

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Classificação de sistemas Lotka-Volterra
tridimensionais: uma abordagem geométrico-topológica**

Nataniel Willian da Silva

Orientador: Prof. Dr. Artur César Fassoni

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da
FAPEMIG

ITAJUBÁ, 3 DE MAIO DE 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Classificação de sistemas Lotka-Volterra tridimensionais: uma abordagem geométrico-topológica

Nataniel Willian da Silva

Orientador: Prof. Dr. Artur César Fassoni

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

ITAJUBÁ – MG

3 DE MAIO DE 2024

Esta dissertação é dedicada à Dona Zita.

Agradecimentos

A Deus pela vida e as oportunidades.

A meus pais Joaquim e Adailza, por todo o esforço e pelos ensinamentos.

À minha namorada Gabriela pelo apoio e por todos os momentos de alegria ao seu lado.

Aos meus familiares que me apoiaram nessa jornada de graduação e pós graduação.

Aos meus amigos que me apoiaram.

Aos meus amigos e colegas de Mestrado pelas risadas e momentos compartilhados e pelo apoio nessa jornada. Em especial ao Eric, Gabrieli e Liomar.

Ao Artur, meu orientador e amigo, pela paciência e pela grande ajuda por tantos anos. Agradeço por ter acreditado em mim e por ser parte da minha vida e me orientado não somente em matemática.

Ao meu coorientador Denis pela ajuda e disposição sempre.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação.

Ao professor Luis Fernando, coordenador do programa, pela ajuda indispensável e excelência. Agradeço também por sempre nos motivar a sermos melhores.

Ao pessoal da Biblioteca que sempre me ajudava a encontrar os livros.

Aos funcionários do IMC pela ajuda e suporte.

Aos membros da banca, Fabio Scalco, Fabio Chalub e Lucy por aceitarem o convite. Agradeço pela leitura, sugestões e correções.

À FAPEMIG pelo apoio financeiro.

*“Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, e não é o domínio, mas o ato de chegar
lá que dá o maior prazer.”*

—Karl Friedrich Gauss

Resumo

Este trabalho tem por objetivo classificar os retratos de fase estruturalmente estáveis apresentados pelos sistemas competitivos Lotka-Volterra tridimensionais, dados pelo sistema de equações diferenciais

$$x'_i = F_i(x) = x_i \left(b_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

onde x_1, x_2, x_3 representam três populações competindo por recursos, $a_{ij} > 0$ são os coeficientes de competição da espécie j contra a espécie i e $b_i > 0$ é a taxa de reprodução da espécie i . O trabalho é baseado na análise feita por Mary Lou Zeeman em sua tese de doutorado intitulada *Hopf bifurcations in competitive three dimensional Lotka-Volterra systems*, de 1993, e em seus artigos posteriores [1, 2].

A ideia inicial do estudo consiste na observação de que os possíveis retratos de fase são, inicialmente, determinados pelas posições relativas das isóclinas do sistema (1). Além disso, usa-se um resultado de Morris Hirsch [3], que garante que todas as trajetórias do sistema (1) são atraídas para uma superfície de dimensão dois contendo os equilíbrios de (1). Esta superfície é homeomorfa ao simplexo unitário em \mathbb{R}^3 , e é denominada de simplexo de suporte e denotada por Σ . Com isto, a dinâmica é restrita a duas dimensões e pode-se aplicar o Teorema de Poincaré-Bendixson para garantir que os atratores do sistema serão pontos de equilíbrio ou ciclos limites em Σ .

A partir desta abordagem, mostra-se que existem 33 classes de equivalência representando 33 retratos de fase estruturalmente distintos, cuja união é um conjunto aberto

denso no espaço de todos sistemas Lotka-Volterra tridimensionais. Para obter estas 33 classes, foram usadas técnicas de combinatória e ação de grupos, o teorema de Poincaré-Hopf para determinar a existência e a natureza de pontos equilíbrio interiores em Σ , e resultados que relacionam a fronteira das bacias de atração de equilíbrios assintoticamente estáveis com as variedades estáveis de pontos de sela que estejam em tal fronteira. Das 33 classes encontradas, 25 possuem apenas pontos de equilíbrio como conjuntos limites. Em 2 das 8 classes restantes, usando uma generalização do critério de Dulac para sistemas tridimensionais, prova-se que não existem órbitas periódicas. Por fim, para o estudo das demais 6 classes, mostra-se que os autovalores da matriz jacobiana associada ao ponto de equilíbrio interior cruzam o eixo imaginário e, usando o Teorema de Bifurcação de Hopf, garante-se a existência de órbitas periódicas no interior de Σ . Por fim, apresentamos um breve panorama da pesquisa atual concernente ao estudo do número máximo de ciclos limites em cada uma dessas 6 classes, que é atualmente desconhecido.

Palavras-chave: Lotka-Volterra, Análise qualitativa, Bifurcações de Hopf, Estabilidade estrutural.

Abstract

The aim of this work is to classify the structurally stable phase portraits presented by three-dimensional competitive Lotka-Volterra systems given by the system of differential equations

$$x'_i = F_i(x) = x_i \left(b_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

where x_1, x_2, x_3 represent three populations competing for resources, $a_{ij} > 0$ is the competition coefficient of species j against species i , and $b_i > 0$ is the reproduction rate of species i . The work is based on the analysis made by Mary Lou Zeeman in her doctoral thesis titled *Hopf bifurcations in competitive three-dimensional Lotka-Volterra systems*, 1993, and in her subsequent articles [1, 2].

The initial idea of the study consists of the observation that the possible phase portraits are, initially, determined by the relative positions of the nullclines of system (2). Furthermore, a result by Morris Hirsch [3] is used, which guarantees that all trajectories of system (2) are attracted to a two-dimensional surface containing the equilibria of (2). This surface is homeomorphic to the unit simplex in \mathbb{R}^3 and is called the support simplex, denoted by Σ . With this, the dynamics is restricted to two dimensions and the Poincaré-Bendixson Theorem can be applied to ensure that the system's attractors will be equilibrium points or limit cycles in Σ .

From this approach, it is shown that there are 33 equivalence classes representing 33 structurally distinct phase portraits whose union is an open dense set in the space of all three-dimensional Lotka-Volterra systems. To obtain these 33 classes, combinatorial

techniques and group actions were used and also the Poincaré-Hopf theorem to determine the existence and nature of interior equilibrium points in Σ , and results that relate the boundary of the basins of attraction of asymptotically stable equilibria with the stable manifolds of saddle points that are on such boundary. Of the 33 classes found, 25 have only equilibrium points as limit sets. In 2 of the remaining 8 classes, using a generalization of Dulac's criterion for three-dimensional systems, it is proven that there are no periodic orbits. Finally, for the study of the remaining 6 classes, it is shown that the eigenvalues of the jacobian matrix associated with the interior equilibrium points cross the imaginary axis and, using a Hopf Bifurcation Theorem, the existence of periodic orbits inside Σ is guaranteed. Lastly, we present a brief overview of the current research concerning the study of the maximum number of limit cycles in each of these 6 classes, which is currently unknown.

Keywords: Lotka-Volterra, Qualitative analysis, Hopf bifurcations, Structural stability.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	vi
Sumário	viii
Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
2 O Teorema de Hirsch e o Simplexo Suporte	7
2.1 O Teorema de Hirsch	7
3 Análise Geométrica dos Sistemas Lotka-Volterra Bidimensionais	13
3.1 Análise do sistema Lotka-Volterra bidimensional	13
4 Análise Geométrica dos Sistemas Lotka-Volterra Tridimensionais	31
4.1 Isóclinas e a estabilidade dos equilíbrios R_i e Q_i	31
4.1.1 Estudo dos equilíbrios R_i	33
4.1.2 Estudo dos equilíbrios Q_i	34
4.2 As classes isóclinas	36
4.3 Classes geradoras	42

4.4	Análise geométrica das classes derivadas	51
4.5	Teorema de Poincaré-Hopf e existência de pontos de equilíbrio interiores . .	59
4.6	Análise qualitativa-topológica via bacias de atração	62
4.7	As 33 classes isóclinas-estáveis	63
4.8	Exemplos	67
5	Bifurcações de Hopf nos Sistemas Lotka-Volterra Tridimensionais	80
5.1	Representantes sem órbitas periódicas	80
5.2	Famílias sem bifurcações de Hopf	90
5.2.1	As classes 32 e 33	98
5.3	Famílias com bifurcações de Hopf	106
5.4	Exemplos	117
6	Estado Atual das Pesquisas nas Classes 26 a 31	121
	Conclusões	125
	Referências Bibliográficas	127
	Anexo A Teoria dos Índices	131
	Anexo B O Teorema da Fronteira da Bacia de Atração	134
	Anexo C Bifurcações de Hopf	137

Lista de Figuras

1.1	Representação gráfica da dinâmica do modelo de crescimento logístico (1.2).	3
3.1	Regiões definidas pelas partições de \mathbb{R}_+^2 pelas retas N_1 e N_2 .	16
3.2	Campo e retrato de fase para o Caso 1.1. Sobre uma ótica biológica uma única população sobreviveria enquanto a outra seria extinta.	19
3.3	Campo e retrato de fase para o Caso 1.2. Sobre uma ótica biológica uma única população sobreviveria enquanto a outra seria extinta.	20
3.4	Regiões definidas pelas partições usando as isóclinas. Neste caso o desenvolvimento de uma espécie depende da condição inicial.	21
3.5	Regiões definidas pelas partições usando as isóclinas. Todas as soluções com condições iniciais interiores em \mathbb{R}_+^2 convergem para o ponto interior P .	22
3.6	Classes isóclinas em $CLV(2)$.	23
3.7	Campos F e \tilde{F} isóclinas equivalentes.	26
3.8	Homeomorfismo h .	27
3.9	Imagens inversas de V para um sistema na classe isóclina 3.	28
3.10	Construção do Homeomorfismo H .	29
4.1	Posição relativa do equilíbrio R_i em relação ao plano N_j .	34
4.2	O comportamento em cada um dos pontos de equilíbrio em $\partial\Sigma$.	37
4.3	O comportamento no simplexo suporte Σ representado no simplexo unitário. A notação de ponto de equilíbrio é como na Figura 4.2, enquanto o símbolo \odot representa região interior de Σ possui dinâmica desconhecida.	38
4.4	Representação do simplexo.	41

4.5	Exemplos de possíveis dinâmicas restritas à $\partial\Sigma$	42
4.6	Fronteiras de simplexes possíveis com 1 equilíbrio do tipo Q_i	45
4.7	Fronteiras de simplexes possíveis com 2 equilíbrios do tipo Q_i	45
4.8	Fronteiras de simplexes possíveis com 3 equilíbrios do tipo Q_i	46
4.9	Fronteiras de simplexes possíveis sem nenhum equilíbrio do tipo Q_i	46
4.10	Classes geradoras das combinações qualitativas na fronteira de Σ	47
4.11	Exemplo das possíveis classes derivadas da classe <i>III</i>	48
4.12	50 Classes derivadas.	50
4.13	Representação da classe geradora <i>IX</i>	52
4.14	Configuração de isóclinas em cada plano coordenado seguindo a classe geradora <i>IX</i> . Da esquerda para a direita: plano $G_3 = X_1 \times X_2$, plano $G_1 = X_2 \times X_3$ e o plano $G_2 = X_1 \times X_3$, respectivamente.	53
4.15	Ilustração da configuração de isóclinas para Q_1 e Q_2 na classe geradora <i>IX</i> . À esquerda a dinâmica restrita ao plano G_1 e à direita a dinâmica restrita ao plano G_2	54
4.16	Representação em três dimensões da classe derivada <i>IX</i> – 1, a única classe derivada viável gerada pela classe geradora <i>IX</i> . Os planos isóclinos e as retas n_i estão coloridas e destacadas na figura.	55
4.17	Tabela com representação dos possíveis configurações de “lados” G_j e G_k do simplexo e seus efeitos no comportamento do equilíbrio Q_i (quando existe) no lado restante. Considere também as reflexões que possuem o mesmo comportamento. O símbolo \circ representa equilíbrios Q_i do tipo repulsor com a dinâmica restrita à fronteira de Σ . O símbolo \bullet representa equilíbrios Q_i do tipo atrator com a dinâmica restrita à fronteira de Σ	56
4.18	Possíveis comportamentos dos equilíbrios planares de dinâmicas geradas pela classe geradora <i>XIV</i>	57
4.19	Representação da classe geradora <i>XIV</i> quando consideramos Q_1 sendo repulsor. Observe que obtemos a classe derivada <i>XIV</i> – 1.	58
4.20	O processo para o cálculo de $I(p)$	59

4.21	Projeção e reflexão da classe derivada $V - 1$ na esfera S^2	60
4.22	Representação da classe derivada $XII - 4$. Observe que o ponto de equilíbrio interior P do tipo sela está contido na fronteira da bacia de atração de R_1 , mas $W^s(P) \not\subseteq \partial B(R_1)$	63
4.23	33 classes isóclinas-estáveis para $CLV(3)$. O símbolo \odot representa uma região de dinâmica desconhecida. O símbolo \bullet representa um ponto de equilíbrio atrator e o símbolo \circ representa um ponto de equilíbrio repulsor.	65
4.24	Retrato de fase do sistema Lotka-Volterra tridimensional com os parâmetros dados em (4.3).	68
4.25	Retrato de fase do sistema Lotka-Volterra tridimensional com os parâmetros dados em (4.4).	69
4.26	Comportamento qualitativo do sistema usando nos grupos $(S1)$ e $(S2)$ segundo o estudo dos seus parâmetros.	76
4.27	Comportamento qualitativo do sistema usando nos grupos $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$, $(T4)$, $(T5)$ e $(T6)$ segundo o estudo dos seus parâmetros.	79
5.1	Classes isóclinas 26-33 sem órbitas periódicas.	90
5.2	Retrato de fase do sistema Lotka-Volterra tridimensional com os parâmetros dados em (5.25).	118
5.3	Simulações na classe 27.	119
A.1	Exemplo de índices de curvas.	132
C.1	Bifurcação de Hopf.	139

Lista de Tabelas

4.1	Coefficientes de competição.	71
4.2	Inequações entre os coeficientes de competição.	71
4.3	22 parametrizações válidas para os parâmetros c_{ij}	72
4.4	Valores dos parâmetros para diferentes parametrizações sem tratamento.	73
4.5	Valores dos parâmetros para diferentes parametrizações durante o tratamento. O símbolo “–” na coluna “classe isóclina” significa que o sistema com aquela parametrização é um caso degenerado.	74

Capítulo 1

Introdução

Atualmente, modelos matemáticos são frequentemente empregados para entender fenômenos na natureza. Esses modelos simplificam e destacam o que é importante sobre um determinado fenômeno. A aplicação de métodos matemáticos na área da biologia é especialmente interessante, pois permite a análise, compreensão e previsão do comportamento de sistemas biológicos. Por exemplo, usamos modelos matemáticos para entender como populações de animais ou plantas crescem e interagem em seu ambiente.

Um exemplo disso é o modelo Lotka-Volterra formulado nos primeiros anos do século XX de maneira independente por Alfred J. Lotka (1880-1949) [4, 5] e Vito Volterra (1860-1940) [6]. Eles usaram equações matemáticas para criar um modelo que nos ajuda a entender como as populações de presas e predadores interagem em um determinado ambiente. Apresentamos a seguir um breve panorama sobre modelos populacionais e suas características até chegarmos ao modelo de Lotka-Volterra n -dimensional.

Uma equação diferencial que modela o crescimento de uma população, cujo o número de indivíduos no tempo t é $x(t)$, é dada por

$$\dot{x} = xN(x), \quad x \geq 0, \tag{1.1}$$

onde $N(x)$ é chamada a taxa de crescimento *per capita* e sua expressão depende das hipóteses biológicas sobre a população. Aqui $\dot{x}(t)$ é a derivada de $x(t)$ em relação ao tempo.

O caso mais simples é aquele em que a taxa de crescimento é constante, $N(x) = r$. Neste caso equação (1.1) fica

$$\dot{x} = rx, \quad x \geq 0,$$

cuja solução é $x(t) = x(0)e^{rt}$. Assim, temos crescimento exponencial ilimitado se $r > 0$, decaimento exponencial para zero se $r < 0$ e população constante se $r = 0$. Esse tipo de crescimento exponencial é válido para uma população real apenas por um curto período de tempo. Em modelos mais realistas, o crescimento exponencial inicial é seguido de uma desaceleração e saturação, devidas ao fato dos recursos de um ambiente serem limitados. Para capturar essa dinâmica, consideramos o caso em que a taxa *per capita* de crescimento populacional diminui linearmente com o aumento da densidade populacional x , o que pode ser descrito por $N(x) = r(1 - x/k)$. Assim, o modelo resultante é conhecido como modelo logístico ou modelo de Verhulst e é dado por

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right), \quad x \geq 0, \tag{1.2}$$

onde r ainda representa a taxa de crescimento populacional e k representa a capacidade de suporte do ambiente para esta população. Nesta equação, o fator de crescimento exponencial rx é reduzido pelo fator rx^2/k . Isso implica em duas situações: para x pequeno, a dinâmica populacional assemelha-se ao crescimento exponencial observado anteriormente; para x grande, os membros da espécie competem entre si por recursos limitados.

A Figura 1.1 ilustra o comportamento de soluções típicas de (1.2). Para $x(0) < k$, $x(t)$ aumenta e se aproxima de k quando t se aproxima do infinito. Para x pequeno, o crescimento inicial é semelhante ao exponencial. Quando $x(0) > k$, a população diminui e se aproxima de k à medida que t tende para o infinito.

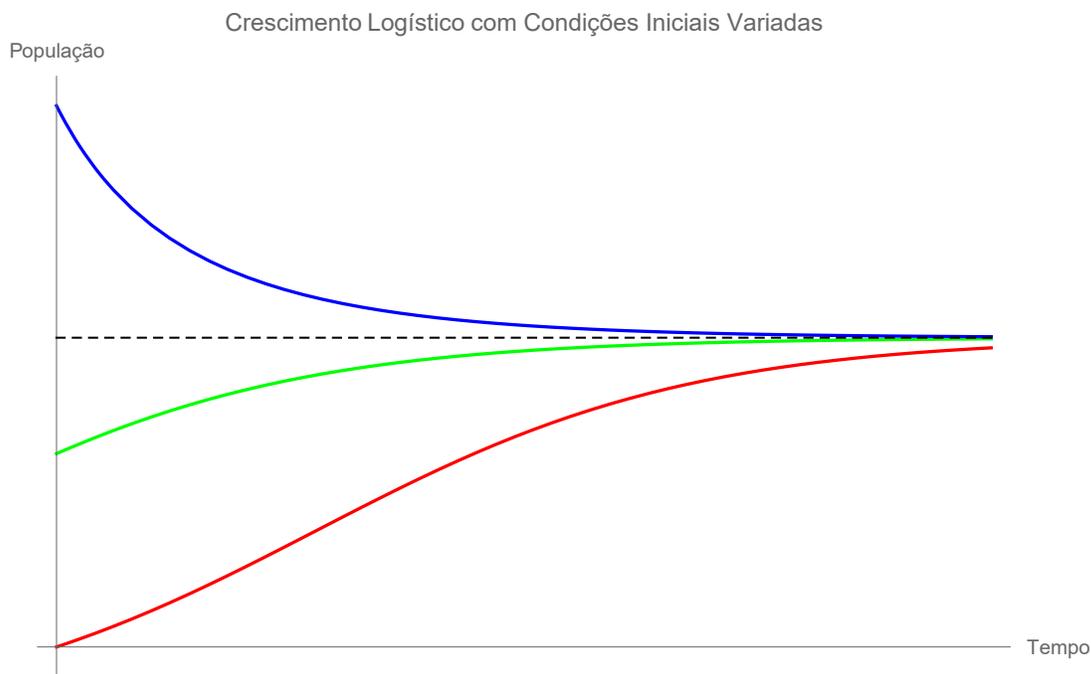


Figura 1.1: Representação gráfica da dinâmica do modelo de crescimento logístico (1.2).

O modelo de Verhulst considera uma população isolada sem interação com outras. Contudo, nos ecossistemas reais, várias espécies interagem de maneiras complexas. Assim, modelos para interação de várias populações são importantes para explorar fenômenos como coexistência, extinção e a influência de recursos compartilhados no crescimento populacional. Para descrever as interações entre n populações, utilizamos o modelo generalizado:

$$\dot{x}_i = F_i(x) = x_i N_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

onde cada x_i representa a abundância da população i e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Assim, a taxa de crescimento *per capita* $N_i(x)$ de cada população i , não depende apenas dela mesma, mas das interações com as demais

Um dos mais importantes modelos populacionais n -dimensionais é o modelo Lotka-Volterra. No contexto anterior, o modelo Lotka-Volterra generaliza o modelo de Verhulst e assume que a taxa de reprodução *per capita* de cada população diminui ou aumenta linearmente não só em função da própria população, mas também de cada uma das outras

populações, ou seja,

$$N_i(x) = r_i \left(b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Assim, o modelo Lotka-Volterra para n populações pode ser escrito como

$$\dot{x}_i = F_i(x) = x_i N_i(x) = r_i x_i \left(b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

onde cada coeficiente a_{ij} representa o efeito da população j na população i , o coeficiente b_i é o coeficiente de crescimento da população i na ausência das demais populações.

O modelo Lotka-Volterra é especialmente útil no contexto biológico. Suas aplicações vão desde modelagem de crescimento de populações de presas e predadores, passando por dinâmica de micro-organismos, até o tratamento de câncer. Uma das características principais do modelo Lotka-Volterra está na capacidade de nos mostrar como diferentes espécies se relacionam na natureza e como mudanças em uma população podem afetar todas as demais. Sua simplicidade e versatilidade são motivações suficientes para explorar o modelo. Mais detalhes sobre o modelo Lotka-Volterra podem ser encontrados em textos que abordam Biologia Matemática como o livro de Leah Edelstein-Keshet [7], o livro de Hofbauer e Sigmund [8], e o texto especializado em Sistemas Lotka-Volterra, de Y. Takeuchi [9].

A dinâmica de sistemas Lotka-Volterra bidimensionais ($n = 2$) é bem compreendida: no caso genérico, não há órbitas periódicas, e todas as trajetórias limitadas do fluxo convergem para um ponto de equilíbrio. Para $n > 3$, pouco se sabe sobre a dinâmica dos sistemas Lotka-Volterra. Existem exemplos isolados de sistemas com órbitas periódicas, assim como sistemas com oscilações não periódicas.

O objetivo desta dissertação é estudar os sistemas Lotka-Volterra com $n = 3$. Mais especificamente, pretendemos classificar os retratos de fase dos sistemas Lotka-Volterra tridimensionais com base em critérios algébricos dados por relações entre os parâmetros a_{ij} e b_i . Nosso estudo se baseia nos trabalhos de Mary Lou Zeeman, que no fim do século

passado classificou os sistemas Lotka-Volterra tridimensionais em 33 classes distintas [1]. Essa classificação proporciona uma compreensão simples, porém completa das diferentes possibilidades que três populações interagindo podem seguir, baseando-se apenas no estudo dos parâmetros de reprodução e competição.

Iremos explorar em detalhes os artigos de Zeeman [1, 2] que utilizam de maneira muito interessante vários resultados de topologia, geometria e teoria qualitativa. No trabalho original, particularmente, a etapa descrevendo como se chega a cada uma das 33 classes se apresenta um tanto resumida e sem muitos detalhes, de modo que pode ser um pouco difícil entender como obter estes resultados. Deste modo, apresentamos um foco especial a esta parte dedicada à existência e contagem das classes, visando esclarecer os pontos omitidos. Para isto, introduzimos uma notação e métodos próprios para chegar ao resultado de Zeeman.

Identificaremos as 33 classes estáveis, e mostraremos que em 25 delas todos os conjuntos limites têm a forma de pontos de equilíbrio. Aprofundaremos nossa análise das 8 classes restantes e mostraremos que 2 delas não possuem órbitas periódicas. Por fim, provaremos alguns resultados que garantem a existência de Bifurcações de Hopf nas seis classes restantes, o que implica na existência de órbitas periódicas em cada uma delas.

Ao longo das demonstrações dos resultados nesta dissertação, iremos assumir conhecidos conceitos e definições da Teoria Qualitativa de EDOs, como sistema autônomo, solução, fluxo, ponto regular, órbita de um ponto, semiórbitas positiva e negativa, conjuntos α e ω -limite, ponto de equilíbrio, linearização, matriz jacobiana, estabilidade local, invariância, Teorema de Hartman-Grobman, Teorema de Poincaré-Bendixon, entre outros conceitos que podem ser revisados em [10] e [11]. Alguns outros conceitos e resultados mais específicos, que serão necessários ao longo de algumas demonstrações, estão incluídos nos Anexos.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2, apresentamos o Teorema de Hirsch e sua aplicação a sistemas Lotka-Volterra. No Capítulo 3 faremos uma análise do modelo Lotka-Volterra bidimensional. No Capítulo 4 estenderemos a análise do capítulo anterior para os sistemas Lotka-Volterra tridimensionais e apresentaremos as 33

classes isóclinas estáveis. No Capítulo 5 trataremos da existência de Bifurcações de Hopf nas classes 26-33. No Capítulo 6 daremos um breve panorama da pesquisa sobre ciclos limites nas classes 26-31. Por fim, apresentamos as considerações finais em Conclusões. As referências bibliográficas são listadas na ordem em que elas são citadas no texto.

Capítulo 2

O Teorema de Hirsch e o Simplexo

Suporte

Neste capítulo temos como objetivo apresentar o Teorema de Hirsch [3, 12], que sustenta toda a teoria que será desenvolvida ao longo desta dissertação. Primeiro, enunciaremos o Teorema de Hirsch de uma maneira geral. Depois, mostraremos como ele pode ser aplicado ao modelo Lotka-Volterra.

2.1 O Teorema de Hirsch

Definição 2.1. *Dado o sistema*

$$\dot{x}_i = F_i(x) = x_i N_i(x); \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

a matriz $DN = [\partial N_i / \partial x_j]$ com $j = 1, 2, \dots, n$, é chamada matriz comunidade.

As derivadas parciais $\partial N_i / \partial x_j$ nos fornecem informações sobre a interação entre as populações i e j . Denotando por $\text{sgn}(z)$ o sinal do número real z , isto é, $\text{sgn}(z) = -1$ se $z < 0$, $\text{sgn}(z) = 0$ se $z = 0$ e $\text{sgn}(z) = 1$ se $z > 0$, temos o seguinte. Assumindo $\text{sgn}(\partial N_i / \partial x_j) \neq 0$ para todos i e j , se $\text{sgn}(\partial N_i / \partial x_j) \neq \text{sgn}(\partial N_j / \partial x_i)$, então as populações i e j possuem relação do tipo presa-predador. Se $\text{sgn}(\partial N_i / \partial x_j) = \text{sgn}(\partial N_j / \partial x_i)$, então a

relação entre as populações i e j é de competição caso o sinal seja negativo, e de cooperação caso o sinal seja positivo.

No que segue abaixo, e em geral em toda a dissertação, F é um campo vetorial definido em um aberto U de \mathbb{R}^n .

Definição 2.2. *O sistema $\dot{x} = F(x)$ é dito competitivo se $\partial F_i / \partial x_j \leq 0$ para todo $x \in U$ e $i \neq j$, e cooperativo se $\partial F_i / \partial x_j \geq 0$ para todo $x \in U$ e $i \neq j$, onde F_i e x_i são componentes de F e x , respectivamente.*

Definição 2.3. *O sistema $\dot{x} = F(x)$ é dito dissipativo se houver um conjunto compacto invariante S que atrai uniformemente cada conjunto compacto de condições iniciais, ou seja, para todo compacto $K \subset U$ e todo $x_0 \in K$, tem-se $\omega(x_0) \subset S$, onde $\omega(x_0)$ é o conjunto ω -limite de x_0 .*

Definição 2.4. *Dado dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$, escrevemos*

$$x < y \quad \text{se } x_i < y_i \text{ para todo } i.$$

Também escrevemos

$$x \leq y \quad \text{se } x_i \leq y_i \text{ para todo } i.$$

Ainda, um vetor $w \in \mathbb{R}^n$ é estritamente positivo se $w_i > 0$.

Definição 2.5. *Dois pontos $u, v \in \mathbb{R}^3$ estão relacionados se $u - v$ ou $v - u$ for estritamente positivo, e são não-relacionados caso contrário.*

Definição 2.6. *Um conjunto S é chamado de balanceado se nenhum par de pontos distintos em S está relacionado.*

Teorema 2.7. *(Teorema de Hirsch). Seja $\dot{x} = F(x) = x_i N_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, um sistema competitivo e dissipativo em \mathbb{R}_+^n , onde a origem 0 é um ponto de equilíbrio repulsor, e suponha que DN possui entradas estritamente negativas em todos os demais (uma quantidade finita) pontos de equilíbrio. Então, toda trajetória em $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ é assintótica a uma trajetória em Σ , onde Σ é uma subvariedade balanceada e Lipschitz, homeomorfa ao simplexo em \mathbb{R}_+^n via projeção radial.*

Vamos agora definir os sistemas Lotka-Volterra n -dimensionais e aplicaremos o Teorema de Hirsch obtendo, assim, a existência do simplexo de suporte Σ para estes sistemas.

Definição 2.8. *Um sistema Lotka-Volterra n -dimensional é um sistema dado pelas equações diferenciais*

$$\dot{x}_i = x_i \left(b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

com $b_i \geq 0$ e $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para $i, j = 1, 2, \dots, n$. O espaço de fase de (2.2) é o conjunto

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Note que a matriz $A = [a_{ij}]$ é a matriz comunidade DN . Assim, se a relação entre a população i e a população j com $j \neq i$ for de competição ou cooperação, então o padrão de sinais de (a_{ij}, a_{ji}) torna-se $(-, -)$ ou $(+, +)$, respectivamente. Para o caso de predador-presa, temos $(+, -)$ ou $(-, +)$. Os elementos diagonais a_{ii} de A são geralmente não positivos, uma vez que descrevem a relação entre as mesmas espécies e refletem o recurso limitado.

Definição 2.9. *Um sistema Lotka-Volterra competitivo n -dimensional é um sistema dado pelas equações diferenciais*

$$\dot{x}_i = x_i \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

com $b_i > 0$ e $a_{ij} > 0$ para $i, j = 1, 2, \dots, n$. O espaço de fase de (2.3) é o conjunto

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Definição 2.10. *O espaço dos sistemas Lotka-Volterra competitivos n -dimensionais é dado por*

$$CLV(n) = \{F \in X(\mathbb{R}_+^n) : F_i(x) = x_i(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j); a_{ij}, b_j > 0, i, j = 1, 2, \dots, n\},$$

onde $X(\mathbb{R}_+^n)$ denota o conjunto dos campos vetoriais definidos em \mathbb{R}_+^n .

A seguir enunciaremos o famoso princípio de comparação de Kamke [13, 8], que utilizaremos para provar o resultado principal desta seção. Em termos simples, o princípio de Kamke nos diz que o fluxo de um sistema cooperativo preserva uma certa ordenação de vetores.

A forma do princípio de comparação de Kamke que usaremos é a seguinte.

Teorema 2.11. (*Princípio de comparação de Kamke*) *Sejam $x(t), y(t)$ soluções do sistema (2.1) definidas para $a \leq t \leq b$.*

(A) *Suponha que o sistema é cooperativo. Se $x(a) < y(a)$, então $x(b) < y(b)$.*

(B) *Suponha que o sistema é competitivo. Se $x(a)$ e $y(a)$ são não relacionados, então $x(b)$ e $y(b)$ também são não relacionados.*

Com estas ferramentas, o Teorema de Hirsch pode ser aplicado aos sistemas Lotka-Volterra competitivos n -dimensionais. Este é o conteúdo do seguinte teorema.

Teorema 2.12. *Seja $F \in CLV(n)$. Então, toda trajetória do sistema $\dot{x} = F(x)$ em $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ é assintótica a uma trajetória em Σ , onde Σ é uma subvariedade Lipschitz homeomorfa ao simplexo unitário em \mathbb{R}_+^n via projeção radial.*

Demonstração.

Dado $F \in CLV(n)$, temos $F_i(x) = x_i N_i(x)$ com

$$N_i(x) = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j.$$

Temos que F é competitivo, pois

$$\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} = -a_{ij} x_i < 0, \text{ para } i \neq j.$$

Além disso, temos que

$$\frac{\partial N_i(x)}{\partial x_j} = -a_{ij} < 0, \text{ para } i \neq j.$$

Em particular, DN possui entradas estritamente negativas em todos pontos de equilíbrio de F , com exceção da origem.

Calculando todas as derivadas parciais de F , temos

$$\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_i} = b_i - a_{ii}x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \text{ e } \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} = -x_i a_{ij}, \text{ } i \neq j.$$

Assim, a matriz jacobiana $J_F(x) = [\partial F_i(x)/\partial x_j]$ calculada na origem é uma matriz diagonal e todos os seus autovalores são positivos (dados por b_i), de modo que a origem é um equilíbrio repulsor para o campo F .

Escrevendo

$$F_i(x) = x_i \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right), \quad a_{ij}, b_i > 0,$$

vemos que para $|x|$ suficientemente grande, $F(x)$ é um vetor negativo. Vamos mostrar que o fluxo de $-F$, $\phi_{-t}(x)$, é tal que $|\phi_{-t}(x)|$ é monotonamente crescente com t , e $\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi_{-t}(x)| = \infty$, tornando o sistema dissipativo.

De fato, o princípio de Kamke é aplicado aqui ao campo $-F$, que é cooperativo, uma vez que F é competitivo, por hipótese. Note que, para $|x|$ suficientemente grande, F é negativo, então, $-F$ é positivo. Assim, existe $r > 0$ tal que $|x| > r$ implica $-F(x) > 0$. Seja $\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{R}_+^n : |x| > r\}$. A região \mathcal{S} é invariante por $-F$, pois $-F$ aponta para o interior dessa região, pois $-F$ é positivo. Tome um $x \in \mathcal{S}$. Sejam $t_2 > t_1 > 0$. Vamos mostrar que $|\phi_{-t_2}(x)| > |\phi_{-t_1}(x)|$ o que vai implicar em $|\phi_{-t}(x)|$ ser monotonamente crescente. De fato, pelo Teorema do Valor Médio, existe $t^* \in (t_1, t_2)$ tal que $\phi_{-t_2}(x) - \phi_{-t_1}(x) = d/dt(\phi_{-t}(x))|_{t=t^*}(t_2 - t_1)$, onde $d/dt(\phi_{-t}(x))|_{t=t^*}$ é a derivada de $\phi_{-t}(x)$ com respeito a t calculada em $t = t^*$. Pela definição de fluxo temos que $d/dt(\phi_{-t}(x))|_{t=t^*} = -F(\phi_{-t^*}(x))$ que é positivo, pois pertence a região \mathcal{S} . Como $t_2 > t_1$, segue que $\phi_{-t_2}(x) - \phi_{-t_1}(x) > 0$. Isso mostra que $|\phi_{-t}(x)|$ é monótona crescente.

Portanto, $\dot{x} = F(x)$ é um sistema dissipativo. Agora, podemos aplicar o Teorema Hirsch

e o resultado segue. ■

Assim, ao aplicarmos o Teorema de Hirsch nos sistemas Lotka-Volterra n -dimensionais obtemos o conjunto Σ que será a base de toda a nossa discussão nesta dissertação.

Definição 2.13. *Dado $F \in CLV(n)$, chamaremos de simplexo suporte a subvariedade Σ dada pelo Teorema 2.12, que é uma subvariedade Lipschitz homeomorfa ao simplexo unitário em \mathbb{R}_+^n via projeção radial, e, tal que, toda trajetória do sistema $\dot{x} = F(x)$ em $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ é assintótica a uma trajetória em Σ .*

Em decorrência do Teorema 2.12, o simplexo suporte Σ de um dado $F \in CLV(n)$ possui dimensão $n - 1$ e contém todos os conjuntos ω -limite das condições iniciais fora da origem e, conseqüentemente, contém todos os pontos de equilíbrio do sistema, com exceção da origem. Portanto, a dinâmica restrita à Σ nos fornece um entendimento completo da dinâmica do sistema no espaço todo.

Além disso, ele é homeomorfo a um simplexo unitário, o que facilita nossa compreensão da dinâmica global de maneira simplificada. Para os sistemas Lotka-Volterra com dimensão $n = 2$, o simplexo suporte será uma curva, e os conjuntos limites são pontos de equilíbrio.

Para $n = 3$, o simplexo suporte será uma superfície bidimensional, homeomorfa à parte do plano $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ situada em \mathbb{R}_+^3 . Além disso, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, todo conjunto limite é um ponto de equilíbrio, uma órbita periódica ou uma união finita de pontos de equilíbrio unidos por órbitas regulares. Esses resultados serão de extrema importância nos próximos capítulos.

Capítulo 3

Análise Geométrica dos Sistemas Lotka-Volterra Bidimensionais

O objetivo deste capítulo é compreender em duas dimensões como a análise das isóclinas dos sistemas Lotka-Volterra competitivo determina completamente os possíveis retratos de fase. Para obtermos os pontos de equilíbrio, basta encontrar as interseções das isóclinas do sistema. Para analisar a estabilidade destes, em dimensão $n = 2$, os cálculos algébricos do processo de linearização e estudo dos autovalores seriam possíveis e factíveis. No entanto, para dimensões maiores, o mesmo método é inviável. Dessa forma, recorreremos à análise geométrica das isóclinas e do fluxo do sistema para determinar a estabilidade dos equilíbrios e, assim, definir uma relação de equivalência que divide $CLV(2)$ em classes com diferentes configurações de isóclinas. Denominaremos essa relação de equivalência de “Equivalência por Isóclinas”. Vamos mostrar que as classes de equivalência obtidas por essa relação não apenas nos fornecem a localização dos equilíbrios, mas também o retrato de fase completo do sistema.

3.1 Análise do sistema Lotka-Volterra bidimensional

Recordemos agora o que é a i -ésima isóclina de um sistema de equações diferenciais.

Definição 3.1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$, aberto, sejam $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ e um campo vetorial*

$F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x)) \in C^1(U)$. Dado o sistema $\dot{x}_i = F_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, a i -ésima isóclina do sistema é o conjunto de pontos x tal que $F_i(x) = 0$.

Em duas dimensões, o sistema Lotka-Volterra competitivo é escrito como

$$\dot{x}_i = F_i(x) = x_i(b_i - (Ax)_i), \quad (3.1)$$

onde $x = (x_1, x_2)$, $F = (F_1, F_2)$ e $A = [a_{ij}]$ é uma matriz 2×2 com entradas estritamente positivas. Aqui e em toda a dissertação, a notação $(Ax)_i$ refere-se à i -ésima componente do vetor (Ax) , que é o vetor resultante da aplicação da matriz A ao vetor x .

Começamos determinando as isóclinas de (3.1), que são os conjuntos de pontos onde $F_i(x) = 0$, ou seja,

$$x_i(b_i - (Ax)_i) = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \text{ ou } b_i = (Ax)_i.$$

Portanto, as isóclinas de (3.1) são

$$I_1 = N_1 \cup X_2,$$

$$I_2 = N_2 \cup X_1,$$

onde

$$N_1 = \{(x_1, x_2): a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1\};$$

$$N_2 = \{(x_1, x_2): a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2\};$$

$$X_1 = \{(x_1, x_2): x_2 = 0\};$$

$$X_2 = \{(x_1, x_2): x_1 = 0\}.$$

Os equilíbrios do sistema (3.1) estão nas interseções das duas isóclinas. Genericamente, podem existir até 4 dessas interseções em \mathbb{R}_+^2 . Podemos classificá-las em 3 tipos como segue:

i) A origem $O = (0, 0)$.

ii) Os equilíbrios nos eixos coordenados $R_1 = (b_1/a_{11}, 0)$ e $R_2 = (0, b_2/a_{22})$.

iii) O equilíbrio interior $P = (p_1, p_2)$, que é a interseção das retas N_1 e N_2 .

Os equilíbrios O , R_1 e R_2 sempre pertencem a \mathbb{R}_+^2 . O equilíbrio interior P nem sempre possui todas as coordenadas positivas.

Observação 3.2. Quando $\det(A) \neq 0$, o equilíbrio P é solução do sistema linear $Ax = B$, ou seja,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

e é dado por

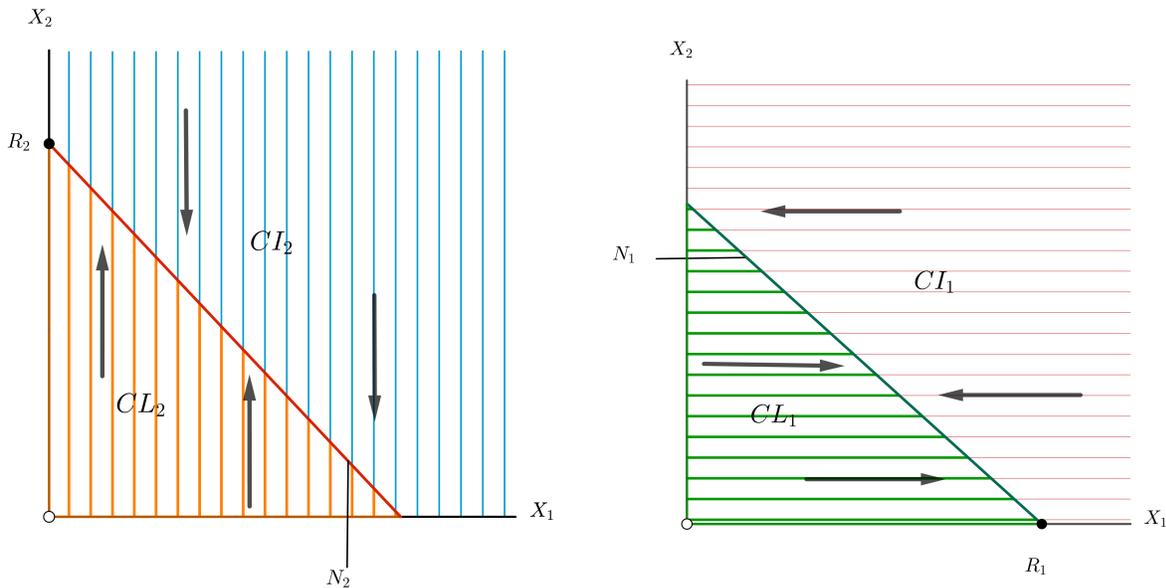
$$P = (p_1, p_2) = \left(\frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right).$$

Vamos agora analisar a estabilidade dos equilíbrios usando a geometria das isóclinas. Para sistemas Lotka-Volterra bidimensionais os equilíbrios são todos hiperbólicos quando $\det(A) \neq 0$. Inicialmente, observamos que os eixos coordenados X_1 e X_2 são invariantes. De fato, fazendo $x_i = 0$, temos $\dot{x}_i = 0$, de modo que soluções começando em cada eixo permanecem neste eixo. Ainda, restrita ao eixo X_i , a dinâmica de (3.1) é dada por $\dot{x}_i = x_i(b_i - a_{ii}x_i)$, que é equivalente ao modelo logístico $\dot{x}_i = r_i x_i(1 - x_i/K)$, com $r_i = b_i$ e $K = b_i/a_{ii}$. Como as soluções do modelo logístico convergem para a capacidade suporte se $x_i(0) > 0$, vemos que cada equilíbrio $R_i = (b_i/a_{ii})e_i$ atrai todas as soluções no eixo X_i exceto a origem, onde e_i é o vetor com 1 na i -ésima coordenada e 0 nas demais coordenadas. Assim, R_i é atrator ao longo de cada eixo X_i .

Para determinar se R_i atrai ou repele em outra direção transversal ao eixo X_i , vamos usar a geometria das isóclinas. Vamos particionar \mathbb{R}_+^2 pela reta N_2 (veja Figura 3.1.a), ou seja, dividimos \mathbb{R}_+^2 em dois subconjuntos. O primeiro subconjunto é o conjunto limitado onde $\dot{x}_2 \geq 0$ de \mathbb{R}_+^2 que denotaremos por CL_2 . O segundo subconjunto é a componente ilimitada de \mathbb{R}_+^2 onde $\dot{x}_2 \leq 0$, que denotaremos por CI_2 . Voltemos nossa atenção para a posição em que o equilíbrio R_1 se encontra depois de particionarmos o \mathbb{R}_+^2 . Se R_1 pertence ao conjunto limitado, então $\dot{x}_2 \geq 0$ em uma vizinhança de R_1 em \mathbb{R}_+^2 que intersecta Σ e, assim, R_1 possui uma direção repulsora ao longo de Σ , de modo que é um ponto de sela do sistema em \mathbb{R}^2 e repulsor ao longo de Σ . Em outras palavras, se $R_1 \in CL_2 \setminus N_2$, então R_1 é uma sela. Por outro lado, se $R_1 \in CI_2 \setminus N_2$, então $\dot{x}_2 \leq 0$ numa vizinhança de R_1 em \mathbb{R}_+^2 que intersecta Σ e, assim, R_i possui uma direção atratora ao longo de Σ , de modo

que R_i é um equilíbrio localmente assintoticamente estável.

Analogamente, dividimos \mathbb{R}_+^2 em dois subconjuntos também pela reta N_1 (veja a Figura 3.1.b). O primeiro subconjunto é o conjunto limitado onde $\dot{x}_1 \geq 0$ de \mathbb{R}_+^2 , que denotaremos por CL_1 . O segundo subconjunto é a componente ilimitada de \mathbb{R}_+^2 onde $\dot{x}_1 \leq 0$, que denotaremos por CI_1 (veja a Figura 3.1.b). Agora, analisando o posicionamento do equilíbrio R_2 depois de particionarmos \mathbb{R}_+^2 por N_1 , podemos inferir o comportamento do sistema em uma vizinhança de R_2 . Analogamente ao caso anterior, se $R_2 \in CL_1 \setminus N_1$, então R_1 é um equilíbrio tipo sela e repulsor ao longo de Σ , porém, se $R_2 \in CI_1 \setminus N_1$, então R_2 é um equilíbrio atrator do sistema e atrator ao longo de Σ .



(a) Regiões do \mathbb{R}_+^2 definidas através da partição pela reta N_2 . Se R_1 se encontra na região limitada CL_2 (laranja), R_1 é um equilíbrio tipo sela. Se R_1 está na região ilimitada CI_2 (azul), então R_1 é um equilíbrio estável (atrator).

(b) Regiões do \mathbb{R}_+^2 definidas através da partição pela reta N_1 . Se R_2 se encontra na região limitada CL_1 (verde), R_2 é um equilíbrio tipo sela. Se R_2 está na região ilimitada CI_1 (marrom), então R_2 é um equilíbrio estável (atrator).

Figura 3.1: Regiões definidas pelas partições de \mathbb{R}_+^2 pelas retas N_1 e N_2 .

Com as observações anteriores, geometricamente, caracterizamos como a posição relativa em que as isóclinas intersectam os eixos coordenados determina a estabilidade dos equilíbrios R_1 e R_2 . Portanto, podemos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 3.3. *A configuração das isóclinas determina o comportamento dinâmico do fluxo nos equilíbrios R_i e, conseqüentemente, no \mathbb{R}_+^2 .*

Agora, vamos traduzir este processo geométrico de determinar a posição relativa dos equilíbrios em relação às isóclinas para um estudo algébrico do sinal de uma expressão envolvendo parâmetros do modelo. Por exemplo, no eixo X_1 as interseções com as retas N_1 e N_2 são dadas, respectivamente, pelos pontos $R_1 = (b_1/a_{11}, 0)$ e $(b_2/a_{21}, 0)$. Assim, precisamos analisar o sinal da seguinte diferença

$$\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{b_2}{a_{21}}.$$

Por outro lado, como $a_{ij} > 0$ para todo i, j , temos que

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{b_2}{a_{21}}\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{a_{21}b_1}{a_{11}} - b_2\right) = \operatorname{sgn}((AR_1)_2 - b_2). \quad (3.2)$$

Definição 3.4. *Seja $F \in CLV(2)$. A configuração das isóclinas de F é dada pelos valores de*

$$\sigma_{ij} = \operatorname{sgn}((AR_i)_j - b_j), \text{ para } i \neq j, i, j = 1, 2,$$

módulo permutação de índices.

As considerações geométricas e algébricas anteriores permitem concluir o seguinte resultado.

Proposição 3.5. *Ocorre $\sigma_{ij} = 1$ se, e somente se, R_i está na componente ilimitada CI_j para $i \neq j$ e, portanto, atrai ao longo de Σ . Analogamente, $\sigma_{ij} = -1$ se, e somente se, R_i está na componente limitada CL_j para $i \neq j$ e, portanto, R_i repele ao longo de Σ .*

Com a determinação do comportamento de cada R_i ao longo de Σ , podemos determinar quando o equilíbrio interior P irá existir ou não e também saber sua estabilidade. De fato, pela aplicação do Teorema de Hirsch a sistemas Lotka-Volterra competitivos, vista no capítulo anterior, o simplexo de suporte Σ é uma curva invariante globalmente atrativa, homeomorfa ao simplexo unitário em \mathbb{R}_+^2 por projeção radial. Como Σ é unidimensional globalmente atrativo, os conjuntos limites não vazios fora da origem, consistem

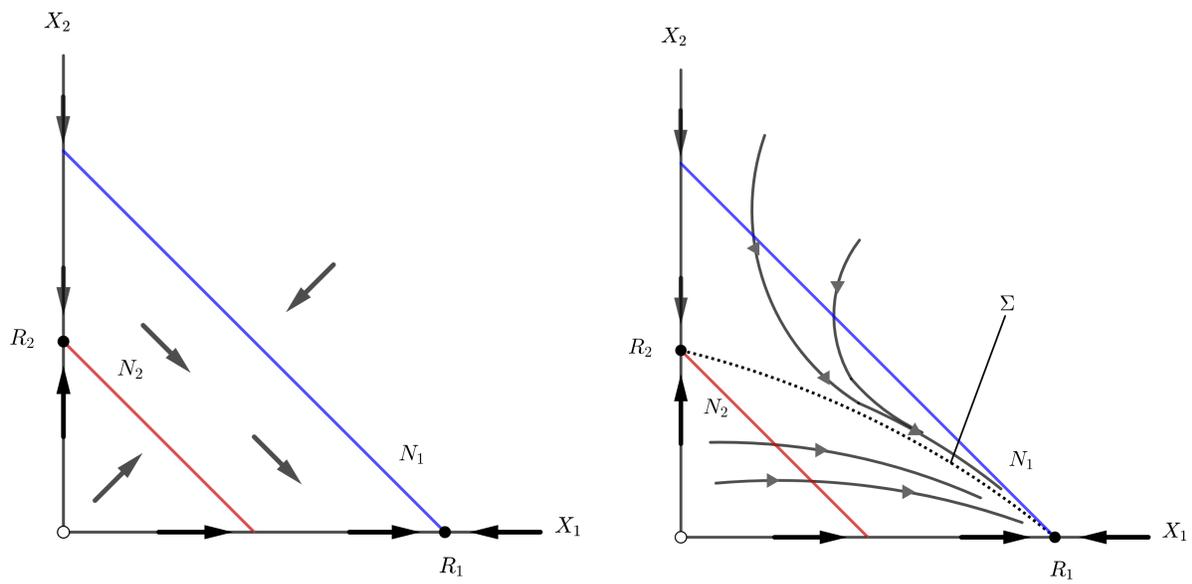
em equilíbrios que pertencem a Σ , e só podem ser R_1 , R_2 e eventualmente P . Assim, a dinâmica ao longo de Σ próxima dos equilíbrios R_i determina a dinâmica no restante de Σ .

Nosso objetivo agora é cobrir todos os casos possíveis de combinações para σ_{12} e σ_{21} . Os casos possíveis são:

- 1) $\sigma_{12} = 1, \sigma_{21} = -1$ e $\sigma_{12} = -1, \sigma_{21} = 1$; 2) $\sigma_{12} = 1, \sigma_{21} = 1$; 3) $\sigma_{12} = -1, \sigma_{21} = -1$.

No Caso 1) pela Proposição 3.5, se $\sigma_{12} = 1, \sigma_{21} = -1$, então temos que R_1 é atrator e R_2 é repulsor em Σ . Isso quer dizer que o equilíbrio R_1 está na componente ilimitada de $\mathbb{R}_+^2 \setminus N_2$ e, portanto, atrai ao longo de Σ . Por outro lado, R_1 está na componente limitada de $\mathbb{R}_+^2 \setminus N_1$ e, portanto, repele ao longo de Σ . Se $\sigma_{12} = -1, \sigma_{21} = 1$ ocorre o caso contrário. O equilíbrio R_1 é repulsor e R_2 é atrator em Σ . O equilíbrio R_1 está na componente limitada de $\mathbb{R}_+^2 \setminus N_2$ e, portanto, repele ao longo de Σ . Por outro lado, R_1 está na componente ilimitada de $\mathbb{R}_+^2 \setminus N_1$ e, portanto, atrai ao longo de Σ .

Em ambos os casos as retas isóclinas N_1 e N_2 não se intersectam em \mathbb{R}_+^2 e, portanto, não existe ponto de equilíbrio interior P . Um dos R_i é globalmente atrator, excetuando o eixo X_j , $i \neq j$. Observe que os dois casos são equivalentes via permutação de índices. Os retratos de fase ficam então completamente determinados e são ilustrados na Figura 3.3.



(a) Campo qualitativo para o Caso 1.1.

(b) Retrato de fase para o Caso 1.1.

Figura 3.2: Campo e retrato de fase para o Caso 1.1. Sobre uma ótica biológica uma única população sobreviveria enquanto a outra seria extinta.

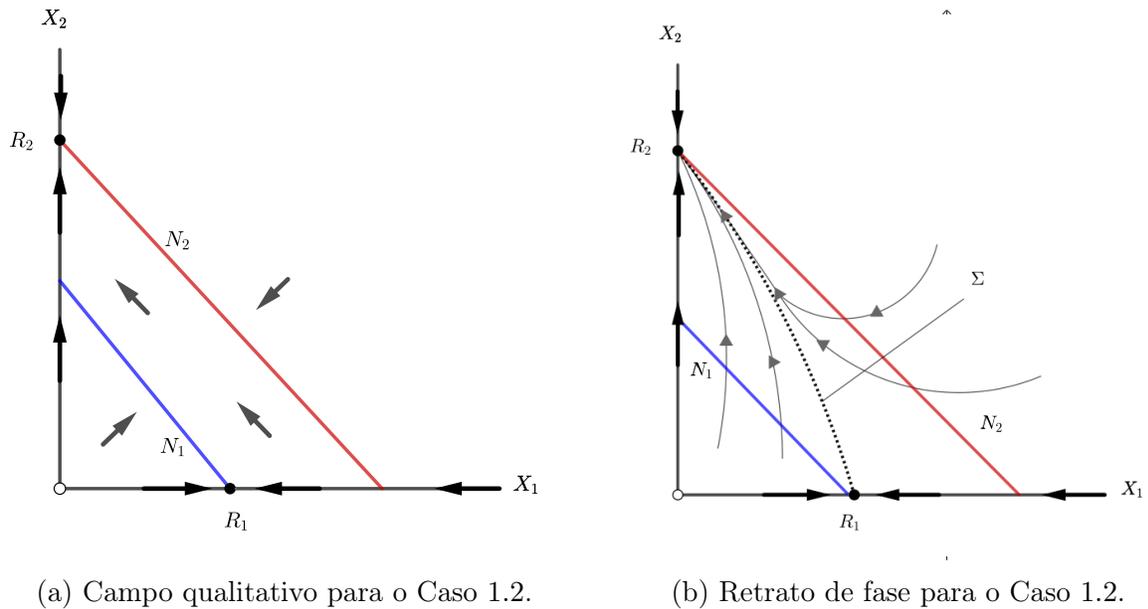
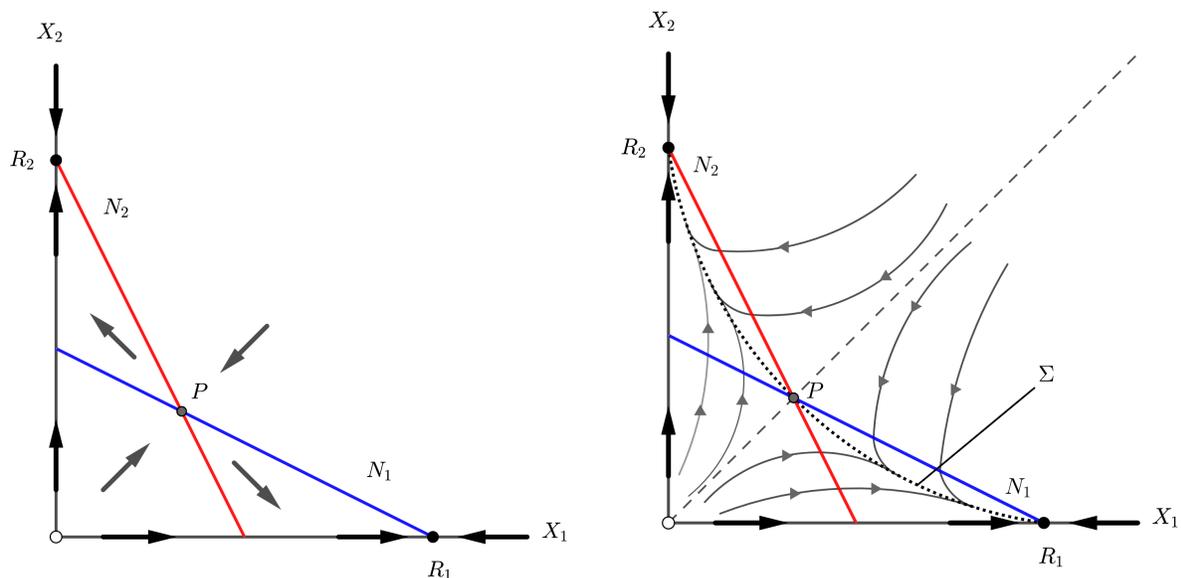


Figura 3.3: Campo e retrato de fase para o Caso 1.2. Sobre uma ótica biológica uma única população sobreviveria enquanto a outra seria extinta.

No Caso 2), pela Proposição 3.5, como $\sigma_{12} = 1$ e $\sigma_{21} = 1$ temos que R_1 e R_2 atratores em Σ . Isto quer dizer que cada R_i está em uma componente ilimitada de $\mathbb{R}_+^2 \setminus N_j$ para $i \neq j$. Assim, cada R_i atrai ao longo de Σ e deve existir um outro conjunto repelindo as soluções em Σ . Nesse caso, as retas N_i necessariamente se cruzam em $\text{Int}(\mathbb{R}_+^2)$ para que $P \in \text{Int}(\mathbb{R}_+^2)$ e o Σ seja composto pelos pontos de equilíbrio R_1, R_2 e P , unidos por variedades estáveis dos R_i . Portanto, P é uma sela que repele ao longo de Σ , e possui uma variedade estável que separa as bacias de atração de R_1 e R_2 . O retrato de fase fica então completamente determinado, e é ilustrado na Figura 3.4.



(a) Campo qualitativo para o Caso 2.

(b) Retrato de fase para o Caso 2.

Figura 3.4: Regiões definidas pelas partições usando as isóclinas. Neste caso o desenvolvimento de uma espécie depende da condição inicial.

No Caso 3), pela Proposição 3.5, temos que R_1 e R_2 repelem ao longo Σ . Assim, deve haver um outro conjunto atraindo as soluções em Σ . Nesse caso, as retas N_i necessariamente se cruzam em $\text{Int}(\mathbb{R}_+^2)$ para que $P \in \text{Int}(\mathbb{R}_+^2)$, e o Σ seja composto pelos pontos de equilíbrio R_1, R_2 e P , unidos por variedades instáveis dos R_i . Portanto, P atrai ao longo de Σ , e como Σ está atraindo globalmente em $\text{Int}(\mathbb{R}_+^2)$, P é um atrator global. O retrato de fase fica então completamente determinado, e é ilustrado na Figura 3.5.

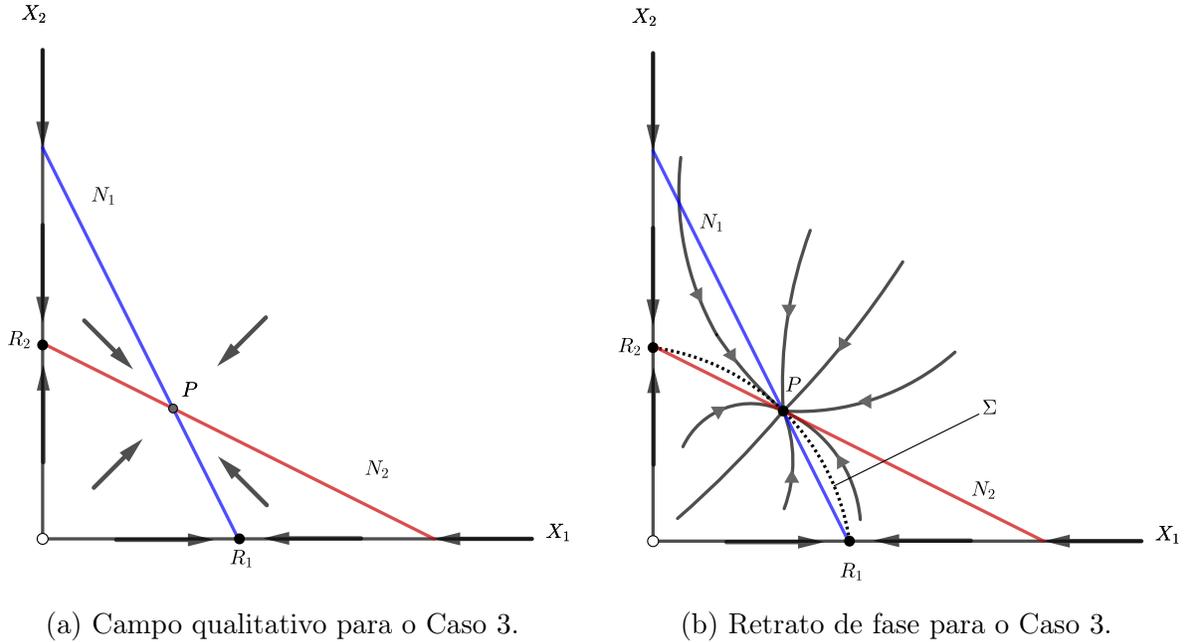


Figura 3.5: Regiões definidas pelas partições usando as isóclinas. Todas as soluções com condições iniciais interiores em \mathbb{R}_+^2 convergem para o ponto interior P .

Assim, cobrimos todos os casos possíveis, ou seja, qualquer conjunto de parâmetros que define um campo $F \in CLV(2)$, com exceção dos casos degenerados com $\sigma_{ij} = 0$, vai gerar um dos casos anteriores. Em outras palavras, separamos o espaço $CLV(2)$, que é um espaço de dimensão 6, em três conjuntos abertos, cuja união é densa em $CLV(2)$, mais suas fronteiras, que são os conjuntos $\sigma_{ij} = 0$. Portanto, podemos dizer quando dois campos são isóclina-equivalentes.

Definição 3.6. *Seja $F, G \in CLV(2)$. Dizemos que F e G são isóclina-equivalentes se, e somente se, elas possuem a mesma configuração de isóclinas.*

Observe que definimos uma relação de equivalência em $CLV(2)$.

Definição 3.7. *Seja $F \in CLV(2)$. Dizemos que F é isóclina estável se, e somente se, existe uma vizinhança de F em $CLV(2)$ de campos com retratos de fase equivalentes.*

Proposição 3.8. *Seja $F \in CLV(2)$. Então, F é isóclina estável se, e somente se,*

$$\text{sgn}((AR_i)_j - b_j) \neq 0,$$

para $i \neq j$, $i, j = 1, 2$.

A demonstração segue direto das definições.

Pequenas perturbações nos parâmetros mantêm a estrutura do sistema, em particular, mantêm a configuração das isóclinas. Por exemplo, se um equilíbrio R_1 está à “direita” da reta N_2 , ele é um ponto de sela. Com uma pequena perturbação nos parâmetros, ele continuará sendo uma sela, e a reta N_2 continuará à “direita” em relação ao ponto R_1 . Em resumo, uma vez escolhido um ponto no espaço de parâmetros, existe uma vizinhança que mantêm a estrutura do sistema, a configuração das isóclinas e, conseqüentemente, o sinal que a proposição pede. Observe também que as classes isóclinas estáveis (três para o caso bidimensional) são classes abertas, pois são definidas por desigualdades estritas. A única possibilidade de ocorrer $(AR_i)_j - b_j = 0$ é quando $R_i \in N_j$, e o equilíbrio deixa de ser hiperbólico.

Corolário 3.9. *Existem três classes isóclinas estáveis e elas possuem união densa em $CLV(2)$.*

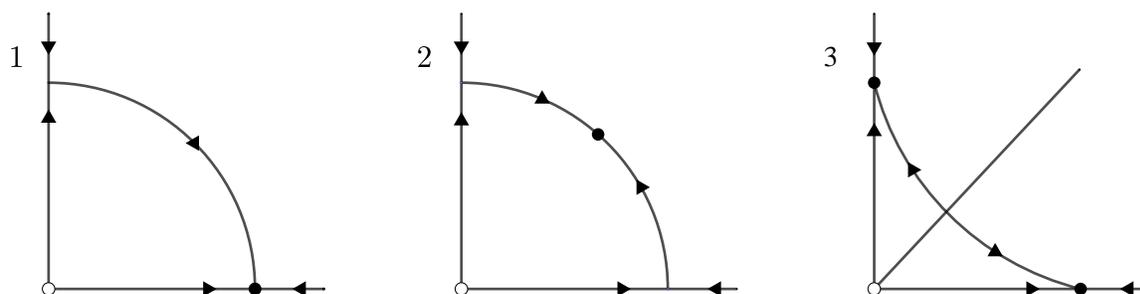


Figura 3.6: Classes isóclinas em $CLV(2)$.

Por fim, vamos demonstrar um resultado que garante que as classes isóclinas bidimensionais ilustradas na Figura 3.6 são topologicamente estáveis. Em outras palavras,

queremos dizer que dados $F, G \in CLV(2)$ pertencentes a uma mesma classe isóclina, podemos levar soluções de F em soluções de G por meio de um homeomorfismo preservando a orientação do tempo.

Isso significa que, embora os sistemas possam ter aparências diferentes em termos de seus parâmetros, e, conseqüentemente, de seus retratos de fase, as estruturas das trajetórias são essencialmente as mesmas do ponto de vista topológico, devido a terem a mesma estrutura nas isóclinas.

Teorema 3.10. *Em $CLV(2)$, as classes isóclinas estáveis coincidem precisamente com as classes topológicas estáveis.*

Demonstração.

Primeiramente vamos mostrar que todo campo vetorial $F \in CLV(2)$ tem uma função de Lyapunov V_F em \mathbb{R}_+^2 que varia continuamente de acordo com os parâmetros de F . Vamos mostrar também que P é o único ponto crítico de V_F e determinar as curvas de nível de V_F . A partir deste ponto usaremos a estrutura das curvas de nível juntas com as estruturas dadas pelos conjuntos de nível de V_F para construir a equivalência topológica entre isóclinas estáveis e os equivalentes campos vetoriais.

Seja $F \in CLV(2)$ com a matriz $A = [a_{ij}]$, dado por

$$F_i(x) = x_i \left(b_i - \sum_{j=1}^2 a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, 2,$$

e considere a função quadrática $V_F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$V_F(x) = a_{21} x_1 \left(\sum_{j=1}^2 a_{1j} x_j - 2b_1 \right) + a_{12} x_2 \left(\sum_{j=1}^2 a_{2j} x_j - 2b_2 \right).$$

Calculando o gradiente de $V_F(x)$, temos

$$\nabla V_F(x) = \begin{pmatrix} 2a_{21} \left(\sum_{j=1}^2 a_{1j} x_j - b_1 \right) \\ 2a_{12} \left(\sum_{j=1}^2 a_{2j} x_j - b_2 \right) \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\nabla(V_F(x)) = 0 \Leftrightarrow x = \left(\frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right) = P.$$

Desse modo, vemos que P é o único ponto crítico de V_F . Ainda, calculando as derivadas parciais de segunda ordem em P e construindo a matriz hessiana de V_F em P temos

$$H(V_F(P)) = \begin{pmatrix} 2a_{11}a_{21} & 2a_{12}a_{21} \\ 2a_{12}a_{21} & 2a_{12}a_{22} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \det(H(V_F(P))) &= 4a_{11}a_{22}a_{12}a_{21} - 4(a_{12}a_{21})^2 \\ &= 4a_{12}a_{21}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= 4a_{12}a_{21} \det(A). \end{aligned}$$

Portanto, se $\det A > 0$, o gráfico de V_F é um paraboloide com mínimo em P e se $\det A < 0$, V_F tem um ponto de sela em P . Note ainda que por (3.2) temos

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = 1 &\Leftrightarrow \frac{b_1a_{21}}{b_2a_{11}} > 1, \\ \sigma_{21} = 1 &\Leftrightarrow \frac{b_2a_{12}}{b_1a_{22}} > 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = -1 &\Leftrightarrow \frac{b_1a_{21}}{b_2a_{11}} < 1, \\ \sigma_{21} = -1 &\Leftrightarrow \frac{b_2a_{12}}{b_1a_{22}} < 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{b_1a_{21}}{b_2a_{11}} \frac{b_2a_{12}}{b_1a_{22}} > 1 \Leftrightarrow a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} > 0 \Leftrightarrow \det(A) < 0.$$

Analogamente,

$$\frac{b_1a_{21}}{b_2a_{11}} \frac{b_2a_{12}}{b_1a_{22}} < 1 \Leftrightarrow a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} < 0 \Leftrightarrow \det(A) > 0.$$

Logo, na classe isóclina 2 onde $\sigma_{12} = \sigma_{21} = -1$ e P é atrator, temos $\det(A) > 0$ e P é ponto de mínimo de V_F , e na classe isóclina 3 onde $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 1$ e P é sela, temos

$\det(A) < 0$ e P é ponto de sela de V_F .

Vejam agora que V_F é uma função de Lyapunov para F . Para $x \in \mathbb{R}_+^2$, temos

$$\dot{V}_F = \nabla V_F(x) \cdot F(x) = -2a_{21}x_1 \left(b_1 - \sum_{j=1}^2 a_{1j}x_j \right)^2 - 2a_{12}x_2 \left(b_2 - \sum_{j=1}^2 a_{2j}x_j \right)^2 \leq 0, \quad (3.3)$$

uma vez que $a_{21}, a_{12} > 0$. Ainda, vemos que $\nabla V_F(x) \cdot F(x) = 0$ se, e somente se, x é um ponto de equilíbrio de F . Assim, V_F é uma função de Lyapunov global para F , significando que o valor de V_F diminui com o tempo ao longo de órbitas não constantes de F e essas órbitas são transversais aos conjuntos de níveis de V_F .

Agora, escolha dois campos vetoriais isoclina estáveis equivalentes $F, \tilde{F} \in CLV(2)$. Para fixar as ideias, assumamos que F, \tilde{F} estão na classe de isoclina estável 3, conforme a Figura 3.7. Então, F tem um simplexo suporte Σ com pontos de equilíbrio atratores R_1, R_2 e um ponto de sela em P , enquanto \tilde{F} tem um simplexo de suporte $\tilde{\Sigma}$ com pontos de equilíbrio atrativos \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 e um ponto de sela em \tilde{P} .

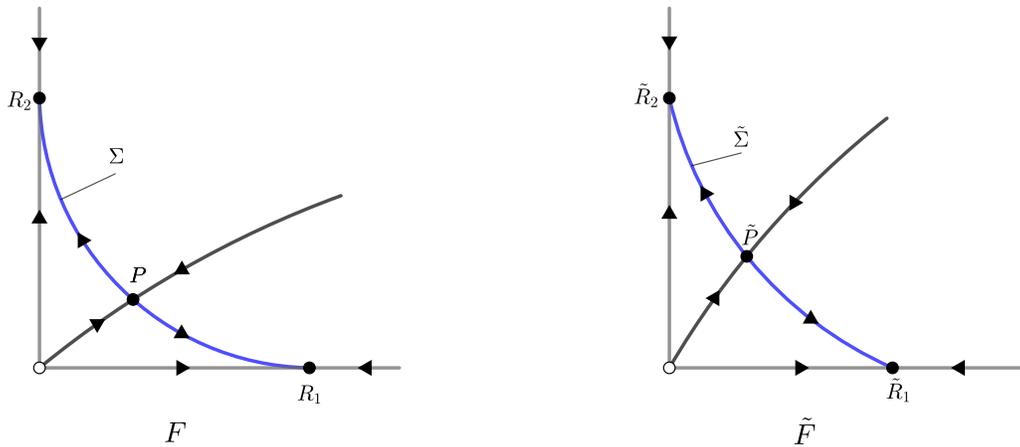


Figura 3.7: Campos F e \tilde{F} isóclinas equivalentes.

Sejam V e \tilde{V} as funções de Lyapunov para F e \tilde{F} , respectivamente, ou seja, $V = V_F$ e $\tilde{V} = V_{\tilde{F}}$ como definido anteriormente. Usaremos V e \tilde{V} para construir um homeomorfismo

de \mathbb{R}_+^2 que leva órbitas de F em órbitas de \tilde{F} de maneira orientada. Como V é uma função de Lyapunov para F , pela evolução de V ao longo do tempo, sabemos que

$$0 = V(0) > V(P) > V(R_1), V(R_2),$$

e, similarmente,

$$0 = \tilde{V}(0) > \tilde{V}(\tilde{P}) > \tilde{V}(\tilde{R}_1), \tilde{V}(\tilde{R}_2).$$

onde os valores de $V(R_1)$ e $V(R_2)$ podem satisfazer $V(R_1) > V(R_2)$ ou $V(R_1) < V(R_2)$ e o mesmo ocorre para $\tilde{V}(\tilde{R}_1)$ e $\tilde{V}(\tilde{R}_2)$.

Daí, após qualquer permutação necessária dos eixos, ou perturbação de V ou \tilde{V} para funções de Lyapunov próximas, podemos assumir sem perda de generalidade que, $V(R_1) > V(R_2)$ e $\tilde{V}(\tilde{R}_1) > \tilde{V}(\tilde{R}_2)$. Assim, existe um homeomorfismo $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (veja Figura 3.8) tal que

$$h(0) = 0, \quad h(V(P)) = \tilde{V}(\tilde{P}), \quad \text{e } h(V(R_i)) = \tilde{V}(\tilde{R}_i), \quad i = 1, 2.$$

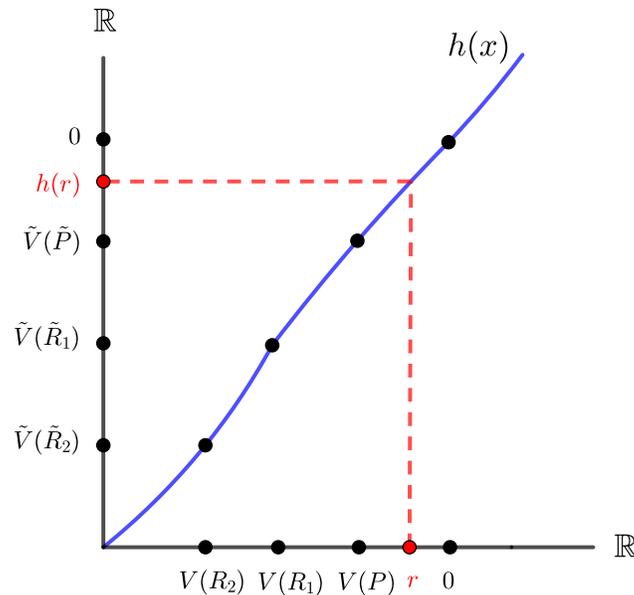


Figura 3.8: Homeomorfismo h .

Agora, escolha $r \in \mathbb{R}$ tal que $V(P) < r < 0$, e considere o conjunto de nível $V^{-1}(r)$ de V . A escolha de r junto com o fato de que V é função de Lyapunov e estamos na classe 3 onde P é ponto de sela, garante que $V^{-1}(r)$ é uma hipérbole, com centro em P . Ainda, esta hipérbole intersecta uma única vez, e de maneira transversal, cada trajetória de F em $\mathbb{R}_+^2 \setminus \Sigma \cup \{0\}$. De fato, a condição (3.3) garante que F não é perpendicular a $\nabla V_F(x)$ nos pontos regulares de F . Logo, a pré-imagem de V (que nesse caso são as hipérboles) intersecta cada órbita de maneira transversal. Em particular, sejam S_1, S_2 (com $|S_1| < |S_2|$) os dois pontos onde a variedade estável de P , $W^S(P)$, encontra $V^{-1}(r)$. Veja a Figura 3.9.

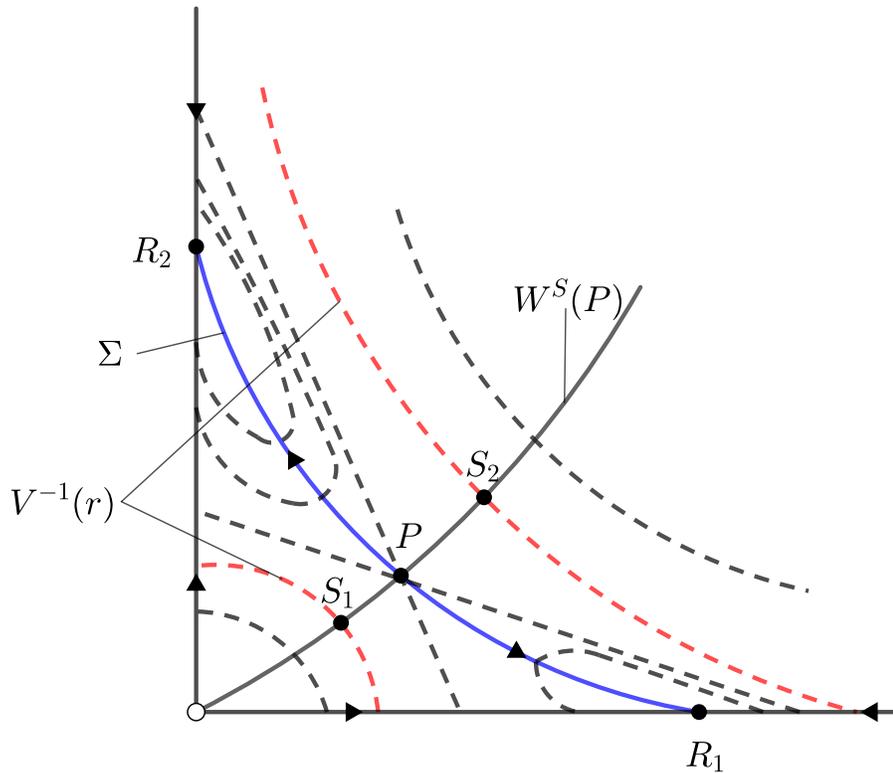


Figura 3.9: Imagens inversas de V para um sistema na classe isóclina 3.

Da mesma forma, por ser h homeomorfismo, temos $\tilde{V}(\tilde{P}) < h(r) < 0$ e, então, $\tilde{V}^{-1}(h(r))$ também é uma hipérbole intersectando uma única vez e de maneira transversal as órbitas de \tilde{F} em $\mathbb{R}_+^2 \setminus \Sigma \cup \{0\}$ e encontra a variedade estável de \tilde{P} em \tilde{S}_1, \tilde{S}_2 , onde $|\tilde{S}_1| < |\tilde{S}_2|$. Seja $h_r : V^{-1}(r) \rightarrow \tilde{V}^{-1}(h(r))$ um homeomorfismo entre as hipérboles, preservando os

eixos, e tal que $h_r(S_i) = \tilde{S}_i$, $i = 1, 2$. Agora podemos usar h e h_r para definir o homeomorfismo H de \mathbb{R}_+^2 da seguinte forma. Em $\mathbb{R}_+^2 \setminus \Sigma \cup \{0\}$, defina

$$H(x) = \tilde{\mathcal{O}}(h_r(\mathcal{O}(x) \cap V^{-1}(r))) \cap \tilde{V}^{-1}(h(V(x))),$$

onde $\mathcal{O}(x)$ e $\tilde{\mathcal{O}}(x)$ denotam as órbitas de x sob F e \tilde{F} , respectivamente. Veja a Figura 3.10.

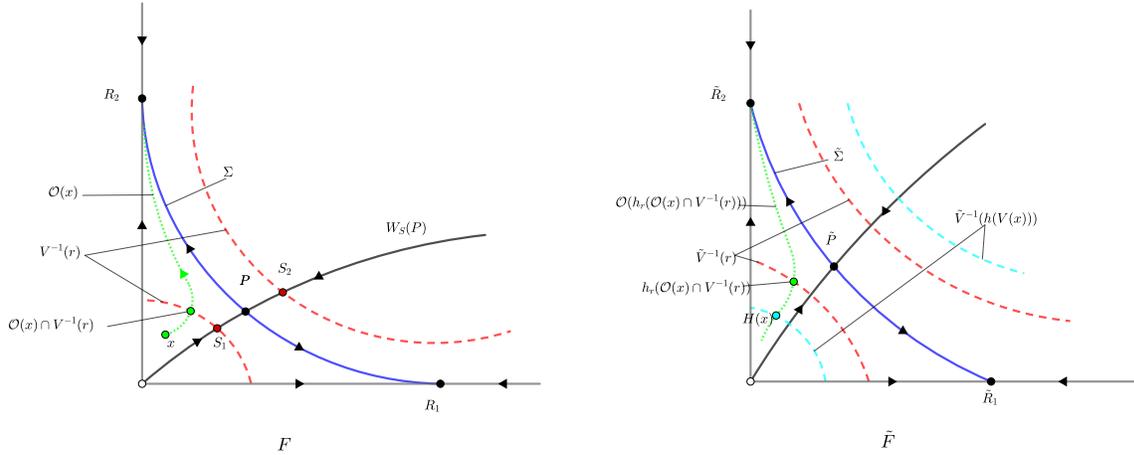


Figura 3.10: Construção do Homeomorfismo H .

Portanto, $H : \mathbb{R}_+^2 \setminus \Sigma \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+^2 \setminus \tilde{\Sigma} \cup \{0\}$ leva órbitas de F para órbitas de \tilde{F} e conjuntos de níveis de V para conjuntos de nível de \tilde{V} . Pela transversalidade dessa estruturas, H é contínua em todo o ponto e isso se estende para um homeomorfismo no \mathbb{R}_+^2 . De fato, observe que isso ocorre devido à transversalidade das estruturas nas curvas de nível de V e \tilde{V} nos domínios dos campos F e \tilde{F} . Tome um ponto x (como exemplificado na Figura 3.10) e considere $N(x)$, uma vizinhança aberta de x . Conduza todos os pontos de $N(x)$ pelo fluxo até a curva de nível $V^{-1}(r)$ e denote o conjunto obtido por $C(N(x))$. As órbitas dos pontos em $N(x)$ sempre interceptam $V^{-1}(r)$ devido à transversalidade. Realizando o processo análogo para $H(x)$ e $\tilde{V}^{-1}(r)$, obtemos o conjunto $\tilde{C}(N(H(x))) \subset \tilde{V}^{-1}(r)$, onde $N(H(x))$ é uma vizinhança aberta de $H(x)$. Através do homeomorfismo h_r (homeomorfismo entre hipérbolas), considere $h_r^{-1}(\tilde{C}(N(H(x)))) \subset V^{-1}(r)$. Considere agora

a interseção $C(N(x)) \cap h_r^{-1}(\tilde{C}(N(H(x))))$ e retorne no tempo. Como o conjunto obtido é aberto, usando a definição de continuidade em termos de pré-imagens de conjuntos abertos, concluimos que H é contínua.

■

Capítulo 4

Análise Geométrica dos Sistemas Lotka-Volterra Tridimensionais

Neste capítulo, iniciaremos a classificação dos sistemas Lotka-Volterra tridimensionais. Inicialmente veremos como as isóclinas determinam certas propriedades dos equilíbrios nos eixos e, em seguida, definiremos as classes de equivalência no espaço dos sistemas tridimensionais.

4.1 Isóclinas e a estabilidade dos equilíbrios R_i e Q_i

Adicionar uma dimensão ao modelo Lotka-Volterra de duas dimensões estudado na seção anterior acarreta o acréscimo de 6 parâmetros, ou seja, dobramos os parâmetros do caso bidimensional. Isso significa que uma análise algébrica tradicional seria exaustiva e fora do escopo desta dissertação. O nosso objetivo nesta seção é estabelecer classes de equivalências no conjunto $CLV(3)$ e analisar o comportamento de cada uma delas. Especificamente, vamos considerar os campos da forma

$$\dot{x}_i = F_i(x) = x_i(b_i - (Ax)_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.1)$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3)$, $F = (F_1, F_2, F_3)$, $b_i > 0$ e $A = [a_{ij}]$ é uma matriz 3×3 com entradas estritamente positivas.

Como no caso bidimensional, para obtermos algumas informações necessárias sobre o sistema, vamos analisar as isóclinas, que são os conjuntos de pontos onde $F_i(x) = 0$, ou seja, $x_i(b_i - (Ax)_i) = 0$ e, assim, ou $x_i = 0$ ou $b_i = (Ax)_i$. Desse modo, a i -ésima isóclina é a união do i -ésimo plano coordenado

$$G_i = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i = 0\},$$

com o plano definido por

$$N_i = \{(x_1, x_2, x_3) : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i\}.$$

Observe que cada plano N_i possui o vetor normal positivo $t_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$ e sua interseção com os eixos coordenados ocorre nos pontos $(b_i/a_{i1}, 0, 0)$, $(0, b_i/a_{i2}, 0)$ e $(0, 0, b_i/a_{i3})$.

As isóclinas são os seguintes conjuntos

$$I_1 = N_1 \cup G_1;$$

$$I_2 = N_2 \cup G_2;$$

$$I_3 = N_3 \cup G_3.$$

Os pontos de equilíbrio do sistema estão nas interseções das três isóclinas. Genericamente, podem existir até 8 dessas interseções em \mathbb{R}_+^3 . Podemos classificá-los em 4 tipos:

- i)** A origem $O = (0, 0, 0)$.
- ii)** Os pontos de equilíbrio nos eixos coordenados $R_1 = (b_1/a_{11}, 0, 0)$, $R_2 = (0, b_2/a_{22}, 0)$ e $R_3 = (0, 0, b_3/a_{33})$. Estes pontos são as interseções dos planos N_i com os eixos axiais X_i , $i = 1, 2, 3$.
- iii)** As interseções entre os planos N_j e N_k com o plano G_i , para $j \neq k \neq i$. Chamaremos estes pontos de Q_i , $i = 1, 2, 3$.
- iv)** O ponto de equilíbrio interior $P = (p_1, p_2, p_3)$, que é a interseção dos planos N_1 , N_2 e

N_3 . Note que $AP = B$ se $\det(A) \neq 0$.

Os pontos O , R_1 , R_2 e R_3 sempre pertencem a \mathbb{R}_+^3 . O equilíbrio interior P e os pontos Q_1 , Q_2 e Q_3 nem sempre pertencem a \mathbb{R}_+^3 , pois nem sempre possuem todas as coordenadas positivas.

4.1.1 Estudo dos equilíbrios R_i

Vamos iniciar com a análise dos equilíbrios R_i . De modo análogo ao caso bidimensional, os eixos coordenados X_1 , X_2 e X_3 são invariantes. De fato, fazendo $x_i = 0$, temos $\dot{x}_i = 0$. Ainda, lembre-se que restrita ao eixo X_i , a dinâmica de (4.1) é dada por $\dot{x}_i = x_i(b_i - a_{ii}x_i)$, que é equivalente ao modelo logístico $\dot{x}_i = r_i x_i(1 - x_i/K)$, com $r_i = b_i$ e $K = b_i/a_{ii}$. Como as soluções do modelo logístico convergem para a capacidade suporte se $x_i(0) > 0$, vemos que cada equilíbrio R_i atrai todas as soluções no eixo X_i exceto a origem. Assim, R_i é atrator ao longo de cada eixo X_i .

Vamos agora estender o método empregado previamente no contexto bidimensional. Para isto vamos analisar a posição do equilíbrio R_i em relação a cada plano N_j . O plano N_j divide o espaço \mathbb{R}_+^3 em duas componentes distintas: uma limitada e outra ilimitada. Denotaremos essas regiões por CL_j (a região limitada) e CI_j (a região ilimitada).

A posição relativa de cada equilíbrio do tipo R_i em relação aos planos N_j é determinada pelo seguinte sinal, de modo semelhante ao caso bidimensional

$$\operatorname{sgn} \left(\frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{b_j}{a_{ji}} \right) = \operatorname{sgn} ((AR_i)_j - b_j)$$

para $i \neq j$, onde $(AR_i)_j$ representa a j -ésima componente de AR_i .

Vejam agora como a posição de R_i em relação a essas regiões determina sua estabilidade (veja Figura 4.1). Se R_i pertence ao conjunto CL_j , com $i \neq j$, podemos afirmar que, em uma vizinhança de R_i no espaço tridimensional \mathbb{R}_+^3 , a derivada temporal da coordenada x_j é não negativa, ou seja, $\dot{x}_j \geq 0$. Neste caso, R_i é repulsor em Σ . Por outro lado, se R_i estiver em CI_j , com $i \neq j$, então em uma vizinhança de R_i em \mathbb{R}_+^3 , temos que a derivada temporal de x_j é não positiva, ou seja, $\dot{x}_j \leq 0$. Neste caso, R_i é atrator

em Σ . Concluimos que a posição relativa dos R_i em relação aos planos N_j determina sua estabilidade e que esta posição é determinada pela expressão $\text{sgn}((AR_i)_j - b_j)$.

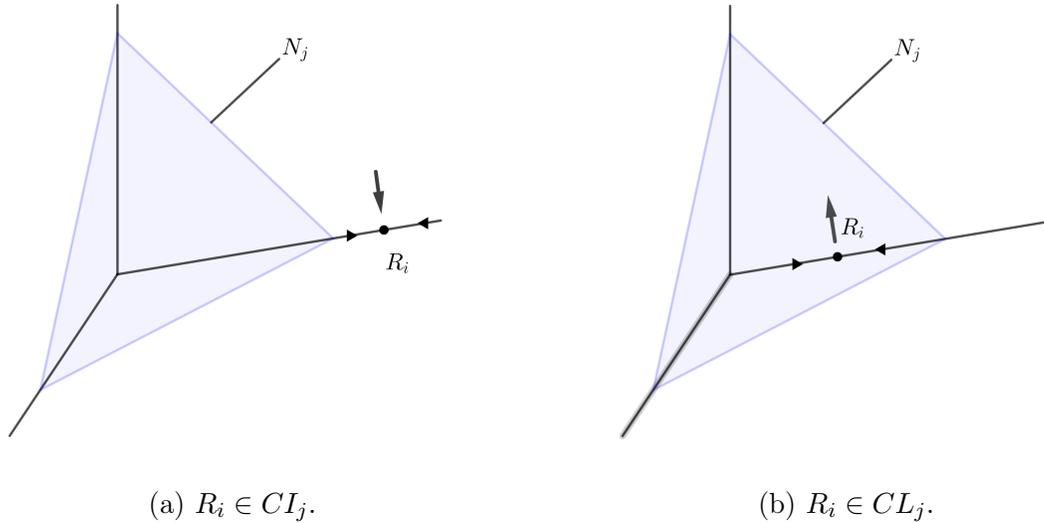


Figura 4.1: Posição relativa do equilíbrio R_i em relação ao plano N_j .

4.1.2 Estudo dos equilíbrios Q_i

Estudaremos agora a estabilidade dos equilíbrios Q_i . Considere um ponto de equilíbrio Q_i . A invariância dos planos coordenados G_i por F assegura a existência de dois autovetores da jacobiana de F em Q_i , $J_F(Q_i)$, paralelos a esse plano. Como a restrição de F a cada plano G_i é um sistema Lotka-Volterra bidimensional, isso implica que o comportamento dinâmico em cada um dos planos coordenados é diretamente influenciado pela dinâmica dos equilíbrios axiais presentes nesse plano, como no capítulo anterior. Assim, no plano G_i , o comportamento do sistema é inteiramente determinado pela natureza dos equilíbrios R_j e R_k , de maneira análoga ao caso bidimensional. Ainda, no plano G_i , o ponto Q_i pode ser visto como o análogo do ponto interior P do caso bidimensional.

Adotaremos um método semelhante ao que utilizamos para analisar a estabilidade dos equilíbrios R_i . É importante observar que se Q_i pertence a N_i , então temos $(AQ_i)_i = b_i$. Dessa forma, podemos analisar a posição relativa de cada equilíbrio Q_i em relação ao

plano N_i por meio do estudo do sinal

$$\operatorname{sgn}((AQ_i)_i - b_i),$$

onde $(AQ_i)_i$ representa a i -ésima componente de AQ_i . Note que se $\operatorname{sgn}((AQ_i)_i - b_i) = 1$, então Q_i está na componente limitada CL_i e se $\operatorname{sgn}((AQ_i)_i - b_i) = -1$, então Q_i está na componente ilimitada CI_i .

Calculando a matriz jacobiana de F em um ponto Q_i , por exemplo, $i = 3$, uma vez que $Q_3 \in G_3$ e portanto tem a forma $Q_3 = (x_1, x_2, 0)$, obtemos

$$J_F(Q_3) = \begin{bmatrix} b_1 - 2a_{11}x_1 - a_{12}x_2 & -a_{12}x_1 & -a_{13}x_1 \\ -a_{21}x_2 & b_2 - a_{21}x_1 - 2a_{22}x_2 & -a_{23}x_2 \\ 0 & 0 & b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 \end{bmatrix}.$$

Ao analisarmos $J_F(Q_3)$, notamos que o fluxo do sistema em uma vizinhança de Q_3 apresenta duas direções paralelas ao plano G_3 , devido à presença de dois autovetores neste plano. Além disso, há uma única direção em que $\dot{x}_3 \neq 0$, conforme previamente discutido no texto. Vemos que o autovalor associado a esse autovetor é $b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 = b_3 - (AQ_3)_3$. Assim, podemos analisar seu sinal e definir condições para determinarmos a natureza de Q_i na direção do autovetor transversal a G_i . Como $\operatorname{sgn}((AQ_i)_i - b_i) = -\operatorname{sgn}(b_i - (AQ_i)_i)$, podemos agora generalizar nosso exemplo. Temos,

- i) Se Q_i pertence à região CL_i então $\operatorname{sgn}((AQ_i)_i - b_i) = -1$ e, conseqüentemente, Q_i repele na direção do autovetor transversal a G_i .
- ii) Se Q_i pertence à região CI_i então $\operatorname{sgn}((AQ_i)_i - b_i) = 1$ e, conseqüentemente, Q_i atrai na direção do autovetor transversal a G_i .

Portanto, a posição relativa dos equilíbrios Q_i em relação ao plano N_i determina sua estabilidade. Ainda, podemos determinar esta posição por meio do estudo do sinal $\operatorname{sgn}((AQ_i)_i - b_i)$.

4.2 As classes isóclinas

Até aqui, vimos que as estabilidades dos pontos R_i e Q_i dependem das posições relativas dos mesmos em relações às isóclinas do sistema e, que estas se traduzem em termos de sinais. Assim, podemos definir as configurações e classes de isóclinas, e veremos através de um exemplo as conclusões que já podemos obter a respeito da dinâmica do sistema.

Definição 4.1. *Seja $F \in CLV(3)$. A configuração das isóclinas de F é dada pelos valores de $\sigma_{ij} = \text{sgn}((AR_i)_j - b_j)$ para $i \neq j$ e $\eta_i = \text{sgn}((AQ_i)_i - b_i)$ para $i = 1, 2, 3$, módulo permutação de índices.*

As considerações da seção anterior sobre a estabilidade dos pontos R_i e Q_i nos permite concluir o seguinte.

Proposição 4.2. *A configuração de isóclinas determina o comportamento dinâmico do fluxo nos pontos de equilíbrio R_i e Q_i e, conseqüentemente, na fronteira de \mathbb{R}_+^3 .*

Seja $U \subset \mathbb{R}_+^3$. Denote por ∂U , a fronteira do conjunto U .

Exemplo 4.3. *Considere o sistema em que a configuração das isóclinas é dada como na Figura 4.2.*

Usando a definição temos: $\sigma_{12} = -1, \sigma_{21} = 1, \sigma_{23} = 1, \sigma_{32} = 1, \sigma_{13} = 1, \sigma_{31} = -1$ e $\eta_1 = 1$. Podemos então obter as seguintes informações:

- i)** $R_1 \in CL_2$ e $R_1 \in CI_3$. Logo, R_1 repele em $\partial\Sigma \cap G_3$ e atrai em $\partial\Sigma \cap G_2$. Portanto, R_1 é um ponto de sela.
- ii)** $R_3 \in CL_1$ e $R_3 \in CI_2$. Logo, R_3 repele em $\partial\Sigma \cap G_2$ e atrai em $\partial\Sigma \cap G_1$. Portanto, R_3 é um ponto de sela.
- iii)** $R_2 \in CI_1$ e $R_2 \in CI_3$. Assim, R_2 atrai em $\partial\Sigma \cap G_1$ e atrai em $\partial\Sigma \cap G_3$. Portanto, R_2 é um ponto atrator.
- iv)** $Q_1 \in CI_1$. Assim, Q_i atrai na direção transversal ao plano G_1 . Portanto, Q_1 é um ponto de sela.

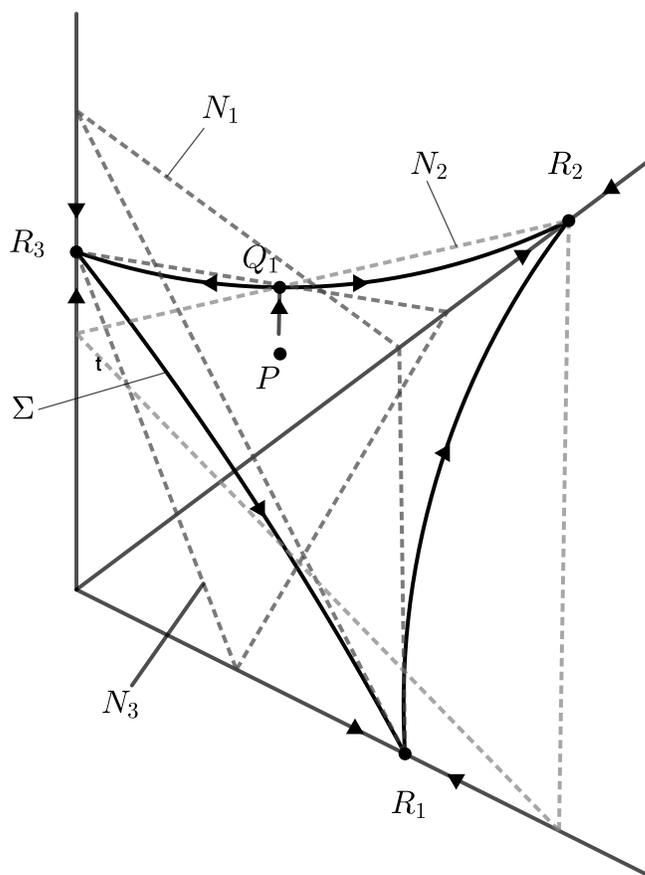


Figura 4.2: O comportamento em cada um dos pontos de equilíbrio em $\partial\Sigma$.

No exemplo observamos que as retas $N_2 \cap G_1$ e $N_3 \cap G_1$ intersectam-se no ponto de equilíbrio planar Q_1 que pertence a \mathbb{R}_+^3 . Neste exemplo específico, Q_1 encontra-se no conjunto invariante CI_1 . Portanto, é válido afirmar que Q_1 é atrator na direção transversal ao plano G_1 . Dado que a dinâmica restrita ao plano G_1 é governada pelo comportamento dos pontos de equilíbrio axiais R_2 e R_3 , e ambos demonstram ser atratores, podemos concluir que Q_1 é uma sela no sistema bidimensional restrita a G_1 e, assim, uma sela no sistema tridimensional.

Com as considerações até aqui, as informações disponíveis sobre a dinâmica dentro de Σ e nas proximidades de um eventual ponto de equilíbrio interior P são limitadas. Este tópico será abordado com mais detalhes no próximo capítulo.

Vamos direcionar nossa atenção para a representação gráfica de Σ . Como discutido

anteriormente, o Teorema de Hirsch assegura que Σ captura todo o comportamento dinâmico do sistema e é homeomorfo ao simplexo unitário em \mathbb{R}^3 . Assim, o retrato de fase e, conseqüentemente, o fluxo de F restrito a Σ podem ser representados graficamente de maneira mais simplificada, por meio de um triângulo. Usando como exemplo a configuração da Figura 4.1, os pontos R_1, R_2 e R_3 estão localizados nos vértices, o ponto de equilíbrio planar Q_i está na borda (lado do triângulo) entre R_2 e R_3 . Pode existir um ponto de equilíbrio interior, mas não sabemos o comportamento na sua vizinhança. A representação do simplexo unitário para este caso é dada na Figura 4.3.

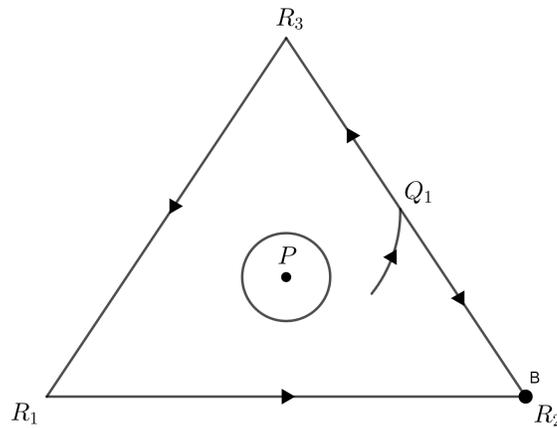


Figura 4.3: O comportamento no simplexo suporte Σ representado no simplexo unitário. A notação de ponto de equilíbrio é como na Figura 4.2, enquanto o símbolo \odot representa região interior de Σ possui dinâmica desconhecida.

Com a definição de configuração das isóclinas, definimos assim uma relação de equivalência em $CLV(3)$.

Definição 4.4. *Sejam $F, G \in CLV(3)$. Dizemos que F e G são isóclina-equivalentes se, e somente se, elas possuem a mesma configuração de isóclinas.*

Definição 4.5. *Seja $F \in CLV(2)$. Dizemos que F é isóclina-estável se F possui uma vizinhança em $CLV(3)$ onde todos os campos são isóclina-equivalentes a F .*

Observação 4.6. *A definição anterior nos diz que para cada ponto no espaço de parâmetros que define um campo F , se ele for isóclina-estável, existirá uma vizinhança aberta no espaço de parâmetros que preserva o comportamento das isóclinas. Portanto, quando nossas classes satisfazem a esse requisito, são denominadas como classes isóclinas-estáveis.*

Proposição 4.7. *Se $F \in CLV(3)$ é isóclina-estável e tem um equilíbrio interior P , então P é um equilíbrio simples.*

Demonstração.

O ponto de equilíbrio P é simples se, e somente se, $\det(DF_P) \neq 0$, ou seja, se a matriz jacobiana de F no ponto P não possui autovalores reais nulos. Isto é, 0 não é um autovalor. Como F é dado por $F_i(x) = x_i(b_i - (Ax)_i)$ e $AP = b$, temos que $DF_P = -P^D A$, onde $P^D = [p_{ij}]$ é a matriz diagonal com elementos $p_{ii} = P_i$. De fato, calculando a jacobiana de F em P e, observando que $b_i = a_{i1}P_1 + a_{i2}P_2 + a_{i3}P_3$, temos

$$J_F(P) = \begin{pmatrix} -P_1 a_{11} & -P_1 a_{12} & -P_1 a_{13} \\ -P_2 a_{21} & -P_2 a_{22} & -P_2 a_{23} \\ -P_3 a_{31} & -P_3 a_{32} & -P_3 a_{33} \end{pmatrix} = -P^D A.$$

Assumindo que $\det(DF_P) = 0$, então $\det(A) = 0$. Isso implica a existência de uma dependência linear entre as linhas de A . Além disso, os planos N_i , que se encontram em P , compartilham pelo menos uma reta. Isso significa que F possui uma reta de pontos de equilíbrio, o que contradiz a estabilidade das isóclinas. ■

Observação 4.8. *O que a proposição anterior nos diz é que se existir um equilíbrio interior P , esse equilíbrio é simples, ou seja, é um equilíbrio hiperbólico ou um centro. Não existem outras possibilidades.*

Proposição 4.9. *Seja $F \in CLV(3)$. Então, F é isóclina estável se, somente se*

$$\sigma_{ij} = \text{sgn}((AR_i)_j - b_j) \neq 0, \text{ e } \eta_i = \text{sgn}((AQ_i)_i - b_i) \neq 0 \text{ para } i \neq j.$$

A demonstração segue direto das definições 4.4 e 4.5 e da observação 4.6.

Corolário 4.10. *As classes isóclinas-estáveis têm união aberta densa em $CLV(3)$.*

O corolário vem do fato que as classes isóclinas são definidas através de desigualdades estritas sobre parâmetros.

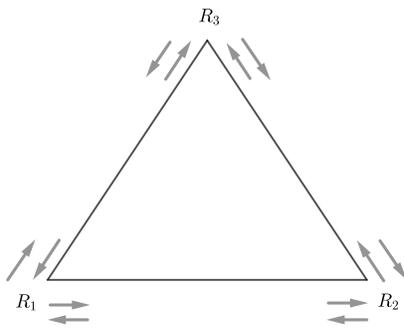
O próximo resultado tem uma demonstração bastante trabalhosa, que não é apresentada no artigo original [1]. A seguir, explicaremos passo a passo o processo que utilizamos para demonstrá-lo.

Teorema 4.11. *Existem 33 classes isóclinas-estáveis e elas possuem união densa em $CLV(3)$.*

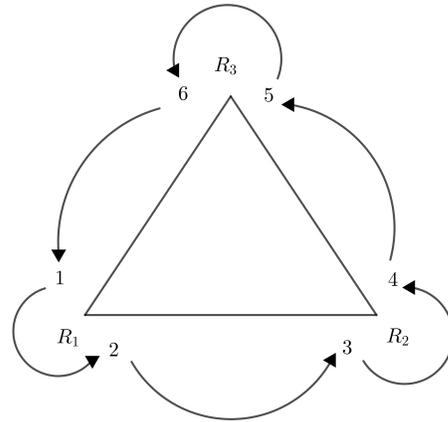
Para encontrar as 33 classes isóclinas-estáveis, faremos uso de vários resultados matemáticos conhecidos, cujas demonstrações serão omitidas, visto que não constituem o foco central deste trabalho. O método que adotaremos para obter os 33 casos tem as seguintes etapas: contagem das classes, expansão em subclasses, e eliminação de casos inexistentes.

Inicialmente, vamos calcular os casos possíveis de dinâmicas restritas à $\partial\Sigma$, isto é, desconsiderando o comportamento dos equilíbrios Q_i na direção interna ao simplexo suporte (e transversal ao plano G_i).

Note que cada equilíbrio R_i nos vértices é representado pelos valores de σ_{ij} e pode manifestar-se em duas formas: atrator ou repulsor, em relação a cada uma das direções consideradas. Dado que temos três pontos do tipo R_i e cada um deles possui duas direções de ação, temos um total de 6 possíveis valores de σ_{ij} (veja a Figura 4.4 (a)). Vamos estabelecer uma ordem específica para a interpretação dos símbolos, atribuindo valores de σ_{ij} , $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$, para as 6 posições nos vértices do simplexo. Iniciaremos no sentido anti-horário com o valor de σ_{13} na posição 1, seguido por σ_{12} na posição 2, σ_{21} , σ_{23} , σ_{32} nas posições 3, 4 e 5 respectivamente e, finalmente, σ_{31} na posição 6. Cada uma dessas posições e o sentido de interpretação são ilustrados na Figura 4.4 (b).



(a) Possíveis comportamentos para cada R_i em cada direção da fronteira.



(b) Sentido de interpretação.

Figura 4.4: Representação do simplexo.

Para simplificar nossos cálculos, iremos condensar as 6 variáveis em 3 novas. Os sinais σ_{ij} em cada vértice R_i do simplexo serão representados por um dos símbolos Δ , \circ , \square e \times , representando um par de sinais, onde:

$$\circ = \{+1, +1\},$$

$$\times = \{-1, -1\},$$

$$\square = \{+1, -1\},$$

$$\Delta = \{-1, +1\}.$$

Por exemplo, se o vértice com o equilíbrio R_1 (posição 1 e 2 de acordo com a Figura 4.4 (b)) é marcado pelo símbolo \circ , isso implica que $\sigma_{13} = 1$ e $\sigma_{12} = 1$, indicando que R_1 atrai dos dois lados da fronteira ao qual pertence. Se o vértice R_2 (posição 3 e 4 de acordo com a Figura 4.4 (b)) é representado pelo símbolo \times , isso significa que $\sigma_{21} = -1$ e $\sigma_{23} = -1$, indicando que R_2 repele dos dois lados da fronteira ao qual pertence. Por fim, se R_3 (posição 5 e 6 de acordo com a Figura 4.4 (b)) é marcado pelos símbolos \square ou Δ , isso implica que, no primeiro caso, $\sigma_{32} = 1$ e $\sigma_{31} = -1$, e no segundo caso, $\sigma_{32} = -1$ e $\sigma_{31} = 1$. Portanto, R_3 atrai em uma direção e repele na outra. Veja a Figura 4.5.

A partir de agora, optaremos por não mais referenciar os equilíbrios R_i como posições

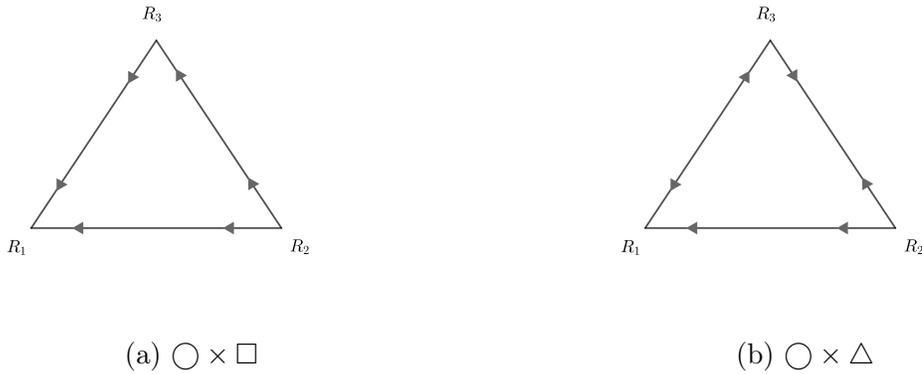


Figura 4.5: Exemplos de possíveis dinâmicas restritas à $\partial\Sigma$.

de vértices, mas sim utilizar os termos associados às posições 1, 2 e 3 do simplexo. Neste contexto, a posição 1 denota o vértice localizado na base à esquerda, a posição 2 indica o vértice na base à direita e a posição 3 refere-se ao vértice restante.

4.3 Classes geradoras

Devido às rotações que podem ocorrer no simplexo, não é viável utilizar métodos simples de contagem. Portanto, faremos uso de um resultado da teoria de ações de grupos. A demonstração está em [14] e uma série de aplicações desse podem ser consultadas em [15].

Teorema 4.12. *(Lema de Burnside) Seja G um grupo finito que atua sobre um conjunto X . Para cada g em G , seja X^g o conjunto de elementos em X que são fixados por g (também dito invariante à esquerda por g), ou seja, $X^g = \{x \in X : g.x = x\}$. Então, o número de classes é*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|,$$

onde $|G|$ é a cardinalidade de G e $|X/G|$ é o número de órbitas do conjunto X pela ação de G . A órbita de um elemento $x \in X$ é o conjunto de elementos em X para os quais x pode ser movido pela ação dos elementos de G .

Para utilizarmos o Lema de Burnside, é necessário definir o grupo de ação G . Vamos utilizar o grupo de rotação $G = \{R^+, R^-, Id\}$, onde R^+ representa a rotação horária, R^- indica a rotação anti-horária e Id denota a rotação identidade. O conjunto X no qual G atua é formado por todas as combinações dos símbolos Δ , \bigcirc , \square e \times ordenados em grupos de três.

O próximo passo é calcular, para cada $g \in G$, o conjunto de elementos invariantes sob a ação de g . Para o elemento Id , precisamos determinar o número de combinações possíveis dos símbolos Δ , \bigcirc , \square e \times , levando em consideração que temos três posições a serem preenchidas. Portanto, utilizando combinação simples, temos

$$|X^{Id}| = 4 \times 4 \times 4 = 64.$$

Para as rotações representadas pelos elementos R^+ e R^- , somente quatro elementos são fixados: $\Delta\Delta\Delta$, $\bigcirc\bigcirc\bigcirc$, $\square\square\square$ e $\times\times\times$. Qualquer outra combinação de símbolos é alterada pela rotação. Portanto,

$$|X^{R^+}| = 4 \text{ e } |X^{R^-}| = 4.$$

Aplicando o Lema de Burnside, temos

$$|X/G| = \frac{1}{3}(64 + 4 + 4) = 24.$$

Portanto, o número de órbitas após remover as rotações para as combinações que estamos interessados é 24. As órbitas são representadas pelos seguintes conjuntos: $\Delta\Delta\Delta$, $\bigcirc\bigcirc\bigcirc$, $\square\square\square$, $\times\times\times$, $\bigcirc\bigcirc\times$, $\bigcirc\bigcirc\square$, $\bigcirc\bigcirc\Delta$, $\times\times\bigcirc$, $\times\times\square$, $\times\times\Delta$, $\Delta\Delta\bigcirc$, $\Delta\Delta\times$, $\Delta\Delta\square$, $\square\square\bigcirc$, $\square\square\Delta$, $\square\square\times$, $\bigcirc\times\square$, $\bigcirc\square\times$, $\bigcirc\times\Delta$, $\bigcirc\square\Delta$, $\bigcirc\Delta\times$, $\bigcirc\Delta\square$, $\Delta\times\square$ e $\Delta\square\times$.

O próximo passo é classificar as 24 combinações de acordo com a quantidade de equilíbrios do tipo Q_i que elas geram. O processo consiste em percorrer as 24 combinações e analisar os pares de símbolos dois a dois em cada uma delas. Lembrando que cada Q_i é análogo ao ponto interior P do sistema bidimensional, os pares que geram Q_i são

os seguintes: $\bigcirc\Box, \bigcirc\bigcirc, \times\times, \times\Delta, \Delta\Box, \Delta\bigcirc, \Box\times, \Box\Delta$. Os pares que não geram Q_i são: $\bigcirc\times, \bigcirc\Delta, \times\Box, \times\bigcirc, \Delta\times, \Delta\Delta, \Box\Box, \Box\bigcirc$.

Neste momento, ao analisar cada uma das órbitas que encontramos ao aplicar o Lema de Burnside, considere as possíveis rotações das combinações de símbolos. Por exemplo,

$$\Delta\Box\times \Leftrightarrow \times\Delta\Box \Leftrightarrow \Box\times\Delta.$$

Em cada uma das órbitas, contabilize o número de pares que geram os equilíbrios Q_i . Assim, obtemos a seguinte classificação:

- i)** Combinações com 1 Q_i : $\bigcirc\bigcirc\times, \Delta\Delta\bigcirc, \Delta\Delta\times, \Box\Box\bigcirc, \Box\Box\times, \times\times\bigcirc, \bigcirc\Delta\Box, \Delta\times\Box$.
- ii)** Combinações com 2 Q_i : $\bigcirc\bigcirc\Delta, \bigcirc\bigcirc\Box, \times\times\Delta, \times\times\Box, \Delta\Delta\Box, \Box\Box\Delta, \bigcirc\Box\times, \bigcirc\times\Delta$.
- iii)** Combinações com 3 Q_i : $\bigcirc\bigcirc\bigcirc, \times\times\times, \bigcirc\Box\Delta, \Delta\Box\times$.
- iv)** Combinações com nenhum Q_i : $\Delta\Delta\Delta, \Box\Box\Box, \bigcirc\times\Box, \bigcirc\Delta\times$.

Para facilitar o entendimento, podemos visualizar as 24 combinações divididas em grupos de acordo com a quantidade de equilíbrios do tipo Q_i na fronteira, como mostrado nas Figuras 4.6 a 4.9.

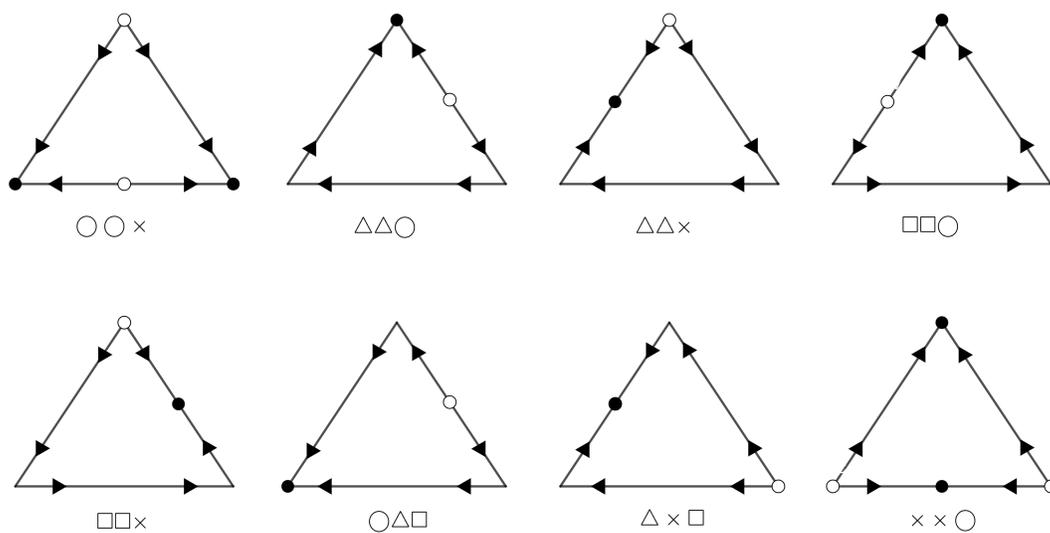


Figura 4.6: Fronteiras de simplexos possíveis com 1 equilíbrio do tipo Q_i .

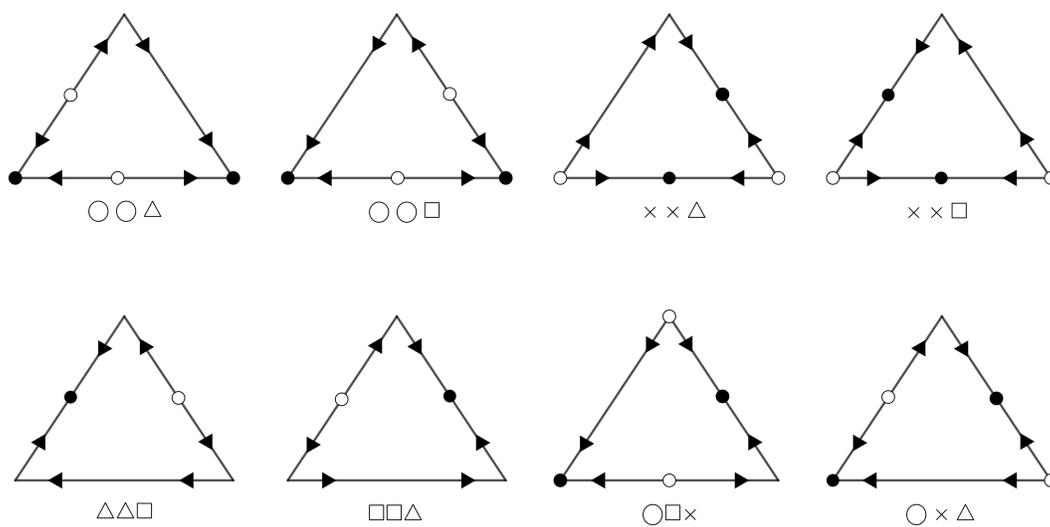


Figura 4.7: Fronteiras de simplexos possíveis com 2 equilíbrios do tipo Q_i .

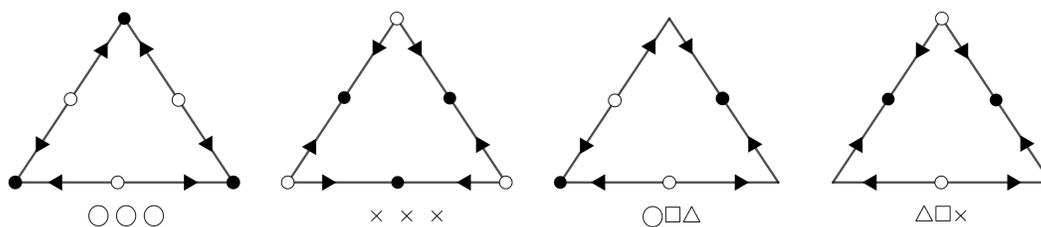


Figura 4.8: Fronteiras de simplexos possíveis com 3 equilíbrios do tipo Q_i .

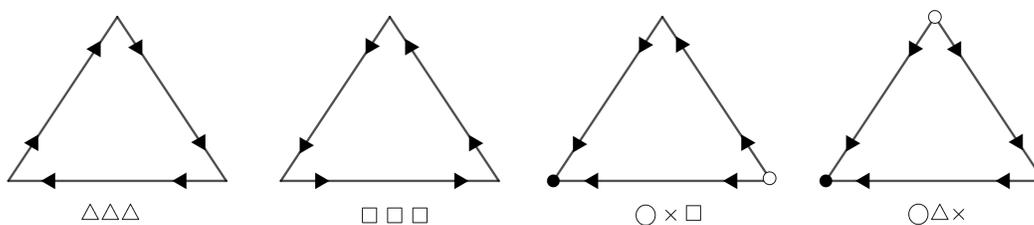


Figura 4.9: Fronteiras de simplexos possíveis sem nenhum equilíbrio do tipo Q_i .

Ainda, podemos remover 8 combinações de símbolos que são equivalentes a outra por reflexão em algum eixo do simplex. Por exemplo, $\bigcirc\bigcirc\Delta$ é equivalente à combinação $\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$. Com isto, restam 16 combinações possíveis, que serão referidas como *classes geradoras*, mostradas na Figura 4.10. É importante observar que essas 16 classes representam todos os possíveis comportamentos qualitativos na fronteira de Σ quando projetamos no simplex unitário.

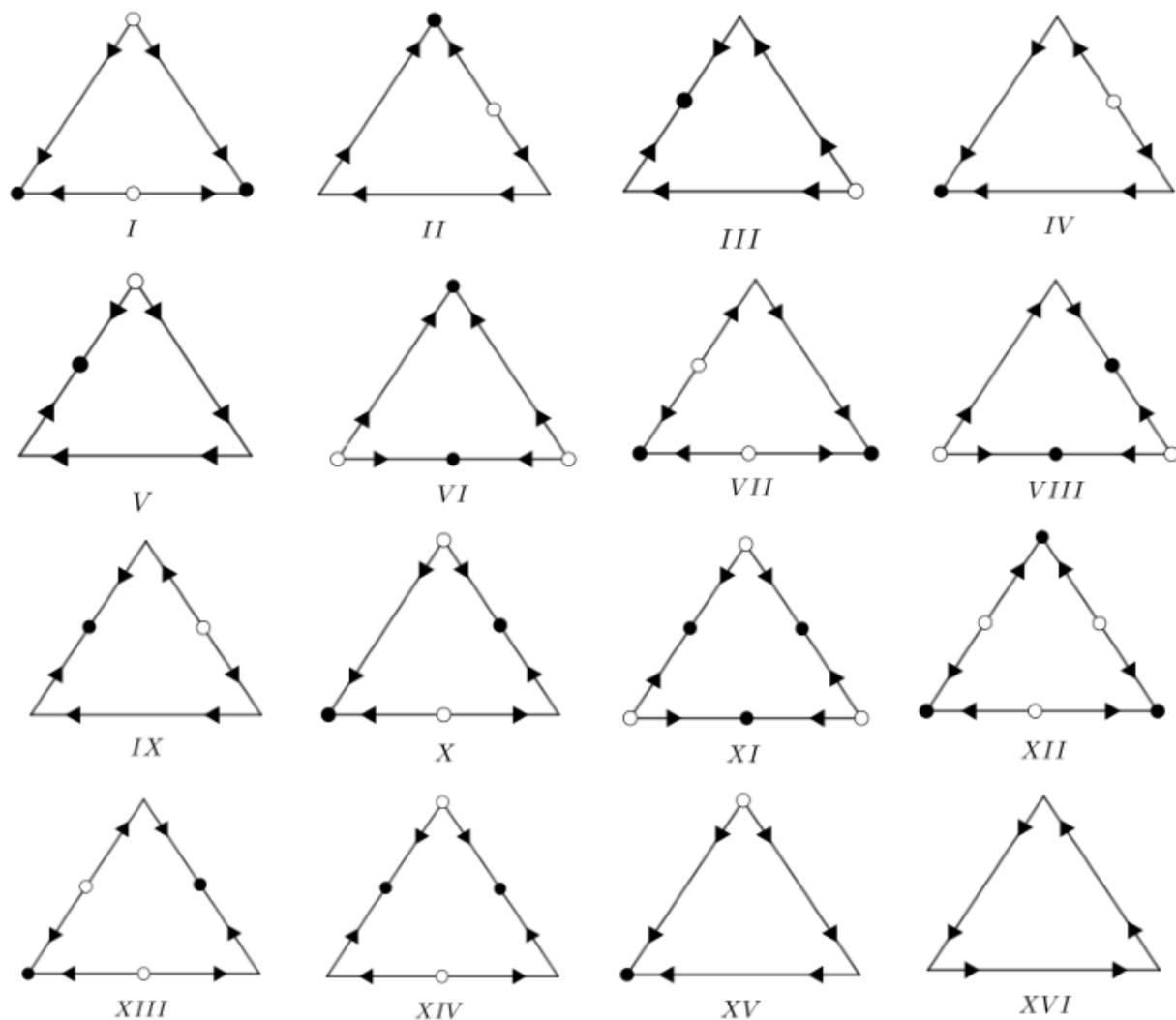


Figura 4.10: Classes geradoras das combinações qualitativas na fronteira de Σ

Para cada uma das 16 classes geradoras, conduzimos um estudo detalhado das possíveis posições relativas de cada equilíbrio Q_i em relação ao plano N_i . Ou seja, consideramos todas as possibilidades para o comportamento dos equilíbrios Q_i (atrator ou repulsor) em relação ao interior do simplexo. Por exemplo, a classe *III* gera duas classes distintas, conforme ilustrado na Figura 4.11. Na classe derivada *III* – 1, ele é atrator, enquanto, na classe derivada *III* – 2, é do tipo sela.

Aplicando o processo de forma análoga em todas as 16 classes geradoras obtivemos 50 diferentes possibilidades, as quais denominamos de *classes derivadas* (veja Figura 4.12).

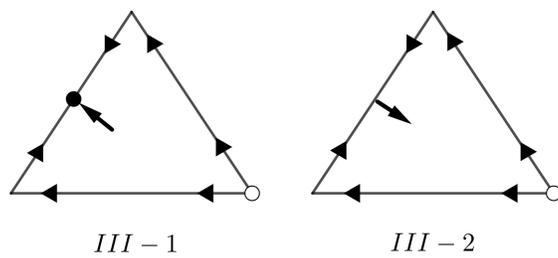
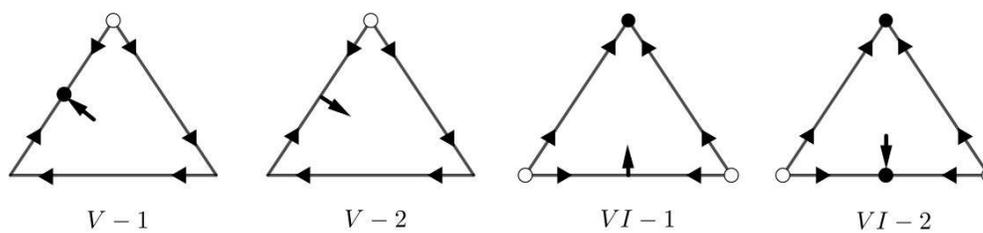
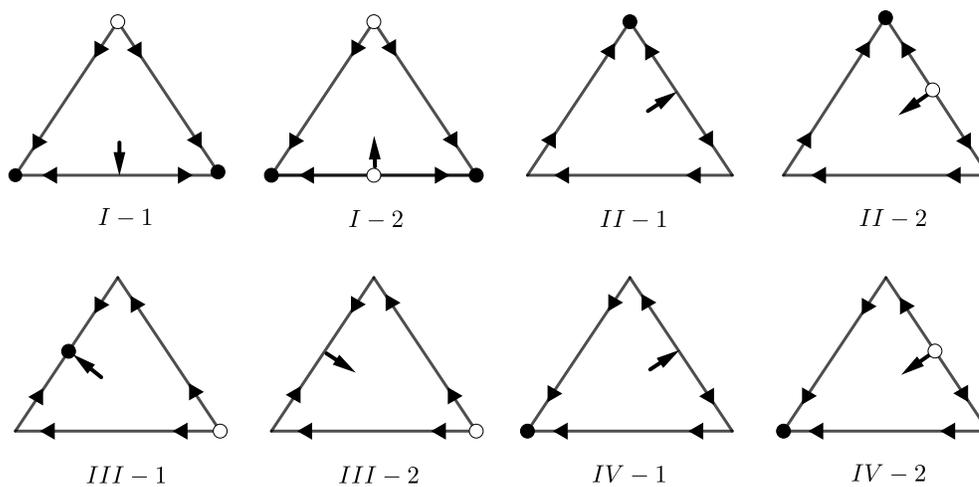
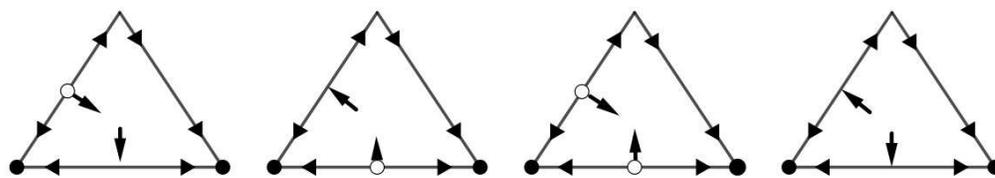


Figura 4.11: Exemplo das possíveis classes derivadas da classe *III*.



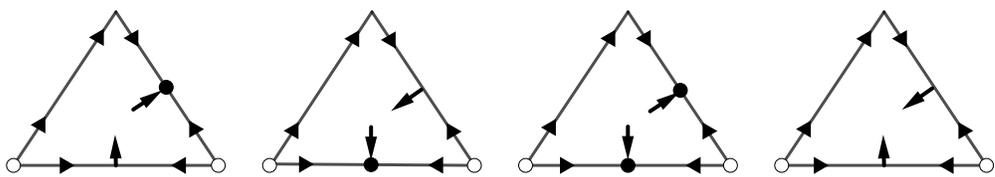


VII-1

VII-2

VII-3

VII-4

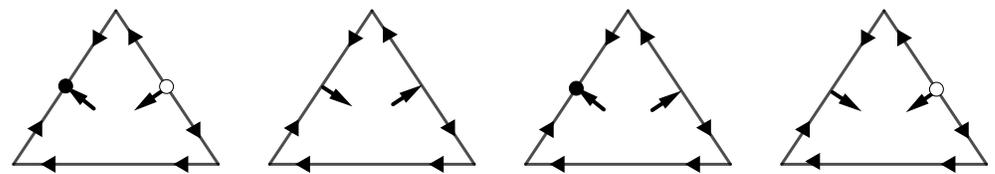


VIII-1

VIII-2

VIII-3

VIII-4

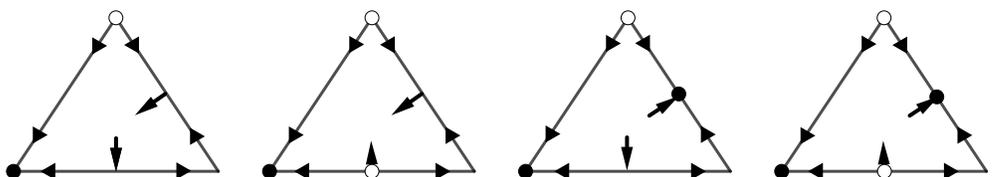


IX-1

IX-2

IX-3

IX-4

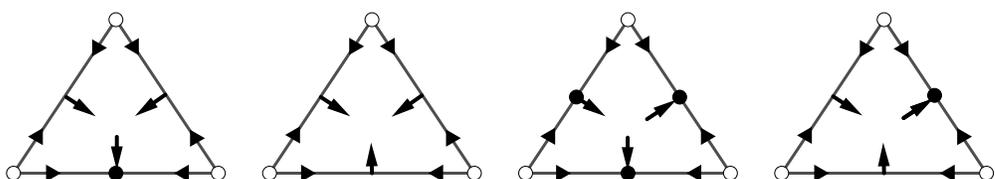


X-1

X-2

X-3

X-4

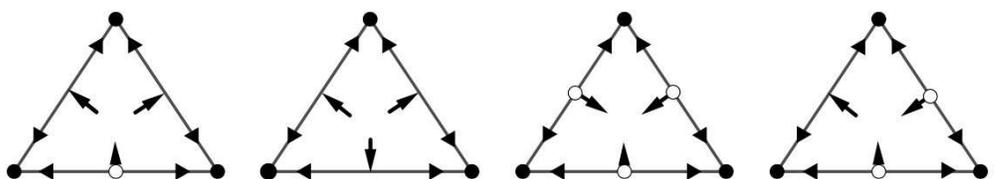


XI-1

XI-2

XI-3

XI-4



XII-1

XII-2

XII-3

XII-4

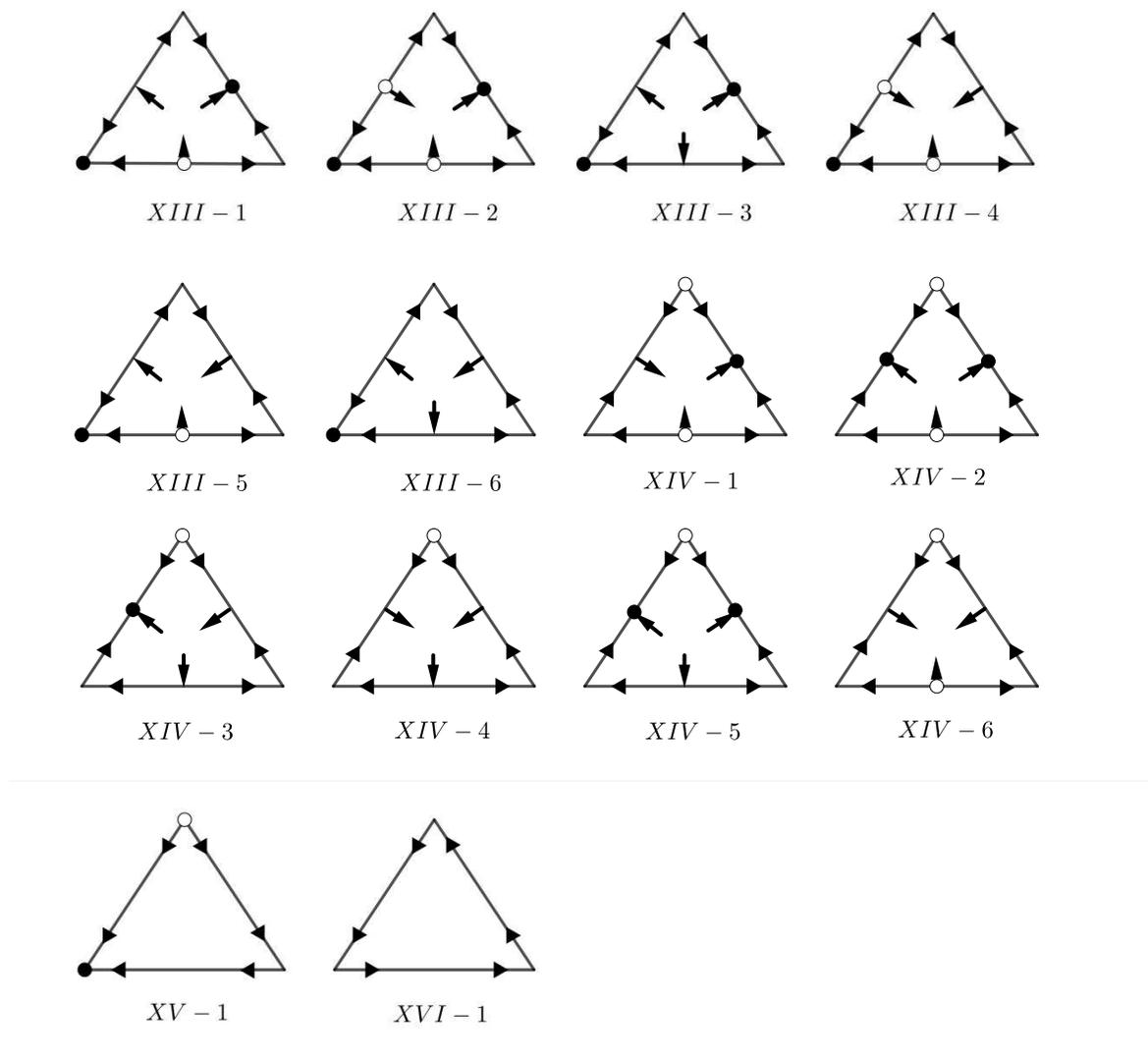


Figura 4.12: 50 Classes derivadas.

É importante notar que a geração destas classes derivadas se baseia em percorrer todos os *possíveis* casos. Assim, cada uma das classes representa um eventual conjunto de desigualdades que define um subconjunto no espaço de parâmetros correspondente a $CLV(3)$. Das 50 classes derivadas, 17 serão excluídas por não possuírem consistência intrínseca, ou seja, por corresponderem a subconjuntos vazios, como mostraremos mais adiante. Portanto, apresentamos a seguir uma análise mais detalhada das 50 classes derivadas construídas, eliminando as 17 que na verdade são inexistentes.

4.4 Análise geométrica das classes derivadas

O processo que faremos a partir de agora consiste em realizar uma análise geométrica nas classes derivadas. A finalidade é retirar classes derivadas que não possuem sentido matemático em nosso contexto, ou seja, encontrar as classes derivadas das 17 classes geradoras que não são realizadas por nenhum conjunto de valores de parâmetros.

Primeiramente, explicaremos como a dinâmica no contexto tridimensional de um equilíbrio Q_i é diretamente influenciada pelos comportamentos dos planos coordenados aos quais o equilíbrio planar Q_i não pertence, ou seja, G_j e G_k . Mais especificamente, se em um subsistema bidimensional existir um equilíbrio interior em um dos planos coordenados, sabemos que este plano é membro das classes isóclinas-estáveis 2 ou 3 do caso bidimensional como descritas na Figura 3.6. Como o ponto Q_i pode pertencer à região CI_i ou CL_i , podemos determinar geometricamente suas possíveis naturezas analisando o comportamento nos outros dois planos G_j e G_k .

Para ilustrar o que queremos fazer, atente-se ao seguinte exemplo.

Exemplo 4.13. *Considere a classe geradora IX. Esta classe possui dois equilíbrios do tipo Q_i . Para facilitar nosso entendimento, vamos considerar a nomenclatura natural nos pontos de equilíbrio do simplexo como na Figura 4.13.*

Precisamos determinar em quais componentes determinadas pela divisão do \mathbb{R}_+^3 pelos planos N_1 e N_2 estão os equilíbrios Q_1 e Q_2 e, assim, determinar suas naturezas, ou seja, determinar os valores de η_1 e η_2 . O comportamento de cada um dos lados do simplexo captura a dinâmica em cada plano coordenado como representado na Figura 4.14.

Para isso, além de destacar que os pontos R_i são da forma $R_i = (b_i/a_{ii})e_i$, destacamos os pontos $m_{ij} = (b_j/a_{ji})e_i$. Estes pontos serão nossa referência para relacionar as dinâmicas planares, que são de certa maneira disjuntas, em uma única dinâmica tridimensional coesa.

Como visto anteriormente, $\sigma_{ij} = \text{sgn}(b_i/a_{ii} - b_j/a_{ji})$ e, ainda, $\sigma_{ij} = 1$ se, e somente se, R_i é atrator no plano G_k para $i \neq j \neq k$. Assim, $\sigma_{12} = 1$, $\sigma_{21} = -1$, $\sigma_{23} = 1$, $\sigma_{32} = 1$, $\sigma_{31} = -1$ e $\sigma_{13} = -1$. Queremos usar estes valores para determinar os valores de η_1 e η_2 . No contexto atual, quando dissermos que R_i é “menor” ou “maior” que m_{ij} queremos

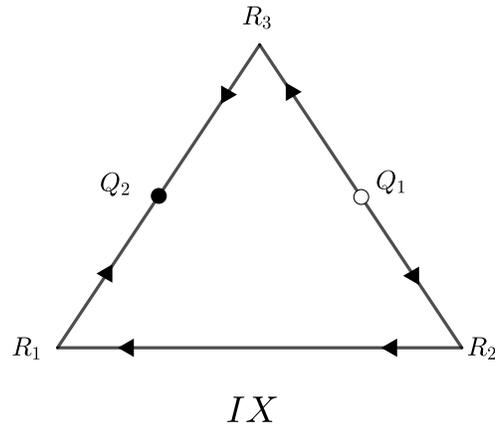


Figura 4.13: Representação da classe geradora IX .

dizer que a i -ésima coordenada de cada um destes pontos possui tal relação de diferença. Por exemplo, $\sigma_{12} = -1$ significa que R_1 é menor que m_{21} .

Cada plano N_i possui intercessão com os planos coordenados G_i e este conjunto é uma reta. Chamaremos essa reta de n_i . Em cada plano G_k , estamos interessados na reta n_k . Observe que no plano coordenado G_k estas retas têm como pontos de intercessão com os eixos coordenados os pontos m_{ki} e m_{kj} , respectivamente nos eixos X_i e X_j . O que precisamos fazer agora é simplesmente “ligar os pontos” e analisar onde os equilíbrios planares residem.

Para o equilíbrio Q_1 precisamos de informações sobre m_{12} e m_{13} . Sabemos que $\sigma_{21} = -1$ e $\sigma_{31} = -1$, assim m_{12} é maior que R_2 e m_{13} é maior que R_3 . Do mesmo modo, $\sigma_{12} = 1$ e $\sigma_{32} = 1$, assim m_{21} é menor que R_1 e m_{23} é menor que R_3 . Portanto, com essas configurações específicas de isóclinas, temos que $m_{12} > R_2 > m_{32}$, $m_{13} > R_3 > m_{23}$, $m_{13} > R_3 > m_{23}$, e $m_{31} > R_1 > m_{21}$. Logo, necessariamente teremos Q_1 na componente limitada determinada por N_1 , e Q_2 está na componente ilimitada determinada por N_2 , ou $Q_1 \in CL_1$ e $Q_2 \in CI_2$ como é ilustrado na Figura 4.15.

É importante observar que não é somente nesse caso específico que essa análise funciona. Num sistema bidimensional, se o equilíbrio interior P for atrator, ele estará sempre

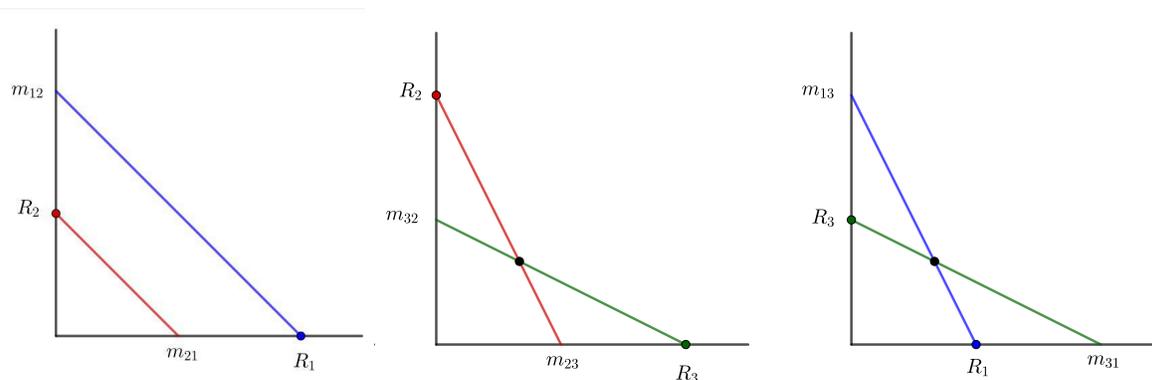


Figura 4.14: Configuração de isóclinas em cada plano coordenado seguindo a classe geradora IX . Da esquerda para a direita: plano $G_3 = X_1 \times X_2$, plano $G_1 = X_2 \times X_3$ e o plano $G_2 = X_1 \times X_3$, respectivamente.

acima da reta que liga os equilíbrios axiais, e se ele for uma sela, estará abaixo desta reta.

Concluimos que com essa configuração de isóclinas devemos necessariamente ter $\eta_1 = 1$ e $\eta_2 = -1$. Assim, a classe geradora IX tem somente uma classe derivada matematicamente viável que é a classe derivada $IX - 1$. As classes derivadas $IX - 2$, $IX - 3$ e $IX - 4$ são excluídas simplesmente porque não podem ocorrer. Na Figura 4.16 temos em três dimensões o processo que acabamos de realizar, com cada plano coordenado se interligando com os demais planos.

O processo de análise geométrica segue os mesmos moldes do exemplo anterior para todas as classes geradoras. Basicamente, vamos analisar os dois lados do simplexo na classe geradora que não contém o equilíbrio Q_i em questão. Ao realizar as análises nas 16 classes geradoras, percebemos que padrões nas configurações de isóclinas podem ser facilmente identificados no simplexo da classe geradora. Em resumo, ao estudar um equilíbrio do tipo Q_i , precisamos dos valores de σ_{ji} e σ_{ki} . Existem três padrões possíveis de configurações de isóclinas que estamos considerando: $\sigma_{ji} = \sigma_{ki} = 1$, $\sigma_{ji} = \sigma_{ki} = -1$, e $\sigma_{ji} \neq \sigma_{ki}$. Através da simples visualização dos lados opostos do simplexo, listados na tabela da Figura 4.17, podemos determinar as possíveis naturezas dos equilíbrios planares no lado oposto, que são listadas do lado esquerdo da tabela. Na Figura 4.17, no lado esquerdo da tabela, temos

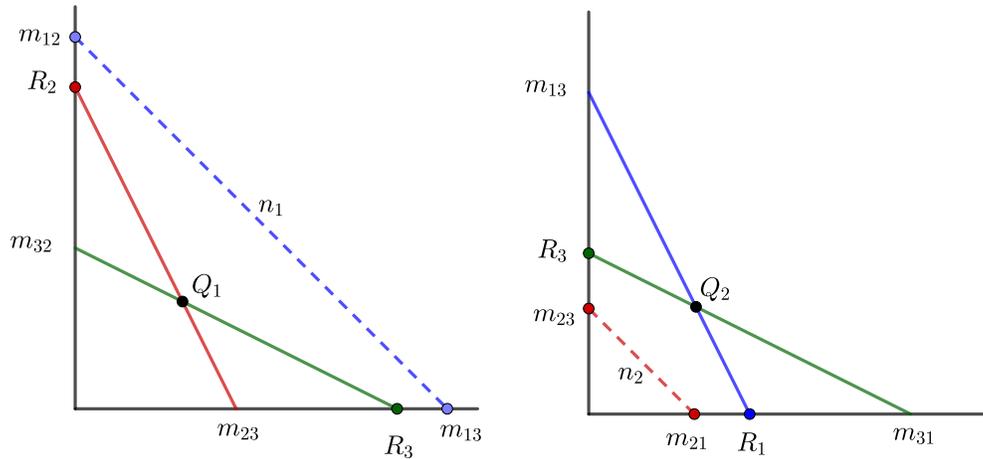


Figura 4.15: Ilustração da configuração de isóclinas para Q_1 e Q_2 na classe geradora IX . À esquerda a dinâmica restrita ao plano G_1 e à direita a dinâmica restrita ao plano G_2 .

os três casos discutidos anteriormente. Por exemplo, $\sigma_{ji} = \sigma_{ki} = 1$ implica em uma das três possíveis configurações de “lados” do simplexo, ilustradas do lado direito da tabela. Esses lados representam as possíveis dinâmicas restritas aos planos G_k e G_j , enquanto o equilíbrio planar Q_i está no lado restante que representa a dinâmica no plano G_i . Assim, pelo mesmo processo descrito anteriormente, concluímos que a natureza de um equilíbrio Q_i atrator na dinâmica em G_i (representado por \bullet no simplexo) deve ser repulsor na direção transversal ao plano, isto é, $\eta = -1$. Analogamente, um equilíbrio repulsor na dinâmica em G_i (representado por \circ no simplexo) pode ser atrator ou repulsor, ou seja, η_i pode ser 1 ou -1 . Os outros dois casos e os lados que os representam são listados de maneira similar na Figura 4.17.

Ao concluir esta análise geométrica para cada uma das 16 classes geradoras, excluimos as 11 seguintes classes derivadas: $III-2$, $IV-1$, $IX-2$, $IX-3$, $IX-4$, $XIII-4$, $XIII-5$, $XIII-6$, $XIV-3$, $XIV-4$ e $XIV-5$.

Como caso especial, vamos estudar o seguinte exemplo.

Exemplo 4.14. *Considere a classe geradora XIV . Observe que até agora excluimos $XIV-3$, $XIV-4$ e $XIV-5$, pois o único equilíbrio planar repulsor na dinâmica*

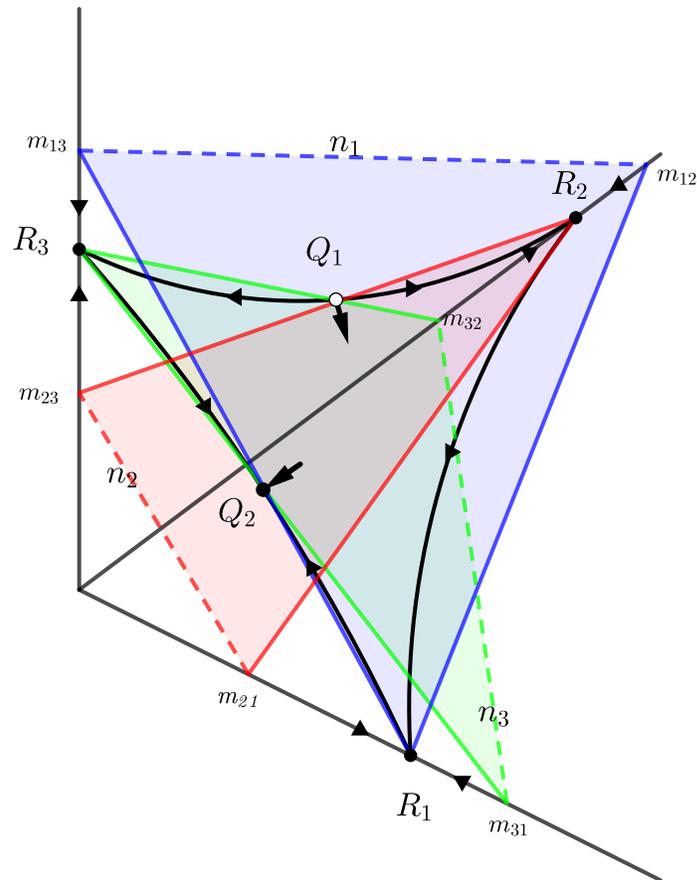


Figura 4.16: Representação em três dimensões da classe derivada $IX - 1$, a única classe derivada viável gerada pela classe geradora IX . Os planos isóclinos e as retas n_i estão coloridas e destacadas na figura.

$\sigma_{ji} = \sigma_{ki} = 1$ $\bullet \eta_i = -1$ $\circ \eta_i = \pm 1$	
$\sigma_{ji} = \sigma_{ki} = -1$ $\bullet \eta_i = \pm 1$ $\circ \eta_i = +1$	
$\sigma_{ji} \neq \sigma_{ki}$ $\bullet \eta_i = \pm 1$ $\circ \eta_i = \pm 1$	

Figura 4.17: Tabela com representação dos possíveis configurações de “lados” G_j e G_k do simplexo e seus efeitos no comportamento do equilíbrio Q_i (quando existe) no lado restante. Considere também as reflexões que possuem o mesmo comportamento. O símbolo \circ representa equilíbrios Q_i do tipo repulsor com a dinâmica restrita à fronteira de Σ . O símbolo \bullet representa equilíbrios Q_i do tipo atrator com a dinâmica restrita à fronteira de Σ .

restrita à fronteira de Σ deve ser repulsor na direção transversal ao plano coordenado que este está contido. Quando consideramos os outros dois equilíbrios planares pela análise geométrica básica dos lados, vemos que estes por sua vez podem assumir a natureza tanto atratora quanto repulsora. Para facilitar o nosso estudo, considere a nomenclatura para os equilíbrios como na Figura 4.18.

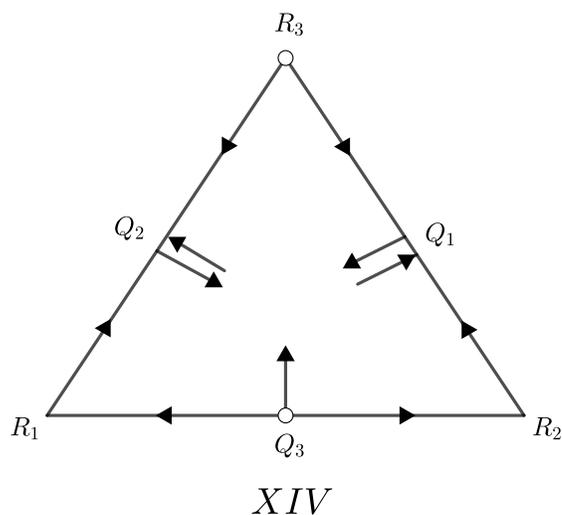


Figura 4.18: Possíveis comportamentos dos equilíbrios planares de dinâmicas geradas pela classe geradora XIV .

Na classe derivada $XIV - 6$, todos os equilíbrios planares são repulsores na direção transversal ao plano que estes pertencem. Mostraremos agora que esta classe derivada não pode existir. A análise geométrica ilustrada na Figura 4.19 é a seguinte: se considerarmos Q_1 sendo repulsor na direção transversal, obrigatoriamente Q_2 vai ser atrator na direção transversal. Isso se deve ao fato que $m_{23} > m_{13}$. Poderia também ocorrer $m_{23} < m_{13}$ e a natureza dos equilíbrios seria trocada. Observe que se ocorrer $m_{23} > m_{13}$ ou $m_{23} < m_{13}$, não muda o fato que $\sigma_{21} \neq \sigma_{31}$ e $\sigma_{12} \neq \sigma_{32}$. Em resumo, Q_1 e Q_2 não podem ser repulsores simultaneamente na classe derivada $XIV - 6$ e, portanto, esta classe derivada deve ser excluída.

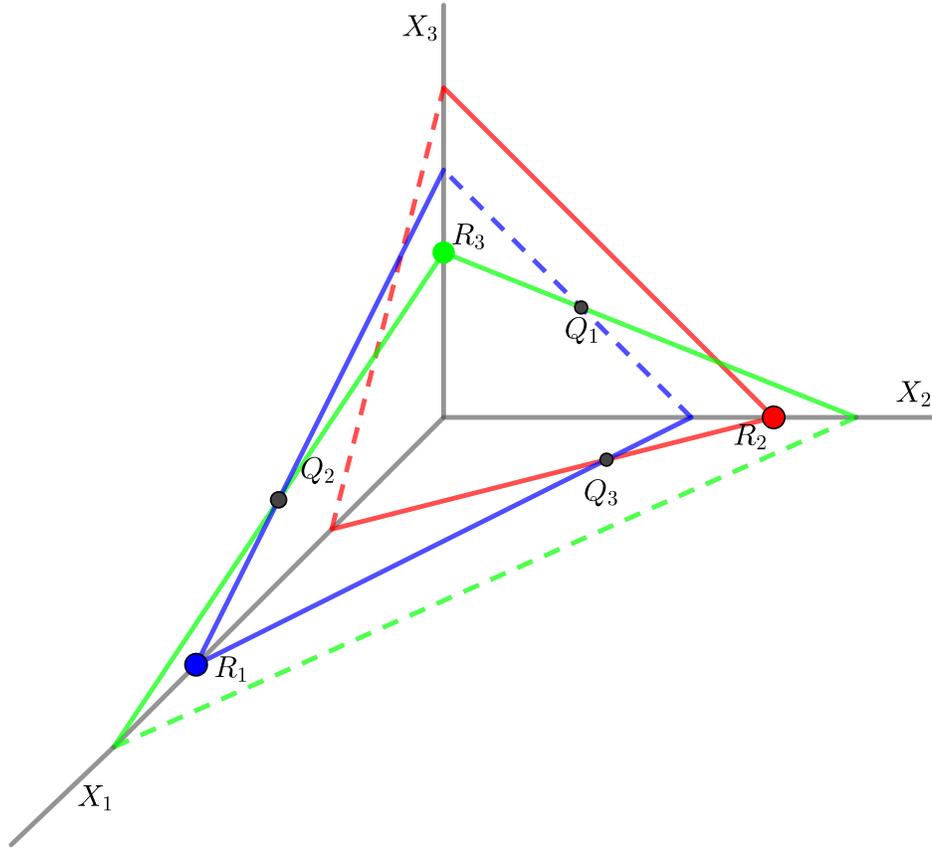


Figura 4.19: Representação da classe geradora XIV quando consideramos Q_1 sendo repulsor. Observe que obtemos a classe derivada $XIV - 1$.

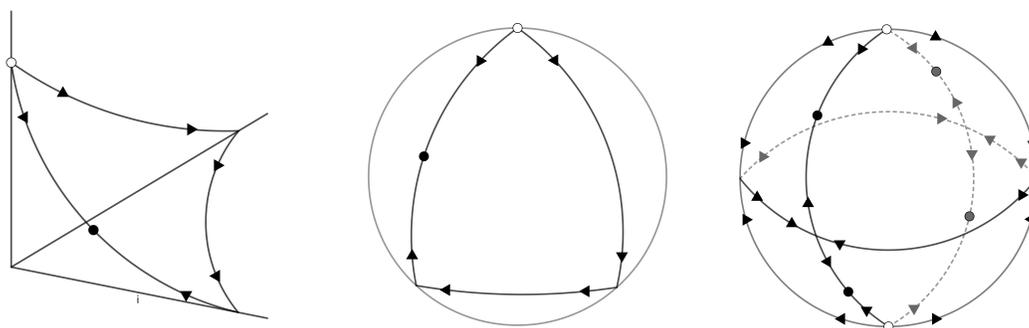
Com o exemplo anterior, além das 11 classes já excluídas, eliminamos a $XIV - 6$. A classe derivada $XIII - 3$ por ser o fluxo inverso de $XIV - 6$ também é excluída. Assim, eliminamos 13 classes derivadas. As classes derivadas $XI - 3$, $XI - 4$, $XII - 3$, $XII - 4$ também podem ser excluídas por uma análise semelhante à que fizemos no exemplo anterior, porém optamos por explorar algumas ferramentas novas para obter as classes isóclinas-estáveis em $CLV(3)$. Estas ferramentas estão detalhadas nas seções seguintes.

Resumindo, das 50 classes derivadas, excluímos as classes $III - 2$, $IV - 1$, $IX - 2$, $IX - 3$, $IX - 4$, $XI - 4$, $XII - 3$, $XII - 4$, $XIII - 3$, $XIII - 4$, $XIII - 5$, $XIII - 6$, $XIV - 3$, $XIV - 4$, $XIV - 5$ e $XIV - 6$. Restam agora 37 classes. Destas ainda excluïremos 4 classes: $XI - 3$, $XI - 4$, $XII - 3$ e $XII - 4$. Teremos, então, as 33 classes.

4.5 Teorema de Poincaré-Hopf e existência de pontos de equilíbrio interiores

Aplicaremos agora a Teoria dos Índices para estudar a dinâmica no simplexo suporte Σ . A ideia central consiste em empregar o Teorema de Poincaré-Hopf [16] para determinar quais das 50 classes derivadas possuem pontos de equilíbrio no interior de Σ . Isso, por consequência, nos permitirá descartar algumas classes que não existem de fato. Um resumo da Teoria de Índices e o enunciado do Teorema de Poincaré-Hopf para a esfera podem ser encontrados no Anexo A.

Para evitar ambiguidades topológicas ao calcular o índice em uma superfície com bordo, vamos projetar o simplexo suporte Σ na esfera S^2 e refletir em todos os planos coordenados, conforme o processo ilustrado passo a passo na Figura 4.20. É importante notar que se um ponto de equilíbrio interior P existir, o seu índice será contabilizado oito vezes, uma vez em cada octante, e denotaremos seu índice por $I(P)$.



(a) Σ referente a classe derivada $V - 1$. (b) Projeção do simplexo Σ em S^2 . (c) Reflexão da projeção de Σ em todos os octantes de S^2 .

Figura 4.20: O processo para o cálculo de $I(p)$.

Dado que o índice de um atrator ou repulsor é 1 e o índice de sela é -1 , e como a soma dos índices do fluxo induzido na esfera é 2, pelo Teorema de Poincaré-Hopf, concluímos que

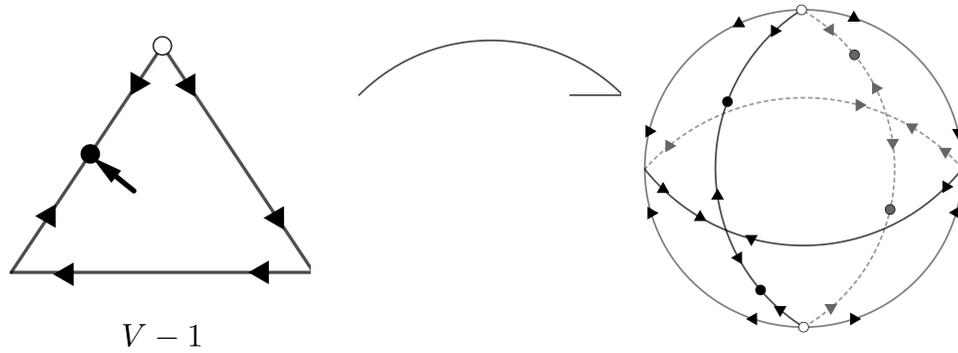


Figura 4.21: Projeção e reflexão da classe derivada $V - 1$ na esfera S^2 .

para cada uma das 37 classes derivadas restantes, a seguinte equação deve ser satisfeita:

$$1a + 1r - 1s + 8i(P) = 2, \quad (4.2)$$

onde a , r e s representam os números de equilíbrios atratores, repulsores e selas no simplexo suporte Σ , respectivamente, e $i(P)$ é o índice de P contabilizado em S^2 ao projetarmos o simplexo suporte Σ . Observe que esta equação nos informa a quantidade e o comportamento dos pontos de equilíbrio interiores.

Para facilitar os cálculos em cada uma das classes derivadas ainda restantes, utilizamos as seguintes observações:

- i) Pontos de equilíbrio do tipo R_i nos vértices do simplexo têm sua quantidade multiplicado por 2.
- ii) Pontos de equilíbrio do tipo Q_i nos lados do simplexo têm sua quantidade multiplicado por 4.

Para facilitar o entendimento veja os seguintes exemplos.

Exemplo 4.15. *Consideremos a classe derivada $V - 1$. Toda a informação de Σ está contida no simplexo unitário, o que nos permite utilizá-lo para construir a projeção em S^2 . O processo ocorre da seguinte maneira.*

Os pontos de equilíbrio são contabilizados da seguinte maneira, ilustrada na Figura 4.21: os pontos R_i nos vértices são duplicados, e os pontos Q_i nos eixos são quadruplicados. Logo, Como R_1 e R_3 são selas, R_2 é repulsor e Q_3 é atrator, temos $a = 4$, $r = 2$ e $s = 4$. Assim, segundo a equação (4.2), utilizando esses valores, obtemos:

$$1(4) + 1(2) - 1(4) + 8i(P) = 2 \Leftrightarrow 2 + 8i(P) = 2 \Leftrightarrow i(P) = 0.$$

Portanto, pelo Teorema de Poincaré-Hopf, não existem pontos de equilíbrio interiores, pois $i(P) = 0$. Em outras palavras, os pontos interiores à Σ são pontos regulares para a dinâmica do sistema.

Exemplo 4.16. Considere a classe derivada $V - 2$. Esta classe possui um ponto de equilíbrio repulsor e duas selas do tipo R_i e uma sela do tipo Q_i . Logo, temos $a = 0$, $r = 2$ e $s = 8$. Aplicando a fórmula (4.2), resulta que

$$1(2) + 1(0) - 1(8) + 8i(P) = 2 \Leftrightarrow i(P) = 1.$$

Logo, segundo o Teorema de Poincaré-Hopf, o ponto de equilíbrio interior deve existir para a classe derivada $V - 2$, e deve ser do tipo atrator ou repulsor.

Fazendo os cálculos para cada uma das classes derivadas restantes obtemos as seguintes conclusões:

i) Classes derivadas que não possuem pontos de equilíbrio no interior de Σ :

$$I - 1, II - 2, III - 1, IV - 2, V - 1, VI - 1, VII - 1, VII - 2, VIII - 1, VIII - 2, IX - 1, X - 2, X - 3, XI - 1, XII - 1, XIII - 1, XIV - 1, XV - 1.$$

ii) Classes derivadas que possuem pontos de equilíbrio no interior de Σ com comportamento de sela:

$$I - 2, VI - 2, VII - 3, VIII - 3, X - 4, XI - 4, XII - 4, XIII - 2, XIV - 2.$$

iii) Classes derivadas que possuem pontos de equilíbrio no interior de Σ com comportamento atrator ou repulsor:

$II - 1, V - 2, VII - 4, VIII - 4, X - 1, XI - 2, XII - 2, XVI - 1.$

iv) Classes derivadas que são excluídas pelo Teorema de Poincaré-Hopf:

$XI - 3, XII - 3.$

Observação 4.17. *Um pequeno adendo sobre as classes derivadas excluídas pelo Teorema de Poincaré-Hopf e pela teoria dos índices é que nas classes listadas no item (iv), existem índices com comportamentos não usuais, ou seja, índices que não têm interpretação matemática significativa em nosso contexto. Por exemplo, consideremos a classe derivada $XII - 3$. Ao realizar os cálculos, obtemos para este caso $i(P) = -2$, o que não possui uma interpretação coerente, visto que, esse índice contraria o fato do único ponto de equilíbrio P no interior de Σ ser simples, conforme a Proposição 4.7.*

Neste estágio, temos ainda 35 das 50 classes derivadas que começamos. A próxima seção fornece um método alternativo para excluir as duas classes derivadas restantes, que envolve a aplicação de um resultado de teoria qualitativa de um ponto de vista topológico sobre as fronteiras das bacias de atração.

4.6 Análise qualitativa-topológica via bacias de atração

O processo que faremos a partir de agora é aplicar os resultados descritos no Anexo B nas classes derivadas $XI - 4$ e $XII - 4$ que ainda precisam de análise. O método será excluir sistemas que apresentam patologias em sua estrutura, como contradições ao Teorema da Bacia de Atração. Este teorema fornece critérios para determinar quais equilíbrios pertencem à fronteira da bacia de atração de um equilíbrio x^* .

Exemplo 4.18. *Analizaremos agora a classe derivada $XII - 4$. O Teorema de Poincaré-Hopf garante a existência de um ponto de equilíbrio no interior, no entanto, esse ponto do tipo P é uma sela. Na Figura 4.22, visualizamos o simplexo unitário que contém a dinâmica de Σ de acordo com a classe derivada $XII - 4$.*

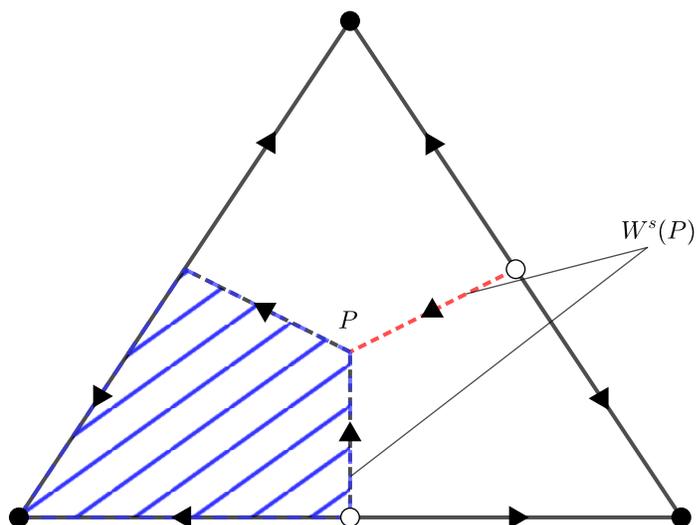


Figura 4.22: Representação da classe derivada $XII-4$. Observe que o ponto de equilíbrio interior P do tipo sela está contido na fronteira da bacia de atração de R_1 , mas $W^s(P) \not\subseteq \partial B(R_1)$.

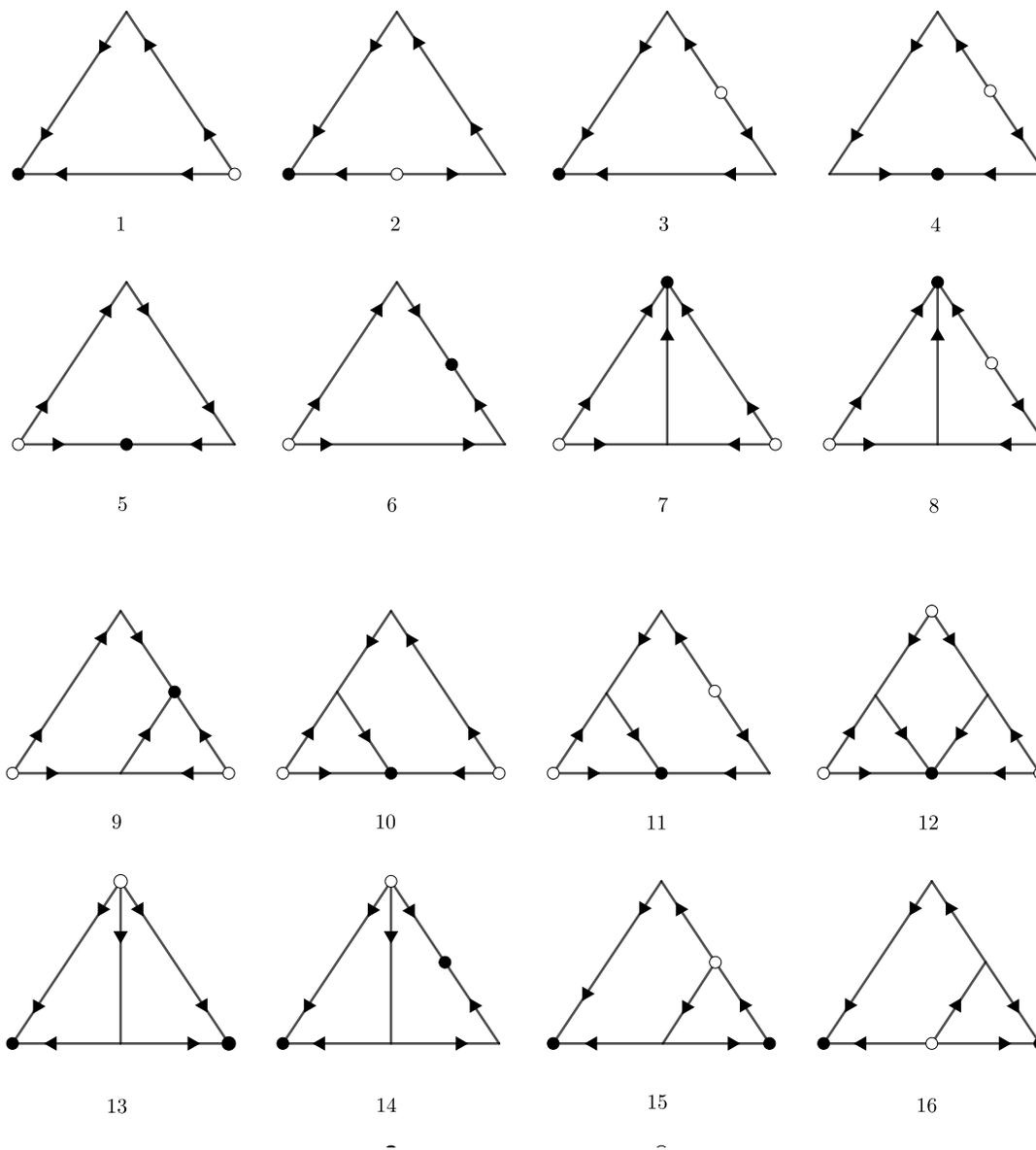
Observa-se que o ponto de sela interior P está na fronteira da bacia de atração de um dos equilíbrios atratores do sistema. No entanto, uma das componentes de $W^s(P)$ não está contida na fronteira de $B(\gamma)$, onde γ é um equilíbrio atrator. De acordo com o Teorema da Fronteira da Bacia de Atração essa classe derivada não pode existir.

Se considerarmos o fluxo inverso na classes derivada $XII-4$, obtemos, a classe derivada $XI-4$. Portanto, por meio da mesma análise, concluímos que essa classe derivada também deve ser excluída.

4.7 As 33 classes isóclinas-estáveis

Chegamos, assim, às 33 classes isóclinas-estáveis para $CLV(3)$. É importante notar que são as mesmas classes obtidas no artigo de referência [1]. As classes estão representadas na Figura 4.23. Observe que foram adicionadas as variedades estáveis e instáveis dos

pontos de sela. A notação permanece a mesma que já tínhamos introduzido.



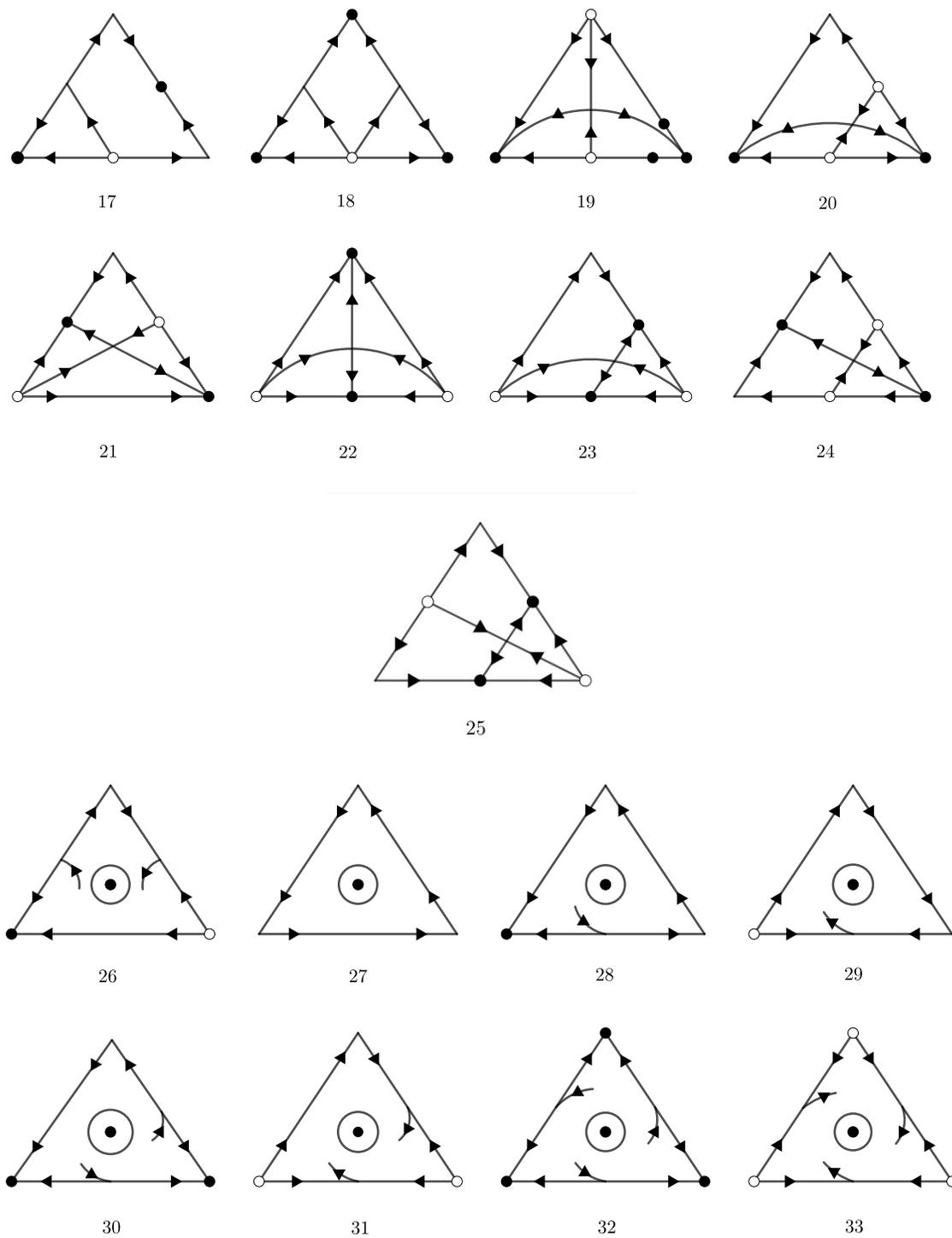


Figura 4.23: 33 classes isóclinas-estáveis para $CLV(3)$. O símbolo \odot representa uma região de dinâmica desconhecida. O símbolo \bullet representa um ponto de equilíbrio atrator e o símbolo \circ representa um ponto de equilíbrio repulsor.

Observação 4.19. *Note que as classes de 1 a 25 possuem dinâmicas no interior de Σ que são bastante “comportadas” no sentido em que podemos compreender completamente o comportamento do sistema ao analisar apenas a configuração das isóclinas. Entretanto, nas classes de 26 a 33, todas apresentam equilíbrios no interior de Σ e, devido ao estado atual da teoria, não podemos fornecer uma descrição detalhada da dinâmica nas proximidades desses equilíbrios.*

Proposição 4.20. *Não existem órbitas periódicas nas classes isóclinas-estáveis de 1 à 25.*

Demonstração.

As classes de 1 à 18 não possuem pontos de equilíbrios interiores e as classes 19 à 25 possuem pontos de equilíbrio com natureza de sela. Aplicando a teoria de Poincaré-Bendixon, concluímos que não pode haver órbitas periódicas nas classes isóclinas-estáveis de 1 à 25. ■

Observação 4.21. *O significado ecológico da Proposição 4.20 é que os sistemas com configurações de isóclinas referentes as classes 1 a 25, eventualmente levam à extinção de uma ou mesmo duas das espécies. Em outras palavras, nestas 25 classes não pode haver coexistência estável, mesmo de natureza oscilatória, das três espécies.*

Ao analisarmos as 33 classes isóclinas-estáveis em $CLV(3)$ e traçarmos um paralelo com as classes isóclinas-estáveis em $CLV(2)$, que por sua vez são topologicamente estáveis, podemos refletir sobre quais das classes em $CLV(3)$ também são topologicamente estáveis. Diferentemente da conjectura do artigo original [1], reformulamos para o seguinte enunciado.

Conjectura 4.22. *As classes isóclinas-estáveis 1 à 25 são topologicamente estáveis. As classes 32 e 33 também são topologicamente estáveis.*

No próximo capítulo mostraremos que as classes de 26 à 31 são divididas em subclasses de acordo com a existência de órbitas periódicas. Mostraremos também alguns resultados que justificam que as classes 32 e 33 não possuem órbitas periódicas.

4.8 Exemplos

Ilustraremos agora como podemos utilizar toda a teoria vista neste capítulo para encontrar a classe de um campo $F \in CLV(3)$ dado. Vamos calcular os σ_{ij} , dados por

$$\sigma_{ij} = \text{sgn}((AR_i)_j - b_j).$$

Além disso, lembramos que o caso $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ implica na existência do equilíbrio Q_k no plano G_k , e para isso devemos calcular também o valor de η_k , dado por

$$\eta_i = \text{sgn}((AQ_i)_i - b_i).$$

Exemplo 4.23. *Considere o seguinte sistema Lotka-Volterra $\dot{x}_i = x_i(b_i - (AX)_i)$ com o seguinte conjunto de parâmetros:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1,1 & 0,8 \\ 1,1 & 1 & 0,8 \\ 1,01 & 1,01 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Queremos saber a qual das 33 classes isóclinas este sistema pertence. Precisamos, então, calcular os valores de σ_{ij} para $i, j = 1, 2, 3$, com $i \neq j$, e η_i para $i = 1, 2, 3$ caso existam. Fazendo os cálculos obtemos os seguintes valores: $\sigma_{12} = 1, \sigma_{21} = 1, \sigma_{13} = 1, \sigma_{31} = -1, \sigma_{32} = -1, \sigma_{23} = 1$. Como $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, existe o ponto de equilíbrio Q_3 .

Com isso, concluímos que a dinâmica em cada plano coordenado é:

- i)** *No plano G_1 : R_2 é atrator e R_3 é repulsor.*
- ii)** *No plano G_2 : R_1 é atrator e R_3 é repulsor.*
- iii)** *No plano G_3 : R_1, R_2 são atratores e existe um ponto Q_3 repulsor.*

Vemos que esta configuração dos σ_{ij} corresponde à classe geradora I (Figura 4.10), que gera as classes 13 e 19 (Figura 4.23). Para decidir qual das duas, calculamos η_3 .

Calculando, obtemos que $\eta_3 = -1$. Observe que neste caso, o valor obtido de η_3 implica na existência de um ponto de equilíbrio interior P com natureza de sela.

Com os valores calculados e analisando as 33 classes isóclinas dadas pela Figura 4.23 podemos afirmar que este sistema pertence à classe 19. Na Figura 4.24 temos uma simulação numérica com os parâmetros fornecidos.

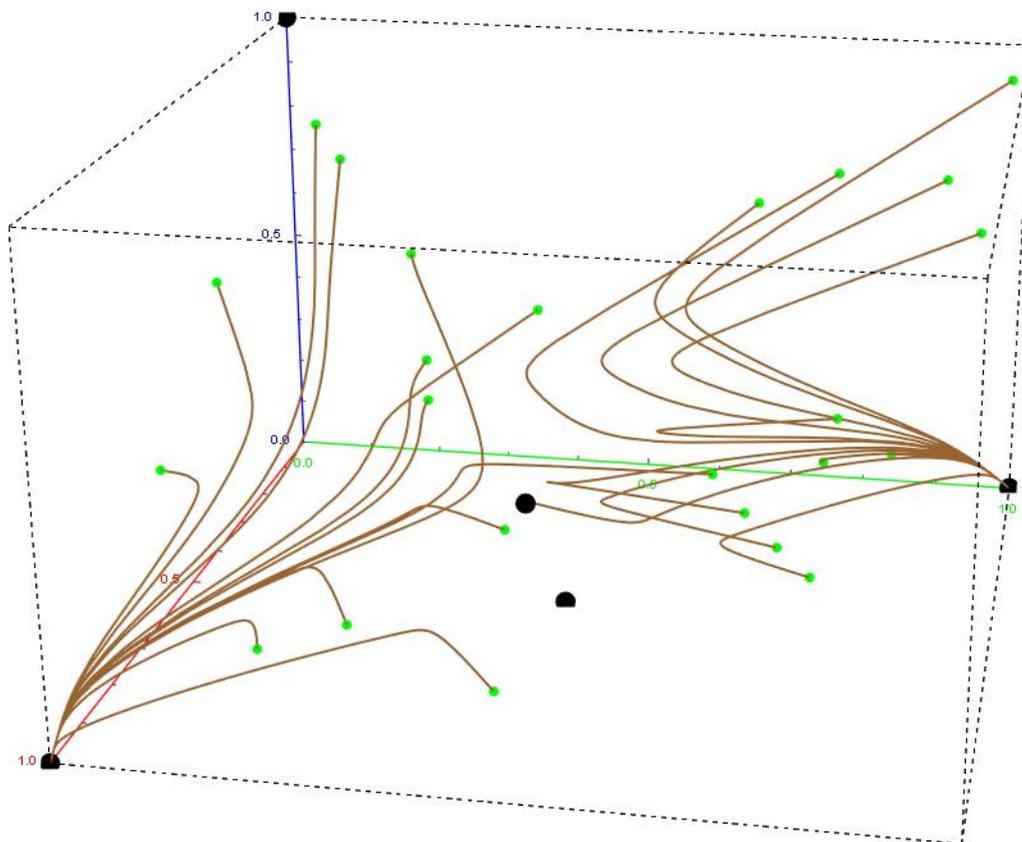


Figura 4.24: Retrato de fase do sistema Lotka-Volterra tridimensional com os parâmetros dados em (4.3).

Exemplo 4.24. Considere o seguinte sistema Lotka-Volterra $\dot{x}_i = x_i(b_i - (AX)_i)$ com o seguinte conjunto de parâmetros:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1,1 & 0,8 \\ 1,1 & 1 & 0,8 \\ 1,1 & 1,1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Fazendo os cálculos obtemos os seguintes valores: $\sigma_{12} = 1, \sigma_{21} = 1, \sigma_{13} = 1, \sigma_{31} = -1, \sigma_{32} = -1, \sigma_{23} = 1$. Observe que são os mesmos valores obtidos no Exemplo 4.3. Novamente temos a configuração da classe geradora I. Porém, fazendo os cálculos temos que $\eta_3 = 1$. Neste caso Q_3 atrai na direção do interior de Σ . Portanto, o sistema faz parte da classe 13. Na Figura 4.25 temos uma simulação numérica com os parâmetros fornecidos.

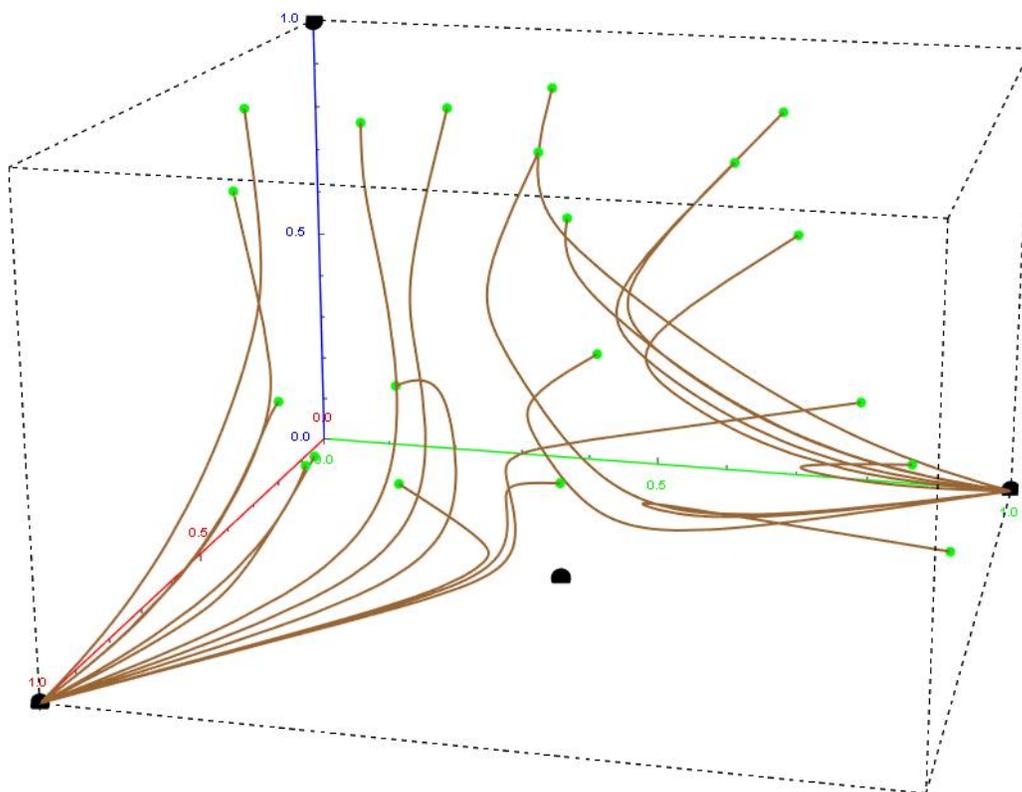


Figura 4.25: Retrato de fase do sistema Lotka-Volterra tridimensional com os parâmetros dados em (4.4).

Nos exemplos anteriores podemos notar que, embora a dinâmica na fronteira de Σ seja a mesma para os conjuntos de parâmetros (4.3) e (4.4), uma pequena alteração na matriz A (no nosso caso adicionamos 0,09 nas entradas a_{31} e a_{32}), muda totalmente o comportamento no interior de Σ . A diferença principal entre os representantes da classe 19 e os da classe 13 é que na classe 19 o equilíbrio Q_3 é repulsor na direção interior de Σ enquanto é atrator na classe 13 na mesma direção. Além disso, existe um ponto de sela

no interior de Σ na classe 19, o que não ocorre na classe 13.

Exemplo 4.25. *Neste exemplo apresentamos um modelo para câncer de próstata baseado em um sistema Lotka-Volterra de três populações. O modelo e os dados apresentados aqui foram retirados de [17].*

O câncer de próstata é um tumor maligno que atinge a próstata. Geralmente, no início da doença não há sintomas, o que dificulta o diagnóstico precoce dos pacientes. Existem alguns exames que auxiliam na identificação deste câncer, sendo um deles a análise da quantidade de PSA no corpo, também conhecido como Antígeno Prostático Específico.

O tratamento com Abiraterona trata o câncer de próstata metastático resistente à castração química, inibindo a produção de CYP17A, uma enzima que auxilia na autoprodução de testosterona. Em [17], os autores apresentam um modelo para a terapia com Abiraterona, considerando três diferentes populações de células tumorais:

- i) $T+$, a população de células que depende da testosterona para sobrevivência.
- ii) TP , a população de células que produz testosterona para sobrevivência.
- iii) $T-$, a população de células que não depende da testosterona para sobrevivência.

Os autores utilizaram um modelo Lotka-Volterra tridimensional competitivo para modelar as interações entre os tipos de células $T+$, TP e $T-$. O número de células dos tipos $T+$, TP e $T-$ será representado por x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente. O modelo é dado por

$$\dot{x}_i = r_i x_i \left(1 - \frac{1}{K_i} \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_j \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.5)$$

Aqui, $C = (c_{ij})$, é a matriz composta pelos coeficientes de competição da população j sobre a i , conforme mostrado na Tabela 4.1. O modelo também possui como parâmetros as taxas de crescimento, r_i , e as capacidades de suporte, K_i , de cada população i , para $i = 1, 2$ e 3 .

Note que a estrutura deste modelo é diferente da notação apresentada neste trabalho, equação (2.3). Contudo, é fácil ver que os dois modelos são equivalentes, se utilizarmos

	$T+$	TP	$T-$
$T+$	c_{11}	c_{12}	c_{13}
TP	c_{21}	c_{22}	c_{23}
$T-$	c_{31}	c_{32}	c_{33}

Tabela 4.1: Coeficientes de competição.

as seguintes relações entre os parâmetros:

$$a_{ij} = \frac{c_{ij}r_i}{K_i}, \quad b_i = r_i.$$

Os valores de parâmetros utilizados são $c_{ii} = 1$, enquanto os c_{ij} , para $i \neq j$, baseiam-se nas inequações apresentadas na Tabela 4.2. Estas desigualdades foram derivadas da literatura e do julgamento profissional de oncologistas, conforme justificado no artigo [17]. Além disso, as diferentes disposições da matriz de competição podem representar variabilidade entre diferentes pacientes. Foram utilizados os seguintes valores para os c_{ij} : 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8 e 0,9.

$c_{31} > c_{21}$	Efeito de x_1 em x_3 é maior que de x_1 em x_2
$c_{32} > c_{12}$	Efeito de x_2 em x_3 é maior que de x_2 em x_1
$c_{13} > c_{21}$	Efeito de x_3 em x_1 é maior que de x_1 em x_2
$c_{13} > c_{12}$	Efeito de x_3 em x_1 é maior que de x_2 em x_1
$c_{23} > c_{21}$	Efeito de x_3 em x_2 é maior que de x_1 em x_2
$c_{32} > c_{31}$	Efeito de x_2 em x_3 é maior que de x_1 em x_3

Tabela 4.2: Inequações entre os coeficientes de competição.

As taxas de crescimento intrínseco, r_i , foram parametrizadas usando 10% do tempo de duplicação *in vitro* de cada tipo de célula, desta forma que os autores obtiveram os valores $r_1 = 0,00278$, $r_2 = 0,00355$ e $r_3 = 0,00665$.

Os autores assumem que a terapia aplicada modifica as capacidades de suporte de cada tipo de maneira diferente. A capacidade de suporte K_1 , de $T+$, durante o tratamento é dada por $K_1 = 0,5K_2$, uma vez que na ausência de testosterona a sobrevivência das células $T+$ deriva inteiramente de utilizar o testosterona disponível produzido pelas células TP . Na ausência de tratamento temos $K_1 = 1,5K_2$, devido às condições ideais para que as

células $T+$ utilizem a testosterona produzida pelas TP .

O tratamento causa a morte das células TP pela falta de testosterona. Assim, quando a terapia é introduzida, a capacidade de suporte das células TP é $K_2 = 100$; e quando a terapia não é administrada, $K_2 = 10000$. Independente da terapia estar ativa ou não, a capacidade de suporte das células $T-$ é $K_3 = 10000$, pois a terapia não afeta diretamente o crescimento de x_3 .

Com todas estas hipóteses, variando os valores de c_{ij} nos valores possíveis e satisfazendo as desigualdades dadas pela Tabela 4.2, chega-se a um total de 22 possibilidades de valores para a matriz $C = (c_{ij})$. Cada uma das 22 possibilidades gera um retrato de fase diferente para o sistema (4.5). A lista completa das 22 parametrizações válidas para c_{ij} é apresentada na Tabela 4.3.

Parametrizações	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{23}	c_{31}	c_{33}
1	0.4	0.7	0.5	0.6	0.8	0.9
2	0.4	0.8	0.5	0.7	0.6	0.9
3	0.4	0.8	0.5	0.6	0.7	0.9
4	0.5	0.7	0.4	0.6	0.8	0.9
5	0.5	0.8	0.4	0.7	0.6	0.9
6	0.5	0.8	0.4	0.6	0.7	0.9
7	0.6	0.7	0.4	0.5	0.8	0.9
8	0.6	0.8	0.4	0.7	0.5	0.9
9	0.6	0.8	0.4	0.5	0.7	0.9
10	0.7	0.8	0.4	0.6	0.5	0.9
11	0.7	0.8	0.4	0.5	0.6	0.9
12	0.4	0.9	0.5	0.7	0.6	0.8
13	0.4	0.9	0.5	0.8	0.6	0.7
14	0.4	0.9	0.5	0.6	0.7	0.8
15	0.5	0.9	0.4	0.7	0.6	0.8
16	0.5	0.9	0.4	0.8	0.6	0.7
17	0.5	0.9	0.4	0.6	0.7	0.8
18	0.6	0.9	0.4	0.7	0.5	0.8
19	0.6	0.9	0.4	0.8	0.5	0.7
20	0.6	0.9	0.4	0.5	0.7	0.8
21	0.7	0.9	0.4	0.6	0.5	0.8
22	0.7	0.9	0.4	0.5	0.6	0.8

Tabela 4.3: 22 parametrizações válidas para os parâmetros c_{ij} .

De posse dos parâmetros podemos calcular os valores de σ_{ij} e η_i e classificar os sistemas que eles representam e discutir as propriedades dinâmicas desses sistemas. Os valores de σ_{ij} e η_i na ausência de tratamento são listados na Tabela 4.4. Os valores de σ_{ij} e η_i durante o tratamento são listados na Tabela 4.5. Os cálculos foram feitos usando o software Wolfram Mathematica, mas podem ser realizados manualmente seguindo as fórmulas para σ_{ij} e η_i .

Parametrização	σ_{13}	σ_{12}	σ_{21}	σ_{23}	σ_{32}	σ_{31}	η_3	η_1	η_2	Classe isóclina
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	10
2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	12
3	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	10
4	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	10
5	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	12
6	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	10
7	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	10
8	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	12
9	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	10
10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	12
11	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	12
12	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	12
13	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	12
14	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	10
15	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	12
16	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	12
17	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	10
18	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	12
19	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	12
20	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	10
21	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	12
22	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	12

Tabela 4.4: Valores dos parâmetros para diferentes parametrizações sem tratamento.

Podemos classificar os sistemas sem tratamento com os valores de parâmetros dados na Tabela 4.4 em dois grupos.

S1) ($\sigma_{13} = -1, \sigma_{12} = -1, \sigma_{21} = -1, \sigma_{23} = -1, \sigma_{32} = -1, \sigma_{31} = -1, \eta_3 = 1, \eta_1 = -1, \eta_2 = -1$)

Parametrizações: 2, 5, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22.

Parametrização	σ_{13}	σ_{12}	σ_{21}	σ_{23}	σ_{32}	σ_{31}	η_3	η_1	η_2	Classe isóclina
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	13
2	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1
3	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	13
4	1	1	0	-1	1	1	-1	1	1	-
5	-1	1	0	-1	1	1	-1	1	1	-
6	1	1	0	-1	1	1	-1	1	1	-
7	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	15
8	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	3
9	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	1
10	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	3
11	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	3
12	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1
13	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1
14	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	13
15	-1	1	0	-1	1	1	-1	1	1	-
16	-1	1	0	-1	1	1	-1	1	1	-
17	1	1	0	-1	1	1	-1	1	1	-
18	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	3
19	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	3
20	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	1
21	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	3
22	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	3

Tabela 4.5: Valores dos parâmetros para diferentes parametrizações durante o tratamento. O símbolo “-” na coluna “classe isóclina” significa que o sistema com aquela parametrização é um caso degenerado.

S2) ($\sigma_{13} = 1, \sigma_{12} = -1, \sigma_{21} = -1, \sigma_{23} = -1, \sigma_{32} = -1, \sigma_{31} = -1, \eta_3 = 1, \eta_1 = -1$)

Parametrizações: 1, 3, 4, 6, 7, 9, 14, 17, 20.

Precisamos fazer pequenas observações sobre essa classificação. A primeira observação é sobre as parametrizações 1 e 4. Observe que, nessas parametrizações, o valor de $\eta_2 = 1$, enquanto nas demais parametrizações que compõem o grupo (S2), possui-se $\eta_2 = -1$; contudo, isso é irrelevante em nosso caso, pois, como $\sigma_{13} \neq \sigma_{31}$ em todas as parametrizações do grupo (ii), isso significa que $Q_2 \notin \mathbb{R}_+^2$, conforme discutido na teoria. A segunda observação é que os valores de σ_{ij} e η_i obtidos nos grupos (S1) e (S2) indicam que as parametrizações nesses grupos são representantes, respectivamente, das classes isóclinas

12 e 10, conforme a Figura 4.23. Por fim, a terceira observação é sobre o significado biológico da dinâmica do sistema. Assumimos que, no diagnóstico, pelo menos uma células de cada tipo está presente, de forma que as condições iniciais estão sempre no interior. O primeiro grupo, cujo comportamento qualitativo é o da classe 12, possui três equilíbrios axiais (R_i) repulsores. Os equilíbrios planares Q_1 e Q_2 são selas; neste caso, atraem em $\partial\Sigma \cap G_1$ e $\partial\Sigma \cap G_2$ respectivamente e repelem na direção interior de Σ . O equilíbrio Q_3 é um atrator global para a dinâmica no interior do simplexo. Toda essa informação genérica dos sistemas na classe 12 pode ser traduzida para nosso caso da seguinte maneira: Como todos os equilíbrios axiais R_i são repulsores e representam a sobrevivência de um único tipo de população na sua capacidade de suporte ($R_i = (b_i/a_{ii})e_i = (K_i)e_i$), isso significa que, para condições iniciais genéricas na ausência de uma das populações, as duas populações restantes seriam levadas à coexistência. Analisando o sistema (4.5), sabemos que R_1, R_2 e R_3 representam, respectivamente, a sobrevivência na capacidade de suporte das populações $T+$, TP e $T-$, respectivamente. Como Q_3 é um atrator global para a dinâmica interior no simplexo de suporte, isso significa que qualquer condição inicial que envolva as três populações evoluirá para uma coexistência estável das populações $T+$ e TP . Isso quer dizer que, em condições normais, grande parte da população de células tumorais seria composta basicamente de células dos tipos $T+$ e TP .

No grupo (S2), que representa a classe isóclina 10, teríamos a seguinte dinâmica: Em condições iniciais com as três populações, o sistema evoluiria para a coexistência das populações $T+$ e TP , assim como observado no grupo (ii). Em resumo, o modelo nos mostra que na ausência do tratamento a população de células tumorais seria majoritariamente composta por células do tipo $T+$ e TP . A Figura 4.26 ilustra os possíveis comportamentos qualitativos para as parametrizações sem o tratamento.

Para os sistemas com tratamento com Abiraterona podemos classificar em 6 grupos distintos.

T1) ($\sigma_{13} = 1, \sigma_{12} = 1, \sigma_{21} = -1, \sigma_{23} = -1, \sigma_{32} = 1, \sigma_{31} = 1, \eta_3 = -1, \eta_1 = -1, \eta_2 = -1$)

Parametrizações: 1, 3, 14.

T2) ($\sigma_{13} = -1, \sigma_{12} = 1, \sigma_{21} = -1, \sigma_{23} = -1, \sigma_{32} = 1, \sigma_{31} = 1$)

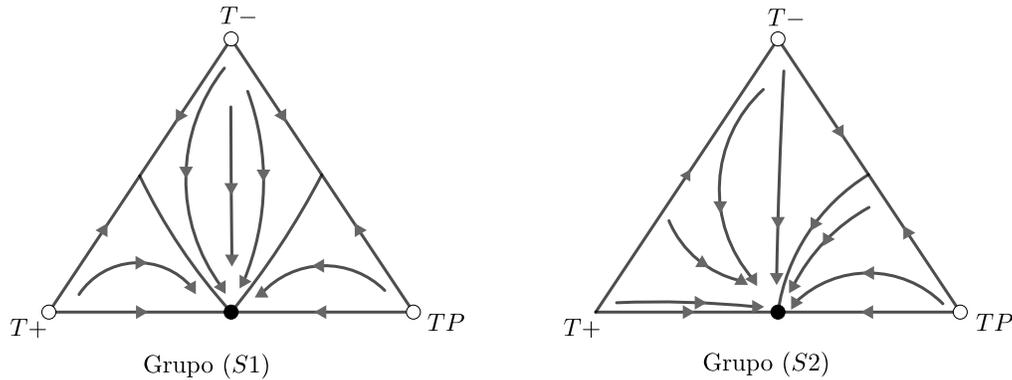


Figura 4.26: Comportamento qualitativo do sistema usando nos grupos (S1) e (S2) segundo o estudo dos seus parâmetros.

Parametrizações: 2, 12, 13.

T3) $(\sigma_{13} = 1, \sigma_{12} = 1, \sigma_{21} = 1, \sigma_{23} = -1, \sigma_{32} = 1, \sigma_{31} = 1, \eta_3 = -1, \eta_2 = 1)$

Parametrizações: 7, 9, 20.

T4) $(\sigma_{13} = -1, \sigma_{12} = 1, \sigma_{21} = 1, \sigma_{23} = -1, \sigma_{32} = 1, \sigma_{31} = 1, \eta_3 = -1)$

Parametrizações: 8, 10, 11, 18, 19, 21, 22.

T5) $(\sigma_{13} = 1, \sigma_{12} = 1, \sigma_{21} = 0, \sigma_{23} = -1, \sigma_{32} = 1, \sigma_{31} = 1, \eta_3 = -1, \eta_2 = 1)$

Parametrizações: 4, 6, 17.

T6) $(\sigma_{13} = -1, \sigma_{12} = 1, \sigma_{21} = 0, \sigma_{23} = -1, \sigma_{32} = 1, \sigma_{31} = 1, \eta_3 = -1)$

Parametrizações: 5, 15, 16.

As parametrizações dos grupos (T1), (T2), (T3) e (T4) são representantes das classes 13, 1, 15 e 3, respectivamente, conforme indicado na Figura 4.23. Por outro lado, as parametrizações dos grupos (T5) e (T6) representam casos degenerados de sistemas que não se enquadram em nenhuma das classes isóclinas estáveis, ou seja, uma pequena pertur-

bação nos parâmetros pode alterar completamente a dinâmica do sistema. Discutiremos mais sobre isso adiante neste exemplo.

Para o grupo (T1), sendo representantes da classe 13, temos que R_3 e R_1 são atratores na dinâmica, e R_2 é repulsor. Além disso, Q_2 é uma sela que atrai na direção do interior do simplexo e repele na fronteira. Isso implica a existência de uma variedade instável deste ponto, que conecta ao equilíbrio repulsor R_2 e separa as bacias de atração de R_3 e R_1 . A evolução do sistema, portanto, dependeria das condições iniciais.

Para o grupo (T2), representantes da classe 1, R_3 é um atrator global para a dinâmica no interior do simplexo, enquanto R_1 e R_2 são repulsores. Não existem equilíbrios planares que permitam a coexistência entre duas populações. Em interações onde uma população é ausente, a população $T-$ prevaleceria sobre as outras, alcançando sua capacidade de suporte enquanto as demais seriam extintas.

Para o grupo (T3), representantes da classe 15, tanto R_3 quanto R_1 são atratores, enquanto R_2 é uma sela. Q_2 também é uma sela que atrai na direção do interior do simplexo e repele na fronteira, e Q_3 é repulsor. A dinâmica resultante depende fortemente das condições iniciais e da ausência de determinadas populações, podendo levar à sobrevivência de $T+$ enquanto TP seria extinta.

Para o grupo (T4), representantes da classe 3, R_1 e R_2 são selas e R_3 é um atrator global para a dinâmica envolvendo todas as três populações. Q_3 é repulsor, indicando que qualquer dinâmica competitiva entre $T+$ e TP seria decidida pelas condições iniciais, enquanto as demais condições levariam à predominância de $T-$ e à extinção das competidoras.

Os grupos (T5) e (T6) possuem integrantes que geram sistemas degenerados, ou seja, sistemas que não pertencem a nenhuma das 33 classes isóclinas estáveis. O valor $\sigma_{21} = 0$ contraria a Proposição 4.9. Assim, não podemos fornecer muitas informações sobre o comportamento qualitativo do sistema apenas com a análise dos parâmetros. Aqui cabe uma pequena observação: o “problema” dessas parametrizações vem da própria estrutura do modelo, já que $K_1 = 0,5K_2$ e $c_{12} = 0,5$, resultando no cálculo de σ_{21} como:

$$\sigma_{21} = \operatorname{sgn} \left(r_1 c_{12} \frac{K_2}{K_1} - r_1 \right) = \operatorname{sgn} (r_1 (2c_{12} - 1)) = 0.$$

Como a teoria prevê, uma pequena alteração nos parâmetros nesses casos muda a dinâmica do sistema. Se considerarmos $c_{12} = 0,5 + \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$ pequeno, para as parametrizações do grupo (T5) teríamos a dinâmica da classe 15, com a mesma estrutura descrita para o grupo (T3). Analogamente, se considerarmos $c_{12} = 0,5 - \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$ pequeno, teríamos a dinâmica da classe 13, com a mesma estrutura descrita para o grupo (T1). Para as parametrizações do grupo (T6), se considerarmos $c_{12} = 0,5 + \varepsilon$, teríamos a dinâmica da classe 1, conforme descrito para o grupo (T2); e se $c_{12} = 0,5 - \varepsilon$, resultaria na dinâmica da classe 3, como descrito para o grupo (T4). A Figura 4.27 ilustra os possíveis comportamentos qualitativos para as parametrizações com tratamento.

Podemos concluir que em parametrizações diversas sem tratamento com Abiraterona, obteríamos com o passar do tempo uma população composta basicamente de células tumorais dos tipos $T+$ e TP . Com a administração da terapia, o cenário muda e podemos obter casos em que o sistema se desenvolve para a hegemonia das células $T-$, que é o objetivo do tratamento, ou para a sobrevivência de células do tipo $T+$. Segundo o modelo, em ambos os casos, com e sem tratamento, a coexistência estável das três populações de células tumorais não é possível. Com isso, podemos ver que a abordagem geométrica proposta por Zeeman, que foi traduzida para uma abordagem puramente algébrica, nos permite classificar todos os possíveis retratos de fase para o tratamento do câncer de próstata, com ou sem terapia, apenas estudando as desigualdades entre os parâmetros.

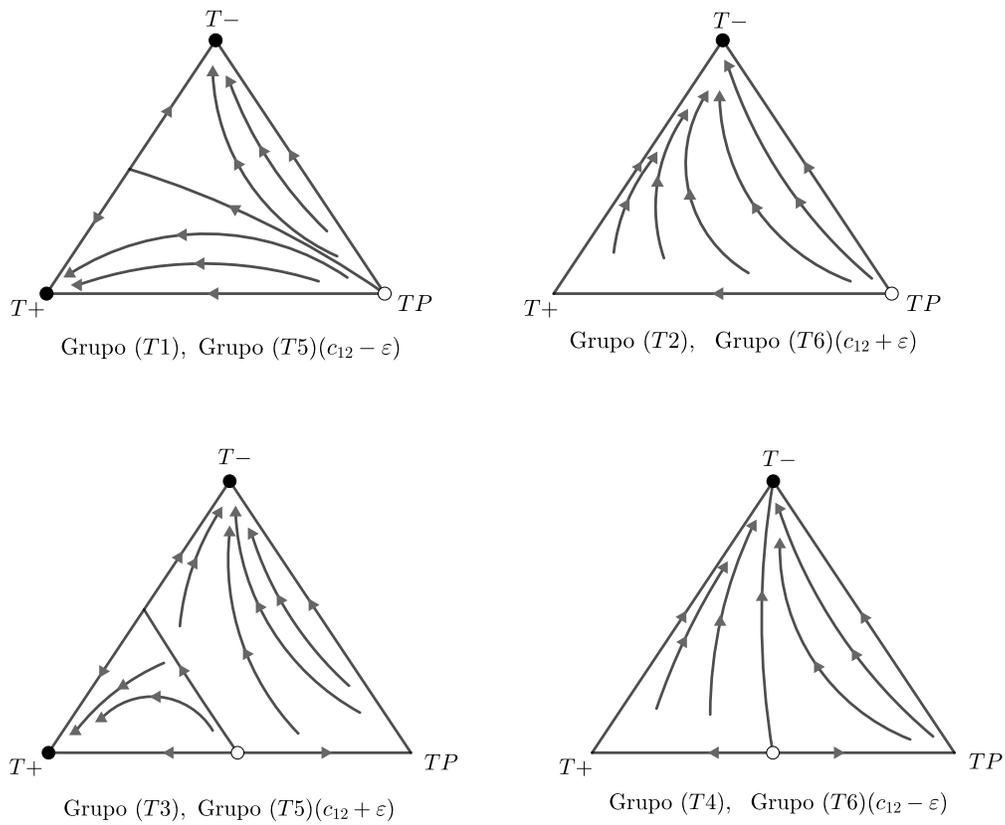


Figura 4.27: Comportamento qualitativo do sistema usando nos grupos (T1), (T2), (T3), (T4), (T5) e (T6) segundo o estudo dos seus parâmetros.

Capítulo 5

Bifurcações de Hopf nos Sistemas Lotka-Volterra Tridimensionais

No capítulo anterior, estudamos a dinâmica dos sistemas Lotka-Volterra Tridimensionais por meio das propriedades geométricas das isóclinas, e vimos que estas propriedades são suficientes para estabelecer as 33 classes isóclinas e determinar completamente a dinâmica nas classes 1 a 25. Neste capítulo, estudamos as classes 26 a 33 e investigamos quais delas têm ou não órbitas periódicas.

Vamos mostrar inicialmente que as classes 26 a 33 sempre contêm um sistema representante sem órbitas periódicas. Isso mostra que a ocorrência de órbitas periódicas em um sistema dado não pode ser prevista apenas pelas isóclinas desse sistema. Ainda, usando uma generalização do Critério de Dulac para sistemas tridimensionais, mostraremos que as classes 32 e 33 não possuem órbitas periódicas. Finalmente, mostraremos nas seções seguintes que as isóclinas podem ser usadas para prever a ocorrência de bifurcações de Hopf, e, portanto, órbitas periódicas, em representantes das classes 26 a 31.

5.1 Representantes sem órbitas periódicas

Proposição 5.1. *Para um sistema correspondente a uma das classes 26 à 33, podemos assumir que o ponto de equilíbrio interior P é $(1, 1, 1)$.*

Demonstração.

Note que as classes 26 a 33 sempre possuem um ponto de equilíbrio interior P (Figura 4.23). Lembramos que as componentes do campo vetorial F são

$$F_i(x) = x_i(b_i - (Ax)_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.1)$$

Uma vez que $AP = B$, temos que

$$(AP)_i = b_i. \quad (5.2)$$

Substituindo, (5.2) em (5.1) temos que

$$F_i(x) = x_i((AP)_i - (Ax)_i) = x_i(A(P - x))_i. \quad (5.3)$$

Faremos a mudança linear de coordenadas $x \rightarrow \tilde{x} = Dx$, onde $D = (D_{ij})$ é a matriz diagonal com $D_{ii} = P_i$. Note que $P_i > 0$, pois P está no interior de Σ . Denotaremos $e = (1, 1, 1)$. Assim, seja

$$\tilde{F}(\tilde{x}) = D^{-1}F(\tilde{x}) = D^{-1}F(Dx). \quad (5.4)$$

De (5.3) temos

$$\begin{aligned} \tilde{F}_i(\tilde{x}) &= \frac{1}{P_i}F_i(Dx) \\ &= \frac{1}{P_i}(P_i x_i(A(P - Dx))_i) \\ &= \frac{1}{P_i}(P_i x_i(A(De - Dx))_i) \\ &= \frac{1}{P_i}(P_i x_i(AD(e - x))_i) \\ &= x_i(\tilde{A}(e - x))_i, \end{aligned}$$

onde $\tilde{A} = AD$. Assim, temos uma equivalência topológica entre F e \tilde{F} , uma vez que $\tilde{F}(\tilde{x}) = D^{-1}F(Dx)$ e o novo sistema Lotka-Volterra \tilde{F} agora tem o equilíbrio interior $e = (1, 1, 1)$. Ainda, podemos ver que F e \tilde{F} são isoclina-equivalentes pois uma vez que D é diagonal, temos de (5.3) e (5.4) que $\tilde{F}_i(\tilde{x}) = 0$ se, e só se, $F_i(x) = 0$. ■

Com a proposição anterior, reduzimos o número de parâmetros de 12 para 9, simplificando o sistema. Além disso, eliminamos a necessidade de considerar os parâmetros b_i , simplificando ainda mais as componentes de F , dadas agora por

$$F_i(x) = x_i(A(e - x))_i,$$

de modo que agora F é determinado exclusivamente pela matriz A .

Também conseguimos obter uma expressão simplificada para a matriz jacobiana $J_F(P)$. Agora, $J_F(P) = -A$, obtendo uma relação direta com a matriz A . De fato,

$$F_1(x) = x_1(A(e - x))_1 = x_1((1 - x_1)a_{11} + (1 - x_2)a_{12} + (1 - x_3)a_{13})$$

e, assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} &= -x_1 a_{11} + (1 - x_1)a_{11} + (1 - x_2)a_{12} + (1 - x_3)a_{13}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2} &= -x_1 a_{12}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} &= -x_1 a_{13}. \end{aligned}$$

Calculando em $P = e$, temos que

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_j}(e) = -x_j a_{1j} = -a_{1j},$$

para $j = 1, 2, 3$. Analogamente, calculamos as demais derivadas parciais e construímos a matriz jacobiana $J_F(P)$, que é dada por

$$J_F(P) = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix} = -A.$$

Agora, utilizaremos o Teorema de Perron-Frobenius, que afirma que uma matriz real quadrada com entradas positivas tem um único maior autovalor, que é positivo, tendo seu correspondente autovetor com coordenadas estritamente positivas. A demonstração pode

ser consultada em [18].

Definição 5.2. *O espectro de uma matriz quadrada A , $n \times n$, é o conjunto de seus autovalores, e é denotado por $\sigma(A)$. O raio espectral de A , denotado por $\rho(A)$, é definido por $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\}$.*

Teorema 5.3. *(Teorema de Perron-Frobenius) Se A é uma matriz quadrada e todas as suas entradas são positivas, então:*

- (A) $\rho(A) > 0$.
- (B) $\rho(A)$ é um autovalor de A .
- (C) Existe um vetor x com todas suas entradas positivas e $Ax = \rho(A)x$.
- (D) $|\lambda| < \rho(A)$ para todo autovalor λ de A tal que $\lambda \neq \rho(A)$, ou seja, $\rho(A)$ é o único autovalor de maior módulo.

Usaremos o Teorema de Perron-Frobenius para demonstrar o seguinte resultado.

Proposição 5.4. *Para qualquer sistema correspondente a uma das classes 26 à 33, tem-se $\det(J_F(P)) < 0$.*

Demonstração.

Pela Proposição 4.7 temos que o $\det(J_F(P)) \neq 0$. Sabemos que o determinante de uma matriz é o produto dos seus autovalores. Como A é uma matriz com entradas estritamente positivas, pelo Teorema de Perron-Frobenius, temos que $\lambda_1 = \rho(A)$ é um autovalor de A associado a um autovetor V_1 com entradas estritamente positivas. Assim, como $J_F(P) = -A$, temos que $-\lambda_1$ é um autovalor negativo de $J_F(P)$ associado ao mesmo autovetor positivo V_1 .

Como o simplexo Σ é invariante e transversal a todos os vetores estritamente positivos, temos que V_1 é transversal a Σ . Como Σ é uma superfície de dimensão dois, dois autovalores de $J_F(P)$ são tais que os autovetores correspondentes devem ser tangentes a Σ em P , pela invariância do fluxo em Σ . Em outras palavras, os autovalores λ_2 e λ_3 são relacionados com os autovetores V_2 e V_3 que são tangentes à Σ em P . Como o índice de P é 1, temos os seguintes casos:

- i) P atrai em ambas as direções e , então $\lambda_2 < 0$ e $\lambda_3 < 0$;
- ii) P repele em ambas as direções e , então $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 > 0$;
- iii) P é neutro e , então $\operatorname{Re}(\lambda_2) = 0$ e $\operatorname{Re}(\lambda_3) = 0$.

Em todos os casos o produto $\lambda_2\lambda_3$ é positivo e, conseqüentemente, $\det(J_F(P)) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0$. ■

Observação 5.5. *As Proposições 5.1 e 5.4 juntas mostram que os sistemas das classes 26 à 33 são caracterizadas por*

$$\dot{x}_i = F_i(x) = x_i(A(e - x))_i,$$

com $\det(A) = -\det(J_F(P)) > 0$.

Observação 5.6. *Os sistemas das classes isóclinas 19 a 25 sempre têm um ponto de sela P no interior de Σ . Isso implica em um autovalor positivo e um autovalor negativo de $J_F(P)$, correspondendo a autovetores tangentes a Σ em P . Sabemos disso pelos cálculos realizados usando o Teorema de Poincaré-Hopf no Capítulo 4. O Teorema de Perron-Frobenius implica que o terceiro autovalor, correspondente a um autovetor positivo, é negativo. Portanto, $\det(J_F(P)) > 0$ nas classes 19 a 25. Lembramos que um sistema das classes 1 a 18 não tem ponto de equilíbrio no interior.*

Assim, a partir de agora, assumiremos que F tem a forma dada pela Observação 5.5. Se $F_i(x) = x_i(A(e - x))_i$, e $T = (\tau_{ij})$ é uma matriz 3×3 diagonal, defina $F^T(x) = (F_1^T(x), \dots, F_n^T(x))$ por $F_i^T(x) = x_i(TA(e - x))_i$. Defina também a família a 3 parâmetros $\mathcal{F}(F) = \{F^T : \tau_{ii} > 0, i = 1, 2, 3\}$.

Observação 5.7. *O sistema $\dot{x} = F^T(x)$ tem exatamente as mesmas isóclinas de $\dot{x} = F(x)$. Assim, fixado F em uma das classes 26 a 33, a família $\mathcal{F}(F)$ está contida na mesma classe que F .*

Esta observação é baseada no fato de que fazer o produto de uma matriz diagonal com A simplesmente multiplica as componentes do sistema por um escalar real positivo,

e essa operação não altera de forma alguma os zeros das componentes do campo, que são as isóclinas. De fato,

$$\begin{aligned}
 F_i^T(x) &= x_i(TA(e-x))_i \\
 &= x_i(e_i^T TA(e-x)) \\
 &= x_i \tau_{ii} e_i^T A(e-x) \\
 &= \tau_{ii} F_i(x).
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Proposição 5.8. *Para cada F existe uma matriz diagonal positiva T tal que F^T restrita à Σ , isto é, $F^T|_{\Sigma}$, é topologicamente equivalente a um sistema bidimensional Lotka-Volterra.*

Demonstração.

Defina $\tau_{ii} = \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij}\right)^{-1}$. Então, TA é uma matriz com todas as somas de linhas iguais a 1, pois a soma de cada linha é dada por

$$\tau_{ii} \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij}\right) = 1.$$

Mostremos que se A tem somas de linhas iguais a 1, então $F|_{\Sigma}$ é topologicamente equivalente a um sistema Lotka-Volterra bidimensional. Para isso, parametrizamos o simplexo de suporte Σ como um gráfico de uma função de x_1 e x_2 , e consideramos a projeção radial de $F|_{\Sigma}$ no plano $x_3 = 1$, dada (para $x_3 > 0$) por $x_i \mapsto y_i = x_i/x_3, i = 1, 2$. O Teorema de Hirsch garante que essa projeção é um homeomorfismo, de modo que em Σ podemos escrever $x_3 = x_3(x_1, x_2) = x_3(y_1, y_2)$. Para $i = 1, 2$ temos

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_i &= \frac{d}{dt} \left(\frac{x_i}{x_3}\right) = \frac{\dot{x}_i x_3 - x_i \dot{x}_3}{x_3^2} \\
 &= \frac{1}{x_3} (x_i (A(e-x))_i) - \frac{1}{x_3^2} x_i (x_3 (A(e-x))_3) \\
 &= y_i ((Ae)_i - (Ax)_i) - y_i ((Ae)_3 - (Ax)_3).
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Como $(Ae)_j$ é a soma da linha j de A , e toda linha de A tem soma igual a 1, temos de

(5.6) que

$$\begin{aligned}
\dot{y}_i &= y_i (1 - (Ax)_i - 1 + (Ax)_3) \\
&= y_i ((Ax)_3 - (Ax)_i) \\
&= y_i ((a_{33} - a_{i3})x_3 + ((a_{31} - a_{i1})x_1 + (a_{32} - a_{i2})x_2)) \\
&= y_i (\tilde{b}_i x_3 + (\tilde{A}x)_i) \\
&= x_3 y_i (\tilde{b}_i - (\tilde{A}y)_i),
\end{aligned}$$

onde, $\tilde{b}_i = (a_{33} - a_{i3})$, e $\tilde{A} = \tilde{a}_{ij}$ é a matriz 2×2 com $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij} - a_{3j})$. Identificando o plano $x_3 = 1$ com \mathbb{R}^2 , este sistema é claramente topologicamente equivalente ao sistema Lotka-Volterra bidimensional $\dot{y}_i = y_i (\tilde{b}_i - (\tilde{A}y)_i)$ através do homeomorfismo identidade. Note que esses novos coeficientes $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i$ não são necessariamente positivos, então o sistema bidimensional não é necessariamente competitivo. ■

Corolário 5.9. *Para cada campo F genérico nas classes 26 a 33, existe um campo F^T na mesma classe e possuindo as mesmas isóclinas de F mas sem órbitas periódicas.*

O corolário decorre do fato que sistemas Lotka-Volterra bidimensionais competitivos não possuem órbitas periódicas. Para demonstrar isso, utilizamos o Critério de Bendixson-Dulac. A demonstração e aplicações podem ser consultadas em [8].

Teorema 5.10. *(Critério de Bendixson-Dulac) Considere um campo $F \in C^1(U)$ definido no aberto simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que existe uma função positiva B de classe C^1 em U tal que a divergência do campo vetorial BF não muda de sinal em U . Então, F não admite órbita periódica em U .*

Utilizaremos o Critério de Bendixson-Dulac para mostrar que sistemas Lotka-Volterra bidimensionais não possuem órbitas periódicas isoladas.

Teorema 5.11. *O sistema Lotka-Volterra bidimensional dado por*

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1(a + bx_1 + cx_2), \\
\dot{x}_2 &= x_2(d + ex_1 + fx_2),
\end{aligned} \tag{5.7}$$

não possui órbitas periódicas isoladas.

Demonstração.

Seja γ uma solução periódica de (5.7). Da teoria de índices, deve haver um ponto de equilíbrio no interior de γ (e, portanto, de \mathbb{R}_+^2). As duas retas isóclinas

$$\begin{aligned} a + bx_1 + cx_2 &= 0, \\ d + ex_1 + fx_2 &= 0, \end{aligned}$$

devem, portanto, se interceptar em um ponto único dentro de \mathbb{R}_+^2 . De fato, as isóclinas do sistema se interceptam no ponto interior

$$P = \left(\frac{cd - af}{bf - ce}, \frac{ae - bd}{bf - ce} \right).$$

Em particular,

$$\Delta = bf - ce \neq 0. \quad (5.8)$$

Aplicaremos agora o Teorema de Bendixson-Dulac, usando a função de Dulac

$$B(x_1, x_2) = x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1}$$

com coeficientes α e β que serão especificados posteriormente. Denotando os membros direitos de (5.7) por $P(x_1, x_2)$ e $Q(x_1, x_2)$, calculamos a divergência do campo vetorial (BP, BQ) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}(BP) + \frac{\partial}{\partial x_2}(BQ) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\alpha x_2^{\beta-1} (a + bx_1 + cx_2) \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(x_1^{\alpha-1} x_2^\beta (d + ex_1 + fx_2) \right) \\ &= \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} (a + bx_1 + cx_2) + x_1^\alpha x_2^{\beta-1} b \\ &\quad + \beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} (d + ex_1 + fx_2) + x_1^{\alpha-1} x_2^\beta f \\ &= B(\alpha(a + bx_1 + cx_2) + bx_1 + \beta(d + ex_1 + fx_2) + fx_2). \end{aligned}$$

Escolhemos α e β de modo que

$$\begin{aligned} \alpha b + \beta e &= -b, \\ \alpha c + \beta f &= -f. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Essa condição é válida pois o determinante da matriz do sistema linear (5.9) é dado por (5.8) e, como $\Delta \neq 0$, o sistema possui solução única. Dessa forma, de (5.1) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}(BP) + \frac{\partial}{\partial x_2}(BQ) &= B(\alpha(a + bx_1 + cx_2) + bx_1 + \beta(d + ex_1 + fx_2) + fx_2) \\ &= B(\alpha a + \alpha bx_1 + \alpha cx_2 + bx_1 + \beta d + \beta ex_1 + \beta fx_2 + fx_2) \\ &= B(\alpha a + \beta d + bx_1 + fx_2 + x_1(\alpha b + \beta e) + x_2(\alpha c + \beta f)), \end{aligned}$$

e, por (5.9), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}(BP) + \frac{\partial}{\partial x_2}(BQ) &= B(\alpha(a + bx_1 + cx_2) + bx_1 + \beta(d + ex_1 + fx_2) + fx_2) \\ &= B(\alpha a + \beta d + bx_1 + fx_2 - bx_1 - fx_2) \\ &= B(\alpha a + \beta d). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(BP) + \frac{\partial}{\partial x_2}(BQ) = \delta B, \quad (5.10)$$

com

$$\delta = a\alpha + d\beta.$$

Assim, o sinal de $\text{div}(BF)$ é constante em \mathbb{R}_+^2 se $\delta \neq 0$. Mas isso não pode ocorrer pelo Critério de Bendixon-Dulac, pois assumimos a existência de uma órbita periódica. Logo, $\delta = 0$.

Assim, de (5.10) temos que

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}(BP) = \frac{\partial}{\partial x_2}(BQ).$$

Isso é simplesmente a condição de integrabilidade para o campo vetorial bidimensional $(BQ, -BP)$. Em outras palavras, $(BQ, -BP)$ é um campo gradiente de uma função $V = V(x_1, x_2)$ em $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$ tal que

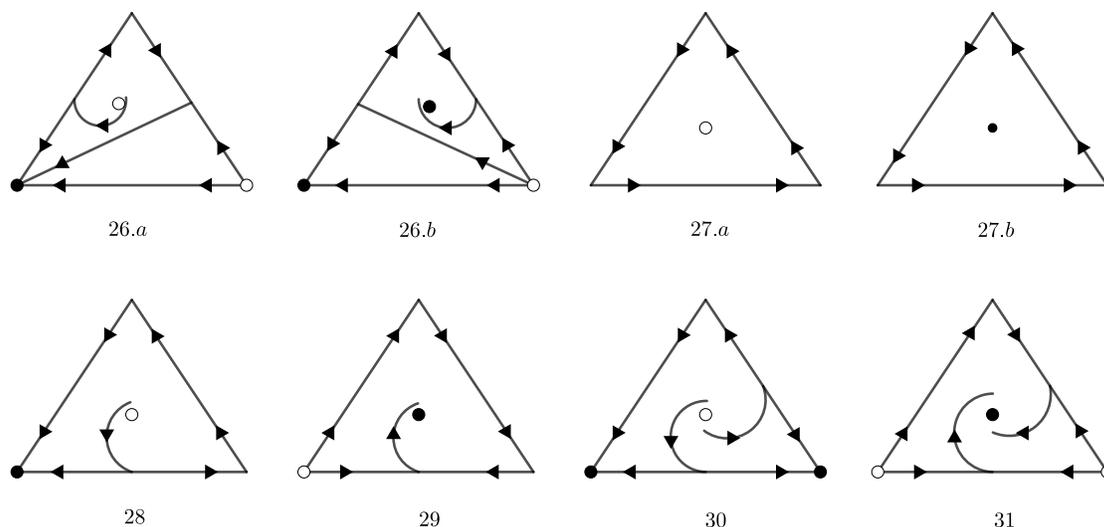
$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = BQ \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = -BP.$$

A derivada de $t \rightarrow V(x_1(t), x_2(t))$, então, satisfaz

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = PQ(B - B) \equiv 0.$$

Assim, V é constante ao longo das trajetórias do sistema original, de modo que uma órbita periódica é uma curva de nível fechada de V , o que implica que γ não é uma órbita isolada. Portanto, se uma órbita periódica existe, ela é cercada por outras órbitas periódicas. ■

Com isso, mostramos que nas classes 26 a 33 sempre há representantes sem órbitas periódicas. Na Figura 5.1, listamos estes representantes das classes isóclinas estáveis 26 a 33, utilizando a Proposição 5.8 para escolhê-los sem órbitas periódicas. Isso nos permite preencher as regiões interiores do simplexo com as dinâmicas que anteriormente não sabíamos como eram. Nas classes 26 e 27, há dois retratos de fase possíveis. Nos demais, a dinâmica é completamente determinada.



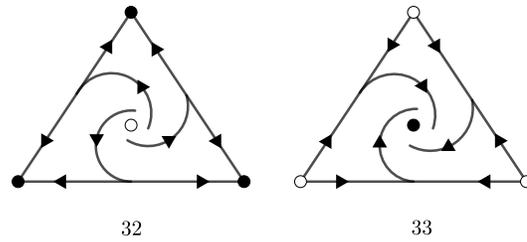


Figura 5.1: Classes isóclinas 26-33 sem órbitas periódicas.

5.2 Famílias sem bifurcações de Hopf

Na seções anteriores, definimos famílias de sistemas dentro das classes isóclinas de 26 a 33 e mostramos que em todas as classes existem representantes que não possuem órbitas periódicas. Os resultados desta seção e da próxima estabelecem meios de prever a partir da configuração das isóclinas se uma determinada família admite uma bifurcação de Hopf e, conseqüentemente, órbitas periódicas. Em particular, mostraremos que as bifurcações de Hopf ocorrem em cada uma das classes isóclinas estáveis de 26 a 31, mas não nas classes isóclinas 32 e 33. Isso significa que não podemos determinar se um sistema das classes 26 a 31 tem ou não órbitas periódicas apenas a partir de suas isóclinas.

A ocorrência de uma bifurcação de Hopf está associada com o surgimento ou desaparecimento de um ciclo limite a partir da mudança na estabilidade local de um ponto de equilíbrio, ou seja, quando um par de autovalores complexos conjugados (da linearização em torno do ponto de equilíbrio) cruza o eixo imaginário do plano complexo. A bifurcação pode ser supercrítica ou subcrítica, resultando em um ciclo limite estável ou instável, respectivamente. Uma revisão mais detalhada dos conceitos sobre bifurcações de Hopf é apresentada no Anexo C.

A previsão que faremos depende dos sinais dos menores principais 2×2 de qualquer matriz A na família. Os sinais são independentes da escolha da matriz A e, na verdade, podem ser determinados a partir das posições das isóclinas da seguinte forma. A submatriz

principal A_{jk} é definida por

$$A_{jk} = \begin{bmatrix} a_{jj} & a_{jk} \\ a_{kj} & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad j \neq k,$$

e o correspondente determinante da submatriz principal 2×2 é dado por $M_{jk} = \det(A_{jk})$. A submatriz A_{jk} representa o comportamento do sistema restrito ao plano $G_i = X_j \times X_k$ onde a análise bidimensional revela que o menor M_{jk} reflete as inclinações relativas das isóclinas $\dot{x}_j = 0$ e $\dot{x}_k = 0$ nesse plano. Conforme discutido nos capítulos anteriores as isóclinas podem se interceptar no equilíbrio Q_i em $\partial\Sigma$, e se isso ocorre podemos analisar M_{jk} para obter algumas informações.

Proposição 5.12. *Seja $F \in CLV(3)$ pertencente a uma das classes isóclinas de 26 à 33. Suponha que existe um ponto Q_i no plano G_i , com i, j, k todos distintos. Então, Q_i é atrator se, e somente se, $M_{jk} > 0$ e Q_i é uma sela se, e somente se $M_{jk} < 0$.*

Demonstração.

Como nosso sistema de interesse assume a seguinte forma, temos que

$$\begin{aligned} F_i(X) &= x_i(A(e - x))_i \\ &= x_i((Ae)_i - (Ax)_i) \\ &= x_i(b_i - (Ax)_i), \end{aligned}$$

e, assim,

$$b_i = (Ae)_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}. \quad (5.11)$$

A título de exemplo, considere o plano G_3 , e que nele existe um ponto de equilíbrio planar Q_3 atrator. Para que isto aconteça precisamos que $\sigma_{12} = \sigma_{21} = -1$. Considerando que

$$\sigma_{ij} = \text{sgn}((AR_i)_j - b_j),$$

logo

$$a_{21} \frac{b_1}{a_{11}} - b_2 < 0 \Leftrightarrow a_{21}b_1 - a_{11}b_2 < 0, \quad (5.12)$$

$$a_{12} \frac{b_2}{a_{22}} - b_1 < 0 \Leftrightarrow a_{12}b_2 - a_{22}b_1 < 0. \quad (5.13)$$

Substituindo os termos b_i como em (5.11) em (5.12), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &> a_{21}b_1 - a_{11}b_2 \\ &= a_{21}(a_{11} + a_{12} + a_{13}) - a_{11}(a_{21} + a_{22} + a_{23}) \\ &= -a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11} \\ &= -M_{12} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= -M_{12} - D_1. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Analogamente, substituindo os termos b_i em (5.13),

$$\begin{aligned} 0 &> a_{12}b_2 - a_{22}b_1 \\ &= a_{12}(a_{21} + a_{22} + a_{23}) - a_{11}(a_{11} + a_{12} + a_{13}) \\ &= -a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} + a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \\ &= -M_{12} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \\ &= -M_{12} + D_2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

De (5.14) e (5.15),

$$\begin{aligned} M_{12} + D_1 &> 0, \\ M_{12} - D_2 &> 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Agora, calculando o determinante da matriz A , obtemos

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
 &= a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) + a_{32}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\
 &= a_{31}D_2 - a_{32}D_1 + a_{33}M_{12} > 0.
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

De (5.16) e (5.17) temos

$$\begin{aligned}
 0 &< M_{12} + D_1 + M_{12} - D_2 + \det(A) \\
 &= M_{12} + D_1 + M_{12} - D_2 + a_{31}D_2 - a_{32}D_1 + a_{33}M_{12},
 \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
 0 &< a_{32}(M_{12} + D_1) + a_{33}(M_{12} - D_2) + a_{31}D_2 - a_{31}D_1 + a_{33}M_{12} \\
 &= a_{32}M_{12} + a_{32}D_1 + a_{31}M_{12} - a_{31}D_2 + a_{31}D_2 - a_{32}D_1 + a_{33}M_{12} \\
 &= (a_{31} + a_{32} + a_{33})M_{12}.
 \end{aligned}$$

Como $a_{31} + a_{32} + a_{33} > 0$, então, $M_{12} > 0$. De maneira análoga, poderíamos ter chegado à mesma conclusão para qualquer plano coordenado. Portanto, $M_{jk} > 0$ se, e somente se, Q_i atrai no plano. No caso em que o ponto de equilíbrio planar Q_3 for um ponto de sela devemos ter $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 1$, assim

$$a_{21} \frac{b_1}{a_{11}} - b_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{b_1 a_{21}}{a_{11} b_2} > 1, \tag{5.18}$$

$$a_{12} \frac{b_2}{a_{22}} - b_1 > 0 \Leftrightarrow \frac{b_2 a_{12}}{a_{22} b_1} > 1. \tag{5.19}$$

De (5.18) e (5.19), concluimos que

$$\begin{aligned}
 \frac{b_1 a_{21}}{a_{11} b_2} \frac{b_2 a_{12}}{a_{22} b_1} > 1 &\Leftrightarrow \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11} a_{22}} > 1 \\
 &\Leftrightarrow a_{21} a_{12} > a_{11} a_{22} \\
 &\Leftrightarrow a_{21} a_{12} - a_{11} a_{22} > 0 \\
 &\Leftrightarrow -M_{12} > 0 \\
 &\Leftrightarrow M_{12} < 0.
 \end{aligned}$$

Logo, $M_{jk} < 0$ se, e somente se Q_i é um ponto de sela no plano $X_j \times X_k$ e, portanto, repele em $\partial\Sigma$. ■

A partir de agora vamos discutir alguns resultados obtidos dos sinais dos menores principais. Antes, vamos relembrar as fórmulas de Viète para um polinômio de terceiro grau, que relacionam os coeficientes de um polinômio com as somas e produtos de suas raízes. Elas são úteis para simplificar cálculos e deduzir propriedades sobre as raízes sem obtê-las explicitamente. Considere um polinômio cúbico da forma:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

onde a , b , c e d são coeficientes reais, e $a \neq 0$. Suponha que as raízes desse polinômio sejam r , s , e t . Então podemos expressar o polinômio de duas formas diferentes,

$$a(x-r)(x-s)(x-t) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Ao expandir o lado esquerdo e comparar com o lado direito, obtemos as relações a seguir:

i) Soma das raízes tomadas uma a uma:

$$r + s + t = -\frac{b}{a}.$$

ii) Soma das raízes tomadas duas a duas:

$$rs + rt + st = \frac{c}{a}.$$

iii) Produto das raízes:

$$rst = -\frac{d}{a}.$$

Com isso, podemos provar a seguinte proposição.

Proposição 5.13. *Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz 3×3 com $M_{12} + M_{13} + M_{23} < 0$, então A tem um autovalor com parte real negativa.*

Demonstração.

Provaremos por contradição. Assuma que todos os autovalores de A têm parte real não negativa. O polinômio característico de A é dado por

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} \\
&\quad - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{21}\lambda - a_{11}a_{22}\lambda + a_{13}a_{31}\lambda + a_{23}a_{32}\lambda - a_{11}a_{33}\lambda \\
&\quad - a_{22}a_{33}\lambda + a_{11}\lambda^2 + a_{22}\lambda^2 + a_{33}\lambda^2 - \lambda^3 \\
&= a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} \\
&\quad + (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} + a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33} + a_{23}a_{32} - a_{22}a_{33})\lambda \\
&\quad + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - \lambda^3 \\
&= -\lambda^3 + \text{Tr}(A)\lambda^2 - (M_{12} + M_{13} + M_{23})\lambda + \det(A) \\
&= -\lambda^3 + c_2\lambda^2 - c_1\lambda + c_0,
\end{aligned}$$

onde os coeficientes c_i são escritos em termos das entradas a_{ij} de A . Em particular,

$$c_1 = (M_{12} + M_{13} + M_{23}) < 0.$$

Usando as relações de Viète para um polinômio de grau 3 e a hipótese, temos que

$$-c_1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \geq 0.$$

Logo, $0 > (M_{12} + M_{13} + M_{23}) = c_1 = -c_1 = 0$, o que é uma contradição. Portanto, A deve possuir um autovalor com parte real negativa. ■

O resultado principal desta seção é apresentado a seguir e válido para qualquer dimensão n . Iremos enunciá-lo e prová-lo para $n = 3$.

Teorema 5.14. *Seja F um campo nas classes 26 a 31, ou seja, $\dot{x}_i = F_i(x) = x_i(A(1-x))_i$, com $\det(A) > 0$. Se*

$$M_{12} + M_{13} + M_{23} < 0,$$

então P tem uma variedade instável de dimensão pelo menos 2.

Demonstração.

O comportamento dinâmico em $P = e$ é dado pelos autovalores de $J_F(P) = -A$. Pela Proposição 5.13, A tem um autovalor com parte real negativa. Mas, hávamos colocado a hipótese de que $\det A > 0$, assim, A deve ter dois autovalores com parte real negativa, uma vez que o $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$. Logo, $-A$ tem dois autovalores com parte real positiva, correspondendo à variedade instável de P de dimensão pelo menos 2. ■

Corolário 5.15. *Seja $F \in CLV(3)$. Se cada um dos equilíbrios axiais R_i for atrator, então F não pode ter outros equilíbrios atratores.*

Demonstração.

Como cada um dos equilíbrios axiais R_i é atrator, estamos nas classes 18 ou 32 (veja Figura 4.23). A dinâmica da classe 18 é totalmente conhecida e sabemos que não há outros equilíbrios atratores. Assuma agora F na classe 32. Restringindo a atenção aos planos coordenados bidimensionais, vemos que o fato dos pontos R_i serem atratores força a existência dos pontos de equilíbrio planares Q_i em cada uma das faces unidimensionais de Σ , e também que Q_i repele em cada uma dessas faces. Da Proposição 5.12, sabemos que isso significa que $M_{jk} < 0$ para cada $j < k, j, k = 1, 2, 3$. Logo, $M_{12} + M_{13} + M_{23} < 0$ e, aplicando o Teorema 5.14, vemos que P não pode ser atrator. ■

Observação 5.16. *O significado biológico do Corolário 5.15 é que se cada uma das n populações competidoras, quando em capacidade de suporte, puder resistir à invasão por um pequeno número de outras, então não pode haver coexistência estável de mais de uma espécie, de modo que qualquer coexistência, se houver, deve ser natureza oscilatória.*

Corolário 5.17. *Seja F um campo nas classes 26 a 31, ou seja, $\dot{x}_i = F_i(X) = x_i(A(e - x))_i$, com $\det(A) > 0$. Se*

$$M_{12} + M_{13} + M_{23} < 0,$$

então P repele em Σ .

Demonstração.

Como Σ é uma superfície invariante bidimensional globalmente atratora, e por isso contém a variedade instável de P . Pelo Teorema 5.14 a variedade instável tem dimensão ao menos 2, então localmente coincide com Σ . Assim, P repele em Σ . ■

Corolário 5.18. *Seja F um campo nas classes 26 a 31, ou seja, $\dot{x}_i = F_i(x) = x_i(A(e - x))_i$, com $\det(A) > 0$. Se $M_{12}, M_{13}, M_{23} < 0$, não existe bifurcação de Hopf de P nas famílias $\mathcal{F}(F)$.*

Demonstração.

Segue direto do corolário anterior, uma vez que o sinal dos menores de A são invariantes em $\mathcal{F}(F)$. De fato, observe que

$$TA = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\tau_1 & a_{12}\tau_1 & a_{13}\tau_1 \\ a_{21}\tau_2 & a_{22}\tau_2 & a_{23}\tau_2 \\ a_{31}\tau_3 & a_{32}\tau_3 & a_{33}\tau_3 \end{pmatrix}.$$

Assim, os menores para toda matriz em $\mathcal{F}(F)$ são da forma

$$\begin{aligned} M_{12}^T &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\tau_1\tau_2 = M_{12}\tau_1\tau_2, \\ M_{13}^T &= (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})\tau_1\tau_3 = M_{13}\tau_1\tau_3, \\ M_{23}^T &= (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})\tau_2\tau_3 = M_{23}\tau_2\tau_3. \end{aligned}$$

Como $\tau_i > 0$, para $i = 1, 2, 3$, temos que o sinal dos menores não se altera em $\mathcal{F}(F)$. Como P repele em Σ , $J_f(P)$ sempre possui dois autovalores com parte real positiva. Para que ocorra uma bifurcação de Hopf é necessário que um par de autovalores mude o sinal de suas respectivas partes reais. No nosso caso não pode ocorrer a mudança de sinais das partes reais dos autovalores. visto que dois autovalores sempre têm parte real positiva. Portanto, não pode ocorrer bifurcação de Hopf. ■

Corolário 5.19. *Dentro da classe isóclina 32 não temos bifurcações de Hopf.*

Demonstração.

Como sabemos a classe isóclina 32 possui 3 pontos de equilíbrio axiais R_i atratores e 3 pontos de equilíbrio planares Q_i repulsores em $\partial\Sigma$. Segue direto do corolário anterior uma vez que $M_{jk} < 0$ se, somente se, Q_i repele em $\partial\Sigma$ para $i = j, k$. ■

Observação 5.20. *Isso significa que na classe isóclina 32, órbitas periódicas não são produzidas no ponto de equilíbrio interior através de bifurcações de Hopf, nem em $\partial\Sigma$ (os pontos de sela impedem isso), de modo que qualquer órbita periódica que ocorra deve ser o resultado de alguma bifurcação sela-nó de órbitas periódicas. Além disso, órbitas periódicas hiperbólicas, se existirem, devem ocorrer em números pares.*

Os resultados anteriores foram provados por M.L. Zeeman em 1993, conforme documentado em [1]. Esses resultados levaram Zeeman a formular a seguinte proposição.

Proposição 5.21. *Sistemas na classe isóclina 32 não possuem órbitas periódicas.*

Em 1998, M.L. Zeeman e P. van den Driesche provaram a proposição citada anteriormente, que até então era uma conjectura aplicável às classes isóclinas 32 e 33, como detalhado em [2]. A seguir, apresentaremos a prova deste resultado, antes de examinar as classes de isóclinas de 26 a 31 e demonstrar que estas possuem bifurcações de Hopf.

5.2.1 As classes 32 e 33

O estudo a seguir se baseia no artigo [2] e tem como objetivo demonstrar a Conjectura 5.21. Os seguintes resultados fornecem uma generalização do Critério de Dulac para sistemas tridimensionais e serão empregados para mostrar que as classes 32 e 33 não possuem órbitas periódicas. Algumas aplicações desses resultados podem ser consultadas em [19] e [20].

Teorema 5.22. *(Busenberg e van den Driessche) Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial C^1 e seja $\gamma(t)$ curva fechada suave limitando uma superfície orientável C^1 , $S \subset \mathbb{R}^3$, com vetor normal n . Suponha que existe um campo vetorial $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido e C^1 em uma vizinhança de S tal que:*

(A) $H \cdot F \leq 0$ (≥ 0) em γ .

(B) $\text{rot } H \cdot n \geq 0$ (≤ 0) em S .

(C) Ou $H \cdot F \neq 0$ em γ ou $\text{rot } H \cdot n \neq 0$ em S .

Então, $\gamma(t)$ não é uma órbita fechada de $\dot{x} = F(x)$ transversal no sentido positivo com respeito à n .

Demonstração.

Observe que $\gamma(t)$ é uma órbita de $\dot{x} = F(x)$ se, e somente se, é uma órbita de $\dot{x} = -F(x)$, percorrida na direção oposta. Assim, provar o resultado para desigualdades em (A) e (B), com “ \leq ” para F implica no resultado com “ \geq ” para $-F$. Apresentaremos a prova apenas para o primeiro conjunto. Pelo Teorema de Stokes e por (B),

$$0 < \iint_S (\text{rot } H) \cdot n \, dA = \int_{\gamma} H(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt. \quad (5.20)$$

Agora, se $\gamma(t)$ é suave $\dot{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$, então a partir de (A),

$$\int_{\gamma} H(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt = \int_{\gamma} H(\gamma(t)) \cdot F(\gamma(t)) \, dt \leq 0.$$

Isso contradiz (5.20) e o teorema está demonstrado. ■

Corolário 5.23. *Sejam $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t)$, S e n como no Teorema 5.22. Suponha que existe um campo vetorial $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido e C^1 em uma vizinhança de S , tal que:*

(A) $H \cdot F \equiv 0$ em γ .

(B) $(\text{rot } H) \cdot n \geq 0$ ou $(\text{rot } H) \cdot n \leq 0$, mas $(\text{rot } H) \cdot n \neq 0$ em S .

Então, $\gamma(t)$ não é órbita fechada de $\dot{x} = F(x)$.

Demonstração.

Se $\gamma(t) \in S$ fosse uma órbita periódica de $x' = F(x(t))$, então teríamos $\{\gamma(t) : t \geq 0\} = \partial S'$ para alguma superfície suave orientada S' contida em S , onde γ teria orientação positiva em relação ao vetor normal n de S . Pelo Teorema 5.22 aplicado a $\gamma(t)$ e S' , vemos que isso não é possível. ■

Utilizando este corolário, vamos provar um resultado para o caso em que os equilíbrios axiais R_1, R_2 , e R_3 são atratores em Σ e existe um ponto de equilíbrio interior P , ou seja, para a classe 32. Primeiramente, vamos estabelecer que qualquer órbita periódica do sistema limita uma região S de Σ com um vetor normal positivo n . Em seguida, utilizamos a geometria da configuração das isóclinas para entender a condição de cada R_i ser atrativo em termos de um conjunto de desigualdades para os parâmetros a_{ij} e b_i . Depois, introduzimos um campo vetorial $H : \text{int}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R}^3$ e utilizamos desigualdades para aplicar o Corolário 5.23 e eliminar a possibilidade de órbitas periódicas. Na próxima demonstração, usaremos o conceito de região balanceada, dado na Definição 2.6.

Proposição 5.24. *Seja $S \subset \Sigma$. Para $x \in S$, o plano tangente $T_x S$ a S no ponto x existe e é balanceado.*

Demonstração.

Seja $x \in S \subset \Sigma$. Suponha que $T_x S$ não seja balanceado. Então, existem $u, v \in T_x S$ tais que $u - v = w > 0$ (w possui todas as componentes estritamente positivas). Como $T_x S$ é um espaço vetorial, temos $w \in T_x S$. Seja $\gamma(t) : (\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \subset \Sigma$ uma curva em $S \subset \Sigma$, com $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = w$. Para $t \in (0, \varepsilon)$, pela expansão de Taylor temos que

$$\gamma(t) = \gamma(0) + t\dot{\gamma}(0) + \theta(t^2).$$

Logo, para t suficientemente pequeno temos que

$$\gamma(t) - \gamma(0) = t\dot{\gamma}(0) + \theta(t^2),$$

onde o sinal do termo da direita é governado pelo sinal de t e pelo sinal das componentes de $\dot{\gamma}(0) = w$ que são todas positivas. Logo, $\gamma(t) - \gamma(0) > 0$ para $t > 0$. Assim, Σ não é um conjunto balanceado, o que contradiz o Teorema de Hirsch 2.7 e o Corolário 2.12. Portanto, $T_x S$ é balanceado. ■

Teorema 5.25. *Considere o sistema*

$$\dot{x}_i = F_i(x) = x_i \left(b_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.21)$$

e suponha que R_1, R_2 e R_3 são atratores (repulsores) em Σ . Então, o sistema não admite órbitas periódicas.

Demonstração.

Suponha que o sistema (5.21) tenha uma órbita periódica não trivial $\gamma(t)$. Então, de acordo com o Teorema de Hirsch, $\gamma(t)$ está no interior de Σ . Portanto, como $\gamma(t)$ é uma órbita periódica e, logo, é uma curva fechada, ela delimita uma região S dentro de $\text{int}(\Sigma)$. Agora, suponha que o vetor normal $n = (n_1, n_2, n_3)$ a S em x não pode ser escolhido como um vetor positivo. Assim, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $n_1 > 0, n_2 \geq 0$ e $n_3 < 0$. Tome $\bar{x} = (-n_3, -n_3, (n_1 + n_2))$. Então,

$$n \cdot \bar{x} = (n_1, n_2, n_3) \cdot (-n_3, -n_3, (n_1 + n_2)) = 0.$$

Portanto, $\bar{x} \in T_x S$, uma vez que é ortogonal ao vetor normal n de $T_x S$. Mas isso contradiz o fato de que $T_x S$ é balanceado, já que $(x + \bar{x}) - x = \bar{x}$ e \bar{x} tem componentes estritamente positivas. Logo, o vetor normal n pode ser escolhido como um vetor positivo. Assumindo que R_1, R_2 e R_3 são todos atrativos em E , temos $b_i/a_{ii} > b_j/a_{ji}$ para $i, j = 1, 2, 3$ com $i \neq j$. Explicitamente, estas desigualdades são dadas por:

$$\begin{aligned} b_2 a_{11} - b_1 a_{21} &< 0, \\ b_3 a_{11} - b_1 a_{31} &< 0, \\ b_1 a_{22} - b_2 a_{12} &< 0, \\ b_3 a_{22} - b_2 a_{32} &< 0, \\ b_1 a_{33} - b_3 a_{13} &< 0, \\ b_2 a_{33} - b_3 a_{23} &< 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Denote por F o membro direito do sistema (5.21), e defina $G : \text{int}(\mathbb{R}_+^3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$G(x) = F(x) \times v(x),$$

onde

$$v(x) = \frac{1}{x_1 x_2 x_3} \begin{pmatrix} b_1 x_1 \\ b_2 x_2 \\ b_3 x_3 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} G(x) &= \begin{pmatrix} F_2(x)v_3(x) - F_3(x)v_2(x) \\ F_3(x)v_1(x) - F_1(x)v_3(x) \\ F_1(x)v_2(x) - F_2(x)v_1(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{b_3}{x_1 x_2} F_2(x) - \frac{b_2}{x_1 x_3} F_3(x) \\ \frac{b_1}{x_2 x_3} F_3(x) - \frac{b_3}{x_1 x_2} F_1(x) \\ \frac{b_2}{x_1 x_3} F_1(x) - \frac{b_1}{x_2 x_3} F_2(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{b_3}{x_1 x_2} \left(x_2 \left(b_2 - \sum_{j=1}^3 a_{2j} x_j \right) \right) - \frac{b_2}{x_1 x_3} \left(x_3 \left(b_3 - \sum_{j=1}^3 a_{3j} x_j \right) \right) \\ \frac{b_1}{x_2 x_3} \left(x_3 \left(b_3 - \sum_{j=1}^3 a_{3j} x_j \right) \right) - \frac{b_3}{x_1 x_2} \left(x_1 \left(b_1 - \sum_{j=1}^3 a_{1j} x_j \right) \right) \\ \frac{b_2}{x_1 x_3} \left(x_1 \left(b_1 - \sum_{j=1}^3 a_{1j} x_j \right) \right) - \frac{b_1}{x_2 x_3} \left(x_2 \left(b_2 - \sum_{j=1}^3 a_{2j} x_j \right) \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \frac{b_3}{x_1} \left(b_2 - \sum_{j=1}^3 a_{2j}x_j \right) - \frac{b_2}{x_1} \left(b_3 - \sum_{j=1}^3 a_{3j}x_j \right) \\ \frac{b_1}{x_2} \left(b_3 - \sum_{j=1}^3 a_{3j}x_j \right) - \frac{b_3}{x_2} \left(b_1 - \sum_{j=1}^3 a_{1j}x_j \right) \\ \frac{b_2}{x_3} \left(b_1 - \sum_{j=1}^3 a_{1j}x_j \right) - \frac{b_1}{x_3} \left(b_2 - \sum_{j=1}^3 a_{2j}x_j \right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{b_3}{x_1} (b_2 - (Ax)_2) - \frac{b_2}{x_1} (b_3 - (Ax)_3) \\ \frac{b_1}{x_2} (b_3 - (Ax)_3) - \frac{b_3}{x_2} (b_1 - (Ax)_1) \\ \frac{b_2}{x_3} (b_1 - (Ax)_1) - \frac{b_1}{x_3} (b_2 - (Ax)_2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Como

$$G \cdot F = (F \times v) \cdot F \equiv 0 \quad \text{em } \text{int}(\mathbb{R}_+^3),$$

temos precisamente a hipótese (A) do Corolário 5.23. Agora, escrevendo

$$F = \begin{pmatrix} x_1 L_1 \\ x_2 L_2 \\ x_3 L_3 \end{pmatrix}, \quad \text{onde } L_i = b_i - (Ax)_i$$

assim,

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} (b_3 L_2 - b_2 L_3) \\ \frac{1}{x_2} (b_1 L_3 - b_3 L_1) \\ \frac{1}{x_3} (b_2 L_1 - b_1 L_2) \end{pmatrix}$$

e

$$\text{rot } G = \nabla \times G = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} G_3(x) - \frac{\partial}{\partial x_3} G_2(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} G_1(x) - \frac{\partial}{\partial x_1} G_3(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} G_2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2} G_1(x) \end{pmatrix}.$$

Precisamos calcular as derivadas parciais das componentes de G . Como,

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \frac{1}{x_1} (b_3(b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)) - (b_2(b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)))), \\ G_2(x) &= \frac{1}{x_2} (b_1(b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)) - (b_3(b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)))), \\ G_3(x) &= \frac{1}{x_3} (b_2(b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)) - (b_1(b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)))), \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} G_1(x) &= \frac{1}{x_2} (b_2 a_{32} - b_3 a_{22}), \\ \frac{\partial}{\partial x_3} G_1(x) &= \frac{1}{x_1} (b_2 a_{33} - b_3 a_{23}), \\ \frac{\partial}{\partial x_1} G_2(x) &= \frac{1}{x_2} (b_3 a_{11} - b_1 a_{31}), \\ \frac{\partial}{\partial x_3} G_2(x) &= \frac{1}{x_2} (b_3 a_{13} - b_1 a_{33}), \\ \frac{\partial}{\partial x_2} G_3(x) &= \frac{1}{x_3} (b_1 a_{22} - b_2 a_{12}), \\ \frac{\partial}{\partial x_1} G_3(x) &= \frac{1}{x_3} (b_1 a_{21} - b_2 a_{11}). \end{aligned}$$

Substituindo em (5.2.1), temos

$$\text{rot } G = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_3} (b_1 a_{22} - b_2 a_{12}) + \frac{1}{x_1} (b_1 a_{33} - b_3 a_{13}) \\ \frac{1}{x_1} (b_2 a_{33} - b_3 a_{23}) + \frac{1}{x_3} (b_2 a_{11} - b_1 a_{21}) \\ \frac{1}{x_2} (b_3 a_{11} - b_1 a_{31}) + \frac{1}{x_1} (b_3 a_{22} - b_2 a_{32}) \end{pmatrix}.$$

Os sinais dos seis termos em $\text{rot } G$ são dados precisamente pelas desigualdades (5.22), e como $x_i > 0$ em $\text{int}(\mathbb{R}_+^3)$ para cada i , cada componente de $\text{rot } G$ é estritamente negativa. Então, a hipótese (B) do Corolário 5.23 segue do fato de que n é positivo e não nulo. Portanto, podemos concluir do Corolário 5.23 que $\gamma(t)$ não pode ser uma órbita periódica do sistema (5.21). ■

O resultado anterior prova a Conjectura 5.21. Assim, quando três espécies deste tipo interagem, uma delas deve sempre dominar, levando à extinção das outras duas.

Corolário 5.26. *A classe isoclina 33 não possui órbitas periódicas.*

Demonstração.

Se R_1, R_2 , e R_3 são todos repulsores em Σ (ou seja, classe 33), então as desigualdades (5.22) são todas invertidas, e a prova segue de maneira semelhante. ■

Observação 5.27. *Note que se todos os R_i são atratores em Σ (ou seja, classe 32), as desigualdades (5.22) implicam que a autorregulação é menor que a competição, no sentido de que para todos i, j, k distintos, $a_{ii}a_{jj} < a_{ij}a_{ji}$ e $a_{ii}a_{jj}a_{kk} < a_{ij}a_{jk}a_{ki}$. No caso repulsor (ou seja, classe 33), ocorre o fenômeno oposto, pois as desigualdades (5.22) são invertidas.*

Corolário 5.28. *Dado $F \in CLV(3)$, se R_1, R_2 e R_3 são atratores locais em Σ , então quase todas as trajetórias convergem para um dos pontos de equilíbrio R_i com $i = 1, 2, 3$.*

Corolário 5.29. *Considere $F \in CLV(3)$, possuindo o ponto de equilíbrio interior $P \in \text{int}(\Sigma)$ e suponha que R_1, R_2 e R_3 repulsores locais em Σ . Então P é globalmente assintoticamente estável em $\text{int}(\mathbb{R}_+^3)$.*

Observação 5.30. *O significado biológico do Corolário 5.28 é que se cada uma das espécies pode sobreviver a uma invasão, então não pode haver coexistência a longo prazo de 3 ou mesmo 2 espécies. Em outras palavras, duas espécies são levadas à extinção enquanto uma sobrevive em sua capacidade de suporte.*

Observação 5.31. *O significado biológico do Corolário 5.29 é que se nenhuma das espécies pode sobreviver a uma invasão, e existir um ponto de equilíbrio interior de coexistência, então ocorre a coexistência a longo prazo de 3 espécies não havendo comportamento oscilatório. Em outras palavras, se inicialmente existirem indivíduos das 3 espécies o sistema é levado à coexistência estável de todas elas.*

Neste seção, provamos que na classe 32 não há órbitas periódicas e, portanto, o ponto de equilíbrio interior P é repulsor. Provamos também que não há órbitas periódicas na classe 33 e, portanto, P é atrator. Assim, até aqui concluímos que as classes de 1 a 25, 32 e 33 não têm órbitas periódicas. Os retratos de fase ficam completamente determinados pela Figura 5.1. Além disso, mostramos que as classes 26 a 30 possuem representantes sem órbitas periódicas, cujos retratos de fase também estão na Figura 5.1.

5.3 Famílias com bifurcações de Hopf

Nesta seção provaremos a existência de bifurcações de Hopf nas classes 26 à 31 e, conseqüentemente, órbitas periódicas nestas classes. Para alcançar nosso objetivo, para uma família $\mathcal{F}(F)$ dada, escolhemos uma família particular $F(\tau)$ e a matriz correspondente $A(\tau)$. Mostraremos que ao variar o parâmetro τ a parte real dos autovalores de $A(\tau)$ muda de sinal, indicando uma bifurcação de Hopf.

Teorema 5.32. *Seja $\dot{x}_i = F_i(x) = x_i(A(1-x))_i$, $i = 1, 2, 3$, com $\det(A) > 0$. Se, para $j \neq k$, os M_{jk} não possuem todos o mesmo sinal, então a família $\mathcal{F}(F)$ admite bifurcação de Hopf em P .*

Demonstração.

Ao longo da demonstração deste teorema vamos enunciar alguns lemas que serão provados posteriormente.

O comportamento em P é dado pelos autovalores de $J_F(P) = -A$ ou, equivalentemente, pelos autovalores de A . Da família $\mathcal{F}(F)$, vamos escolher uma família particular a um parâmetro $F(\tau)$, com a matriz correspondente $A(\tau)$. Precisamos estudar os autovalores de $A(\tau)$ quando o parâmetro τ varia. Mostraremos que para um τ_0 suficientemente pequeno os autovalores de $A(\tau_0)$ tem parte real positiva, enquanto para τ_1 suficientemente grande, $A(\tau_1)$ possui um par de autovalores com parte real negativa (ou vice-versa). Conseqüentemente, esses autovalores devem cruzar o eixo imaginário à medida que o parâmetro τ se afasta de $F(\tau_0)$ no sentido de $F(\tau_1)$. Mostraremos que esse cruzamento ocorre com derivada da parte real não nula, indicando assim uma bifurcação de Hopf, conforme o Teorema C.1 no Anexo C.

Considere o caso em que $M_{23} > 0$ e $M_{13}, M_{12} < 0$. Os outros casos seguirão de maneira semelhante. Lembramos que $\mathcal{F}(F)$ é a família determinada pelas matrizes $\{TA : T = (\tau_{ij})\}$, onde T é uma matriz diagonal com entradas positivas. Vamos considerar a subfamília a um parâmetro obtida ao fixar $\tau_{22} = \tau_{33} = 1$, e permitindo que $\tau_{11} = \tau$ que possa variar por todos os números reais positivos. Seja

$$F(\tau)_i(x) = x_i(A(\tau)(1-x))_i, \quad (5.23)$$

onde

$$T = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(\tau) = TA = \begin{pmatrix} \tau a_{11} & \tau a_{12} & \tau a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Consideremos agora o seguinte lema, cuja demonstração será apresentada mais a frente.

Lema 5.33. *Se $\tau \rightarrow 0$ os autovalores de $A(\tau)$ tendem $\lambda_0, \eta_0, 0$, onde λ_0, η_0 tem partes reais estritamente positivas.*

Sabemos pela teoria de Álgebra Linear que os autovalores de uma matriz dependem continuamente de suas entradas. Logo, pelo lema anterior, para τ_0 positivo suficientemente próximo de 0, $A(\tau_0)$ possui pelo menos dois autovalores com parte real positiva. Mas $\det(A) > 0$ por hipótese, e $\det(A(\tau)) = \det(T) \det(A) = \tau \det A > 0$ para $\tau > 0$, de modo que o produto dos autovalores de $A(\tau_0)$ é positivo e, assim, todos os três autovalores de $A(\tau_0)$ devem ter parte real positiva. Portanto, como $J_F(P) = -A$, os autovalores de $J_F(P)$ têm todos parte real negativa, de modo que P é atrator para $F(\tau_0)(x)$.

Lema 5.34. *Se $\tau \rightarrow \infty$ os autovalores de $A(\tau)$ tendem a $\lambda_1, \eta_1, \infty$, onde λ_1, η_1 têm partes reais estritamente negativas.*

A demonstração desse lema será apresentada mais à frente. Novamente, os autovalores de $A(\tau)$ dependem continuamente das entradas de $A(\tau)$, e, portanto, de τ . Assim, para τ_1 suficientemente grande, $A(\tau_1)$ tem dois autovalores com parte real negativa, e como antes, $J_F(P) = -A$ e os autovalores $J_F(P)$ têm todos parte real positiva, de modo que P é repulsor em Σ para $F(\tau_1)$. Consequentemente, à medida que τ varia de τ_0 para τ_1 , dois dos autovalores de $A(\tau)$ variam continuamente de ter parte real positiva para parte real negativa e, necessariamente, devem cruzar o eixo imaginário. Além disso, eles não cruzam o eixo no zero, já que $\det A(\tau) \neq 0$ para $\tau \neq 0$ e, assim, devem cruzar o eixo imaginário como um par complexo conjugado não nulo, ou seja, da forma $\pm i\omega$ com $\omega \neq 0$.

Finalmente, o próximo lema nos fornece a última parte da demonstração.

Lema 5.35. *Existe um único valor do parâmetro τ onde os autovalores da família $\{A(\tau)\}$ cruzam o eixo imaginário. Além disso, esse cruzamento ocorre com uma derivada da parte real não nula.*

Estes resultados corresponde a uma bifurcação de Hopf na família de sistemas $\{F(\tau)\}$, e o teorema está provado. ■

Corolário 5.36. *Dentro da família de sistemas da classe isóclina estável 26, correspondendo a qualquer conjunto de isóclinas, admite uma bifurcação de Hopf e, consequentemente, órbitas periódicas.*

Demonstração.

O corolário é imediato visto que qualquer sistema na classe 26 tem um ponto de equilíbrio planar repulsor em $\partial\Sigma$, e outro atrator em $\partial\Sigma$ e, assim, tem menores principais com sinais opostos. ■

Note que as famílias de sistemas das classes de 27 à 31 satisfazem as hipóteses do Teorema 5.32, mas as classes 32 e 33 não. As classes 26-31 contêm alguns sistemas com órbitas periódicas, e outros sem. O número máximo de órbitas periódicas isoladas que podem ocorrer em cada uma das classes 26-31 permanece em aberto. Apresentamos uma breve descrição do estado atual das pesquisas neste sentido no próximo capítulo.

Forneceremos a seguir a prova do Lema 5.33.

Demonstração. Como $A(0)$ é o limite contínuo de matrizes positivas $A(\tau)$, ela deve ter um autovalor não negativo, dominando os módulos dos outros autovalores. Em outras palavras, esse autovalor é o limite contínuo do autovalor de Perron-Frobenius das matrizes $A(\tau)$. Temos

$$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico de $A(0)$ é dado por

$$\begin{aligned} \det(A(0) - \lambda Id) &= -\lambda^3 + (a_{22} + a_{33})\lambda^2 + (a_{23}a_{32} - a_{22}a_{33})\lambda \\ &= -\lambda(\lambda^2 - (a_{22} + a_{33})\lambda + (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})) \\ &= -\lambda(\det(A_{23} - \lambda Id)). \end{aligned}$$

Portanto, os autovalores de $A(0)$ são $\lambda_0, \mu_0, 0$, onde λ_0, μ_0 são os autovalores de A_{23} . Pela

hipótese, $0 < M_{23} = \lambda_0 \mu_0$ e, assim, ambos λ_0, μ_0 devem possuir os mesmos sinais. Como $A_{23} > 0$, pelo Teorema de Perron-Frobenius $0 < \rho(A_{23}) = \lambda_0$, o que implica que $\mu_0 > 0$. Portanto, os autovalores de $A(\tau)$ quando $\tau \rightarrow 0$ são $0, \lambda_0, \mu_0$, onde $\lambda_0, \mu_0 > 0$. ■

Para a demonstração do Lema 5.35 usaremos o Teorema de Gershgorin.

Teorema 5.37. (Gershgorin) Dada $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$, defina o i -ésimo disco de Gershgorin D_i como o disco no plano complexo de raio $\sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ e centro no ponto a_{ii} . Cada disco de Gershgorin contém um autovalor de A . Ainda, para cada i_1, i_2, \dots, i_r existem ao menos r autovalores de A em $\bigcup_{k=1}^r D_{i_k}$.

Demonstração.

Seja λ um autovalor de A com autovetor correspondente $x = (x_1, \dots, x_n)$. Seja i tal que a componente de x com maior valor absoluto seja x_i . Como $Ax = \lambda x$, em particular, tomamos a i -ésima componente dessa equação para obter

$$\sum_j a_{ij} x_j = \lambda x_i.$$

Levando $a_{ii} x_i$ para o outro lado, temos

$$\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j = (\lambda - a_{ii}) x_i.$$

Portanto, aplicando a desigualdade triangular e lembrando que $\left| \frac{x_j}{x_i} \right| \leq 1$ com base em como escolhemos i , temos

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{j \neq i} \frac{a_{ij} x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

■

Corolário 5.38. Os autovalores de A também devem estar dentro dos discos de Gershgorin C_j correspondentes às colunas de A .

Demonstração.

Aplique o Teorema a A^T , reconhecendo que os autovalores da transposta são os mesmos que os da matriz original. ■

Forneceremos a seguir a prova do Lema 5.34.

Demonstração.

Mostraremos que o autovalor de Perron-Frobenius $\lambda_1(\tau)$ de $A(\tau)$ cresce com τ e aplicaremos o corolário do Teorema de Gershgorin em $A(\tau)$. Estudaremos o disco definido pela primeira coluna de $A(\tau)$. Lembrando que

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} \tau a_{11} & \tau a_{12} & \tau a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

e, assim, temos que $A(\tau)$ tem um autovalor $\lambda_1(\tau)$ no disco de raio $a_{21} + a_{31}$, centrado em τa_{11} . Logo, $|\tau a_{11} - \lambda_1(\tau)| \leq a_{21} + a_{31}$. Logo, como a_{21} e a_{31} são reais positivos fixados do espaço de parâmetros, temos que a diferença em norma de $|\tau a_{11} - \lambda_1(\tau)|$ deve ser sempre menor que a soma $a_{21} + a_{31}$ e, assim, temos a necessidade que $\lambda_1(\tau)$ cresça com τ , e à medida que $\tau \rightarrow \infty$, $\lambda_1(\tau) \rightarrow \infty$. Agora considere os discos de Gershgorin D_2 e D_3 definidos pela segunda e terceira linhas de $A(\tau)$, respectivamente. Esses são independentes de τ , e enquanto $\lambda_1(\tau)$ cresce sem limites, os outros dois autovalores $\lambda_2(\tau), \lambda_3(\tau)$ estão contidos na união compacta $D_2 \cup D_3$. Logo, $\lambda_2(\tau), \lambda_3(\tau)$ são ou um par complexo conjugado, caso em que seus autovetores correspondentes geram um plano invariante, ou são reais distintos, caso em que seus autovetores também geram um plano invariante. Em ambos os casos, vamos dar atenção a esse plano invariante $N(\tau)$ para entender mais sobre $\lambda_2(\tau)$ e $\lambda_3(\tau)$. Para determinar o plano, observe que $N(\tau)$ depende continuamente de τ , e considere as matrizes $\tau^{-1}A(\tau)$. Para cada τ , $\tau^{-1}A(\tau)$ claramente possui os mesmos planos invariantes que $A(\tau)$ e à medida que $\tau \rightarrow \infty$, uma vez que estamos multiplicando

todas as entradas por uma constante real, temos

$$\frac{1}{\tau}A(\tau) \rightarrow B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de B serão $\lambda_1 = a_{11}$ com multiplicidade 1, e $\lambda_2 = 0$ com multiplicidade 2. Agora, para cada autovalor, precisamos encontrar os autovetores associados resolvendo o sistema de equações $(B - \lambda I)v = 0$. Para $\lambda = a_{11}$ os autovetores têm a forma $(1, 0, 0)$. Para $\lambda = 0$, temos o sistema de equações

$$(B - 0I)v = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A primeira linha nos dá $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$, e os autovetores distintos correspondentes ao autovalor 0 são $v_1^0 = (-a_{12}/a_{11}, 1, 0)$ e $v_2^0 = (-a_{13}/a_{11}, 0, 1)$. Logo, o autovalor 0 tem como autoespaço correspondente o plano $N = \{x \mid (Bx)_1 = 0\}$, que é paralelo à primeira isóclina N_1 dos sistemas $F(\tau)$. Ainda, os planos invariantes $N(\tau)$ de $A(\tau)$ tendem a N para $\tau \rightarrow \infty$.

Sejam $n(\tau) : \mathbb{R}^2 \rightarrow N(\tau)$ e $n : \mathbb{R}^2 \rightarrow N$ as parametrizações por (x_2, x_3) em $N(\tau)$ e N respectivamente e seja $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção sobre o plano de coordenadas G_1 , de modo que $\pi|_{N(\tau)} = (n(\tau))^{-1}$ para todos os τ .

Então, $\pi \cdot A(\tau) \cdot n(\tau)$ é um campo vetorial linear em $x_1 = 0$, topologicamente conjugado à restrição $A(\tau)|_{N(\tau)}$. Note que $A(\tau)|_{N(\tau)}$ é a restrição ao plano $N(\tau)$ do campo vetorial $x \mapsto Ax$. Todo vetor x neste plano é combinação linear de v_1^0 e v_2^0 . Mas também escrito da forma $x = n(\tau)(x_2, x_3)$ para algum (x_2, x_3) . Logo, a restrição do campo ao plano pode ser escrita como

$$(x_2, x_3) \mapsto A(\tau) \cdot n(\tau)(x_2, x_3).$$

Assim, aplicando a projeção π (que é um homeomorfismo se restrita a $N(\tau)$), temos

uma conjugação topológica entre o campo descrito anteriormente e $(x_2, x_3) \mapsto \pi \cdot A(\tau) \cdot n(\tau)(x_2, x_3)$. Mas, para τ_1 suficientemente grande, podemos aproximar $N(\tau_1)$ arbitrariamente próximo de N e podemos aproximar o campo vetorial $\pi \cdot A(\tau_1) \cdot n(\tau_1)$ por $\pi \cdot A(\tau_1) \cdot n$. Observe que

$$n \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 v_1 + x_3 v_2 = \left(- \left(x_2 \frac{a_{12}}{a_{11}} + x_3 \frac{a_{13}}{a_{11}} \right), x_2, x_3 \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \pi \cdot A(\tau_1) \cdot n \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{21} \left(- \left(x_2 \frac{a_{12}}{a_{11}} + x_3 \frac{a_{13}}{a_{11}} \right) \right) + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31} \left(- \left(x_2 \frac{a_{12}}{a_{11}} + x_3 \frac{a_{13}}{a_{11}} \right) \right) + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-a_{21}}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \frac{-a_{31}}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_{11}} \begin{pmatrix} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})x_3 \\ (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})x_2 + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})x_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_{11}} \begin{pmatrix} M_{12} & M_4 \\ M_5 & M_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde M_4, M_5 são os outros (não principais) menores de A . Logo, após obtido o polinômio característico, sabemos que a soma dos autovalores de $\pi \cdot A(\tau_1) \cdot n$ é dada pelo traço $(\pi \cdot A(\tau_1) \cdot n)$, ou seja, $(1/a_{11})(M_{12} + M_{13}) < 0$, uma vez que $M_{12}, M_{13} < 0$ pela hipótese. Portanto, $\pi \cdot A(\tau_1) \cdot n$ tem pelo menos um autovalor com parte real estritamente negativa limitada longe de 0 e, conseqüentemente, também $\pi \cdot A(\tau_1) \cdot n(\tau_1)$, $A(\tau_1) |_{N(\tau_1)}$ e também a matriz $A(\tau_1)$. Mas $\det A(\tau_1) > 0$, e como sabemos que um dos autovalores é positivo, concluímos que $A(\tau_1)$ deve ter dois autovalores com parte real estritamente negativa. ■

Para a demonstração do do Lema 5.35 usaremos um resultado de Geometria Álgebra, conhecido como Teorema de Bézout. A seguir enunciaremos o resultado de maneira simplificada, mas suficiente para o que pretendemos fazer. Para a demonstração e um enunciado mais completo veja [21].

Teorema 5.39. *(Teorema de Bézout) Dadas duas curvas polinomiais no plano \mathbb{R}^2 que não compartilham uma componente infinita de pontos em comum (ou seja, não são partes da mesma curva em um intervalo), o número máximo de pontos onde elas podem se intersectar é igual ao produto dos graus das duas curvas.*

Forneceremos agora a prova do Lema 5.35.

Demonstração.

Sabemos dos Lemas 5.33 e 5.34 que os autovalores da família $\{A(\tau)\}$ devem cruzar o eixo imaginário pelo menos uma vez. Seja ζ um valor de parâmetro em que ocorre tal cruzamento. Ou seja, para τ em uma vizinhança suficientemente pequena U de ζ , $A(\tau)$ terá um par de autovalores complexos conjugados, e denotamos por $\lambda(\tau)$ o autovalor com parte imaginária positiva. Então, $\lambda(\tau) : U \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função complexa contínua tal que para $\tau < \zeta$, $\text{Re}(\lambda(\tau)) > 0$, $\text{Re}(\lambda(\zeta)) = 0$, e para $\tau > \zeta$, $\text{Re}(\lambda(\tau)) < 0$. O cruzamento ocorre com derivada da parte real não nula se, e somente se, $d/d\tau(\text{Re}(\lambda(\tau)))|_{\zeta} \neq 0$.

Mostraremos que os autovalores não reais da família $\{A(\tau)\}$ estão em uma curva definida por uma equação polinomial de quarto grau em termos de uma variável complexa z . Usaremos, então, o Teorema de Bézout para mostrar que essa curva é disjunta do eixo imaginário, exceto por interseções transversais em $\lambda(\zeta)$ e $\overline{\lambda(\zeta)}$. Assim, ζ é único, e $d/d\tau(\text{Re}(\lambda(\tau)))|_{\zeta} = 0$ se e somente se $d/d\tau(\lambda(\tau))|_{\zeta} = 0$, o que leva a uma contradição.

A equação característica de $A(\tau)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\det(A(\tau) - zId) &= -a_{13}a_{22}a_{31}\tau + a_{12}a_{23}a_{31}\tau + a_{13}a_{21}a_{32}\tau - a_{11}a_{23}a_{32}\tau \\
&\quad - a_{12}a_{21}a_{33}\tau + a_{11}a_{22}a_{33}\tau - z^3 + a_{22}z^2 + a_{33}z^2 \\
&\quad + a_{11}\tau z^2 + a_{23}a_{32}z - a_{22}a_{33}z + a_{12}a_{21}\tau z \\
&\quad - a_{11}a_{22}\tau z + a_{13}a_{31}\tau z - a_{11}a_{33}\tau z \\
&= -z(z^2 - a_{22}z - a_{33}z) + \tau(-a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} \\
&\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}z^2 \\
&\quad + a_{23}a_{32}z - a_{22}a_{33}z + a_{12}a_{21}z - a_{11}a_{22}z + a_{13}a_{31}z - a_{11}a_{33}z) \\
&= -z(z^2 - a_{22}z - a_{33}z + M_{23}) \\
&\quad + \tau(a_{11}z^2 + \det(A) - z(M_{12} + M_{13})) \\
&= -zg_1(z) + \tau g_2(z),
\end{aligned}$$

onde cada $g_i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é um polinômio quadrático independente de τ . Com essa notação, z é um autovalor de $A(\tau)$ se, e somente se,

$$-zg_1(z) + \tau g_2(z) = 0,$$

o que ocorre se, e somente se,

$$\tau = \frac{zg_1(z)}{g_2(z)}. \quad (5.24)$$

Usaremos (5.24) para definir uma nova função G em \mathbb{C} por

$$G(z) = \frac{zg_1(z)}{g_2(z)},$$

de modo que os autovalores de $A(\tau)$ são dados precisamente por $G^{-1}(\tau)$. Os autovalores da família $\{A(\tau) : \tau > 0\}$ são dados por $G_1(I_+)$, onde $I_+ = (0, \infty)$, uma vez que τ pode

assumir valores positivos e este conjunto está contido em $G^{-1}(\mathbb{R})$. Mas

$$\begin{aligned}
 G(z) \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow G(z) = \overline{G(z)} \\
 &\Leftrightarrow \frac{zg_1(z)}{g_2(z)} = \frac{\overline{zg_1(z)}}{\overline{g_2(z)}} \\
 &\Leftrightarrow zg_1(z)\overline{g_2(z)} - \overline{zg_1(z)}g_2(z) = 0 \\
 &\Leftrightarrow zg_1(z)g_2(\bar{z}) - \bar{z}g_1(\bar{z})g_2(z) = 0.
 \end{aligned}$$

Escrevendo $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) e reagrupando termos, vemos que

$$g_1(x + iy) = (x + iy)^2 - (a_{22} + a_{33})(x + iy) + M_{23},$$

$$g_2(x + iy) = a_{11}(x + iy)^2 + \det(A) - (x + iy)(M_{12} + M_{13}).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 zg_1(z)g_2(\bar{z}) - \bar{z}g_1(\bar{z})g_2(z) &= -2iy[-\det(A)M_{23} + 2(a_{22} + a_{33})\det(A)x \\
 &\quad + (-3\det(A) - (a_{22} + a_{33})(M_{12} + M_{13}) + a_{11}M_{23})x^2 \\
 &\quad + 2(M_{12} + M_{13})x^3 - a_{11}x^4 \\
 &\quad + (\det(A)y^2 - (a_{22} + a_{33})(M_{12} + M_{13}) + a_{11}M_{23})y^2 \\
 &\quad + 2(M_{12} + M_{13})xy^2 - 2a_{11}x^2y^2 - a_{11}y^4] \\
 &= -2iyH(x, y).
 \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que, para $z = x + iy$,

$$G(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow yH(x, y) = 0,$$

onde $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é um polinômio de quarto grau, simétrico em y , pois $H(x, -y) = H(x, y)$.

Assim, os autovalores da família $\{A(\tau)\}$ estão na união do eixo real com a curva quártica \mathcal{H} dada por $H(x, y) = 0$. O fato de os autovalores não reais ocorrerem em pares conjugados

é reflexo da simetria de \mathcal{H} em relação ao eixo real. Em particular, \mathcal{H} intersecta o eixo imaginário \mathcal{I} em $\lambda(\zeta)$.

Assuma que essa interseção não é transversal. Então, \mathcal{H} cruza \mathcal{I} tangencialmente em $\lambda(\zeta)$ e a interseção tem multiplicidade $m > 2$. De fato, se a multiplicidade for 1, a interseção é transversal (pense numa parábola com duas raízes reais distintas). Se a multiplicidade for exatamente 2, a curva não cruza o eixo imaginário, pois a segunda derivada não muda de sinal, e a concavidade permanece (pense numa parábola com raízes iguais). Assim, para cruzar de um lado para outro, de maneira que não seja transversal, $m > 2$.

Por simetria, há outra interseção de multiplicidade m em $\lambda(\zeta)$, então o eixo imaginário \mathcal{I} intersecta a quártica \mathcal{H} pelo menos $2m$ vezes. Mas o Teorema de Bézout afirma que uma curva quártica no plano pode se intersectar com uma linha reta no máximo em quatro pontos (contados com multiplicidade). Então, $2m \leq 4$ e daí $m \leq 2$. Isso é uma contradição. Assim, \mathcal{H} é transversal a \mathcal{I} em $\lambda(\zeta)$.

Agora, assumamos que \mathcal{H} cruza \mathcal{I} novamente. Pelos Lemas 5.33 e 5.34, juntamente com a simetria, isso significa que \mathcal{H} intersecta \mathcal{I} pelo menos seis vezes, contradizendo o Teorema de Bézout. Assim, ζ é único.

Acabamos de provar que o valor de parâmetro onde os autovalores cruzam o eixo imaginário é único.

Por fim, assumamos que $d/d\tau(\operatorname{Re}(\lambda))|_{\zeta} = 0$. Pela transversalidade em $\lambda(\zeta)$ e $\overline{\lambda(\zeta)}$, isso implica que $\lambda'(\zeta), \overline{\lambda}'(\zeta) = 0$, onde λ' significa $d\lambda/d\tau$. De fato, observe que $\lambda(\zeta)$ é uma curva parametrizada no plano, $\lambda(\zeta) = (\operatorname{Re}(\lambda), \operatorname{Im}(\lambda))$. Seu vetor tangente é da forma $(d/d\tau(\operatorname{Re}(\lambda(\zeta))), d/d\tau(\operatorname{Im}(\lambda(\zeta))))$. Se $d/d\tau(\operatorname{Re}(\lambda(\zeta))) = 0$, isso significa que o vetor tangente é da forma $(0, y')$, que será tangente (e, portanto, não transversal) ao eixo imaginário. Assim, ele deve ser nulo ($y' = 0$) (o fato do vetor tangente ser nulo no ponto não implica que o cruzamento não seja transversal, mas apenas que na parametrização escolhida a derivada da parte real do cruzamento é nula).

Note também que $\lambda(\zeta) + \overline{\lambda(\zeta)} = 0$, visto que $\lambda(\zeta)$ é puramente imaginário. Podemos escrever os coeficientes do polinômio característico de $A(\tau)$ em termos dos autovalores ou

das entradas de $A(\tau)$. Para $\tau \in U$, pelas relações de Viète temos que

$$M_{23} + \tau (M_{12} + M_{13}) = \lambda(\tau)\overline{\lambda(\tau)} + \overline{\lambda(\tau)}v(\tau) + v(\tau)\lambda(\tau),$$

onde $v(\tau)$ é o autovalor de Perron-Frobenius de $A(\tau)$. Derivando esta expressão em $\tau = \zeta$, temos

$$\begin{aligned} M_{12} + M_{13} &= \lambda'(\zeta) \left(\overline{\lambda(\zeta)} + v(\zeta) \right) + \overline{\lambda'(\zeta)} (\lambda(\zeta) + v(\zeta)) + \left(\lambda(\zeta) + \overline{\lambda'(\zeta)} \right) v'(\zeta) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pela hipótese. Mas, por hipótese, $M_{12} + M_{13} < 0$ e, assim, temos uma contradição. Portanto, provamos que a derivada da parte real no cruzamento é não nula. ■

5.4 Exemplos

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos para ilustrar o que foi discutido neste capítulo.

Exemplo 5.40. *Considere o seguinte sistema Lotka-Volterra $\dot{x}_i = x_i(b_i - (Ax)_i)$ com o seguinte conjunto de parâmetros:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1,2 & 0,7 \\ 0,7 & 1 & 1,2 \\ 1,2 & 0,7 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Queremos definir a qual das 33 classes isóclinas este sistema pertence. Precisamos, então, calcular os valores de σ_{ij} para $i, j = 1, 2, 3$, com $i \neq j$, e η_i para $i = 1, 2, 3$ caso existam. Assim, obtemos os seguintes valores: $\sigma_{12} = -1, \sigma_{21} = 1, \sigma_{13} = 1, \sigma_{31} = -1, \sigma_{32} = 1, \sigma_{23} = -1$.

Como temos $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$ para $i, j = 1, 2, 3$, com $i \neq j$, não existe nenhum ponto do tipo Q_i . Com isso, concluímos que a dinâmica em cada plano coordenado é:

- i) No plano G_1 : R_3 é atrator e R_2 é repulsor.
- ii) No plano G_2 : R_2 é atrator e R_1 é repulsor.
- iii) No plano G_3 : R_1 é atrator e R_3 é repulsor.

Analisando o “catálogo de classes” ilustrados na Figura 4.23, o nosso exemplo pertence a classe 27 (a única classe gerada pela Classe geradora XVI). Nesta classe temos selas nos pontos de equilíbrio do tipo R_i e um ponto de equilíbrio interior P de natureza atratora ou repulsora. A Figura 5.2 ilustra o retrato de fase deste sistema. Observe que para esse conjunto de parâmetros o ponto de equilíbrio P no interior de Σ é um foco atrator.

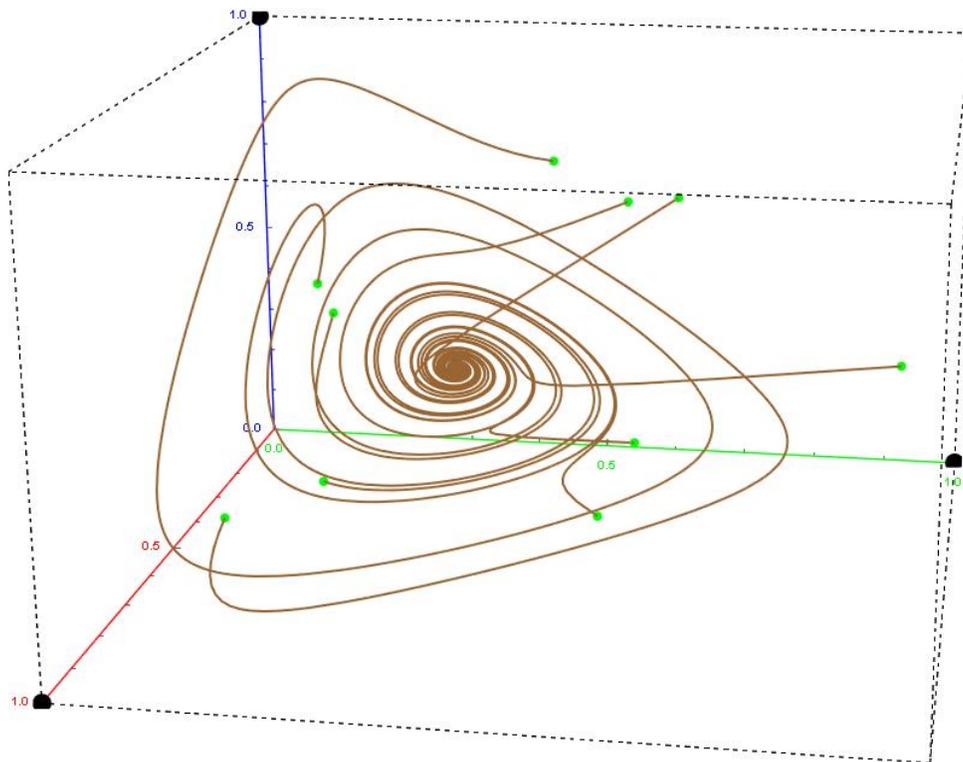


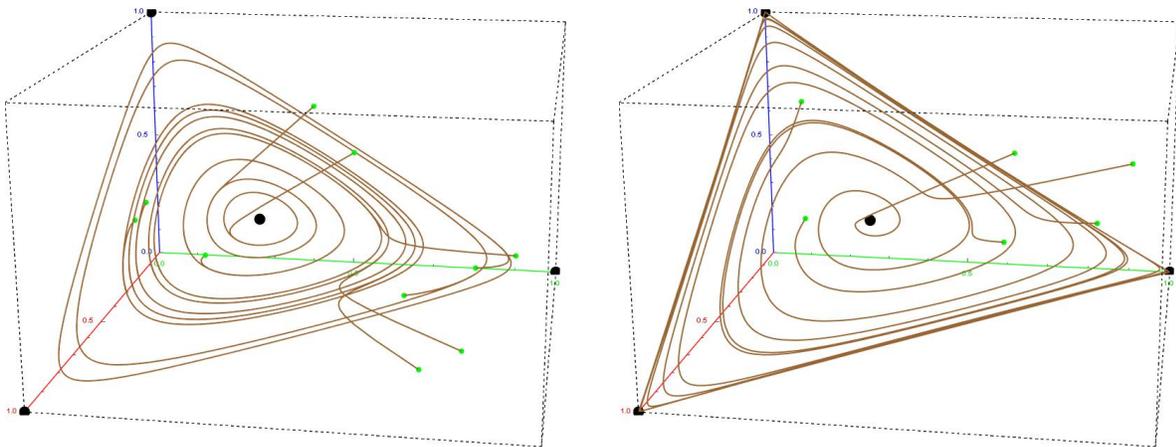
Figura 5.2: Retrato de fase do sistema Lotka-Volterra tridimensional com os parâmetros dados em (5.25).

Exemplo 5.41. Faremos umas pequenas alterações no Exemplo 5.40. Considere agora os seguintes conjuntos de parâmetros:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1,2 & 0,8 \\ 0,8 & 1 & 1,2 \\ 1,2 & 0,8 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1,2 & 0,9 \\ 0,9 & 1 & 1,2 \\ 1,2 & 0,9 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Ambos os conjuntos de parâmetros definem sistemas que também pertencem a Classe 27.



(a) Retrato de fase do sistema Lotka-Volterra tridimensional com os parâmetros dados em (5.26).

(b) Retrato de fase do sistema Lotka-Volterra tridimensional com os parâmetros dados em (5.27).

Figura 5.3: Simulações na classe 27.

Note que na Figura 5.3 em (a) os parâmetros fornecidos geram um sistema que possui estrutura semelhante a existência de órbitas periódicas, embora as órbitas convergem para P mas muito lentamente. Em (b) o ponto de equilíbrio interior P é um foco repulsor, isso mostra uma grande mudança na natureza de P com relação ao Exemplo 5.40.

Os exemplos anteriores deixam claro a diversidade de cenários que um sistema Lotka-Volterra tridimensional pode ter nas classes de 26-31, onde com as ferramentas que temos em mãos, não podemos prever com exatidão o comportamento dinâmico do sistema. Novamente é ressaltada a diferença grande entre as classes totalmente compreendidas

(1-25, 32 e 33) e as que podem ou não admitir órbitas periódicas (26-31).

Capítulo 6

Estado Atual das Pesquisas nas Classes 26 a 31

Apresentaremos agora um breve panorama das pesquisas sobre as classes 26 a 31 dos sistemas Lotka-Volterra tridimensionais.

As equações que formam o modelo Lotka-Volterra foram propostas independentemente pelo matemático italiano Vito Volterra e pelo biofísico estadunidense Alfred J. Lotka. Em 1925, Volterra desenvolveu o modelo de equações analisando o crescimento da população de tubarões e o decréscimo da população dos demais peixes no mar Adriático [6]. Lotka, também no ano de 1925, estudou a interação presa-predador e publicou um livro chamado “*Elements of Physical Biology*” [5], apresentando a mesma modelagem para uma reação química que exibía comportamento periódico nas concentrações de elementos químicos [4]. Embora o livro cobrisse uma grande variedade de tópicos, desde a Teoria da Evolução até a natureza física da consciência, o autor é principalmente conhecido hoje pela equação Lotka-Volterra da dinâmica populacional. Como ambos publicaram a mesma equação, o modelo foi nomeado Lotka-Volterra.

Em 1975, R.M. May e W.J. Leonard [22] construíram um modelo Lotka-Volterra tridimensional competitivo e identificaram uma classe geral de soluções em que o sistema exhibe oscilações populacionais periódicas. Por meio de simulações numéricas, descobriram que esse modelo pode possuir um ciclo limite e um ciclo heteroclínico, seja atrativo

ou repulsivo. Biologicamente, esse resultado é um exemplo das complexidades que a não linearidade pode introduzir até nas equações mais simples da biologia populacional. Matematicamente, o modelo ilustra algumas peculiaridades dinâmicas novas, até então, para sistemas não lineares tridimensionais.

Em 1979, motivados pelo trabalho de May e Leonard, J. Coste, J. Peyraud e P. Couillet [23] trabalharam em alguns sistemas específicos de equações Lotka-Volterra. Mostraram que, para este sistema, órbitas periódicas com equilíbrios atratores no seu interior podem ser geradas a partir do ponto de equilíbrio por meio de uma bifurcação de Hopf. Mostraram também que a dinâmica de tais sistemas é, na verdade, bidimensional. No mesmo ano, independentemente do trabalho anterior e também motivados pelo trabalho de May e Leonard, P. Schuster, K. Sigmund e R. Wolff [24] demonstraram a existência de um ciclo limite para sistemas Lotka-Volterra competitivos tridimensionais. Esses modelos exibem órbitas convergindo para ciclos que consistem em três pontos de sela e três órbitas conectando-os. Ambos os trabalhos foram realizados em sistemas que pertencem à futuramente denominada classe 27 na classificação de Zeeman.

Em 1981, J. Hofbauer [25] provou a existência de ciclos limites para sistemas competitivos gerais de n dimensões ($n \geq 3$) usando a teoria de bifurcação de Hopf.

Em 1982, Morris W. Hirsch iniciou sua série de seis artigos, publicados ao longo daquela década, intitulados “Systems of differential equations which are competitive or cooperative” [26, 27, 3, 28, 29, 30]. Em particular, no terceiro artigo da série, em 1988 [3], mostrou que o comportamento dinâmico de sistemas competitivos de n dimensões é comparável ao de sistemas de dimensão $n - 1$. Para o modelo Lotka-Volterra competitivo tridimensional, o resultado de Hirsch garante a existência do “simplexo suporte”.

Em 1993, M.L. Zeeman [1], em sua tese de doutorado, baseando-se no Teorema de Hirsch, definiu as 33 classes estáveis de modelos competitivos tridimensionais Lotka-Volterra. O resultado indicou que 25 das 33 classes possuíam comportamento dinâmico completamente determinado. Em 1998, M.L. Zeeman e P. van den Driessche [2] mostrou que as classes 32 e 33 não podem possuir órbitas periódicas e, assim, 27 das 33 têm seu comportamento dinâmico totalmente definido e 6 das 33 podem possuir órbitas periódicas.

Estes dois artigos foram tratados nesta dissertação.

Em 1994, o primeiro resultado de um sistema com dois ciclos limites foi alcançado na classe 27 de Zeeman por J.Hofbauer e J.W.-H.So [31]. A ideia foi considerar um sistema Lotka-Volterra onde o único ponto de equilíbrio interior tem um par de autovalores puramente imaginários, mas é repulsor. Isto implica a existência de um ciclo limites assintoticamente estável no simplexo suporte. Alterando ligeiramente os parâmetros do exemplo, o ponto de equilíbrio sofre uma bifurcação de Hopf subcrítica. O equilíbrio interior torna-se estável e será cercado por outro ciclo limite menor e instável. Os autores levantaram a seguinte questão: quantos ciclos limites podem existir nas classes 26-31 de Zeeman?

Em 2002, Z.Lu e Y.Luo [32] construíram dois ciclos limites nas classes 26, 28 e 29 e as perguntas de Hofbauer e So sobre a existência de dois ciclos limites para outras classes foram parcialmente respondidas. No ano seguinte, em 2003, Lu e Luo tentaram pela primeira vez construir três ciclos limites [33]. Eles conseguiram três ciclos limites no sistema da classe 27. No entanto, uma crítica apontada por Yu, Han e Xiao [34] revelou que devido a um erro de sinal, existia um erro no trabalho, resultando na falha da tentativa de Lu e Luo.

Em 2006, M.Gyllenberg, P.Yan e Y.Wang [35], trabalharam nos sistemas com dois ciclos limites na classe 29, inicialmente construídos por Lu e Luo em 2002 [32]. Eles perceberam que esses sistemas podem realmente ter um terceiro ciclo limites. Em linhas gerais a instabilidade do ciclo limites externo, combinada com a repulsão da fronteira do simplexo suporte, e pelo teorema de Poincaré-Bendixson, confirmaria a existência de um terceiro ciclo limites.

Em 2008, X.Lian, Z.Lu e Y.Luo [36] descobriram que tanto a classe 30 quanto a classe 31 podem ter sistemas com três ciclos limites. Houve também pesquisas realizadas por M.Gyllenberg e P.Yan [37] em 2009, sobre a existência de vários ciclos limites para a classe 30. Gyllenberg e Yan afirmaram ter construído dois ciclos limites nessa classe. No entanto, de acordo com Yu, Han e Xiao, houve um erro construção dos ciclos limites deles. Porém, com um cálculo cuidadoso, três ciclos limites podem ser construídos usando seu

exemplo original.

Em 2009, M.Gyllenberg e P.Yan [38] construíram um exemplo na classe 27, semelhante a outro feito anteriormente [33], e afirmaram ter encontrado quatro ciclos limites. Três deles foram obtidos por bifurcação de Hopf, e o quarto pelo Teorema de Poincaré-Bendixson. No entanto, o resultado estava incorreto como apontado por Yu, Han and Xiao [34].

Em 2011, Q.Wang, W.Huang e H.Wu [39] provaram que para cada classe nas classes 26-31 da classificação de Zeeman, existe um sistema com pelo menos três ciclos limites. Infelizmente, o resultado para a classe 30 estava incorreto, pois o sistema construído não era competitivo. Um sistema na classe 29 com quatro ciclos limites foi apresentado no mesmo trabalho [39].

Em 2016, P.Yu, M.Han e D.Xiao [34] deram dois exemplos na classe 27 e dois na classe 26, todos com quatro ciclos limites.

Em resumo, em cada uma das seis classes das classificações de Zeeman 26-31, é possível ter múltiplos ciclos limites. Até este momento, os resultados conhecidos são os seguintes: para as classes 26, 27 e 29, existem pelo menos 4 ciclos limites. Para as classes 28, 30 e 31, existem sistemas com pelo menos 3 ciclos limites.

Em um *preprint* de 2023, Z.Lu, Y.Luo e M.Hu [40] combinaram um método de construção de ciclos limites proposto por Hofbauer e So [31] com um algoritmo matemático para isolar raízes reais proposto em [41], e encontraram quatro ciclos limites nas classes 28, 30 e 31. Isso foi feito usando um programa computacional e, entre os exemplos analisados, alguns pertencem às classes 27, 28, 29, 30 e 31. Portanto, com os resultados deste *preprint* de 2023, existem exemplos de sistemas nas classes de 26-31 com quatro ciclos limites.

Acreditamos que estudos referentes ao número máximo de ciclos limites em cada classe e uma subclassificação dessas famílias são trabalhos que ainda podem ser interessantes de serem explorados. Ideias como esta podem ajudar a obtermos uma compreensão total dos sistemas Lotka-Volterra tridimensionais.

Conclusões

Nesta dissertação, exploramos o artigo de Mary Lou Zeeman de 1993 [1] sobre a classificação de sistemas Lotka-Volterra tridimensionais. Iniciamos com uma breve introdução aos sistemas populacionais e às preliminares matemáticas, seguido de um estudo detalhado dos modelos competitivos de Lotka-Volterra em duas e três dimensões.

No primeiro capítulo, abordamos o Teorema de Hirsch, que serve como base para toda a teoria discutida. Esse resultado assegura que o comportamento dinâmico de sistemas competitivos de n dimensões está relacionado ao de sistemas de dimensão $(n - 1)$. Concluimos essa introdução definindo um conjunto especial chamado simplexo suporte, denotado por Σ .

No segundo capítulo, analisamos sistemas bidimensionais, fornecendo critérios de classificação em relação aos parâmetros. Utilizamos uma análise das isóclinas para compreender a dinâmica e encontramos os possíveis retratos de fase para sistemas Lotka-Volterra com $n = 2$. Esses cenários possíveis são chamados de classes isóclinas estáveis, e qualquer sistema Lotka-Volterra competitivo bidimensional tem seu comportamento qualitativo totalmente definido por uma dessas classes.

No terceiro capítulo, iniciamos o estudo do caso tridimensional. Discutimos como as desigualdades entre os parâmetros afetam os equilíbrios na fronteira de Σ . Definimos as classes isóclinas, identificando 33 classes de equivalência que representam retratos de fase, sendo a união delas um conjunto aberto denso no espaço dos sistemas Lotka-Volterra tridimensionais. Em grande parte desse capítulo estivemos focados em demonstrar como chegamos nas 33 classes isóclinas tridimensionais. Para tal, usamos métodos de ação de grupos e combinatória para definir os possíveis comportamentos dos sistemas restritos

à $\partial\Sigma$. Chamamos estes possíveis comportamentos de classes geradoras. Analisamos as classes geradoras e definimos o conceito de Classes Derivadas, que são os possíveis cenários de comportamentos nos equilíbrios planares Q_i que cada Classe Geradora produz. Usamos Teorema de Poincaré-Hopf para determinar a existência e a natureza de pontos de equilíbrio interiores em Σ , e critérios geométricos para definir casos que de fato podem existir. Das 33 classes encontradas, 25 delas têm o comportamento totalmente definido e possuem somente pontos de equilíbrio como conjuntos limites. Por fim ilustramos como analisar um sistema dado por meio de alguns exemplos.

No quarto capítulo, exploramos as 8 classes que ainda necessitam de análise, mostrando que cada família definida por essas classes contém genericamente um sistema sem órbitas periódicas. Demonstramos que a análise das isóclinas por si só não pode prever órbitas periódicas, e demonstramos a existência de bifurcações de Hopf nas classes de 26 a 31, resultando em órbitas periódicas. Concluimos que as classes 32 e 33 não possuem órbitas periódicas e fizemos alguns exemplos.

Resumindo, das 33 classes isóclinas estáveis, 27 têm o comportamento totalmente definido, ou seja, seus conjuntos limites são todos pontos de equilíbrio e podemos prever com exatidão qualitativamente o comportamento do sistema somente analisando os parâmetros. As demais 6 classes podem possuir órbitas periódicas e não conseguimos prever a existência de órbitas apenas com o estudo dos parâmetros do sistema.

Concluimos que compreender o comportamento de um sistema apenas observando seus parâmetros é uma conquista significativa com amplas aplicações, uma vez que cobrimos todo um espaço de sistemas de equações, de modo que qualquer sistema Lotka-Volterra competitivo tridimensional está descrito em uma das classes e sabemos o comportamento destas. O objetivo desta dissertação foi detalhar o processo para obter as 33 classes, explicando cada etapa de maneira clara e simples. Esperamos que este material sirva como fonte de consulta para quem busca mais detalhes sobre o trabalho da Zeeman [1] e sobre sistemas Lotka-Volterra tridimensionais.

Referências Bibliográficas

- 1 ZEEMAN, M. L. Hopf bifurcations in competitive three-dimensional Lotka-Volterra systems. *Dynamics and Stability of Systems*, Taylor & Francis, v. 8, n. 3, p. 189–216, 1993.
- 2 ZEEMAN, M. L.; DRIESSCHE, P. van den. Three-dimensional competitive Lotka-Volterra systems with no periodic orbits. *SIAM*, SIAM, v. 58, n. 1, p. 227–234, 1998.
- 3 HIRSCH, M. W. Systems of differential equations which are competitive or cooperative: ii. competing species. *Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 1, n. 1, p. 51, 1988.
- 4 LOTKA, A. J. Contribution to the theory of periodic reactions. *The Journal of Physical Chemistry*, American Chemical Society (ACS), v. 14, n. 3, p. 271–274, 1910.
- 5 LOTKA, A. J. *Elements of Physical Biology*. Williams & Wilkins, 1925.
- 6 VOLTERRA, V. *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*. Società anonima tipografica “Leonardo da Vinci”, v. 2, 1927.
- 7 EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical Models in Biology*. SIAM, 2005.
- 8 HOFBAUER, J.; SIGMUND, K. *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge University Press, 1998.
- 9 TAKEUCHI, Y. *Global dynamical properties of Lotka-Volterra systems*. World Scientific, 1996.
- 10 SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, v. 11, 1979.
- 11 HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic Press, 2012.
- 12 HIRSCH, M. W. Stability and convergence in strongly monotone dynamical systems. Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, 1988.
- 13 KAMKE, E. Zur theorie der systeme gewöhnlicher differentialgleichungen. ii. *Acta Mathematica*, Springer, v. 58, n. 1, p. 57–85, 1932.

- 14 BURNSIDE, W. Theory of groups of finite order. *Messenger of Mathematics*, v. 23, p. 112, 1909.
- 15 SANTOS, J. P. O.; BOVO, E. O Teorema de Burnside e aplicações. *Texto para minicurso na 2ª. Bienal da SBM, Salvador*, 2004.
- 16 STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press, 2018.
- 17 ZHANG, J. et al. Integrating evolutionary dynamics into treatment of metastatic castrate-resistant prostate cancer. *Nature communications*, Nature Publishing Group UK London, v. 8, n. 1, p. 1816, 2017.
- 18 MEYER, C. D. *Matrix analysis and applied linear algebra*. SIAM, v. 188, 2023.
- 19 BUSENBERG, S.; DRIESSCHE, P. van den. A method for proving the non-existence of limit cycles. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 172, n. 2, p. 463–479, 1993.
- 20 BUSENBERG, S.; DRIESSCHE, P. van den. Analysis of a disease transmission model in a population with varying size. *Journal of Mathematical Biology*, Springer, v. 28, n. 3, p. 257–270, 1990.
- 21 HARTSHORNE, R. *Algebraic Geometry*. Springer Science & Business Media, v. 52, 2013.
- 22 MAY, R. M.; LEONARD, W. J. Nonlinear aspects of competition between three species. *SIAM*, SIAM, v. 29, n. 2, p. 243–253, 1975.
- 23 COSTE, J.; PEYRAUD, J.; COULLET, P. Asymptotic behaviors in the dynamics of competing species. *SIAM*, SIAM, v. 36, n. 3, p. 516–543, 1979.
- 24 SCHUSTER, P.; SIGMUND, K.; WOLFF, R. On ω -limits for competition between three species. *SIAM*, SIAM, v. 37, n. 1, p. 49–54, 1979.
- 25 HOFBAUER, J. On the occurrence of limit cycles in the Lotka-Volterra equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Citeseer, v. 5, n. 9, p. 1003–1007, 1981.
- 26 HIRSCH, M. W. Systems of differential equations which are competitive or cooperative: I. limit sets. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, SIAM, v. 13, n. 2, p. 167–179, 1982.
- 27 HIRSCH, M. W. Systems of differential equations that are competitive or cooperative ii: Convergence almost everywhere. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, SIAM, v. 16, n. 3, p. 423–439, 1985.

- 28 HIRSCH, M. W. Systems of differential equations that are competitive or cooperative. v. convergence in 3-dimensional systems. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 80, n. 1, p. 94–106, 1989.
- 29 HIRSCH, M. W. Systems of differential equations that are competitive or cooperative. iv: Structural stability in three-dimensional systems. *SIAM*, SIAM, v. 21, n. 5, p. 1225–1234, 1990.
- 30 HIRSCH, M. W. Systems of differential equations that are competitive or cooperative. vi: A local closing lemma for 3-dimensional systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Cambridge University Press, v. 11, n. 3, p. 443–454, 1991.
- 31 HOFBAUER, J.; SO, J.-H. Multiple limit cycles for three dimensional Lotka-Volterra equations. *Applied Mathematics Letters*, Pergamon, v. 7, n. 6, p. 65–70, 1994.
- 32 LU, Z.; LUO, Y. Two limit cycles in three-dimensional Lotka-Volterra systems. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 44, n. 1-2, p. 51–66, 2002.
- 33 LU, Z.; LUO, Y. Three limit cycles for a three-dimensional Lotka-Volterra competitive system with a heteroclinic cycle. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 46, n. 2-3, p. 231–238, 2003.
- 34 YU, P.; HAN, M.; XIAO, D. Four small limit cycles around a hopf singular point in 3-dimensional competitive lotka–volterra systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 436, n. 1, p. 521–555, 2016.
- 35 GYLLENBERG, M.; YAN, P.; WANG, Y. A 3d competitive lotka–volterra system with three limit cycles: A falsification of a conjecture by Hofbauer and So. *Applied Mathematics Letters*, Elsevier, v. 19, n. 1, p. 1–7, 2006.
- 36 LIAN, X.; LU, Z.; LUO, Y. Automatic search for multiple limit cycles in three-dimensional lotka–volterra competitive systems with classes 30 and 31 in Zeeman’s classification. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 348, n. 1, p. 34–37, 2008.
- 37 GYLLENBERG, M.; YAN, P. On the number of limit cycles for three dimensional Lotka-Volterra systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, Discrete and Continuous Dynamical Systems-B, v. 11, n. 2, p. 347–352, 2008.
- 38 GYLLENBERG, M.; YAN, P. Four limit cycles for a three-dimensional competitive lotka–volterra system with a heteroclinic cycle. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 58, n. 4, p. 649–669, 2009.
- 39 WANG, Q.; HUANG, W.; WU, H. Bifurcation of limit cycles for 3d Lotka-Volterra competitive systems. *Acta Applicandae Mathematicae*, Springer, v. 114, p. 207–218, 2011.
- 40 HU, M.; LU, Z.; LUO, Y. Four limit cycles in three-dimensional Lotka-Volterra competitive systems with classes 30 and 31 in Zeeman’s classification via automatic search. *arXiv preprint arXiv:2301.06809*, 2023.

- 41 LU, Z. et al. An algorithm of real root isolation for polynomial systems. *Proceedings of Symbolic Numeric Computation*, p. 94–107, 2005.
- 42 CHIANG, H.-D.; HIRSCH, M. W.; WU, F. F. Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 33, n. 1, p. 16–27, 1988.
- 43 ALBERTO, L. F. C. *Caracterização e estimativas da área de atração de sistemas dinâmicos não lineares*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2006.
- 44 MARSDEN, J. E.; MCCRACKEN, M. *The Hopf bifurcation and its applications*. Springer Science & Business Media, v. 19, 2012.
- 45 KUZNETSOV, Y. *Elements of applied bifurcation theory*. Springer, v. 112, 1998.
- 46 PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*. Springer Science & Business Media, v. 7, 2013.

Anexo A

Teoria dos Índices

Este anexo tem o objetivo de introduzir conceitos da Teoria dos Índices que usaremos durante a dissertação. Para mais detalhes e demonstrações consulte [16].

O índice de uma curva fechada em relação a um ponto fora dela é a medida do número de voltas completas que a curva faz em torno desse ponto. Ele é usado em várias áreas da Matemática e Física, como em teoria de campos, cálculo de integrais complexas e teoria de singularidades. Essa medida é importante em problemas que envolvem trajetórias e integração ao longo de caminhos fechados. Geralmente, segue-se a convenção de que uma volta completa no sentido anti-horário tem índice $+1$ e no sentido horário tem índice -1 . Essa definição pode ser generalizada para curvas em espaços de maior dimensão.

Suponha que $\dot{x} = F(x)$ seja um campo vetorial bidimensional suave em um espaço de fase. Considere uma curva fechada C . C , não necessariamente uma trajetória do sistema, desde que seja uma curva fechada simples, ou seja, não possua autointerseções e não contenha nenhum ponto de equilíbrio de F .

Então, em cada ponto $x \in C$, o campo vetorial $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ deixa bem definido um ângulo $\phi = \tan^{-1}(\dot{x}_2/\dot{x}_1)$ com relação ao eixo x_1 positivo. Quando x se desloca no sentido anti-horário por C , o ângulo ϕ muda continuamente uma vez que o campo vetorial é suave. Além disso, quando x retorna ao ponto de partida, ϕ retorna à direção original. Logo, uma vez que se completa uma volta em C , ϕ é multiplicado por um inteiro múltiplo de 2π . Então, podemos enunciar a seguinte definição.

Definição A.1. *Seja $(\phi)_c$ a variação do ângulo ϕ quando se completa uma volta. O índice de uma curva fechada C com respeito ao campo vetorial F é dado por:*

$$I_C = \frac{1}{2\pi}(\phi)_c.$$

Em outras palavras I_C , é o número de revoluções feitas pelo campo F quando move-se no sentido anti-horário por C .

Basicamente, o índice de uma curva fechada C é o inteiro que mede o “enrolamento” do campo vetorial em C . Alguns exemplos são ilustrados na Figura A.1.

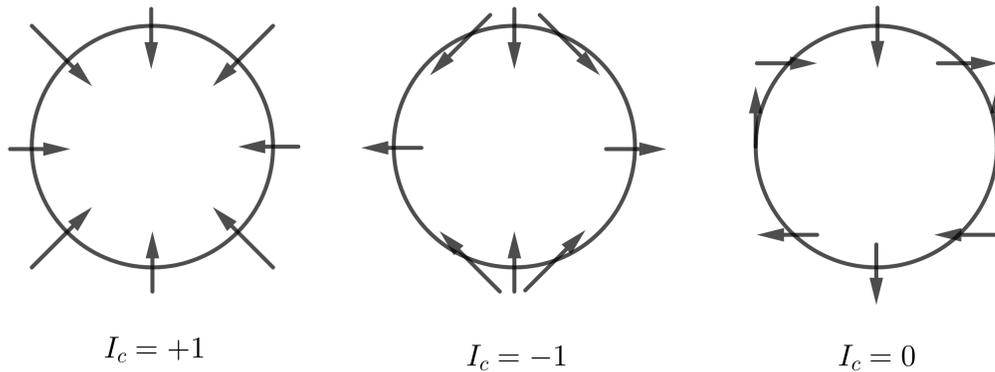


Figura A.1: Exemplo de índices de curvas.

Apresentamos a seguir algumas propriedades importantes relacionadas aos índices de curvas com respeito a campos vetoriais.

Proposição A.2. *Seja F um campo vetorial fixado. O índice de uma curva fechada C com respeito ao campo vetorial F , possui as seguintes propriedades:*

- i) *Suponha que C possa ser deformada continuamente em C' sem passar por pontos de equilíbrio. Então, $I_C = I_{C'}$.*
- ii) *Se C não engloba pontos de equilíbrio, então $I_C = 0$.*
- iii) *Se revertermos todos os sentidos do campo vetorial por $t \rightarrow -t$, o índice é inalterado.*

iv) Suponha que a curva C seja uma trajetória do sistema, ou seja, C é uma órbita fechada. Então, $I_C = +1$.

Introduziremos a noção de índice em relação a pontos de equilíbrio isolados.

Definição A.3. *Seja x^* um ponto de equilíbrio isolado para o sistema. Então, I_{x^*} é definido por I_c , onde C é uma curva fechada que engloba x^* e mais nenhum ponto de equilíbrio.*

Proposição A.4. *O índice I_p de um ponto de equilíbrio p do tipo sela é -1 e índice I_p de um ponto de equilíbrio p atrator ou repulsor é $+1$.*

O seguinte teorema relaciona o índice de uma curva fechada com a soma dos índices dos equilíbrios que ela engloba.

Teorema A.5. *Se uma curva fechada C engloba n pontos de equilíbrio isolados $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, então*

$$I_c = I_1 + I_2 + \dots + I_n,$$

onde I_k é o índice de x_k^* , para $k = 1, 2, \dots, n$.

Por fim, apresentaremos o Teorema de Poincaré-Hopf. Esse resultado será útil no desenvolvimento subsequente da definição das classes isóclinas estáveis.

Teorema A.6. *(Teorema de Poincaré-Hopf para a esfera) Seja F um campo vetorial definido em uma esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Suponha que F que possua um número finito de pontos de equilíbrio isolados x_1^*, \dots, x_k^* . Então,*

$$\sum I_k = 2,$$

onde I_k denota o índice do ponto x_k^* em relação a F .

Anexo B

O Teorema da Fronteira da Bacia de Atração

O teorema que chamaremos de Teorema da Fronteira da Bacia de Atração fornece informações sobre o comportamento de equilíbrios em torno de regiões de atração. Pode-se encontrar as demonstrações e aplicações dos resultados enunciados a seguir em [42] e [43].

Definição B.1. Dizemos que um ponto de equilíbrio $x^* \in U$ do campo F é hiperbólico se todos os autovalores de $F'(x^*)$ tem parte real não nula.

Definição B.2. Duas variedades W_1 e W_2 em \mathbb{R}^n satisfazem a condição de transversalidade se ocorrer uma das seguintes condições:

- i) A interseção é vazia.
- ii) Em cada ponto da interseção $x \in W_1 \cap W_2$, os espaços tangentes de W_1 e de W_2 no ponto x geram o espaço \mathbb{R}^n , isto é, $T_x(W_1) + T_x(W_2) = \mathbb{R}^n$ para todo $x \in W_1 \cap W_2$.

Definição B.3. Sejam $x^* \in U \subset \mathbb{R}^n$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do campo $F \in C^1(U)$ e $\phi : \Omega \rightarrow U$ o fluxo de F . A Bacia de Atração (ou Região de Estabilidade) de x^* , denotada por $B(x^*)$, é o conjunto

$$B(x^*) = \left\{ x \in U : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = x^* \right\}.$$

Definição B.4. Se x^* é um ponto de equilíbrio hiperbólico então podemos definir os seguintes conjuntos:

$$W^s(x^*) = \left\{ x \in U : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = x^* \right\} \quad e \quad W^u(x^*) = \left\{ x \in U : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = x^* \right\},$$

onde $W^s(x^*)$ e $W^u(x^*)$ são chamadas de variedade estável e instável de x^* , respectivamente.

Teorema B.5. (Teorema da Fronteira da Bacia de Atração) Sejam x^* um equilíbrio assintoticamente estável do campo $F \in C^1(U)$ e x_0 um ponto de equilíbrio de F . Suponha que todos os equilíbrios de F em $\partial B(x^*)$ são hiperbólicos, que as variedades estáveis e instáveis dos pontos de equilíbrio na fronteira da bacia de atração satisfazem as condições de transversalidade e que todas as trajetórias em $\partial B(x^*)$ tendem a um dos pontos de equilíbrio de F quanto $t \rightarrow +\infty$. Então:

- i) $x_0 \in \partial B(x^*)$ se, e somente se, $W^u(x_0) \cap B(x^*) \neq \emptyset$.
- ii) $x_0 \in \partial B(x^*)$ se, e somente se, $W^s(x_0) \subseteq \partial B(x^*)$.

Este teorema fornece critérios para determinar quais equilíbrios pertencem à fronteira da bacia de atração de x^* . Pode-se generalizar este resultado para incluir outros tipos de conjuntos atratores, como ciclos limites, de modo a abranger todos os cenários possíveis.

Definição B.6. Um conjunto H , fechado e invariante com relação ao sistema $\dot{x} = f(x)$, é um conjunto atrativo se existir uma vizinhança U de H tal que, para toda condição inicial $x_0 \in U$, $d(\phi(t, x_0), H) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Definição B.7. Seja f um campo de classe C^1 . Um elemento crítico de f é um ponto de equilíbrio ou uma órbita periódica.

Teorema B.8. (Teorema da Fronteira da Bacia de Atração Geral) Sejam γ um conjunto atrativo do campo $f \in C^1(U)$ e ϕ um elemento crítico de F . Suponha que todos os elementos críticos de F em $\partial B(\gamma)$ são hiperbólicos, que as variedades estáveis e instáveis

dos elementos críticos na fronteira da bacia de atração satisfazem as condições de transversalidade e que todas as trajetórias em $\partial B(\gamma)$ tendem a um dos elementos críticos de F quanto $t \rightarrow +\infty$. Então:

- i) $\phi \in \partial B(\gamma)$ se, e somente se, $W^u(\phi) \cap B(\gamma) \neq \emptyset$.
- ii) $\phi \in \partial B(\gamma)$ se, e somente se, $W^s(\phi) \subseteq \partial B(\gamma)$.

Anexo C

Bifurcações de Hopf

A bifurcação de Hopf caracteriza-se pela alteração na estabilidade de pontos de equilíbrio resultando na formação de ciclos limites, isto é, trajetórias fechadas que são isoladamente atrativas, repulsivas ou semiatrativas (atraem por um lado e repelem por outro). Essa mudança é precipitada pela variação de um parâmetro de controle μ , afetando diretamente a estabilidade dos pontos de equilíbrio e induzindo comportamento oscilatório no sistema.

Considere o sistema $\dot{x} = F(x, \mu)$, onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $\mu \in \mathbb{R}$. Um ponto de equilíbrio (x_0, μ_0) satisfaz $\dot{x} = F(x_0, \mu_0) = 0$. A estabilidade desse ponto é determinada pelos autovalores da jacobiana $J_F(x_0, \mu_0) = \partial F / \partial x(x_0, \mu_0)$. Uma bifurcação de Hopf ocorre quando um par de autovalores complexos conjugados da jacobiana cruza o eixo imaginário, implicando uma mudança na estabilidade do ponto de equilíbrio e o surgimento de um ciclo limite.

Agora, apresentaremos uma versão analítica simplificada do Teorema de Bifurcação de Hopf em \mathbb{R}^n . Esta versão é suficiente para o que pretendemos fazer nesta dissertação.

Teorema C.1. *(Teorema de Bifurcação de Hopf) Seja $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma família analítica de campos vetoriais a um parâmetro com uma correspondente família a um parâmetro x_μ de pontos de equilíbrio isolados, de modo que $F_\mu(x_\mu) = 0$, onde o parâmetro real μ varia em uma vizinhança de 0 em \mathbb{R} . Suponha que a jacobiana $J_{F_\mu}(x_\mu)$ tenha um par simples de autovalores complexos conjugados $\lambda_\mu, \bar{\lambda}_\mu$ que cruzam o eixo imaginário com derivada da parte real não nula estritamente positiva quando μ passa por 0. Escrevendo*

$\lambda_\mu = a_\mu + i\omega_\mu$, essas condições significam em $a_0 = 0$, $\omega_0 > 0$ e $\dot{a}_0 > 0$. Assuma também que os $n - 2$ autovalores restantes de $J_{F_0}(x_0)$ têm partes reais estritamente negativas. Então, a família de um parâmetro de sistemas $\dot{x} = F(x, p)$ possui uma família a um parâmetro de órbitas periódicas. Assim, para algum $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno, existe uma função analítica $\mu : (0, \varepsilon_1) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, existe uma órbita periódica p_ε do sistema $\dot{x} = F_{\mu(\varepsilon)}(x)$. A função μ se não for identicamente nula, é estritamente positiva ou estritamente negativa em $(0, \varepsilon_1)$. Além disso, existe uma vizinhança U de 0 em \mathbb{R}^n e $\mu_1 > 0$ tal que $|\mu| < \mu_1$ para qualquer órbita periódica de F_μ em U é uma das p_ε descritas anteriormente.

Discutiremos brevemente a ideia por trás do enunciado do Teorema da Bifurcação de Hopf. As demonstrações e aplicações acerca de bifurcações de Hopf podem ser consultadas em [44], [45] e [46].

O teorema nos diz que temos uma única família a um parâmetro de órbitas periódicas existente em conjunto com a nossa família a um parâmetro de equilíbrios, e isso em relação ao parâmetro original μ , essa família existe em exatamente um dos casos: 1) $\mu > 0$, 2) $\mu = 0$ e 3) $\mu < 0$.

As três possibilidades são ilustradas na Figura C.1 para sistemas em \mathbb{R}^2 . No Caso 1, o ponto de equilíbrio é estável para $\mu < 0$, no valor de bifurcação $\mu = 0$ a estabilidade é perdida e quando o par complexo conjugado de autovalores cruza o eixo imaginário surgem órbitas periódicas. Chamamos essa interação de bifurcação Supercritica. O Caso 2 é a situação degenerada de toda uma família de órbitas periódicas existindo juntas no valor da bifurcação $\mu = 0$, folheando assim, toda a vizinhança do ponto de equilíbrio. O Caso 3 é a bifurcação Subcritica. O que ocorre é a coexistência de um equilíbrio estável e uma órbita periódica instável para $\mu < 0$, se unindo para $\mu = 0$ resultando em um ponto de equilíbrio instável.

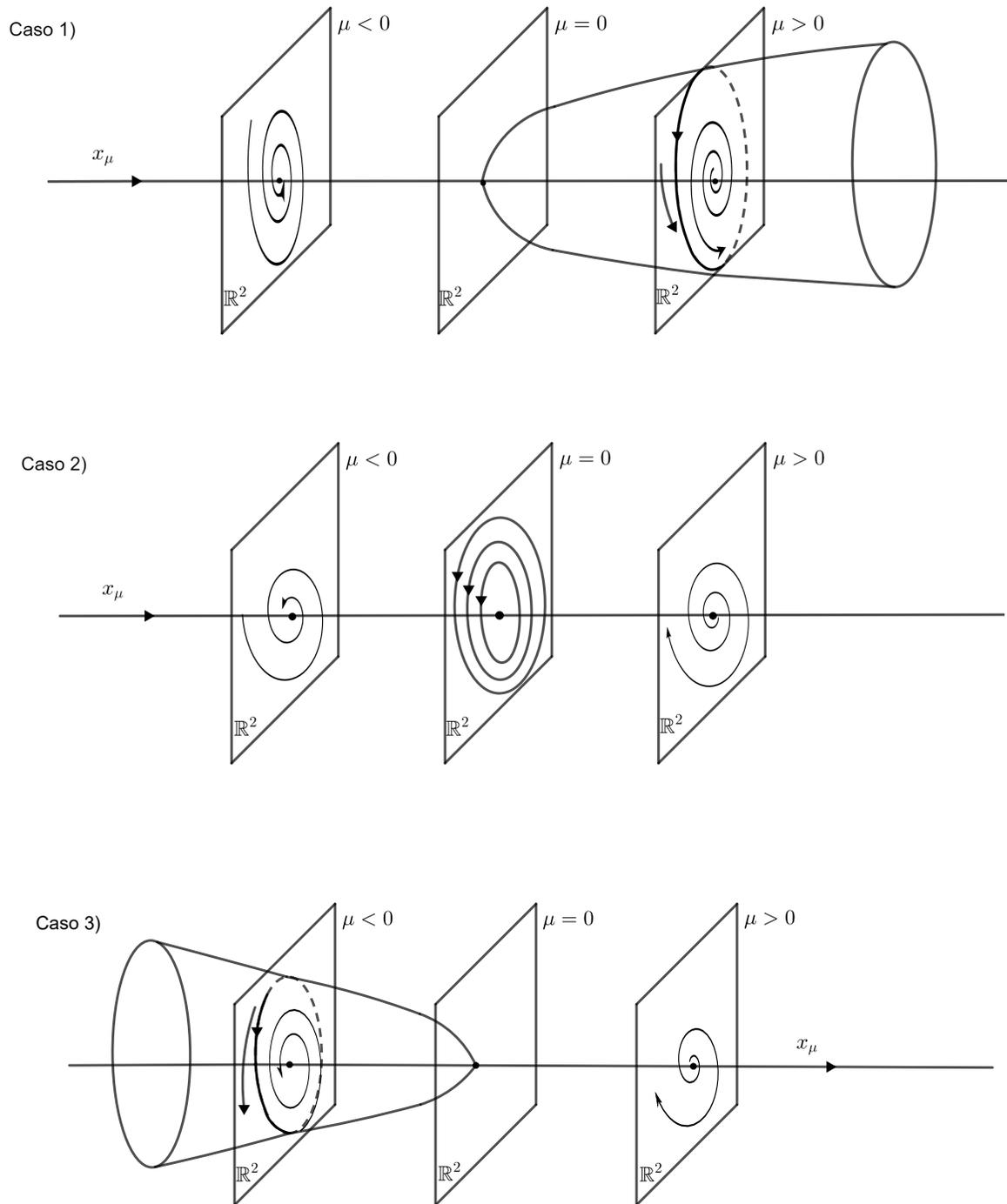


Figura C.1: Bifurcação de Hopf.