

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
INSTITUTO DE SISTEMAS ELÉTRICOS E ENERGIA

Análise de Sensibilidade Ramal via Matriz de Sensibilidade no  
Plano Complexo

Rafael Álvares Bragança

Itajubá, Maio de 2024

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
INSTITUTO DE SISTEMAS ELÉTRICOS E ENERGIA**

**Rafael Álvares Bragança**

**Análise de Sensibilidade Ramal via Matriz de Sensibilidade no  
Plano Complexo**

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Itajubá como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Ciências em Engenharia Elétrica.

**Orientador: Prof. Robson C. Pires**

**Itajubá, Maio de 2024**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**INSTITUTO DE SISTEMAS ELÉTRICOS E ENERGIA**

**Análise de Sensibilidade Ramal via Matriz de Sensibilidade no  
Plano Complexo**

**Rafael Álvares Bragança**

Tese aprovada por banca examinadora em 28 de Fevereiro de 2024, conferindo ao autor o título de **Doutor em Ciências em Engenharia Elétrica.**

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Ildemar Cassana Decker

Prof. Dr. Francisco Damasceno Freitas

Prof. Dr. Zulmar Soares Machado Junior

Prof. Dr. Benedito Donizeti Bonatto

Prof. Dr. Robson Celso Pires

**Itajubá, 2024**

## Dedicatória

Primeiramente, expresso minha profunda gratidão a Deus, a fonte de toda sabedoria e força, pela conclusão deste doutorado. Reconheço que toda a honra e glória pertencem a Ele, pois tem cumprido Suas promessas. Que este trabalho seja um testemunho vivo de Sua graça e fortalecimento na minha jornada (Isaías 40:31).

À minha amada esposa Karen, cuja paciência e constante apoio foram pilares inabaláveis nesta conquista, e à nossa filha Izadora (a caminho).

À minha amada mãe, Maria Júlia, por seu constante apoio, amor e exemplo inspirador de perseverança e determinação. Aprendi que desistir nunca foi uma opção.

Esta conquista também é dedicada a você, meu amado pai, Geraldo (*in memoriam*), que partiu recentemente. Nos encontraremos na eternidade.

À minha irmã Carolina, cujas palavras e gestos sempre me incentivaram a alcançar voos mais altos.

A todos os familiares e amigos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a materialização deste trabalho.

Uma homenagem distinta ao meu grande amigo André Soares e ao meu orientador e amigo Robson Pires; sem o apoio e dedicação deles, finalizar este trabalho teria sido um desafio ainda maior.

# Agradecimentos

Gostaria de expressar minha mais profunda gratidão ao Prof. Dr. Robson Celso Pires, meu orientador e estimado amigo. Sua paciência inesgotável, motivação constante e apoio incansável foram pilares essenciais no desenvolvimento deste trabalho. Sou igualmente grato ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e aos Professores Dr. Gabriel Fanelli e Dr. Tales Pimenta, cuja orientação e suporte valiosos foram cruciais para a minha formação acadêmica. Agradeço também à CAPES pelo suporte financeiro, fundamental na minha jornada profissional.

Gostaria de expressar minha sincera gratidão aos respeitados Professores Ildemar Cassana Decker, Francisco Damasceno Freitas, Benedito Donizeti Bonatto e Zulmar Soares Machado Junior por aceitarem generosamente compor a banca examinadora da minha tese. A experiência e o comprometimento de cada um de vocês contribuíram significativamente para a qualidade e sucesso deste trabalho.

Por último, mas não menos importante, gostaria de expressar minha gratidão aos meus colegas professores da Una Pouso Alegre. Ter a oportunidade de trabalhar e aprender com profissionais tão dedicados e inspiradores foi uma honra e um privilégio valioso.

“O que sabemos é uma gota, o que ignoramos é um oceano.”

– Isaac Newton

## Resumo

Esta tese não só contribui para o avanço do conhecimento no campo da análise de sensibilidade de redes elétricas, mas também oferece ferramentas e aplicações diretas para a otimização e operação de redes elétricas. Com o crescimento da complexidade dos sistemas elétricos, a necessidade de ferramentas analíticas robustas para compreender e otimizar a dinâmica dessas redes torna-se essencial. Este trabalho concentra-se na análise de sensibilidade ramal de redes elétricas usando uma matriz de sensibilidade no plano complexo, uma abordagem diferenciada que fornece informações sobre as interações dos sistemas elétricos. Através do software MATLAB, foram desenvolvidos algoritmos destinados à análise de sensibilidade. Os principais casos de estudo incluem as redes elétricas de 14, 57, 300, 1354 e 2869 barras, todas extraídas da base de dados do software MATPOWER. Dentre os objetivos, destacam-se: O desenvolvimento da matriz de sensibilidade no plano complexo é fundamental para a análise de redes elétricas, oferecendo uma base sólida e robusta para investigar sistemas elétricos com base nas equações que modelam seus ramos; busca-se a validação dos algoritmos desenvolvidos através de casos *benchmark*. Neste sentido, o trabalho expõe uma aplicação desses algoritmos aos casos de estudo, que são redes elétricas baseadas em sistemas elétricos reais. Ao realizar a análise desses casos, buscou-se demonstrar o êxito, a concisão dos códigos ao tratar as variáveis elétricas em seu domínio natural e a versatilidade da metodologia, pois a modelagem é feita através das equações dos ramos das redes, contemplando a análise local dos modelos de redes elétricas. Essa metodologia pode fornecer perspectivas valiosas sobre a dinâmica do sistema, permitindo a avaliação de relações complexas entre as partes que o compõe e o sistema como um todo, portanto, podendo contribuir de forma significativa para o avanço dos estudos voltados à otimização, estabilidade, planejamento, alocação de recursos etc. Os resultados obtidos nesta tese demonstram a concisão e eficácia dos métodos utilizados, abrindo um amplo horizonte de possibilidades investigativas sobre os diferentes parâmetros e variáveis do sistema. Ao oferecer uma plataforma teórica na qual é possível explorar os sistemas elétricos em um domínio mais adequado à natureza das variáveis elétricas envolvidas, ganha-se em robustez, concisão, legibilidade, facilidade de manutenção e desempenho. Portanto, este trabalho surge como uma proposta para a melhoria da compreensão, otimização e inovação dos sistemas elétricos.

**Palavras chave:** Análise de Sensibilidade; *Wirtinger*; Plano complexo; Fluxo de Potência.

# Abstract

This thesis not only contributes to the advancement of knowledge in the field of sensitivity analysis of electrical networks but also offers direct tools and applications for the optimization and operation of these networks. With the growing complexity of electrical systems, the need for robust analytical tools to understand and optimize the dynamics of these networks becomes essential. This work focuses on the branch sensitivity analysis of electrical networks using a sensitivity matrix in the complex plane, a unique approach that provides perspectives and insights into the interactions of electrical systems. Through MATLAB software, algorithms were developed for sensitivity analysis. The main case studies involve the electrical networks of 14, 57, 300, 1354, and 2869 buses, all extracted from the database of the MATPOWER software. Among the objectives, the following stand out: The development of the sensitivity matrix in the complex plane is crucial for the analysis of electrical networks, offering a solid and robust foundation to investigate electrical systems based on the equations that model their branches; The validation of the developed algorithms is sought through benchmark cases. In this sense, the work presents an application of these algorithms to the case studies, which are electric grids based on real electrical systems. In analyzing these cases, the aim was to demonstrate the success and conciseness of the codes in handling electrical variables in their natural domain and the versatility of the methodology, as the modeling is done through the equations of the network branches, contemplating the local analysis of electrical network models. This methodology can provide valuable insights into system dynamics, allowing the evaluation of complex relationships between its parts and the system as a whole, potentially contributing significantly to the advancement of studies focused on optimization, stability, planning, resource allocation, etc. The results obtained in this thesis demonstrate the conciseness and efficacy of the methods used, opening a broad horizon of investigative possibilities regarding the different parameters and system variables. By offering a theoretical platform where it is possible to explore electrical systems in a domain more suited to the nature of the involved electrical variables, there is an increase in robustness, conciseness, readability, ease of maintenance, and performance. Therefore, this work emerges as a proposal for improving the understanding, optimization, and innovation of electrical systems.

**Keywords:** Sensitivity analysis; Wirtinger; complex plane; Power flow.

# Lista de Figuras

Figura 2.1 - Gráfico de contorno de uma função real de variáveis complexas [1–3]. . . . .	25
Figura 3.1 - Variáveis da barra $k$ [3]. . . . .	35
Figura 3.2 - Convenção da entrada e saída de potência [3]. . . . .	36
Figura 3.3 - Injeção líquida de potência na barra $k$ . . . . .	36
Figura 3.4 - Transformador ideal [3]. . . . .	37
Figura 3.5 - Modelo do Fluxo. . . . .	38
Figura 3.6 - Matriz de admitância de um sistema do SIN de 9899 barras. . . . .	41
Figura 3.7 - Jacobiana complexa de um sistema de 10423 barras. . . . .	46
Figura 3.8 - Jacobiana complexa de um sistema brasileiro de 6518 barras. . . . .	46
Figura 5.1 - Grafo da topologia do caso IEEE de 14 barras. . . . .	58
Figura 5.2 - Grafo da topologia do caso IEEE de 57 barras. . . . .	59
Figura 5.3 - Grafo da topologia do caso IEEE de 300 barras. . . . .	61
Figura 5.4 - Grafo da topologia do sistema europeu de 1354 barras. . . . .	63
Figura 5.5 - Grafo da topologia do sistema europeu de 2869 barras. . . . .	65

# Lista de Tabelas

Tabela 1	- Ramos selecionados no caso IEEE de 14 Barras. . . . .	58
Tabela 2	- Ramos selecionados no caso IEEE de 57 Barras. . . . .	59
Tabela 3	- Ramos selecionados no caso IEEE de 300 Barras. . . . .	61
Tabela 4	- Ramos selecionados no caso IEEE de 1354 Barras. . . . .	64
Tabela 5	- Ramos selecionados no caso IEEE de 2869 barras. . . . .	66

## Lista de Abreviaturas e Siglas

<b>FACTS</b>	<i>Flexible AC Transmissions System</i>
<b>OLTC</b>	<i>On-Load-Tap-Changer</i>
<b>PSTs</b>	<i>Phase-shifting transformers</i>
<b>SIMD</b>	<i>Single Instruction, Multiple Data</i>
<b>PMUs</b>	<i>Phasor Measurement Units</i>
<b>AVX-2</b>	<i>Advanced Vector Extensions 2</i>
<b>WLS</b>	<i>Weighted Least Squares</i>

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
1.1	A Importância da Análise de Sensibilidade . . . . .	12
1.2	Análise de Sensibilidade no Plano Complexo . . . . .	13
1.3	Vantagens da Abordagem no Plano Complexo . . . . .	14
1.4	Revisão Bibliográfica . . . . .	15
1.5	Objetivos do Trabalho . . . . .	17
1.5.1	Contribuições da Tese . . . . .	18
1.6	Estrutura da Tese . . . . .	20
<b>2</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA</b>	<b>22</b>
2.1	Funções analíticas e não analíticas . . . . .	23
2.2	Cálculos de <i>Wirtinger</i> . . . . .	24
2.3	Cálculo de <i>Wirtinger</i> Generalizado . . . . .	26
2.3.1	Diferenciais Complexas . . . . .	26
2.3.2	Identificação das Diferenciais Complexas . . . . .	28
2.3.3	Matrizes Jacobianas Complexas . . . . .	28
2.4	Complemento de Schur e Operador Swap . . . . .	30
2.4.1	Operador Swap . . . . .	30
2.4.2	Complemento de Schur . . . . .	31
2.5	Lagrangiana Complexa . . . . .	32
2.5.1	Rank Matricial dos Sistemas de Equações . . . . .	33
<b>3</b>	<b>MODELO DO FLUXO DE POTÊNCIA NO PLANO COMPLEXO</b>	<b>35</b>
3.1	Convenção para o sentido das injeções de potência . . . . .	35
3.2	Transformador ideal . . . . .	37
3.3	Equações do Modelo . . . . .	37
3.4	Matriz de Admitância Nodal . . . . .	40
3.5	Modelagem das Barras . . . . .	42
3.6	Blocos de Derivadas da Jacobiana Complexa . . . . .	44
3.7	Redução do Sistema via Complemento de Schur . . . . .	47
3.8	Formulação do Modelo de Fluxo de Potência Exato . . . . .	48

<b>4</b>	<b>ANÁLISE DE SENSIBILIDADE COMPLEXA</b>	<b>50</b>
4.1	Equações Ramais de Potência . . . . .	52
4.2	Desempenho no Domínio Complexo . . . . .	53
4.2.1	Performance e Simplicidade na Implementação . . . . .	53
4.2.2	Confiabilidade e Manutenção do Código . . . . .	54
4.2.3	Precisão e Aplicações em Tempo Real . . . . .	54
4.2.4	Desempenho Comparado a Métodos Tradicionais . . . . .	55
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>56</b>
5.1	Análise de Sensibilidade do Caso IEEE de 14 Barras . . . . .	57
5.2	Análise de Sensibilidade do Caso IEEE de 57 Barras . . . . .	59
5.3	Análise de Sensibilidade do Caso IEEE de 300 Barras . . . . .	61
5.4	Análise de Sensibilidade do Caso IEEE de 1354 Barras . . . . .	63
5.5	Análise de Sensibilidade do Caso IEEE de 2869 Barras . . . . .	65
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>67</b>
<b>7</b>	<b>TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>69</b>
7.1	Exploração de Simetrias e Redução de Ordem . . . . .	69
7.2	Estruturas de Blocos e Processamento Paralelo . . . . .	69
7.3	Precondicionamento por Blocos Matriciais . . . . .	69
7.4	Incorporação de Modelos de FACTs . . . . .	70
7.5	Aplicações Específicas . . . . .	70
7.6	Publicação . . . . .	70
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>71</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Em contextos modernos de operação e planejamento de redes elétricas, é fundamental ter uma compreensão profunda das variáveis e parâmetros que influenciam o desempenho do sistema. Com a crescente integração de fontes renováveis de energia, gerenciamento da demanda e a introdução de tecnologias avançadas, como o armazenamento de energia, a complexidade das redes elétricas tem aumentado. Isto requer ferramentas e metodologias mais avançadas para analisar e compreender o funcionamento dessas redes. Em meio a esse cenário, a análise de sensibilidade surge como uma ferramenta importante para examinar como as variações em determinados parâmetros ou condições de entrada podem impactar certas variáveis de saída ou desempenho do sistema.

A modelagem das redes elétricas usando o cálculo generalizado de *Wirtinger* [3] oferece uma ferramenta robusta e concisa para a modelagem matemática de sistemas elétricos em termos de variáveis complexas.

Ao modelar cada ramo da rede como uma função de variáveis complexas, pode-se aplicar ferramentas de cálculo diferencial complexo para conduzir análises de sensibilidade e outros estudos relacionados. A análise de sensibilidade fornece informações valiosas sobre como pequenas perturbações em certas entradas (como a geração de energia, cargas, impedâncias de linha, etc.) podem influenciar variáveis de saída cruciais, como tensões nodais, fluxos de potência e estabilidade do sistema.

Este trabalho visa proporcionar uma base metodológica robusta e adequada para a modelagem matemática de redes elétricas no domínio complexo. Isso se justifica pelo fato de que as variáveis associadas aos problemas elétricos são predominantemente complexas. O intuito é que essa abordagem possa contribuir para o aprimoramento do planejamento e operação dos sistemas elétricos contemporâneos.

## 1.1 A Importância da Análise de Sensibilidade

A análise de sensibilidade, em sua essência, é um método empregado para investigar como as variações nas saídas (ou respostas) de um sistema são influenciadas por alterações nas suas entradas. Para compreender melhor, é necessário introduzir o conceito de função de transferência do sistema. Esta função representa matematicamente a relação entre as entradas e as saídas do sistema. De forma simplificada, as entradas são os estímulos ou sinais aplicados ao sistema, enquanto as saídas são as respostas ou reações do sistema a esses estímulos. Assim, a função de transferência é um modelo que descreve como o sistema processa essas entradas para gerar as saídas. Portanto, ao analisar a sensibilidade, avalia-se o impacto que variações nas entradas (como mudanças nos valores de sinais ou condições iniciais) têm sobre as saídas do sistema, o que é crucial para entender o comportamento do sistema em diferentes cenários e condições.

Em redes elétricas, isso significa compreender como mudanças em certas variáveis (por exemplo, geração de energia ou cargas) influenciarão outras variáveis-chave (como tensões ou fluxos de potência).

A importância dessa análise reside em sua capacidade de:

- Identificar pontos frágeis no sistema;
- Auxiliar na tomada de decisões para otimização;
- Prover informações para o planejamento de redes resilientes;
- Facilitar a integração segura de recursos energéticos distribuídos.

## 1.2 Análise de Sensibilidade no Plano Complexo

Tradicionalmente, a análise de sensibilidade é realizada no plano real. No entanto, quando se trata de sistemas elétricos, muitas das grandezas de interesse são, por natureza, complexas (correntes, impedâncias, tensões, entre outras). Assim, a análise de sensibilidade no domínio complexo trata as variáveis envolvidas em seu domínio natural, o que pode refletir na performance computacional, fácil implementação, legibilidade e manutenibilidade dos algoritmos, conforme evidenciado nos trabalhos [4–8].

O cálculo diferencial de funções matriciais reais já foi extensivamente discutido por Magnus e Neudecker (2019) [9]. Quanto à abordagem das derivadas matriciais no contexto complexo, pode-se referir a [10], uma obra referencial no tema. A diferenciabilidade complexa, que é central nesta tese, também é amplamente aplicada em campos como processamento de sinais e telecomunicações. Assim, o propósito deste trabalho, é expor um ferramental matemático robusto e explorar a metodologia, aplicação e perspectiva dessa abordagem, evidenciando seu potencial, com o objetivo de fornecer ferramentas para a aplicação na análise de sensibilidade de sistemas elétricos de potência de grande porte, porém de modo geral, para o aprimoramento da operação, otimização e planejamento de redes elétricas modernas. A metodologia é desenvolvida através da perspectiva da formulação no domínio complexo, com o emprego do cálculo matricial de *Wirtinger* para a aquisição dos parâmetros pertinentes utilizando-se das equações de ramo do modelo.

### 1.3 Vantagens da Abordagem no Plano Complexo

A análise de sensibilidade no plano complexo para redes elétricas destes sistemas não só captura de maneira mais concisa a natureza complexa das grandezas elétricas, como também fornece um conjunto robusto de ferramentas matemáticas capazes de trazer melhorias a modelagem das redes, performance computacional, implementação, legibilidade e manutenção dos algoritmos. Ao longo deste trabalho, será explorada a metodologia, aplicação e perspectiva dessa abordagem, com o objetivo de fornecer ferramentas para o aprimoramento da operação, otimização e planejamento de redes elétricas modernas. Pode-se citar algumas vantagens da implementação no domínio dos números complexos:

- **Representação Direta:** Ao lidar diretamente com quantidades complexas, a modelagem fica mais natural, reduzindo a necessidade de transformações ou aproximações;
- **Capacidade Analítica:** O cálculo diferencial complexo de *Wirtinger* permite a diferenciação de funções não analíticas no domínio complexo [1, 4];
- **Aplicações em Estimação de Estados:** A implementação em domínio complexo pode ser competitiva em termos de precisão e ganho computacional com relação a estimação de estados em variáveis reais [8].

## 1.4 Revisão Bibliográfica

A análise de sensibilidade desempenha um papel fundamental na gestão de variações em problemas locais, sendo essencial para entender os detalhes das mudanças no problema em questão [11–13]. Esta técnica é adotada em diversos campos científicos [14–16], frequentemente, a compreensão plena de uma solução surge somente após uma análise detalhada e criteriosa. Sendo reconhecida como uma ferramenta de pesquisa, especialmente para os matemáticos. Na matemática, estas técnicas auxiliam a determinar condições ótimas, soluções algorítmicas e taxas de convergência, tendo ainda implicações diretas na predição de soluções sob variados parâmetros. [12, 17–19].

No contexto dos sistemas de energia elétrica, identifica-se primordialmente duas categorias principais de sensibilidades: a sensibilidade de uma determinada variável elétrica em relação a outra, tal como a tensão ( $V_i$ ) em uma barra específica  $i$  relativa à injeção de reativo ( $Q_j$ ) em outra barra  $j$ , e a sensibilidade da função objetivo ( $f(x)$ ) em comparação com as variáveis elétricas, como as perdas na transmissão referentes à injeção de potência ( $P_i$ ) na barra  $i$ . Compreender estas particularidades é fundamental para diversos aspectos do Sistema Elétrico de Potência (SEP). Essas sensibilidades desempenham um papel crítico no planejamento de sistemas elétricos, na definição de tarifas, no ajuste de fluxos de carga para otimização, nas técnicas de despacho em tempo real para atender demandas flutuantes, e em outras aplicações cruciais [20–25].

No contexto da rede elétrica, a análise de sensibilidade representa um campo de estudo abrangente e interdisciplinar, englobando uma diversidade de técnicas e metodologias. As abordagens mais prevalentes nessa área incluem:

- **Derivadas Parciais:** As derivadas parciais são frequentemente usadas para calcular a sensibilidade de uma variável em relação a outra. Elas fornecem informações sobre como uma pequena alteração em um parâmetro afeta as variáveis elétricas de interesse no sistema elétrico [26];
- **Análise de Sensibilidade Numérica:** Essa técnica envolve a perturbação sistemática dos parâmetros do sistema e a observação das mudanças resultantes nas variáveis elétricas ou na função objetivo. Isso é feito computacionalmente e pode ser útil para sistemas complexos [27];
- **Análise de Sensibilidade Analítica:** Quando possível, é preferível derivar expressões

analíticas que descrevam as sensibilidades das variáveis elétricas em relação aos parâmetros. Isso pode fornecer uma compreensão mais profunda e economizar recursos computacionais [28];

- **Métodos de Otimização:** Em muitos casos, a análise de sensibilidade está ligada a problemas de otimização. Técnicas como o método dos multiplicadores de Lagrange são usadas para calcular sensibilidades de forma eficiente em problemas de otimização [29];
- **Simulação de Monte Carlo:** Em situações em que os parâmetros são incertos, a simulação de Monte Carlo é uma ferramenta poderosa para analisar a sensibilidade do sistema a diferentes cenários de incerteza [30];
- **Métodos de Diferenças Finitas:** Essa técnica envolve a discretização das equações que descrevem o sistema elétrico e o cálculo das sensibilidades usando diferenças finitas [31];
- **Análise de Sensibilidade de Estado Estacionário:** Essa abordagem se concentra na análise de sensibilidade de variáveis elétricas em estado estacionário, como tensões e correntes, em relação a mudanças nos parâmetros do sistema [32];
- **Análise de Sensibilidade de Fluxo de Potência:** Esse método se concentra na análise de sensibilidade das variáveis de fluxo de potência em relação a perturbações nos parâmetros da rede elétrica [33].

Essas técnicas e abordagens desempenham um papel importante na compreensão e no gerenciamento eficiente de sistemas elétricos de potência. Elas permitem que os engenheiros e operadores do sistema tomem decisões informadas e otimizem a operação e o planejamento do SEP, contribuindo para a confiabilidade e eficiência da rede elétrica.

Portanto, ao realizar a análise de sensibilidade no domínio complexo, as variáveis são tratadas em seu domínio inerente. Isso impacta positivamente diversos aspectos, como a performance computacional e a facilidade de implementação. Além disso, contribui para a legibilidade e a manutenção dos algoritmos, aspectos que têm sido destacados em diversos estudos na área [4–8].

## 1.5 Objetivos do Trabalho

O objetivo mais amplo desta tese de doutorado em Engenharia Elétrica é introduzir uma metodologia e um ferramental matemático robusto para a modelagem de redes elétricas em domínio complexo, trazendo conceitos de cálculo diferencial complexo para abordagem apropriada e eficaz no desenvolvimento de modelos para estudos de análise de sensibilidade, fluxo de potência e otimização em redes elétricas. Tendo como propósito a aplicação do cálculo diferencial matricial em variáveis complexas, conhecido como cálculo generalizado de *Wirtinger*, para a análise de sensibilidade por meio das equações de ramo da rede, denominada análise ramal.

Este trabalho pretende ainda, com a colaboração de outros estudos já citados, apontar e ressaltar uma direção possivelmente promissora, que é a implementação em domínio complexo, com o uso das ferramentas de diferenciação complexa, as quais ainda encontra uso incipiente nas aplicações em redes elétricas. A motivação dessa abordagem é que as variáveis presentes em problemas da engenharia elétrica, são predominantemente complexas e, portanto, tratando-as em seu domínio natural, pretende-se alcançar clareza, organização, facilidade na implementação dos algoritmos e análise dos resultados além de ganho em performance computacional. Ressalta-se que tais objetivos de implementação nesse domínio já foram alcançados em muitas obras, algumas citadas neste trabalho.

Neste trabalho expõe-se a metodologia proposta, aplicando-a aos casos *benchmark* de sistemas elétricos de 14, 57, 300, 1354 e 2869 barras. Esses sistemas representam redes de transmissão de pequeno, médio e grande porte.

Ao alcançar esses objetivos, espera-se aprimorar as práticas de desenvolvimento de modelos e algoritmos, promovendo uma abordagem mais eficaz e abrangente para o tratamento de sistemas elétricos de grande escala.

Os objetivos específicos deste trabalho incluem:

- Utilizar a base matemática do cálculo diferencial matricial de *Wirtinger* para realizar análises de sensibilidade detalhadas em sistemas elétricos complexos de grande porte;
- Empregar os casos de sistemas elétricos de 14, 57, 300, 1354 e 2869 barras fornecidos pelo software MATPOWER como *benchmarks* para a análise de sensibilidade no plano complexo;

- Investigar as interações entre as variáveis e componentes dos sistemas elétricos sob análise, destacando o impacto de pequenas alterações em torno do ponto de operação desses sistemas;
- Realizar análises de sensibilidade em relação à relação de transformação do tap de cada transformador presente nos ramos da rede, variando essa relação em 1% e avaliando a variação percentual do módulo da injeção de potência aparente  $S_k$ , mapeando dessa forma, as características de sensibilidade com relação aos taps desses sistemas;
- Visualizar os resultados obtidos por meio de gráficos da topologia da rede, destacando os ramos mais sensíveis e as variações percentuais associadas no módulo da potência aparente;
- Apresentar os resultados da análise para 10 ramos de cada caso analisado, fornecendo informações detalhadas sobre a sensibilidade de cada ramo em relação às variações no tap dos transformadores.

### 1.5.1 Contribuições da Tese

No entanto, nota-se uma deficiência na literatura sobre a fundamentação teórica dos modelos no plano complexo. Apesar de o Cálculo de *Wirtinger* contornar a impossibilidade da diferenciação complexa de funções não analíticas, a extensão deste cálculo para uma abordagem matricial multivariável ainda é um desafio pouco documentado. Este trabalho procura trazer uma contribuição significativa quanto à carência de exposição teórica sobre a implementação de modelos no domínio complexo, lançando luz sobre conceitos e ferramentas importantes como a Diferencial Complexa, utilizada para a aquisição das matrizes jacobianas, ou diferenciais de primeira ordem, empregados em muitos métodos numéricos e problemas de otimização. Tendo como contribuições:

- Diferencial Complexa;
- Preenchimento da lacuna teórica envolvendo a modelagem no plano complexo;
- Metodologia de Desenvolvimento de Modelos para Análise de Sensibilidade no Plano Complexo.

A tese traz uma metodologia geral para aplicação em estudos de sensibilidade baseados nas equações de ramo da rede elétrica. Vale ressaltar que apesar da aplicação ter contemplado a análise de sensibilidade com relação aos *taps* dos sistemas apresentados, a metodologia exposta na tese, permite a utilização em outras aplicações e análises, como multiplicadores de Lagrange, fluxo de potência ótimo, despacho de energia, estabilidade e inúmeras outras aplicações que envolvem as derivadas de primeira ordem. Ao fazer uma exposição mais extensa do Cálculo de *Wirtinger* na forma matricial, a tese contribui para que os modelos sejam desenvolvidos de forma vetorizada, adequada para o processamento utilizando arquitetura SIMD, que conforme as referências bibliográficas, apontou para benefícios de desempenho, manutenibilidade e simplicidade de implementação frente a metodologias tradicionais no plano real. Portanto, frente a crescente complexidade do setor elétrico, se faz significativa a colaboração de trabalhos que, como este, ensejam a melhoria ou a extensão das metodologias tradicionais, que em muitas situações se mostram aquém das necessidades atuais das redes elétricas, além disso, a tese contribui para o preenchimento da lacuna teórica envolvendo a modelagem no plano complexo.

## 1.6 Estrutura da Tese

Esta tese concentra-se na modelagem e análise de sensibilidade ramal através da matriz de sensibilidade no plano complexo. A seguir, é apresentada a estrutura detalhada, subdividida em sete capítulos essenciais:

### 1. Introdução:

- Visão geral sobre a temática abordada;
- Exposição das principais literaturas e estudos relacionados ao tema;
- Discussão sobre as abordagens pré-existentes e sua relevância;
- Explicitação dos principais objetivos a serem alcançados pelo estudo.

### 2. Modelagem Matemática:

- Apresentação dos conceitos e ferramentas matemáticas que são fundamentais para o desenvolvimento da tese;
- Contextualização de como tais modelos são aplicados no estudo em questão.

### 3. Modelo do Fluxo de Potência no Plano Complexo:

- Descrição detalhada do modelo de fluxo de potência em contexto complexo;
- Elaboração da modelagem matemática específica associada a este fluxo.

### 4. Análise de Sensibilidade Complexa:

- Introdução ao conceito de análise de sensibilidade ramal;
- Apresentação das equações e modelos matemáticos que fundamentam essa análise.

### 5. Resultados:

- Demonstração dos resultados obtidos através das modelagens apresentadas nos capítulos anteriores;
- Análise crítica desses resultados, considerando sua relevância, impacto e precisão.

### 6. Conclusões:

- Síntese dos principais resultados da tese;

- Discussão sobre os benefícios e implicações dos resultados obtidos.

#### **7. Trabalhos Futuros:**

- Reflexão sobre as possíveis extensões ou continuidades deste estudo;
- Sugestões para pesquisas subsequentes e áreas que podem se beneficiar dos resultados e métodos apresentados.

Com essa estrutura, espera-se oferecer ao leitor uma jornada coerente e lógica, desde a introdução dos conceitos fundamentais até as conclusões e perspectivas futuras relacionadas ao estudo da sensibilidade ramal no plano complexo.

## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Matrizes complexas são frequentemente encontradas em comunicações digitais. Nessas situações, filtros digitais podem possuir coeficientes complexos, e elas também são vistas em sistemas de potência, circuitos elétricos, teoria de controle, filtros adaptativos, análise de sensibilidade, sistemas mecânicos e acústicos. Utilizar matrizes complexas para representar sistemas frequentemente resulta em um esforço computacional e representativo menor, se comparado ao método de separar as partes real e imaginária, conforme discutido em [34]. No entanto, ao abordar problemas de otimização, é crucial considerar um cálculo diferencial adequado no domínio complexo. As condições de otimização podem ser determinadas no cálculo complexo, utilizando diferenciais complexas e tratando as variáveis matriciais e seus conjugados complexos como variáveis independentes, como é detalhado nesta seção [3]. No contexto de estudos relacionados ao emprego dos números complexos, tem-se os trabalhos [35–39]:

- Aplicações em Processamento de Sinais e Imagens: Matrizes complexas são amplamente utilizadas em processamento de sinais e imagens, onde são empregadas em algoritmos de filtragem, transformadas de Fourier e em diversas técnicas de processamento de imagens, como filtragem espacial e restauração de imagens;
- Teoria da Informação e Codificação: Em teoria da informação e codificação de sinais, as propriedades dos números complexos são exploradas para representar de forma eficiente os sinais e maximizar a capacidade de transmissão de informação em canais de comunicação;
- Engenharia de Controle e Sistemas Dinâmicos: Na engenharia de controle, as matrizes complexas são fundamentais para modelar e analisar sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo, como controladores PID (Proporcional, Integral e Derivativo) e sistemas de controle de malha fechada;
- Óptica e Ondas Eletromagnéticas: Em aplicações de óptica e ondas eletromagnéticas, as matrizes complexas são usadas para descrever a propagação e o comportamento de ondas luminosas e eletromagnéticas em meios ópticos e dielétricos.

## 2.1 Funções analíticas e não analíticas

**Definição 2.1** (Função Analítica). Seja  $D \subseteq \mathbb{C}$  o domínio de definição da função  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . A função  $f$  é uma **função analítica** ou holomórfica no domínio  $D$  se o limite abaixo existe para todo  $z \in D$ .

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (1)$$

Se  $z = x + jy$  para  $x$  e  $y$  reais, então pode-se escrever uma complexa  $f(z)$  como:

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y) \quad (2)$$

Logo, para que a função complexa (2) satisfaça o limite (1) é necessário que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$

As equações (3) são conhecidas como **equações de Cauchy-Riemann** e podem ser sintetizadas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0 \quad (4)$$

De (4), pode ser visto que a função  $f$  não depende da variável  $z^*$ , caso contrário, ela é dita **não analítica**. Portanto, se uma função depende somente de  $z$ , como nas funções analíticas e não é dependente implícita ou explicitamente de  $z^*$ , a função em geral não pode ser uma função escalar real. Esta restrição impede a diferenciação das funções escalares reais conforme o limite estabelecido em (1). Duas maneiras [40] são conhecidas para encontrar derivadas de funções escalares reais  $f \in \mathbb{R}$  com respeito à variável matricial complexa  $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{N \times Q}$  (de uma forma geral). A primeira maneira é reescrever  $f$  como uma função das partes real  $\mathbf{X}$  e imaginária  $\mathbf{Y}$  da variável  $\mathbf{Z}$ , e então encontrar as derivadas da função reescrita, com respeito a variáveis independentes  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  separadamente. Note que  $NQ$  variáveis independentes em  $\mathbf{Z}$ , correspondem a  $2NQ$  variáveis independentes reais em  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ . Neste trabalho, adota-se a segunda abordagem para tratar deste problema, considerando as variáveis  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{Z}^*$  como independentes, o que permite uma análise diferenciada.

## 2.2 Cálculos de *Wirtinger*

**Definição 2.2** (Derivadas Formais). Seja  $z = x + jy$ , onde  $x$  e  $y \in \mathbb{R}$ , então as derivadas formais com, respeito a  $z$  e  $z^*$  de  $f(z_0)$  em  $z_0 \in \mathbb{C}$  ou **derivadas de *Wirtinger*** [41], são definidas como:

$$\frac{\partial f(z_0)}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f(z_0)}{\partial x} - j \frac{\partial f(z_0)}{\partial y} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial f(z_0)}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f(z_0)}{\partial x} + j \frac{\partial f(z_0)}{\partial y} \right) \quad (6)$$

As derivadas formais acima devem ser interpretadas formalmente porque  $z$  e  $z^*$  não podem variar independentemente. Em Kreutz-Delgado [42], o tópico de cálculos de *Wirtinger*, também é chamado de  $\mathbb{C}\mathbb{R}$ -Cálculo [43].

Da definição 2.2, segue que as derivadas de uma função  $f$  com respeito a parte real  $x$  e parte imaginária  $y$ , podem ser expressas como:

$$\frac{\partial f(z_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(z_0)}{\partial z} + \frac{\partial f(z_0)}{\partial z^*} \quad (7)$$

$$\frac{\partial f(z_0)}{\partial y} = j \left( \frac{\partial f(z_0)}{\partial z} - \frac{\partial f(z_0)}{\partial z^*} \right) \quad (8)$$

**Exemplo 1** (Derivadas Formais). Usando a definição 2.2, as seguintes derivadas formais são encontradas:

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} \right) (x + jy) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \quad (9)$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right) (x - jy) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \quad (10)$$

$$\frac{\partial z}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right) (x + jy) = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} \right) (x - jy) = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0 \quad (12)$$

**Exemplo 2.** Seja  $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(z, z^*) = zz^*$ . Essa função é diferenciável com respeito a ambas as variáveis  $z$  e  $z^*$  (usando a definição 2.2), e as expressões para as derivadas

formais são dadas por:

$$\frac{\partial f(z, z^*)}{\partial z} = z^* \quad (13)$$

$$\frac{\partial f(z, z^*)}{\partial z^*} = z \quad (14)$$

Quando as variáveis complexas  $z$  e  $z^*$  são tratadas como variáveis independentes, a função  $f$  é diferenciável nestas duas variáveis. Note que esta mesma função não é diferenciável, usando a expressão tradicional para a derivada de uma função analítica, dada pela definição 2.1. O exemplo 2 também sugere uma interpretação geométrica mostrada na Figura 2.1. A taxa máxima de mudança da função objetivo  $f(z, z^*) = |z|^2$ , dada compactamente pelo gradiente  $\frac{\partial}{\partial z^*}$  [42]. Observe que sua direção positiva é referida como um problema de maximização, enquanto a direção oposta diz respeito à minimização da função de custo  $f$ , geralmente associada a minimização de erros [44].

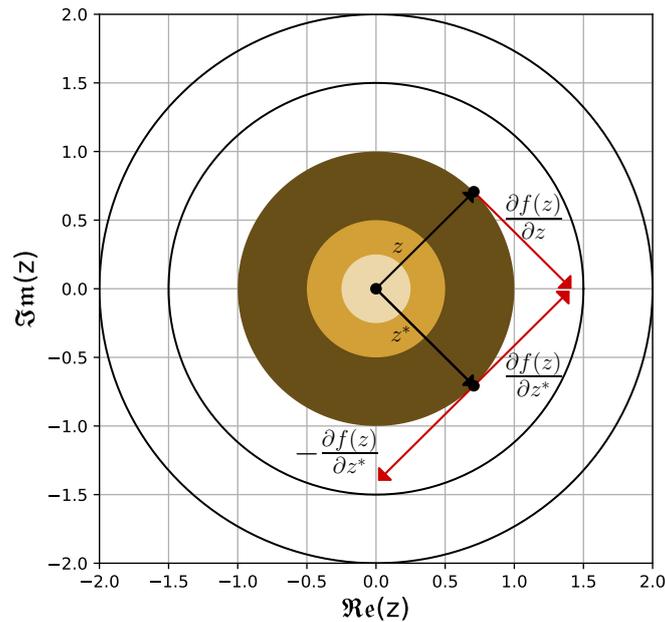


Figura 2.1: Gráfico de contorno de uma função real de variáveis complexas [1–3].

## 2.3 Cálculo de *Wirtinger* Generalizado

A teoria desenvolvida para encontrar derivadas de funções escalares reais através do **Cálculo de *Wirtinger*** pode ser estendida para funções mais gerais dependentes de variáveis matriciais complexas e suas complexas conjugadas, quando todos os elementos dessas matrizes são independentes. Será mostrado nesta seção, com base na principal referência dessa extensão teórica [10], como as diferenciais complexas de uma função podem ser usadas para identificar suas derivadas com respeito a ambas as variáveis matriciais, complexa  $\mathbf{Z}$  e sua complexa conjugada  $\mathbf{Z}^*$ .

### 2.3.1 Diferenciais Complexas

Assim como no caso real, o símbolo  $d$  será usado para denotar a diferencial complexa. A diferencial complexa tem a mesma dimensão da matriz em que é aplicada e pode ser encontrada em termos de componentes, isto é,  $(d\mathbf{Z}_{k,l}) = d(\mathbf{Z}_{k,l})$ . Seja  $z = x + jy \in \mathbb{C}$  uma variável escalar complexa, onde  $\text{Re}(z) = x$  e  $\text{Im}(z) = y$ . As seguintes relações entre as partes real e imaginária de  $z$  e seu complexo conjugado  $z^*$ , são válidas:

$$z = x + jy \quad (15)$$

$$z^* = x - jy \quad (16)$$

$$x = \frac{z + z^*}{2} \quad (17)$$

$$y = \frac{z - z^*}{2j} \quad (18)$$

Das equações (15) e (16), é assegurada a seguinte relação:

$$dz^* = (dz)^* \quad (19)$$

Seja uma  $f$  uma função complexa escalar  $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  denotada por  $f(z, z^*)$ . Devido a esta função ser considerada uma função de duas variáveis complexas  $z$  e  $z^*$ , ambas dependentes de  $x$  e  $y$ , ela pode ser considerada uma função das duas variáveis reais  $x$  e  $y$ . Sendo assim a diferencial da função  $f$  pode ser expressa da seguinte forma:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (20)$$

Sendo  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  as derivadas parciais de  $f$  com relação a  $x$  e  $y$ , respectivamente. Inserindo as diferenciais  $dx$  e  $dy$  das equações (17) e (18), na equação (20), encontra-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{dz + dz^*}{2} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{dz - dz^*}{2j} \right) \\ df &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - j \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz^* \end{aligned} \quad (21)$$

Comparando a expressão de (21) com a definição de derivada formal dada em (2.2), chega-se à seguinte expressão:

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial z^*} dz^* \quad (22)$$

Esta expressão é similar a expressão da diferencial de uma função real [20], ou seja, a estrutura da diferencial se mantém considerando  $f$  como função das variáveis complexas independentes,  $z$  e  $z^*$ . A análise acima vale também para funções escalares complexas do tipo  $f : \mathbb{C}^{N \times Q} \times \mathbb{C}^{N \times Q} \rightarrow \mathbb{C}$ , denotada por  $f(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*)$ , que dependem de uma variável matricial complexa  $\mathbf{Z}$  e sua conjugada  $\mathbf{Z}^*$ . De forma análoga às equações (15) - (19), pode-se desenvolver relações pertinentes às matrizes  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z}^*$  e suas diferenciais:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} + j\mathbf{Y} \quad (23)$$

$$\mathbf{Z}^* = \mathbf{X} - j\mathbf{Y} \quad (24)$$

$$d \operatorname{Re}(\mathbf{Z}) = d\mathbf{X} = \frac{d\mathbf{Z} + d\mathbf{Z}^*}{2} \quad (25)$$

$$d \operatorname{Im}(\mathbf{Z}^*) = d\mathbf{Y} = \frac{d\mathbf{Z} - d\mathbf{Z}^*}{2j} \quad (26)$$

Tendo  $\mathbf{X} = \operatorname{Re}(\mathbf{Z})$  e  $\mathbf{Y} = \operatorname{Im}(\mathbf{Z})$ . A diferencial de  $f$  pode ser expressa em termos das  $NQ$  componentes reais independentes  $x_{k,l}$  e  $y_{k,l}$  de cada matriz real  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ :

$$df = \sum_{k=0}^{Q-1} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\partial f}{\partial x_{k,l}} dx_{k,l} + \sum_{k=0}^{Q-1} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\partial f}{\partial y_{k,l}} dy_{k,l} \quad (27)$$

Em termos das variáveis complexas  $z_{k,l}$  e  $z_{k,l}^*$ :

$$df = \sum_{k=0}^{Q-1} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\partial f}{\partial z_{k,l}} dz_{k,l} + \sum_{k=0}^{Q-1} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\partial f}{\partial z_{k,l}^*} dz_{k,l}^* \quad (28)$$

Sendo  $\frac{\partial f}{\partial x_{k,l}}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y_{k,l}}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z_{k,l}}$  e  $\frac{\partial f}{\partial z_{k,l}^*}$ , as derivadas de  $f$  com respeito a  $x_{k,l}$ ,  $y_{k,l}$ ,  $z_{k,l}$  e  $z_{k,l}^*$ , respectivamente. As  $NQ$  derivadas formais  $\frac{\partial f}{\partial z_{k,l}}$  e as  $NQ$  derivadas formais  $\frac{\partial f}{\partial z_{k,l}^*}$  podem ser organizadas em matrizes de diversas formas, dando origem às divergências estruturais das matrizes na literatura do assunto.

### 2.3.2 Identificação das Diferenciais Complexas

Sejam duas matrizes complexas  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{Z}^* \in \mathbb{C}^{N \times Q}$ , nesta abordagem, assume-se que essas duas matrizes podem ser tratadas como variáveis independentes. Então, um procedimento para encontrar as diferenciais complexas de uma função matricial complexa da forma  $f : \mathbb{C}^{N \times Q} \times \mathbb{C}^{N \times Q} \rightarrow \mathbb{C}^{M \times P}$ , denotada por  $f(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*)$ , é calcular a diferença:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{Z} + d\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^* + d\mathbf{Z}^*) - f(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*) &= \\ &= 1^{\text{a}} \text{ Ordem}(d\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*) + \text{Ordem Superior}(d\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*) \end{aligned} \quad (29)$$

Ou seja, após expandir o lado esquerdo de (29), a soma dos termos que envolvem  $d\mathbf{Z}$  e  $d\mathbf{Z}^*$  de primeira ordem, é a diferencial de  $f$

$$df = 1^{\text{a}} \text{Ordem}(f(\mathbf{Z} + d\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^* + d\mathbf{Z}^*) - f(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*)) \quad (30)$$

**Exemplo 3** (Diferencial de  $\mathbf{AZB}$ ). Seja  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ ,  $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{N \times Q}$ , e  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{Q \times P}$ , onde  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são independentes de  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{Z}^*$ . Então para se encontrar a diferencial da função matricial complexa  $f(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*) = \mathbf{AZB}$ , procede-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{Z} + d\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^* + d\mathbf{Z}^*) - f(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*) &= \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{Z} + d\mathbf{Z})\mathbf{B} - \mathbf{AZB} = \\ &= \mathbf{A}(d\mathbf{Z})\mathbf{B} \Rightarrow \\ df &= \mathbf{A}(d\mathbf{Z})\mathbf{B} \end{aligned} \quad (31)$$

### 2.3.3 Matrizes Jacobianas Complexas

Para definir a jacobiana complexa de forma geral, é necessário definir o operador de vetorização, conforme descrito a seguir:

**Definição 2.3** (Operador Vetorização). Seja  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times N}$  e denote a  $i$ -ésima coluna de  $\mathbf{A}$  por

$a_i$ , onde  $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ . Então o operador  $vec(\cdot)$  é definido como o vetor de dimensão  $MN \times 1$  dado por:

$$vec(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} \quad (32)$$

De posse da definição acima, pode-se determinar de forma mais geral a derivada de uma função matricial complexa com respeito a matrizes complexas e então determinar a jacobiana com respeito a variáveis matriciais complexas.

**Definição 2.4** (Derivada Matricial). Seja  $f : \mathbb{C}^{N \times Q} \times \mathbb{C}^{N \times Q} \rightarrow \mathbb{C}^{M \times P}$ , denotada por  $f(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*)$ . As derivadas de  $f(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*) \in \mathbb{C}^{M \times P}$  com respeito as matrizes  $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{N \times Q}$  e  $\mathbf{Z}^* \in \mathbb{C}^{N \times Q}$ , são denotadas por  $D_{\mathbf{Z}}f$  e  $D_{\mathbf{Z}^*}f$ , respectivamente. Ambas as derivadas, são de dimensão  $MP \times NQ$  e se relacionam na expressão diferencial a seguir:

$$dvec(f) = (D_{\mathbf{Z}}f)dvec(\mathbf{Z}) + (D_{\mathbf{Z}^*}f)dvec(\mathbf{Z}^*) \quad (33)$$

As derivadas  $D_{\mathbf{Z}}f$  e  $D_{\mathbf{Z}^*}f$ , também são chamadas de Matrizes Jacobianas Complexas de  $f$  com relação a  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{Z}^*$ , respectivamente. Da expressão (33) é possível derivar expressões para as diferenciais e jacobianas complexas de funções gerais. Mais propriedades e métodos do cálculo matricial de *Wirtinger* podem ser encontrados numa das principais referências sobre o assunto, que é o livro *Complex-Valued Matrix Derivatives* [10].

## 2.4 Complemento de Schur e Operador Swap

O Complemento de Schur é uma técnica para decompor matrizes em blocos triangulares, amplamente empregada em diversas áreas como álgebra linear e teoria dos operadores. Enquanto isso, o Operador Swap é uma operação linear simples que troca a posição de dois elementos em um espaço vetorial ou matriz.

### 2.4.1 Operador Swap

O operador Swap  $S$  vem para o auxílio do condicionamento de matrizes, através da permutação de blocos de linhas ou colunas. O operador swap é definido a seguir.

**Definição 2.5** (Operador Swap). Seja o isomorfismo  $S$  de  $\mathbb{C}$  no espaço dual  $\mathbf{C}^*$ , que obedece a relação  $S^{-1} = S^T = S$ , define-se  $S$  da maneira seguinte:

$$S \triangleq \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

A relação  $S^{-1} = S^T = S$ , apresenta que  $S$  é um operador simétrico e sua própria inversa  $S^2 = I$ . De fato, o operador Swap é uma permutação de blocos de matrizes, o qual permuta linhas ou colunas, dependendo se o operador  $S$  é pré-multiplicado ou pós-multiplicado, respectivamente.

**Exemplo 4** (Operador Swap). Seja  $A$  uma matriz  $2n \times 2n$  dada em blocos e o operador swap  $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , então é possível ver os efeitos da pré-multiplicação e pós-multiplicação de  $S$  por  $A$  e também a multiplicação simultânea pela esquerda e direita de  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$SA = \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$AS = \begin{bmatrix} A_{12} & A_{11} \\ A_{22} & A_{21} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$SAS = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{21} \\ A_{12} & A_{11} \end{bmatrix} \quad (38)$$

### 2.4.2 Complemento de Schur

O termo **Complemento de Schur**, foi introduzido pela primeira vez em 1968 pela pesquisadora *Emilie Haynsworth*. O complemento de Schur desempenha um papel fundamental em muitas áreas da matemática e engenharia, sobretudo em problemas que envolvem a solução de sistemas de equações diferenciais. Na análise numérica, por exemplo, estes sistemas aparecem sob a forma de quocientes de determinantes em interpolação polinomial, em frações continuadas e aproximação de Padé. Em Probabilidade e Estatística, o complemento de Schur se aplica em certas inequações matriciais que são úteis nessas áreas, como a inequação de Cramer-Rao, que fornece um limite inferior para a covariância de um estimador não-enviesado, a inequação de Groves-Rothenberg e a inequação multivariada de Cauchy-Schwarz. Há também inúmeras aplicações do complemento de Schur na área de Engenharia de Controle. Uma das principais referências sobre o assunto se encontra no livro *The Schur Complement and its Applications* [45]. Outras referências importantes de aplicação, podem ser encontradas em [46–51].

**Definição 2.6** (Complemento de Schur). Sejam as matrizes complexas,  $A, B, C, D$  de dimensões  $p \times p$ ,  $p \times q$ ,  $q \times p$  e  $q \times q$ , respectivamente. Seja  $M$ , de dimensão  $(p + q) \times (p + q)$ , dada em blocos de matrizes da seguinte forma:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (39)$$

Frequentemente em problemas de engenharia elétrica, as partições  $A$  e  $D$  em (39), são mal condicionadas. O complemento de Schur do bloco  $A$  e  $D$ , na matriz  $M$ , é dado respectivamente por:

$$M/A := D - CA^{-1}B \quad (40)$$

$$M/D := A - BD^{-1}C \quad (41)$$

## 2.5 Lagrangiana Complexa

Nesta seção formula-se o conceito da lagrangiana complexa [52], fundamental para o desenvolvimento da análise de sensibilidade no domínio complexo. Neste trabalho, aborda-se uma função objetivo complexa geral  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ , no entanto na maioria dos casos práticos de análise de sensibilidade, a função objetivo é do tipo  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Considera-se uma variável complexa tal que:

$$Z = \begin{bmatrix} z_x \\ z_u \end{bmatrix} \quad (42)$$

A variável matricial complexa  $Z$  é dividida em variáveis complexas de estado  $z_x$  e variáveis de controle  $z_u$ . As variáveis de estado e de controle, estão relacionadas pelo modelo de fluxo de potência no plano complexo caracterizado pelas equações de mismatches  $M(Z, Z^*) = 0$ , as quais podem ser sintetizadas pela seguinte equação matricial:

$$M(Z, Z^*) = \begin{bmatrix} M_{kg} \\ M_k \\ E_{kg} \\ M_{kg}^* \end{bmatrix} = 0 \quad (43)$$

A variação de primeira ordem do vetor de mismatch  $M(Z, Z^*)$  é escrita usando-se (22), da seguinte forma:

$$\delta M = \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial z_x} & \frac{\partial M}{\partial z_x^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta z_x \\ \delta z_x^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial z_u} & \frac{\partial M}{\partial z_u^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta z_u \\ \delta z_u^* \end{bmatrix} = 0 \quad (44)$$

Analogamente, obtém-se a variação de primeira ordem da função objetivo  $f(Z, Z^*)$ :

$$\delta f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_x} & \frac{\partial f}{\partial z_x^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta z_x \\ \delta z_x^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_u} & \frac{\partial f}{\partial z_u^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta z_u \\ \delta z_u^* \end{bmatrix} = 0 \quad (45)$$

Utilizando o complexo conjugado da equação (44), é possível escrever:

$$\begin{bmatrix} \delta z_x \\ \delta z_x^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial z_x} & \frac{\partial M}{\partial z_x^*} \\ \frac{\partial M^*}{\partial z_x} & \frac{\partial M^*}{\partial z_x^*} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial z_u} & \frac{\partial M}{\partial z_u^*} \\ \frac{\partial M^*}{\partial z_u} & \frac{\partial M^*}{\partial z_u^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta z_u \\ \delta z_u^* \end{bmatrix} \quad (46)$$

### 2.5.1 Rank Matricial dos Sistemas de Equações

O teorema seguinte justifica os aspectos analíticos de sistemas do tipo (46).

**Teorema 1.** *Seja  $Z, Z^* \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , onde*

$$Z_1 = X_1 + jY_1 \quad (47)$$

$$Z_2 = X_2 + jY_2 \quad (48)$$

com  $X_1, X_2, Y_1$  e  $Y_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Então as duas matrizes  $Z^c \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$  e  $Z^r \in \mathbb{C}^{2m \times 2n}$  definidas como:

$$Z^c \triangleq \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2^* & Z_1^* \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$Z^r \triangleq \begin{bmatrix} (X_1 + X_2) & (Y_2 - Y_1) \\ (Y_1 + Y_2) & (X_1 - X_2) \end{bmatrix} \quad (50)$$

*Tem o mesmo rank.*

*Prova:*

Seja  $1^k$  a matriz identidade de ordem  $k$  e

$$j^k \triangleq j1^k \quad (51)$$

definindo duas matrizes unitárias

$$U_L \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1^m & j^m \\ 1^m & -j^m \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$U_R \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1^n & j^n \\ -j^m & j^n \end{bmatrix} \quad (53)$$

Como as matrizes  $U_L$  e  $U_R$  são não singulares, então a partir de [53], decorre:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} U_L & Z^r & U_R \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} Z^r \end{bmatrix} \quad (54)$$

mas

$$\text{rank} \begin{bmatrix} U_L & Z^c & U_R \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} Z^c \end{bmatrix} \quad (55)$$

então

$$\text{rank} \begin{bmatrix} Z^c \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} Z^r \end{bmatrix} \quad (56)$$

Levando-se em conta o teorema 1, a matriz inversa que figura em (46) é de rank completo, se e somente se, o sistema de equações (43) representam  $2n$  condições independentes, onde  $n$  é a dimensão do vetor  $Z$  em (42). Considerando agora a equação anterior (46), pode-se escrever a variação de primeira ordem da função objetivo, dada na equação (45), da seguinte forma:

$$\delta f = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_u} & \frac{\partial f}{\partial z_u^*} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial z_u} & \frac{\partial M}{\partial z_u^*} \\ \frac{\partial M^*}{\partial z_u} & \frac{\partial M^*}{\partial z_u^*} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \delta z_u \\ \delta z_u^* \end{bmatrix} \quad (57)$$

Sendo,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial z_x} & \frac{\partial M^*}{\partial z_x} \\ \frac{\partial M}{\partial z_x^*} & \frac{\partial M^*}{\partial z_x^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_x} \\ \frac{\partial f}{\partial z_x^*} \end{bmatrix} \quad (58)$$

Portanto, as derivadas formais totais são dadas da equação (57) por:

$$\frac{df}{dz_u} = \frac{\partial f}{\partial z_u} - \frac{\partial M}{\partial z_u} \lambda - \frac{\partial M^*}{\partial z_x} \lambda^* \quad (59)$$

$$\frac{df}{dz_u^*} = \frac{\partial f}{\partial z_u^*} - \frac{\partial M}{\partial z_u^*} \lambda - \frac{\partial M^*}{\partial z_x^*} \lambda^* \quad (60)$$

Os multiplicadores de Lagrange complexos  $\lambda$  e  $\lambda^*$  nas equações (59) e (60) são obtidos pela resolução do sistema adjunto dado em (58). O que garante a consistência do sistema adjunto (58).



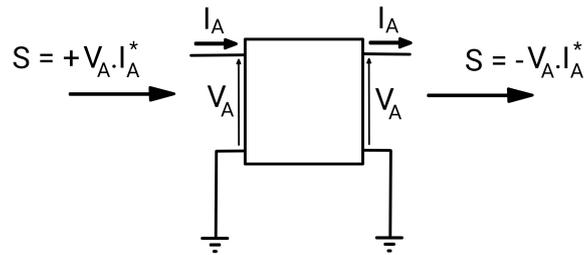


Figura 3.2: Convenção da entrada e saída de potência [3].

Convenciona-se a potência entrando em um ramo ou nó, positiva ou negativa, de acordo com a Figura 3.2. Conforme o diagrama mostrado pode-se sumarizar a convenção da seguinte forma [12]:

- $P_k > 0$ : A potência ativa está entrando na barra  $k$ , portanto, a potência é gerada;
- $P_k < 0$ : A potência ativa está saindo da barra  $k$ , portanto, a potência é consumida.

O balanço de potência na barra  $k$ , considerando elementos de geração e consumo de potência, pode ser visto na Figura 3.3.

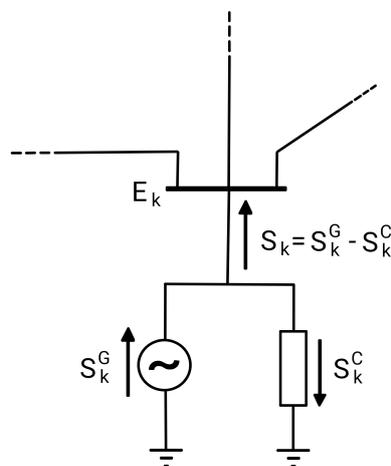


Figura 3.3: Injeção líquida de potência na barra  $k$ .

### 3.2 Transformador ideal

O modelo esquemático do transformado ideal pode ser visto na Figura 3.4:

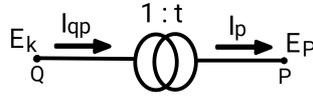


Figura 3.4: Transformador ideal [3].

Utilizando a convenção de potência nos pontos P e Q do transformador ideal da Figura 3.4 tem-se:

$$S_{qp} + (-S_p) = 0 \quad (61)$$

### 3.3 Equações do Modelo

Considerando agora o modelo de fluxo de potência da Figura 3.5 tem-se:

$$E_k \cdot I_{km}^* + (-E_p I_p^*) = 0 \quad (62)$$

Em relação entre as tensões no transformador tem-se:

$$\frac{E_k}{E_p} = \frac{1}{t} \quad (63)$$

$$E_p = E_k t$$

Portanto, aplicando o resultado anterior na equação (62), tem-se:

$$E_k I_{km}^* + (-E_k t I_p^*) = 0$$

$$I_p^* = \frac{I_{km}^*}{t} \quad (64)$$

$$I_p = \frac{I_{km}}{t^*}$$

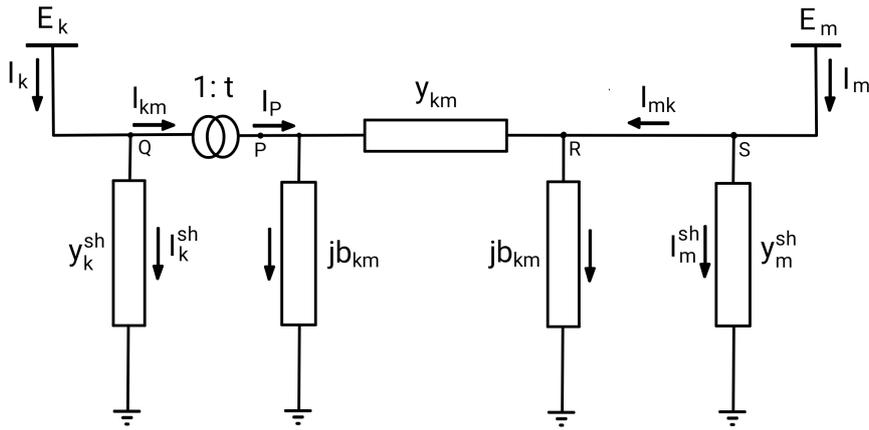


Figura 3.5: Modelo do Fluxo.

Para a modelagem do fluxo de potência considera-se o modelo  $\pi$  equivalente das linhas de transmissão, bem como um OLTC (*On-Load Tap-Changer*) com o tap off-nominal, representado por  $t$ , conforme indicado na Figura 3.5. A seguir indica-se as variáveis do modelo adotado para um ramo genérico entre as barras  $k$  e  $m$ :

- $E_k$ : Tensão na barra  $k$ ;
- $E_m$ : Tensão na barra  $m$ ;
- $I_k$ : Corrente saindo da barra  $k$  para a barra  $m$ ;
- $I_m$ : Corrente saindo da barra  $m$  para a barra  $k$ ;
- $I_k^{sh}$ : Corrente devido à admitância shunt  $y_k^{sh}$  conectada a barra  $k$ ;
- $I_m^{sh}$ : Corrente devido à admitância shunt  $y_m^{sh}$  conectada a barra  $m$ ;
- $I_{km}$ : Corrente do ramo  $k - m$  saindo da barra  $k$  para a barra  $m$ ;
- $I_{mk}$ : Corrente do ramo  $k - m$  saindo da barra  $m$  para a barra  $k$ ;
- $t$ : Tap complexo do OLTC, onde  $t = a_{km} e^{j\varphi_{km}}$ ;
- $y_{km}$ : Admitância série da linha de transmissão;
- $b_{km}$ : Susceptância da linha de transmissão.

No modelo adotado tem-se que as correntes pela esquerda e direita de  $y_{km}$  são opostas de mesma magnitude e levando em conta as equações (63) e (64) de transformação de tensão e

corrente respectivamente, tem-se:

$$\begin{aligned} I_p - jb_{km}E_p &= (E_p - E_m)y_{km} \\ \frac{I_{km}}{t^*} - jb_{km}E_k t &= (E_k t - E_m)y_{km} \end{aligned} \quad (65)$$

Segundo a lei de Kirchhoff das correntes aplicada ao nó  $Q$ :

$$I_{km} = I_k - y_k^{sh} E_k \quad (66)$$

Levando na equação (65) e organizando os termos, vem:

$$I_k = [tt^*(y_{km} + jb_{km}) + y_k^{sh}]E_k + (-t^*y_{km})E_m$$

De forma análoga chega-se à:

$$I_m = (-ty_{km})E_k + (y_{km} + jb_{km} + y_m^{sh})E_m$$

Portanto, as equações gerais para as correntes nas barras  $k$  e  $m$  são:

$$I_k = [tt^*(y_{km} + jb_{km}) + y_k^{sh}]E_k + (-t^*y_{km})E_m \quad (67)$$

$$I_m = (-ty_{km})E_k + (y_{km} + jb_{km} + y_m^{sh})E_m \quad (68)$$

### 3.4 Matriz de Admitância Nodal

As injeções de corrente (67) e (68), podem ser expressas em termos de uma matriz de admitância de ramo  $Y_{br}$ , de dimensão  $2 \times 2$ , cuja as tensões terminais são  $E_k$  e  $E_m$ :

$$\begin{bmatrix} I_k \\ I_m \end{bmatrix} = Y_{br} \begin{bmatrix} E_k \\ E_m \end{bmatrix} \quad (69)$$

Identificando a expressão (69), com as expressões de corrente (67) e (68), tem-se:

$$Y_{br} = \begin{bmatrix} tt^*(y_{km} + jb_{km}) + y_k^{sh} & -t^*y_{km} \\ -ty_{km} & y_{km} + jb_{km} + y_m^{sh} \end{bmatrix} \quad (70)$$

Pode-se ainda desacoplar a matriz de admitâncias shunt  $Y^{sh}$ , que é uma matriz diagonal. Os elementos da sua diagonal principal são as admitâncias shunt conectadas das barras  $E_k$  e  $E_m$ :

$$Y_{br} = \begin{bmatrix} tt^*(y_{km} + jb_{km}) + y_k^{sh} & -t^*y_{km} \\ -ty_{km} & y_{km} + jb_{km} + y_m^{sh} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_k^{sh} & 0 \\ 0 & y_m^{sh} \end{bmatrix} \quad (71)$$

A equação da admitância de ramo (70), significa que para cada ramo  $i$ , tem-se 4 elementos da seguinte maneira:

$$Y_{br}^i = \begin{bmatrix} y_{kk}^i & y_{km}^i \\ y_{mk}^i & y_{mm}^i \end{bmatrix} \quad (72)$$

Se  $n_l$  e  $n_b$  são o número de ramos e de barras do sistema, respectivamente, então 4 vetores  $Y_{kk}$ ,  $Y_{km}$ ,  $Y_{mk}$  e  $Y_{mm}$ , de dimensão  $n_l \times 1$  podem ser construídos, de forma que o  $i$ -ésimo elemento de cada vetor, vem do correspondente elemento de  $Y_{br}^i$ . Além disso, as matrizes de conexão  $C_k$  e  $C_m$ , ambas de dimensão  $n_l \times n_b$ , são usadas para a construção da matriz de admitância nodal do sistema  $Y_{bus}$ . Estas matrizes,  $C_k$  e  $C_m$  são definidas de tal forma, que o elemento  $(i, q)$ ésimo de  $C_k$  e o  $(i, p)$ ésimo elemento de  $C_m$  são iguais a 1 para cada ramo  $i$ , se o ramo  $i$  conectar a barra  $q$  à barra  $p$ , todos os outros elementos de  $C_k$  e  $C_m$  são iguais a zero. Define-se ainda  $Y_k$  e  $Y_m$ , ambas de dimensão  $n_l \times n_b$ , de tal forma que:

$$I_k = Y_k V \quad (73)$$

$$I_m = Y_m V \quad (74)$$

Sendo que  $V$  é o vetor complexo  $n_b \times 1$  de tensões nodais. Finalmente, segue que:

$$Y_k = [Y_{kk}]C_k + [Y_{km}]C_k \quad (75)$$

$$Y_m = [Y_{mk}]C_k + [Y_{mm}]C_m \quad (76)$$

$$Y_{\text{bus}} = C_k^T Y_k + C_m^T Y_m + [Y^{sh}] \quad (77)$$

A matriz  $[X]$  significa uma matriz diagonal cuja diagonal principal é formada pelos elementos do vetor coluna  $X$ . Esta formulação vetorizada da matriz de admitância nodal, pode ser encontrada na referência [56]. Na Figura 3.6 apresenta-se um exemplo de matriz de admitância nodal, construída com algoritmos desenvolvidos neste trabalho, a partir de dados de um sistema elétrico real de 9899 barras, extraído do banco de dados do site *www.epe.gov.br* [57].

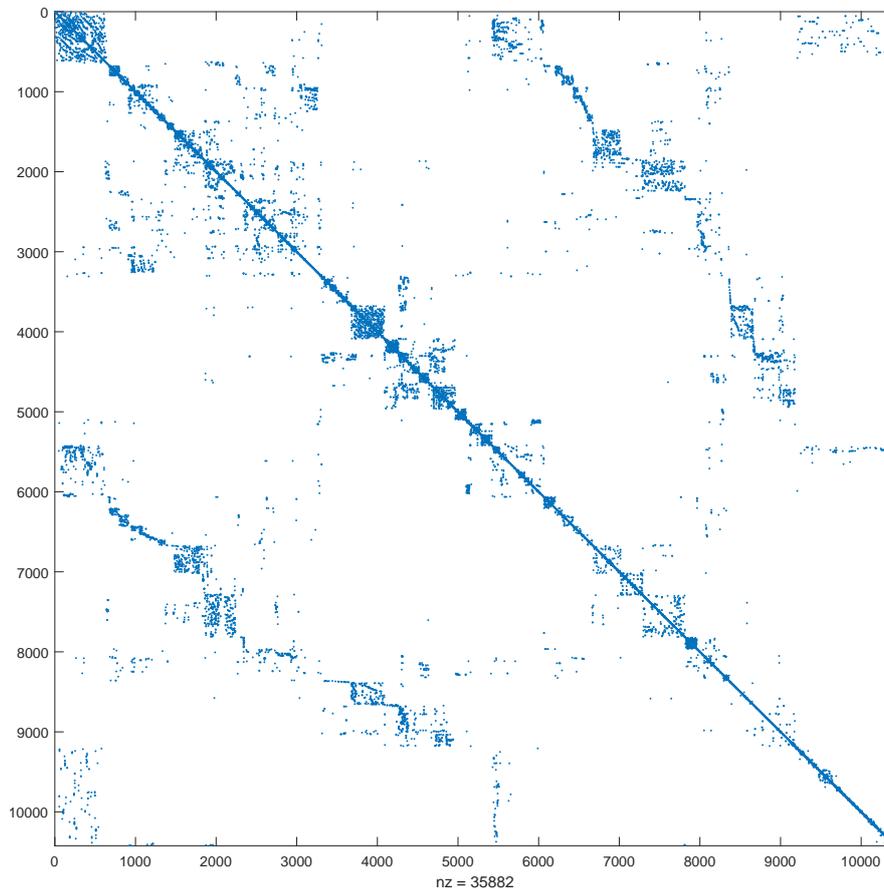


Figura 3.6: Matriz de admitância de um sistema do SIN de 9899 barras.

### 3.5 Modelagem das Barras

No desenvolvimento do modelo de fluxo de potência matricial em domínio complexo, precisa-se primeiramente encontrar as expressões matriciais do vetor de mismatches  $M \in \mathbb{C}^n$ , para um sistema de  $n$  barras. Para realizar essa tarefa, encontra-se as equações de mismatches pertinentes a cada tipo de barra, que definem os blocos matriciais constituintes do vetor de mismatches  $M$ :

▪ **Barras PQ:**

Nas barras PQ, a potência ativa  $P$  e a potência reativa  $Q$ , são especificadas. Portanto, a potência complexa nodal é especificada  $S_{esp}$ . Ressalta-se que todas as grandezas aqui retratadas, são grandezas vetoriais, por exemplo,  $P_{esp}$  é o vetor de dimensão  $n_{PQ} \times 1$ , onde  $n_{PQ}$  é o número de barras PQ, nas quais a potência ativa é especificada.

$$\begin{aligned} M_k &= S - S_{esp} \\ M_k &= [V](YV)^* - S_{esp} \end{aligned} \quad (78)$$

▪ **Barras PV:**

Nas barras PV, a potência ativa  $P$  e magnitude de tensão  $|V|$ , são especificadas:

$$\begin{aligned} M_{kg} &= S + S^* - 2P_{esp} \\ M_{kg} &= [V]Y^*V^* + [V^*]YV - 2P_{esp} \end{aligned} \quad (79)$$

A equação de  $M_{kg}$  traduz a especificação da potência ativa  $P$  nas barras PV. Sabendo que  $[V]$  é a matriz diagonal, composta pelos elementos do vetor de tensões  $V$ . Agora, a equação que traduz a especificação de magnitude de tensão  $|V|$ , é:

$$\begin{aligned} E_{kg} &= |V|^2 - |V|_{esp}^2 \\ E_{kg} &= [V]V^* - |V|_{esp}^2 \end{aligned} \quad (80)$$

Portanto, o vetor de mismatches complexo é organizado da seguinte maneira:

$$M = \begin{bmatrix} M_{kg} \\ M_k \\ E_{kg} \\ M_{kg}^* \end{bmatrix} \quad (81)$$

Retomando a expressão (22) das diferenciais complexas, pode-se reorganizá-la em blocos matriciais e usá-la para identificação da matriz jacobiana complexa:

$$dM = \frac{\partial M}{\partial V} dV + \frac{\partial M}{\partial V^*} dV^* \quad (82)$$

Traduzindo em blocos de matrizes:

$$dM = \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial V} & \frac{\partial M}{\partial V^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dV \\ dV^* \end{bmatrix} \quad (83)$$

Relembrando da expressão da diferencial de uma função escalar:

$$dM = J dV_{cv} \quad (84)$$

Sendo:

$$dV_{cv} = \begin{bmatrix} dV \\ dV^* \end{bmatrix} \quad (85)$$

Chama-se  $V_{cv}$  de vetor de estados em coordenadas complexas. Finalmente, comparando os termos de (83) e (84), identifica-se a jacobiana complexa e seus blocos:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial V} & \frac{\partial M}{\partial V^*} \end{bmatrix} \quad (86)$$

Resulta de (86), especificando os termos de  $M$ :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_{kg}}{\partial V} & \frac{\partial M_{kg}}{\partial V^*} \\ \frac{\partial M_k}{\partial V} & \frac{\partial M_k}{\partial V^*} \\ \frac{\partial E_{kg}}{\partial V} & \frac{\partial E_{kg}}{\partial V^*} \\ \frac{\partial M_{kg}^*}{\partial V} & \frac{\partial M_{kg}^*}{\partial V^*} \end{bmatrix} \quad (87)$$

### 3.6 Blocos de Derivadas da Jacobiana Complexa

Utilizando os conceitos e expressões do cálculo matricial complexo, deduz-se as expressões para as diferenciais que figuram na jacobina complexa (87):

$$\frac{\partial M_{kg}}{\partial V} = \frac{\partial ([V]Y^*V^* + [V^*]YV - 2P_{esp})}{\partial V} \quad (88)$$

$$\frac{\partial M_{kg}}{\partial V} = \frac{\partial ([Y^*V^*]V + [V^*]YV)}{\partial V} \quad (89)$$

$$\frac{\partial M_{kg}}{\partial V} = [Y^*V^*] + [V^*]Y \quad (90)$$

Procedendo de forma análoga para as outras diferenciais, chega-se:

$$\frac{\partial M_{kg}}{\partial V^*} = [V]Y^* + [YV] \quad (91)$$

$$\frac{\partial M_k}{\partial V} = [Y^*V^*] \quad (92)$$

$$\frac{\partial M_k}{\partial V^*} = [V]Y^* \quad (93)$$

$$\frac{\partial E_{kg}}{\partial V} = [V^*] \quad (94)$$

$$\frac{\partial E_{kg}}{\partial V^*} = [V] \quad (95)$$

$$\frac{\partial M_{kg}^*}{\partial V} = [V^*]Y \quad (96)$$

$$\frac{\partial M_{kg}^*}{\partial V^*} = [YV] \quad (97)$$

Para fins de organização, seja:

$$A = [Y^*V^*] \quad (98)$$

$$B = [V]Y^* \quad (99)$$

$$C = [V^*] \quad (100)$$

Então a estrutura simétrica da jacobiana complexa fica evidente:

$$J = \begin{bmatrix} A + B^* & A^* + B \\ A & B \\ C & C^* \\ B^* & A^* \end{bmatrix} \quad (101)$$

Seja  $n = n_{PV} + n_{PQ}$ , então:

$$J = \begin{bmatrix} n_{PV} \times n & n_{PV} \times n \\ n_{PQ} \times n & n_{PQ} \times n \\ n_{PV} \times n & n_{PV} \times n \\ n_{PQ} \times n & n_{PQ} \times n \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \quad (102)$$

Pode ser visto em (102) as dimensões das matrizes envolvidas e que a jacobiana complexa tem dimensão  $2n \times 2n$ . Para que se possa explorar e reduzir sua estrutura posteriormente, agrupa-se a matriz jacobiana em quatro blocos matriciais, a saber:

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (103)$$

Podendo verificar:

$$J_{11} = \begin{bmatrix} A + B^* \\ A \end{bmatrix} \quad (104)$$

$$J_{12} = \begin{bmatrix} A^* + B \\ B \end{bmatrix} \quad (105)$$

$$J_{21} = \begin{bmatrix} C \\ B^* \end{bmatrix} \quad (106)$$

$$J_{22} = \begin{bmatrix} C^* \\ A^* \end{bmatrix} \quad (107)$$

Nas Figuras 3.7 e 3.8, têm-se dois exemplos de jacobiana complexa, o primeiro é de um sistema real de 10423 barras da região norte. O segundo exemplo, é uma porção de um sistema elétrico da região sudeste do Brasil com 6518 barras. Os dados foram extraídos de [57].

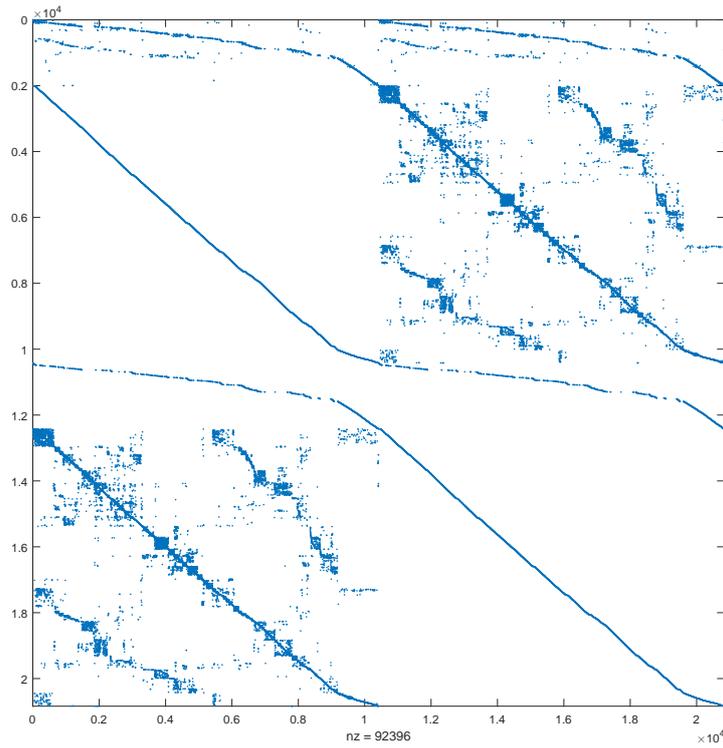


Figura 3.7: Jacobiana complexa de um sistema de 10423 barras.

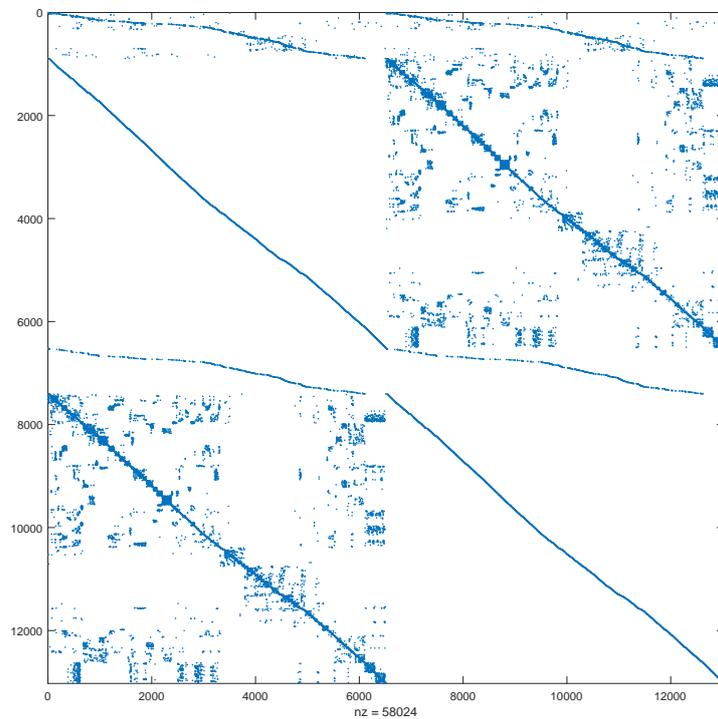


Figura 3.8: Jacobiana complexa de um sistema brasileiro de 6518 barras.

### 3.7 Redução do Sistema via Complemento de Schur

O complemento de Schur pode ser uma poderosa ferramenta na resolução de sistemas lineares, pois permite eliminar blocos matriciais e assim, reduzir a dimensão do sistema. Primeiramente, retoma-se a formulação do fluxo segundo *Wirtinger*:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta V^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (108)$$

Geralmente, as matrizes A e D são mal condicionadas, portanto usando o operador **swap** pré multiplicando a matriz jacobiana, tem-se:

$$S \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta V^* \end{bmatrix} = -S \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (109)$$

$$\begin{bmatrix} C & D \\ A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta V^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_2 \\ M_1 \end{bmatrix} \quad (110)$$

Das igualdades matriciais acima, decorre:

$$C\Delta V + D\Delta V^* = -M_2 \quad (111)$$

$$A\Delta V + B\Delta V^* = -M_1 \quad (112)$$

Multiplicando a equação (112), pela inversa da matriz B tem-se:

$$B^{-1}A\Delta V + B^{-1}B\Delta V^* = -B^{-1}M_1 \quad (113)$$

$$B^{-1}A\Delta V + \Delta V^* = -B^{-1}M_1 \quad (114)$$

$$\Delta V^* = -B^{-1}A\Delta V - B^{-1}M_1 \quad (115)$$

Substituindo  $\Delta V^*$  da equação (115), em (111), vem:

$$C\Delta V - DB^{-1}(A\Delta V + M_1) = -M_2 \quad (116)$$

$$(C - DB^{-1}A)\Delta V = DB^{-1}M_1 - M_2 \quad (117)$$

$$(J/B)\Delta V = DB^{-1}M_1 - M_2 \quad (118)$$

$$J_o\Delta V = M_o \quad (119)$$

A equação (119) resulta em um sistema linear reduzido. Tal redução acarreta um custo associado à inversão do bloco B. Contudo, este custo pode ser atenuado através da aplicação de uma fatoração incompleta, tal como a fatoração LU incompleta, na inversão do referido bloco. Este método reforça a eficácia da redução pelo complemento de Schur e a implementação de métodos iterativos.

### 3.8 Formulação do Modelo de Fluxo de Potência Exato

O cálculo de *Wirtinger* matricial pode ser usado para a série de Taylor em ordens superiores. No entanto, as equações envolvidas no fluxo de potência, são equações de natureza quadrática, significando que a expansão da série de Taylor até segunda ordem implica a forma exata das equações do fluxo de potência, conclusão a que chegou Iwamoto em [58]. Nesta tese, apresenta-se a formulação do fluxo exato, em domínio complexo, conforme feito em [59]. Entretanto, o desenvolvimento aqui, é feito de forma matricial, explorando as bases do cálculo de *Wirtinger* generalizado, apresentado em seções anteriores. A vantagem da formulação matricial, é que se tem uma base sólida para desenvolvimentos mais gerais, além de que as fórmulas herdam a natureza vetorizada, que são mais facilmente exploradas por arquiteturas computacionais paralelas. A seguir, recobra-se o vetor de mismatches da formulação complexa, apresentado na equação (81), e faz-se a dedução do fluxo exato para o bloco  $M_k$ , uma vez que, para o restante dos blocos, a demonstração é análoga. Retomando o passo para a identificação das diferenciais de primeira ordem e ordem superiores dado em (29):

$$f(\mathbf{Z} + d\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^* + d\mathbf{Z}^*) - f(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*) = 1^{\mathbf{a}} \text{Ordem}(d\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*) + \text{Ordem Superior}(d\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*)$$

Aplicando então ao bloco  $M_k$ :

$$\begin{aligned} M_k(V + dV, V^* + dV^*) - M_k(V, V^*) &= [V + dV]Y^*(V^* + dV^*) - S_{esp} - ([V]Y^*(V^*) - S_{esp}) \\ &= ([V] + [dV])Y^*(V^* + dV^*) - S_{esp} - ([V]Y^*(V^*) - S_{esp}) = \end{aligned} \quad (120)$$

$$= [V]Y^*V^* + [V]Y^*dV^* + [dV]Y^*V^* + [dV]Y^*dV^* - [V]Y^*V^* = \quad (121)$$

$$= [Y^*V^*]dV + [V]Y^*dV^* + [dV]Y^*dV^* \quad (122)$$

Fazendo o uso das equações (82) - (87) e da expansão da série de Taylor, identifica-se em (122), o que se segue:

$$M_k(V + dV, V^* + dV^*) - M_k(V, V^*) = [Y^*V^*]dV + [V]Y^*dV^* + [dV]Y^*dV^* = \quad (123)$$

$$M_k(V + \Delta V, V^* + \Delta V^*) \approx M_k(V_{cv}) + J\Delta V_{cv} + M_k(\Delta V_{cv}) + S_{esp} = 0 \quad (124)$$

$$M_k(V_{cv}) + J\Delta V_{cv} + M_k(\Delta V_{cv}) + S_{esp} = 0 \quad (125)$$

$$\Delta V_{cv} = -J^{-1} (M_k(V_{cv}) + M_k(\Delta V_{cv}) + S_{esp}) \quad (126)$$

$$\Delta V_{cv} = -J^{-1}M_e \quad (127)$$

Sabendo que  $\Delta V_{cv} = [\Delta V \ \Delta V^*]^T$ . A equação (127) fornece o vetor de correções para o fluxo de potência exato e pode ser alcançada, de modo análogo, para os outros blocos. Note que  $M_e$  é o mismatch exato e retém a não linearidade do problema, ou seja, a matriz Hessiana está contemplada nesta expressão, onde é necessário apenas atualizar o vetor de correções.

## 4 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE COMPLEXA

Nesta tese, é desenvolvida uma análise de sensibilidade nos ramos da rede utilizando matrizes de sensibilidade no plano complexo. Essa abordagem permite uma avaliação detalhada do impacto de variáveis específicas em diferentes partes da rede de distribuição, conforme é apresentado nos tópicos seguintes. Além disso, são fornecidas as principais referências que comprovam os ganhos obtidos ao utilizar o domínio dos números complexos.

A análise de sensibilidade desempenha um papel importante na compreensão das relações entre as variáveis de um sistema e suas respostas, permitindo uma avaliação aprofundada das influências das mudanças nas variáveis nas saídas do sistema. No contexto de sistemas de energia, a análise de sensibilidade ganha ainda mais relevância, pois pequenas variações em parâmetros e condições operacionais podem resultar em efeitos significativos na operação global da rede.

Uma abordagem avançada para análise de sensibilidade é aquela que opera no plano complexo, utilizando o cálculo de matrizes de *Wirtinger*. Esta metodologia explora a natureza complexa das grandezas elétricas, considerando as componentes real e imaginária das variáveis. O cálculo de matrizes de *Wirtinger* fornece um eficiente *framework* matemático para modelar e avaliar a sensibilidade de sistemas complexos.

Ao usar o conceito de diferenciais complexas, explorando suas propriedades e aplicando-as para modelar derivadas parciais complexas para entender a análise de sensibilidade no plano complexo, a teoria será aplicada a casos de referência extraídos do software MATPOWER [60].

Esta seção utiliza diferenciais complexas para formular a análise de sensibilidade no domínio complexo, utilizando os modelos de fluxo de potência desenvolvidos nas seções anteriores. Aqui, examina-se uma função objetivo complexa geral  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ . No entanto, na maioria dos casos práticos de análise de sensibilidade, a função objetivo toma a forma  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Considera-se uma variável complexa da seguinte forma:

$$Z = \begin{bmatrix} z_x \\ z_u \end{bmatrix} \quad (42)$$

A variável matricial complexa  $Z$  é dividida em variáveis complexas de estado  $z_x$  e variáveis de controle  $z_u$ . As variáveis de estado e controle estão relacionadas pelo modelo de fluxo de potência no plano complexo caracterizado pelas equações de *mismatches*  $M(Z, Z^*) = 0$ , que

podem ser sintetizadas pela seguinte equação matricial:

$$M(Z, Z^*) = \begin{bmatrix} M_{kg} \\ M_k \\ E_{kg} \\ M_{kg}^* \end{bmatrix} = 0 \quad (43)$$

Os componentes de (43) são dados pelas equações (79), (78), (80), e o conjugado da equação (79), respectivamente. A variação de primeira ordem do vetor de *mismatch*  $M(Z, Z^*)$  é escrita usando (33), como segue:

$$\delta M = \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial z_x} & \frac{\partial M}{\partial z_x^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta z_x \\ \delta z_x^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial z_u} & \frac{\partial M}{\partial z_u^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta z_u \\ \delta z_u^* \end{bmatrix} = 0 \quad (44)$$

Da mesma forma, encontra-se a variação de primeira ordem da função objetivo  $f(Z, Z^*)$ :

$$\delta f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_x} & \frac{\partial f}{\partial z_x^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta z_x \\ \delta z_x^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_u} & \frac{\partial f}{\partial z_u^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta z_u \\ \delta z_u^* \end{bmatrix} \quad (45)$$

Usando o conjugado complexo da equação (44), é possível escrever:

$$\begin{bmatrix} \delta z_x \\ \delta z_x^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial z_x} & \frac{\partial M}{\partial z_x^*} \\ \frac{\partial M^*}{\partial z_x} & \frac{\partial M^*}{\partial z_x^*} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial z_u} & \frac{\partial M}{\partial z_u^*} \\ \frac{\partial M^*}{\partial z_u} & \frac{\partial M^*}{\partial z_u^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta z_u \\ \delta z_u^* \end{bmatrix} \quad (46)$$

Sendo:

$$- \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial z_x} & \frac{\partial M}{\partial z_x^*} \\ \frac{\partial M^*}{\partial z_x} & \frac{\partial M^*}{\partial z_x^*} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial z_u} & \frac{\partial M}{\partial z_u^*} \\ \frac{\partial M^*}{\partial z_u} & \frac{\partial M^*}{\partial z_u^*} \end{bmatrix} \quad (128)$$

O termo (128) é chamado de **Matriz de Sensibilidade Complexa**. Usando a equação (46) em (45), obtém-se a diferencial da função objetivo  $\delta f$  em termos das variáveis de controle:

$$\delta f = \left( - \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_x} & \frac{\partial f}{\partial z_x^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial z_x} & \frac{\partial M}{\partial z_x^*} \\ \frac{\partial M^*}{\partial z_x} & \frac{\partial M^*}{\partial z_x^*} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial z_u} & \frac{\partial M}{\partial z_u^*} \\ \frac{\partial M^*}{\partial z_u} & \frac{\partial M^*}{\partial z_u^*} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_u} & \frac{\partial f}{\partial z_u^*} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \delta z_u \\ \delta z_u^* \end{bmatrix} \quad (129)$$

A partir da equação (129), pode-se estudar a variação da função objetivo em termos das variáveis de controle; no entanto, é possível empregar a equação (46) quando o foco principal

recai sobre a sensibilidade das variáveis de estado em relação às variáveis de controle.

## 4.1 Equações Ramais de Potência

Utilizando as equações de corrente apresentadas anteriormente, deriva-se as equações de potência de ramificação, onde  $S_k$  representa a potência fluindo do barramento  $k$  para o barramento  $m$ , e  $S_m$  representa a potência fluindo do barramento  $m$  para o barramento  $k$ .

$$I_k = [tt^*(y_{km} + jb_{km}) + y_k^{sh}]E_k + (-t^*y_{km})E_m \quad (67)$$

$$I_m = (-ty_{km})E_k + (y_{km} + jb_{km} + y_m^{sh})E_m \quad (68)$$

A partir das equações anteriores, deriva-se as equações de potência de ramificação  $S_k$  e  $S_m$ :

$$S_k = [tt^*(y_{km}^* - jb_{km}) + (y_k^{sh})^*]E_k^*E_k + (-ty_{km}^*)E_kE_m^* \quad (130)$$

$$S_m = (-t^*y_{km}^*)E_k^*E_m + (y_{km}^* - jb_{km} + (y_m^{sh})^*)E_mE_m^* \quad (131)$$

Tendo as equações (130) e (131), utilizando os conceitos de diferenciais complexos explicados inicialmente na subseção 2.5.1. Utilizando, como exemplo, a potência aparente de ramificação  $S_k$ , desenvolve-se a diferencial complexa como uma função das variáveis de ramificação da seguinte maneira:

$$dS_k(E_k, E_k^*, E_m, E_m^*, t, t^*) \quad (132)$$

Expandindo (132), têm-se:

$$dS_k = \frac{\partial dS_k}{\partial E_k}dE_k + \frac{\partial dS_k}{\partial E_k^*}dE_k^* + \frac{\partial dS_k}{\partial E_m}dE_m + \frac{\partial dS_k}{\partial E_m^*}dE_m^* + \frac{\partial dS_k}{\partial t}dt + \frac{\partial dS_k}{\partial t^*}dt^* \quad (133)$$

Todas as variáveis que aparecem na equação (133),  $S_k$ ,  $E_k$ ,  $E_k^*$ ,  $E_m$ ,  $E_m^*$ ,  $t$  e  $t^*$ , são vetores de dimensão  $n_l \times 1$ , onde  $n_l$  é o número de ramos no sistema. Para encontrar a matriz de sensibilidade das variáveis de estado em relação a outros parâmetros de controle da equação de ramificação, reescreve-se o diferencial (133) na forma de um sistema adjunto, como na equação (46).

## 4.2 Desempenho no Domínio Complexo

A importância do Desempenho no Domínio Complexo é notável não apenas pela relevância dos artigos apresentados, que corroboram a essencialidade desse tema, mas também pela maneira como destacam pontos específicos já validados por uma gama de estudos anteriores apresentados no decorrer do trabalho e principalmente expostos nesta seção.

Ao evidenciar a necessidade de uma abordagem diferenciada para lidar com problemas complexos, esses artigos fortalecem ainda mais a contribuição fundamental desta tese de doutorado. Ao reunir e analisar as descobertas desses trabalhos, esta pesquisa oferece uma perspectiva ampla e aprofundada sobre o tema, proporcionando novas informações e contribuindo significativamente para o avanço do conhecimento e das práticas em diversas áreas de estudo relacionadas ao domínio complexo.

### 4.2.1 Performance e Simplicidade na Implementação

O artigo [4] menciona que a implementação complexa é mais adequada para processadores modernos que usam extensões de processador SIMD (*Single Instruction, Multiple Data*), como as instruções SIMD resultam em uma formulação de variável complexa que é mais rápida do que a formulação clássica de Newton-Raphson em variáveis reais. Isso ocorre porque as instruções SIMD podem processar múltiplos dados em paralelo, aproveitando melhor os recursos do processador.

Além disso, a implementação complexa tem a vantagem adicional de uma implementação de software mais simples. Isso significa que, embora a formulação de variável complexa possa ser mais complexa conceitualmente, sua implementação prática é mais direta e requer menos linhas de código, o que pode resultar em um código mais limpo, fácil de entender e manter.

Essa abordagem oferece uma combinação de desempenho e simplicidade na implementação, o que é crucial para lidar com redes de distribuição de grande escala, como as mencionadas no artigo, com até 3139 nós. Isso permite que os pesquisadores e engenheiros aproveitem ao máximo as capacidades dos processadores modernos para resolver problemas de fluxo de potência de forma eficiente e rápida.

### 4.2.2 Confiabilidade e Manutenção do Código

O artigo [5] propõe um método de alto desempenho para Estimação de Estado de Sistemas de Distribuição (DSSE) que pode lidar com medidores de fase PMUs (*Phasor Measurement Units*) juntamente com outros tipos de medições comuns em DSSE industrial. Utilizando o cálculo de *Wirtinger*, o método opera inteiramente em variáveis complexas.

O destaque do artigo é a derivação do DSSE complexo na forma de matriz, o que tem implicações significativas na confiabilidade e manutenção do código. Ao operar em variáveis complexas e utilizar o cálculo de *Wirtinger*, o método oferece uma abordagem eficiente para lidar com sistemas de distribuição multifásicos em grande escala.

Os resultados numéricos apresentados no artigo, em comparação com um código disponível publicamente para DSSE em variáveis reais, mostram que o desdobramento de loop em *Advanced Vector Extensions 2* (AVX-2) contribui com aproximadamente um aumento de duas vezes na velocidade de resolução. Isso destaca a importância da otimização de código e do aproveitamento de recursos de hardware modernos, como as instruções de vetorização AVX-2, para melhorar o desempenho de algoritmos computacionais, especialmente em problemas de grande escala como a estimação de estado em sistemas de distribuição de energia elétrica.

### 4.2.3 Precisão e Aplicações em Tempo Real

Na referência [6], é apresentado um exemplo de aplicação em tempo real da estimação de estados no plano complexo. O artigo destaca que pesquisas recentes têm demonstrado que a abordagem das equações normais em variáveis complexas é vantajosa computacionalmente, especialmente na presença de valores de medição fasoriais. Além disso, a implementação de software dessa abordagem é mais adequada para processadores modernos que empregam extensões de processador SIMD.

O artigo utiliza o cálculo de *Wirtinger* para estender a abordagem das equações normais complexas e incluir restrições de igualdade. Ele contrasta essa abordagem com duas implementações anteriormente publicadas: a abordagem das equações normais em variáveis complexas e o estimador de estado híbrido com restrições de igualdade em variáveis reais.

Resultados numéricos são relatados para redes de transmissão com até 9241 nós. Esses resultados demonstram que o estimador de estado híbrido complexo com restrições de igualdade apresenta um desempenho superior em comparação com as duas técnicas mencionadas, tanto

em termos de tempo computacional quanto de precisão. Além disso, o tempo de execução na maior rede é inferior a 300 ms, tornando a implementação proposta compatível com os requisitos de aplicações em tempo real. Isso destaca a eficácia e a viabilidade dessa abordagem para aplicações práticas em sistemas de energia elétrica.

#### 4.2.4 Desempenho Comparado a Métodos Tradicionais

No trabalho [8], os autores exploram o uso do cálculo de *Wirtinger* para apresentar uma nova implementação do problema de estimação de estado *Weighted Least Squares* (WLS) em variáveis complexas. Ao empregar as derivadas parciais fornecidas pelo método de *Wirtinger*, o método resulta em uma estrutura muito simples de implementar.

Uma das vantagens notáveis desse método é sua capacidade de lidar facilmente com medições legadas e fasoriais. Especificamente, o processamento de medições de corrente fasorial não requer nenhuma disposição especial, ao contrário das implementações anteriores de estimadores de estado híbridos baseados no domínio real.

Resultados numéricos são apresentados para redes com até 9241 nós, demonstrando que a precisão da implementação de variável complexa é competitiva com a do estimador de estado híbrido de variável real, enquanto oferece uma significativa melhoria na velocidade de processamento. Isso destaca a eficácia e a viabilidade do uso de variáveis complexas e do cálculo de *Wirtinger* para problemas de estimação de estado em sistemas de distribuição de energia elétrica de grande escala.

## 5 RESULTADOS

Os sistemas com 14, 57, 300, 1354 e 2869 barras representam redes de transmissão de pequeno, médio e grande porte e são amplamente utilizados como *benchmarks* em estudos relacionados à sensibilidade, otimização, análise de estabilidade e planejamento de sistemas elétricos. Neste capítulo é apresentada uma síntese dos resultados obtidos a partir da análise de sensibilidade ramal desses sistemas, realizada no domínio complexo.

A análise de sensibilidade é crucial para uma compreensão aprofundada das interações entre as variáveis e componentes do sistema, bem como para avaliar o impacto de pequenas alterações na operação global. A metodologia empregada consistiu em variar a relação de transformação do tap de cada transformador presente nos ramos da rede em 1%, seguida pela análise da variação percentual do módulo da injeção de potência aparente  $S_k$ , que representa a potência aparente injetada da barra  $k$  para a barra  $m$  no ramo  $k - m$ .

As figuras seguintes exibem os gráficos da topologia da rede, ilustrando todos os ramos do sistema. A barra lateral de intensidade representa a magnitude das sensibilidades mapeadas, desde variações percentuais no módulo da potência aparente próximas a 0% (indicadas por cores escuras) a variações de até 25% (indicadas por cores vermelhas), representando os ramos nos quais as variações dos taps acarretaram variações mais intensas no módulo da potência aparente. Em conjunto com as figuras, apresenta-se tabelas contendo os resultados da análise para 10 ramos de cada caso analisado.

## 5.1 Análise de Sensibilidade do Caso IEEE de 14 Barras

A Figura 5.1 mostra o grafo da topologia de conexão do caso IEEE de 14 barras. A base de dados para este caso foi extraída do software **MATPOWER** [56]. Inclui-se, a título de exemplo, a seguir, a matriz sparsa da derivada matricial.  $\frac{\partial dS_k}{\partial E_k}$  que figura na equação (133).

(1, 1)	1.480 00−0.192 49 <i>i</i>
(2, 2)	0.712 36+0.036 37 <i>i</i>
(3, 3)	0.695 23+0.094 81 <i>i</i>
(4, 4)	0.536 40+0.031 87 <i>i</i>
(5, 5)	0.394 81+0.045 67 <i>i</i>
(6, 6)	−0.234 64−0.007 59 <i>i</i>
(7, 7)	−0.619 09+0.045 39 <i>i</i>
(8, 8)	0.288 44−0.044 21 <i>i</i>
(9, 9)	0.156 21+0.024 15 <i>i</i>
(10, 10)	0.408 71+0.186 85 <i>i</i>
(11, 11)	0.058 44+0.049 14 <i>i</i>
(12, 12)	0.064 79+0.040 56 <i>i</i>
(13, 13)	0.144 22+0.106 12 <i>i</i>
(14, 14)	0.037 36−0.157 31 <i>i</i>
(15, 15)	0.244 74+0.114 07 <i>i</i>
(16, 16)	0.037 53+0.051 37 <i>i</i>
(17, 17)	0.077 44+0.056 04 <i>i</i>
(18, 18)	−0.030 77−0.024 22 <i>i</i>
(19, 19)	0.012 91+0.010 88 <i>i</i>
(20, 20)	0.047 51+0.030 10 <i>i</i>

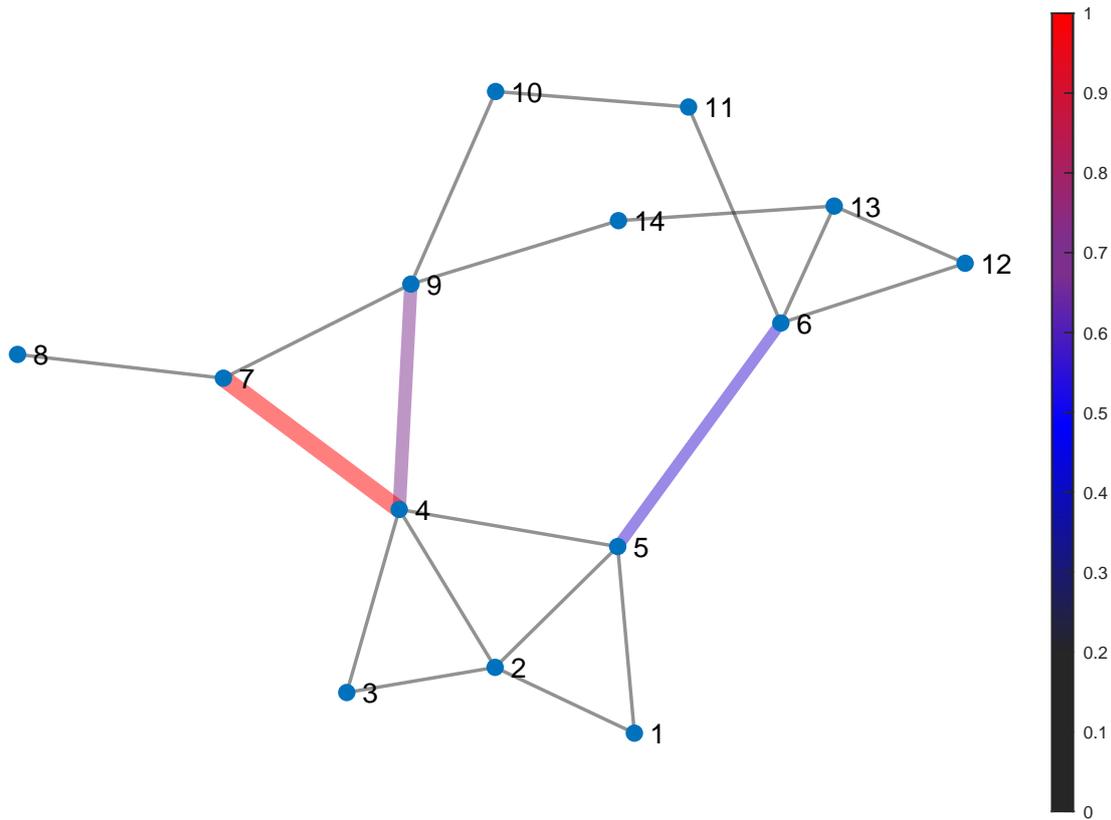


Figura 5.1: Grafo da topologia do caso IEEE de 14 barras.

Tabela 1: Ramos selecionados no caso IEEE de 14 Barras.

Ramo k - m	Barra k	Barra m	$P_k$ (MW)	$Q_k$ (MVA <sub>r</sub> )	$\Delta  S_k $ %
8	4	7	28.07	-9.68	16.39
9	4	9	16.08	-0.43	11.58
10	5	6	44.08	12.47	9.27

A Tabela 1 fornece um resumo dos resultados obtidos na análise de sensibilidade do sistema de 14 barras. Seguem alguns destaques dos resultados mais relevantes:

1. **Ramos Menos Sensíveis:** Dos 3 ramos apresentados, o ramo 10 mostrou ser o menos sensível a variações nas razões de transformação de tap, com variações percentuais na magnitude da potência aparente de 9.27%.
2. **Ramos Mais Sensíveis:** Dos 3 ramos apresentados, os ramos 8 e 9 mostraram ser os mais sensíveis a variações nas razões de transformação de tap, com variações percentuais na magnitude da potência aparente de 16.39% e 11.58%, respectivamente.

No caso do sistema IEEE de 14 barras, existem apenas três ramos que contêm transformadores com taps, identificados especificamente como ramos 8, 9 e 10.

## 5.2 Análise de Sensibilidade do Caso IEEE de 57 Barras

A Figura 5.2 mostra o grafo da topologia de conexão do caso IEEE de 57 barras. A base de dados para este caso foi extraída do software MATPOWER [56].

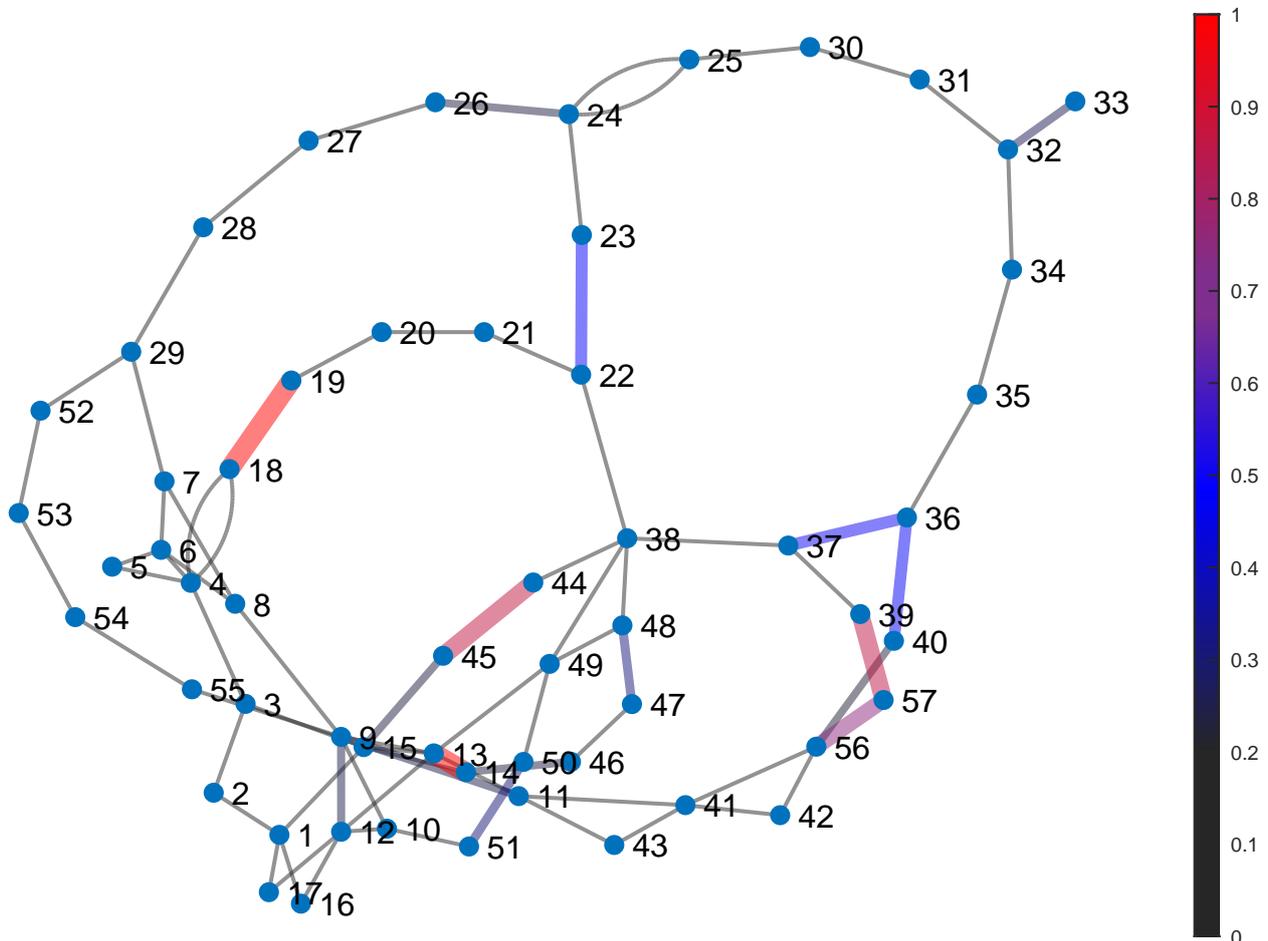


Figura 5.2: Grafo da topologia do caso IEEE de 57 barras.

Tabela 2: Ramos selecionados no caso IEEE de 57 Barras.

Ramo k - m	Barra k	Barra m	$P_k$ (MW)	$Q_k$ (MVA <sub>r</sub> )	$\Delta  S_k $ %
19	4	18	13.96	2.44	12.42
20	4	18	17.87	1.19	12.59
35	24	25	7.06	1.71	11.89
36	24	25	6.79	1.65	11.89
41	7	29	60.09	13.03	24.52
46	34	32	7.46	3.78	12.00
54	11	41	9.18	3.53	13.22
66	13	49	32.42	33.80	11.30
73	40	56	3.45	4.07	15.53
76	39	57	3.85	2.92	15.34

A Tabela 2 fornece um resumo dos resultados obtidos na análise de sensibilidade do sistema

de 57 barras. Seguem alguns destaques dos resultados mais relevantes:

1. **Ramos Menos Sensíveis:** Dos 10 ramos apresentados, o ramo 66 mostrou ser o menos sensível a variações do tap, com variações percentuais na magnitude da potência aparente de 11.30%.
2. **Ramos Mais Sensíveis:** Dos 10 ramos apresentados, o ramo 41 se mostrou o mais sensível a variação do tap, com variação percentual na magnitude da potência aparente de 24.52%.

No caso do sistema IEEE de 57 barras foram escolhidos 10 ramos entre os mais sensíveis da rede.

### 5.3 Análise de Sensibilidade do Caso IEEE de 300 Barras

A Figura 5.3 mostra o grafo da topologia de conexão do caso IEEE de 300 barras. A base de dados para este caso foi extraída do software **MATPOWER** [56].

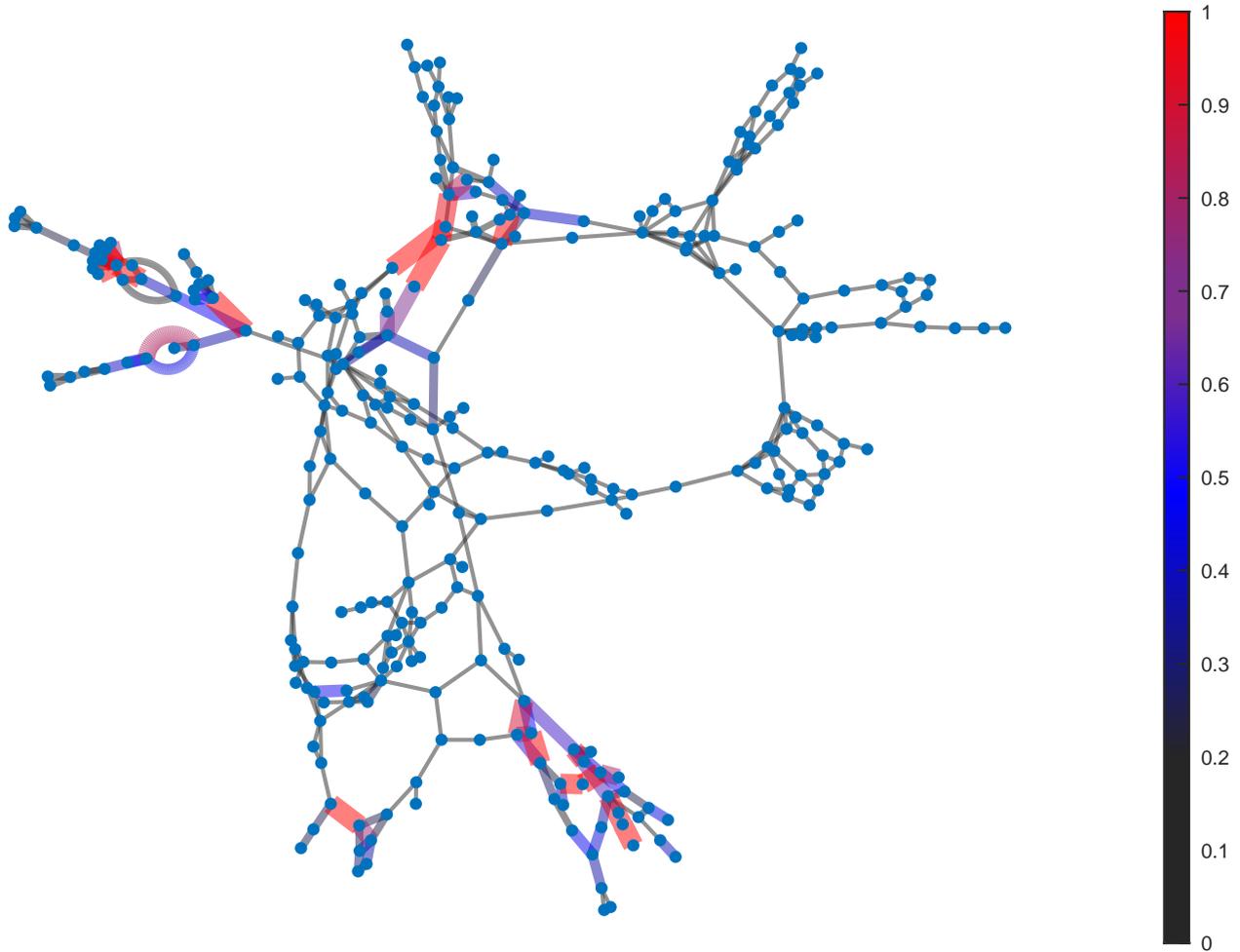


Figura 5.3: Grafo da topologia do caso IEEE de 300 barras.

Tabela 3: Ramos selecionados no caso IEEE de 300 Barras.

Ramo k - m	Barra k	Barra m	$P_k$ (MW)	$Q_k$ (MVA <sub>r</sub> )	$\Delta  S_k $ %
3	266	271	26.43	10.36	8.67
4	266	273	16.99	4.79	9.27
5	270	292	36.04	-6.83	7.36
6	270	293	30.23	28.59	7.21
7	270	294	27.92	-7.37	9.14
8	270	295	-50.00	-17.47	12.39
9	270	296	-8.00	-3.43	14.30
24	268	280	1.96	0.86	8.48
25	268	281	1.47	0.61	8.69
26	268	282	2.01	0.89	8.19

A Tabela 3 fornece um resumo dos resultados obtidos na análise de sensibilidade do sistema de 300 barras. Seguem alguns destaques dos resultados mais relevantes:

1. **Ramos Menos Sensíveis:** Dos 10 ramos apresentados, o ramo 6 se mostrou o menos sensível a variações do tap, com variação percentual na magnitude da potência aparente de 7.21%.
2. **Ramos Mais Sensíveis:** Dos 10 ramos apresentados, o ramo 9 se mostrou o mais sensível a variações do tap, com variação percentual na magnitude da potência aparente de 14.30%.

No caso do sistema IEEE de 300 barras foram escolhidos 10 ramos entre os mais sensíveis da rede.

## 5.4 Análise de Sensibilidade do Caso IEEE de 1354 Barras

A Figura 5.4, mostra o grafo da topologia de ligações do sistema de 1354 barras representando uma porção de uma rede europeia de transmissão de grande porte. A base de dados para este caso foi extraída do software **MATPOWER** [56].

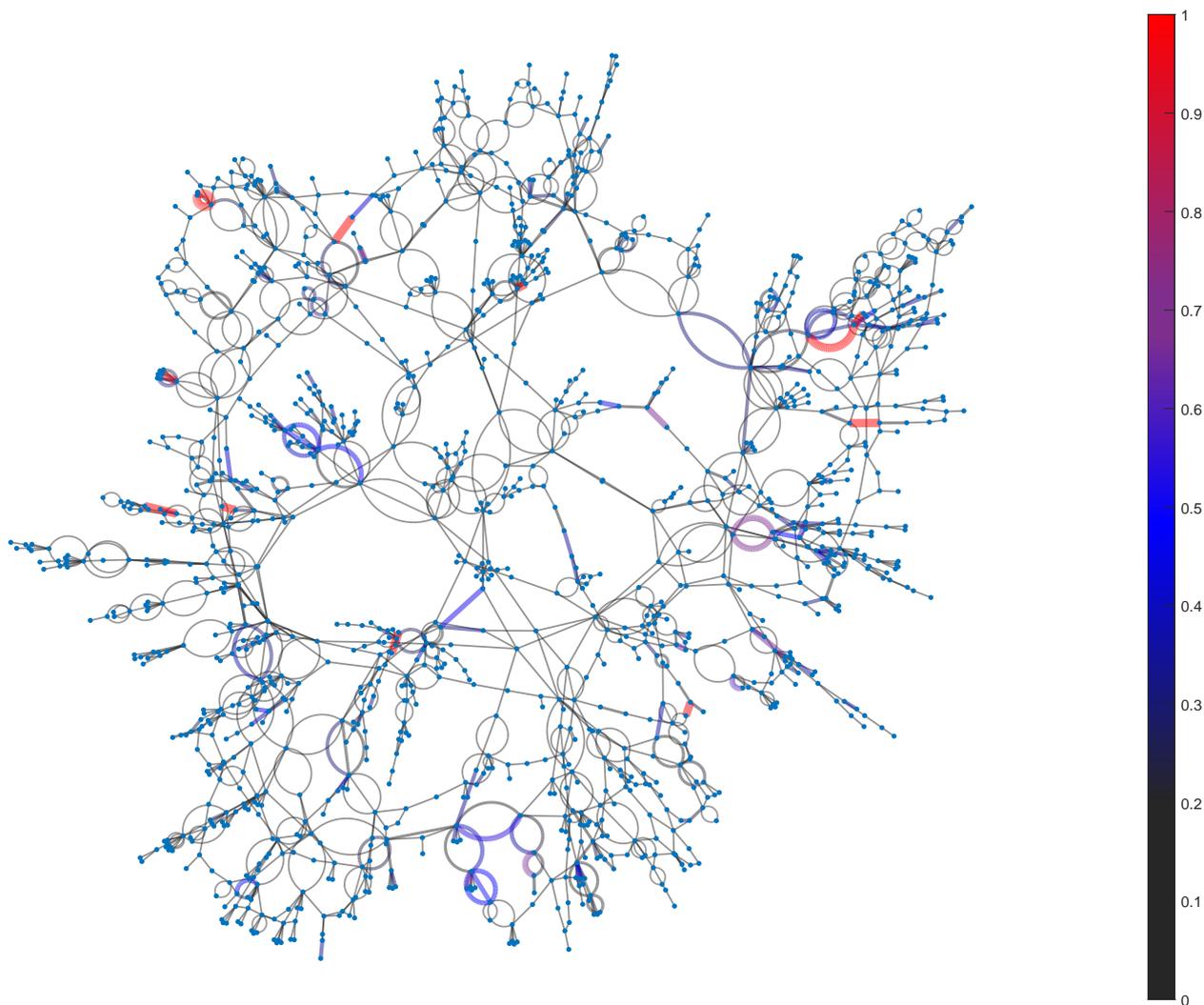


Figura 5.4: Grafo da topologia do sistema europeu de 1354 barras.

Tabela 4: Ramos selecionados no caso IEEE de 1354 Barras.

Ramo k - m	Barra k	Barra m	$P_k$ (MW)	$Q_k$ (MVA <sub>r</sub> )	$\Delta  S_k $ %
1762	511	1058	403.67	115.65	9.66
1776	784	347	292.43	-3.71	11.00
1777	746	887	302.99	82.03	12.95
1778	746	1286	358.05	99.60	10.81
1789	530	47	426.15	-29.42	8.19
1840	255	582	424.00	137.10	7.89
1881	1350	904	252.44	50.23	16.42
1904	1004	725	566.43	41.52	6.77
1933	1168	971	602.48	281.08	6.65
1950	54	1283	-838.90	-54.11	10.13

A Tabela 4 apresenta um sumário dos resultados obtidos na análise de sensibilidade do sistema de 1354 barras. A seguir, destaca-se alguns dos resultados mais relevantes:

- **Ramos Menos Sensíveis:** Dos 10 ramos apresentados, os ramos 1933 e 1904 demonstraram ser os menos sensíveis às variações nas relações de transformação dos taps, com variações percentuais no módulo da potência aparente de 6.65% e 6.77%, respectivamente.
- **Ramos Mais Sensíveis:** Dos 10 ramos apresentados, os ramos 1777 e 1881 demonstraram ser os mais sensíveis às variações nas relações de transformação dos taps, com variações percentuais no módulo da potência aparente de 12.95% e 16.42%, respectivamente.

Os 10 ramos apresentados foram escolhidos por estarem entre os ramos mais sensíveis da rede.

## 5.5 Análise de Sensibilidade do Caso IEEE de 2869 Barras

A Figura 5.5, mostra o grafo da topologia de ligações do sistema de 2869 barras representando uma porção de uma rede europeia de transmissão de grande porte. A base de dados para este caso foi extraída do software **MATPOWER** [56].

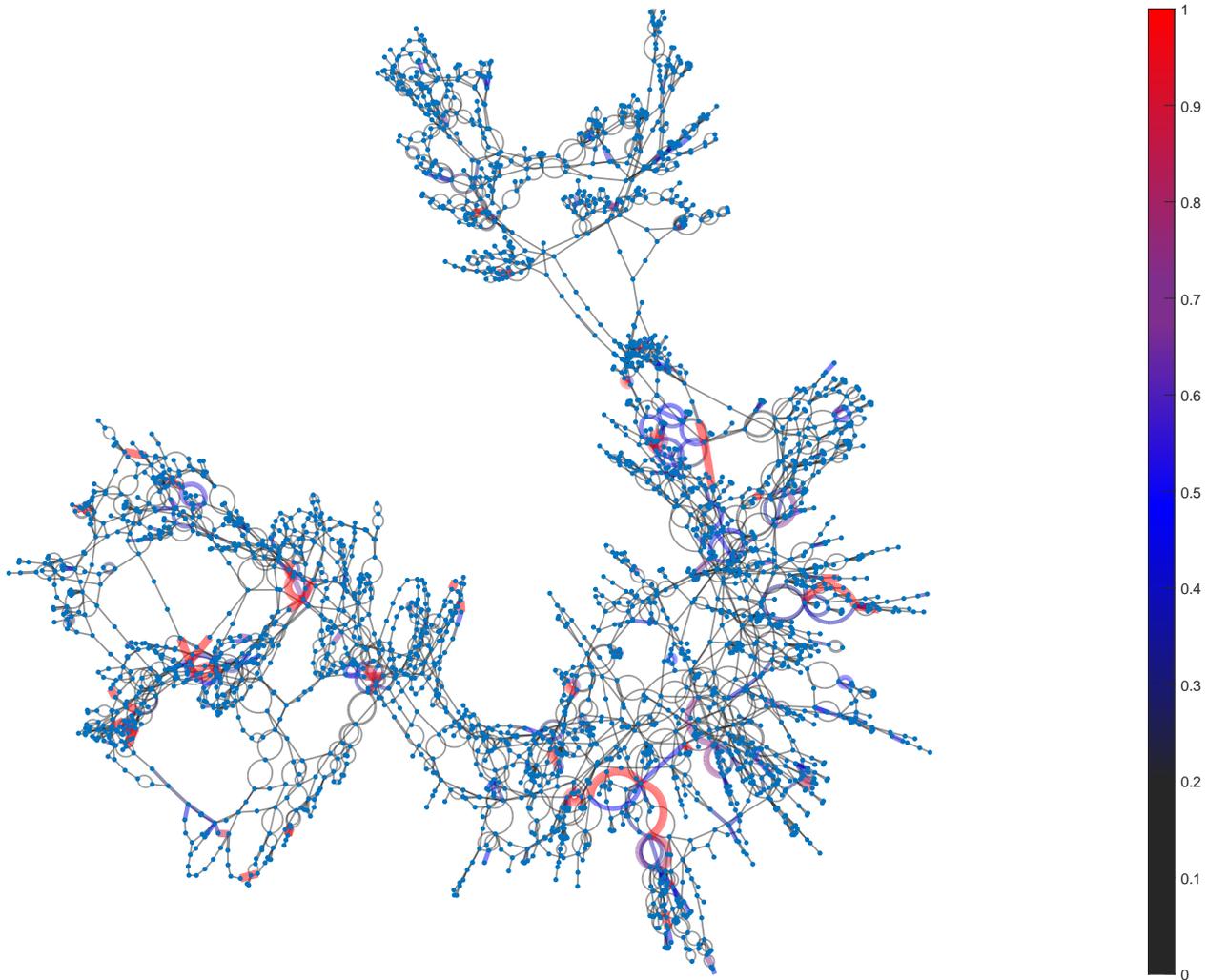


Figura 5.5: Grafo da topologia do sistema europeu de 2869 barras.

Tabela 5: Ramos selecionados no caso IEEE de 2869 barras.

Ramo k - m	Barra k	Barra m	$P_k$ (MW)	$Q_k$ (MVA <sub>r</sub> )	$\Delta  S_k $ %
4055	2648	718	357.78	151.25	6.98
4056	2648	1722	276.41	52.45	8.12
4068	2108	2777	274.16	162.59	7.41
4069	1144	1010	482.02	263.75	4.47
4070	2521	1378	269.93	116.97	6.80
4071	2803	2337	324.60	94.70	6.13
4072	709	1602	378.91	106.31	11.39
4474	2548	1888	537.17	318.30	4.67
4078	2519	2248	376.40	112.29	5.78
4516	568	316	382.47	-61.99	6.45

A Tabela 5 apresenta um sumário dos resultados obtidos na análise de sensibilidade do sistema de 2869 barras. A seguir, destaca-se alguns dos resultados mais relevantes:

- **Ramos Menos Sensíveis:** Dos 10 ramos apresentados, os ramos 4069 e 4474 demonstraram ser os menos sensíveis às variações nas relações de transformação dos taps, com variações percentuais no módulo da potência aparente de 4.47% e 4.67%, respectivamente.
- **Ramos Mais Sensíveis:** Dos 10 ramos apresentados, os ramos 4056 e 4072 demonstraram ser os mais sensíveis às variações nas relações de transformação dos taps, com variações percentuais no módulo da potência aparente de 8.12% e 11.39%, respectivamente.

Os 10 ramos apresentados foram escolhidos por estarem entre os ramos mais sensíveis da rede.

## 6 CONCLUSÃO

A abordagem da análise de sensibilidade ramal no plano complexo representa um avanço significativo na compreensão e no aprimoramento dos sistemas elétricos. Esta metodologia oferece uma plataforma rica para a exploração e o mapeamento de características locais e globais da rede elétrica, tratando as equações de ramos do sistema em seu ambiente natural, que é o domínio dos números complexos.

A utilização do cálculo diferencial matricial no domínio complexo abre novas perspectivas para uma ampla gama de estudos relacionados à sensibilidade, otimização, análise de estabilidade e planejamento de sistemas elétricos. Essa abordagem proporciona um *framework* robusto para a resolução de problemas envolvendo sistemas elétricos de todos os portes. Sendo desenvolvida a análise de sensibilidade considerando as equações de potência de ramo, com foco na seleção de *taps* e tensões das barras como variáveis do problema.

Diversos trabalhos comprovam ganho no processamento computacional para sistemas elétricos modelados no plano dos números complexos. A modelagem adotada neste trabalho consistiu na modificação do tap dos transformadores elétricos em uma variedade de sistemas, especificamente os modelos do MATPOWER que abrangem configurações de 14, 57, 300, 1354 e 2869 barras. A análise começou com um sistema de menor escala, contendo apenas 14 barras e 3 transformadores com taps variáveis, servindo como um caso ilustrativo da metodologia implementada. Progressivamente, a pesquisa se estendeu para sistemas maiores, selecionando os taps mais significativos em cada caso. Os resultados das simulações foram robustos.

Para uma variação percentual de 1% no tap dos transformadores, observou-se variações correspondentes no módulo da injeção de potência aparente. Especificamente, no sistema de 14 barras, as variações na magnitude da potência aparente estiveram entre 9,27% e 16,39%. No sistema IEEE de 57 barras, estas oscilaram entre 11,30% e 24,52%, enquanto que para o sistema de 300 barras, os valores variaram de 7,21% a 14,30%. Nos sistemas de grande porte, como o IEEE de 1354 barras e o de 2869 barras, as variações foram de 6,65% a 16,42% e de 4,47% a 11,39%, respectivamente.

Estes resultados indicam uma tendência importante: à medida que aumenta o número de taps no sistema, a variação percentual na magnitude da potência aparente diminui. Isso sugere que sistemas maiores apresentam maior inércia. Montrando que o modelo desenvolvido é capaz de oferecer informações valiosas para a operação e o planejamento de redes elétricas.

Os sistemas escolhidos para este estudo foram bem condicionados para a validação do modelo, com um foco específico na variação do tap do transformador, o que proporcionou uma base sólida para testar a metodologia proposta.

Portanto, esta pesquisa contribui para a crescente base de conhecimento no campo da engenharia elétrica, oferecendo uma abordagem eficaz e abrangente para a análise de sensibilidade de sistemas elétricos. As descobertas e metodologias desenvolvidas nesta tese têm o potencial de informar e melhorar significativamente o planejamento e a operação de redes elétricas em todo o mundo, promovendo a eficiência, a estabilidade e a confiabilidade desses sistemas.

## 7 TRABALHOS FUTUROS

São grandes as possibilidades de pesquisa dentro deste campo de atuação. Devido ao cálculo matricial generalizado de *Wirtinger*, existe inúmeros aspectos dos algoritmos iterativos e da formulação complexa, que podem ser explorados, como simetrias, redução de ordem, estrutura de blocos que podem ser exploradas via processamento paralelo, condicionamento por blocos matriciais e etc. Além disso, um tratamento generalizado e sistematizado pelo cálculo de *Wirtinger* permite incorporar modelos de equipamentos mais complexos de forma ramal, como os modelos de **FACTS** (*Flexible AC Transmission Systems*) em geral, incorporando na análise todas as características intrínsecas da rede, globais e locais. Podendo aplicar a abordagem de sensibilidade ramal para mapear centros de inércia em sistemas distribuídos, estudos envolvendo despacho ótimo, ou outros estudos de grande importância para os sistemas elétricos. A seguir, são destacadas algumas das áreas promissoras que merecem atenção.

### 7.1 Exploração de Simetrias e Redução de Ordem

Um caminho promissor para pesquisas futuras é a exploração das simetrias presentes nas equações de potência complexa. A identificação e utilização eficiente dessas simetrias podem levar ao desenvolvimento de algoritmos mais eficazes para análise de sistemas elétricos. Além disso, a redução de ordem de modelos complexos pode simplificar significativamente o processo de análise, tornando-o mais rápido e computacionalmente eficiente [61–63].

### 7.2 Estruturas de Blocos e Processamento Paralelo

A formulação complexa das equações de potência permite a investigação de estruturas de blocos nas matrizes de sensibilidade. Essa estrutura pode ser explorada para o desenvolvimento de técnicas de processamento paralelo, acelerando ainda mais os cálculos em sistemas elétricos de grande escala. O uso eficaz de processamento paralelo é fundamental para lidar com a crescente complexidade das redes elétricas modernas [64–72].

### 7.3 Precondicionamento por Blocos Matriciais

O condicionamento desempenha um papel crucial na convergência e eficiência dos algoritmos iterativos. A aplicação de condicionadores por blocos matriciais específicos para

sistemas elétricos complexos pode melhorar significativamente o desempenho dos métodos de análise de sensibilidade. Pesquisas futuras podem se concentrar no desenvolvimento e na avaliação desses condicionadores [73–76].

## 7.4 Incorporação de Modelos de FACTS

Uma extensão natural da pesquisa é a incorporação de modelos de equipamentos mais complexos no contexto da análise de sensibilidade ramal. Os dispositivos FACTS, por exemplo, representam componentes críticos nas redes elétricas modernas. A aplicação do cálculo de *Wirtinger* a modelos FACTS permite considerar todas as características intrincadas da rede, tanto globais quanto locais, abrindo oportunidades para análises mais abrangentes e precisas [1, 77, 78].

## 7.5 Aplicações Específicas

Além disso, a abordagem de sensibilidade ramal pode ser aplicada em sistemas elétricos distribuídos. Outras áreas de pesquisa promissoras incluem estudos de despacho ótimo, análise de impacto de geração distribuída e integração de fontes renováveis [79–87]. As possibilidades de pesquisa neste campo são amplas oferecem a oportunidade de contribuir significativamente para o avanço da análise e operação de sistemas elétricos. Os desafios complexos enfrentados nas redes elétricas modernas exigem abordagens inovadoras e interdisciplinares [43, 88, 89].

## 7.6 Publicação

R. Bragança, A. Soares and R. Pires, “Complex-Valued Sensitivity Analysis Tool Aimed to Power Flow Optimization,” *International Journal of Emerging Electric Power Systems*, IJE-EPS.2023.0459.R1 - Decision Accept (17-May-2024).

## Referências

- [1] R. C. Pires, “Complex-valued steady-state models as applied to power flow analysis and power system state estimation,” Tese (Trabalho apresentado como requisito para Progressão Funcional na Carreira de Magistério Superior), GESis / ISEE - Universidade Federal de Itajubá, fev 2018, disponível em: <https://repositorio.unifei.edu.br/jspui/handle/123456789/1359>.
- [2] R. Pires, L. Mili, and G. Chagas, “Robust complex-valued levenberg-marquardt algorithm as applied to power flow analysis,” *International Journal of Electrical Power Energy Systems*, vol. 113, pp. 383–392, 2019, disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142061518336342>.
- [3] A. S. d. Silva, “Solução do problema de fluxo de potência no plano complexo via métodos de gradientes conjugados,” Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Itajubá, fev 2022, disponível em: <https://repositorio.unifei.edu.br/jspui/handle/123456789/3487>.
- [4] I. Džafić, R. A. Jabr, and T. Hrnjić, “High performance distribution network power flow using wirtinger calculus,” *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 10, no. 3, pp. 3311–3319, 2018.
- [5] —, “Complex variable multi-phase distribution system state estimation using vectorized code,” *Journal of Modern Power Systems and Clean Energy*, vol. 8, no. 4, pp. 679–688, 2020.
- [6] I. Džafić and R. A. Jabr, “Real-time equality-constrained hybrid state estimation in complex variables,” *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 117, p. 105634, 2020.
- [7] E. M. Resende, R. Pires, and L. Mili, “Complex-valued projection statistics for hybrid power system state estimation,” *IEEE Transactions on Power Systems*, 2024.
- [8] I. Džafić, R. A. Jabr, and T. Hrnjić, “Hybrid state estimation in complex variables,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 33, no. 5, pp. 5288–5296, 2018.
- [9] J. R. Magnus and H. Neudecker, *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. John Wiley & Sons, 2019.

- [10] A. Hjørungnes, *Complex-valued matrix derivatives: with applications in signal processing and communications*. Cambridge University Press, 2011.
- [11] A. Saltelli, M. Ratto, T. Andres, F. Campolongo, J. Cariboni, D. Gatelli, M. Saisana, and S. Tarantola, *Global sensitivity analysis: the primer*. John Wiley & Sons, 2008.
- [12] R. D. Zimmerman, C. E. Murillo-Sánchez, and R. J. Thomas, “Matpower: Steady-state operations, planning, and analysis tools for power systems research and education,” *IEEE Transactions on power systems*, vol. 26, no. 1, pp. 12–19, 2010.
- [13] P. Cuffe and A. Keane, “Visualizing the electrical structure of power systems,” *IEEE Systems Journal*, vol. 11, no. 3, pp. 1810–1821, 2015.
- [14] S. L. Ávila *et al.*, “Otimização multiobjetivo e análise de sensibilidade para concepção de dispositivos: aplicação: síntese de antenas refletoras para comunicação via satélite,” 2006.
- [15] F. S. d. Carvalho, “Análise de sensibilidade topológica aplicada em problemas elípticos,” 2021.
- [16] D. C. Garcia, “Avaliação e minimização numérica do desequilíbrio de tensão: estimativa por análise de sensibilidade incremental e soluções analíticas,” Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica), Universidade de Brasília, Brasília, 2007, 82 f.
- [17] A. Abur and A. G. Exposito, *Power system state estimation: theory and implementation*. CRC press, 2004.
- [18] G. Leung and A. R. Barron, “Information theory and mixing least-squares regressions,” *IEEE Transactions on information theory*, vol. 52, no. 8, pp. 3396–3410, 2006.
- [19] K. P. Murphy, *Machine learning: a probabilistic perspective*. MIT press, 2012.
- [20] H. Saadat, “Line model and performance,” *Power System Analysis*, vol. 2, pp. 144–155, 2002.
- [21] J. Chen and A. Abur, “Placement of pmus to enable bad data detection in state estimation,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 21, no. 4, pp. 1608–1615, 2006.
- [22] T. J. Overbye, X. Cheng, and Y. Sun, “A comparison of the ac and dc power flow models for lmp calculations,” in *37th Annual Hawaii International Conference on System Sciences, 2004. Proceedings of the*. IEEE, 2004, pp. 9–pp.

- [23] J. A. Momoh, *Electric power system applications of optimization*. CRC press, 2017.
- [24] A. J. Wood, B. F. Wollenberg, and G. B. Sheblé, *Power generation, operation, and control*. John Wiley & Sons, 2013.
- [25] J. Bialek, “Tracing the flow of electricity,” *IEE Proceedings-Generation, Transmission and Distribution*, vol. 143, no. 4, pp. 313–320, 1996.
- [26] A. K. Abraham, W. Krzyzanski, and D. E. Mager, “Partial derivative—based sensitivity analysis of models describing target-mediated drug disposition,” *The AAPS journal*, vol. 9, pp. E181–E189, 2007.
- [27] J. E. Peter and R. P. Dwight, “Numerical sensitivity analysis for aerodynamic optimization: A survey of approaches,” *Computers & Fluids*, vol. 39, no. 3, pp. 373–391, 2010.
- [28] B. K. Stanford and P. S. Beran, “Analytical sensitivity analysis of an unsteady vortex-lattice method for flapping-wing optimization,” *Journal of Aircraft*, vol. 47, no. 2, pp. 647–662, 2010.
- [29] P. R. Gribik, D. Shirmohammadi, S. Hao, and C. L. Thomas, “Optimal power flow sensitivity analysis,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 5, no. 3, pp. 969–976, 1990.
- [30] P. Doubilet, C. B. Begg, M. C. Weinstein, P. Braun, and B. J. McNeil, “Probabilistic sensitivity analysis using monte carlo simulation: a practical approach,” *Medical decision making*, vol. 5, no. 2, pp. 157–177, 1985.
- [31] J. Iott, R. T. Haftka, and H. M. Adelman, “Selecting step sizes in sensitivity analysis by finite differences,” Tech. Rep., 1985.
- [32] M. Brylinsky, “Steady-state sensitivity analysis of energy flow in a marine ecosystem,” *Systems analysis and simulation in ecology*, vol. 2, pp. 81–102, 1972.
- [33] I. Totonchi, H. Al Akash, A. Al Akash, and A. Faza, “Sensitivity analysis for the iee 30 bus system using load-flow studies,” in *2013 3rd international conference on electric Power and energy conversion systems*. IEEE, 2013, pp. 1–6.
- [34] D. H. Brandwood, “A complex gradient operator and its application in adaptive array theory,” *Communications, Radar and Signal Processing, IEE Proceedings F*, vol. 130, no. 1, pp. 11–16, Fevereiro 1983.

- [35] R. Remmert, *Theory of complex functions*. Springer Science & Business Media, 1991, vol. 122.
- [36] L. Sorber, M. V. Barel, and L. D. Lathauwer, “Unconstrained optimization of real functions in complex variables,” *SIAM Journal on Optimization*, vol. 22, no. 3, pp. 879–898, 2012.
- [37] A. Maltsev, V. Pestretsov, R. Maslennikov, and A. Khoryaev, “Triangular systolic array with reduced latency for qr-decomposition of complex matrices,” in *2006 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*. IEEE, 2006, pp. 4–pp.
- [38] A. Awasthi, R. Guttal, N. Al-Dhahir, and P. T. Balsara, “Complex qr decomposition using fast plane rotations for mimo applications,” *IEEE Communications Letters*, vol. 18, no. 10, pp. 1743–1746, 2014.
- [39] D. P. Mandic and V. S. L. Goh, *Complex valued nonlinear adaptive filters: noncircularity, widely linear and neural models*. John Wiley & Sons, 2009.
- [40] M. H. Hayes, *Statistical digital signal processing and modeling*. John Wiley & Sons, 1996.
- [41] W. Wirtinger, “Über den weierstrass’ schen vorbereitungssatz.” 1927.
- [42] K. Kreutz-Delgado, “The complex gradient operator and the CR-calculus,” *ArXIV e-print, arXIV:0906.4835v1 [math.OA]*, pp. 1–74, June 25, 2009.
- [43] W. Wirtinger, “Zur formalen theorie der funktionen von mehr komplexen veränderlichen,” *Mathematische Annalen*, vol. 97, no. 1, pp. 357–375, 1927.
- [44] G. S. Chagas, “Fluxo de potência numericamente robusto via método de levenberg-marquardt de ordem superior.” 2018.
- [45] F. Zhang, *The Schur complement and its applications*. Springer Science & Business Media, 2006, vol. 4.
- [46] I. Gohberg *et al.*, *I. Schur methods in operator theory and signal processing*. Springer, 1986.
- [47] W. Hackbusch, B. N. Khoromskij, and R. Kriemann, “Direct schur complement method by domain decomposition based on h-matrix approximation,” *Computing and visualization in science*, vol. 8, no. 3, pp. 179–188, 2005.

- [48] Y. Saad and M. Sosonkina, “Distributed schur complement techniques for general sparse linear systems,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 21, no. 4, pp. 1337–1356, 1999.
- [49] I. N. Imam and L. M. Lamont, “An algorithm using the schur complement in inverting large matrices,” in *Proceedings. IEEE Energy and Information Technologies in the Southeast*. IEEE, 1989, pp. 421–426.
- [50] A. Mahmood, D. Lynch, and L. Philipp, “A fast banded matrix inversion using connectivity of schur’s complements,” in *IEEE International Conference on Systems Engineering*, 1991, pp. 303–306.
- [51] C. Nespoli and A. d. S. Gonzaga, “Complemento schur e aplicações.”
- [52] J. Bandler and M. El-Kady, “A complex lagrangian approach with applications to power network sensitivity analysis,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 29, no. 1, pp. 1–6, 1982.
- [53] G. W. Stewart, *Introduction to matrix computations*. Elsevier, 1973.
- [54] J. D. Glover, M. S. Sarma, and T. J. Overbye, “Power system,” *Analysis and Design, Stamford: Cengage Learning*, 2012.
- [55] A. R. Bergen and V. Vittal, *Power systems analysis*. Prentice Hall, 2000.
- [56] R. Zimmerman and C. Murillo-Sanchez, “Matpower (version 7.1)(2020).”
- [57] epe, “Empresa de pesquisa energética,” [www.epe.gov.br](http://www.epe.gov.br), 2022.
- [58] S. Iwamoto and Y. Tamura, “A fast load flow method retaining nonlinearity,” *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, no. 5, pp. 1586–1599, 1978.
- [59] R. Pires, G. Chagas, and L. Mili, “Enhanced power flow solution in complex plane,” *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 135, p. 107501, 2022.
- [60] R. D. Zimmerman, C. E. Murillo-Sánchez, and D. Gan, “Matpower: A matlab power system simulation package,” *Manual, Power Systems Engineering Research Center, Ithaca NY*, vol. 1, 1997.

- [61] B. N. Sheehan, “Enor: Model order reduction of rlc circuits using nodal equations for efficient factorization,” in *Proceedings of the 36th annual ACM/IEEE Design Automation Conference*, 1999, pp. 17–21.
- [62] J. Dongarra, J. Gabriel, D. Koelling, and J. Wilkinson, “The eigenvalue problem for hermitian matrices with time reversal symmetry,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 60, pp. 27–42, 1984.
- [63] I. Bar-On and M. Paprzycki, “High performance solution of the complex symmetric eigenproblem,” *Numerical Algorithms*, vol. 18, pp. 195–208, 1998.
- [64] X. Xiao, C. Jiang, H. Lu, L. Jin, D. Liu, H. Huang, and Y. Pan, “A parallel computing method based on zeroing neural networks for time-varying complex-valued matrix moore-penrose inversion,” *Information Sciences*, vol. 524, pp. 216–228, 2020.
- [65] Eberlein, “On the schur decomposition of a matrix for parallel computation,” *IEEE Transactions on Computers*, vol. 100, no. 2, pp. 167–174, 1987.
- [66] I. Decker, D. Falcao, and E. Kaszkurewicz, “Conjugate gradient methods for power system dynamic simulation on parallel computers,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 11, no. 3, pp. 1218–1227, 1996.
- [67] L. Chen, E. Krishnamurthy, and I. Macleod, “Generalised matrix inversion and rank computation by successive matrix powering,” *Parallel Computing*, vol. 20, no. 3, pp. 297–311, 1994.
- [68] H. Dag and F. L. Alvarado, “Conjugate gradient methods for power system dynamic simulation on parallel computers-discussion,” 1996.
- [69] J. Weston, M. Clint, and C. Bleakney, “The parallel computation of eigenvalues and eigenvectors of large hermitian matrices using the amt dap 510,” *Concurrency: Practice and Experience*, vol. 3, no. 3, pp. 179–185, 1991.
- [70] A. Ankudinov, C. Bouldin, J. Rehr, J. Sims, and H. Hung, “Parallel calculation of electron multiple scattering using lanczos algorithms,” *Physical Review B*, vol. 65, no. 10, p. 104107, 2002.

- [71] I. C. Decker, D. Falcão, and E. Kauszkurewicz, “Algoritmos para a simulação da dinâmica de sistemas de energia elétrica em computadores paralelos,” in *Anais do V Simpósio Brasileiro de Arquitetura de Computadores e Processamento de Alto Desempenho*. SBC, 1993, pp. 444–458.
- [72] C. Dyke and K. Burrage, “Parallel performance assessment of polynomial preconditioned conjugate gradient algorithms and multigrid methods in a simd environment.”
- [73] H. Dag and A. Semlyen, “A new preconditioned conjugate gradient power flow,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 18, no. 4, pp. 1248–1255, 2003.
- [74] Y. Chen and C. Shen, “A jacobian-free newton-gmres (m) method with adaptive preconditioner and its application for power flow calculations,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 21, no. 3, pp. 1096–1103, 2006.
- [75] P. E. Gill, W. Murray, D. B. Ponceleón, and M. A. Saunders, “Preconditioners for indefinite systems arising in optimization,” *SIAM journal on matrix analysis and applications*, vol. 13, no. 1, pp. 292–311, 1992.
- [76] H. Mori, H. Tanaka, and J. Kanno, “A preconditioned fast decoupled power flow method for contingency screening,” in *Proceedings of Power Industry Computer Applications Conference*. IEEE, 1995, pp. 262–268.
- [77] J. Sanchez, R. Caire, and N. Hadjsaid, “Ict and power distribution modeling using complex networks,” in *2013 IEEE Grenoble Conference*. IEEE, 2013, pp. 1–6.
- [78] J. Basseý, L. Qian, and X. Li, “A survey of complex-valued neural networks,” *arXiv preprint arXiv:2101.12249*, 2021.
- [79] S. Xin, Q. Guo, H. Sun, C. Chen, J. Wang, and B. Zhang, “Information-energy flow computation and cyber-physical sensitivity analysis for power systems,” *IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems*, vol. 7, no. 2, pp. 329–341, 2017.
- [80] N. T. Nguyen, D. D. Le, G. G. Moshi, C. Bovo, and A. Berizzi, “Sensitivity analysis on locations of energy storage in power systems with wind integration,” *IEEE Transactions on industry applications*, vol. 52, no. 6, pp. 5185–5193, 2016.

- [81] H. Huang and F. Li, "Sensitivity analysis of load-damping characteristic in power system frequency regulation," *IEEE transactions on power systems*, vol. 28, no. 2, pp. 1324–1335, 2012.
- [82] I. A. Hiskens and M. A. Pai, "Trajectory sensitivity analysis of hybrid systems," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 47, no. 2, pp. 204–220, 2000.
- [83] Y.-q. Chen, Y. Zhang, and Y.-h. Wei, "Application of improved genetic algorithm combining sensitivity analysis to reactive power optimization for power system," in *2008 Third International Conference on Electric Utility Deregulation and Restructuring and Power Technologies*. IEEE, 2008, pp. 798–803.
- [84] M. Zand, M. A. Nasab, S. Padmanaban, P. K. Maroti, and S. Muyeen, "Sensitivity analysis index to determine the optimal location of multi-objective upfc for improvement of power quality parameters," *Energy Reports*, vol. 10, pp. 431–438, 2023.
- [85] R. A. de Aguiar, A. L. Dalcastagnê, H. H. Zürn, and R. Seara, "Impedance-based fault location methods: Sensitivity analysis and performance improvement," *Electric Power Systems Research*, vol. 155, pp. 236–245, 2018.
- [86] Q. Guo, L. Gao, X. Chu, and H. Sun, "Parameter identification for static var compensator model using sensitivity analysis and improved whale optimization algorithm," *CSEE Journal of Power and Energy Systems*, vol. 8, no. 2, pp. 535–547, 2022.
- [87] E. Makram, Z. Zhao, and A. Girgis, "An improved model in optimal pmu placement considering sensitivity analysis," in *2011 IEEE/PES Power Systems Conference and Exposition*. IEEE, 2011, pp. 1–6.
- [88] N. Amjady and M. Esmaili, "Application of a new sensitivity analysis framework for voltage contingency ranking," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 20, no. 2, pp. 973–983, 2005.
- [89] K. N. Hasan, R. Preece, and J. V. Milanović, "Priority ranking of critical uncertainties affecting small-disturbance stability using sensitivity analysis techniques," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 32, no. 4, pp. 2629–2639, 2016.