

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós Graduação em Física

**Radiação de corpo negro do campo escalar no universo de
Einstein.**

João Paulo Almeida de Paula

Itajubá - MG, 28 de Fevereiro de 2024

João Paulo Almeida de Paula

**Radiação de corpo negro do campo escalar no
universo de Einstein.**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em Física pela
UNIFEI como parte dos requisitos necessá-
rios para a obtenção do Título de Mestre em
Física.

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós Graduação em Física

Orientador: Edisom de Souza Moreira Junior

Itajubá - MG
28 de Fevereiro de 2024

João Paulo Almeida de Paula

Radiação de corpo negro do campo escalar no universo de Einstein.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física pela UNIFEI como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Itajubá - MG, 28 de Fevereiro de 2024:

Edisom de Souza Moreira Junior
Orientador

João Carlos Alves Barata
Membro da banca 1

Eduardo Henrique Silva Bittencourt
Membro da banca 2

Itajubá - MG
28 de Fevereiro de 2024

Agradecimentos

Gostaria, primeiramente, de agradecer os meus pais, Lara Almeida e Sebastião Francisco de Paula, por sempre me apoiarem nos meus estudos e oferecerem todo o apoio necessário ao longo de toda a minha vida. Isso tem sido fundamental para que eu continue avançando, consciente de que existem pessoas me apoiando nas minhas decisões.

Também expresso meu agradecimento a todos os professores da UNIFEI, especialmente ao Prof. Dr. Edison de Souza Moreira Junior, por me aceitar como orientando, transmitindo seu conhecimento de maneira clara e paciente, comprometendo-se sempre com o meu desenvolvimento profissional. Agradeço também ao Prof. Dr. Eduardo Henrique Silva Bittencourt por me orientar durante o período de graduação, que além de me ensinar muito, estava sempre à minha disposição para ajudar ao longo desse tempo na UNIFEI.

Estes seis anos na UNIFEI teriam sido bem mais desafiadores sem a presença e o apoio dos amigos que fiz durante a graduação e mestrado. Em especial, agradeço aos meus amigos Ricardo e Thales, com quem compartilhei várias discussões sobre física e futebol durante nossos almoços.

Agradeço também à CAPES pelo apoio financeiro ao longo de todo esse percurso no mestrado.

Resumo

Neste trabalho, calcularemos o propagador de Feynman de um campo escalar com massa M a uma temperatura finita T no universo de Einstein, que é um espaço-tempo estático. O campo será acoplado arbitrariamente à curvatura (ou seja, o parâmetro de acoplamento do campo escalar com a curvatura terá um valor arbitrário). A partir do propagador renormalizado, determinaremos o tensor de pressão-energia-momento do campo escalar e, como consequência, a termodinâmica correspondente. Este estudo é de interesse porque o universo não estacionário (ou seja, dinâmico) parece ser uma "sucessão de universos de Einstein", começando com o universo primordial. Nossos resultados serão comparados com a literatura existente.

Palavras-chave: Universo de Einstein. Campo Escalar. Termodinâmica. Propagador de Feynman

Abstract

In this work, we will calculate the Feynman propagator of a scalar field with mass M at finite temperature T in the Einstein universe, which is a static space-time. The field will be arbitrarily coupled to the curvature (i.e., the coupling parameter of the scalar field with curvature will have an arbitrary value). From the renormalized propagator, we will determine the stress-energy-momentum tensor of the scalar field and, as a consequence, the corresponding thermodynamics. This study is of interest because the non-stationary (i.e., dynamic) universe appears to be a "succession of Einstein universes", starting with the primordial universe. Our results will be compared to the existing literature.

Keywords: Einstein Universe. Scalar Field. Thermodynamics. Feynman Propagator.

Sumário

	Agradecimentos	iii
	Resumo	iv
	Abstract	v
	Lista de ilustrações	vii
1	INTRODUÇÃO	1
2	TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS EM ESPAÇO-TEMPO CURVO	4
3	CAMPO ESCALAR NO CILINDRO	10
3.1	Flutuação média quadrática do campo escalar	15
3.2	Tensor de pressão-energia-momento	18
3.3	Estabilidade termodinâmica local	22
4	CAMPO ESCALAR NO UNIVERSO ESTÁTICO DE EINSTEIN	28
4.1	Flutuação média quadrática do campo escalar	32
4.2	Tensor de pressão-energia-momento	34
4.3	Mecânica Estatística e Modo-Zero	38
4.4	Estabilidade termodinâmica local	41
4.4.1	Região $(a^2M^2 + 6\xi - 1) < 0$	41
4.4.2	Região $\xi = 1/6$ e $M \rightarrow 0$	43
4.4.3	Região $(a^2M^2 + 6\xi - 1) > 0$	44
4.5	Além do campo escalar	48
5	CONCLUSÃO	52
	APÊNDICE A – OBJETOS GEOMÉTRICOS - UNIVERSO DE EINSTEIN	54
A.1	Distância geodésica	56
	APÊNDICE B – FUNÇÃO DE GREEN TÉRMICA	58
	Bibliografia	62

Lista de ilustrações

Figura 1 – Derivada da densidade de energia ρ em relação a temperatura T como função da temperatura no intervalo $T \in [0, 1/2]$. Foram escolhidos valores diferentes de a	25
Figura 2 – Derivada da pressão parcial P_x em relação à distância a como função da temperatura T em diferentes intervalos no cilindro para diferentes valores de a (a) Baixas temperaturas $Ta \ll 1$, $T \in [0, 3/2]$ (b) Altas temperaturas $Ta \gg 1$, $T \in [50, 100]$	26
Figura 3 – Derivada da pressão parcial P_z em relação a distância a como função da temperatura T em diferentes intervalos no cilindro para diferentes valores de a (a) Baixas temperaturas $Ta \ll 1$, $T \in [0, 3/2]$ (b) Altas temperaturas $Ta \gg 1$, $T \in [50, 100]$	27
Figura 4 – Gráfico da densidade de energia em relação a constante de acoplamento ξ no regime de temperatura nula, $0 < \xi < 1/6$ ($a=1$), o valor de ρ é negativo até o valor de $\xi = 0,05391\dots$ [50]	42
Figura 5 – Derivada da densidade de energia ρ em relação a temperatura T como função da temperatura no intervalo $T \in [0, 1/2]$ em $\xi = 1/6$ para diferentes valores de a	44
Figura 6 – Derivada da pressão P em relação ao volume V como função da temperatura em dois intervalos diferentes em $\xi = 1/6$ para diferentes valores de a (a) Baixas temperaturas $Ta \ll 1$ $T \in [0, 1/2]$ (b) Altas temperaturas $Ta \gg 1$ $T \in [50, 100]$	45
Figura 7 – Derivada da densidade de energia ρ em relação a temperatura T como função da constante de acoplamento para em que o valor de $a = 1$ (a) Baixas temperaturas, $Ta \ll 1$, no intervalo $1/6 < \xi < 1/2$ (b) Altas temperaturas, $Ta \gg 1$, no intervalo $1/6 < \xi < 1$	46
Figura 8 – Derivada da pressão P em relação ao volume como função da constante de acoplamento no intervalo $1/6 < \xi < 1$ para em que o valor de $a = 1$ (a) Baixas temperaturas, $Ta \ll 1$ (b) Altas temperaturas, $Ta \gg 1$	48

1 Introdução

A cosmologia moderna predominantemente defende a ideia de um universo em expansão, prevista na relatividade geral e mostrada pelas observações de Edwin Hubble sobre o afastamento das galáxias [1]. Esse modelo entra em conflito com o conceito de universo inicialmente proposto por Albert Einstein em 1917 [2], que descrevia um modelo cosmológico em que o universo permaneceria em um estado sem alterações ao longo do tempo.

No entanto, mesmo que explorações recentes na cosmologia sugerem que o nosso universo esteja em expansão [3, 4] e irem na direção contrária desse modelo, a ideia proposta por Einstein ainda mostra a sua utilidade, pois podemos tratar o universo que seria não estático desde um tempo inicial até tempos mais recentes, como uma coleção de universos estáticos com intervalos de tempo pequenos entre cada um deles. Nessa análise, o universo Estático de Einstein não representa o todo da história cósmica, mas, em vez disso, é uma fase temporária ou um intervalo de tempo na extensa linha do tempo de um universo em constante evolução [5].

Do ponto de vista matemático, o universo de Einstein, que é estático, representa uma simplificação e modificação da métrica de Friedmann-Robertson-Walker [6–8]. Em vez de descrever um espaço-tempo que está em constante expansão e que contém um fator de escala em suas coordenadas espaciais dependente do tempo, como é o caso da métrica de Friedmann-Robertson-Walker, o universo proposto por Einstein é fechado, estático e é uma 3-esfera espacialmente. Isto significa que, em grande escala, o universo teria a topologia e a geometria de uma esfera tridimensional (com três parâmetros angulares χ , θ e φ) embutida em um espaço euclidiano quadridimensional. Esse modelo pode ser comparado com um espaço-tempo mais geral como o Friedmann-Robertson-Walker ao considerarmos pequenos intervalos de tempo, tais que o fator de escala nesse intervalo seja aproximadamente constante.

E é nesse espaço-tempo que desejamos estudar um dos campos fundamentais da natureza, o campo escalar. Por muito tempo na literatura, esse campo era tratado apenas como um modelo matemático idealizado mais conveniente de se trabalhar em comparação com os campos espinoriais e vetoriais, que tinham partículas fundamentais associadas, como os elétrons no caso dos espiniores e os fótons no caso vetorial [9]. Esse cenário muda quando em 2012 se é observado uma nova partícula em um experimento feito no “Large Hadron Collider”, LHC [10]. Essa partícula viria a ser chamada de bóson de Higgs e sua característica é ser uma partícula elementar de spin zero associada ao campo escalar, o campo de Higgs. Esse campo é essencial para explicar a existência de massa em partículas

como os bósons W^+ , W^- e Z^0 , que são responsáveis pela interação eletrofraca [11].

Além do bóson de Higgs, o campo escalar tem sua importância na cosmologia em que uma das descrições mais amplamente utilizadas, particularmente no contexto de modelos inflacionários, envolve o chamado “modelo de acoplamento não-mínimo” [12]. Neste modelo, o campo escalar está diretamente associado a geometria do espaço-tempo do universo. Ainda sobre modelos inflacionários, temos o “inflaton”, um campo escalar com massa, em que a velocidade de crescimento do universo primordial é determinada pelo estado inicial desse campo [13, 14]. A conexão do modelo de acoplamento não-mínimo com a geometria do espaço-tempo aparece com a presença do escalar de curvatura de Ricci que está associado a uma constante adimensional, geralmente denotada por ξ . Essa associação é estabelecida introduzindo um termo adicional na ação da geometria do universo, $\frac{1}{2}\xi R$ [9]. Na literatura científica, ξ é frequentemente tratado como um parâmetro livre, ou seja, um valor que pode assumir qualquer magnitude [15]. Em alguns estudos onde a liberdade desse parâmetro não é adequada, se fixa o valor dessa quantidade seguindo prescrições da física de partículas [16]. Neste estudo, procuraremos investigar se existem limitações ou restrições para esse parâmetro, que possam ser derivadas da perspectiva termodinâmica do campo escalar no universo de Einstein.

Visamos aqui esclarecer o papel do parâmetro de acoplamento ξ na teoria quântica de campos a temperatura finita e entender como ele influencia o comportamento termodinâmico do campo escalar no espaço-tempo, que no caso é o universo de Einstein.

No segundo capítulo, revisamos o aparato matemático necessário para encontrarmos as quantidades para que o estudo seja feito, incluindo uma revisão sobre os propagadores da teoria quântica de campos no seu estado de vácuo e com a ajuda do apêndice B, aplicamos o método de “point-splitting” para encontrarmos as quantidades termodinâmicas de cada sistema.

No terceiro capítulo, estudamos um espaço-tempo mais simples que o universo de Einstein e aplicamos todo aparato revisado de forma didática para que assim o leitor obtenha mais familiaridade com o método. Nesse capítulo também separamos uma parte para falarmos sobre estabilidade termodinâmica, conceito muito importante que será utilizado no próximo capítulo para justificar as restrições no parâmetro de acoplamento.

O quarto capítulo é onde se concentra o foco desta dissertação, onde aplicamos os conhecimentos adquiridos anteriormente para calcular as quantidades termodinâmicas do campo escalar no espaço-tempo estático do universo de Einstein. Verificamos, assim, a nossa hipótese sobre a existência ou não de limitações para a constante de acoplamento ξ ao abordar a termodinâmica do campo escalar.

Por conveniência, adotamos um sistema de unidades tal que $k_B = c = \hbar = 1$. Além disso, consideramos índices gregos $\alpha, \beta, \mu, \dots$ variando de 0 até 3, enquanto que

índices latinos minúsculos i, j, k, \dots variam de 1 até 3, e os tensores métricos presentes têm assinatura $(+, -, -, -)$.

Note que ao utilizar o sistema de unidades adotado, temperatura T e energia E têm as mesmas dimensões físicas. No entanto, nesse sistema, as unidades de comprimento a e tempo t acabam tendo como dimensão física o inverso da energia E . Assim, descobrimos que a grandeza Ta é adimensional.

2 Teoria quântica de campos em espaço-tempo curvo

Esse capítulo é uma pequena revisão sobre o tema teoria quântica de campos em espaço-tempo curvo e será baseado inteiramente nas referências [17–20]. Para construirmos a teoria quântica de campos em espaços curvos, precisamos antes construir a teoria clássica em espaços curvos utilizando da ação, que por sua vez seria responsável por gerar as equações de movimento e então quantizar os campos. Consideremos então um campo escalar $\phi = \phi(t, \vec{x})$ real e de massa M . A ação clássica desse campo é:

$$S = \int L \sqrt{-g} d^d x, \quad (2.1)$$

sendo L a densidade lagrangiana do campo escalar, d o número de dimensões do espaço-tempo e $\sqrt{-g}$ a raiz quadrada do determinante g da métrica do espaço-tempo curvo (o sinal negativo é necessário devido à assinatura escolhida para a métrica). Para a teoria do campo escalar, essa densidade lagrangiana é

$$L = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} (M^2 + \xi R) \phi^2 \quad (2.2)$$

onde ξ é a constante de acoplamento com a curvatura, R é o escalar de curvatura, $\square = \nabla_\mu \nabla^\mu$ o operador d'Alembertiano covariante (por vezes conhecido como operador Laplace-Beltrami) e ∇_μ é a derivada covariante. Com a construção da ação, aplicamos o princípio da mínima ação $\delta S = 0$ e assim obtemos a equação de movimento para o campo escalar real e com massa em um espaço curvo:

$$(\square_x + M^2 + \xi R)\phi(x) = 0. \quad (2.3)$$

Note que a equação de movimento (2.3) já contém o termo de acoplamento com a geometria mesmo que essa equação ainda seja para o campo clássico.

No entanto, como desejamos trabalhar com o campo quântico, é necessário quantizarmos o campo escalar. Isso é, transformá-lo em operador quântico, mas antes disso precisamos primeiro definir o campo de momento conjugado do campo escalar, que é:

$$\pi(x) = \sqrt{-g} g^{0\nu} \partial_\nu \phi. \quad (2.4)$$

A partir disso, podemos enfim quantizar o campo escalar utilizando as relações de comutação entre os campos e seu momento conjugado

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{x}')] &= 0 \\ [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] &= 0 \\ [\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] &= i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned} \quad (2.5)$$

Até o momento, a nossa discussão foi local. Para obtermos a solução geral de (2.3), precisamos que exista um problema de Cauchy bem colocado [20], isto é, dado valores iniciais como $\phi(t_0, \vec{x})$ e $\pi(t_0, \vec{x})$, então os campos $\phi(t, \vec{x})$ e $\pi(t, \vec{x})$ são determinados sem ambiguidade. [21]

Antes de descrever o nosso espaço-tempo, precisamos definir o que é uma superfície de Cauchy. Para uma variedade pseudo-Riemanniana \mathcal{M} , uma superfície de Cauchy é uma hipersuperfície de tipo espaço interceptada apenas uma vez por todas as possíveis curvas causais presentes em \mathcal{M} . Essas curvas têm como definição que seus vetores tangentes sejam tipo luz (nulo) ou tipo tempo em todos os seus pontos.

Assumimos que nosso espaço-tempo \mathcal{M} satisfaz as seguintes condições:

- (a). \mathcal{M} possui uma superfície de Cauchy
- (b). \mathcal{M} é globalmente hiperbólico, isto é, para cada par de pontos p e q em \mathcal{M} , a região de encontro entre o cone de luz passado do ponto p e o cone de luz futuro do ponto q é um conjunto compacto.
- (c). \mathcal{M} é forma de $R \times \Sigma$, isto é, \mathcal{M} pode ser foliado em subvariedades $(N-1)$ -dimensional, sendo todas elas topologicamente iguais entre si. E cada uma dessas foliações, é uma superfície de Cauchy Σ .

Vale salientar que as condições (a), (b) e (c) são equivalentes e também assumimos que as nossas superfícies de Cauchy são representadas por equações $t = \text{constante}$ pelo menos localmente.

Após a discussão sobre o espaço-tempo \mathcal{M} , é útil introduzirmos a noção de produto escalar entre funções f_i , que são soluções da equação de Klein-Gordon (2.3):

$$\langle f_1, f_2 \rangle = -i \int_{\Sigma} \{f_1 \partial_{\mu} f_2^* - (\partial_{\mu} f_1) f_2^*\} \sqrt{-g} d\Sigma^{\mu},$$

onde Σ é uma hipersuperfície do espaço-tempo curvo do tipo espaço e $d\Sigma^{\mu} = n^{\mu} d\Sigma$, n^{μ} é o vetor normal do tipo tempo à hipersuperfície Σ . Com a definição de produto escalar entre soluções da equação de Klein Gordon, que foi uma escolha entre as varias possibilidades de produtos internos, somos capazes de construir a solução geral da equação (2.3) a partir de um conjunto de soluções $\{f_i, f_i^*\}$ linearmente independentes entre si, tal que:

$$\phi(x) = \sum_i \left[a_i f_i(t, \vec{x}) + a_i^{\dagger} f_i^*(t, \vec{x}) \right]. \quad (2.6)$$

Os operadores a_i, a_i^{\dagger} da solução geral, representam os operadores de criação e aniquilação de partículas [22]. Ao utilizar a solução geral do campo escalar (2.6) nas relações de comutação (2.5), encontramos que esses operadores satisfazem uma relação de comutação

entre si e essa comutatividade entre os operadores de criação e aniquilação, sendo até mesmo uma forma alternativa para se realizar a quantização do campo

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}.$$

A utilização dos operadores de criação e aniquilação desempenha um papel essencial na definição do estado de vácuo. Esse conceito está muito presente na teoria quântica de campos e desempenhará um papel crucial na formulação de funções de Green a zero absoluto e em muitos outros aspectos da física quântica de partículas e campos. O estado de vácuo, denotado como $|0\rangle$, representa o estado quântico de energia mínima do campo, caracterizado pela ausência de partículas físicas. Quando aplicamos o operador de aniquilação a_j a este estado, o resultado é o vetor nulo, ou seja,

$$a_j |0\rangle = 0.$$

Fisicamente, isto reflete a ideia de que não há partículas para serem aniquiladas em um estado de energia mínima. Por outro lado, ao aplicarmos o operador de criação a_j^\dagger ao estado de vácuo, obtemos o estado $|1_j\rangle$,

$$a_j^\dagger |0\rangle = |1_j\rangle,$$

que representa o primeiro estado excitado do campo e, portanto, a presença de uma partícula que está associada ao estado j do campo escalar. O estado $|1_j\rangle$ é um estado contendo uma única partícula. Quando o mesmo tem mais de uma partícula, pode ser escrito em relação ao estado de vácuo como:

$$|n_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_j!}} (a_j^\dagger)^{n_j} |0\rangle.$$

O produto interno entre diferentes estados quânticos, por serem ortogonais entre si, resulta em

$$\langle n_{1,j} | n_{2,k} \rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{1,j}! n_{2,k}!}} \langle 0 | (a_{1,j})^{n_{1,j}} (a_{2,k}^\dagger)^{n_{2,k}} |0\rangle = \delta_{n_1, n_2} \delta_{j,k}.$$

Essa ortogonalidade entre diferentes estados tem como resultado direto, que o produto interno entre o estado de vácuo $|0\rangle$ e o estado quântico de uma partícula em um estado j $|1_j\rangle$ seja nulo ($\langle 0 | 1_j \rangle = 0$). Com isso, da definição (2.6) já podemos concluir que o valor esperado no vácuo do campo escalar $\langle \phi \rangle = \langle 0 | \phi(x) |0\rangle$ é nulo, e como consequência temos que a flutuação do campo escalar $(\Delta\phi)^2 = \langle \phi^2 \rangle - \langle \phi \rangle^2$ necessita apenas de $\langle \phi^2 \rangle$ para ser encontrada.

Para calcularmos valores esperados no vácuo, como por exemplo $\langle \phi^2 \rangle$, nos utilizamos das funções de Green e do método de “point-splitting”. Portanto, vamos definir as funções

de Green necessárias. Começamos com:

$$iG(x, x') = \langle 0 | [\phi(x), \phi(x')] | 0 \rangle, \quad (2.7)$$

$$G^{(1)}(x, x') = \langle 0 | \{\phi(x), \phi(x')\} | 0 \rangle, \quad (2.8)$$

onde $\{, \}$ representa anticomutação. A função $G(x, x')$ é a função de Schwinger e $G^{(1)}(x, x')$ é a função de Hadamard, podemos separar ambas as funções em diferentes partes. Essa separação permite definirmos novas funções auxiliares, que também são conhecidas como funções de Wightman e serão úteis futuramente. São definidas como

$$G^+(x, x') = \langle 0 | \phi(x)\phi(x') | 0 \rangle,$$

$$G^-(x, x') = \langle 0 | \phi(x')\phi(x) | 0 \rangle.$$

O propagador de Feynman $G_F(t, \vec{x}; t', \vec{x}')$ descreve a amplitude da probabilidade de uma partícula viajar de um ponto \vec{x} em um tempo t até um ponto \vec{x}' em um tempo t' . O propagador será de extrema importância nos nossos cálculos e é definido como o valor esperado do produto ordenado temporalmente $T(A(x))$ dos campos

$$\begin{aligned} iG_F(x, x') &= \langle 0 | T(\phi(x)\phi(x')) | 0 \rangle \\ &= \Theta(t - t')G^+(x, x') + \Theta(t' - t)G^-(x, x'), \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde $\Theta(x)$ é a função de Heaviside. O propagador de Feynman pode ser separado em partes reais e imaginárias, mas antes disso precisamos definir as funções de Green retardada $G_R(x, x')$ e avançada $G_A(x, x')$

$$G_R(x, x') = -\Theta(t - t')G(x, x')$$

$$G_A(x, x') = \Theta(t' - t)G(x, x')$$

Com essas informações podemos definir também a média entre esses novos propagadores

$$\bar{G}(x, x') = \frac{1}{2}(G_R(x, x') + G_A(x, x'))$$

e então podemos separar o propagador de Feynman $G_F(x, x')$ nas partes real e imaginária.

$$G_F(x, x') = -\bar{G}(x, x') - \frac{i}{2}G^{(1)}(x, x')$$

Dessa separação, chegamos a concluir que o $G^1(x, x')$ pode então ser reescrito em relação ao propagador de Feynman. Isto é uma relação muito útil entre as funções de Green e nos ajudará quando tratarmos do método de "point-splitting" para o cálculo das quantidades.

$$G^{(1)}(x, x') = i[G_F(x, x') - G_F^*(x, x')] \quad (2.10)$$

Note que a partir da definição de $G^{(1)}(x, x')$ podemos encontrar $\langle \phi^2 \rangle$ quando tratamos do limite de coincidência dos pontos da função de Green, isto é,

$$\langle \phi(x)^2 \rangle = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow x'} G^{(1)}(x, x') = \frac{i}{2} \lim_{x \rightarrow x'} [G_F(x, x') - G_F^*(x, x')]. \quad (2.11)$$

Quando aplicamos o operador $(\square_x + M^2 + \xi R)$ à definição (2.9), obtemos a equação diferencial associada ao propagador de Feynman. Ao resolver essa equação, encontramos o propagador de Feynman desejado que é essencial para o método de “point-splitting”.

$$(\square_x + M^2 + \xi R)G_F(x, x') = -\delta(x, x'), \quad (2.12)$$

tal que $\delta(x, x') = (-g)^{-1/2} \delta^n(x - x')$ é a delta de Dirac em um espaço curvo.

Por fim, encontraremos o tensor de pressão-energia-momento para que sejamos capazes de trabalhar com as quantidades termodinâmicas do nosso sistema, o tensor momento-energia para uma métrica de espaço-tempo curvo pode ser encontrado com uma variação da ação com respeito a métrica

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

ao variarmos a ação do campo escalar com respeito a uma métrica de espaço-tempo qualquer. O resultado é [18]

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & (1 - 2\xi) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \left(2\xi - \frac{1}{2} \right) g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \phi \nabla_\sigma \phi - 2\xi \phi \nabla_{\mu\nu} \phi + \frac{2}{d} \xi g_{\mu\nu} \phi \square^2 \phi \\ & - \xi \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + 2 \frac{(d-1)}{d} \xi R g_{\mu\nu} \right] \phi^2 + 2 \left[\frac{1}{4} - \xi \left(1 - \frac{1}{d} \right) \right] M^2 g_{\mu\nu} \phi^2, \end{aligned}$$

mas como estamos interessados nos efeitos quânticos dessas quantidades é necessário, portanto, transformar essas quantidades física em operadores. Antes de realizar a transformação do tensor pressão-energia-momento em operador, reescrevemos o tensor utilizando a equação de movimento (2.3), para simplificar o processo:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & (1 - 2\xi) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \left(2\xi - \frac{1}{2} \right) g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \phi \nabla_\sigma \phi - 2\xi \phi \nabla_{\mu\nu} \phi + \frac{2}{d} \xi g_{\mu\nu} \phi (-M^2 - \xi R) \phi \\ & - \xi \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + 2 \frac{(d-1)}{d} \xi R g_{\mu\nu} \right] \phi^2 + 2 \left[\frac{1}{4} - \xi \left(1 - \frac{1}{d} \right) \right] M^2 g_{\mu\nu} \phi^2 \\ = & (1 - 2\xi) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \left(2\xi - \frac{1}{2} \right) g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \phi \nabla_\sigma \phi - 2\xi \phi \nabla_{\mu\nu} \phi \\ & - \xi \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + 2\xi R g_{\mu\nu} \right] \phi^2 + 2 \left[\frac{1}{4} - \xi \right] M^2 g_{\mu\nu} \phi^2. \end{aligned}$$

O que nos leva a forma mais simplificada do tensor momento-energia:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & (1 - 2\xi) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \left(2\xi - \frac{1}{2} \right) g_{\mu\nu} [\nabla^\sigma \phi \nabla_\sigma \phi - \xi R \phi^2 - M^2 \phi^2] \\ & - 2\xi \phi \nabla_{\mu\nu} \phi - \xi R_{\mu\nu} \phi^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

No entanto, o tensor pressão-energia-momento identificado aqui é uma quantidade de natureza clássica, e nosso objetivo principal é compreender como essa grandeza é afetada pela quantização dos campos. Para isso, é necessário determinar o valor esperado desse tensor após transformá-lo em um operador quântico, o que requer a aplicação do método de “point-splitting”.

O método de “point-splitting” envolve a definição de um operador que, quando aplicado à função de Green $G^{(1)}(x, x')$, nos conduz ao valor esperado do tensor pressão-energia-momento. Esse resultado é obtido quando aplicamos o limite da coincidência de pontos

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow x'} D_{\mu\nu} G^{(1)}(x, x'), \quad (2.14)$$

em que $D_{\mu\nu}$ é definido como:

$$D_{\mu\nu} = (1 - 2\xi)\partial_\mu\partial_{\nu'} + (2\xi - 1/2)g_{\mu\nu}[g^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_{\sigma'} - M^2 - \xi R] - 2\xi\nabla_\mu\nabla_{\nu'} - \xi R_{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

É fácil verificar que esse operador ao ser aplicado em (2.8) resulta em (2.13) no limite da coincidência de pontos. Porém como vamos utilizar o propagador de Feynman, reescrevemos a função de Hadamard com a equação (2.10), logo o nosso valor esperado do tensor momento-energia será:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{i}{2} \lim_{x \rightarrow x'} D_{\mu\nu}[G_F(x, x') - G_F^*(x, x')]. \quad (2.16)$$

3 Campo escalar no cilindro

Antes de aprofundarmos nos cálculos relativos ao espaço-tempo do universo estático de Einstein, é interessante explorar inicialmente o espaço-tempo cilíndrico, o qual tem uma grande semelhança com o espaço de Minkowski. Essa abordagem inicial nos proporcionará uma intuição mais sólida para compreender o desafio apresentado pelo universo de Einstein. Começamos introduzindo a métrica do espaço-tempo em questão [23, 24]

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Perceba que mesmo a métrica sendo aparentemente igual a métrica de Minkowski existe uma diferença crucial entre ambos, que é na forma em como definimos as coordenadas cartesianas. No caso do cilindro, introduzimos uma periodicidade em uma das coordenadas espaciais. Nesse estudo, optamos por considerar a coordenada periódica x , a qual satisfaz a condição $x = x + a$. Temos então a topologia de um cilindro. O nome cilindro do espaço se dá pelo fato que o comprimento a pode ser reescrito utilizando a noção de circunferência tal que $a = 2\pi R$ e assim tornando mais fácil o nosso entendimento geométrico sobre como é o comportamento do mesmo.

Para desenvolver uma intuição geométrica sobre o espaço, podemos optar por uma abordagem visual. Em vez de trabalhar com o espaço-tempo cilíndrico em (3+1) dimensões, vamos simplificar para o espaço (2+1) dimensões. Imaginemos uma folha ou plano em um espaço tridimensional, a folha representa somente as coordenadas espaciais da métrica excluindo assim a coordenada temporal. A periodicidade de uma coordenada espacial resultaria na junção de um lado da folha ao outro, formando assim um cilindro.

Com esse exemplo podemos entender a geometria do espaço-tempo cilíndrico em (3+1) dimensões de maneira semelhante. No caso, teríamos um cilindro de três dimensões espaciais presente em um espaço euclidiano quadridimensional. É por essa razão que nos referimos ao espaço-tempo que estamos estudando como um cilindro.

Observe que esse espaço é caracterizado como plano, o que implica que objetos geométricos como as componentes do tensor de Riemann $R^\mu_{\nu\rho\lambda}$ e o escalar de curvatura de Ricci R são identicamente nulos. Consequentemente, o termo de acoplamento escalar não se encontra presente na equação de movimento do campo escalar, ao contrário do que veremos no universo de Einstein, posteriormente.

Para a determinação das grandezas essenciais, tais como a densidade de energia, pressão e as flutuações do vácuo associadas ao nosso campo escalar, recorreremos à função de Green, também conhecida como propagador de Feynman $G_F(x, x')$ [23, 25]:

$$(\square_x + M^2)G_F(x, x') = -\delta(x, x'), \quad (3.1)$$

em que $\square_x = \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2$. Antes de obtermos o propagador de Feynman para o cilindro, trataremos primeiro das autofunções do operador $(\square_x + M^2)$ e para encontrá-las basta resolver a seguinte equação de autovalor

$$(\square_x + M^2)\phi_j(t, x, y, z) = E_j\phi_j(t, x, y, z) \quad (3.2)$$

Utilizando o método de separações de variáveis para resolver a equação diferencial anterior, encontramos que as autofunções desse operador são:

$$\phi_j(t, x, y, z) = Ae^{i(k_1x + k_2y + k_3z - \omega t)} \quad (3.3)$$

onde $A, \omega, k_1 = \frac{2\pi n}{a}, k_2, k_3$ são constantes e $n \in \mathbb{Z}$. Escolheremos o valor de A futuramente tal que seja conveniente, perceba que a aparição de n na constante k_1 resulta da condição periódica sobre a coordenada associada x . Ao aplicar os auto-estados (3.3) encontrados na sua equação original (3.2), encontramos os auto-valores E_j associados a esses auto-estados

$$E_j = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + M^2 - \omega^2. \quad (3.4)$$

Com as informações sobre os auto-estados do campo escalar encontradas, podemos então propor um ansatz que seja capaz de resolver a equação (3.1) referente ao propagador de Feynman $G_F(x, x')$

$$G_F(x, x') = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 e^{-i\tau E_j} \phi_j(x) \phi_j^*(x'). \quad (3.5)$$

Para verificar a validade do nosso ansatz (3.5), é suficiente aplicar o operador diferencial $(\square_x + M^2)$ no próprio ansatz e mostrar que recuperamos a equação (3.1)

$$\begin{aligned} (\square_x + M^2)G_F(x, x') &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 e^{-i\tau E_j} (\square_x + M^2)\phi_j(x) \phi_j^*(x') \\ &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 e^{-i\tau E_j} E_j \phi_j(x) \phi_j^*(x'). \end{aligned}$$

Com uma manipulação engenhosa sobre a derivada da exponencial, podemos reescrever a exponencial presente na integral

$$\frac{d}{d\tau} e^{-i\tau E_j} = -ie^{-i\tau E_j} E_j.$$

Logo,

$$(\square_x + M^2)G_F(x, x') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \phi_j(x) \phi_j^*(x') \int_0^{\infty} d\tau \frac{d}{d\tau} e^{-i\tau E_j}.$$

A última integral na equação anterior pode ser resolvida ao fazer a substituição $E_j \rightarrow E_j - i\epsilon$. Essa mudança de variáveis nos permite resolver o problema ao utilizar o teorema fundamental do cálculo, onde a exponencial no limite assintótico de $\tau \rightarrow \infty$, por ser

imaginária, resultaria em um limite não definido. Após a substituição, esse problema desaparece já que a exponencial no limite agora é real e tem um valor finito. A utilização do teorema fundamental do calculo, aplicando o limite de $\epsilon \rightarrow 0$ voltamos com os autovalores E_j anteriores.

$$\begin{aligned} (\square_x + M^2)G_F(x, x') &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \phi_j(x) \phi_j^*(x') \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[e^{-i\tau(E_j - i\epsilon)} \right]_0^{\infty} \\ &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \phi_j(x) \phi_j^*(x') \end{aligned}$$

Depois de passar por esse processo, colocamos os auto-estados (3.3) na equação anterior e verificamos que o lado direito da equação seria a relação de completeza dos auto-estados do campo escalar para o cilindro.

$$\begin{aligned} (\square_x + M^2)G_F(x, x') &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \phi_j(x) \phi_j^*(x') \\ &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 |A|^2 e^{i[k_1(x-x') + k_2(y-y') + k_3(z-z') - \omega(t-t')]}. \end{aligned}$$

Cada uma das integrais presentes na equação anterior é a definição integral da delta de Dirac em sua respectiva variável. Ao aplicarmos a definição, temos

$$(\square_x + M^2)G_F(x, x') = -|A|^2 (2\pi)^3 \delta(t-t') \delta(y-y') \delta(z-z') \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi n(x-x')/a}. \quad (3.6)$$

O somatório de exponenciais imaginarias pode ser reescrito com a formula usual de Poisson abaixo [26]. Assim, conseguimos transformar as exponenciais nas deltas desejadas:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inx} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n). \quad (3.7)$$

Podemos aplicá-las na eq. (3.6) para chegar em:

$$\begin{aligned} (\square_x + M^2)G_F(x, x') &= -|A|^2 (2\pi)^4 \delta(t-t') \delta(y-y') \delta(z-z') \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{2\pi(x-x')}{a} - 2\pi n\right) \\ &= -|A|^2 (2\pi)^4 \delta(t-t') \delta(y-y') \delta(z-z') \frac{a}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-x'-na). \end{aligned}$$

Como A é uma constante arbitraria das autofunções, escolhermos $|A|^2$ tal que a equação do propagador de Feynman (2.12) seja satisfeita. Logo:

$$|A|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3 a},$$

o que nos leva finalmente a

$$\begin{aligned} (\square_x + M^2)G_F(x, x') &= -\delta(t-t') \delta(y-y') \delta(z-z') \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-x'-na) \\ &= -\delta(x-x') \end{aligned} \quad (3.8)$$

Demonstramos que a nossa proposta de solução (3.5) satisfaz a equação de Green. O passo subsequente envolve a conversão do nosso ansatz em uma forma mais conveniente para facilitar as manipulações futuras:

$$\begin{aligned} G_F(x, x') &= -i|A|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d\tau \int d\omega \int dk_2 \int dk_3 e^{i[k_1(x-x') + k_2(y-y') + k_3(z-z') - \omega(t-t') - \tau E_j]} \\ &= -i|A|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau e^{-i[\tau(k_1^2 + M^2) + k_1(x-x')]} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i[\omega(t-t') - \tau\omega^2]} \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 e^{i[k_2(y-y') - \tau k_2^2]} \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 e^{i[k_3(z-z') - \tau k_3^2]}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para resolver as integrais ω , k_2 e k_3 em (3.9), faremos mudanças temporárias de variáveis nas integrais, colocamos $\tau = -i\rho$ para as integrais em k_2 e k_3 , e $\tau = i\sigma$ para a integral em ω . Essa escolha nos permitirá transformar essas integrais em distribuições gaussianas [27], simplificando assim o processo de integração. Assim, temos

$$G_F(x, x') = -i|A|^2 \int_0^{\infty} d\tau \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i[\tau(k_1^2 + M^2) + k_1(x-x')]} \right] e^{-\frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{4\rho} - \frac{(t-t')^2}{4\sigma}} \frac{\pi^{3/2}}{\rho} \frac{1}{\sqrt{\sigma}}. \quad (3.10)$$

O próximo passo será reescrever o somatório entre colchetes. Para isso podemos perceber uma manipulação desse termo:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i[\tau(k_1^2 + M^2) + k_1(x-x')]} &= e^{-i\tau M^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i[\tau(2\pi n/a)^2 + (2\pi n/a)(x-x')]} \\ &= e^{-i\tau M^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \delta(\lambda - 2\pi n) e^{-i[\tau(\lambda/a)^2 + (\lambda/a)(x-x')]} \end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de Poisson novamente e que $\tau = -i\rho$, encontramos

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i[\tau(k_1^2 + M^2) + k_1(x-x')]} &= \frac{e^{-i\tau M^2}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-\rho(\lambda/a)^2 - i(\lambda/a)(x-x' - na)} \\ &= \frac{e^{-i\tau M^2}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{\rho}} e^{-\frac{(x-x' - na)^2}{4\rho}}. \end{aligned}$$

Utilizando a expressão anterior em (3.10) e voltando as variáveis em τ , chegamos em

$$G_F(x, x') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau e^{-i[\frac{(x-x' - na)^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - (t-t')^2}{4\tau} + \tau M^2]} \frac{1}{(4\pi i\tau)^2}. \quad (3.11)$$

A solução dessa integral pode ser encontrada na referência [27] e seu resultado é:

$$G_F(x, x') = -i \frac{M}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_1(M\sqrt{(x-x' - na)^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - (t-t')^2})}{\sqrt{(x-x' - na)^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - (t-t')^2}}, \quad (3.12)$$

sendo $K_\nu(z)$ a função modificada de Bessel de segundo tipo e de ordem ν .

Dessa forma, obtemos a função de Green para o espaço-tempo cilíndrico. Entretanto, é importante ressaltar que essa função de Green foi originalmente definida como o valor

esperado no estado de vácuo, o que a torna especialmente útil para cálculos à temperatura nula. No entanto, uma vez que nosso foco neste trabalho é analisar as propriedades termodinâmicas em temperaturas finitas, é necessário realizar modificações em nosso propagador de Feynman para que possamos adequadamente levar em consideração esses efeitos térmicos.

Após as considerações feitas sobre a função de Green térmica no Apêndice B, com a propriedade sobre o propagador de Feynman $G_{F,\beta}(x, x')$ (B.25), enfim, obtemos

$$G_{F,\beta}(x, x') = -i \frac{M}{(2\pi)^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_1(M\sqrt{\sigma^{(m,n)}})}{\sqrt{\sigma^{(m,n)}}}, \quad (3.13)$$

onde $\sigma^{(m,n)}$ é conhecida como a função de Synge [28], e para o nosso espaço-tempo, é definida como

$$\sigma^{(m,n)} := (x - x' - na)^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 - (t - t' - im\beta)^2. \quad (3.14)$$

Após obtermos o propagador de Feynman térmico, antes de prosseguirmos para a determinação de grandezas físicas, como densidade de energia e pressão, é crucial realizarmos a renormalização dessa quantidade. Isso se torna necessário devido à divergência inerente à função de Green quando aplicamos o limite da coincidência dos pontos, conforme esperado para uma função desse tipo. No entanto, vale ressaltar que a renormalização é relativamente simples, pois a fonte da divergência do propagador reside apenas no termo do somatório com $n = 0$ e $m = 0$. Esse termo do somatório é equivalente ao propagador de Feynman para o espaço de Minkowski, e, dado que nosso espaço-tempo é plano, podemos remover essa contribuição sem problemas, resultando em quantidades finitas.

Então, além de removemos o termo $n = 0$ e $m = 0$, vamos também separar os termos do somatório de (3.13) tal que

$$G_{F,\beta}(x, x') = G_{vac}(x, x') + G_{th}(x, x') + G_{mx}(x, x'), \quad (3.15)$$

sendo

$$G_{vac}(x, x') = -i \frac{M}{(2\pi)^2} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_1\left(M\sqrt{\sigma^{(0,n)}}\right)}{\sqrt{\sigma^{(0,n)}}}, \quad (3.16)$$

$$G_{th}(x, x') = -i \frac{M}{(2\pi)^2} \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \frac{K_1\left(M\sqrt{\sigma^{(m,0)}}\right)}{\sqrt{\sigma^{(m,0)}}}, \quad (3.17)$$

$$G_{mx}(x, x') = -i \frac{M}{(2\pi)^2} \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_1\left(M\sqrt{\sigma^{(m,n)}}\right)}{\sqrt{\sigma^{(m,n)}}}. \quad (3.18)$$

Os termos em $G_{vac}(x, x')$ consideram os elementos do somatório de $G_F(x, x')$ em que $n \neq 0$ e $m = 0$. Por sua vez, $G_{th}(x, x')$ engloba os termos em que $n = 0$ e $m \neq 0$. Finalmente,

$G_{mx}(x, x')$ abrange os termos restantes, ou seja, aqueles em que $n \neq 0$ e $m \neq 0$. Esse é o significado das plicas nos somatórios. Essa decomposição nos permite analisar as contribuições em que os efeitos de vácuo predominam com $G_{vac}(x, x')$, as contribuições em que os efeitos termodinâmicos são os principais com $G_{th}(x, x')$ e, por fim, as correções desses termos que incorporam tanto os efeitos do vácuo quanto os efeitos termodinâmicos com $G_{mx}(x, x')$.“

3.1 Flutuação média quadrática do campo escalar

Tendo obtido o propagador de Feynman, podemos agora calcular uma das quantidades fundamentais que são influenciadas pelos efeitos termodinâmicos no contexto do cilindro: o valor esperado quadrático do campo escalar, denotado por $\langle \phi^2 \rangle$. Essa grandeza é de muita importância, uma vez que não apenas aparece nos cálculos do tensor pressão-energia-momento, mas também é necessário para determinar o desvio padrão do campo escalar, dado que o valor esperado do campo escalar, $\langle \phi \rangle$, é nulo.

Para calcular $\langle \phi^2 \rangle$, procedemos como em (2.11), porém, analisando o propagador de Feynman da teoria no limite de coincidência de pontos, observamos que o resultado é apenas um valor imaginário puro, simplificando ainda mais a relação (2.11) para

$$\langle \phi^2 \rangle = i \lim_{x \rightarrow x'} G_F(x, x').$$

Como a função de Green foi separada em termos de cada contribuição, seja vácuo $G_{vac}(x, x')$, térmica $G_{th}(x, x')$ ou mista $G_{mx}(x, x')$, o nosso $\langle \phi^2 \rangle$ também será separado em tais contribuições utilizando o mesmo critério que (3.15), facilitando assim a nossa análise sobre o mesmo:

$$\langle \phi^2 \rangle = \langle \phi^2 \rangle_{vac} + \langle \phi^2 \rangle_{th} + \langle \phi^2 \rangle_{mx}.$$

onde

$$\langle \phi^2 \rangle_{vac} = \frac{M}{(2\pi)^2} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_1(Mna)}{na}, \quad (3.19)$$

$$\langle \phi^2 \rangle_{th} = \frac{MT}{(2\pi)^2} \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m} K_1\left(\frac{Mm}{T}\right), \quad (3.20)$$

$$\langle \phi^2 \rangle_{mx} = \frac{MT}{(2\pi)^2} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 T^2 a^2}} K_1\left(\frac{M}{T} \sqrt{m^2 + n^2 T^2 a^2}\right). \quad (3.21)$$

Antes de tomarmos a massa do campo escalar como nula e estudarmos o campo sem massa, precisamos utilizar o limite assintótico da função $K_\nu(z)$ para quando o argumento se aproxima de zero antes de substituir o valor $M = 0$. O limite assintótico $z \rightarrow 0$ da função $K_\nu(z)$ é

$$K_\nu(z) = \Gamma(\nu) \frac{2^{\nu-1}}{z^\nu}; \quad \nu > 0, \quad (3.22)$$

onde $\Gamma(\nu)$ é função Gamma. Ao utilizar essa expansão (3.22) em cada um dos termos de $\langle \phi^2 \rangle$, chegamos que as contribuições de $\langle \phi^2 \rangle$ são

$$\langle \phi^2 \rangle_{vac} = \frac{1}{(2\pi a)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \frac{1}{(2\pi a)^2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{12a^2}, \quad (3.23)$$

$$\langle \phi^2 \rangle_{th} = \frac{T^2}{(2\pi)^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m^2} = 2 \frac{T^2}{(2\pi)^2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{T^2}{12}, \quad (3.24)$$

$$\langle \phi^2 \rangle_{mx} = \frac{T^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2 a^2 T^2}. \quad (3.25)$$

Ao considerar uma massa nula, observamos uma simplificação desses valores. A contribuição do vácuo é nula à medida que a distância a se aproxima do infinito, e quando a temperatura tende a zero, a contribuição térmica também se anula e o termo misto por ser uma correção as contribuições anteriores, acaba sendo nula tanto no limite $T \rightarrow 0$ quanto em $a \rightarrow \infty$. No entanto, na contribuição mista, surge uma diferença entre os termos com massa e sem massa, evidenciada pela convergência das somas.

Em (3.21), a soma é absolutamente convergente pois para valores muito grandes de $K_\nu(z)$, a função Bessel no limite assintótico de $z \rightarrow \infty$ tende a

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8z} + \dots \right] \quad (3.26)$$

e como os argumentos de (3.21) são valores reais positivos, a convergência da soma é garantida pela exponencial negativa. Porém o mesmo não pode ser dito para a soma dupla presente em (3.25). Por comparação de somas, podemos demonstrar que a soma dupla em (3.25) é divergente:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2} &\geq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2 + 2mn + m + n} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m+n+1} \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m+1} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Então, quando o campo escalar não tem massa, temos problemas em relação a renormalização para $\langle \phi^2 \rangle$ quando temos a presença dos efeitos de vácuo (Casimir) e térmicos (corpo negro) ao mesmo tempo.

Se restringirmos o espaço para incluir apenas um desses efeitos como, por exemplo, tratando no limite assintótico $a \rightarrow \infty$, não haveria mais periodicidade na coordenada espacial, e apenas os efeitos térmicos permaneceriam. Nesse caso, o termo $\langle \phi^2 \rangle_{mx}$, que é uma correção aos efeitos térmicos e de vácuo, deve ser automaticamente nulo, e encontramos o mesmo resultado ao considerar $T \rightarrow 0$. Assim, ao examinarmos os limites de cada região

(altas ou baixas temperaturas), é razoável esperar que as correções a esses efeitos sejam significativamente menores em comparação com os valores do efeito dominante.

Agora, se repetirmos o processo de calcular o propagador de Feynman térmico considerando um espaço-tempo cilíndrico com dimensão N e também com apenas uma coordenada espacial periódica, obtemos o seguinte propagador [23, 29]

$$G_{F,\beta,N}(x, x') = -i \frac{M^{(N-2)/2}}{(2\pi)^{N/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{K_{(N-2)/2}(M\sqrt{-\sigma^{(m,n)}})}{(-\sigma^{(m,n)})^{(N-2)/4}}, \quad (3.28)$$

em que $\sigma^{(m,n)}$ é:

$$\sigma^{(m,n)} := (t-t' - im\beta)^2 - (x-x' - na)^2 - (y_1 - y'_1)^2 - (y_2 - y'_2)^2 \dots - (y_{N-2} - y'_{N-2})^2. \quad (3.29)$$

A equação (3.28) é muito parecida com a função térmica de Hadamard encontrada na referência [30]. Nesse artigo é investigado um campo escalar carregado em um espaço-tempo com número arbitrário de coordenadas periódicas.

Repetindo o processo anterior, encontramos $\langle \phi^2 \rangle$, entretanto agora para o caso de N dimensões. Nesse caso, as contribuições térmicas, de vácuo e mistas são

$$\langle \phi^2 \rangle_{vac} = \frac{M^{(N-2)/2}}{(2\pi)^{N/2}} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_{(N-2)/2}(Mna)}{(na)^{(N-2)/2}}, \quad (3.30)$$

$$\langle \phi^2 \rangle_{th} = \frac{M^{(N-2)/2} T^{(N-2)/2}}{(2\pi)^{N/2}} \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m^{(N-2)/2}} K_{(N-2)/2} \left(\frac{Mm}{T} \right), \quad (3.31)$$

$$\langle \phi^2 \rangle_{mx} = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{M^{(N-2)/2} T^{(N-2)/2}}{(m^2 + n^2 T^2 a^2)^{(N-2)/4}} K_{(N-2)/2} \left(\frac{M}{T} \sqrt{m^2 + n^2 T^2 a^2} \right). \quad (3.32)$$

A contribuição de Casimir (3.30) já apareceu na literatura em [29], a equação (3.31), sendo a contribuição de corpo negro, já foi estudada por diversos autores como [14, 31], então vamos focar mais na correção (3.32) dos efeitos de vácuo e térmicos. Após o caso com massa, passamos para o caso de massa nula, obtendo

$$\langle \phi^2 \rangle_{vac} = \frac{1}{2\pi^{N/2}} \Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(na)^{N-2}} = \frac{1}{2\pi^{N/2} a^{N-2}} \Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right) \zeta(N-2), \quad (3.33)$$

$$\langle \phi^2 \rangle_{th} = \frac{1}{2\pi^{N/2}} \Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m\beta)^{N-2}} = \frac{T^{N-2}}{2\pi^{N/2}} \Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right) \zeta(N-2), \quad (3.34)$$

$$\langle \phi^2 \rangle_{mx} = \frac{T^{N-2}}{\pi^{N/2}} \Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2 T^2 a^2)^{(N-2)/2}}, \quad (3.35)$$

com $\zeta(z)$ sendo a função zeta de Riemann. Ao analisar a equação (3.35), podemos observar que, se a dimensão do espaço-tempo for superior a quatro dimensões, como no caso em que $N = 5$, esse termo se torna convergente, eliminando quaisquer preocupações associadas à escolha de uma massa nula para o campo escalar. A dimensão $N = 4$ pode ser considerada

um limiar crítico para essa quantidade. Se optarmos por valores de N inferiores a $N = 4$, os problemas mencionados não se limitam apenas a este termo; na verdade, mesmo outras quantidades ficam suscetíveis a tais questões. Por exemplo, ao selecionar $N = 3$, tanto as contribuições do vácuo quanto as contribuições térmicas se tornam divergentes devido à função zeta.

3.2 Tensor de pressão-energia-momento

Feita a análise sobre a flutuação de vácuo $\langle \phi^2 \rangle$, podemos agora passar a estudar o tensor pressão-energia-momento, que nos irá fornecer a densidade de energia ρ presente no cilindro.

Como discutido no capítulo anterior, para determinar os valores esperados das componentes do tensor pressão-energia-momento, recorreremos ao método de “point-splitting”. No contexto do cilindro, o propagador de Feynman $G_F(x, x')$ assume a forma de um número imaginário puro. Conseqüentemente, o termo $-G_F^*(x, x')$ é idêntico ao próprio propagador de Feynman $G_F(x, x')$, simplificando os cálculos, isto é,

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = i \lim_{x \rightarrow x'} D_{\mu\nu} G_F(x, x') \quad (3.36)$$

No cilindro, onde não há curvatura, tanto o tensor de Ricci quanto o escalar de curvatura são nulos, simplificando o operador $D_{\mu\nu}$ ainda mais. Além disso, o termo

$$i \lim_{x \rightarrow x'} \left(g^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_{\sigma'} - M^2 - \xi R \right) G_F(x, x')$$

se anula para o propagador do espaço-tempo cilíndrico. Isto pode ser verificado de forma direta com a equação (3.13). Portanto, os termos relevantes a serem calculados para o operador $D_{\mu\nu}$ no espaço-tempo cilíndrico são:

$$D_{\mu\nu} = (1 - 2\xi) \partial_\mu \partial_{\nu'} - 2\xi \partial_\mu \partial_\nu \quad (3.37)$$

Agora estamos prontos para calcular a primeira componente não nula do tensor pressão-energia-momento, ou seja, a densidade de energia ρ , que corresponde ao termo $\langle T_{tt} \rangle$. Novamente, iremos separar os termos em vácuo, térmico e misto para a análise individual das contribuições presentes nas componentes.

$$\langle T_{tt} \rangle = \rho = \rho_{vac} + \rho_{th} + \rho_{mx}, \quad (3.38)$$

onde

$$\rho_{vac} = -\frac{M^2}{2\pi^2 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} K_2(Mna), \quad (3.39)$$

$$\rho_{th} = \frac{M^2 T}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{M}{m} K_1\left(\frac{mM}{T}\right) + \frac{3T}{m^2} K_2\left(\frac{mM}{T}\right) \right], \quad (3.40)$$

$$\rho_{mx} = \frac{M^2 T}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\frac{m^2 M}{(m^2 + n^2 T^2 a^2)^{3/2}} K_1 \left(\frac{M \sqrt{m^2 + n^2 T^2 a^2}}{T} \right) \right. \quad (3.41)$$

$$\left. - \frac{T (a^2 n^2 T^2 - 3m^2)}{(m^2 + n^2 T^2 a^2)^2} K_2 \left(\frac{M \sqrt{m^2 + n^2 T^2 a^2}}{T} \right) \right], \quad (3.42)$$

onde foram utilizadas as relações de recorrência da função modificada de Bessel de segundo tipo $K_\nu(z)$.

$$\begin{aligned} K_{\nu+1}(z) + K_{\nu-1}(z) &= -2 \frac{d}{dz} K_\nu(z), \\ K_{\nu+1}(z) - K_{\nu-1}(z) &= \frac{2\nu}{z} K_\nu(z). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Na referência [24] também foram calculadas a densidade de energia e pressão no cilindro utilizando um formalismo diferente. Nesse artigo há uma subtração do termo de corpo negro das quantidades calculadas, a qual é feita em relação a energia livre de Helmholtz e causa algumas discordâncias entre o nosso resultado e a referência [24].

Agora passamos a calcular as componentes restantes que são não identicamente nulas, e essas componentes são as outras componentes da diagonal principal da matriz. Note que como essas três componentes não são iguais não podemos associar diretamente esses termos a pressão isotrópica do cilindro da mesma forma que fizemos com a densidade de energia ρ no termo $\langle T_{tt} \rangle$. Esses termos nos levam a perceber que a pressão presente no cilindro é anisotrópica, ao contrário do que se obtém em Minkowski, que é um universo isotrópico e não periódico como o que estamos analisando. Calculando as componentes restantes do tensor momento-energia, obtemos

$$\langle T_{xx} \rangle = P_x = P_{x \text{ vac}} + P_{x \text{ th}} + P_{x \text{ mx}}, \quad (3.44)$$

com

$$P_{x \text{ vac}} = -\frac{M^2}{2\pi^2 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{Ma}{n} K_1(Mna) + \frac{3}{n^2} K_2(Mna) \right\}, \quad (3.45)$$

$$P_{x \text{ th}} = \frac{M^2 T^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} K_2 \left(\frac{mM}{T} \right), \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} P_{x \text{ mx}} = \frac{M^2 T^2}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left\{ \frac{(m^2 - 3a^2 n^2 T^2)}{(m^2 + n^2 T^2 a^2)^2} K_2 \left(\frac{M \sqrt{m^2 + n^2 T^2 a^2}}{T} \right) \right. \\ \left. - \frac{MT a^2 n^2}{(m^2 + n^2 T^2 a^2)^{3/2}} K_1 \left(\frac{M \sqrt{m^2 + n^2 T^2 a^2}}{T} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde a componente P_x representa a pressão do cilindro na direção onde está a coordenada periódica do cilindro. A pressão presente nas outras componentes do tensor momento-energia representam as pressões nas direções não periódicas do espaço-tempo cilíndrico, e elas são iguais entre si, isto é:

$$\langle T_{yy} \rangle = \langle T_{zz} \rangle = P_y = P_z = P_{z \text{ vac}} + P_{z \text{ th}} + P_{z \text{ mx}} \quad (3.48)$$

em que

$$P_{z\,vac} = \frac{M^2}{2\pi^2 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} K_2(Mna), \quad (3.49)$$

$$P_{z\,th} = \frac{M^2 T^2}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} K_2\left(\frac{mM}{T}\right), \quad (3.50)$$

$$P_{z\,mx} = \frac{M^2 T^2}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2 T^2 a^2)} K_2\left(\frac{M\sqrt{m^2 + n^2 T^2 a^2}}{T}\right). \quad (3.51)$$

Já podemos perceber que a contribuição térmica presente em cada uma das pressões do cilindro são iguais, como é o esperado já que essa contribuição não deveria sofrer muito os efeitos da periodicidade da coordenada espacial do cilindro. E, não só isso, mas o valor dessa quantidade em questão é o que se espera da pressão de corpo-negro com as correções para campo escalar com massa [14], sendo igual em todas as direções, como mostra as equações (3.46) e (3.50), ou seja,

$$P_{x\,th} = P_{z\,th} = P_{th}. \quad (3.52)$$

como já obtemos todas as componentes não nulas do tensor, encontrar o traço do mesmo é uma tarefa simples e nos leva a importante equação

$$\langle T^\mu{}_\mu \rangle = g^{\mu\nu} \langle T_{\mu\nu} \rangle = \rho - (P_x + 2P_z) = M^2 \langle \phi^2 \rangle. \quad (3.53)$$

é interessante perceber que o traço do tensor relaciona todas as quantidades do cilindro calculadas até então, e quando a massa física do campo é nula, o traço é nulo também não existindo mais o termo envolvendo $\langle \phi^2 \rangle$. E não só isso mas a relação entre os termos térmicos da densidade de energia e pressão satisfazem a seguinte equação

$$\rho_{th} - 3P_{th} = M^2 \langle \phi^2 \rangle_{th}. \quad (3.54)$$

Quando não há massa física, essa relação entre a densidade de energia e pressão exatamente corresponde a equação de estado bem conhecida para a radiação de corpo-negro. E se tratando do campo escalar sem massa, podemos encontrar as componentes para $M \rightarrow 0$ se utilizarmos os limites assintóticos da função modificada de Bessel $K_\nu(z)$ (3.22) da mesma forma que fizemos nos cálculos de $\langle \phi^2 \rangle$. Primeiro determinamos a densidade de energia ρ

$$\rho_{vac} = -\frac{\pi^2}{90a^4}, \quad (3.55)$$

$$\rho_{th} = \frac{\pi^2 T^4}{30}, \quad (3.56)$$

$$\rho_{mx} = \frac{2T^4}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{3m^2 - a^2 n^2 T^2}{(a^2 n^2 T^2 + m^2)^3}. \quad (3.57)$$

Em seguida, aplicamos o mesmo procedimento para as componentes da pressão presentes no tensor momento-energia

$$P_{x\,vac} = -\frac{\pi^2}{30a^4}, \quad (3.58)$$

$$P_{x\ th} = \frac{\pi^2 T^4}{90} = P_{z\ th}, \quad (3.59)$$

$$P_{x\ mx} = \frac{2T^4}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{m^2 - 3a^2 n^2 T^2}{(a^2 n^2 T^2 + m^2)^3}, \quad (3.60)$$

$$P_{z\ vac} = \frac{\pi^2}{90a^4}, \quad (3.61)$$

$$P_{z\ mx} = \frac{2T^4}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2 n^2 T^2 + m^2)^2}. \quad (3.62)$$

A primeira coisa a se observar nesse caso é que ao contrário de $\langle \phi^2 \rangle$, não há nenhum problema de convergência dos termos presentes no tensor pressão-energia-momento. Dessa forma, podemos analisar o caso em que $N = 4$, e como estamos no caso sem massa, o traço (3.53) estabelece uma relação entre a densidade de energia e as pressões presentes no cilindro.

Antes de prosseguir com o estudo, vamos deixar de trabalhar com o cilindro de tamanho infinito para trabalharmos com um tronco do cilindro e assim encontrarmos quantidades termodinâmicas, como a energia interna por exemplo. O tronco será limitado por $0 < x < a$ e as coordenadas (y, z) formam uma área de valor A . Com isso temos o volume fechado de $V = aA$. (Note que para o cilindro que estávamos trabalhando anteriormente, $L \rightarrow \infty$.) Devemos observar que embora A seja finito, quando comparamos com a , é arbitrariamente grande.

Com o volume definido, partimos para encontrar a energia interna U e, como a nossa densidade de energia é independente das coordenadas, a integral de ρ em relação ao volume ocupado se reduz a densidade de energia multiplicada pelo volume do tronco de cilindro:

$$U = \int_V \rho dV' = \rho V. \quad (3.63)$$

Mas antes de continuarmos, vamos encontrar a energia livre de Helmholtz F [32]. Existe uma relação entre a energia livre de Helmholtz F e a energia interna U que nos será útil para encontrar F :

$$U = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right). \quad (3.64)$$

Com a relação anterior e (3.63), chegamos em

$$F = -VT \int dT' \frac{\rho}{T'^2}. \quad (3.65)$$

Logo,

$$\frac{F}{V} = -\frac{\pi^2}{90a^4} - \frac{\pi^2 T^4}{90} - \frac{2T^4}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2 n^2 T^2 + m^2)^2}. \quad (3.66)$$

Com a energia livre de Helmholtz, podemos comparar com a equação (54) da referência [24], e percebemos que existe uma discrepância a respeito da contribuição do termo de corpo negro, porém tanto o termo de correção com as somas e o termo de Casimir concordam

com (3.66) e como a densidade de energia e a pressão é obtida utilizando F , elas também tem discrepância nessas quantidades. Com a energia livre de Helmholtz podemos reobter as pressões parciais do cilindro com as relações:

$$P_x = -\frac{1}{A} \left(\frac{\partial F}{\partial a} \right)_{T,A},$$

$$P_z = -\frac{1}{a} \left(\frac{\partial F}{\partial A} \right)_{T,a}.$$

3.3 Estabilidade termodinâmica local

Após trabalharmos com a teoria quântica de campos e encontrado todas as quantidades necessárias para a análise, vamos então passar para o estudo da termodinâmica do campo escalar, mais precisamente vamos estudar a estabilidade desse sistema termodinamicamente.

Começamos com um sistema termodinâmico que tenha dois subsistemas idênticos separados por uma parede totalmente restrita [33], cada um dos subsistemas são definidos por uma equação fundamental $S(U, V, N)$, S é a entropia do subsistema, U é a energia interna do subsistema, V o volume ocupado pelo subsistema e N o número de partículas do subsistema. Se uma quantidade ΔU de um subsistema é transferida para o outro, a entropia do sistema sairia de $2S(U, V, N)$ para $S(U + \Delta U, V + \Delta V, N) + S(U - \Delta U, V - \Delta V, N)$. Se a nova entropia do sistema composto é maior do que a anterior, isso implica que se removermos a restrição adiabática, a energia de um subsistema iria fluir para o outro, quebrando a homogeneidade do sistema composto por dois subsistemas. Logo se queremos a estabilidade do sistema, isto é, que a homogeneidade seja mantida, a condição necessária para tal é [33]

$$S(U + \Delta U, V + \Delta V, N) + S(U - \Delta U, V - \Delta V, N) \leq 2S(U, V, N), \quad (3.67)$$

ou, em sua forma diferencial,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial V} \right)^2 \leq 0. \quad (3.68)$$

Como não estamos interessados na entropia do sistema, vamos utilizar uma relação equivalente a (3.67) que seja em termos de quantidades já calculadas. Quando a função de entropia é máxima, a energia interna do sistema $U(S, V, N)$ é mínima, logo a condição (3.67) se traduz em termos da energia interna da seguinte forma

$$U(S + \Delta S, V + \Delta V, N) + U(S - \Delta S, V - \Delta V, N) \geq 2U(S, V, N). \quad (3.69)$$

Esta condição sobre a convexidade da energia interna (ou entropia) nos levará as condições de estabilidade do sistema termodinâmico [34, 35].

A primeira condição de estabilidade termodinâmica é tratada nesse estudo, a de estabilidade térmica, em que analisamos como a transferência de calor entre diferentes regiões se relaciona com a mudança da temperatura T presente no sistema.

Das condições de estabilidade (3.67) ou (3.69), é possível mostrarmos [33, 35] que a primeira condição de estado equilíbrio estável termodinâmica, é dada pela capacidade térmica a volume constante C_V , isto é

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \geq 0. \quad (3.70)$$

Esta condição estabelece que ao adicionar um pequeno excesso de calor ao elemento de volume de um fluido, a temperatura desse elemento de volume deve aumentar de forma relativa aos arredores de tal forma que uma parte desse calor deve fluir para fora desse elemento de volume novamente. Essa dinâmica requer uma capacidade térmica positiva. Se a capacidade térmica fosse negativa, a temperatura do elemento de volume decresceria e então provocando um fluxo de calor para dentro desse elemento de volume (conforme a 2ª Lei da Termodinâmica), impossibilitando atingir o equilíbrio térmico com o ambiente. Portanto, se $C_V < 0$, concluímos que o sistema é instável.

A próxima condição de estabilidade termodinâmica estudada é a estabilidade mecânica. Em que analisamos como a variação do volume V influencia nas pressões presentes no sistema. Das condições de estabilidade (3.67) ou (3.69), chegamos a condição de equilíbrio mecânico estável, dada pela compressibilidade mecânica a temperatura constante κ_T . Podemos mostrar [33, 35] que

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \leq 0. \quad (3.71)$$

Esta condição estabelece que se o volume do fluido presente no sistema aumentar, a pressão do fluido precisa diminuir adequadamente, de tal forma que a pressão de fora do fluido seja maior que a pressão dentro, e por equilíbrio, a pressão dos arredores tenda a igualar as pressões e conseqüentemente impediria o crescimento do volume, que retornaria a seu valor original. Isso requer que a compressibilidade seja positiva. Se a compressibilidade fosse negativa, quando o volume do fluido aumentasse, a pressão do fluido aumentaria tornando a pressão dos arredores menores do que a fluido e assim o volume poderia crescer indefinitivamente sem que a pressão dos arredores fosse capaz de resistir a esse crescimento impossibilitando atingir o equilíbrio mecânico do sistema.

As condições (3.70) e (3.71) representam o princípio de Le Châtelier. De acordo com esse princípio, o critério de estabilidade é [33]:

Qualquer perda de homogeneidade que apareça no sistema deve desencadear um processo destinado a eliminá-la.

Agora que entendemos como funciona a estabilidade em sistemas termodinâmicos, vamos ao campo escalar no espaço-tempo cilíndrico para estudar a estabilidade termodinâmica, a partir das quantidades calculadas com o tensor pressão-energia-momento, para o caso sem massa.

Trabalhando primeiro com a estabilidade térmica do sistema, começamos então com a derivada em relação a temperatura da energia interna

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = V \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_V \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{C_V}{V} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_V \geq 0. \quad (3.72)$$

Para a estabilidade térmica, os termos relevantes são ρ_{th} e ρ_{mx} . Ao derivar (3.56) e (3.57) em relação a temperatura, obtemos a condição de estabilidade para o caso sem massa:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_V = \frac{2\pi^2 T^3}{15} + \frac{24T^3}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{m^2 (m^2 - a^2 n^2 T^2)}{(a^2 n^2 T^2 + m^2)^4} \geq 0 \quad (3.73)$$

Para facilitar a análise da estabilidade, traçamos o gráfico desta função utilizando a ferramenta [36]. Note que como não é possível realizar a soma em ambos os índices analiticamente, então quando somamos precisamos escolher um dos índices, no caso escolhemos o índice m . Essa soma também poderia ser feita para as quantidades em (3.57), (3.60) e (3.62), mas devido a arbitrariedade dessa escolha, preferimos não fazer. Assim,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_V = \frac{2\pi^2 T^3}{15} + 2\pi^2 T^3 \sum_{n=1}^{\infty} \text{csch}^4(\pi a n T) \left[1 - \frac{3 \sinh(2\pi a n T)}{4\pi a n T} + \frac{\cosh(2\pi a n T)}{2} \right]. \quad (3.74)$$

Para valores elevados de temperatura, $Ta \gg 1$, é evidente que o termo dominante em (3.74) é o primeiro termo, originado pela contribuição do corpo negro, já que no limite assintótico $x \rightarrow \infty$ a função $\text{csch}^4(x)$ vai a zero muito rápido. Em altas temperaturas, o segundo termo torna-se insignificante comparado ao primeiro devido as funções hiperbólicas presentes dentro da soma, o que nos leva a desconsiderar esse termo. Portanto no regime $Ta \gg 1$, analisamos a condição de estabilidade térmica levando em consideração apenas o termo originado da contribuição de corpo negro

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_V \approx \frac{2\pi^2 T^3}{15}. \quad (3.75)$$

Note que a condição em (3.75) é estritamente positivo para qualquer valor válido de temperatura. Logo, a derivada é sempre positiva nesse regime, satisfazendo assim a condição de estabilidade térmica.

Para valores de temperatura próximos do zero absoluto, $Ta \ll 1$, o termo dominante em (3.75) é o termo de correção entre as contribuições térmicas e de vácuo, que contém as somas com funções hiperbólicas. Para entendemos melhor como a derivada se comporta nessa região, analisamos graficamente a condição (3.74) com a Fig. (1).

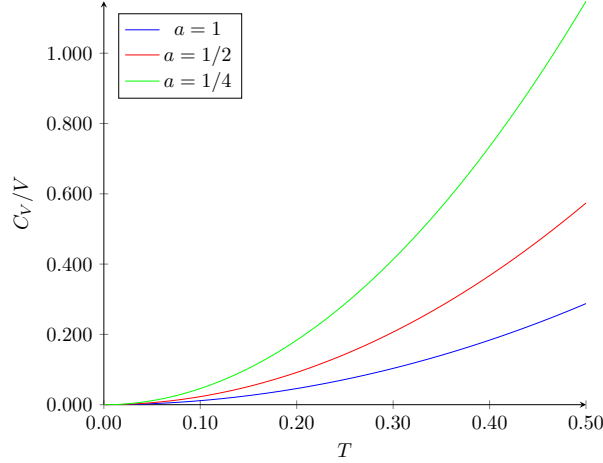


Figura 1 – Derivada da densidade de energia ρ em relação a temperatura T como função da temperatura no intervalo $T \in [0, 1/2]$. Foram escolhidos valores diferentes de a .

Pela Fig. (1), percebemos que a capacidade térmica é positiva mesmo para valores baixos de temperatura, indicando assim que há uma estabilidade térmica no cilindro.

Agora passamos a estudar a estabilidade mecânica do campo escalar no cilindro. Com o tensor pressão-energia-momento, encontramos as pressões parciais do cilindro (3.58) até (3.62), e como podemos notar das equações, não há dependência em relação a A , logo a derivada em respeito ao volume é:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)_{T,A}. \quad (3.76)$$

Como estamos interessados apenas no sinal de (3.76), para o espaço-tempo cilíndrico, a condição de estabilidade mecânica para as pressões parciais se reduz a

$$\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)_{T,A} \leq 0. \quad (3.77)$$

Como já obtemos a condição necessária, passamos para análise. Começando com a pressão parcial P_x , a primeira condição de estabilidade mecânica é

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P_x}{\partial a}\right)_{T,A} &= \frac{2\pi^2}{15a^5} + \frac{24}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a^3 n^4 T^8 - am^2 n^2 T^6}{(a^2 n^2 T^2 + m^2)^4} \\ &= \frac{2\pi^2}{15a^5} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi \operatorname{csch}^4\left(\frac{\pi m}{aT}\right)}{2a^5 m} \left[4\pi m + 2\pi m \cosh\left(\frac{2\pi m}{aT}\right) - 3aT \sinh\left(\frac{2\pi m}{aT}\right)\right] \end{aligned} \quad (3.78)$$

em que utilizamos a ferramenta [36] para efetuar a soma no índice n . Para a pressão parcial P_z , a condição de estabilidade mecânica é

$$\left(\frac{\partial P_z}{\partial a}\right)_{T,A} = -\frac{2\pi^2}{45a^5} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{an^2 T^6}{(a^2 n^2 T^2 + m^2)^3}$$

$$\left(\frac{\partial P_z}{\partial a}\right)_{T,A} = -\frac{2\pi^2}{45a^5} - \frac{T}{2\pi a^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left[\coth\left(\frac{\pi m}{aT}\right) \left(2\pi^2 m^2 \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi m}{aT}\right) - a^2 T^2\right) - \pi a m T \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi m}{aT}\right) \right], \quad (3.79)$$

onde também utilizamos [36] para a soma no índice n . Agora que obtemos as condições (3.78) e (3.79), podemos analisar graficamente. Da equação (3.78), formamos os gráficos representados na Fig. (2). Da Figura (2a), percebemos que não há estabilidade mecânica

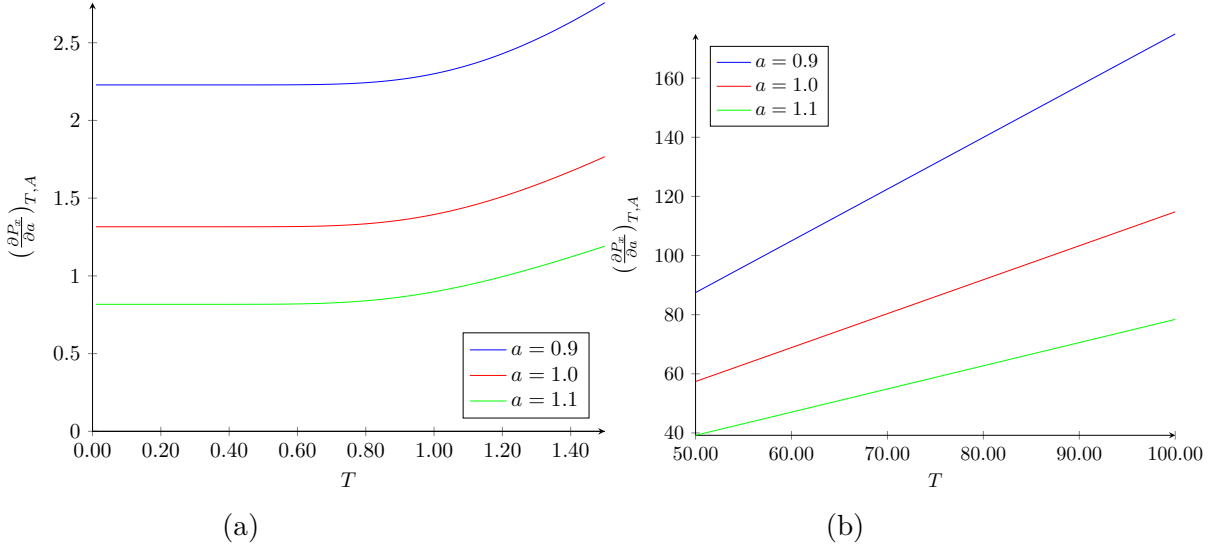


Figura 2 – Derivada da pressão parcial P_x em relação à distância a como função da temperatura T em diferentes intervalos no cilindro para diferentes valores de a (a) Baixas temperaturas $Ta \ll 1$, $T \in [0, 3/2]$ (b) Altas temperaturas $Ta \gg 1$, $T \in [50, 100]$

no regime de baixas temperaturas, o que é esperado quando observamos (3.78), pois o termo dominante nesse regime é o primeiro termo, originado da contribuição de Casimir e é estritamente positivo. Da Figura (2b), temos que a condição de estabilidade é violada no regime de altas temperaturas. Assim, podemos concluir do nosso estudo numérico, que a pressão parcial P_x é instável mecanicamente independente do regime de temperatura tratado.

Passando para o estudo da pressão parcial P_z , usamos a equação (3.79) para formarmos os gráficos da Figura (3). Para o regime de baixas temperaturas, observamos a Figura (3a). Assim, como no estudo de P_x , o termo dominante de (3.79) é o primeiro termo, originado da contribuição de Casimir e nesse caso é estritamente negativo, o que satisfaz a condição de estabilidade mecânica. Para o regime de altas temperaturas, temos o gráfico da Figura (3b), mostrando que a estabilidade mecânica também é satisfeita. Portanto, em ambos os regimes a condição mecânica é satisfeita mostrando que a pressão parcial P_z é estável.

Com isso, podemos concluir que perturbações mecânicas em diferentes direções para o campo escalar no espaço-tempo cilíndrico levam a diferentes resultados. Perturbações

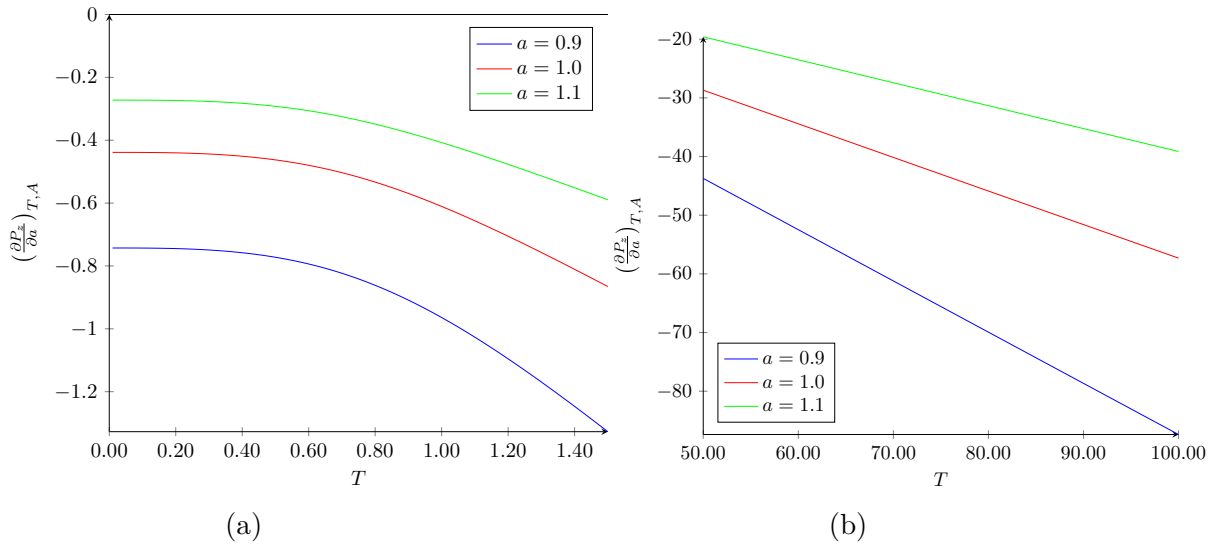


Figura 3 – Derivada da pressão parcial P_z em relação a distância a como função da temperatura T em diferentes intervalos no cilindro para diferentes valores de a (a) Baixas temperaturas $Ta \ll 1$, $T \in [0, 3/2]$ (b) Altas temperaturas $Ta \gg 1$, $T \in [50, 100]$

em y e z não afetam a estabilidade do campo escalar mas uma perturbação mecânica na direção x sim, enquanto que a estabilidade térmica é satisfeita em ambos regimes de temperatura.

O resultado de o campo escalar satisfazer a condição de estabilidade térmica, porém não a mecânica, não é novo na literatura e pode ser encontrado em outras geometrias e outros campos como, por exemplo, o caso de radiação eletromagnética em uma cavidade esférica condutora é estável mecanicamente, porém não é mais o caso se tratando de um cubo condutor, sendo ambos estáveis termicamente [37].

4 Campo escalar no universo estático de Einstein

Depois de adquirirmos intuição sobre o nosso problema estudando um espaço-tempo mais simples, estamos prontos para explorar o universo de Einstein. Esta versão do universo é uma simplificação e adaptação da métrica de Robertson-Walker. Enquanto na métrica de Robertson-Walker o universo se expande isotropicamente à medida que o tempo passa, correspondente a um fator de escala $a(t)$ crescente com t , no modelo de Einstein, esse fator é assumido como constante para toda a duração temporal, resultando em um universo estático [6]. Quando Einstein em 1917 propôs esse modelo, sendo o primeiro modelo cosmológico relativista. Para explicar o universo, ele precisou introduzir uma constante cosmológica para tornar o espaço-tempo estável, já que fazendo uma analogia com a mecânica newtoniana, era possível perceber que mecanicamente o universo tinha um ponto de equilíbrio instável [38].

Esta comparação entre as visões de Robertson-Walker e Einstein é particularmente ilustrativa. Ela sugere que os efeitos observados no Universo de Einstein podem ser análogos aos de Robertson-Walker durante um intervalo de tempo relativamente curto. O elemento de linha que caracteriza o universo de Einstein é:

$$ds^2 = dt^2 - a^2[d\chi^2 + \text{sen}^2\chi(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)]. \quad (4.1)$$

Os elementos geométricos, tais como curvatura desse espaço-tempo, como o escalar de curvatura e tensor de Ricci foram calculados no Apêndice A. A equação do propagador de Feynman no universo de Einstein, sofre uma pequena modificação comparada com a anterior no espaço-tempo cilíndrico pois agora estamos trabalhando com um espaço com o escalar de curvatura não nulo. Dessa forma, a constante de acoplamento também aparece na equação que define a função de Green:

$$(\square_x + M^2 + \xi R)G_F(x, x') = -\delta(x, x'). \quad (4.2)$$

A fim de generalizar o propagador apresentado na referência [39], em que trabalha-se com o acoplamento conforme $\xi = 1/6$, e obter um propagador que não esteja restrito a valores fixos de ξ , introduzimos uma modificação no operador diferencial. Essa modificação consiste em redefinir as constantes do operador, aproveitando que o escalar de curvatura do espaço-tempo (A.9) é independente das coordenadas. Dessa forma, deixamos de trabalhar com massa física M e passamos a trabalhar com uma massa efetiva μ , em que nela inclui o termo de acoplamento não-mínimo ξR , isto é,

$$\mu^2 = M^2 + \xi R - \frac{1}{6}R. \quad (4.3)$$

Utilizando (A.9), reescrevemos μ da seguinte forma

$$\mu^2 = \frac{M^2 a^2 + 6\xi - 1}{a^2}. \quad (4.4)$$

Ao contrário da massa física M , μ não é exclusivamente uma quantidade real, pois dependendo dos valores de M e ξ , a definição (4.3) nos leva a uma quantidade imaginária. Dessa forma μ é apenas um truque matemático, e não tem uma representação física real. Feita a troca no operador diferencial, a equação de Green que vamos resolver é

$$\left(\square_x + \mu^2 + \frac{1}{6}R \right) G_F(x, x') = -\delta(x, x'). \quad (4.5)$$

Assim, como procedemos no caso do cilindro, vamos introduzir um Ansatz que seja capaz de resolver a equação (4.5) e conseqüentemente a equação (4.2). O nosso ansatz é baseado na técnica de Schwinger-DeWitt [40–42], sendo dado por

$$G_F(x, x') = -i \int_0^\infty d\tau e^{-i\mu^2\tau} \langle x, \tau | x', 0 \rangle. \quad (4.6)$$

Antes de continuarmos, é necessário confirmar que o Ansatz proposto seja válido, isto é, (4.6) seja solução de (4.2). Ao aplicarmos o operador diferencial percebemos que o propagador de “mecânica quântica” $\langle x, \tau | x', 0 \rangle$ presente no Ansatz corresponde ao um novo propagador que também precisa satisfazer uma equação de Green própria. Para encontramos essa nova equação basta inserirmos (4.6) na equação (4.5), obtendo

$$i \int_0^\infty d\tau e^{-i\mu^2\tau} \left(\square_x + \mu^2 + \frac{1}{6}R \right) \langle x, \tau | x', 0 \rangle = \delta(x, x'). \quad (4.7)$$

O termo da massa efetiva μ^2 presente dentro do parênteses pode ser reescrito de forma conveniente se utilizarmos a regra da cadeia, tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tau} [e^{-i\mu^2\tau} \langle x, \tau | x', 0 \rangle] &= -i\mu^2 e^{-i\mu^2\tau} \langle x, \tau | x', 0 \rangle + e^{-i\mu^2\tau} \frac{\partial}{\partial\tau} \langle x, \tau | x', 0 \rangle \\ i\mu^2 e^{-i\mu^2\tau} \langle x, \tau | x', 0 \rangle &= -\frac{\partial}{\partial\tau} [e^{-i\mu^2\tau} \langle x, \tau | x', 0 \rangle] + e^{-i\mu^2\tau} \frac{\partial}{\partial\tau} \langle x, \tau | x', 0 \rangle. \end{aligned}$$

Voltando na integral (4.7) com essas informações, temos:

$$-\int_0^\infty d\tau \left(\frac{\partial}{\partial\tau} [e^{-i\mu^2\tau} \langle x, \tau | x', 0 \rangle] \right) + i \int_0^\infty d\tau e^{-i\mu^2\tau} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial\tau} + \square_x + \frac{1}{6}R \right) \langle x, \tau | x', 0 \rangle = \delta(x, x'). \quad (4.8)$$

A primeira integral em (4.8) tem como resultado uma delta de Dirac

$$\int_0^\infty d\tau \left(\frac{\partial}{\partial\tau} [e^{-i\mu^2\tau} \langle x, \tau | x', 0 \rangle] \right) = \langle x, 0 | x', 0 \rangle = \delta(x, x'). \quad (4.9)$$

Ao colocar essa informação em (4.7), temos:

$$i \int_0^\infty d\tau e^{-i\mu^2\tau} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial\tau} + \square_x + \frac{1}{6}R \right) \langle x, \tau | x', 0 \rangle = 2\delta(x, x'). \quad (4.10)$$

O fator multiplicativo 2 da delta pode ser inserido dentro da função $\langle x, \tau | x', 0 \rangle$ que ainda será determinada sem nenhuma perda de generalidade. Assim,

$$i \int_0^\infty d\tau e^{-i\mu^2\tau} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \tau} + \square_x + \frac{1}{6} R \right) \langle x, \tau | x', 0 \rangle = \delta(x, x'). \quad (4.11)$$

Portanto, a equação que $\langle x, \tau | x', 0 \rangle$ precisa satisfazer para que (4.11) seja satisfeita é:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \square_x - \frac{1}{6} R \right) \langle x, \tau | x', 0 \rangle = i\delta(\tau)\delta(x, x'). \quad (4.12)$$

A solução geral para $\langle x, \tau | x', 0 \rangle$, é:

$$\langle x, \tau | x', 0 \rangle = \frac{1}{(-4\pi i\tau)^{1/2}} e^{-\frac{i}{4\tau}(t-t')^2} K(q, q', \tau), \quad (4.13)$$

em que $K(q, q', \tau)$ é conhecido como heat kernel [43] e está definido em S^3 com os pontos $q, q' \in S^3$. Os pontos q, q' são descritos com as coordenadas (χ, θ, φ) do nosso elemento de linha. Se aplicarmos essa solução na equação (4.11), chegamos que o propagador satisfaz:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} + \Delta_q - \frac{1}{6} R \right) K(q, q', \tau) = i\delta(\tau)\delta(q, q') \quad (4.14)$$

onde Δ_q é o operador de Laplace-Beltrami em S^3 . Note que até aqui não precisamos introduzir nenhuma consideração sobre o espaço-tempo em que estamos trabalhando, então esse método pode ser utilizando também para o caso do cilindro, sendo que a dificuldade desse método está em encontrar a função $K(q, q', \tau)$.

Como pode ser visto na referência [44], é possível trocar o operador Δ_q por um operador Δ_s que depende exclusivamente da distância geodésica $s(q, q')$ (A.16), sendo:

$$\Delta_s = \frac{1}{6} R + \frac{1}{\text{sen}(s/a)} \frac{d^2}{ds^2} \text{sen}(s/a). \quad (4.15)$$

Com essa substituição, podemos resolver a equação do propagador em termos da distância geodésica $s(q, q')$ (A.16) e encontrar a solução para $K(q, q', \tau)$ [39, 44, 45], que é a seguinte:

$$K(q, q', \tau) = \frac{1}{a \text{sen}(s/a)} \frac{1}{(4\pi i\tau)^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (s + 2\pi na) e^{\frac{i}{4\tau}(s+2\pi na)^2}. \quad (4.16)$$

A soma em relação ao índice n na equação (4.16) aparece como uma soma das geodésicas que conectam os pontos q e q' presentes na esfera, além de reproduzir a periodicidade necessária em S^3 . Após obtermos todos esses resultados, voltamos ao nosso ansatz inicial (4.6), agora com as equações (4.16) e (4.13), obtendo

$$G_F(x, x') = \frac{1}{a \text{sen}(s/a)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (s + 2\pi na) \int_0^\infty \frac{d\tau}{(4\pi i\tau)^2} e^{-\frac{i}{4\tau}[(t-t')^2 - (s+2\pi na)^2]} e^{-i\mu^2\tau}. \quad (4.17)$$

A integral pode ser resolvida analiticamente [27], e a solução é

$$G_F(x, x') = -\frac{i\mu}{4\pi^2 a \text{sen}(s/a)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (s + 2\pi na) \frac{K_1(\mu \sqrt{(s + 2\pi na)^2 - (t - t')^2})}{\sqrt{(s + 2\pi na)^2 - (t - t')^2}}. \quad (4.18)$$

Como encontramos o propagador de Feynman para o estado de vácuo, o próximo passo é obter a função de Green do estado de vácuo a função de Green térmica. Como pode ser visto na referência [39], a propriedade (B.25) que relaciona as duas funções também é satisfeita no universo de Einstein. Portanto para determinarmos as quantidades a temperatura finita, usamos

$$G_\beta(x, x') = -\frac{i\mu}{4\pi^2 a \operatorname{sen}(s/a)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (s + 2\pi na) \frac{K_1(\mu\sqrt{(s + 2\pi na)^2 - (t - t' - im\beta)^2})}{\sqrt{(s + 2\pi na)^2 - (t - t' - im\beta)^2}} \quad (4.19)$$

A função de Green térmica requer uma renormalização, assim como foi feito para o cilindro, e para realizá-la, subtraímos o termo correspondente a $n = 0$ e $m = 0$ da soma (4.19), pois quando tomamos o limite do caso plano, $a \rightarrow \infty$, percebemos que esse termo nos leva ao propagador do espaço plano. Portanto, esse termo causa divergências na função de Green quando aplicamos o limite da coincidência de pontos. Os demais termos na soma consistem em pares de $n = k$ e $n = -k$, $m = i$ e $m = -i$ ($k, i \in \mathbb{Z}$), que, quando somados, fazem com que a divergência desapareça no limite, mesmo que esses termos sejam individualmente divergentes nesse limite. Para exemplificar melhor essa afirmação, utilizamos (4.18) por simplicidade mas o procedimento é o mesmo para (4.19). Como citado, individualmente os termos da soma em (4.18) são divergentes no limite da coincidência de pontos e isso pode ser verificado de forma direta, aplicando $t \rightarrow t'$ e $s \rightarrow 0$ nos termos do somatório em (4.18). Então, ao invés de analisar cada elemento da soma individualmente, vamos aproveitar o somatório no propagador e analisar dois termos simultaneamente. Escolhemos, para quando o índice é $n = k$, que chamamos de $G_{F,k}(x, x')$, e quando o índice é $n = -k$, que chamamos de $G_{F,-k}(x, x')$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow x'} \left[-\frac{i\mu}{4\pi^2 a \operatorname{sen}(s/a)} \left((s + 2\pi na) \frac{K_1(\mu\sqrt{(s + 2\pi na)^2 - (t - t')^2})}{\sqrt{(s + 2\pi na)^2 - (t - t')^2}} + (s - 2\pi na) \frac{K_1(\mu\sqrt{(s - 2\pi na)^2 - (t - t')^2})}{\sqrt{(s - 2\pi na)^2 - (t - t')^2}} \right) \right]. \quad (4.20)$$

Note que uma simples substituição $x \rightarrow x'$ nos leva a uma indeterminação 0/0 em (4.20). Para resolver esse problema basta utilizarmos da regra de L'Hôpital para $s \rightarrow 0$. Logo

$$\lim_{x \rightarrow x'} \left[-\frac{i\mu}{4\pi^2 \cos(s/a)} \frac{\partial}{\partial s} \left((s + 2\pi na) \frac{K_1(\mu\sqrt{(s + 2\pi na)^2 - (t - t')^2})}{\sqrt{(s + 2\pi na)^2 - (t - t')^2}} + (s - 2\pi na) \frac{K_1(\mu\sqrt{(s - 2\pi na)^2 - (t - t')^2})}{\sqrt{(s - 2\pi na)^2 - (t - t')^2}} \right) \right],$$

que após alguns cálculos simples, e utilizando as propriedades em (3.43), avaliamos o limite na coincidência de pontos e chegamos no resultado:

$$\lim_{x \rightarrow x'} (G_{F,k}(x, x') + G_{F,-k}(x, x')) = \frac{\mu K_1(2an\pi\mu)}{4\pi^3 an} - \frac{\mu^2 K_2(2an\pi\mu)}{2\pi^2},$$

que é um termo finito. Note que, devido ao procedimento feito, aparece uma função de Bessel de 2º ordem no resultado, e esse é um detalhe importante quando tratarmos de $\langle \phi^2 \rangle$.

Podemos separar a função de Green térmica em relação as contribuições termodinâmicas usando o mesmo procedimento que fizemos no caso do espaço-tempo cilíndrico, isto é,

$$G_\beta(x, x') = G_{vac}(x, x') + G_{th}(x, x') + G_{mx}(x, x'),$$

sendo

$$G_{vac}(x, x') = -\frac{i\mu}{4\pi^2 a \operatorname{sen}(s/a)} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} (s + 2\pi na) \frac{K_1(\mu \sqrt{(s + 2\pi na)^2 - (t - t')^2})}{\sqrt{(s + 2\pi na)^2 - (t - t')^2}},$$

$$G_{th}(x, x') = -\frac{i\mu s}{4\pi^2 a \operatorname{sen}(s/a)} \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \frac{K_1(\mu \sqrt{s^2 - (t - t' - im\beta)^2})}{\sqrt{s^2 - (t - t' - im\beta)^2}},$$

$$G_{mx}(x, x') = -\frac{i\mu}{4\pi^2 a \operatorname{sen}(s/a)} \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} (s + 2\pi na) \frac{K_1(\mu \sqrt{(s + 2\pi na)^2 - (t - t' - im\beta)^2})}{\sqrt{(s + 2\pi na)^2 - (t - t' - im\beta)^2}}.$$

Os termos em $G_{vac}(x, x')$ consideram os elementos do somatório de $G_F(x, x')$ em que $n \neq 0$ e $m = 0$. Por sua vez, $G_{th}(x, x')$ engloba os termos em que $n = 0$ e $m \neq 0$. Finalmente, $G_{mx}(x, x')$ abrange os termos restantes, ou seja, aqueles em que $n \neq 0$ e $m \neq 0$. Esse é o significado das plicas nos somatórios. Note que para valores em que $\mu^2 a^2 < 0$, ou $(a^2 M^2 + 6\xi - 1) < 0$, o argumento da função de Bessel deixa de ser estritamente real positivo, tornando-se puramente imaginário e, conseqüentemente, a função de Bessel adquire valores complexos. Em decorrência disso, nosso propagador (4.19) deixa de ser um imaginário puro, contendo agora uma parte real diferente de zero, diferentemente do espaço-tempo cilíndrico e da região $(a^2 M^2 + 6\xi - 1) > 0$.

4.1 Flutuação média quadrática do campo escalar

Ao utilizarmos (2.11), já podemos encontrar a primeira quantidade do Universo de Einstein, $\langle \phi^2 \rangle$ já separada em contribuições de vácuo, térmica e mista:

$$\begin{aligned} \langle \phi^2 \rangle &= i \lim_{x \rightarrow x'} [G_{vac}(x, x') - G_{vac}^*(x, x')] + i \lim_{x \rightarrow x'} [G_{th}(x, x') - G_{th}^*(x, x')] \\ &\quad + i \lim_{x \rightarrow x'} [G_{mx}(x, x') - G_{mx}^*(x, x')], \\ &= \langle \phi^2 \rangle_{vac} + \langle \phi^2 \rangle_{th} + \langle \phi^2 \rangle_{mx}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Observamos que cada termo da soma $\langle \phi^2 \rangle_{vac} + \langle \phi^2 \rangle_{th} + \langle \phi^2 \rangle_{mx}$ é real mesmo que o propagador de Feynman seja complexo, graças à definição (2.11). Assim, conseguimos eliminar a parte imaginária das quantidades que estamos interessados em calcular.

As contribuições individuais, $\langle \phi^2 \rangle_{vac}$, $\langle \phi^2 \rangle_{th}$ e $\langle \phi^2 \rangle_{mx}$, onde empregamos a separação de termos proposta como no caso do cilindro, resultam em quantidades reais. Nesse contexto, esses termos só possuem significado físico quando a parte real é extraída. Os valores correspondentes a cada termo presente em $\langle \phi^2 \rangle$ são:

$$\langle \phi^2 \rangle_{vac} = \frac{1}{2\pi^2 a^2} \text{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1}}{2\pi n} K_1 \left(2n\pi \sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1} \right) - (a^2 M^2 + 6\xi - 1) K_2 \left(2n\pi \sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1} \right) \right] \right\}, \quad (4.22)$$

$$\langle \phi^2 \rangle_{th} = \frac{T}{2\pi^2 a} \text{Re} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1}}{m} K_1 \left(\frac{m \sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1}}{Ta} \right) \right\}, \quad (4.23)$$

$$\langle \phi^2 \rangle_{mx} = \text{Re} \left\{ \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\frac{T \sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1}}{\pi^2 a \sqrt{4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2}} K_1 \left(\frac{\sqrt{4a^2 \pi^2 n^2 T^2 + m^2} \sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1}}{Ta} \right) - \frac{4n^2 T^2 (a^2 M^2 + 6\xi - 1)}{4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2} K_2 \left(\frac{\sqrt{4a^2 \pi^2 n^2 T^2 + m^2} \sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1}}{Ta} \right) \right] \right\}, \quad (4.24)$$

onde utilizamos (4.4) para escrever $\langle \phi^2 \rangle$ em relação a constante de acoplamento ξ . Podemos fazer uma verificação simples desses valores ao colocarmos $\xi = 1/6$ e $M \rightarrow 0$. Para isso, utilizamos a expansão de limite assintótico da função modificada de Bessel. Utilizaremos uma expressão um pouco diferente de (3.22) pois agora temos uma mistura entre ordens das Bessels nas quantidades, o que acaba sendo importante considerar também outros termos da expansão assintótica, que são

$$K_1(z) = \frac{1}{z}, \quad (4.25)$$

$$K_2(z) = \frac{2}{z^2} \left(1 - \frac{1}{4} z^2 \right). \quad (4.26)$$

Logo,

$$\langle \phi^2 \rangle_{vac} = -\frac{1}{48\pi^2 a^2}, \quad (4.27)$$

$$\langle \phi^2 \rangle_{th} = \frac{T^2}{12}, \quad (4.28)$$

$$\langle \phi^2 \rangle_{mx} = \frac{T^2}{\pi} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{m^2 - 4\pi^2 a^2 n^2 T^2}{(4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2)^2}. \quad (4.29)$$

Essas expressões já são conhecidas na literatura para $\langle \phi^2 \rangle$ [39]. Note que $\langle \phi^2 \rangle_{th}$ tem o mesmo valor no universo de Einstein para quando o espaço-tempo é o espaço de Minkowski/Cilíndrico ao considerarmos $\xi = 1/6$, como vemos pelas equações (3.20) e (4.23), isso é um ponto interessante pois para a constante de acoplamento conforme ($\xi = 1/6$), as contribuições térmicas do universo não tem dependência com a geometria e o raio do universo, essa independência da geometria para as contribuições térmicas também aparecem para a densidade de energia e pressão, que serão analisadas futuramente.

4.2 Tensor de pressão-energia-momento

Para obtermos a nossa densidade de energia ρ , utilizamos a equação (2.16) com o operador (2.15), verificando que o termo

$$i \lim_{x \rightarrow x'} \left(g^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_{\sigma'} - M^2 - \xi R \right) G_F(x, x') = 0$$

também é nulo para o propagador do universo de Einstein(4.19). Assim como discutimos para o $G_F(x, x')$ do espaço-tempo cilíndrico, dessa forma, chegamos a

$$\langle T_{tt} \rangle = i \lim_{x \rightarrow x'} \partial_0 \partial_0 [G_\beta(x, x') - G_\beta^*(x, x')] = \rho.$$

Para o cálculo da densidade de energia, também expressaremos ρ como a soma dos termos de vácuo, térmico e misto

$$\rho = \rho_{vac} + \rho_{th} + \rho_{mx}.$$

Assim como no caso de $\langle \phi^2 \rangle$, é necessário retirar o valor real da soma entre cada contribuição da densidade de energia

$$\rho_{vac} = \frac{1}{4\pi^3 a^4} \text{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(a^2 M^2 + 6\xi - 1)^{3/2}}{n} K_1 \left(2n\pi \sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1} \right) + \frac{3(a^2 M^2 + 6\xi - 1)}{2\pi n^2} K_2 \left(2n\pi \sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1} \right) \right] \right\}, \quad (4.30)$$

$$\rho_{th} = \frac{T}{2\pi^2 a^3} \text{Re} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(a^2 M^2 + 6\xi - 1)^{3/2}}{m} K_1 \left(\frac{m \sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1}}{Ta} \right) + \frac{3Ta(a^2 M^2 + 6\xi - 1)}{m^2} K_2 \left(\frac{m \sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1}}{Ta} \right) \right] \right\}, \quad (4.31)$$

$$\rho_{mx} = \frac{T}{\pi^2 a^2} \text{Re} \left\{ \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[f_1(m, n) K_1 \left(\frac{\sqrt{m^2 + 4a^2 n^2 \pi^2 T^2} \sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1}}{Ta} \right) + f_2(m, n) K_2 \left(\frac{\sqrt{m^2 + 4a^2 n^2 \pi^2 T^2} \sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1}}{Ta} \right) \right] \right\}. \quad (4.32)$$

Os coeficientes da soma presente em ρ_{mx} são

$$f_1(m, n) = \frac{(a^2 M^2 + 6\xi - 1)^{3/2}}{a(4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2)^{5/2}} \left[16\pi^4 a^4 n^4 T^4 - 16\pi^2 a^2 m^2 n^2 T^2 + m^4 \right],$$

$$f_2(m, n) = \frac{T(a^2 M^2 + 6\xi - 1)}{(4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2)^3} \left[48\pi^4 a^4 n^4 T^4 - 4\pi^2 m^4 n^2 (a^2 M^2 + 6\xi - 1) + 3m^4 - 72\pi^2 a^2 m^2 n^2 T^2 - 16\pi^2 n^2 (a^2 M^2 + 6\xi - 1) \right].$$

Da mesma forma que fizemos com o valor esperado de $\langle \phi^2 \rangle$, podemos realizar uma verificação direta desses resultados ao considerar o caso em que $\xi = 1/6$ e $M \rightarrow 0$. Nesse cenário, reobtemos os seguintes resultados:

$$\rho_{vac} = \frac{1}{480\pi^2 a^4} \quad (4.33)$$

$$\rho_{th} = \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (4.34)$$

$$\rho_{mx} = \frac{6T^4}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{16\pi^4 a^4 n^4 T^4 - 24\pi^2 a^2 m^2 n^2 T^2 + m^4}{(4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2)^4} \quad (4.35)$$

onde ρ_{vac} é a densidade de energia de Casimir calculada por Ford [46], ρ_{th} é o termo da radiação de corpo negro já calculado por Planck [47] e ρ_{mx} é a correção dos termos anteriores devido a presença de ambos no universo também já obtida por Dowker [39].

Para os termos remanescentes não nulos do tensor momento-energia, aplicamos novamente a equação (2.16) em conjunto com o operador (2.15), obtendo

$$\langle T_{jj} \rangle = i \lim_{x \rightarrow x'} (\partial_j \partial_j - 2\xi \nabla_j \nabla_j - \xi R_{jj}) [G_\beta(x, x') - G_\beta^*(x, x')],$$

com o índice latino em letras minúsculas indicando $j = 1, 2, 3$. Ao empregar a regra da cadeia e identificar que alguns termos associados à distância geodésica $s(\chi, \theta, \varphi)$ se anulam no limite de coincidência dos pontos, simplificamos o cálculo de $\langle T_{jj} \rangle$, e os termos restantes da diagonal principal do tensor são

$$\langle T_{jj} \rangle = g_{jj} \left[i \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial^2 G(t = t', s)}{\partial s^2} - \frac{2\xi}{a^2} i \lim_{x \rightarrow x'} G(x, x') \right] = -g_{ii} P.$$

Assim como a densidade de energia, P que seria a nossa pressão, também será dividido em termos de contribuição de vácuo (Casimir), térmico (corpo negro) e misto, ou seja,

$$P = P_{vac} + P_{th} + P_{mx},$$

$$P_{vac} = \frac{1}{24\pi^4 a^4} \text{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi(6\xi - 1)\sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1}}{n} K_1 \left(2n\pi\sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1} \right) + \frac{(4\pi^2 a^2 M^2 n^2 + 3)(a^2 M^2 + 6\xi - 1)}{n^2} K_2 \left(2n\pi\sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1} \right) \right] \right\}, \quad (4.36)$$

$$P_{th} = \frac{T^2}{6\pi^2 a^2} \text{Re} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(6\xi - 1)\sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1}}{T a m} K_1 \left(\frac{m\sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1}}{T a} \right) + \frac{3(a^2 M^2 + 6\xi - 1)}{m^2} K_2 \left(\frac{m\sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1}}{T a} \right) \right] \right\}, \quad (4.37)$$

$$P_{mx} = -\frac{1}{3\pi^2 a^2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[g_1(m, n) K_1 \left(\frac{\sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1} \sqrt{4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2}}{aT} \right) + g_2(m, n) K_2 \left(\frac{\sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1} \sqrt{4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2}}{aT} \right) \right] \right\}. \quad (4.38)$$

Os coeficientes em P_{mx} são

$$g_1(m, n) = \frac{T\sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1}}{a(4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2)^{5/2}} \left[16\pi^4 a^4 n^4 T^4 (1 - 6\xi) + m^4 (1 - 6\xi) + 8\pi^2 a^2 m^2 n^2 T^2 (3a^2 M^2 + 12\xi - 2) \right],$$

$$g_2(m, n) = -\frac{T^2 (a^2 M^2 + 6\xi - 1)}{(4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2)^3} \left[64\pi^6 a^6 M^2 n^6 T^4 + 48\pi^4 a^4 n^4 T^4 + 3m^4 - 72\pi^2 a^2 m^2 n^2 T^2 + 4\pi^2 n^2 m^4 (1 - 6\xi) + 16\pi^4 a^2 m^2 n^4 T^2 (a^2 M^2 - 6\xi + 1) \right].$$

Agora que possuímos todos os elementos da diagonal principal do tensor momento-energia, podemos calcular o traço e encontramos:

$$\langle T^\mu{}_\mu \rangle = g^{\mu\nu} \langle T_{\mu\nu} \rangle \Rightarrow \rho - 3P = M^2 \langle \phi^2 \rangle$$

Através do traço, podemos perceber que todas as quantidades discutidas até este ponto satisfazem uma equação que estabelece relações entre elas, da mesma forma que encontramos no cilindro. É importante destacar que, quando a massa do campo escalar é nula, essa equação implica que a densidade de energia é diretamente proporcional à pressão no Universo de Einstein. Portanto, quando tratamos do caso de massa nula, ao analisarmos a densidade de energia, podemos obter informações cruciais sobre a pressão de forma direta.

Um detalhe que podemos observar em todas as quantidades até aqui calculadas é que, dependendo dos valores de ξ , M e a , o argumento das Bessels presente nessas grandezas pode ir a valores reais positivos até valores imaginários. A Bessel quando tem argumentos reais positivos, também tem como valores resultantes reais, porém quando esse argumento é imaginário o valor da Bessel se torna complexo e justificando a razão de separarmos os valores em regiões onde o argumento é real positivo ($\mu^2 a^2 > 0$ ou $a^2 M^2 + 6\xi - 1 > 0$) e onde o argumento é imaginário ($\mu^2 a^2 < 0$ ou $a^2 M^2 + 6\xi - 1 < 0$).

Antes de analisar as diferentes regiões presentes para os valores de densidade e pressão. Interessante perceber que ρ_{th} nos limites de altas temperaturas, $Ta \gg 1$, utilizando (4.25) e (4.26), encontramos

$$\rho_{th} \approx \frac{\pi^2}{30} T^4 - \frac{(a^2 M^2 + 6\xi - 1)}{24a^2} T^2 \quad (4.39)$$

É importante notar que, para aplicar os limites assintóticos à função de Bessel quando $z \rightarrow 0$, é necessário também assumir que $Ta \gg \sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1}$. Em situações em que as magnitudes de $\sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1}$ e Ta são comparáveis em ordens de grandeza, a expansão em altas temperaturas (4.39) deixa de ser válida.

A existência de um termo de correção para a densidade de energia de corpo negro planckiana em altas temperaturas para um campo escalar com massa não é novidade na literatura [14, 48]. Porém observe que, em se tratando do universo de Einstein, surge uma dependência na constante de acoplamento ξ , quando a mesma é diferente de $\xi = 1/6$. Agora, essa expressão traz uma correção significativa à equação (4.34), o que é notável porque a contribuição térmica em altas temperaturas passa a depender da constante de acoplamento com a curvatura do espaço. Assim, ela deixa de ser uma quantidade dependente apenas da termodinâmica, e passa a ter um caráter também geométrico devido a presença de ξ .

Determinadas a densidade de energia e a pressão no universo de Einstein, avançamos para a análise dessas grandezas. Para tal, é necessário inicialmente separar as contribuições em regiões distintas devido à presença da função modificada de Bessel de 2^o espécie, $K_\nu(z)$, nos termos.

Conforme citado anteriormente, no limite assintótico de $z \rightarrow \infty$, a Bessel converge para a fórmula (3.26). No entanto, ao estarmos na região $(a^2 M^2 + 6\xi - 1) < 0$, o argumento das Bessels presente nas quantidades $\langle \phi^2 \rangle$, ρ e P , contém o termo $\sqrt{a^2 M^2 + 6\xi - 1}$, passa a ter componentes imaginárias em vez de valores exclusivamente reais positivos. Pelo limite assintótico (3.26), observa-se que a exponencial associada não é mais uma exponencial real com expoente negativo, mas agora uma exponencial imaginária, mudando assim a velocidade de convergência desses termos. Nesse contexto, o aspecto relevante na convergência da Bessel no limite assintótico $z \rightarrow \infty$ passa a ser o termo $1/\sqrt{z}$ de (3.26), o que não é suficiente para garantir a convergência dos termos de correção $\langle \phi^2 \rangle$, ρ_{mx} e P_{mx} nessa região.

Essa mudança na taxa de convergência dos termos não afeta as contribuições de vácuo e térmicas, como por exemplo, ρ_{vc} e ρ_{th} , que ainda são convergentes porque a soma dentro dos termos é em relação a apenas um índice e a convergência das quantidades presente na soma se comportarem como maior ou igual do que $1/n^{3/2}$ no limite assintótico. No entanto, ela impacta os termos de correção a essas contribuições (mx), os quais envolvem somas em dois índices. Portanto, nessa região, estamos limitados a analisar o problema nos regimes em que há uma dominância entre uma dessas contribuições, de modo que a correção não esteja presente, já que nessa região $\langle \phi^2 \rangle$, ρ_{mx} e P_{mx} são divergentes, sendo necessário uma nova renormalização para sermos capazes de estudar essas quantidades na região $(a^2 M^2 + 6\xi - 1) < 0$.

4.3 Mecânica Estatística e Modo-Zero

Motivados por esse problema de renormalização, discutiremos sobre uma possível alternativa ao método de “point-splitting”. Nesse novo formalismo, calcularemos a densidade de energia utilizando ferramentas da mecânica estatística com o método de soma sobre o espectro de energia [49]. Para esse método precisamos de duas informações sobre o campo escalar, os espectros de energia do campo no universo de Einstein e qual é a degenerescência dos níveis de energia.

Antes de prosseguirmos, é necessário separarmos a densidade em dois termos

$$\langle T_{tt} \rangle = \langle T_{tt} \rangle_0 + \langle T_{tt} \rangle_T,$$

onde $\langle T_{tt} \rangle_0$ é a densidade de energia para temperatura nula, ou seja, a densidade de Casimir previamente calculada pelo formalismo anterior (4.30), e $\langle T_{tt} \rangle_T$ é a densidade de energia para temperatura finita, que agora passamos a calcular por meio da mecânica estatística.

Importante citarmos que é possível também calcular a densidade de energia de Casimir utilizando esse formalismo, conforme é feito na referência [50]. Contudo, para realizar essa abordagem precisaríamos trabalhar com novas renormalizações e visto que já obtivemos a densidade de Casimir para o problema, e a mesma concorda com o da referência [50], como será mostrado mais a frente, optamos por aproveitar nosso resultado (4.30).

A densidade de energia térmica $\langle T_{tt} \rangle_T$ pode ser calculada como a soma de todos os modos de energia ϵ_k ponderados pela distribuição estatística dessas partículas em cada um desses modos $\langle n_k \rangle$ [49], aqui também levamos em consideração a degenerescência d_k dos níveis de energia em cada um dos diferentes estados quânticos, isto é,

$$\langle T_{tt} \rangle_T = \frac{1}{V} \sum_k d_k \epsilon_k \langle n_k \rangle.$$

Como aqui estamos trabalhando com o campo escalar (partículas de spin-0), a distribuição estatística dos modos de ocupação é a de Bose-Einstein pois o campo escalar é um campo bosônico [47, 51]. A distribuição de Bose-Einstein é

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_k} - 1}, \quad (4.40)$$

e as energias de cada modo de ocupação são [46, 50]

$$\epsilon_k = \frac{1}{a} \sqrt{(k+1)^2 + 6\xi - 1 + M^2 a^2},$$

com degenerescência $d_k = (k+1)^2$ para cada nível de energia. Então, encontramos que a densidade de energia térmica é

$$\langle T_{tt} \rangle_T = \frac{1}{2\pi^2 a^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2 \sqrt{M^2 a^2 + (n+1)^2 + 6\xi - 1}}{e^{\frac{1}{T} a} \sqrt{M^2 a^2 + (n+1)^2 + 6\xi - 1} - 1}. \quad (4.41)$$

É interessante notar que, para o regime de altas temperaturas, podemos demonstrar, utilizando uma das três fórmulas para somas, quais sejam, a de Abel-Plana, Euler-Maclaurin ou Poisson [52], que as equações (4.39) e (4.41) são equivalentes. Começamos com a fórmula de Abel-Plana [29]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k + \alpha) = \frac{1}{2} f(\alpha) + \int_{\alpha}^{\infty} f(t) dt + i \int_0^{\infty} \frac{f(\alpha + it) - f(\alpha - it)}{e^{2\pi t} - 1} dt. \quad (4.42)$$

Comparando com a formula de Abel-Plana, temos que a função $f(k)$ é

$$f(k) = \frac{k^2 \sqrt{k^2 + M^2 a^2 + 6\xi - 1}}{e^{\frac{1}{T} a} \sqrt{k^2 + M^2 a^2 + 6\xi - 1} - 1}; \text{ com } \alpha = 1.$$

Com a função $f(k)$, encontramos os termos da fórmula de Abel-Plana:

$$\frac{1}{2} f(1) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{M^2 a^2 + 6\xi}}{e^{\frac{1}{T} a} \sqrt{M^2 a^2 + 6\xi} - 1},$$

$$i \int_0^{\infty} \frac{f(1 + it) - f(1 - it)}{e^{2\pi t} - 1} dt = i \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \left\{ \frac{(1 + it)^2 \sqrt{(1 + it)^2 + M^2 a^2 + 6\xi - 1}}{e^{\frac{1}{T} a} \sqrt{(1 + it)^2 + M^2 a^2 + 6\xi - 1} - 1} - \frac{(1 - it)^2 \sqrt{(1 - it)^2 + M^2 a^2 + 6\xi - 1}}{e^{\frac{1}{T} a} \sqrt{(1 - it)^2 + M^2 a^2 + 6\xi - 1} - 1} \right\}. \quad (4.43)$$

A integral (4.43) mesmo com a aparição de números imaginários, resulta em um valor real já que o lado esquerdo da igualdade, por definição, é real e outros termos de Abel-Plana também são reais para essa função em questão. Por fim, o último termo de Abel-Plana é

$$I = \int_1^{\infty} f(t) dt = \int_1^{\infty} \frac{t^2 \sqrt{t^2 + M^2 a^2 + 6\xi - 1}}{e^{\frac{1}{T} a} \sqrt{t^2 + M^2 a^2 + 6\xi - 1} - 1} dt. \quad (4.44)$$

Trabalhando um pouco mais com essa integral, podemos reescrevê-la com uma substituição de variáveis adequada

$$x = \sqrt{M^2 a^2 + 6\xi - 1} \sinh(t) \rightarrow dx = \sqrt{M^2 a^2 + 6\xi - 1} \cosh(t) dt$$

O que nos leva a

$$I = (M^2 a^2 + 6\xi - 1)^2 \int_1^{\infty} \frac{\sinh^2(t) \cosh^2(t)}{e^{\frac{1}{T} a} \sqrt{M^2 a^2 + 6\xi - 1} \cosh(t) - 1} dt, \quad (4.45)$$

em que utilizamos $\cosh^2(t) = \sinh^2(t) + 1$. Podemos alterar os limites de integração em (4.45), adicionando e subtraindo no lado esquerdo da equação uma nova integral, de tal forma a alterar o intervalo de integração

$$I = (M^2 a^2 + 6\xi - 1)^2 \left[\int_0^\infty \frac{\sinh^2(t) \cosh^2(t)}{e^{\frac{1}{Ta} \sqrt{M^2 a^2 + 6\xi - 1} \cosh(t)} - 1} dt - \int_0^1 \frac{\sinh^2(t) \cosh^2(t)}{e^{\frac{1}{Ta} \sqrt{M^2 a^2 + 6\xi - 1} \cosh(t)} - 1} dt \right]. \quad (4.46)$$

Observe que no intervalo $t \in [0, 1]$, a integral adicional pode assumir valores complexos (assim como a nova integral em $t \in [0, \infty]$), dependendo dos valores escolhidos para ξ e M . No entanto, é importante notar que isso não afeta a integral do lado esquerdo da igualdade, que permanece real.

Antes de prosseguir, podemos utilizar a série geométrica para reescrever o denominador presente nas integrais de (4.46). Isto é,

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{Ta} \sqrt{M^2 a^2 + 6\xi - 1} \cosh(t)} - 1} = \frac{e^{-\frac{1}{Ta} \sqrt{M^2 a^2 + 6\xi - 1} \cosh(t)}}{1 - e^{-\frac{1}{Ta} \sqrt{M^2 a^2 + 6\xi - 1} \cosh(t)}} = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m}{Ta} \sqrt{M^2 a^2 + 6\xi - 1} \cosh(t)}.$$

Entretanto, essa série converge apenas quando $|e^{-\frac{m}{Ta} \sqrt{M^2 a^2 + 6\xi - 1} \cosh(t)}| < 1$, o que nos leva a limitação de região $(M^2 a^2 + 6\xi - 1) > 0$, já conhecida quando trabalhamos com o propagador da teoria.

A primeira integral em (4.46), que vamos chamar de I_1 , pode ser reescrita em relação às funções modificadas de Bessel ao utilizarmos a serie geométrica e a propriedade entre as funções trigonométricas hiperbólicas, $\cosh^2(t) = \sinh^2(t) + 1$, já citada anteriormente. Logo,

$$I_1 = (M^2 a^2 + 6\xi - 1)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \int_0^\infty \sinh^4(t) e^{-\frac{m}{Ta} \sqrt{M^2 a^2 + 6\xi - 1} \cosh(t)} dt + \int_0^\infty \sinh^2(t) e^{-\frac{m}{Ta} \sqrt{M^2 a^2 + 6\xi - 1} \cosh(t)} dt \right\}.$$

Se utilizarmos a definição integral das funções modificadas de Bessel [27]

$$\frac{K_\nu(z) 2^\nu \Gamma(\nu + 1/2)}{\Gamma(1/2) z^\nu} = \int_0^\infty \sinh^{2\nu}(t) e^{-z \cosh(t)} dt.$$

somos levados a (4.31) novamente

$$I_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{3T^2 a^2 (M^2 a^2 + 6\xi - 1)}{m^2} K_2 \left(\frac{m}{Ta} \sqrt{M^2 a^2 + 6\xi - 1} \right) + \frac{Ta (M^2 a^2 + 6\xi - 1)^{3/2}}{m} K_1 \left(\frac{m}{Ta} \sqrt{M^2 a^2 + 6\xi - 1} \right) \right\} = 2\pi^2 a^4 \rho_{th}$$

Assim, a densidade de energia térmica $\langle T_{tt} \rangle_T$ pode ser reescrito com Abel-Plana da seguinte forma

$$\langle T_{tt} \rangle_T = \rho_{th} + \frac{1}{2\pi^2 a^4} \left(\frac{1}{2} f(1) - \int_0^1 f(t) dt + i \int_0^\infty \frac{f(1+it) - f(1-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt \right)$$

Como a equação anterior sugere, em altas temperaturas $\langle T_{tt} \rangle_T$ se comporta como ρ_{th} . Logo, a equação (4.39) é justificada em ambos os formalismos, e fazendo uma análise numérica sobre $\langle T_{tt} \rangle_T$ na região $-1 < (a^2 M^2 + 6\xi - 1) \leq 0$, onde existe a divergência de ρ_{mx} (4.32), percebe-se que em regimes de altas temperaturas a equação (4.39) também é válida. Portanto, é mais conveniente analisar a expressão (4.39) do que (4.32) nesse regime de temperatura.

No entanto, conforme destacado nas referências [17, 52–55], existe um debate na literatura sobre o modo de ocupação zero em que devido a indeterminação desse termo, alguns autores acabam excluindo-o, enquanto outros trabalham com o valor regularizado. No nosso problema, ele aparece em (4.41) no termo da soma $n = 0$ quando $M = 0$ e $\xi = 0$

$$\frac{1}{2\pi^2 a^4} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\sqrt{6\xi}}{e^{\frac{1}{Ta}} \sqrt{6\xi} - 1} = \frac{T}{2\pi^2 a^3}.$$

Esse termo pode não ser significativo em altas temperaturas, mas mostra importância em regimes de baixas temperaturas e proximidades da energia de Casimir. Em se tratando do método de “point-splitting”, tal consideração sobre a inclusão de um termo não existe já que esse termo, caso exista, apareceria naturalmente a partir do propagador da teoria. Com essa discussão, podemos então ter mais segurança sobre as análises feitas para o regime de altas temperaturas mesmo na região onde ρ_{mx} e P_{mx} são divergentes ($a^2 M^2 + 6\xi - 1 < 0$).

4.4 Estabilidade termodinâmica local

Para o estudo de estabilidade, vamos adotar um campo escalar sem massa para facilitar os cálculos.

4.4.1 Região $(a^2 M^2 + 6\xi - 1) < 0$

Iniciamos com o estudo de estabilidade térmica no sistema. Começando com baixas temperaturas, o termo ρ_{mx} pode ser relevante para a estabilidade térmica pois a derivada em relação à temperatura irá desconsiderar completamente o termo ρ_{vac} . Então, a análise sobre a estabilidade térmica não pode ser feita até encontrarmos o valor de ρ_{mx} renormalizado nessa região.

Agora para o regime de altas temperaturas, $Ta \gg 1$, a contribuição dominante é a de corpo negro (térmica) (4.39), portanto a nossa análise será em cima desse termo. Trabalhando primeiro com a estabilidade térmica, encontramos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V &\approx 2\pi^2 a^3 \frac{\partial \rho_{th}}{\partial T} \\ &= \frac{\pi^4}{5} (Ta)^3 + \left(\frac{1}{6} - \xi \right) Ta. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Como pode ser visto na equação (4.47), por estamos trabalhando com valores de $0 < \xi < 1/6$, a derivada nesse regime é claramente sempre positivo já que $Ta > 0$. Então para altas temperaturas, a condição de estabilidade térmica é satisfeita no Universo de Einstein.

Passando para o estudo da estabilidade mecânica, partimos com o regime de baixas temperaturas/temperatura nula, no qual a densidade de energia se reduz a energia de Casimir $\rho = \rho_{vac}$. Vale lembrar que, no caso de $M \rightarrow 0$, a pressão do universo é $P = \frac{1}{3}\rho$. Portanto, qualquer análise sobre a densidade de energia é válida também para a pressão, salvo uma constante multiplicativa. A Figura (4) apresenta o gráfico de ρ em relação à constante de acoplamento ξ .

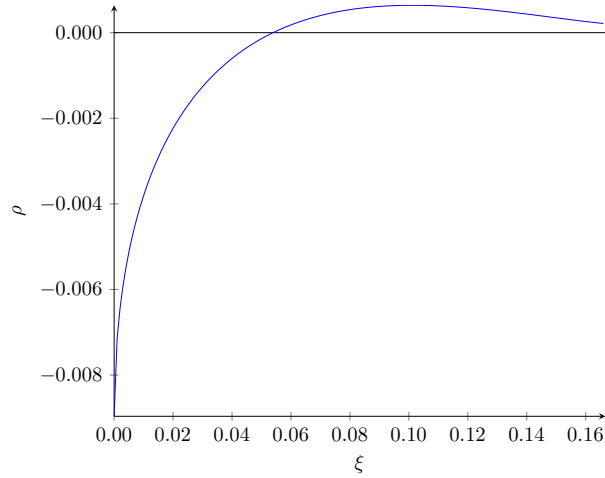


Figura 4 – Gráfico da densidade de energia em relação a constante de acoplamento ξ no regime de temperatura nula, $0 < \xi < 1/6$ ($a=1$), o valor de ρ é negativo até o valor de $\xi = 0,05391\dots$ [50]

A densidade de energia de Casimir do campo escalar no universo de Einstein já foi estudada por outros autores. A referência [56] trata sobre a densidade de energia de Casimir quando $\xi = 0$ e $M \rightarrow 0$ e o seu valor é 0, o que é uma discrepância com resultado encontrado na Figura (4), em que temos $\rho_{vac} \approx 0,009$. Também há uma discrepância com a referência [57], que os valores na região $0 \leq \xi < 1/6$ são sempre positivos. Nesse artigo podemos explicar essa discrepância ao perceber que o autor não utiliza a massa “efetiva” μ , como fizemos, para os cálculos de densidade de energia quando $\xi \neq 1/6$. Os nossos resultados sobre a densidade de energia no vácuo concordam com a referência [50], e vale ressaltar que esta referência utiliza um método de renormalização diferente ao nosso.

Após essa comparação com a literatura, passamos para o estudo da condição de estabilidade mecânica em baixas temperaturas e massa nula, de (3.71) e $P = \frac{1}{3}\rho$ encontramos

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{18\pi^2 a^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial a}\right)_T \approx -\frac{2\rho_{vac}}{9\pi^2 a^3} \quad (4.48)$$

Dado que a derivada da pressão em relação ao volume é proporcional a ρ_{vac} , podemos

analisar a estabilidade mecânica observando a Figura (4). (4.48) apresenta valores com sinal opostos à densidade de energia, indicando que, quando ρ é negativo, a derivada se torna positiva, caracterizando a ocorrência de instabilidade mecânica. Observando a figura, percebemos que para valores de ξ inferiores a 0,05391, o campo escalar no universo de Einstein manifesta instabilidade mecânica em condições de baixas temperaturas, percebe a exclusão do valor de acoplamento mínimo ($\xi = 0$) desse intervalo, o que é um resultado interessante pois o acoplamento mínimo está muito presente em modelos cosmológicos. Devemos notar ainda que, como a densidade de energia é negativa, isso viola a condição de energia forte também [58].

Em altas temperaturas, a condição de estabilidade é analisada levando em consideração a equação (4.39), logo

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{18\pi^2 a^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial a}\right)_T \approx \frac{1}{18\pi^2 a^2} \frac{6\xi - 1}{12a^3} T^2 = -\frac{1 - 6\xi}{216\pi^2} \frac{T^2}{a^5}. \quad (4.49)$$

Visto que estamos no intervalo $0 < \xi < 1/6$, na equação (4.49) os valores são claramente negativos para derivada da pressão em relação ao volume. Então no regime de altas temperaturas a condição de estabilidade mecânica é satisfeita.

Como ainda não fomos capazes de regularizar ρ_{mx} para essa região, não temos informações suficiente para afirmar sobre a janela $0,05391 < \xi < 1/6$, o que concluímos nesse estudo é que dentro da região $(a^2 M^2 + 6\xi - 1) < 0$ existem valores da constante de acoplamento, $0 < \xi < 0,05391 \dots$, em que as condições de estabilidade são violadas, tornando o campo escalar no universo de Einstein nesses valores de ξ instável termodinamicamente, com a possibilidade da janela aceitável para a estabilidade ainda mais restritiva do que $0,05391 < \xi < 1/6$.

4.4.2 Região $\xi = 1/6$ e $M \rightarrow 0$

Nessa região, temos todas as quantidades necessárias para a análise completa de estabilidade, e começamos então com a estabilidade térmica. Daqui em diante, vamos simplificar e tratar a condição apenas em relação a densidade de energia pois estamos interessados apenas no sinal das derivadas. Da condição (3.70) e a densidade de energia nessa região (4.33) até (4.35), temos

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_V = \frac{2\pi^2 T^3}{15} + \frac{24T^3}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{m^2 (80\pi^4 a^4 n^4 T^4 - 40\pi^2 a^2 m^2 n^2 T^2 + m^4)}{(4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2)^5}. \quad (4.50)$$

Essa condição é válida tanto para o regime de baixas temperaturas como o de altas temperaturas. Porém, para o regime de baixas temperaturas o termo de correção ao corpo negro com somas múltiplas é dominante em relação ao termo de corpo negro em si. Para que tenhamos uma análise sobre sua interferência na estabilidade precisamos observar a Figura (5). De acordo com a figura, a capacidade térmica é sempre positiva entre os valores

de a escolhidos para o gráfico. Portanto a baixa temperaturas, a condição de estabilidade térmica é satisfeita.

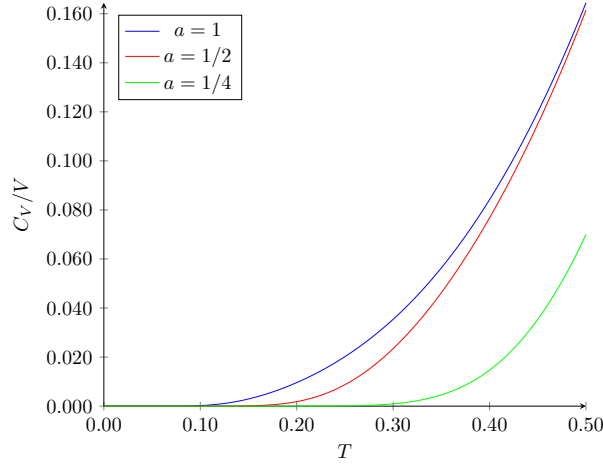


Figura 5 – Derivada da densidade de energia ρ em relação a temperatura T como função da temperatura no intervalo $T \in [0, 1/2]$ em $\xi = 1/6$ para diferentes valores de a

Agora para o regime $Ta \gg 1$, o termo de corpo negro é dominante em relação à correção, já que nesse regime a contribuição térmica é dominante na densidade de energia em relação a sua correção. Logo

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_V \approx \frac{2\pi^2 T^3}{15}. \quad (4.51)$$

O que claramente satisfaz a condição de estabilidade térmica nessa região.

Passando então para a estabilidade mecânica (3.71), a condição é

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{1}{2160\pi^4 a^7} - \frac{16T^6}{3\pi^2 a} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n^2 (16\pi^4 a^4 n^4 T^4 - 40\pi^2 a^2 m^2 n^2 T^2 + 5m^4)}{(4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2)^5}. \quad (4.52)$$

Em baixas temperaturas, a contribuição dominante é o efeito Casimir como pode ser visto pela Figura (6a), o valor dessa expressão é sempre negativo, indicando a estabilidade mecânica no limite de baixas temperaturas. Para altas temperaturas, a condição da estabilidade mecânica também é satisfeita nessa região como indica a Figura (6b) já que no gráfico todos os valores são negativos. Então, podemos concluir que para $\xi = 1/6$ e $M \rightarrow 0$, há estabilidade tanto mecânica quanto térmica do sistema termodinâmico do campo escalar no universo de Einstein.

4.4.3 Região $(a^2 M^2 + 6\xi - 1) > 0$

Na região $(a^2 M^2 + 6\xi - 1) > 0$, diferentemente da região $(a^2 M^2 + 6\xi - 1) < 0$, todas as quantidades calculadas convergem sem nenhum problema. Isso ocorre porque, nessa região, os argumentos das Bessels $K_\nu(z)$ são reais e positivos, o que pelo limite

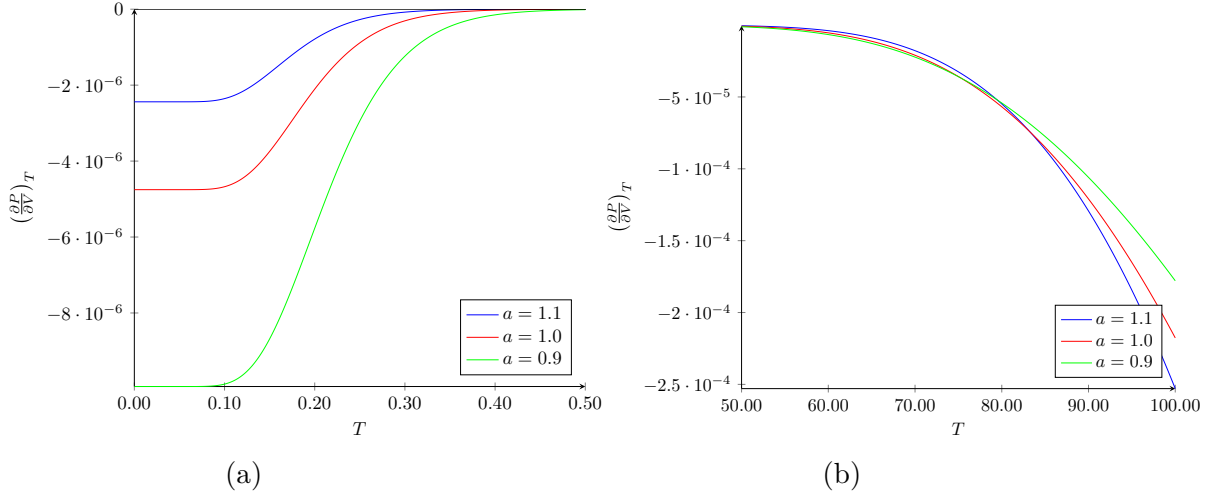


Figura 6 – Derivada da pressão P em relação ao volume V como função da temperatura em dois intervalos diferentes em $\xi = 1/6$ para diferentes valores de a (a) Baixas temperaturas $Ta \ll 1$ $T \in [0, 1/2]$ (b) Altas temperaturas $Ta \gg 1$ $T \in [50, 100]$

assintótico (3.26), nos leva a somas convergentes para os termos de correção presentes na densidade de energia ρ_{mx} e na pressão P_{mx} .

Assim como nos casos anteriores, estudaremos o caso do campos escalar sem massa. Portanto o valor de ξ é sempre maior do que $1/6$ nessa região. Começamos então pela estabilidade térmica (3.70) com as componentes da densidade de energia (4.30) até (4.31) dada por

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial \rho_{th}}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial \rho_{mx}}{\partial T}\right)_V, \quad (4.53)$$

sendo

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho_{th}}{\partial T}\right)_V &= \frac{1}{\pi^2 a^3} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{(6\xi - 1)(3a^2 T^2 + 6m^2 \xi - m^2)}{2am^2 T} K_1 \left(\frac{m\sqrt{6\xi - 1}}{aT} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(6\xi - 1)^{3/2}}{m} K_2 \left(\frac{m\sqrt{6\xi - 1}}{aT} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho_{mx}}{\partial T}\right)_V &= - \sum_{n,m=1}^{\infty} \left\{ \frac{2h_1(m, n)}{aT (4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2)^4} K_1 \left(\frac{\sqrt{(6\xi - 1)(4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2)}}{aT} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2h_2(m, n)}{aT (4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2)^4} K_2 \left(\frac{\sqrt{(6\xi - 1)(4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2)}}{aT} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Os coeficientes auxiliares são

$$\begin{aligned}
 h_1(m, n) = & 20\pi^2 a^3 n^2 T^3 (6\xi - 1)^{3/2} \left(16\pi^4 a^4 n^4 T^4 - 16\pi^2 a^2 m^2 n^2 T^2 + m^4 \right) \sqrt{4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2} \\
 & - aT (6\xi - 1)^{3/2} \left(4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2 \right)^{3/2} \left(16\pi^4 a^4 n^4 T^4 - 16\pi^2 a^2 m^2 n^2 T^2 + m^4 \right) \\
 & + am^2 T (6\xi - 1)^{3/2} \left(16\pi^4 a^4 n^4 T^4 - 16\pi^2 a^2 m^2 n^2 T^2 + m^4 \right) \sqrt{4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2} \\
 & + am^2 T (1 - 6\xi) \left[48\pi^4 a^4 n^4 T^4 + m^4 \left(3 - 4\pi^2 n^2 (6\xi - 1) \right) \right. \\
 & \left. - 8\pi^2 a^2 m^2 n^2 T^2 \left(2\pi^2 n^2 (6\xi - 1) + 9 \right) \right] \sqrt{(6\xi - 1) (4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2)} \\
 & + 32aT^2 (6\xi - 1)^{3/2} \left(4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2 \right)^{3/2} \left(\pi^2 a^2 m^2 n^2 T - 2\pi^4 a^4 n^4 T^3 \right), \quad (4.56)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 h_2(m, n) = & m^2 \left[128\pi^6 a^6 n^6 (6\xi - 1) T^6 - 768\pi^6 a^6 n^6 \xi (6\xi - 1) T^6 - 5760\pi^4 a^6 n^4 \xi T^6 \right. \\
 & - 32\pi^4 a^4 m^2 n^4 (6\xi - 1) T^4 + 192\pi^4 a^4 m^2 n^4 \xi (6\xi - 1) T^4 + 2880\pi^2 a^4 m^2 n^2 \xi T^4 \\
 & - 480\pi^2 a^4 m^2 n^2 T^4 - 16\pi^2 a^2 m^4 n^2 (6\xi - 1) T^2 + 96\pi^2 a^2 m^4 n^2 \xi (6\xi - 1) T^2 \\
 & - (6\xi - 1)^2 \left(4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2 \right) \left(16\pi^4 a^4 n^4 T^4 - 16\pi^2 a^2 m^2 n^2 T^2 + m^4 \right) \\
 & \left. + 12a^2 m^4 T^2 - 72a^2 m^4 \xi T^2 + 960\pi^4 a^6 n^4 T^6 \right]. \quad (4.57)
 \end{aligned}$$

Por mais assustador que essas expressões sejam, acaba que o termo dominante em ambos os regimes de temperatura é o de corpo negro (4.54), então a correção vinda de ρ_{mx} (4.55) é desprezível em relação a ρ_{th} . Passando para a análise gráfica da condição de estabilidade térmica,

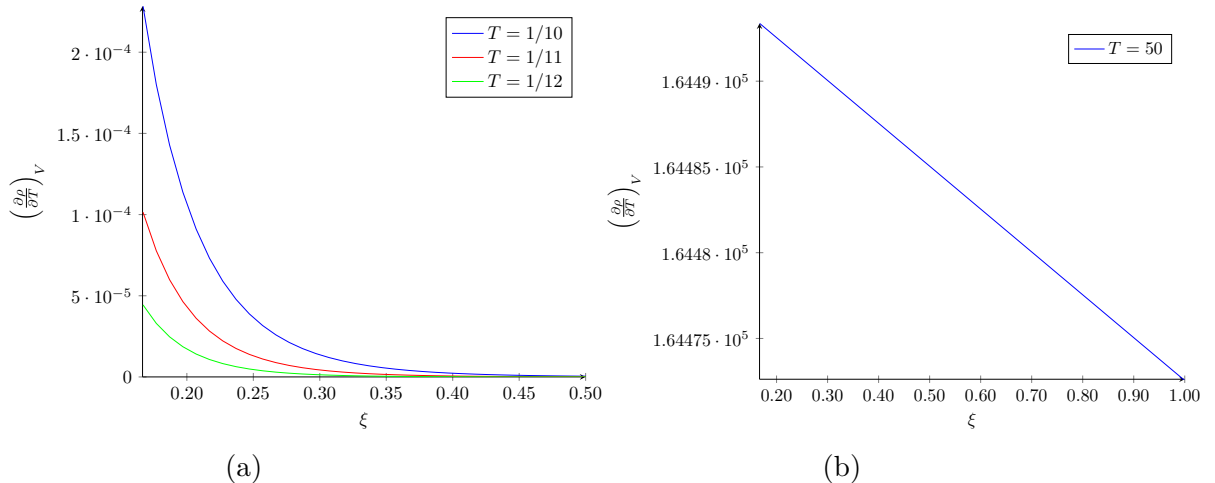


Figura 7 – Derivada da densidade de energia ρ em relação a temperatura T como função da constante de acoplamento para em que o valor de $a = 1$ (a) Baixas temperaturas, $Ta \ll 1$, no intervalo $1/6 < \xi < 1/2$ (b) Altas temperaturas, $Ta \gg 1$, no intervalo $1/6 < \xi < 1$

como pode ser visto da Figura (7), em ambos os regimes a condição de estabilidade térmica do sistema é satisfeita. Já esperávamos isso a altas temperaturas devido a (4.47),

mas interessante ver que isso também é mantido para baixas temperaturas. A formula (4.47) nos leva a acreditar que para um valor suficientemente grande de ξ , a estabilidade térmica também seria violada mas para valores de ξ cuja a ordem de grandeza seja comparável a Ta , (4.39) deixa de ser válido e apenas a equação (4.55) pode ser utilizada.

A condição de estabilidade mecânica (3.71) é

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P_{vac}}{\partial V}\right)_T + \left(\frac{\partial P_{th}}{\partial V}\right)_T + \left(\frac{\partial P_{mx}}{\partial V}\right)_T. \quad (4.58)$$

sendo

$$\left(\frac{\partial P_{vac}}{\partial V}\right)_T = -\frac{1}{\pi^5 a^7} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(6\xi - 1)^{3/2}}{3n} K_1 \left(2n\pi\sqrt{6\xi - 1} \right) + \frac{(6\xi - 1)}{2\pi n^2} K_2 \left(2n\pi\sqrt{6\xi - 1} \right) \right], \quad (4.59)$$

$$\left(\frac{\partial P_{th}}{\partial V}\right)_T = -\frac{1}{12\pi^4 a^6} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{T(6\xi - 1)^{3/2}}{m} K_1 \left(\frac{m\sqrt{6\xi - 1}}{Ta} \right) - \frac{(6\xi - 1)^2}{a} K_2 \left(\frac{m\sqrt{6\xi - 1}}{Ta} \right) \right], \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P_{mx}}{\partial V}\right)_T = & -\frac{1}{6\pi^4 a^6} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left\{ \frac{(6\xi - 1)^{3/2} h_3(n, m) T}{(4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2)^{7/2}} K_1 \left(\frac{\sqrt{(6\xi - 1)(4\pi^2 T^2 a^2 n^2 + m^2)}}{Ta} \right) \right. \\ & \left. + \frac{(6\xi - 1) h_4(n, m)}{a(4\pi^2 a^2 n^2 T^2 + m^2)^4} K_2 \left(\frac{\sqrt{(6\xi - 1)(4\pi^2 T^2 a^2 n^2 + m^2)}}{Ta} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Com os coeficientes $h_3(n, m)$ e $h_4(n, m)$ dados por

$$\begin{aligned} h_3(n, m) = & 256\pi^6 T^6 a^6 n^6 + 8\pi^2 T^2 a^2 m^4 n^2 \left[9 + (6\xi - 1)2\pi^2 n^2 \right] \\ & + m^6 \left[1 + (6\xi - 1)4\pi^2 n^2 \right] - 432\pi^4 T^4 a^4 m^2 n^4, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h_4(n, m) = & 768\pi^6 T^8 a^8 n^6 - 64\pi^4 T^6 a^6 m^2 n^4 \left[30 + 7(6\xi - 1)\pi^2 n^2 \right] + m^8(1 - 6\xi) \\ & + 48\pi^2 T^4 a^4 m^4 n^2 \left[5 - (6\xi - 1)\pi^2 n^2 \right] + 12\pi^2 T^2 a^2 m^6 n^2(6\xi - 1). \end{aligned}$$

Analisando com gráficos (4.58), observamos no primeiro gráfico (8a) que, em baixas temperaturas, a derivada da pressão exibe valores muito próximos para os diferentes temperaturas. Essa semelhança é atribuída à predominância da contribuição de Casimir nesse regime. Enquanto que no gráfico (8b), de altas temperaturas, como esperado da equação (4.49), a condição de estabilidade mecânica é violada nesse regime, estabelecendo um limite superior à constante de acoplamento ξ .

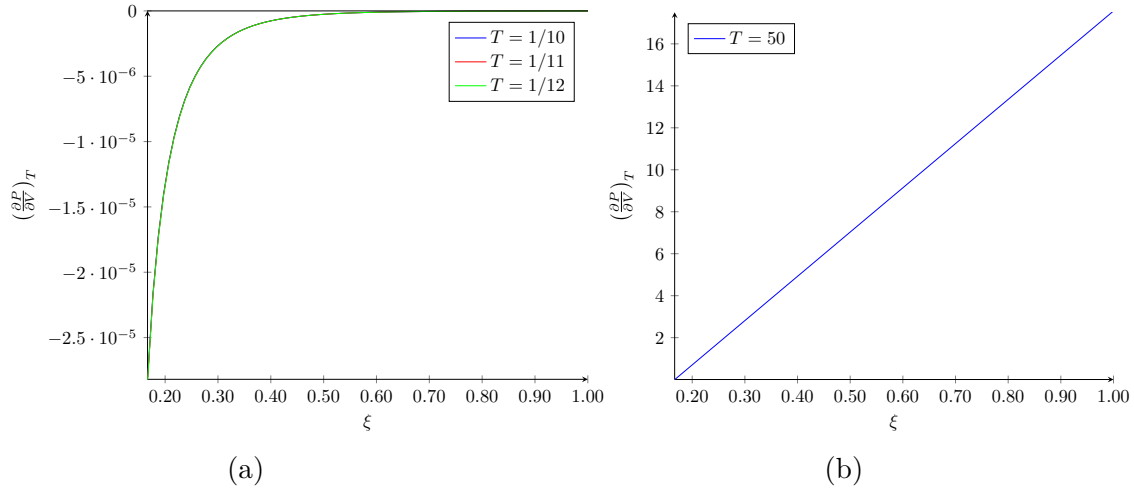


Figura 8 – Derivada da pressão P em relação ao volume como função da constante de acoplamento no intervalo $1/6 < \xi < 1$ para em que o valor de $a = 1$ (a) Baixas temperaturas, $Ta \ll 1$ (b) Altas temperaturas, $Ta \gg 1$

Então, para que o campo escalar sem massa no universo de Einstein seja estável termodinamicamente é necessário que a constante de acoplamento esteja dentro do intervalo

$$0,05391 \dots < \xi \leq 1/6, \quad (4.62)$$

com a possibilidade do mesmo ser menor ainda, devido a falta de análise sobre a capacidade térmica a baixas temperaturas na região $(a^2 M^2 + 6\xi - 1) < 0$.

Note que a restrição sobre ξ veio exclusivamente da estabilidade mecânica do universo. Então, fora do intervalo (4.62), uma pequena mudança súbita no volume da 3-esfera poderia causar uma expansão descontrolada desse espaço ou um colapso total do mesmo já que a pressão “externa” não seria capaz de retornar o espaço ao seu volume original.

4.5 Além do campo escalar

Mesmo que o campo escalar tenha a sua importância com o campo de Higgs, “inflaton” etc, não é o único campo presente na natureza. Existem outros campos fundamentais que acompanham partículas elementares importantes como, por exemplo, elétrons, fótons e neutrinos.

Esses campos estão presentes no universo de Einstein e tem também quantidades termodinâmicas associadas, como densidade de energia e pressão, e, por consequência, também são capazes de influenciar na estabilidade térmica e mecânica do sistema no universo em questão. Essa influência poderia eventualmente alterar os valores aceitáveis para o intervalo da constante de acoplamento ξ .

Tendo isso em mente, aqui estudaremos os campos de fótons e neutrinos brevemente, cujas equações de movimento que são responsáveis pelos seus respectivos campos são independentes da constante ξ presente em (2.3). Essa independência nos permite aplicar um método diferente para encontrar a densidade de energia desses campos. Anteriormente, para encontrar a densidade de energia, transformamos o tensor momento energia em operador e encontramos o propagador de Feynman para o campo. Como pretendemos trabalhar com campos de massa nula, acaba que é mais simples e direto encontrarmos a densidade de energia usando a mecânica estatística dos modos normais.

O nosso interesse aqui é analisar exclusivamente o regime de altas temperaturas. Na referência [49], os calculos de densidade de energia são feitos com mais detalhes e até mesmo uma comparação sobre as mesmas quantidades obtidas com o método de “point-splitting”. Começando pelo campo de fótons, a solução das equações de Maxwell em um universo fechado como o de Einstein foram obtidas por autores como Mashhoon [59]. Neste artigo, foram encontrados os autovalores dos estados de energia

$$\epsilon_{k,ph} = \frac{n}{a}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

com degenerescência dada por $d_{k,ph} = 2(n^2 - 1)$. Considerando que fótons são partículas bosônicas, a distribuição do número de ocupação de estados segue o mesmo padrão estudado para um campo escalar, a distribuição de Bose-Einstein (4.40). Portanto, a contribuição energética térmica para o campo fotônico, representada por $\langle T_{tt} \rangle_{ph}$, é

$$\langle T_{tt} \rangle_{ph} = \frac{1}{\pi^2 a^4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n^2 - 1)}{e^{n/Ta} - 1}. \quad (4.63)$$

Após algumas manipulações algébricas em (4.63) utilizando a fórmula de soma de Poisson [49], encontramos

$$\frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty} f(t)dt + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \text{Re} \left[\int_0^{\infty} f(t)e^{i2\pi mt} dt \right].$$

Chegamos que a densidade de energia para o campo fotônico na região de altas temperaturas é

$$\rho_{ph} = \frac{\pi^2}{15} T^4 - \frac{T^2}{6a^2}. \quad (4.64)$$

Após tratarmos do campo fotônico, passamos então para a densidade de energia de um campo espinorial sem massa. A solução das equações de Dirac no universo fechado de Einstein foram resolvidas por diferentes autores como, por exemplo, Olson e Uhrh [60]. Os autovalores dos estados de energia são

$$\epsilon_{k,sp} = \frac{1}{a} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 2, 3, \dots,$$

e a degenerescência desses estados é representada por $d_{k,sp} = 4n(n + 1)$. Neste contexto, estamos lidando com férmions, o que implica em uma distribuição de partículas diferente

daquela que abordamos anteriormente. No caso dos férmions, a distribuição de partículas segue a estatística de Fermi-Dirac. A principal diferença em relação à distribuição de Bose-Einstein (4.40) é o sinal no denominador, que agora é positivo. Portanto, a energia térmica para o campo espinorial $\langle T_{tt} \rangle_s$ é:

$$\langle T_{tt} \rangle_{sp} = \frac{2}{\pi^2 a^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1/2)(n+1)}{e^{(n+1)/Ta} + 1}. \quad (4.65)$$

Assim, como feito no caso anterior, utilizando a fórmula de soma de Poisson em (4.65), chegamos que a densidade de energia para o campo espinorial sem massa na região de altas temperaturas é

$$\rho_{sp} = \frac{7}{60} \pi^2 T^4 - \frac{1}{24} \frac{T^2}{a^2}. \quad (4.66)$$

Com essas informações, construímos a densidade de energia total no universo de Einstein, considerando a presença desses três campos fundamentais, de tal forma:

$$\rho = \rho_s n_s + \rho_{sp} n_{sp} + \rho_{ph} n_{ph},$$

sendo n_s , n_{sp} e n_{ph} o numero de campos escalar, espinorial e fotônico, respectivamente. Assim como fizemos anteriormente, estudamos a estabilidade termodinâmica local. Começamos com a condição de estabilidade térmica (3.70), dado por

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_V = \frac{\pi^2 T^3}{15} (4n_{ph} + 2n_s + 7n_{sp}) - \frac{T}{12a^2} [4n_{ph} + (6\xi - 1)n_s + n_{sp}]. \quad (4.67)$$

Conforme antecipado, a introdução de novos campos não deveria impactar na estabilidade em altas temperaturas, uma vez que se presume que o termo planckiano (corpo negro) seja predominante nesse regime e isso se aplica também aos outros campos fundamentais. Logo, a condição de estabilidade térmica é satisfeita para a densidade de energia total desses três campos. Refazendo o estudo, considerando agora o efeito de apenas um desses campos, também chegamos na conclusão de estabilidade térmica. Isso é, tanto o campo fotonico quanto o espinorial são estáveis termicamente.

Passamos então para a estabilidade mecânica (3.71). Aqui utilizamos a equação de estado $P = \frac{1}{3}\rho$, e chegamos em:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = \frac{1}{6\pi^2 a^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial a} \right)_T = \frac{T^2}{72\pi^2 a^5} [(6\xi - 1)n_s + n_{sp} + 4n_{ph}].$$

A exigência dessa derivada ser negativa para satisfazer o critério de estabilidade mecânica nos leva a

$$[(6\xi - 1)n_s + n_{sp} + 4n_{ph}] < 0 \Rightarrow \xi \leq \frac{1}{6} \left[1 - \frac{(n_{sp} + 4n_{ph})}{n_s} \right]. \quad (4.68)$$

Aqui temos um resultado interessante, a equação (4.68) nos diz que a presença de outros campos fundamentais, também afeta a estabilidade do universo em altas temperaturas

dependendo do número de campos de cada tipo. Da equação (4.68) vemos que, para $n_s \geq 1$ o maior valor possível que a constante de acoplamento ξ pode atingir é $1/6$. Outra observação é que, um universo sem a presença de campos escalares, contendo apenas campos fotônicos e/ou espinoriais, é termodinamicamente estável porém mecanicamente instável.

5 Conclusão

Neste trabalho, nosso objetivo foi investigar a constante de acoplamento de curvatura ξ presente na equação de movimento do campo escalar em espaços curvos, mais especificamente no universo estático de Einstein, e sua relação com a estabilidade termodinâmica. Antes de abordarmos o objetivo principal, realizamos uma revisão do formalismo matemático presente na literatura sobre o método de “point-splitting”, utilizado para obter as quantidades termodinâmicas necessárias no estudo.

Após a revisão, aplicamos o conhecimento adquirido para investigar o caso do espaço-tempo cilíndrico. Nesse contexto, exploramos grandezas como $\langle \phi^2 \rangle$, discutindo as diferenças entre o campo escalar com massa e sem massa e seu impacto na renormalização. Além disso, examinamos as componentes do tensor pressão-energia-momento, como densidade de energia e pressão do campo escalar no espaço-tempo cilíndrico e comparamos os nossos resultados com a literatura existente e argumentamos ao nosso favor.

Em seguida, apresentamos a ideia de estabilidade termodinâmica local. Discutimos duas condições necessárias para a estabilidade termodinâmica: a condição de estabilidade térmica, relacionada à capacidade térmica, e a estabilidade mecânica, associada com a compressibilidade mecânica. As duas condições são importantes para a termodinâmica do campo escalar. No caso do cilindro, obtivemos um resultado interessante, onde identificamos que o espaço é mecanicamente instável a depender da direção da perturbação no campo escalar no espaço-tempo cilíndrico, sendo instável na direção x porém estável em y e z .

Ao aplicarmos nosso método ao universo de Einstein, encontramos um desafio de renormalização para as quantidades densidade de energia e pressão obtidas pelo método de “point-splitting”. Isso nos motivou a recorrer a métodos de mecânica estatística para abordar o problema. A comparação entre os dois métodos enriquece nosso estudo, proporcionando maior confiança nos resultados obtidos pelo método principal.

Ao analisarmos a estabilidade termodinâmica, em especial a mecânica, identificamos um intervalo de valores para a constante de acoplamento de curvatura ξ que pode ser aceitável. Isso está em conformidade com nossa hipótese inicial de existirem limitações para essa constante. O intervalo encontrado para o acoplamento de curvatura é $0,05391 \dots < \xi \leq 1/6$, podendo ser ainda mais restrito dependendo da influencia dos termos de correção para a densidade de energia e pressão, que não foram renormalizados. A nossa garantia é que $\xi > 1/6$ e $0 \leq \xi < 0,05391 \dots$ são intervalos instáveis para o campo escalar no universo de Einstein. Interessante perceber que esses intervalos excluem o valor de $\xi = 0$ (acoplamento mínimo), sendo este muito utilizado na cosmologia.

Outro ponto a ser ressaltado aqui, é sobre quando analisamos os valores da densidade

de energia no vácuo na região $\mu^2 a^2$ ou $(M^2 a^2 + 6\xi - 1) < 0$. Na literatura, encontramos resultados conflitantes, onde três diferentes autores chegaram em resultados discrepantes entre si [50, 56, 57]. Argumentamos em favor da referência [50], utilizando um método diferente que o autor fez em seu artigo.

Por fim, realizamos uma breve análise de como outros campos fundamentais, como o fotônico e o espinorial não massivo utilizando a mecânica estatística de modos normais, poderiam influenciar esse intervalo encontrado para ξ , e com os campos escolhidos, obtemos um valor máximo para ξ , que é $1/6$.

No futuro, pretendemos resolver o problema de renormalização sobre os termos de correção da densidade de energia e pressão, para melhorarmos o intervalo de ξ . Outro assunto, que poderia ser investigado no futuro, é a influencia de outros campos fundamentais além dos já estudados e entender melhor como os campos influenciam na constante de acoplamento ξ .

APÊNDICE A – Objetos Geométricos - Universo de Einstein

Como o foco dessa dissertação é o universo estático de Einstein, neste apêndice vamos apresentar o cálculo de várias quantidades relacionadas a geometria desse espaço-tempo e que foram úteis nos cálculos feitos nessa dissertação. Começamos pelo elemento de linha que define o Universo de Einstein

$$ds^2 = dt^2 - a^2[d\chi^2 + \text{sen}^2\chi(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)], \quad (\text{A.1})$$

onde $\chi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, \pi]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$. Note que o Universo de Einstein geometricamente é definido como $R \times S^3$, isso é, uma linha real para a dimensão temporal e uma esfera S^3 em um espaço quadridimensional para as coordenadas espaciais.

Essa conexão com a geometria de uma esfera nos permite reescrever a métrica de Einstein utilizando coordenadas polares definidas na superfície de uma esfera de raio a no espaço euclidiano quadridimensional. Tais coordenadas são

$$\begin{aligned} x &:= a \text{sen}\chi \text{sen}\theta \cos\varphi, \\ y &:= a \text{sen}\chi \text{sen}\theta \text{sen}\varphi, \\ z &:= a \text{sen}\chi \cos\theta, \\ w &:= a \cos\chi, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

e essas coordenadas polares satisfazem a equação de uma esfera quadridimensional S^3 como é o esperado

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2. \quad (\text{A.3})$$

Antes de prosseguirmos com os cálculos de curvatura, vamos determinar o volume dessa esfera S^3 presente em um espaço quadridimensional. Calculamos o volume de uma variedade (pseudo-)Riemanniana de dimensão n utilizando o elemento diferencial de volume [61]

$$dV = \sqrt{|\det g|} dx^1 \dots dx^n, \quad (\text{A.4})$$

onde $\det g$ representa o determinante da métrica do espaço-tempo para o cálculo do volume. Para o universo de Einstein, desejamos determinar o volume da esfera S^3 da parte espacial da métrica. O cálculo do determinante para a métrica S^3 é relativamente simples, pois essa métrica não apresenta termos fora da diagonal principal. Portanto, o valor do determinante é simplesmente obtido multiplicando-se os elementos ao longo dessa diagonal principal. Consequentemente, o resultado de $\sqrt{|\det g|}$ é expresso como $a^3 \text{sen}^2\chi \text{sen}\theta$. Logo, o valor

do volume da esfera S^3 pode ser calculado apenas integrando o elemento de volume sobre a esfera

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi a^3 \text{sen}^2\chi \text{sen}\theta d\chi d\theta d\varphi = 2\pi^2 a^3. \quad (\text{A.5})$$

Após calcularmos o volume, avançamos para a determinação das quantidades de curvatura espacial relevantes para o Universo de Einstein. Para esse cálculo, é necessário obter as derivadas não nulas da métrica.

$$\begin{aligned} g_{22,1} &= g_{\theta\theta,\chi} = -2a^2 \text{sen}\chi \cos\chi, \\ g_{33,1} &= g_{\varphi\varphi,\chi} = -2a^2 \text{sen}\chi \cos\chi \text{sen}^2\theta, \\ g_{33,2} &= g_{\varphi\varphi,\theta} = -2a^2 \text{sen}^2\chi \text{sen}\theta \cos\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Aqui utilizamos a notação $A_{,\alpha}$ para indicar derivada simples do elemento A em relação a coordenada α . Essas informações serão úteis para encontrarmos as componentes não nulas dos símbolos de Christoffel. Esses símbolos estão presentes na conexão do espaço (Levi-Civita) e é relevante quando trabalhamos com a derivada covariante. A definição desses símbolos é

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\rho\beta,\gamma} + g_{\gamma\rho,\beta} - g_{\beta\gamma,\rho}). \quad (\text{A.7})$$

A derivada covariante para um campo escalar é a derivada simples, o que simplifica bem os cálculos, porém a derivada covariante para um vetor covariante e um vetor contravariante exige o cálculo dos símbolos de Christoffel. Quando derivamos covariantemente o campo escalar pela primeira vez, obtemos um vetor seja ele covariante ou contravariante e quando derivamos novamente, precisamos dos símbolos. As componentes não nulas dos símbolos para o universo estático de Einstein são

$$\Gamma_{22}^1 = -\text{sen}\chi \cos\chi; \Gamma_{33}^1 = -\text{sen}\chi \cos\chi \text{sen}^2\theta; \Gamma_{21}^2 = \cot\chi; \Gamma_{33}^2 = -\cos\theta \text{sen}\theta;$$

$$\Gamma_{13}^3 = \cot\chi; \Gamma_{23}^3 = \cot\theta;$$

Não calculamos as componentes do tensor de Riemann mesmo sendo um tensor muito importante em geometria diferencial, definindo a noção de curvatura do espaço-tempo e também a comutação entre derivadas segundas covariantes. Como não vamos usar essas componentes explicitamente, calculamos as componentes do tensor de Ricci de forma direta com os símbolos de Christoffel sem nos preocuparmos com Riemann [6], ao utilizar a equação abaixo

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma. \quad (\text{A.8})$$

Encontramos todas componentes não nulas do tensor de Ricci no universo de Einstein

$$R_{11} = -2; R_{22} = -2 \text{sen}^2\chi; R_{33} = -2 \text{sen}^2\chi \text{sen}^2\theta$$

O tensor de Ricci acaba sendo muito importante nesse estudo pois além de aparecer no operador tensor momento-energia do campo escalar, é por meio do traço desse tensor que chegamos ao escalar de curvatura da geometria, quantidade muito importante pois tem relação direta com a constante de acoplamento do campo escalar ξ . O escalar de curvatura é dado por:

$$R := R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \frac{6}{a^2}. \quad (\text{A.9})$$

com o tensor de Ricci, podemos também encontrar o tensor de Einstein dessa geometria, que é definido como

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (\text{A.10})$$

As componentes não nulas do tensor de Einstein são:

$$G_{00} = -\frac{3}{a^2}; \quad G_{11} = 1; \quad G_{22} = \text{sen}^2\chi; \quad G_{33} = \text{sen}^2\chi \text{sen}^2\theta$$

A.1 Distância geodésica

No caso de uma 3-esfera, podemos obter a distância geodésica sem precisar recorrer a equação de geodésicas de geometria diferencial. A distância entre pontos na superfície da 3-esfera é apenas o raio a da mesma multiplicado pelo ângulo β entre os vetores posição \vec{x} e \vec{x}' dos pontos x e x' pertencentes a S^3 . Isto é:

$$s = a \cdot \beta, \quad (\text{A.11})$$

com β sendo:

$$\cos\beta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}||\vec{x}'|}. \quad (\text{A.12})$$

O vetor posição em relação as coordenadas polares na esfera S^3 (A.2) é

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (x, y, z, w) \\ &= (a \text{sen}\chi \text{sen}\theta \cos\varphi, a \text{sen}\chi \text{sen}\theta \text{sen}\varphi, a \text{sen}\chi \cos\theta, a \cos\chi), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

onde $|\vec{x}| = a$. Com as coordenadas polares na superfície, podemos encontrar esse ângulo β em relação aos ângulos das coordenadas polares. Para isso vamos analisar o produto escalar entre os vetores posições:

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{x}' &= a^2 (\text{sen}\chi \text{sen}\theta \cos\varphi \text{sen}\chi' \text{sen}\theta' \cos\varphi' + \text{sen}\chi \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \text{sen}\chi' \text{sen}\theta' \text{sen}\varphi' \\ &\quad + \text{sen}\chi \cos\theta \text{sen}\chi' \cos\theta' + \cos\chi \cos\chi') \\ &= a^2 \left[\text{sen}\chi \text{sen}\chi' \text{sen}\theta \text{sen}\theta' (\cos\varphi \cos\varphi' + \text{sen}\varphi \text{sen}\varphi') + \cos\chi \cos\chi' \right. \\ &\quad \left. + \text{sen}\chi \text{sen}\chi' \cos\theta \cos\theta' \right], \end{aligned}$$

simplificando,

$$\vec{x} \cdot \vec{x}' = a^2 \left\{ \cos\chi \cos\chi' + \sin\chi \sin\chi' \left[\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi') \right] \right\} \quad (\text{A.14})$$

Logo,

$$\cos\beta = \cos\chi \cos\chi' + \sin\chi \sin\chi' \left[\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi') \right], \quad (\text{A.15})$$

e

$$s(q, q') = a \cos^{-1} \left\{ \cos\chi \cos\chi' + \sin\chi \sin\chi' \left[\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi') \right] \right\} \quad (\text{A.16})$$

com q representando os pontos na 3-esfera em coordenadas (χ, θ, φ) . Observe que $s(q, q')$ representa a distância geodésica na 3-esfera porém quando as coordenadas χ são iguais a $\chi = \chi' = \pi/2$, as coordenadas polares (A.2) deixam de ser da 3-esfera para a 2-esfera assim como a nova distância $s(\theta, \varphi, \theta', \varphi')$ corresponde à distância geodésica na conhecida 2-esfera. Da mesma forma, quando $\chi = \chi' = \pi/2$ e $\theta = \theta' = \pi/2$, temos um círculo e a distância geodésica passa a ter o comprimento de um arco de circunferência, conforme esperado para a distância geodésica neste espaço.

APÊNDICE B – Função de Green Térmica

Para derivar a função térmica de Green, começamos assumindo que o estado $|\varphi_i\rangle$ é um estado puro que corresponde a um autovetor do operador Hamiltoniano H com um autovalor de energia E_i . Uma vez que tanto o número de partículas como as energias do sistema são consideradas variáveis, abordamos o sistema usando o Ensemble Grande Canônico com uma temperatura T e um potencial químico μ [18].

A probabilidade ρ_i de que esse mesmo sistema esteja em um estado E_i de energia, é dada por

$$\rho_i = \frac{e^{-\beta(E_i - \mu n_i)}}{Z(\beta, \mu, N)}, \quad (\text{B.1})$$

onde

$$\beta = 1/T \quad (\text{B.2})$$

e $Z(\beta, \mu, N)$ representa a nossa função de partição para o Ensemble grande canônico, que é definido como

$$Z(\beta, \mu, N) = \sum_k e^{-\beta(E_k - \mu n_k)} = e^{-\beta\Omega}, \quad (\text{B.3})$$

sendo Ω o potencial termodinâmico do ensemble grande canônico. Dessa forma podemos introduzir o operador densidade, que será essencial para definirmos média no ensemble a temperatura T , dado por

$$\rho = e^{\beta(\Omega + \mu N - H)}. \quad (\text{B.4})$$

Assim, encontramos uma nova forma de escrever a probabilidade ρ_i de que o sistema esteja em um estado E_i de energia, como sendo

$$\langle \varphi_i | \rho | \varphi_i \rangle = e^{\beta\Omega} \langle \varphi_i | e^{-\beta(E_i - \mu n_i)} | \varphi_i \rangle = \frac{e^{-\beta(E_i - \mu n_i)}}{Z(\beta, \mu, N)} = \rho_i. \quad (\text{B.5})$$

como a soma das probabilidades de encontramos o sistema em algum estado E_i é necessariamente unitária, temos então a seguinte relação

$$\sum_i \rho_i = \sum_i \langle \varphi_i | \rho | \varphi_i \rangle = \text{Tr}[\rho] = 1, \quad (\text{B.6})$$

e a média de um operador A no Ensemble é

$$\langle A \rangle_\beta = \sum_i \rho_i \langle \varphi_i | A | \varphi_i \rangle = \sum_i \langle \varphi_i | \rho A | \varphi_i \rangle = \text{Tr}[\rho A]. \quad (\text{B.7})$$

Após determinarmos a média para um operador no Ensemble, retomamos as definições das funções de Green. Agora, substituímos as definições anteriores baseadas em médias no estado de vácuo pelas médias no Ensemble, isto é

$$G_\beta^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}') \rangle_\beta \quad (\text{B.8})$$

e

$$G_{\beta}^{-}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \phi(\mathbf{x}') \phi(\mathbf{x}) \rangle_{\beta} \quad (\text{B.9})$$

Podemos adotar a conveniência de considerar o potencial químico μ como sendo nulo, sem perda de generalidade, a fim de simplificar os cálculos futuros. Com base nas definições atualizadas da função de Green térmica, chegamos à seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} G_{\beta}^{+}(t, \vec{x}; t', \vec{x}') &= \frac{\text{Tr}[e^{-\beta H} \phi(t, \vec{x}) \phi(t', \vec{x}')]]}{\text{Tr}[e^{-\beta H}]} \\ &= \frac{\text{Tr}[e^{iH(i\beta)} \phi(t, \vec{x}) e^{-iH(i\beta)} e^{-\beta H} \phi(t', \vec{x}')]]}{\text{Tr}[e^{-\beta H}]} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

A partir da representação de Heisenberg [22], entendemos como operadores quânticos evoluem no tempo

$$A(t) = e^{iHt} A e^{-iHt} \quad (\text{B.11})$$

Com essa representação podemos manipular o operador do campo escalar em (B.10) para encontrarmos uma nova propriedade da função $G_{\beta}^{+}(t, \vec{x}, t', \vec{x}')$

$$\begin{aligned} G_{\beta}^{+}(t, \vec{x}, t', \vec{x}') &= \frac{\text{Tr}[\phi(t + i\beta, \vec{x}) e^{-\beta H} \phi(t', \vec{x}')]]}{\text{Tr}[e^{-\beta H}]} \\ &= \frac{\text{Tr}[e^{-\beta H} \phi(t', \vec{x}') \phi(t + i\beta, \vec{x})]]}{\text{Tr}[e^{-\beta H}]} \\ &= G_{\beta}^{-}(t + i\beta, \vec{x}, t', \vec{x}'), \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

em que utilizamos a propriedade $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ na segunda linha. Essa relação é conhecida como condição KMS [62, 63]. Repetindo o processo para $G_{\beta}^{-}(t, \vec{x}, t', \vec{x}')$, encontramos que

$$G_{\beta}^{-}(t, \vec{x}, t', \vec{x}') = G_{\beta}^{+}(t + i\beta, \vec{x}, t', \vec{x}'). \quad (\text{B.13})$$

Logo,

$$G_{\beta}^{(1)}(t, \vec{x}, t', \vec{x}') = G_{\beta}^{(1)}(t + i\beta, \vec{x}, t', \vec{x}'). \quad (\text{B.14})$$

Dessa relação, vemos que a função de Green térmica tem periodicidade na coordenada temporal com o imaginário da temperatura do Ensemble. Para encontrarmos a relação entre a função de Green no estado de vácuo com a função de Green térmica, devemos perceber que as relações de comutação dos operadores de criação e aniquilação são iguais no estado de vácuo e no ensemble. Então, temos que o comutador de um campo escalar livre é um operador identidade multiplicado por um número complexo (também conhecido como c-number) e, portanto, o seu valor no ensemble canônico é o mesmo valor do estado de vácuo [18, 64]

$$iG(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = iG_{\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}')]. \quad (\text{B.15})$$

Podemos escrever a transformada de Fourier para a função de Green térmica e função de Green no estado de vácuo, como sendo

$$iG(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = iG_\beta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega c(\omega) e^{-i\omega(t-t')} \quad (\text{B.16})$$

Com a equação (3.12), podemos encontrar o $c(\omega)$ da transformada de Fourier se integramos em um contorno conveniente. Para determinar $c(\omega)$ no caso específico do cilindro, podemos utilizar as expressões (2.7) e (B.16) e a solução do campo escalar obtida através dos autoestados (3.3), considerando o caso em que $E_j = 0$ e a equação (2.6) [18]. Assim,

$$c(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2 a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 dk_3 \delta(\omega^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 - M^2) [\Theta(\omega) - \Theta(-\omega)] e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}.$$
(B.17)

Ao trabalharmos com as transformadas de Fourier para $G_\beta^+(t, \vec{x}, t', \vec{x}')$ e $G_\beta^-(t, \vec{x}, t', \vec{x}')$

$$G_\beta^+(t, \vec{x}, t', \vec{x}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g^+(\omega) e^{-i\omega(t-t')}, \quad (\text{B.18})$$

$$G_\beta^-(t, \vec{x}, t', \vec{x}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g^-(\omega) e^{-i\omega(t-t')}, \quad (\text{B.19})$$

da definição da função de Schwinger, encontramos:

$$c(\omega) = g^+(\omega) - g^-(\omega). \quad (\text{B.20})$$

Das equações (B.12) e (B.13), obtemos:

$$g^\pm(\omega) = e^{\beta\omega} g^\mp(\omega), \quad (\text{B.21})$$

e, então,

$$g^\pm(\omega) = \pm \frac{c(\omega)}{1 - e^{\mp\beta\omega}}. \quad (\text{B.22})$$

Expandindo o fator $(1 - e^{\mp\beta\omega})$ no denominador de $g^\pm(\omega)$ na forma de soma infinita do inverso da temperatura β em relação ao tempo imaginário, voltamos nas integrais de Fourier (B.19) e (B.18):

$$\begin{aligned} G_\beta^\pm(t, \vec{x}, t', \vec{x}') &= \pm \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{1 - e^{\mp\beta\omega}} c(\omega) e^{-i\omega(t-t_0)} \\ &= \pm \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{\mp k\beta\omega} \right) c(\omega) e^{-i\omega(t-t_0)} \\ &= \pm \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega c(\omega) e^{-i\omega(t-t_0 \mp ik\beta)}. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Ao retornarmos na definição de $G^{(1)}$ utilizando (B.17) e (B.23) e explicitamente resolvendo a integral, chegamos na propriedade de que podemos escrever a função de

Green térmica como uma soma infinita de funções de Green no estado de vácuo com o imaginário da temperatura imaginaria na coordenada temporal [18]

$$G_{\beta}^{(1)}(t, \vec{x}, t', \vec{x}') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G^{(1)}(t + ik\beta, \vec{x}, t', \vec{x}') \quad (\text{B.24})$$

Note que como o propagador de Feynman tem como parte imaginaria $G^{(1)}(t, \vec{x}, t', \vec{x}')$, a relação entre o propagador no vácuo e térmica também é a mesma

$$G_{F,\beta}(t, \vec{x}, t', \vec{x}') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_F(t + ik\beta, \vec{x}, t', \vec{x}'). \quad (\text{B.25})$$

Essa propriedade é valida tanto para o espaço-tempo cilíndrico quanto para o universo de Einstein, como pode ser visto na referência [39].

Bibliografia

- [1] E. Hubble, “A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae”, [Proceedings of the National Academy of Sciences](#) **15**, 168 (1929).
- [2] A. Einstein, “Kosmologische betrachtungen zur allgemeinen relativitätstheorie”, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 142 (1917).
- [3] D. N. Spergel et al., “First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters”, [The Astrophysical Journal Supplement Series](#) **148**, 175 (2003).
- [4] N. Aghanim et al., “Planck 2018 results: I. Overview and the cosmological legacy of Planck”, [Astronomy and Astrophysics](#) **641**, A1 (2020).
- [5] A. Einstein, “Zum kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie”, *Albert Einstein: Akademie-Vorträge: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1914–1932*, 361 (2005).
- [6] J. Foster, J. D. Nightingale e J. Foster, *A short course in General Relativity* (Springer, 1995).
- [7] R. M. Wald, *General relativity* (University of Chicago Press, 2010).
- [8] R. Adler, M. Bazin e M. Schiffer, *Introduction to General Relativity* (McGraw-Hill, 1975).
- [9] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics* (Springer Berlin Heidelberg, 1990).
- [10] S. Chatrchyan et al., “Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC”, [Physics Letters B](#) **716**, 30 (2012).
- [11] P. W. Higgs, “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons”, [Physical Review Letters](#) **13**, 508 (1964).
- [12] M. Shokri, J. Sadeghi, M. R. Setare e S. Capozziello, “Nonminimal coupling inflation with constant slow roll”, [International Journal of Modern Physics D](#) **30**, 2150070 (2021).
- [13] A. Linde, “Inflation, quantum cosmology, and the anthropic principle”, em *Science and Ultimate Reality* (Cambridge University Press, 22 de abr. de 2004).
- [14] T. G. Ribeiro, “Radiação de Corpo Negro do Campo Escalar”, diss. de mest. (Universidade Federal de Itajubá, 2014).
- [15] V. Faraoni, “Does the non-minimal coupling of the scalar field improve or destroy inflation?”, arXiv preprint, arXiv:gr-qc/9807066, 1998.

- [16] V. Faraoni, “Nonminimal coupling of the scalar field and inflation”, [Physical Review D](#) **53**, 6813 (1996).
- [17] N. A. Lemos, *Mecânica analítica* (Editora Livraria da Física, 2013).
- [18] N. D. Birrell e P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, 1984).
- [19] C. Isham, “Quantum field theory in curved spacetime: an overview”, em, vol. 302, 1 (1977), p. 114.
- [20] S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time* (Cambridge University Press, 1989).
- [21] V. A. de Lorenci e E. S. Moreira, “Lessons from the Casimir effect on a spinning circle”, [International Journal of Modern Physics A](#) **18**, 2073 (2003).
- [22] J. J. Sakurai e E. D. Commins, *Modern quantum mechanics, revised edition* (American Association of Physics Teachers, 1995).
- [23] E. S. Moreira, “Ambiguities in the local thermal behavior of the scalar radiation in one-dimensional boxes”, [Physical Review D](#) **102**, 085014 (2020).
- [24] G. Aleixo e H. F. S. Mota, “Thermal Casimir effect for the scalar field in flat spacetime under a helix boundary condition”, [Physical Review D](#) **104**, 045012 (2021).
- [25] S. Fulling e S. Ruijsenaars, “Temperature, periodicity and horizons”, [Physics Reports](#) **152**, 135 (1987).
- [26] I. M. Gel’fand e G. E. Shilov, *Generalized functions*. (AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 1964).
- [27] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products* (Academic press, 2014).
- [28] J. L. Synge, *Relativity: the general theory* (Elsevier, 1960).
- [29] A. A. Saharian, “The generalized Abel-Plana formula with applications to Bessel functions and Casimir effect”, arXiv pre-print, arXiv.0708.1187, 2007.
- [30] E. R. Bezerra de Mello e A. A. Saharian, “Finite temperature current densities and Bose-Einstein condensation in topologically nontrivial spaces”, [Physical Review D](#) **87**, 045015 (2013).
- [31] V. A. De Lorenci, L. G. Gomes e E. S. Moreira, “Local thermal behaviour of a massive scalar field near a reflecting wall”, [Journal of High Energy Physics](#) **2015**, 96 (2015).
- [32] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Statistical Physics: Volume 5*, vol. 5 (Elsevier, 2013).
- [33] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics* (American Association of Physics Teachers, 1998).

-
- [34] D. V. Schroeder, *An introduction to thermal physics* (American Association of Physics Teachers, 1999).
- [35] L. E. Reichl, *A modern course in statistical physics* (John Wiley & Sons, 2016).
- [36] W. Research, *Mathematica, Version 14.0*, Champaign, IL, 2024.
- [37] E. S. Moreira Jr e H. da Silva, “Blackbody thermodynamics in the presence of Casimir’s effect”, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2023**, 063102 (2023).
- [38] D. Soares, “O universo estático de Einstein”, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **34**, 1302 (2012).
- [39] J. S. Dowker e R. Critchley, “Vacuum stress tensor in an Einstein universe: Finite-temperature effects”, *Physical Review D* **15**, 1484 (1977).
- [40] A. Barvinsky e G. Vilkovisky, “The generalized Schwinger-DeWitt technique in gauge theories and quantum gravity”, *Physics Reports* **119**, 1 (1985).
- [41] B. S. DeWitt, “Quantum field theory in curved spacetime”, *Physics Reports* **19**, 295 (1975).
- [42] G. Kennedy, R. Critchley e J. Dowker, “Finite temperature field theory with boundaries: Stress tensor and surface action renormalisation”, *Annals of Physics* **125**, 346 (1980).
- [43] R. T. Thompson e J. P. S. Lemos, “DeWitt-Schwinger renormalization and vacuum polarization in d dimensions”, *Physical Review D* **80**, 064017 (2009).
- [44] J. Dowker, “Quantum mechanics on group space and Huygens’ principle”, *Annals of Physics* **62**, 361 (1971).
- [45] L. Schulman, “A Path Integral for Spin”, *Physical Review* **176**, 1558 (1968).
- [46] L. H. Ford, “Quantum vacuum energy in general relativity”, *Physical Review D* **11**, 3370 (1975).
- [47] K. Huang, *Statistical mechanics* (John Wiley & Sons, 2008).
- [48] J. I. Kapusta e C. Gale, *Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications* (Cambridge University Press, 2006).
- [49] M. B. Altaie e J. S. Dowker, “Spinor fields in an Einstein universe: Finite-temperature effects”, *Physical Review D* **18**, 3557 (1978).
- [50] C. A. R. Herdeiro e M. Sampaio, “Casimir energy and a cosmological bounce”, *Classical and Quantum Gravity* **23**, 473 (2005).
- [51] M. D. Schwartz, *Quantum field theory and the standard model* (Cambridge University Press, 2014).

- [52] I. Brevik, K. A. Milton e S. D. Odintsov, “Entropy Bounds in $R \times S^3$ Geometries”, *Annals of Physics* **302**, 120 (2002).
- [53] J. S. Dowker, “Effect of zero modes in statistical mechanics”, *Physical Review D* **37**, 558 (1988).
- [54] J. S. Dowker, “Zero modes, entropy bounds and partition functions”, *Classical and Quantum Gravity* **20**, L105 (2003).
- [55] E. Elizalde e A. C. Tort, “Thermal energy of a scalar field in a one-dimensional compact space”, *Physical Review D* **66**, 045033 (2002).
- [56] M. B. Altaie e M. R. Setare, “Finite-temperature scalar fields and the cosmological constant in an Einstein universe”, *Physical Review D* **67**, 044018 (2003).
- [57] A. Zhuk e H. Kleinert, “Casimir effect at nonzero temperatures in a closed Friedmann Universe”, *Theoretical and Mathematical Physics* **109**, 1483 (1996).
- [58] E. Curiel, “A Primer on Energy Conditions”, em *Towards a Theory of Spacetime Theories* (Springer New York, 2017).
- [59] B. Mashhoon, “Electromagnetic Waves in an Expanding Universe”, *Physical Review D* **8**, 4297 (1973).
- [60] D. W. Olson e W. G. Unruh, “Conversion of electromagnetic to gravitational radiation by scattering from a charged black hole”, *Physical Review Letters* **33**, 1116 (1974).
- [61] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry* (Cambridge University Press, 2019).
- [62] R. Kubo, “Statistical-mechanical theory of irreversible processes. I. General theory and simple applications to magnetic and conduction problems”, *Journal of the physical society of Japan* **12**, 570 (1957).
- [63] P. C. Martin e J. Schwinger, “Theory of many-particle systems. I”, *Physical Review* **115**, 1342 (1959).
- [64] L. S. Brown e G. J. Maclay, “Vacuum stress between conducting plates: an image solution”, *Physical Review* **184**, 1272 (1969).