R} \text{ e } c_2 > 0.$$

Integrando de 0 a $t \leq T$, temos pelo Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\frac{1}{2}\|z_n(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|z_n(0)\|^2 \leq c_1 \int_0^t \|z_n(s)\|^2 \, ds + c_2 t, \text{ onde } c_1 \in \mathbb{R} \text{ e } c_2 > 0.$$

Logo,

$$\|z_n(t)\|^2 \leq r^2 + 2c_2T + 2c_1 \int_0^t \|x(s)\|^2 \, ds, \forall t \in [0,T].$$

Pelo Lema de Gronwall, obtemos

$$\begin{aligned} \|z_n(t)\|^2 &\leq (r^2 + 2c_2T)e^{2\int_0^t c_1 \, ds} = (r^2 + 2c_2T)e^{2c_1t} \\ &\leq (r^2 + 2c_2T)e^{2c_1T} =: \widehat{C}(r,T), \forall t \in [0,T] \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Assim, tomando a raiz quadrada em ambos os lados da desigualdade anterior, obtemos

$$||z_n(t)|| \leq \sqrt{\widehat{C}(r,T)} =: C(r,T), \forall t \in [0,T] \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, $\sup\limits_{t\in[0,T]} ||z_n(t)|| \leq C(r,T)$. Portanto, $z_n(\cdot)$ é uniformemente limitada $C([0,T],\mathbb{R}^N)$.

Afirmação 2: $\frac{d}{dt}z_n(t)$ é uniformemente limitada em $C([0,T],\mathbb{R}^N)$:

como $z_n(\cdot)$ é uniformemente limitada, existe $\pi > 0$ tal que $||z_n(t)|| \leq \pi$, para todo $t \in [0,T]$, para todo $n \geq 0$. Assim, $z_n(t) \in \overline{B(0,\pi)}$, para todo $t \in [0,T]$ com $\overline{B(0,\pi)} \subset \mathbb{R}^N$.

Defina $K = \overline{B(0,\pi)}$ e considere a restrição $f|_K : K \to \mathbb{R}^N$. Como $f|_K$ é contínua e K é compacto, existe

$$M = \max_{t\in[0,T]}\{||f(z_n(t))||\} < +\infty.$$

Então,

$$\|\frac{d}{dt}z_n(t)\| = \|f(z_n(t))\| \leq M, \forall t \in [0,T], \forall n \geq 1.$$

Portanto, $\frac{d}{dt}z_n(t)$ é uniformemente limitada em $C([0,T],\mathbb{R}^N)$.

Afirmação 3: $z_n(\cdot)$ é equicontínua em $[0,T]$:

dado $\gamma > 0$, temos pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned}
\|z_n(t) - z_n(s)\| &= \left\| \int_s^t \frac{d}{d\tau} z_n(\tau) d\tau \right\| \\
&\leq \int_s^t \left\| \frac{d}{d\tau} z_n(\tau) \right\| d\tau \\
&< M(t-s) < \gamma, \forall n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

sempre que $t, s \in [0,T]$ com $|t-s| < \delta := \frac{\gamma}{M}$. Logo, $z_n(\cdot)$ é equicontínua em $[0,T]$.

Portanto, pelo Teorema de Ascoli-Arzelá, existe uma subsequência $\{z_{n_j}(\cdot)\}_{j\geq 1}$ de $\{z_n(\cdot)\}$ tal que $z_{n_j}(\cdot) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z(\cdot)$ em $C([0,T],\mathbb{R}^N)$. Como $z_{n_j}(\cdot)$ é solução de (4.21), temos pela Observação 4.1.1, que

$$\begin{array}{ccccc}
z_{n_j}(\ell) & = & x_{n_j} & + & \displaystyle\int_0^\ell f(z_{n_j}(\tau))d\tau \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
z(\ell) & = & x_0 & + & \displaystyle\int_0^\ell f(z(\tau))d\tau
\end{array}$$

quando $j \to \infty$. Portanto, $z(\cdot) \in S(x_0, T)$ e $z(t) \in G(t, x_0)$, para todo $t \geq 0$. Em particular, vale para $t = t_0$. Assim, por (4.20), obtemos $y_{n_j} = z_{n_j}(t_0) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z(t_0)$, ou seja, $y_{n_j} \in \mathcal{N}$ para j suficientemente grande, o que é uma contradição com (4.19). Portanto, $G(t, \cdot)$ é semicontínua superiormente. Logo, a condição $(\mathcal{H}_\mathbf{3})$ é verdadeira.

Como G é um semigrupo multívoco estrito que satisfaz as condições $(\mathcal{H}_\mathbf{1} - \mathcal{H}_\mathbf{3})$, então pelo Teorema 3.3.9, existe um atrator global compacto $\mathcal{A} \neq \varnothing$ invariante que é o minimal entre todos os atratores globais fechados que atrai conjuntos limitados de $\mathbb{R}^N$. Portanto, levando em consideração o Teorema 4.1.14, podemos aplicar o Teorema 3.3.12. □

Observação 4.1.17. *[2] Note que se tentarmos repetir a mesma demonstração do Teorema 4.1.14 para a função U, podemos obter analogamente ao item* (**1**) *desse teorema, a existência da solução $\overline{y}(\cdot) \in D(y_0, T)$. No entanto, a prova da existência da solução $\underline{x}(\cdot)$ falha, pois quando tomarmos a função aproximada $g^\varepsilon(x) = f(x) - \varepsilon \boldsymbol{d}, \varepsilon > 0$, onde $\boldsymbol{d} = (\mathbf{1}, ..., \mathbf{1})$, as soluções do seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x}^\varepsilon(t) = g^\varepsilon(x^\varepsilon(t)) \\ x^\varepsilon(0) = x_0, \end{cases}$$

com $g^\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ contínua, não necessariamente são todas não negativas.

Seremos capazes de provar que o semigrupo multívoco estrito U é monótono sob condições mais restritivas.

Vamos usar a seguinte condição de monotonicidade para a função contínua f:

$$f_i(x) < f_i(y), \text{ se } x, y \in \mathbb{R}^N, x_i = y_i \text{ e } x \leq y. \tag{4.22}$$

Teorema 4.1.18. *[2] Suponha que as condições* (4.2), (4.7) *e* (4.22) *sejam verdadeiras e que o conjunto $U(t, x)$ possui um elemento máximo e um elemento mínimo para qualquer (t, x). Então, U é um semigrupo multívoco monótono (ou preserva a ordem). Além disso, se assumirmos que as condições $(\mathcal{H}_\mathbf{1})$ e $(\mathcal{H}_\mathbf{2})$ do Capítulo 3 são verdadeiras, então a condição $(\mathcal{H}_\mathbf{3})$ também é verdadeira. Portanto, a afirmação do Teorema 3.3.12 é verdadeira.*

Demonstração. Provaremos primeiramente que U é um semigrupo multívoco monótono:

sejam $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^N_+$ com $x_0 \leq y_0$ e $T \geq 0$ arbitrários. Mostraremos que $U(T, x_0) \leq U(T, y_0)$ no sentido da Definição 3.2.1:

mostraremos primeiramente a existência de $\overline{y}(T) \in U(T, y_0)$.

De fato, sejam $\overline{y}$ e $\underline{y}$, respectivamente o elemento máximo e mínimo de $U(T, y_0)$. Como $\overline{y} \in U(T, y_0)$, existe uma solução $\overline{y}(\cdot) \in D(y_0)$ tal que $\overline{y}(T) = \overline{y}$. Considere uma solução qualquer $x(\cdot) \in D(x_0, T)$.

Primeiro Caso: Existe $t_0 \in [0, T]$ tal que $\overline{y}(t_0) = x(t_0)$:

Considere

$$y(t) = \begin{cases} \overline{y}(t) & \text{se } 0 \leq t \leq t_0, \\ x(t) & \text{se } t_0 \leq t \leq T. \end{cases} \tag{4.23}$$

Observe que $y(\cdot) \in D(y_0, T)$ e $y(T) \in U(T, y_0)$. Como $\overline{y}(T)$ é elemento maximal de $U(T, y_0)$, $y(T) \leq \overline{y}(T)$. De (4.23), $y(T) = x(T)$. Logo,

$$x(T) \leq \overline{y}(T).$$

Segundo Caso: $\overline{y}(t) \neq x(t)$, para todo $t \in [0, T]$:

suponha, por contradição, que $x(T) \not\leq \overline{y}(T)$. Então existe $i_0 \in \{1, ..., N\}$ tal que $x_{i_0}(T) > \overline{y}_{i_0}(T)$. Como $x_{0_{i_0}} \leq y_{0_{i_0}}$, pela continuidade das funções $x_{i_0}(\cdot)$ e $\overline{y}_{i_0}(\cdot)$, temos que existe $t_0 \in [0, T)$ tal que

$$\overline{y}_{i_0}(t_0) = x_{i_0}(t_0), \overline{y}(t_0) \neq x(t_0), x(t_0) \leq \overline{y}(t_0)$$

e

$$x_{i_0}(t) > \overline{y}_{i_0}(t), \forall t \in (t_0, t_0 + \delta], \text{ para algum } \delta > 0. \tag{4.24}$$

(Observe que pode existir mais do que um par de funções coordenadas $(x_j(\cdot), \overline{y}_j(\cdot))$ que se cruzam. Usamos i_0 para aquele par de funções que se cruzam primeiro no tempo t_0.)

Assim, pela condição (4.22), temos

$$f_{i_0}(x(t_0)) < f_{i_0}(\overline{y}(t_0)), \text{ i.e, } f_{i_0}(x(t_0)) - f_{i_0}(\overline{y}(t_0)) < 0.$$

Como $f_{i_0}(x(\cdot)) - f_{i_0}(\overline{y}(\cdot))$ é uma função contínua, existe $0 < \tilde{\delta} \leq \delta$, tal que

$$f_{i_0}(x(t)) - f_{i_0}(\overline{y}(t)) < 0, \forall t \in (t_0, t_0 + \tilde{\delta}).$$

Como $x_{i_0}(\cdot)$ e $\overline{y}_{i_0}(\cdot)$ são soluções do problema de valor inicial (4.1), temos

$$\frac{d}{dt}(x_{i_0}(t) - \overline{y}_{i_0}(t)) = f_{i_0}(x(t)) - f_{i_0}(\overline{y}(t)) < 0, \forall t \in [t_0, t_0 + \tilde{\delta}),$$

o que implica que $x_{i_0}(\cdot) - \overline{y}_{i_0}(\cdot)$ é estritamente decrescente em $[t_0, t_0 + \tilde{\delta})$. Logo, para todo $t \in [t_0, t_0 + \tilde{\delta})$

$$x_{i_0}(t) - \overline{y}_{i_0}(t) < x_{i_0}(t_0) - \overline{y}_{i_0}(t_0) = 0.$$

Assim, $x_{i_0}(t) < \overline{y}_{i_0}(t), \forall t \in [t_0, t_0 + \tilde{\delta})$, o que é uma contradição com (4.24). Portanto, $\overline{y}(T) \geq x(T)$.

A prova da existência de $\underline{x}(T) \in U(T, x_0)$ é semelhante a prova anterior, repetindo o argumento para $\underline{y}$. Portanto, U é um semigrupo multívoco monótono.

Analogamente a demonstração do Teorema 4.1.15, obtemos que a condição $(\boldsymbol{\mathcal{H}_3})$ é verdadeira. Portanto, a afirmação do Teorema 3.3.12 é verdadeira. $\square$

Mostraremos a seguir uma ilustração do atrator global compacto para o caso particular $N = 2$. Lembrando que a relação de ordem nesse caso é: para quaisquer $w = (w_1, w_2)$ e $z = (z_1, z_2)$, temos que $w \leq z \iff w_1 \leq z_1$ e $w_2 \leq z_2$.

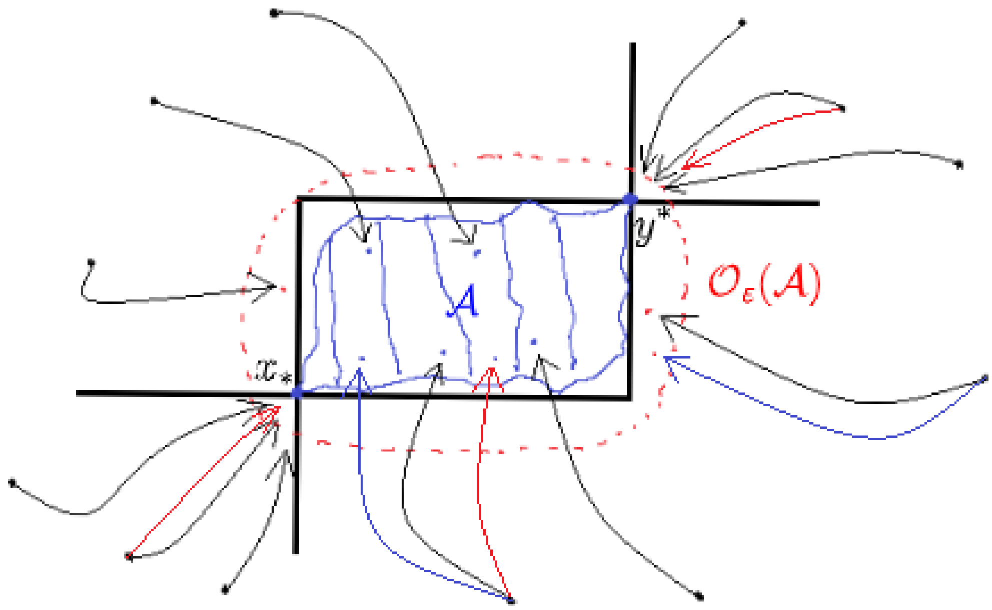

Figura 4.1: Ilustação do Atrator Global Para o Caso $N = 2$.

Apêndice A

Teoria de Semigrupos Não-Lineares

Nesta seção, apresentamos definições e resultados da teoria de semigrupos não-lineares para melhor entendimento da teoria de semigrupos multívocos. Os resultados podem ser encontrados em [3].

Definição A.0.1. *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Um semigrupo é uma família de operadores $\{V_t, t \in \mathbb{R}_+, X\}$, $V_t : X \to X$ contínuo, satisfazendo:*

(i) $V_0 = I$ *(identidade em X),*

(ii) $V_{t+s} = V_t V_s, \quad \forall \quad t, s \geq 0,$

Observação A.0.2. *O semigrupo é não-linear quando X não for espaço vetorial ou se existe $t_0 > 0$ tal que $V_{t_0} : X \to X$ é não-linear.*

Definição A.0.3. *Dado $x \in X$, a semitrajetória positiva do ponto x, é definida por*

$$\gamma^+(x) := \{V_t(x) : t \in \mathbb{R}_+\} = \bigcup_{t \geq 0} V_t(x)$$

Definição A.0.4. *Dado $A \subset X$, $A \neq \phi$. A semitrajetória positiva do conjunto A, é definida por*

$$\gamma^+(A) := \bigcup_{x \in A} \gamma^+(x) = \bigcup_{t \geq 0} V_t(A).$$

Definição A.0.5. *Uma trajetória completa $\gamma(x)$ através do ponto x é a curva $x(t)$, $-\infty < t < \infty$, satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $x(t) \in X$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$*;*

(ii) $x(0) = x$*;*

(iii) $V_\tau(x(t)) = x(t+\tau)$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$ *e* $\tau \in \mathbb{R}_+$*.*

Definição A.0.6. *Dado* $A \subset X, A \neq \phi$*. A é positivamente invariante (em relação ao semigrupo* $\{V_t\}_{t\geq 0}$*) se* $V_t(A) \subset A$ *para todo* $t \geq 0$*; negativamente invariante se* $A \subset V_t(A)$ *para todo* $t \geq 0$*; invariante se* $V_t(A) = A$ *para todo* $t \geq 0$*.*

Definição A.0.7. *Sejam A e M subconjuntos não-vazios de X. A atrai M (pelo semigrupo* $\{V_t\}_{t\geq 0}$*) se para qualquer* $\varepsilon > 0$*, existe* $t(\varepsilon, M) \geq 0$ *tal que* $V_t(M) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$ *para todo* $t \geq t(\varepsilon, M)$*, com* $\mathcal{O}_\varepsilon(A) := \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$*.*

Definição A.0.8. *Seja A é um subconjunto não-vazio de X. A é um atrator global de pontos se A atrai cada ponto* $x \in X$*; A é um B-atrator global se A atrai cada conjunto limitado de X; A é um B-atrator global minimal fechado (ou um atrator global de pontos minimal fechado) se A é um B-atrator global fechado (ou um atrator global de pontos fechado) e qualquer subconjunto próprio fechado de A não é um B-atrator global (ou um atrator global de pontos).*

Denotaremos por $\overline{\mathcal{M}}$ e $\mathcal{M}$ o atrator global de pontos minimal fechado e o B-atrator global minimal fechado, respectivamente.

Definição A.0.9. *O semigrupo* $\{V_t\}_{t\geq 0}$ *é pontualmente dissipativo se* $\{V_t\}_{t\geq 0}$ *possui um atrator global de pontos limitado; B-dissipativo se* $\{V_t\}_{t\geq 0}$ *possui um B-atrator global limitado.*

Definiremos $\mathcal{B} := \{B$ é um conjunto não-vazio e limitado em $X\}$.

Definição A.0.10. *Um semigrupo* $\{V_t\}_{t\geq 0}$ *é limitado se* $\gamma^+(B) \in \mathcal{B}$ *para cada* $B \in \mathcal{B}$*; é B-limitado se para cada* $B \in \mathcal{B}$*, existe um* $t(B) \geq 0$ *para o qual* $\gamma^+_{t(B)} \in \mathcal{B}$*.*

Definição A.0.11. *Um semigrupo* $\{V_t\}_{t\geq 0}$ *é de classe* $\mathcal{K}$*, se* $V_t : X \to X$ *é um operador compacto para cada t>0.*

Teorema A.0.12. *Seja* $\{V_t\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo de classe* $\mathcal{K}$*. Suponha que o semigrupo é B-dissipativo ou limitado e pontualmente dissipativo. Então,* $\{V_t\}_{t\geq 0}$ *tem um B-atrator global minimal fechado* $\mathcal{M}$*, que é compacto e invariante.*

Apêndice B

Complementação da Seção 3.3

O objetivo aqui é apresentar uma proposição que forneça condições que impliquem na B-dissipatividade de G.

Definição B.0.1. *[2] Seja G um semigrupo multívoco. Dizemos que G é ponto dissipativo, se existe um $B_0 \in \mathcal{B}(X)$ tal que para todo $x \in X$, existe um $t_1 := t_1(x) \geq 0$ para o qual*

$$G(t, x) \subset B_0, \text{ para todo } t \geq t_1.$$

Lema B.0.2. *[9] Seja G um semigrupo multívoco assintoticamente compacto. Então para qualquer $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\gamma^+_{T(B)}(B) \in \mathcal{B}(X)$, para algum $T(B) \geq 0$, temos que $\omega(B) \in \mathcal{K}(X)$ e atrai B.*

Demonstração: Encontra-se em [Teorema 2.2.1, pg.13 em [9]].

Lema B.0.3. *(Conjectura) [3] Seja G um semigrupo multívoco e semicontinuo superiormente e ponto dissipativo. Se $\gamma^+_0(B) \in \mathcal{B}(X)$ para cada $B \in \mathcal{B}(X)$, então existe um conjunto limitado $B_0 \subset X$ tal que para cada conjunto compacto $K \subset X$, existem $\varepsilon(K) > 0$, $T(K) \geq 0$ tal que*

$$G(t, \mathcal{O}_{\varepsilon(K)}(K)) \subset B_0, \text{ para todo } t \geq T(K)$$

e $G(t, B_0) \subset B_0$, para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Suponha que $\gamma_0^+(B) \in \mathcal{B}(X)$ para cada $B \in \mathcal{B}(X)$. Como G é ponto dissipativo, existe um $B_2 \in \mathcal{B}(X)$ tal que para todo $x \in X$, existe $t(x) \geq 0$ para o qual

$$G(t,x) \subset B_2, \text{ para todo } t \geq t(x).$$

Dado $\varepsilon_2 > 0$ fixado, considere $B_1 := \mathcal{O}_{\varepsilon_2}(B_2)$ e $B_0 := \gamma_0^+(B_1)$. Note que B_0 é limitado, pois B_1 é limitado.

Seja $K \in \mathcal{K}(X)$ qualquer. Como para todo $x \in X$, existe $t(x) \geq 0$ tal que

$$G(t,x) \subset B_2 \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_2}(B_2) = B_1, \forall t \geq t(x).$$

Como B_1 é um conjunto aberto e G é semicontinuo superiormente, existe $\mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)$ para algum $\varepsilon(x) \geq 0$ tal que $G(t(x), \mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)) \subset B_1$. Então,

$$G(t+t(x), \mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)) \subset G(t, G(t(x), \mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)) \subset G(t, B_1) \subset \gamma_0^+(B_1) = B_0, \forall t \geq t(x).$$

Note que $\bigcup\limits_{x \in K} \mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)$ forma uma cobertura aberta do conjunto compacto K. Assim, existem finitos $x_1, ..., x_n$ tais que

$$G(t+t(x_i), \mathcal{O}_{\varepsilon(x_i)}(x_i)) \subset B_0, \forall t \geq t(x_i) \text{ e } K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\varepsilon(x_i)}(x_i), \text{ com } i = 1, ..., n.$$

Tome $T(K) := \max\{t(x_1), ..., t(x_n)\}$. Pela compacidade de K, existe $\varepsilon(K) := \frac{\delta}{2} > 0$ (onde δ é o número de Lebesgue da cobertura) tal que

$$\mathcal{O}_{\varepsilon(K)}(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\varepsilon(x_i)}(x_i), i = 1, ..., n.$$

Logo, temos

$$G(t, \mathcal{O}_{\varepsilon(K)}(K)) \subset B_0, \forall t \geq T(K).$$

Além disso,

$$G(t, B_0) = G(t, \gamma_0^+(B_1)) = G(t, B_1) \subset B_0, \forall t \geq 0.$$

$\square$

Proposição B.0.4. *(Conjectura) [3] : Seja G um semigrupo multívoco assintoticamente compacto semicontinuo superiormente. Suponha que $\gamma_0^+(B)$ é limitada para todo $B \in \mathcal{B}(X)$. Se G é ponto dissipativo, então G é B-dissipativo.*

Demonstração. Suponha que $\gamma_0^+(B) \in \mathcal{B}(X)$ para cada $B \in \mathcal{B}(X)$ e que G seja ponto dissipativo. Em particular, existe um $B_2 \in \mathcal{B}(X)$ tal que para todo $x \in X$, existe $t(x) \geq 0$ para o qual

$$G(t,x) \subset B_2, \text{ para todo } t \geq t(x).$$

Dado $\varepsilon_2 > 0$ fixado, considere $B_1 := \mathcal{O}_{\varepsilon_2}(B_2)$ e $B_0 := \gamma_0^+(B_1)$. Note que B_0 é limitado, pois B_1 é limitado. Mostraremos que para todo $B \in \mathcal{B}(X)$, existe $t(B) \geq 0$ tal que

$$G(t,B) \subset B_0, \forall t \geq t(B).$$

De fato, já sabemos que para todo $x \in X$, existe $t(x) \geq 0$ tal que

$$G(t,x) \subset B_2 \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_2}(B_2) = B_1, \forall t \geq t(x).$$

Como B_1 é um conjunto aberto e G é semicontinuo superiormente, existe $\mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)$ para algum $\varepsilon(x) \geq 0$ tal que $G(t(x), \mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)) \subset B_1$. Então,

$$G(t+t(x), \mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)) \subset G(t, G(t(x), \mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)) \subset G(t, B_1) \subset \gamma_0^+(B_1) = B_0, \forall t \geq t(x).$$

Como para todo conjunto $B \in \mathcal{B}(X)$, temos que $\gamma_0^+(B) \in \mathcal{B}(X)$, então pelo Lema B.0.2, $\omega(B)$ é compacto e atrai B. Portanto, para todo $\varepsilon_1 > 0$, existe um $t_1 := t_1(\varepsilon_1, B) \geq 0$ tal que

$$G(t,B) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(\omega(B)), \forall t \geq t_1. \tag{B.1}$$

Além disso, pelo Lema B.0.3, existe $\varepsilon(\omega(B)) > 0$ e $T(\omega(B)) \geq 0$ tal que

$$G(t, \mathcal{O}_{\varepsilon(\omega(B))}(\omega(B))) \subset B_0, \forall t \geq T(\omega(B)). \tag{B.2}$$

Aplicando $(B.1)$ e $(B.2)$ para $\varepsilon_1 := \varepsilon(\omega(B))$, obtemos que

$$G(t+t_1, B) \subset B_0, \forall t \geq T(\omega(B)).$$

Logo, $G(t,B) \subset B_0$, $\forall B \in \mathcal{B}(X)$ e $t \geq t_1 + t(\omega(B))$. Portanto, G é B-dissipativo. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] BARREIRA, L.; VALLS, C., Equações diferenciais ordinárias: Teoria qualitativa. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.

[2] CARABALLO, T.; LANGA, J. A; VALERO, J., Asymptotic behaviour of monotone multi-valued dynamical systems. Dynamical Systems, v.20, n.3, p.301-321, 2005.

[3] GUIMARÃES, F.S., Teoria de semigrupos não lineares e resultados de compacidade.2012.86.f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá - (MG), 2012. https://prppg.unifei.edu.br/ppgpmat/home/.

[4] KREYSZIG, E., Introductory Functional Analysis with Applications. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1978.

[5] LIMA, E.L., Curso de análise. v.1.11.ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2004.

[6] LIMA, E. L., Espaços métricos. 4. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2011.

[7] MUNKRES, J.R., Topology. 2. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000.

[8] MUÑOZ, J.M., Introduccíon a la teoria de conjuntos. 4.ed. Bogotá: Universidade Nacional de Colombia, 2001.

[9] NERES, E.N., Teoria de semigrupos multívocos: atratores para inclusões diferenciais.2013.52.f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá - (MG), 2013. https://prppg.unifei.edu.br/ppgpmat/home/.

[10] TAYLOR, A.E., General theory of functions and integration, New York: Dover Science, 1985.