

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Dinâmica de Halteres e  
Teoria de Marés**

**Doglasse João Mário**

**Orientador: Prof. Dr. Lucas Ruiz dos Santos**

ITAJUBÁ, 15 DE JULHO DE 2024

# Resumo

O objetivo deste trabalho é abordar uma proposta de modelagem em teoria de marés que faz uso do que é conhecido na literatura como modelo de halteres gravitacional. Para esse fim, optamos por inicialmente estudar detalhadamente as bases do problema, como as soluções do problema de dois corpos, Leis de Kepler e o formalismo perturbativo das variáveis de Delaunay. As equações de movimento do modelo estão baseadas no formalismo Lagrangiano da Mecânica Clássica, acoplado com forças dissipativas através de uma função dissipação. Os resultados obtidos se concentram na estabilidade dos equilíbrios relativos, os quais dependem do nível de momento angular considerado. Propomos uma análise do modelo alternativa à encontrada na literatura, usando ferramentas de teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias, fornecendo uma descrição mais precisa e detalhada da dinâmica envolvida.

**Palavras-chave:** Marés, halteres, estabilidade orbital, formalismo Lagrangiano, equações diferenciais ordinárias.

# Abstract

The objective of this work is to present a model in tidal theory using what is known in the literature as the gravitational dumbbell model. To this end, we initially study in detail the foundations of the problem, such as the solutions to the two-body problem, Kepler's Laws, and the perturbative formalism of Delaunay variables. The equations of motion for the model are based on the Lagrangian formalism of Classical Mechanics, coupled with dissipative forces through a dissipation function. The obtained results focus on the stability of the relative equilibria, which depend on the considered level of angular momentum. We propose an analysis of the model alternative to that found in the literature, using tools from the qualitative theory of ordinary differential equations, providing a more precise and detailed description of the dynamics involved.

**Keywords:** Tides, dumbbell, orbital stability, Lagrangian formalism, ordinary differential equations.

# Sumário

Resumo	i
Abstract	ii
Índice	iii
Lista de Figuras	v
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Problema de 2 corpos e Leis de Kepler</b>	<b>3</b>
2.1 Forças centrais . . . . .	3
2.1.1 A Lagrangiana do sistema . . . . .	5
2.1.2 O momento angular . . . . .	6
2.1.3 Energia potencial e o trabalho realizado . . . . .	9
2.2 Estabilidade orbital . . . . .	11
2.2.1 Condição de estabilidade . . . . .	12
2.3 Equação da órbita na forma integral . . . . .	14
2.4 Equação de Binet . . . . .	15
2.4.1 Seções cônicas . . . . .	16
2.4.2 Problema de Kepler . . . . .	17
<b>3 Construção dos elementos de Delaunay</b>	<b>21</b>

3.1	Movimento de um sistema binário . . . . .	21
3.2	Movimento de Kepler perturbado e coordenadas de Delaunay . . . . .	28
3.3	Aplicação: satélite orbitando um planeta oblato . . . . .	35
3.3.1	Equações do movimento exatas . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Marés e dinâmica de halteres</b>	<b>42</b>
4.1	Sistema Terra-Lua . . . . .	42
4.1.1	Lagrangiana do sistema Terra-Lua . . . . .	43
4.2	Sistema Júpiter-Io . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Análise qualitativa do modelo de halter</b>	<b>60</b>
5.1	Estabilidade por Lyapunov . . . . .	60
5.2	Lagrangiana e energia total em variáveis e parâmetros adimensionais . . . . .	62
5.3	Determinação dos pontos de equilíbrios . . . . .	66
5.3.1	Primeiro caso: halter alinhado . . . . .	67
5.3.2	Segundo caso: halter desalinhado . . . . .	75
5.4	Estimativa de atração da órbita circular estável . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Equações médias</b>	<b>82</b>
6.1	Média das equações completas . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>88</b>

# Lista de Figuras

2.1	Representação do sistema com duas massas, $m_1$ e $m_2$ e a lei da gravitação universal. . . . .	4
2.2	Representação da segunda lei de Kepler na qual há um planeta em movimento elíptico em torno do Sol. . . . .	8
2.3	Potencial efetivo para o potencial Newtoniano $U = -k/r$ . A única órbita circular presente é estável. . . . .	13
2.4	Representação polar das seções cônicas. . . . .	17
3.1	Plano osculador da órbita de Kepler no espaço. . . . .	25
4.1	Sistema Terra-Lua. . . . .	44
4.2	Sistema Júpiter-Io. . . . .	57
5.1	Equilíbrios relativos em função do momento angular total, para halter alinhado. . . . .	69
5.2	Equilíbrios relativos do sistema em função do momento angular total, para halter desalinhado. . . . .	76

# Capítulo 1

## Introdução

A interação entre a Terra e seus componentes, tanto naturais quanto artificiais, é um campo vasto e fascinante de estudo. Nesse contexto, a dinâmica de halteres e a teoria de marés emergem como duas áreas distintas, mas interligadas, que capturam a atenção de pesquisadores de diferentes áreas. A compreensão da dinâmica de halteres se entrelaça com a teoria de marés, que explora os padrões complexos do movimento oceânico sob a influência gravitacional lunar e solar.

Estudos nessa área têm atraído o interesse de vários pesquisadores, como é o caso do estudo feito por (Golubović & Knudsen, 2017). Nele, os autores destacam a dinâmica não linear causada por instabilidades nesse movimento. Além disso, destaca-se que esses halteres são fisicamente viáveis em planetas anões no cinturão de asteroides, como Ceres. O artigo também menciona elevadores espaciais rotativos não amarrados como exemplos atrativos desse conceito.

Um outro estudo feito por (Dilao & Murteira, 2020) apresenta resultados e equações de movimento exatas para o sistema Kepleriano de halteres (KD). Esse sistema é composto por duas massas pontuais conectadas por uma haste rígida e sem massa, influenciadas gravitacionalmente por uma terceira massa pontual. O estudo identifica diversas classes de famílias contínuas de órbitas periódicas, conhecidas como órbitas periódicas principais.

Mais recentemente, no estudo apresentado no artigo (Scoppola et al., 2022), os autores analisaram um modelo que descreve os efeitos da dissipação de marés na órbita de um satélite no problema de dois corpos. Eles utilizaram a representação de protuberâncias de maré por meio de um halter, acoplado à rotação por uma interação dissipativa. Portanto, no presente trabalho propusemos realizar uma análise dos princípios fundamentais que regem o movimento de halteres em órbita, investigando sua estabilidade orbital e padrões de movimento. Estudamos os efeitos das marés gravitacionais na dinâmica orbital de corpos celestes, analisando como esses fenômenos complexos influenciam a evolução das órbitas ao longo do tempo.

Diante disso, para alcançar os objetivos expostos, o trabalho encontra sua organização em seis capítulos distintos.

No Capítulo 2, fazemos uma breve revisão sobre a dinâmica de dois corpos pontuais sujeitos a um campo de força central, mais especialmente a força de gravitação Newtoniana, estabelecendo as linhas gerais que guiam nosso trabalho.

O Capítulo 3 traz uma exposição da construção das variáveis de Delaunay e como o problema gravitacional de dois corpos perturbado pode ser escrito nessas coordenadas, bem como suas equações médias.

Já no Capítulo 4 concentramo-nos na exploração do artigo (Scoppola et al., 2022), que serve como inspiração fundamental para a presente investigação, detalhando como suas premissas e conclusões contribuem para a estrutura conceitual do trabalho.

No Capítulo 5, apresentamos com detalhes os resultados decorrentes do estudo sobre a estabilidade do sistema Terra-Lua, baseado em resultados de equações diferenciais ordinárias.

O Capítulo 6 apresenta resultados parciais sobre equações médias do modelo, e quais são as dificuldades em relacioná-las com a dinâmica completa do sistema.



# Capítulo 2

## Problema de 2 corpos e Leis de Kepler

Neste capítulo revisaremos a solução do problema de duas partículas interagindo gravitacionalmente. É um problema resolvido em textos elementares de Mecânica, no entanto será a base para da construção das coordenadas de Delaunay a serem apresentadas no Capítulo 3. Como usual, a maior parte da análise das equações de movimento pode ser feita para um campo de forças central arbitrário.

### 2.1 Forças centrais

**Definição 2.1.1.** *Um campo de forças no problema de dois corpos,  $\vec{F}$ , é dito central, com o centro em  $\vec{0}$ , se tem a forma  $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r}$ , onde supomos que  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave. O vetor  $\vec{r}$  denota o vetor posição relativa entre os corpos e  $r = |\vec{r}|$  sua norma.*

Essas forças são caracterizadas pela sua natureza radial, ou seja, atuam ao longo da direção que une a posição dos dois corpos em cada instante (Kibble & Berkshire, 2004). Um aspecto fundamental das forças centrais é que sua intensidade depende exclusivamente da distância entre as partículas, não sendo afetada pela direção ou orientação relativa (Vieira Neto, 2020). Considere um sistema constituído por dois corpos isolados como ilustramos na Figura 2.1. A intensidade da força de interação

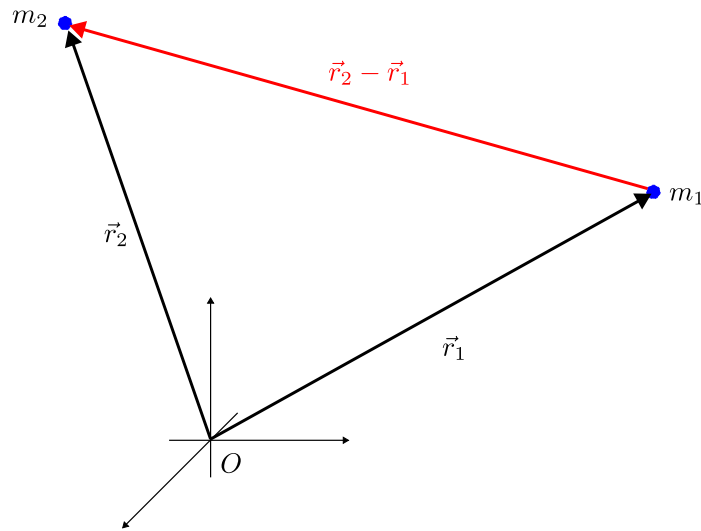


Figura 2.1: Representação do sistema com duas massas,  $m_1$  e  $m_2$  e a lei da gravitação universal.

que o corpo dois, de massa  $m_2$ , sofre devido ao corpo um, de massa  $m_1$ , é expressa pela lei da gravitação universal (Newton, 1687)

$$F = G_U \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2},$$

sendo  $\vec{r}_j$ ,  $j = 1, 2$ , as posições dos corpos e  $G_U = 6,6743 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  a constante gravitacional universal.

Como sabemos que a força é uma grandeza vetorial, e que atua na direção que une os dois corpos, podemos escrevê-la na forma

$$\vec{F} = -G_U \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \quad (2.1)$$

Esta lei de forças é conservativa, ou seja, é dada pelo gradiente de uma função escalar, a energia potencial do sistema,  $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(r)$ , a qual possui a forma  $U(r) = -G_U m_1 m_2 / r$ , sendo que a expressão (2.1) é obtida com a identificação  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ,  $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ .

### 2.1.1 A Lagrangiana do sistema

Ao longo deste trabalho, vamos nos apoiar no formalismo Lagrangiano para obter a equação de movimento dos halteres. Desta forma, ilustraremos como as equações do problema, mais simples, de dois corpos pontuais, são obtidas dentro deste formalismo.

Para facilitar a abordagem que vamos empregar, além de denotar por  $\vec{r}$  o vetor posição relativa,  $\vec{R} = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)/(m_1 + m_2)$  denotará a posição do centro de massa do sistema de dois corpos.

**Proposição 2.1.1.** *A Lagrangiana do problema de dois corpos, representado na Figura 2.1, é dada por*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(r), \quad (2.2)$$

onde  $M = m_1 + m_2$  é a massa total e  $\mu = m_1m_2/M$  é a massa reduzida do sistema.

*Demonstração.* Sabemos que a Lagrangiana é a soma da energia cinética com a energia potencial, sendo que sua expressão é escrita da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - U(r). \quad (2.3)$$

Agora, podemos expressar os vetores  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  em função de  $\vec{r}$  e  $\vec{R}$  como

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{M}\vec{r}, \\ \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M}\vec{r}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Agora, procedemos à substituição das equações definidas em (2.4) na expressão (2.3), resultando em

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m_1 \left( \dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left( \dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}} \right)^2 - U(r), \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m_1 \left[ \dot{\vec{R}}^2 + \left( \frac{m_2}{M} \right)^2 \dot{\vec{r}}^2 - 2\frac{m_2}{M}\dot{\vec{R}}\dot{\vec{r}} \right] + \frac{1}{2}m_2 \left[ \dot{\vec{R}}^2 + \left( \frac{m_1}{M} \right)^2 \dot{\vec{r}}^2 + 2\frac{m_1}{M}\dot{\vec{R}}\dot{\vec{r}} \right] - U(r), \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2(m_1 + m_2)}{M^2}\dot{\vec{r}}^2 - U(r). \end{aligned}$$

A Lagrangiana definida em (2.3) pode ser reescrita de forma mais simples da seguinte maneira

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M}\dot{\vec{r}}^2 - U(r). \quad (2.5)$$

Ao utilizarmos a definição da massa reduzida, vemos que (2.5) é equivalente a (2.2).  $\square$

Vemos que essa Lagrangiana (2.5) não depende de  $\vec{R}$ , mas sim de  $\dot{\vec{R}}$ , e que portanto se trata de uma coordenada ignorável ou cíclica. Nestes casos temos uma lei de conservação associada a essa coordenada. A partir de (2.5), podemos ver que a Lagrangiana do problema de dois corpos é a soma da Lagrangiana do centro de massa ( $\mathcal{L}_{CM}$ ) e da Lagrangiana definida pela coordenada relativa ( $\mathcal{L}_{Rel}$ ), onde

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{CM}(\dot{\vec{R}}) = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2, \\ \mathcal{L}_{Rel}(\dot{\vec{r}}, \vec{r}) = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(r). \end{cases} \quad (2.6)$$

Desta forma, podemos concluir que as equações de movimento destas coordenadas são desacopladas, o que nos permite concentrar nas equações diferenciais para o vetor posição relativa, já que a equação do centro de massa apenas impõe que ele se desloca em movimento retilíneo uniforme.

## 2.1.2 O momento angular

**Definição 2.1.2.** *O momento angular é definido como o produto vetorial da posição relativa com o momento linear de um corpo em relação a um ponto de referência. No caso do problema de dois corpos, o momento angular total do sistema é, por definição, a soma dos momentos angulares individuais de cada corpo (Goldstein et al., 1980).*

Para campo de forças central, temos a seguinte lei de conservação do momento angular.

**Proposição 2.1.2.** *O momento angular, em relação ao centro da força, de uma partícula que está sujeita apenas a uma força central é constante ao longo do movimento.*

*Demonstração.* Para um sistema descrito por um conjunto de coordenadas generalizadas,  $q_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ , e uma função Lagrangiana  $\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$  sabemos que as equações de movimento são derivadas das equações de Euler-Lagrange (Ortega et al., 1998)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Dessa forma, aplicando (2.7) em (2.5) temos as equações diferenciais

$$\begin{cases} M\ddot{R} = 0, \\ \mu\ddot{r} = \vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Por outro lado, pela Definição 2.1.2, o vetor momento angular é dado por

$$\vec{G} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (2.9)$$

sendo  $\vec{r}$  o vetor posição que sai do centro de forças até a partícula e  $\vec{p} = \mu\dot{\vec{r}}$  seu momento linear. Segue que

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \mu\dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F} = r\hat{r} \times F(r)\hat{r} = \vec{0}.$$

Isso mostra que  $\vec{G}$  é constante, o que significa que o movimento da partícula em estudo é sempre realizado em um plano fixo, ortogonal ao vetor constante  $\vec{G}$ , contendo o centro de forças. Em termos do módulo do momento angular, a equação (2.9) pode ser escrita em coordenadas polares com a seguinte expressão para o vetor velocidade:  $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$ . Portanto, temos que  $\vec{G} = \vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu r\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}) = \mu r^2\dot{\phi}\hat{r} \times \hat{\phi} = \mu r^2\dot{\phi}\hat{k}$ , o qual é constante. Concluimos que o seguinte escalar, módulo do momento angular  $G = \|\vec{G}\|$ , também é constante

$$G = \mu r^2 \dot{\phi}. \quad (2.10)$$

□

Campos de vetores centrais admitem órbitas com características especiais, em particular, todas elas satisfazem a bem conhecida segunda lei de Kepler (Proposição 2.1.3), a qual é consequência apenas da conservação do momento angular.

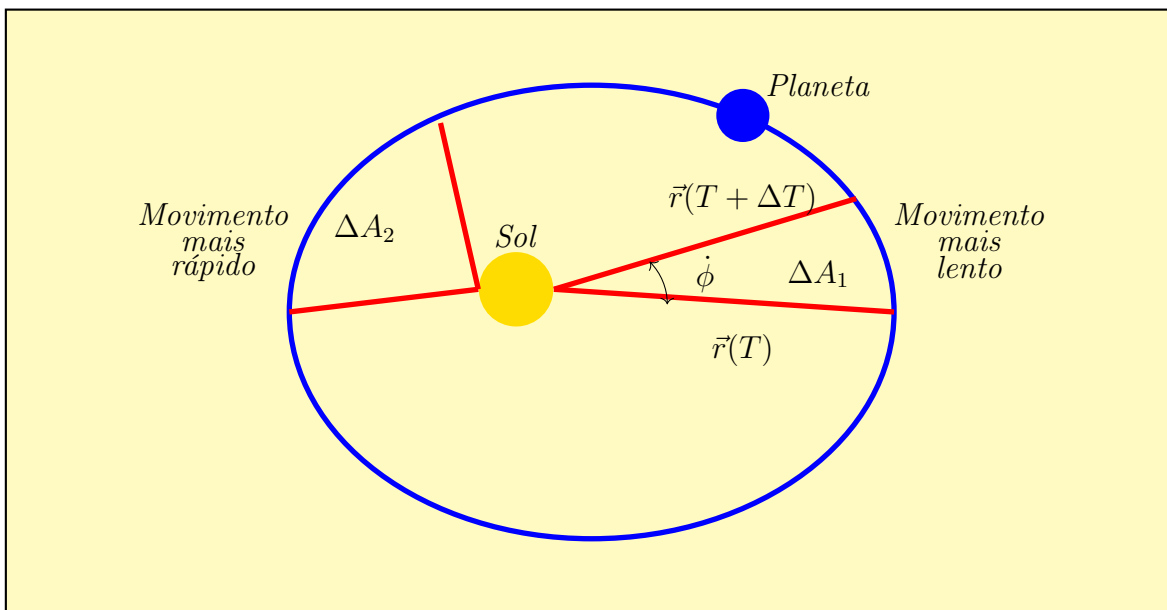


Figura 2.2: Representação da segunda lei de Kepler na qual há um planeta em movimento elíptico em torno do Sol.

**Proposição 2.1.3.** *O segmento entre a partícula e o centro da força varre áreas iguais em tempos iguais.*

*Demonstração.* Considere um corpo sob ação de um campo de forças central, com posição  $\vec{r}(T)$  no instante  $T$  e para um instante  $T + \Delta T$  está na posição  $\vec{r}(T + \Delta T)$  como ilustramos na Figura 2.2. O setor varrido pela trajetória do corpo neste período de tempo, com área  $\Delta A$ , pode ser parametrizado por

$$\vec{\varphi}(u, t) := u\hat{r}(t),$$

onde  $\hat{r} = \vec{r}/r$  é o versor unitário do vetor posição do corpo e  $0 < u < r(t)$  é a coordenada polar radial. O ângulo polar  $\phi(t)$  está confinado entre  $\beta_1 = \phi(T)$  e  $\beta_2 = \phi(T + \Delta T)$ . Para calcular a área, usamos os vetores tangentes

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} = \hat{r}(t), \quad \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} = u\dot{\phi}(t)\hat{\phi}(t).$$

Dessa forma, a área do setor é dada por

$$\begin{aligned}
\Delta A &= \int_T^{T+\Delta T} \int_0^{r(t)} \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} \right\| dudt = \int_T^{T+\Delta T} \int_0^{r(t)} \left\| u\hat{r}(t) \times \dot{\phi}(t)\hat{\phi}(t) \right\| dudt \\
&= \int_T^{T+\Delta T} \int_0^{r(t)} \left\| u\dot{\phi}(t)\hat{r}(t) \times \hat{\phi}(t) \right\| dudt = \int_T^{T+\Delta T} \int_0^{r(t)} u\dot{\phi}(t) dudt \\
&= \frac{1}{2} \int_T^{T+\Delta T} r(t)^2 \dot{\phi}(t) dt = \frac{1}{2} \int_T^{T+\Delta T} \frac{G}{\mu} dt = \frac{G}{2\mu} \Delta T. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Concluimos que a variação da área é múltiplo constante da variação do tempo, demonstrando o resultado.  $\square$

A relação (2.11) implica que a velocidade de um planeta não é constante ao longo de sua órbita (Owen & Wu, 2013). Ele se move mais rapidamente quando está mais próximo do Sol e mais lentamente quando está mais distante. Essa lei é uma consequência da conservação do momento angular e desempenha um papel fundamental na compreensão do movimento dos planetas em torno do Sol.

### 2.1.3 Energia potencial e o trabalho realizado

As órbitas geradas por campos conservativos, ou seja, campos de forças da forma  $\vec{F} = -\nabla U$  sendo  $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  função diferenciável, podem ser entendidas através da conservação da energia mecânica, como descrevemos na sequência.

**Proposição 2.1.4.** *As forças centrais são conservativas.*

*Demonstração.* Vamos calcular o trabalho realizado pela partícula ao mover-se de um ponto  $A$  para um ponto  $B$  ao longo de um caminho  $C$ . O trabalho realizado pela partícula ao longo deste caminho é calculado, em coordenadas esféricas, por

$$W_{A \rightarrow B}^C = \int_{A,C}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A,C}^B F(r)\hat{r} \cdot \left( dr\hat{r} + r \sin\theta d\phi\hat{\phi} + r d\theta\hat{\theta} \right),$$

onde  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\phi \in [0, 2\pi]$  são os ângulos polar e azimutal, respectivamente.

$$W_{A \rightarrow B}^C = \int_{r_A}^{r_B} F(r) dr = -(U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A)).$$

Logo,  $\vec{F}$  é conservativo, com energia potencial

$$U(\vec{r}) = - \int_{r_A}^r F(r) dr, \quad r = |\vec{r}|. \quad (2.12)$$

□

**Definição 2.1.3.** *A energia mecânica total do problema de dois corpos sob ação de um campo de forças central é definida por*

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r), \quad (2.13)$$

onde  $U$  é a energia potencial definida em (2.12).

**Proposição 2.1.5.** *A energia mecânica do problema de dois corpos pode ser calculada na forma equivalente*

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V_{ef}(r), \quad (2.14)$$

a qual é conservada ao longo do movimento, onde  $V_{ef}$  é o potencial efetivo, definido na demonstração.

*Demonstração.* A energia mecânica do sistema é dada por (2.13). A sua variação ao longo das soluções é dada por

$$\frac{dE}{dt} = \mu \dot{r} \cdot \ddot{r} + \nabla U(\vec{r}) \cdot \dot{r} = \left( \mu \ddot{r} + \nabla U(\vec{r}) \right) \cdot \dot{r} = 0,$$

onde a última igualdade é consequência das equações de movimento (2.8). Sendo assim, a função  $E$  é constante sobre as soluções. Utilizando as equações (2.10) e (2.12) podemos afirmar que, para o movimento planar,

$$E = \frac{1}{2} \left[ \left( \dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi} \right) \cdot \left( \dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi} \right) \right] + U(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\phi}^2 + U(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{G^2}{2\mu r^2} + U(r),$$

que representa a energia mecânica para o problema de dois corpos. Portanto, se considerarmos  $V_{ef} = \frac{G^2}{2\mu r^2} + U(r)$ , concluímos que  $E = T + V_{ef}$ , sendo  $T = \mu \dot{r}^2/2$  a energia cinética. Portanto, obtemos

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V_{ef}(r). \quad (2.15)$$

□



Assim, podemos ver que o problema da força central nos leva a dois problemas unidimensionais, para cada coordenada, que podem ser estudados pelas equações de conservação de energia e momento angular

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r) = E, \\ \mu r^2 \dot{\phi} = G. \end{cases} \quad (2.16)$$

## 2.2 Estabilidade orbital

Lembramos que o nosso principal problema é descrever a dinâmica da partícula de massa reduzida  $\mu$ , com energia potencial efetiva dada por

$$V_{\text{ef}} = \frac{G^2}{2\mu r^2} + U(r), \quad (2.17)$$

onde  $r$  é a separação da partícula ao centro da força,  $G$  é o módulo do momento angular da partícula em relação ao centro da força, e  $U(r)$  é a energia potencial de interação dessa partícula em relação ao centro da força. Além disso, temos que a força efetiva é dada por

$$F_{\text{ef}}(r) = -\frac{d}{dr}V_{\text{ef}}(r) = \frac{G^2}{\mu r^3} + F(r). \quad (2.18)$$

Estamos denominando por órbita do problema de dois corpos uma qualquer solução da equação diferencial (2.16). Notamos que essas órbitas também podem determinadas pela relação entre as duas coordenadas polares, independente do tempo, na forma  $r = r(\phi)$ . Existem órbitas especiais, denominadas circulares, em que a distância do corpo ao centro de forças é constante, ou seja  $r(\phi) = r_0$ . Estas órbitas são dadas pelas soluções de (2.16) com condições iniciais  $\dot{r}(0) = 0$ ,  $G \neq 0$  e  $r(0) = r_0$ , sendo este último uma raiz da equação  $F_{\text{ef}}(r_0) = 0$ .

**Definição 2.2.1.** *Uma órbita é dita limitada se a função  $r(t)$  for limitada, ou seja, se existir uma constante  $M > 0$  tal que  $r(t) < M$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Caso contrário, a órbita é dita ilimitada.*

### 2.2.1 Condição de estabilidade

Para cada órbita circular de um problema de dois corpos, podemos nos perguntar sobre sua estabilidade. A ideia geral é declarar uma órbita estável se pequenas perturbações não alterarem significativamente o comportamento das suas órbitas vizinhas, perturbadas, enquanto uma órbita circular deve ser considerada instável se pequenas perturbações puderem causar desvios significativos da órbita original. Nesta seção, vamos estudar a estabilidade de forças centrais gerais, mas nosso principal exemplo é a força Newtoniana, ou seja, com potencial  $U(r) = -k/r$ , com  $k = G_U m_1 m_2 > 0$ .

Sob as hipóteses acima, da equação (2.17) sabemos que

$$V_{ef}(r) = \frac{G^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}. \quad (2.19)$$

Para a função (2.19), consideramos os parâmetros  $k = \mu = L = 1$ , e exibimos o seu gráfico na Figura 2.3. Desde que a força efetiva satisfaz  $F_{ef}(r) = -V'_{ef}(r)$ , somos levados a considerar uma órbita circular estável caso seu raio seja um mínimo local de  $V'_{ef}(r)$ , caso contrário, sendo máximo local ou ponto de inflexão, temos uma órbita circular instável. Desta forma, uma condição suficiente para que uma órbita circular de raio  $r_0 > 0$  seja estável é que  $-F_{ef}(r_0) = V'_{ef}(r_0) = 0$  e  $V''_{ef}(r_0) > 0$ .

Para um potencial central arbitrário  $U(r)$ , uma órbita circular estável satisfaz as condições  $V'_{ef}(r_0) = -\frac{G^2}{\mu r_0^3} + U'(r_0) = 0$  e  $V''_{ef}(r_0) = \frac{3G^2}{\mu r_0^4} + U''(r_0) > 0$ . Portanto, a condição de estabilidade pode ser reescrita como

$$\frac{3}{r_0} U'(r_0) + U''(r_0) > 0. \quad (2.20)$$

A estabilidade de uma órbita circular também coincide com a condição de mínimo local de energia para níveis fixos de momento angular, como provado na Proposição 2.2.1. De fato, esta é uma condição mais geral que servirá de orientação para os demais capítulos.

**Proposição 2.2.1.** *Suponha que  $r_0 > 0$  é um mínimo local de  $V_{ef} = \frac{G^2}{2\mu r^2} + U(r)$ , então  $(r_0, 0) \in \mathbb{R}^2$  é mínimo local de  $E(r, \dot{r}) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{ef}(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{G^2}{2\mu r^2} + U(r)$ .*

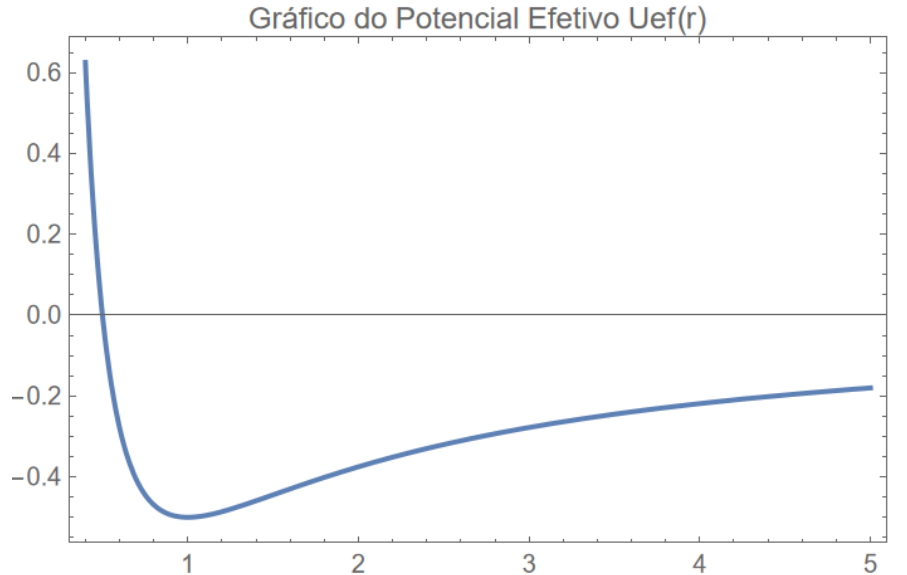


Figura 2.3: Potencial efetivo para o potencial Newtoniano  $U = -k/r$ . A única órbita circular presente é estável.

*Demonstração.* Se  $r_0$  for um mínimo local de  $V_{\text{ef}}(r)$ ,  $V'_{\text{ef}}(r_0) = 0$  e  $V''_{\text{ef}}(r_0) > 0$ . Além disso, o gradiente da função energia é

$$\nabla E(r, \dot{r}) = (V'_{\text{ef}}(r), \mu \dot{r}) \Rightarrow \nabla E(r_0, 0) = (V'_{\text{ef}}(r_0), 0) = (0, 0),$$

cujas matriz Hessiana sobre esse ponto crítico é

$$\text{Hess}E(r_0, 0) = \begin{bmatrix} V''_{\text{ef}}(r_0) & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Como os autovalores de  $\text{Hess}E(r_0, 0)$  são  $V''_{\text{ef}}(r_0) > 0$  e  $\mu > 0$ , ocorre que o ponto crítico  $(r_0, 0)$  é um mínimo local de  $E(r, \dot{r})$ .  $\square$

**Exemplo 1.** Considere um potencial atrativo na forma de lei de potências,  $U(r) = -kr^n$ , em que  $n \neq 0$  e  $k \neq 0$  de forma que  $F(r) = -U'(r) = nkr^{n-1} < 0$  para todo  $r > 0$ . Desejamos determinar para quais valores de  $n$  a função  $U(r)$  gera órbitas circulares estáveis. Para isso, recorreremos à condição de estabilidade dada pela equação (2.20). Observe que  $U''(r_0) = -n(n-1)kr_0^{n-2}$ , e que portanto

$$\frac{3}{r_0}U'(r_0) + U''(r_0) = -3nkr_0^{n-2} - n(n-1)kr_0^{n-2} = -nkr_0^{n-2}(2+n). \quad (2.21)$$

Como  $nk < 0$ , vemos que a condição de estabilidade (2.20) é equivalente a  $n > -2$ . Em particular, para o potencial Newtoniano  $U = -kr^{-1}$ , qualquer uma de suas órbitas circulares é estável. Os raios das órbitas circulares são as raízes de  $V'_{\text{ef}}(r_0) = -\frac{G^2}{\mu r_0^3} - nkr_0^{n-1} = 0$ , ou seja,

$$r_0 = \left( \frac{G^2}{\mu(-nk)} \right)^{\frac{1}{n+2}}. \quad (2.22)$$

Portanto, há exatamente um raio de órbita circular para cada  $n \neq 0$  e  $n \neq -2$ . Em particular, para o potencial Newtoniano,  $r_0 = \mu k/G^2$ , representado na Figura 2.3.

## 2.3 Equação da órbita na forma integral

Pela conservação da energia mecânica, primeira equação de (2.16), podemos obter a equação da trajetória da partícula. Observamos que,

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\text{ef}} \Rightarrow \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - V_{\text{ef}}(r)]},$$

onde o sinal positivo corresponde à porção da órbita durante o afastamento, e o sinal negativo para a porção de aproximação entre os corpos.

Escolhendo o sinal positivo e integrando ambos os lados da última equação em relação ao tempo, obtemos

$$\int_0^t dt = \int_{r(0)}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - V_{\text{ef}}(r)]}},$$

portanto

$$t = \int_{r(0)}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - V_{\text{ef}}(r)]}}. \quad (2.23)$$

Por outro lado, pela conservação do momento angular,

$$G = \mu r^2 \dot{\phi} \Rightarrow \int_{\phi(0)}^{\phi(t)} d\phi = \frac{G}{\mu} \int_0^t \frac{dt}{r^2(t)} \Rightarrow \phi(t) = \phi(0) + \frac{G}{\mu} \int_0^t \frac{dt}{r^2(t)}. \quad (2.24)$$

Além disso, podemos obter uma equação para a órbita da seguinte maneira

$$G = \mu r^2 \dot{\phi} = \mu r^2 \frac{d\phi}{dr} \frac{dr}{dt} = \mu r^2 \frac{d\phi}{dr} \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - V_{\text{ef}}(r)]} = \mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - V_{\text{ef}}(r)]} \frac{d\phi}{dr},$$

de onde concluímos que

$$\int_{\phi(0)}^{\phi(t)} d\phi = \frac{G}{\mu} \int_{r(0)}^{r(t)} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - V_{\text{ef}}(r)]}},$$

portanto,

$$\phi(r) = \phi(r_0) + \frac{G}{\mu} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - V_{\text{ef}}(r)]}}. \quad (2.25)$$

A equação (2.25), que representa a equação orbital na forma integral, é citada em (O'Leary & Hill, 2018).

## 2.4 Equação de Binet

Por uma abordagem mais direta, pela segunda lei de Newton, segunda equação de (2.8), podemos também obter uma equação diferencial direta da órbita. Ela é consequência da conservação da energia (2.14),  $\dot{E} = 0$  é equivalente a

$$\mu \ddot{r} = \frac{G^2}{\mu^2 r^3} + F(r). \quad (2.26)$$

Vamos fazer uma mudança de variável, seja

$$u = \frac{1}{r}, \quad (2.27)$$

então temos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \frac{Gu^2}{\mu} = -\frac{G}{\mu} \frac{du}{d\phi}. \quad (2.28)$$

Logo,

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \left( -\frac{G}{\mu} \frac{du}{d\phi} \right) = -\frac{G}{\mu} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{du}{d\phi} \right) \frac{d\phi}{dt} = -\frac{G^2}{\mu^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\phi^2}.$$

Portanto, a equação (2.26) pode ser reescrita como segue

$$-\frac{G^2}{\mu} u^2 \frac{d^2 u}{d\phi^2} - \frac{G^2}{\mu^2 r^3} = F(r), \quad (2.29)$$

e pela equação (2.27), temos que

$$-\frac{G^2}{\mu} u^2 \frac{d^2 u}{d\phi^2} - \frac{G^2}{\mu} u^3 = F \left( \frac{1}{u} \right),$$

portanto

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{\mu}{G^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right). \quad (2.30)$$

A equação 2.30 é conhecida como equação diferencial da órbita ou equação de Binet (Zeng et al., 2018)

**Exemplo 2.** *Considerando uma partícula de massa  $\mu$  sujeita à ação de uma força central com órbita  $r = ke^{\alpha\phi}$ , onde  $k \neq 0$  e  $\alpha \neq 0$ , pela equação de Binet podemos determinar a força envolvida para gerar esta órbita. Podemos escrever  $u = \frac{1}{r} = \frac{e^{-\alpha\phi}}{k}$ , e assim, temos  $\dot{u} = -\alpha u$ ,  $\ddot{u} = \alpha^2 u$ . Substituindo essas expressões na equação de Binet (2.30), obtemos*

$$\alpha^2 u + u = -\frac{\mu}{G^2u^2}F \Rightarrow F = -\frac{(\alpha^2 + 1)G^2}{\mu}u^3 \Rightarrow F(r) = -\frac{G^2}{\mu}(\alpha^2 + 1)\frac{1}{r^3}.$$

*Como podemos observar, temos uma força atrativa que decai com a separação mais rapidamente do que a força gravitacional.*

### 2.4.1 Seções cônicas

Para compreender a geometria das órbitas do problema de Kepler, revemos rapidamente a equação das cônicas em coordenadas polares.

Uma cônica é construída a partir de um ponto  $F$ , seu foco, e uma reta diretriz  $\ell$ , com  $F \notin \ell$ . Na Figura 2.4 vemos uma representação polar em que  $\ell$  representa a diretriz e  $F$  é o foco. Além disso, essa representação foi feita assumindo o foco como estando localizado na origem do plano. A cônica é definida como o conjunto dos pontos  $Q$  que satisfazem a seguinte equação

$$\frac{d(F, Q)}{d(Q, \ell)} = e > 0, \quad (2.31)$$

onde  $d(\cdot, \cdot)$  denota a distância Euclidiana e  $e$  é uma constante fixa, a excentricidade da cônica. Para  $0 < e < 1$ , a cônica é limitada, uma elipse. Para  $e = 1$ , a cônica se trata de uma parábola e para  $e > 1$  a cônica é uma hipérbole.

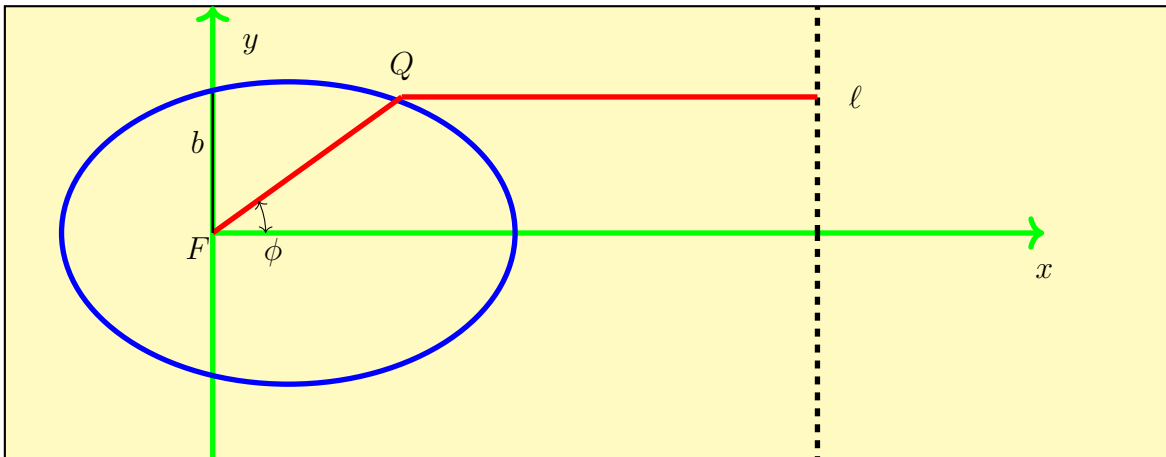


Figura 2.4: Representação polar das seções cônicas.

Observando a Figura 2.4, e denotando por  $P$  a interseção da cônica com o eixo  $y$ , acima da origem, com  $b = d(F, P)$ , nota-se que

$$\frac{b}{d(P, \ell)} = e \Rightarrow b = e(r \cos \phi + d(Q, \ell)) = er \cos \phi + ed(Q, F) = er \cos \phi + r,$$

onde  $Q = (r \cos \phi, r \sin \phi)$  é um ponto arbitrário da cônica. Com isso, temos a equação

$$r = \frac{b}{1 + e \cos \phi}, \quad (2.32)$$

a qual é a representação polar das cônicas. Note que no caso  $e = 0$  temos um círculo, apesar de (2.31) estar mal definida.

## 2.4.2 Problema de Kepler

Chamamos de problema de Kepler o problema de dois corpos para o potencial Newtoniano  $U = -k/r$ . Neste caso, valem as três Leis de Kepler, que enunciamos na forma de proposições.

**Proposição 2.4.1. Primeira Lei de Kepler:** *As órbitas limitadas dos planetas são elípticas, com o Sol ocupando um dos focos da elipse.*

**Proposição 2.4.2. Segunda Lei de Kepler:** *O raio vetor que vai do Sol ao planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.*

**Proposição 2.4.3. Terceira Lei de Kepler:** *O quadrado do período da órbita é diretamente proporcional ao cubo do semieixo maior da elipse.*

A segunda Lei de Kepler já foi provada anteriormente para uma força central atrativa arbitrária. Provaremos as demais leis como consequências imediatas das soluções da equação de Binet.

Para lei de forças da gravitação universal, vimos no Exemplo 1 que ela possui um único raio de equilíbrio, dado por

$$r_0 = \frac{G^2}{\mu k}. \quad (2.33)$$

Também verificamos que esta solução é estável, com energia mínima para cada valor de momento angular, positivo, fixo. A energia mínima associada a essa órbita circular é dada por

$$E_0 = U_{\text{ef}}(r_0) = -\frac{\mu k^2}{2G^2} < 0. \quad (2.34)$$

Vamos encontrar também os pontos de retorno para uma dada energia  $E > E_0$ , aqueles em que a derivada da distância relativa se anula, ou seja,

$$U_{\text{ef}}(r_R) = \frac{G^2}{2\mu r_R^2} - \frac{k}{r_R} = E,$$

portanto

$$r_R = \frac{r_0}{1 \pm \sqrt{1 - \frac{E}{E_0}}}. \quad (2.35)$$

Com esse conjunto de informações, podemos determinar os tipos de trajetórias. Para isso, vamos utilizar a equação de Binet com lei de forças  $F = -k/r^2 = -ku^2$ . Substituindo na equação (2.30), temos

$$\ddot{u} + u = \frac{\mu}{G^2} \frac{F}{u^2} = \frac{\mu}{G^2} k = \frac{1}{r_0}. \quad (2.36)$$



A equação (2.36) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, linear e não homogênea. Portanto, a solução dela é a soma da solução da parte homogênea com a solução particular, quais sejam

$$u_H(\phi) = A \cos(\phi + \gamma), \quad u_P = \frac{1}{r_0}. \quad (2.37)$$

Podemos assim obter a solução geral de (2.36) bastando somar  $u_H(\phi)$  e  $u_P(\phi)$ ,

$$u(\phi) = A \cos(\phi + \gamma) + \frac{1}{r_0} \Rightarrow \frac{1}{r(\phi)} = A \cos(\phi + \gamma) + \frac{1}{r_0}$$

pelo que

$$r = \frac{1}{A \cos(\phi + \gamma) + \frac{1}{r_0}} \Rightarrow r = \frac{r_0}{1 + r_0 A \cos(\phi + \gamma)}.$$

Ao comparar a última expressão com a equação (2.32), vemos que a órbita é uma cônica. O ângulo  $\gamma$  apenas localiza a orientação de seus eixos, podendo ser tomado como  $\gamma = 0$ . A solução geral então fica

$$r = \frac{r_0}{1 + r_0 A \cos \phi}. \quad (2.38)$$

Podemos observar que a excentricidade em (2.38) é dada por  $e = |r_0 A|$ , e utilizando a equação (2.35), podemos escrever  $r_R = \frac{r_0}{1 \pm r_0 A}$ . Portanto, a excentricidade é dada por

$$e = \sqrt{1 - \frac{E}{E_0}}. \quad (2.39)$$

Desta forma, podemos classificar todas as soluções possíveis, com momento angular não nulo.

- Se  $E = E_0$ , então  $e = 0$ . A seção cônica é um círculo.
- Se  $E_0 < E < 0$ , então  $0 < e < 1$ . A seção cônica é uma elipse.
- Se  $E = 0$ , então  $e = 1$ . Teremos um único ponto de retorno e a seção cônica é uma parábola.

- Se  $E > 0$ , então  $e > 1$ . Nesse caso, a órbita é uma hipérbole.

A primeira Lei de Kepler, Proposição 2.4.1, é consequência imediata das conclusões acima.

Pela segunda Lei de Kepler, equação (2.11), sabemos que o momento angular  $G$  e o período da órbita estão relacionados por

$$G = \frac{2\mu A}{\Delta T} = \frac{2\mu\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\Delta T}, \quad (2.40)$$

sendo que  $\Delta T$  aqui denota o período completo da órbita elíptica, e onde usamos a fórmula da área da elipse,  $A = \pi ab$  com  $a \geq a\sqrt{1-e^2} = b$  os semi-eixos maior e menor. Pela equação da órbita (2.38), quando o corpo se encontra no afélio  $\phi = 0$ , e portanto

$$a(1-e) = \frac{r_0}{1+e} = \frac{G^2}{\mu k(1+e)} \Rightarrow G^2 = a(1-e^2)\mu k. \quad (2.41)$$

Das equações (2.40) e (2.41), obtemos a terceira Lei de Kepler

$$(\Delta T)^2 = \frac{4\pi^2\mu}{k} a^3. \quad (2.42)$$

Estes resultados clássicos do problema de Kepler serão nossa base para a formulação dos próximos capítulos. Todas as órbitas consideradas daqui em diante serão limitadas, como a circular e a elíptica.

# Capítulo 3

## Construção dos elementos de Delaunay

Neste capítulo apresentaremos uma construção dos elementos de Delaunay, um conjunto de variáveis canônicas diretamente das soluções do problema de Kepler como visto no Capítulo 2, ao contrário da abordagem usual baseada em sistemas Hamiltonianos e funções geratrizes (Morbidelli, 2002). A vantagem desta abordagem, para este trabalho, é que ela se aplica a perturbações não-conservativas do sistema. Nos basearemos na referência (Chicone, 2006). As técnicas introduzidas neste capítulo serão necessárias para a abordagem apresentada nos Capítulos 5 e 6.

### 3.1 Movimento de um sistema binário

**Definição 3.1.1.** *Considere dois corpos quaisquer no espaço com massas  $m_1$  e  $m_2$ , sendo  $\vec{R}_1$  o vetor posição de  $m_1$  e  $\vec{R}_2$  o vetor posição de  $m_2$ . Definimos o vetor posição relativa dos dois corpos, como anteriormente, por  $\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$ .*

A equação de Newton perturbada por forças de pequena amplitude, para cada uma das massas, é dada tendo em conta o par ação-reação. Temos para o corpo de massa

$m_1$ ,

$$m_1 \ddot{\vec{R}}_1 = G_U \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} + \vec{F}_1. \quad (3.1)$$

De modo análogo segue a equação para a massa  $m_2$

$$m_2 \ddot{\vec{R}}_2 = -G_U \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} + \vec{F}_2. \quad (3.2)$$

Nessas equações (3.1) e (3.2) temos as perturbações  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  que representam forças adicionais aplicadas às partículas além da atração gravitacional. Portanto, a equação do movimento para o sistema binário é dada por,

$$\ddot{\vec{R}}_1 = G_U \frac{m_2}{r^3} \vec{r} + \frac{\vec{F}_1}{m_1}, \quad (3.3)$$

$$\ddot{\vec{R}}_2 = -G_U \frac{m_1}{r^3} \vec{r} + \frac{\vec{F}_2}{m_2}. \quad (3.4)$$

Derivando duas vezes o vetor posição relativa,  $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}}_2 - \ddot{\vec{R}}_1$ , resulta

$$\ddot{\vec{r}} = -G_U \frac{(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r} + \frac{\vec{F}_2}{m_2} - \frac{\vec{F}_1}{m_1}. \quad (3.5)$$

Em seguida, realizaremos uma reescala tanto nas coordenadas espaciais quanto no tempo. Para isso, vamos definir um novo  $\vec{\mathcal{R}}$  que é o múltiplo de  $\vec{r}$ , e escrevemos a relação  $\vec{r} = \alpha \vec{\mathcal{R}} \Rightarrow \vec{\mathcal{R}} = \frac{1}{\alpha} \vec{r}$ . Além disso, introduziremos uma nova escala de tempo,  $t = \beta \bar{t} \Rightarrow \bar{t} = \frac{1}{\beta} t$ . Com essas reescalas, podemos reescrever a equação diferencial (3.5) nesse novo sistema de coordenadas

$$\alpha \ddot{\vec{\mathcal{R}}} = -\frac{G_U (m_1 + m_2)}{\alpha^3 \mathcal{R}^3} \alpha \vec{\mathcal{R}} + \frac{1}{m_2} \vec{F}_2 - \frac{1}{m_1} \vec{F}_1. \quad (3.6)$$

Em seguida, fazemos a reescala no tempo. Notamos que  $\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{df}{d\bar{t}} \frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{1}{\beta} f'$ . Podemos observar que denotamos  $f'$  a fim de evitar confusão com a notação  $\dot{f}$ .

Então, de acordo com a equação (3.6), podemos reescrevê-la nas novas coordenadas como

$$\vec{\mathcal{R}}'' = -\frac{\beta^2 G_U (m_1 + m_2)}{\alpha^3 \mathcal{R}^3} \vec{\mathcal{R}} + \frac{\beta^2}{\alpha m_2} \vec{F}_2 - \frac{\beta^2}{\alpha m_1} \vec{F}_1.$$

Finalmente, impomos a relação entre as duas escalas:  $\beta^2 G_U(m_1 + m_2) = \alpha^3$ , de forma que a equação de movimento fica adimensional da seguinte maneira

$$\vec{\mathcal{R}}'' = -\frac{\vec{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^3} + \frac{\beta^2}{\alpha m_2} \vec{F}_2 - \frac{\beta^2}{\alpha m_1} \vec{F}_1.$$

Definindo  $\vec{F} := \frac{\beta^2}{\alpha m_2} \vec{F}_2 - \frac{\beta^2}{\alpha m_1} \vec{F}_1$  como uma única força perturbativa resultante, a equação (3.5) pode ser escrita da seguinte forma, considerando por simplicidade de notação  $\vec{\mathcal{R}} = \vec{r}$  e  $\vec{\mathcal{R}}'' = \ddot{\vec{r}}$ ,

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{F}. \quad (3.7)$$

Além disso, a equação (3.7) pode ser escrita como duas equações diferenciais de primeira ordem como se segue

$$\dot{\vec{r}} = \vec{V}, \quad \dot{\vec{V}} = -\frac{1}{r^3} \vec{r} + \vec{F}. \quad (3.8)$$

Na equação (3.7), o problema de Kepler é recuperado quando  $\vec{F} = 0$ . Nesse caso, a solução foi resolvida no Capítulo 2, no qual mostramos que o momento angular e a energia total do sistema são conservados, e as órbitas são seções cônicas. Quando o momento angular é zero, temos um caso particular chamado queda livre, o qual não foi considerado. Estas quantidades serão importantes aqui, pois são os elementos básicos para a construção das coordenadas de Delaunay. Assim, a energia total do sistema (3.8), não perturbado, pode ser escrita como  $E : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e dada por

$$E(\vec{X}, \vec{Y}) := \frac{1}{2} \langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle - \frac{1}{\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle^{1/2}}, \quad (3.9)$$

onde, neste capítulo, o símbolo  $\langle, \rangle$  representa o produto interno Euclidiano. O momento angular, por sua vez, é dado por uma função  $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com

$$\vec{A}(\vec{X}, \vec{Y}) := \vec{X} \times \vec{Y}. \quad (3.10)$$

Partindo da equação do momento angular (3.10), podemos definir a seguinte função cujo valor é o módulo do momento angular  $G(\vec{X}, \vec{Y}) := |\vec{A}(\vec{X}, \vec{Y})|$ . A energia (3.9)

calculada sobre uma solução  $(\vec{r}(t), \vec{V}(t))$  de (3.8), denotada por  $E = E(\vec{r}(t), \vec{V}(t))$ , possui a seguinte derivada temporal

$$\frac{dE}{dt}(\vec{r}(t), \vec{V}(t)) = \langle \vec{V}, \dot{\vec{V}} \rangle + (\langle \vec{r}, \dot{\vec{r}} \rangle)^{3/2} \langle \vec{r}, \dot{\vec{r}} \rangle = -\frac{1}{r^3} \langle \vec{V}, \vec{r} \rangle + \langle \vec{V}, \vec{F} \rangle + \frac{1}{r^3} \langle \vec{r}, \vec{V} \rangle = \langle \vec{V}, \vec{F} \rangle. \quad (3.11)$$

Notamos que para o sistema perturbado, em geral, a função energia não é mais conservada, mas como  $\vec{F}$  tem módulo pequeno, ela será aproximadamente conservada.

Reescrevendo a expressão do momento angular dada em (3.8) como  $\vec{A}(\vec{r}, \vec{V}) = \vec{r} \times \vec{V}$ , ao derivar, obtemos a seguinte equação

$$\dot{\vec{A}} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (3.12)$$

Percebemos, então, que se  $\vec{F} = \vec{0}$ , tanto a energia quanto o momento angular são constantes de movimento. Em particular, se tomarmos a órbita de Kepler, representada pela curva  $t \rightarrow \vec{r}(t)$ , a mesma estará contida em um plano que passa pela origem do sistema de coordenadas.

Vamos definir agora uma base móvel, dada pelas três funções vetoriais  $\vec{e}_r, \vec{e}_b$  e  $\vec{e}_n$ , que descrevem a direção e orientação dos vetores em relação ao sistema de coordenadas

$$\vec{e}_r(\vec{X}) = \frac{1}{|\vec{X}|} \vec{X}, \quad (3.13)$$

$$\vec{e}_n(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{1}{G(\vec{X}, \vec{Y})} (\vec{X} \times \vec{Y}), \quad (3.14)$$

$$\vec{e}_b(\vec{X}, \vec{Y}) = \vec{e}_n(\vec{X}, \vec{Y}) \times \vec{e}_r(\vec{X}). \quad (3.15)$$

Neste contexto, as expressões acima são funções da forma  $\vec{e}_r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , e  $\vec{e}_b, \vec{e}_n : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Dessa forma, se  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$  são vetores independentes, então  $\vec{e}_r, \vec{e}_b$  e  $\vec{e}_n$  formam uma base ortonormal positiva do espaço. Além disso, se essas funções forem avaliadas ao longo da solução  $t \rightarrow (\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ , então elas podem ser reescritas da seguinte forma,

$$\vec{e}_r = \frac{1}{r} \vec{r}, \quad (3.16)$$

$$\vec{e}_n = \frac{1}{G} \vec{r} \times \dot{\vec{r}}, \quad (3.17)$$

$$\vec{e}_b = \frac{1}{rG} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r}. \quad (3.18)$$

Trabalhando a expressão (3.18) temos,

$$\frac{1}{rG} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r} = \frac{1}{rG} \left( r^2 \dot{\vec{r}} - \langle \dot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle \vec{r} \right). \quad (3.19)$$

Observe que o plano que contém a órbita de Kepler, instantaneamente, conhecido como plano osculador, é perpendicular ao vetor momento angular. Uma representação desse plano é mostrada na Figura 3.1.

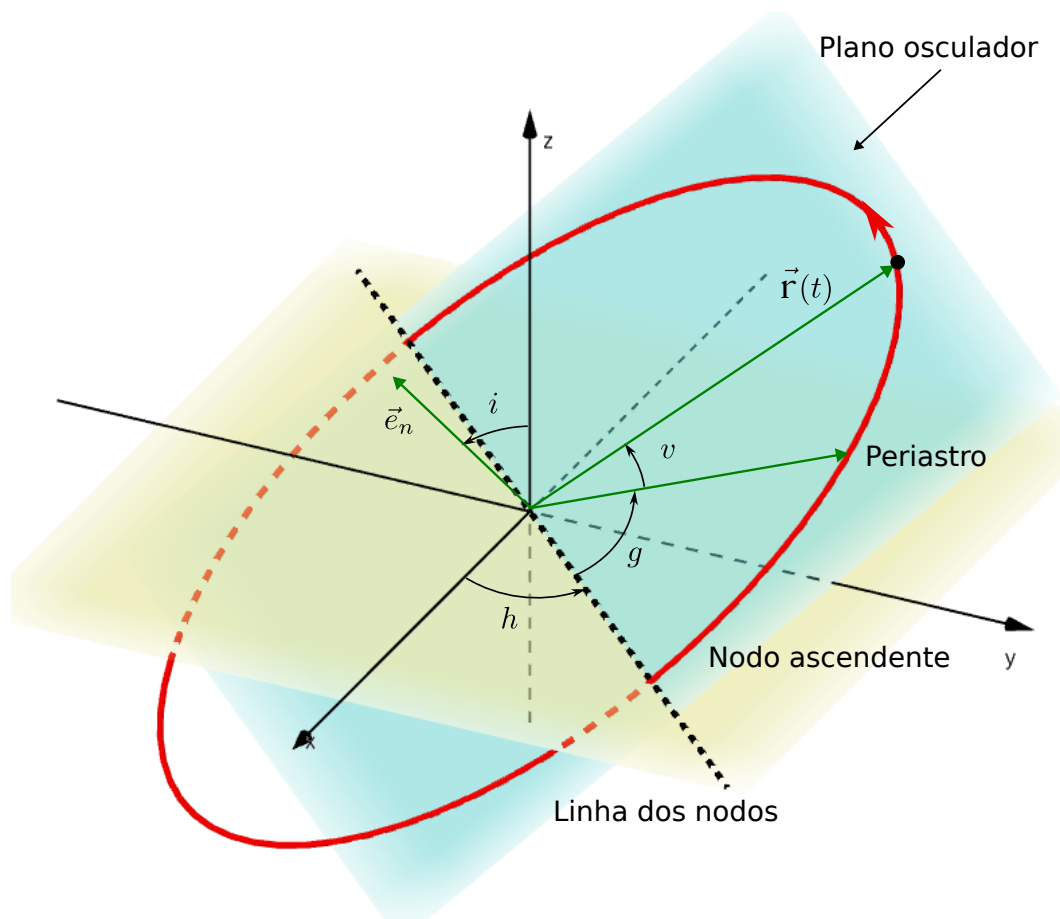


Figura 3.1: Plano osculador da órbita de Kepler no espaço.

Na Figura 3.1 são apresentados também quatro ângulos ( $i, h, v, g$ ) relacionados às variáveis das coordenadas de Delaunay, que serão introduzidas posteriormente. Su-

pondo que  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  e  $\vec{e}_z$  sejam vetores unitários direcionais de um sistema de coordenadas dextrógiro, podemos definir o cosseno do ângulo  $i$ , a inclinação do plano osculador em relação ao plano  $xy$ , com base no vetor unitário normal ao plano osculador, denotado por  $\vec{e}_n$ , da seguinte maneira

$$\langle \vec{e}_n, \vec{e}_z \rangle = \|\vec{e}_n\| \|\vec{e}_z\| \cos(i).$$

Como os vetores envolvidos na equação (3.1) são unitários, temos que

$$\cos(i) = \langle \vec{e}_n, \vec{e}_z \rangle, \quad (3.20)$$

Se o plano osculador não é coincidente com o plano  $(x, y)$ , a interseção entre este último e o plano osculador é uma linha denominada “linha dos nodos”, como na Figura 3.1, com vetor diretor dado por

$$\vec{e}_{an} = \langle \vec{e}_b, \vec{e}_z \rangle \vec{e}_r - \langle \vec{e}_r, \vec{e}_z \rangle \vec{e}_b. \quad (3.21)$$

Sendo  $h$  o ângulo entre a linha dos nodos e o eixo  $x$ , podemos obter  $\cos(h)$  da mesma forma que fizemos para  $\cos(i)$ , chegando ao seguinte resultado

$$\cos(h) = \frac{1}{|\vec{e}_{an}|} \langle \vec{e}_{an}, \vec{e}_z \rangle. \quad (3.22)$$

Podemos observar que  $h(t)$  será contínuo ao longo da órbita, no entanto torna-se indefinido quando o plano osculador coincide com o plano  $(x, y)$ .

Agora vamos definir a matriz de transformação para os ângulos de Euler  $(i, h)$ , utilizando duas matrizes de rotação

$$M_3(h) = \begin{bmatrix} \cos(h) & -\text{sen}(h) & 0 \\ \text{sen}(h) & \cos(h) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

$$M_1(i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & -\text{sen}(i) \\ 0 & \text{sen}(i) & \cos(i) \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$



A matriz de transformação  $M$  é definida por  $M = M_3(h) \cdot M_1(i)$ , ou seja

$$M = \begin{bmatrix} \cos(h) & -\operatorname{sen}(h) \cos(i) & \operatorname{sen}(h) \operatorname{sen}(i) \\ \operatorname{sen}(h) & \cos(h) \cos(i) & -\cos(h) \operatorname{sen}(i) \\ 0 & \operatorname{sen}(i) & \cos(i) \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Em (3.25) apresentamos uma matriz de transformação que converte um vetor representado na base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_b, \vec{e}_n)$  para a representação do mesmo vetor na base canônica  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Dessa forma, considerando  $(x, y, z)$  como as coordenadas cartesianas do vetor e  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  como suas coordenadas no referencial móvel, temos a seguinte relação

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x} \cos(h) - \tilde{y} \operatorname{sen}(h) \cos(i) + \tilde{z} \operatorname{sen}(h) \operatorname{sen}(i), \\ y &= \tilde{x} \operatorname{sen}(h) + \tilde{y} \cos(h) \cos(i) - \tilde{z} \cos(h) \operatorname{sen}(i), \\ z &= \tilde{y} \operatorname{sen}(i) + \tilde{z} \cos(i). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ao introduzir as coordenadas polares no plano osculador, temos

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= r \cos(\theta), \\ \tilde{y} &= r \operatorname{sen}(\theta). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Portanto, a representação do vetor posição na base móvel, cujos dois primeiros vetores são tangentes ao planos osculador, fica da seguinte forma

$$\vec{r}(t) = (r(t) \cos(\theta(t)), r(t) \operatorname{sen}(\theta(t)), 0). \quad (3.29)$$

Utilizando a matriz de transformação  $M$ , é possível expressar os vetores posição  $\vec{r}$  e velocidade  $\dot{\vec{r}}$  em termos do sistema cartesiano de coordenadas original

$$\vec{r} = M \begin{bmatrix} r \cos(\theta) \\ r \operatorname{sen}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = M \begin{bmatrix} \dot{r} \cos(\theta) - r \dot{\theta} \operatorname{sen}(\theta) \\ \dot{r} \operatorname{sen}(\theta) + r \dot{\theta} \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Ao realizar a transformação, estamos efetuando uma rotação das coordenadas no espaço de fase. É importante lembrar da expressão para a energia na equação (3.10) e considerar que a matriz  $M$  é ortogonal, e portanto  $\langle M\vec{X}, M\vec{Y} \rangle = \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle$ ,  $\forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{R}^3$ . Essa propriedade implica que a expressão da energia permanece inalterada pela transformação, ou seja, a invariância da energia é preservada,  $E(M\vec{r}, M\dot{\vec{r}}) = E(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ .

## 3.2 Movimento de Kepler perturbado e coordenadas de Delaunay

Nesta seção, iniciaremos uma análise da influência de uma força  $\vec{F}$  em uma órbita Kepleriana, introduzindo novas variáveis chamadas de elementos de Delaunay, de forma que o sistema (3.8), quando reformulado nas novas coordenadas, se torne adequado para tomar médias.

Considere o sistema de referência ortonormal  $(\vec{e}_r, \vec{e}_b, \vec{e}_n)$  mostrado nas equações (3.16), (3.17) e (3.18) e seja

$$\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_b \vec{e}_b + F_n \vec{e}_n. \quad (3.31)$$

As funções  $L, G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , duas das componentes da transformação de coordenadas de Delaunay, são definidas por

$$L(\vec{X}, \vec{Y}) = \left(-2E(\vec{X}, \vec{Y})\right)^{-1/2}, \quad G(\vec{X}, \vec{Y}) = |\vec{A}(\vec{X}, \vec{Y})|, \quad (3.32)$$

onde a energia  $E$  é assumida negativa, desde que perturbaremos apenas as órbitas elípticas.

Como  $L = \frac{1}{\sqrt{-2E}}$ ,  $\dot{L} = \frac{dL}{dt} = -\frac{1}{2}(-2E)^{-3/2} \frac{dE}{dt}$ . Pela equação (3.11), segue que

$$\dot{L} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{-2E}} \right)^3 (-2\langle \vec{F}, \vec{V} \rangle).$$

Isso mostra que

$$\dot{L} = L^3 \langle \vec{F}, \vec{V} \rangle. \quad (3.33)$$

Por outro lado, observe que  $G(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \sqrt{\langle \vec{r} \times \dot{\vec{r}}, \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \rangle}$ . Então,

$$\frac{dG}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\langle \vec{r} \times \dot{\vec{r}}, \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \rangle}} \langle \vec{r} \times \dot{\vec{r}}, \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \rangle = \frac{1}{G} \langle \vec{r} \times \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \rangle = \frac{1}{G} \langle \vec{r} \times \dot{\vec{r}}, \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \rangle.$$

Pela equação de movimento (3.8), obtemos

$$\frac{dG}{dt} = \frac{1}{G} \langle \vec{r} \times \dot{\vec{r}}, \vec{r} \times \left( -\frac{1}{r^3} \vec{r} + \vec{F} \right) \rangle = \frac{1}{G} \langle \vec{r} \times \dot{\vec{r}}, \vec{r} \times \vec{F} \rangle,$$

logo

$$\dot{G} = \frac{1}{G} \langle \vec{r} \times \dot{\vec{r}}, \vec{r} \times \vec{F} \rangle. \quad (3.34)$$

Lembremos-nos das seguintes propriedades vetoriais

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \times \vec{\gamma} \rangle = \langle \vec{\gamma}, \vec{\alpha} \times \vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \times \vec{\alpha} \rangle,$$

$$(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = \langle \vec{\gamma}, \vec{\alpha} \rangle \vec{\beta} - \langle \vec{\gamma}, \vec{\beta} \rangle \vec{\alpha}.$$

Aplicando em (3.34), temos

$$\dot{G} = \frac{1}{G} \langle \vec{r} \times \dot{\vec{r}}, \vec{r} \times \vec{F} \rangle = \frac{1}{G} \langle \vec{F}, (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r} \rangle = \frac{1}{G} \langle \vec{F}, rG\vec{e}_b \rangle = \frac{rG}{G} \langle \vec{F}, \vec{e}_b \rangle, \quad (3.35)$$

assim encontramos a primeira equação diferencial das coordenadas de Delaunay

$$\dot{G} = rF_b. \quad (3.36)$$

Por outro lado, usando a fórmula para o produto vetorial triplo e a igualdade  $r\dot{r} = \langle \vec{r}, \dot{\vec{r}} \rangle$  podemos reescrever a equação (3.33). De fato, note que

$$r^2 = \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle \Rightarrow 2r\dot{r} = 2\langle \vec{r}, \dot{\vec{r}} \rangle \Rightarrow \dot{r} = \frac{1}{r} \langle \vec{r}, \dot{\vec{r}} \rangle,$$

por outro lado pelas equações (3.16), (3.18) segue que

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + \frac{G}{r}\vec{e}_b. \quad (3.37)$$

Como  $\dot{L} = L^3 \langle \dot{\vec{r}}, \vec{F} \rangle = L^3 (\langle \vec{F}, \dot{r}\vec{e}_r + \frac{G}{r}\vec{e}_b \rangle) = L^3 (\langle \vec{F}, \dot{r}\vec{e}_r \rangle + \langle \vec{F}, \frac{G}{r}\vec{e}_b \rangle) = L^3 (\dot{r}\langle \vec{F}, \vec{e}_r \rangle + \frac{G}{r}\langle \vec{F}, \vec{e}_b \rangle)$ , portanto

$$\dot{L} = L^3 (\dot{r}F_r + \frac{G}{r}F_b). \quad (3.38)$$

Dessa forma, os resultados dos elementos de Delaunay,  $L$  e  $G$ , satisfazem as seguintes equações diferenciais

$$\dot{L} = L^3 (\dot{r}F_r + \frac{G}{r}F_b), \quad \dot{G} = rF_b. \quad (3.39)$$

Se a força  $\vec{F}$  não for nula, então as relações encontradas no Capítulo 2 para as variáveis relacionadas ao plano osculador da órbita de Kepler (Figura 2.4) ainda são válidas e, portanto,

$$G = \sqrt{a(1 - e^2)}, \quad (3.40)$$

pela equação (2.41), onde  $0 \leq e < 1$  é a excentricidade da órbita elíptica e  $a > 0$  seu semi-eixo maior. Além disso, a partir de (2.38) e (3.37), a energia orbital do problema de Kepler é dada por

$$E = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{G^2}{2r^2} - \frac{1}{r} = \frac{G^4 e^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi}{(1 + e \cos \phi)^4} + \frac{G^2 (1 + e \cos \phi)^2}{2G^4} - \frac{(1 + e \cos \phi)}{G^2} = -\frac{1 - e^2}{2G^2} = -(2a)^{-1}, \quad (3.41)$$

de onde concluímos

$$L = \sqrt{a}, \quad e^2 = 1 - \frac{G^2}{L^2}. \quad (3.42)$$

Resolvendo a equação (3.41) para  $\dot{r}^2$ , segue que  $\dot{r}^2 = -\frac{1}{ar^2}(r - a(1 - e))(r - a(1 + e))$ , e substituindo  $r$  da (2.38), obtemos

$$\dot{r} = \frac{e \operatorname{sen} v}{G}, \quad (3.43)$$

onde  $v := \theta - g$  é a anomalia verdadeira. Logo, o sistema (3.39) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\dot{L} = L^3 \left( F_r \frac{e}{G} \operatorname{sen} v + \frac{G}{r} F_b \right), \quad \dot{G} = r F_b. \quad (3.44)$$

A variável de Delaunay  $H$ , a componente vertical do momento angular, é definida por  $H := \langle \vec{A}, \vec{e}_z \rangle = G \langle \frac{1}{G} \dot{\vec{r}} \times \vec{r}, \vec{e}_z \rangle = G \cos(i)$ , onde  $i$  é o ângulo de inclinação do plano

osculador tal como evidenciamos na equação (3.20). Importante ressaltar que no caso em que a órbita é planar, então  $H = G$ . Por outro lado, se a órbita é espacial, então  $H$  e  $G$  são independentes. Para encontrar uma expressão para  $\dot{H}$ , vamos primeiro lembrar as equações de transformação (3.26). Como  $\vec{e}_n$  possui coordenadas  $(0, 0, 1)$  na base móvel, segue-se que as coordenadas cartesianas originais de  $\vec{e}_n$  são a terceira coluna da matriz de transformação (3.25), ou seja

$$\vec{e}_n = (\text{sen}(h) \text{sen}(i), -\text{cos}(h) \text{sen}(i), \text{cos}(i)). \quad (3.45)$$

Pelas equações (3.30) segue que

$$\vec{r} = M \begin{bmatrix} r \cos(\theta(t)) \\ r \text{sen}(\theta(t)) \\ 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(h) - \text{sen}(\theta) \text{sen}(h) \cos(i) \\ \cos(\theta) \text{sen}(h) + \text{sen}(\theta) \cos(h) \cos(i) \\ \text{sen}(\theta) \text{sen}(i) \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Usando as equações (3.30) e (3.45), através do produto vetorial obteremos o vetor  $\vec{e}_b$  em coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} \vec{e}_b &= \vec{e}_n \times \vec{e}_r = \frac{1}{r} \vec{e}_n \times \vec{r} \\ &= \begin{bmatrix} -\text{cos}(i) \cos(\theta) \text{sen}(h) - \text{cos}(h) \text{sen}(\theta) \\ \text{cos}(h) \cos(i) \cos(\theta) - \text{sen}(h) \text{sen}(\theta) \\ \text{cos}(\theta) \text{sen}(i) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Ao diferenciar ambos os membros da identidade  $G\vec{e}_n = \vec{A}$ , utilizando a equação  $\vec{e}_r \times \vec{e}_b = \vec{e}_n$ , e utilizando a identidade exibida em (3.12), conclui-se que  $G\dot{\vec{e}}_n = \dot{\vec{A}} - \dot{G}\vec{e}_n = r\vec{e}_r \times \dot{\vec{F}} - rF_b\dot{\vec{e}}_n = r(F_b\vec{e}_r \times \dot{\vec{e}}_b + F_n\vec{e}_r \times \dot{\vec{e}}_n) - rF_b\dot{\vec{e}}_n$ , então

$$G\dot{\vec{e}}_n = -rF_n\dot{\vec{e}}_b. \quad (3.48)$$

Portanto, note que a terceira coordenada do vetor  $\vec{e}_n$  é  $\text{cos}(i)$  e a sua derivada é  $-\text{sen}(i)\frac{di}{dt}$ . Por outro lado, a terceira coordenada do vetor  $\vec{e}_b$  é  $\text{cos}(\theta)\text{sen}(i)$ , logo podemos, pela equação (3.48), escrever

$$-G \text{sen}(i) \frac{di}{dt} = -rF_n \text{cos}(\theta) \text{sen}(i) \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{rF_n \text{cos}(\theta) \text{sen}(i)}{-G \text{sen}(i)} = \frac{rF_n}{G} \text{cos}(\theta). \quad (3.49)$$

De modo análogo, se derivarmos a equação (3.45) na primeira de suas coordenadas, utilizando a equação (3.48), podemos resolver a equação em relação a  $\dot{h}$ . Sendo assim, temos

$$\frac{di}{dt} = \frac{rF_n}{G} \cos(\theta), \quad \dot{h} = \frac{rF_n \sin(\theta)}{G \sin(i)}. \quad (3.50)$$

Já encontramos a equação diferencial para  $\dot{h}$ , agora vamos encontrar para  $\dot{H}$ . Para isso, observe que como  $H = G \cos(i)$ , temos  $\dot{H} = \dot{G} \cos(i) - G \sin(i) \frac{di}{dt}$ , usando o resultado evidenciado em (3.50) temos

$$\dot{H} = r(F_b \cos(i) - F_n \sin(i)) \cos(\theta). \quad (3.51)$$

Com isso e pela definição de anomalia verdadeira, ou seja,  $\theta = g + v$  podemos reescrever as equações diferenciais (3.50) e (3.51) da seguinte forma

$$\dot{h} = \frac{rF_n \sin(g+v)}{G \sin(i)}, \quad \dot{H} = r(F_b \cos(i) - F_n \sin(i)) \cos(g+v). \quad (3.52)$$

Usando a fórmula para  $\dot{\vec{r}}$  dada na equação (3.37), a identidade  $\langle \vec{e}_r, \vec{e}_z \rangle = \sin(\theta) \sin(i)$  derivada da equação (3.46) e a equação  $\langle \vec{e}_b, \vec{e}_z \rangle = \cos(\theta) \sin(i)$  da equação (3.47), temos

$$\langle \dot{\vec{r}}, \vec{e}_b \rangle = \langle \dot{r} \vec{e}_r + \frac{G}{r} \vec{e}_b, \vec{e}_b \rangle = \dot{r} \langle \vec{e}_r, \vec{e}_z \rangle + \frac{G}{r} \langle \vec{e}_b, \vec{e}_z \rangle,$$

e portanto

$$\langle \dot{\vec{r}}, \vec{e}_b \rangle = \dot{r} \sin(i) \sin(\theta) + \frac{G}{r} \cos(\theta) \sin(i). \quad (3.53)$$

Por outro lado, tomando a derivada da terceira coordenada do  $\vec{r}$  em (3.30) temos

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{r}, \vec{e}_z \rangle = \frac{d}{dt} (r \sin(i) \sin(\theta)) = \dot{r} \sin(i) \sin(\theta) + r \cos(i) \frac{di}{dt} \sin(\theta) + r \sin(i) \sin(\theta) \dot{\theta}$$

e pela (3.50) segue que

$$\dot{r}_z = \frac{d}{dt} \langle \vec{r}, \vec{e}_z \rangle = \dot{r} \sin(i) \sin(\theta) + r \cos(i) \frac{rF_n}{G} \sin(\theta) + r \sin(i) \sin(\theta) \dot{\theta},$$

isolando  $\dot{\theta}$  temos

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{r}_z G \csc(i) \sec(\theta) - F_n r^2 \cot(i) \sin(\theta) - \dot{r} G \tan(\theta)}{Gr}. \quad (3.54)$$

Podemos também obter uma expressão para  $\dot{r}_z$  através do produto interno de (3.37) com  $\vec{e}_z$ , resultando em

$$\dot{r}_z = \langle \dot{\vec{r}}, \vec{e}_z \rangle = \dot{r} \sin(i) \sin(\theta) + \frac{G}{r} \sin(i) \cos(\theta). \quad (3.55)$$

Substituindo (3.55) e (3.43) em (3.54), temos

$$\dot{\theta} = \frac{G}{r^2} - \frac{rF_n \cot(i) \sin(\theta)}{G}. \quad (3.56)$$

Pela equação (2.38) e (2.33), podemos escrever

$$r = \frac{G^2}{1 + e \cos(v)}. \quad (3.57)$$

Vamos resolver para  $\dot{v}$  na equação obtida pela diferenciação da equação (3.57). Além disso, se usarmos a identidade  $1 - e^2 = \frac{G^2}{L^2}$  para encontrar uma expressão para  $\dot{e}$ , substituímos  $\dot{L}$  e  $\dot{G}$  usando a equação exibida na (3.39) e substituímos  $\dot{r}$  usando (3.43), então, após algumas manipulações algébricas simples temos

$$\dot{v} = \frac{G}{r^2} + \frac{F_r}{G} e \cos(v) + F_b \frac{G^2}{re \sin(v)} \left( \frac{G \cos(v)}{e} - \frac{2r}{G} - \frac{r^2 \cos(v)}{eL^2G} \right).$$

Uma expressão mais simples para  $\dot{v}$  é obtida substituindo o valor de  $r$  da equação (3.57) para obter

$$\dot{v} = \frac{G}{r^2} + \frac{F_r}{G} e \cos(v) - \frac{F_b G}{e} \left( 1 + \frac{r}{G^2} \right) \sin(v). \quad (3.58)$$

Lembramos da equação (2.38) e usamos a definição de  $g$ , o argumento do periastro, como  $g := \theta - v$ . Usando as equações (3.56) e (3.43), a derivada temporal  $\dot{g}$  é

$$\dot{g} = -F_r \frac{G}{e} \cos(v) + F_b \frac{G}{e} \left( 1 + \frac{r}{G^2} \right) \sin(v) - F_n \frac{r \cos(i)}{G \sin(i)} \sin(g + v). \quad (3.59)$$

O último elemento de Delaunay, chamado de anomalia média, é definido com a ajuda de um ângulo auxiliar  $u$ , a anomalia excêntrica, via equação de Kepler

$$\ell = u - e \sin(u), \quad (3.60)$$

onde  $u$  é o único ângulo tal que

$$\cos(u) = \frac{e + \cos(v)}{1 + e \cos(v)}, \quad \sin(u) = \frac{1 - e \cos(v)}{\sqrt{1 - e^2}} \sin(v). \quad (3.61)$$

Derivando a equação (3.60), segue

$$\dot{\ell} = -\dot{e} \sin(u) + \dot{u} - e \cos(u) \dot{u}. \quad (3.62)$$

Além disso, pelas equações (3.57) e (3.61), segue que

$$r = \frac{G^2}{1 + e \cos(v)} \Rightarrow r = \frac{(1 - e \cos(v))G^2}{1 - e^2}. \quad (3.63)$$

Usando a equação (3.42), temos

$$r = L^2(1 - e \cos(u)). \quad (3.64)$$

Derivando a (3.64) segue

$$\dot{r} = 2(1 - e \cos(u))L\dot{L} + L^2(-\dot{e} \cos(u) + e \sin(u)\dot{u}), \quad (3.65)$$

e resolvendo para  $\dot{u}$ , simplificando com as equações 3.44, obtemos

$$\dot{u} = \frac{\csc(u)}{e^2 G L^2 r} \left( 2e^3 F_r L^4 r \cos(u) \sin(v) + 2e^2 F_b G^2 L^4 \cos(u) - 2e^2 F_r L^4 r \sin(v) \right. \\ \left. + e^2 r \sin(v) - 2e F_b G^2 L^4 + e F_r G^2 L^2 r \cos(u) \sin(v) + F_b G^4 L^2 \cos(u) - F_b G^2 r^2 \cos(u) \right).$$

Note que, tomando em consideração as relações dadas em (3.64) e também (3.62), e assumindo que  $L > 0$  e  $G > 0$ , temos que

$$\dot{\ell} = \frac{1}{L^3} + \frac{r}{2L} [(-2e + \cos(v) + e \cos^2(v))F_r - (2 + e \cos(v) \sin(v))F_b]. \quad (3.66)$$

Em resumo, os elementos de Delaunay ( $L$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $\ell$ ,  $g$ ,  $h$ ), destacados em (3.44), (3.52), (3.59) e (3.66) para um movimento Kepleriano perturbado por uma força  $\vec{F}$



satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}
\dot{L} &= L^3 \left( F_r \frac{e}{G} \operatorname{sen}(v) + \frac{G}{r} F_b \right), \\
\dot{G} &= r F_b, \\
\dot{H} &= r(F_b \cos(i) - F_n \operatorname{sen}(i)) \cos(h + v), \\
\dot{\ell} &= \frac{1}{L^3} + \frac{r}{2L} \left[ (-2e + \cos(v) + e \cos^2(v)) F_r - (2 + e \cos v) \operatorname{sen}(v) F_b \right], \\
\dot{g} &= -F_r \frac{G}{e} \cos(v) + F_b \frac{G}{e} \left( 1 + \frac{r}{G^2} \right) \operatorname{sen}(v) - F_n \frac{r \cos(i)}{G \operatorname{sen}(i)} \operatorname{sen}(g + v), \\
\dot{h} &= \frac{r F_n \operatorname{sen}(h + v)}{G \operatorname{sen}(i)}.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

As demais variáveis auxiliares usadas ao longo da dedução, como  $i$ ,  $v$  e  $u$  são todas obtidas através das seis variáveis do sistema (3.67).

### 3.3 Aplicação: satélite orbitando um planeta oblato

A lei da gravitação universal estabelece que duas partículas (massas pontuais) se atraem de acordo com a lei do inverso do quadrado da distância. A Terra é composta por um contínuo de partículas. No entanto, se a Terra for idealizada como uma esfera com massa uniformemente distribuída, então a força gravitacional exercida sobre um satélite obedece à lei do inverso do quadrado para a Terra, considerada como uma massa pontual concentrada no centro da esfera. No entanto, devido ao formato real da Terra ser aproximadamente um esferoide oblato, achatado nos polos, a força gravitacional exercida sobre um satélite depende da inclinação da posição do satélite em relação ao equador.

Usaremos coordenadas cartesianas de modo que a origem esteja no centro de massa de um planeta idealizado visto como um esferoide oblato axialmente simétrico, cujo eixo de simetria é o eixo  $z$ . A aproximação “multipolar” do potencial gravitacional correspondente tem a forma

$$-\frac{G_U m_1 r}{r} + U(r, z) + O\left(\left(\frac{R_0}{r}\right)^3\right), \tag{3.68}$$

onde

$$U = -\frac{1}{2} \frac{G_U m_1 J_2 R_0^2}{r^3} \left( 1 - \frac{3z^2}{r^2} \right), \quad (3.69)$$

sendo  $m_1$  a massa do planeta,  $R_0$  o raio equatorial, e  $J_2$  uma constante relacionada aos momentos de inércia do planeta. Observe que o primeiro termo da expansão multipolar é apenas a lei da gravitação de massa pontual que determina o movimento de Kepler. Assim, sob essa suposição e em nossa notação, se denotarmos por  $m_2 \ll m_1$  a massa do satélite, então  $\vec{F}_2 = -m_2 \nabla U$  e a equação de movimento para o satélite é dada por

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G_U m_1}{r^3} \vec{r} - \nabla U. \quad (3.70)$$

Para usar as fórmulas gerais de transformação para variáveis de Delaunay conforme apresentadas na expressão (3.67), primeiro devemos reescalar o sistema (3.70). Para isso, seja  $\beta$  uma constante medida em segundos e defina  $\alpha := (G_0 m_1)^{1/3} \beta^{2/3}$ , de modo que  $\alpha$  seja medida em metros. Em seguida, realizando a reescala, similar à derivada na equação (3.7), obtemos a equação de movimento

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{1}{r^3} \vec{r} + \vec{F}, \quad (3.71)$$

onde as três componentes da força  $\vec{F}$  geradas pelo achatamento do planeta são

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\varepsilon}{r^5} \left( 1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) x, \\ F_y &= -\frac{\varepsilon}{r^5} \left( 1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) y, \\ F_z &= -\frac{\varepsilon}{r^5} \left( 3 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) z, \end{aligned} \quad (3.72)$$

com

$$\varepsilon := \frac{3}{2} J_2 \frac{R_o^2}{(G_U m_1)^{2/3} \beta^{4/3}}.$$

Observe que  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ , como definidos em (3.72) em coordenadas cartesianas. Isso significa que  $\vec{F} = F_x \hat{e}_x + F_y \hat{e}_y + F_z \hat{e}_z$ . Desejamos escrever isso na forma  $\vec{F} = F_r \hat{e}_r + F_n \hat{e}_n + F_b \hat{e}_b$ , sendo a base ortonormal formada pelos vetores  $\hat{e}_r$ ,  $\hat{e}_n$  e  $\hat{e}_b$  conhecida.

Usando o fato da base ser ortonormal, temos

$$F_r = \vec{F} \cdot \hat{e}_r = F_x(\cos(h) \cos(\theta) - \text{sen}(h) \text{sen}(\theta) \cos(i)) \\ + F_y(\text{sen}(h) \cos(\theta) + \text{sen}(\theta) \cos(h) \cos(i)) + F_z \text{sen}(\theta) \text{sen}(i). \quad (3.73)$$

Substituindo as expressões de (3.72), temos

$$F_r = -\frac{\varepsilon}{r^4}(1 - 3 \text{sen}^2(g + v) \text{sen}^2(i)). \quad (3.74)$$

De modo análogo, vemos que

$$F_n = \vec{F} \cdot \hat{e}_n = F_x \text{sen}(h) \text{sen}(i) - F_y \cos(h) \text{sen}(i) + F_z \cos(i), \quad (3.75)$$

que pelas equações (3.72) pode ser reescrita como

$$F_n = -\frac{\varepsilon}{r^4} \text{sen}(g + v) \text{sen}(2i). \quad (3.76)$$

Finalmente

$$F_b = \vec{F} \cdot \hat{e}_b \\ = F_x(\text{sen}(h) \cos(\theta)(-\cos(i)) - \text{sen}(\theta) \cos(h)) \\ + F_y(\cos(h) \cos(\theta) \cos(i) - \text{sen}(h) \text{sen}(\theta)) \\ + F_z \cos(\theta) \text{sen}(i). \quad (3.77)$$

Novamente substituindo as expressões de (3.72) e fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos

$$F_b = -\frac{\varepsilon}{r^4} \text{sen}(2g + 2v) \text{sen}^2(2i). \quad (3.78)$$

### 3.3.1 Equações do movimento exatas

As equações (3.74), (3.76) e (3.78) são expressões dadas na nova base, e com elas vamos calcular as equações do movimento e suas respectivas médias. As médias devem ser tomadas em relação à anomalia média  $\ell$ , sendo um ângulo rápido e também uma

variável canônica. No entanto, percebemos que as expressões dependem de  $\ell$  apenas implicitamente, sendo necessário fazer uma mudança de variáveis na integral de média.

Usando as equações (3.60), podemos mostrar que

$$\frac{\partial v}{\partial \ell} = \frac{GL^3}{r^2}, \quad (3.79)$$

e portanto, se  $f(\ell)$  é uma função escalar, sua média pode ser calculada em relação à anomalia verdadeira na forma

$$\langle f \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\ell) d\ell = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(v) \frac{\partial \ell}{\partial v} dv = \frac{1}{2\pi GL^3} \int_0^{2\pi} f(v) r(v)^2 dv. \quad (3.80)$$

**Proposição 3.3.1.** *A média da equação diferencial  $\dot{L}$ , calculada em relação à variável  $\ell$ , é nula.*

*Demonstração.* Pela equação diferencial dada no sistema (3.67). Tomando (3.74) e (3.78) temos

$$\begin{aligned} \dot{L} = & -\frac{L^3 \varepsilon [er \operatorname{sen}(v)(-3 \cos(2(g-i+v)) - 3 \cos(2(g+i+v)) + 6 \cos(2(g+v)) + 6 \cos(2i) + 2)]}{8Gr^5} \\ & + \frac{8G^2 \operatorname{sen}^2(i) \operatorname{sen}(2(g+v))}{8Gr^5}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Portanto, podemos calcular agora a média de  $\dot{L}$ . Usando a mudança de variáveis (3.80), a média pode ser calculada como

$$\begin{aligned} \langle \dot{L} \rangle = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{\varepsilon (e \cos(v) + 1)^2}{8G^6} (8 \operatorname{sen}^2(i) (e \cos(v) + 1) \operatorname{sen}(2(g+v))) \right. \\ & \left. + e \operatorname{sen}(v)(-3 \cos(2(g-i+v)) - 3 \cos(2(g+i+v)) + 6 \cos(2(g+v)) + 6 \cos(2i) + 2) \right] dv = 0. \end{aligned} \quad (3.82)$$

□

**Proposição 3.3.2.** *A média da equação diferencial  $\dot{G}$ , calculada em relação à variável  $\ell$ , é nula.*

*Demonstração.* Para a segunda equação dada em (3.67), e correndo a (3.78) lembrando que  $\theta = g + v$  temos

$$\dot{G} = rF_b = -\frac{\varepsilon \operatorname{sen}^2(i) \operatorname{sen}(2(g+v))}{r^3}. \quad (3.83)$$

Pela equação (3.83) e multiplicando por  $\frac{r^2}{GL^3}$ , com  $r$  dado por (3.63), temos

$$-\frac{\varepsilon \operatorname{sen}^2(i)(e \cos(v) + 1) \operatorname{sen}(2(g+v))}{G^3 L^3}. \quad (3.84)$$

Integrando, temos

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{\varepsilon \operatorname{sen}^2(i)(e \cos v + 1) \operatorname{sen}(2(g+v))}{G^3 L^3} \right] dv = 0. \quad (3.85)$$

□

Notamos que a equação para  $H$  é  $\dot{H} = rF_b \cos(i) - F_n \operatorname{sen}(i) \cos(h+v) = 0$ . Dessa forma,  $H$  a componente vertical do momento angular é uma quantidade conservada deste sistema, dada sua simetria de revolução em torno do eixo vertical. Isso significa que não é necessário realizar uma média.

Notamos também que não faz sentido calcular a média da equação de  $\dot{l}$  em relação a  $\ell$ , pois o procedimento de média elimina esta variável do sistema de equações e do campo médio.

**Proposição 3.3.3.** *A média da equação diferencial  $\dot{h}$ , calculada em relação à variável  $\ell$ , não é nula.*

*Demonstração.* A média da equação diferencial para  $\dot{h}$ , calculada em relação à variável  $\ell$ , ao contrário das demais, não é nula. Fazendo a média de  $\dot{h}$ , a partir de (3.67), pelo procedimento análogo feito nos casos anteriores, concluímos que a multiplicação desta equação por (3.78) fornece

$$-\frac{2\varepsilon \cos(i) \operatorname{sen}^2(g+v)}{Gr^3}. \quad (3.86)$$

De tal modo que ao multiplicar (3.86) pelo fator de conversão temos

$$-\frac{2\varepsilon \cos(i)(e \cos(v) + 1) \operatorname{sen}^2(g + v)}{G^4 L^3}, \quad (3.87)$$

e portanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{2\varepsilon \cos(i)(e \cos(v) + 1) \operatorname{sen}^2(g + v)}{G^4 L^3} \right] dv = -\frac{\varepsilon \cos(i)}{G^4 L^3}. \quad (3.88)$$

□

**Proposição 3.3.4.** *A média da equação diferencial de  $\dot{g}$ , calculada em relação à variável  $\ell$  não é nula.*

*Demonstração.* Tomando a equação de  $\dot{g}$  dado no sistema (3.67) juntamente com (3.74), (3.76) e (3.78) fornece

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{8eGr^4} \left( 16er \cos^2(i) \operatorname{sen}^2(g + v) \right. \\ & - 8(G^2 + r) \operatorname{sen}^2(i) \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}2(g + v) \\ & \left. + G^2 \cos(v) (-3 \cos(2(g - i + v)) - 3 \cos(2(g + i + v)) + 6 \cos(2(g + v)) + 6 \cos(2i) + 2) \right), \end{aligned} \quad (3.89)$$

e para achar a sua média, basta primeiro multiplicá-la pelo fator de conversão. Feita esta manipulação algébrica segue

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{8eG^4 L^3} (1 + e \cos(v)) (2 + 6 \cos(2i) + 6 \cos(2(g + v)) - 3 \cos(2(g - i + v)) - 3 \cos(2(g + i + v))) \\ & + \frac{\varepsilon}{8eG^4 L^3} (1 + e \cos(v)) (16e \cos^2(i) \operatorname{sen}^2(g + v)) \\ & - \frac{\varepsilon}{8eG^4 L^3} (1 + e \cos(v)) (8(2 + e \cos(v)) \operatorname{sen}^2(i) \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(2(g + v))) \end{aligned}, \quad (3.90)$$

fazendo a integral de (3.90), temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\varepsilon}{8eG^4 L^3} (1 + e \cos(v)) (2 + 6 \cos(2i) + 6 \cos(2(g + v)) \right. \\ & - 3 \cos(2(g - i + v)) - 3 \cos(2(g + i + v))) \\ & + \frac{\varepsilon}{8eG^4 L^3} (1 + e \cos(v)) (16e \cos^2(i) \operatorname{sen}^2(g + v)) \\ & \left. - \frac{\varepsilon}{8eG^4 L^3} (1 + e \cos(v)) (8(2 + e \cos(v)) \operatorname{sen}^2(i) \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(2(g + v))) \right] dv \\ & = \frac{\varepsilon(3 + 5 \cos(2i))}{4G^4 L^3} \end{aligned} \quad (3.91)$$

□

Chamaremos de sistema médio o novo sistema de equações diferenciais nas variáveis  $\dot{L}$ ,  $\dot{G}$ ,  $\dot{H}$ ,  $\dot{g}$  e  $\dot{h}$ , onde o lado direito delas é obtido do sistema original por uma média em  $\ell$ . O sistema médio deste problema específico é

$$\begin{aligned}\dot{L} &= \dot{H} = \dot{G} = 0, \\ \dot{h} &= -\frac{\varepsilon \cos(i)}{G^4 L^3}, \\ \dot{g} &= -\frac{\varepsilon(3 + 5 \cos(2i))}{4G^4 L^3},\end{aligned}\tag{3.92}$$

onde  $\cos(i) = \frac{H}{G}$ .

Chegamos a um sistema analisável onde o semieixo maior da elipse osculante, o momento angular total e a componente  $z$  do momento angular são constantes em média. O argumento do periastro está sujeito a mudanças médias proporcionais a  $4 - 5 \sin^2(i)$ . Dependendo da inclinação  $i$ , o perigeu pode avançar ou retroceder, enquanto a taxa de regressão do nó ascendente é determinada pela função  $-\cos(i)$ . Em órbitas polares, a taxa de regressão média é nula. Essas observações destacam a importância da inclinação crítica, exigindo uma análise mais detalhada conforme referenciado em (Cushman, 1983).

O cálculo das médias realizado é típico em muitas aproximações de “primeira ordem” na mecânica celeste, sendo apenas um dos métodos para prever o movimento de satélites próximos a essa inclinação, conforme referenciado em (Cushman, 1983).

# Capítulo 4

## Marés e dinâmica de halteres

Neste capítulo, vamos finalmente introduzir a modelagem de efeitos de marés através do modelo de halteres, bem conhecido em trabalhos de mecânica celeste (Celletti & Sidorenko, 2008), (de Menezes Neto et al., 2022), (de Menezes Neto, 2024). O modelo de halter busca introduzir no sistema o comportamento de um corpo alongado ao interagir gravitacionalmente com outros objetos. Nas referências mais recentes (Scoppola et al., 2022), (Scoppola & Veglianti, 2023) e (Pinzari et al., 2024), no entanto, termos dissipativos foram introduzidos nas equações de movimento de forma a modelar a potência dissipada pelas deformações das marés que observamos nos planetas como a Terra, principalmente através de seus oceanos e satélites naturais.

Neste capítulo, vamos descrever a análise do modelo exibida em (Scoppola et al., 2022), para prosseguir nos próximos capítulos com uma abordagem própria, baseada na teoria qualitativa de equações diferenciais.

### 4.1 Sistema Terra-Lua

Nesta seção, desejamos estudar a evolução do sistema Terra-Lua. Derivaremos as equações de movimento em um formalismo Lagrangiano, como no Capítulo 2. Para atingir este objetivo, como mostrado na Figura 4.1, imaginamos a Terra, com massa



total  $M_E$ , como uma esfera de raio  $R_E$ , mais uma estrutura de halter simétrico com diâmetro  $2r$  e massa  $\mu$ . O parâmetro  $\mu$  depende do semi-eixo maior  $a$  da órbita do satélite, que varia ao longo do tempo. No entanto, em nosso modelo, consideramos  $\mu$  como constante. Esta suposição é justificada posteriormente pelo fato de estarmos interessados no estudo dos efeitos da dissipação nos parâmetros orbitais, como por exemplo, a circularização da órbita.

Esses efeitos possuem escalas de tempo características que são mais rápidas do que a escala de tempo característica da elongação do semi-eixo maior.

Portanto, se estudarmos a evolução do sistema por um período muito mais curto do que a última escala de tempo mencionada, podemos considerar  $a$  e  $\mu$  como constantes (Scoppola et al., 2022). Nela consideramos a Lua, denotada por  $S$ , como um ponto de massa  $m$ .

#### 4.1.1 Lagrangiana do sistema Terra-Lua

Indicamos por  $\rho$  a distância entre a Lua e o centro da Terra e chamamos  $\phi$ ,  $\theta$  e  $(\theta + \epsilon)$  as orientações angulares da Terra, da Lua e do halter em relação a uma direção fixa (eixo- $x$ ), respectivamente. Assim,  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $(\dot{\theta} + \dot{\epsilon})$  são as velocidades angulares da Terra, da Lua e do halter, respectivamente.

Sendo assim, a expressão da energia cinética orbital da Lua ( $K_m$ ) é dada por  $K_m = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2)$ . Sabemos que a Terra possui energia cinética devido aos seus movimentos de rotação e translação ao redor do Sol. Para calcular a energia cinética total da Terra, é necessário considerar todas as coordenadas envolvidas, inclusive levar em conta a integral de volume sobre as partículas que a compõem. Neste caso, observe que a distância  $\rho$  varia, mas o ângulo  $\phi$  mantém-se constante.

Observe que a energia cinética rotacional da Terra é dada por  $K_E = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2$ . Finalmente, a energia cinética do halter toma a forma  $K_d = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta} + \dot{\epsilon})^2)$ .

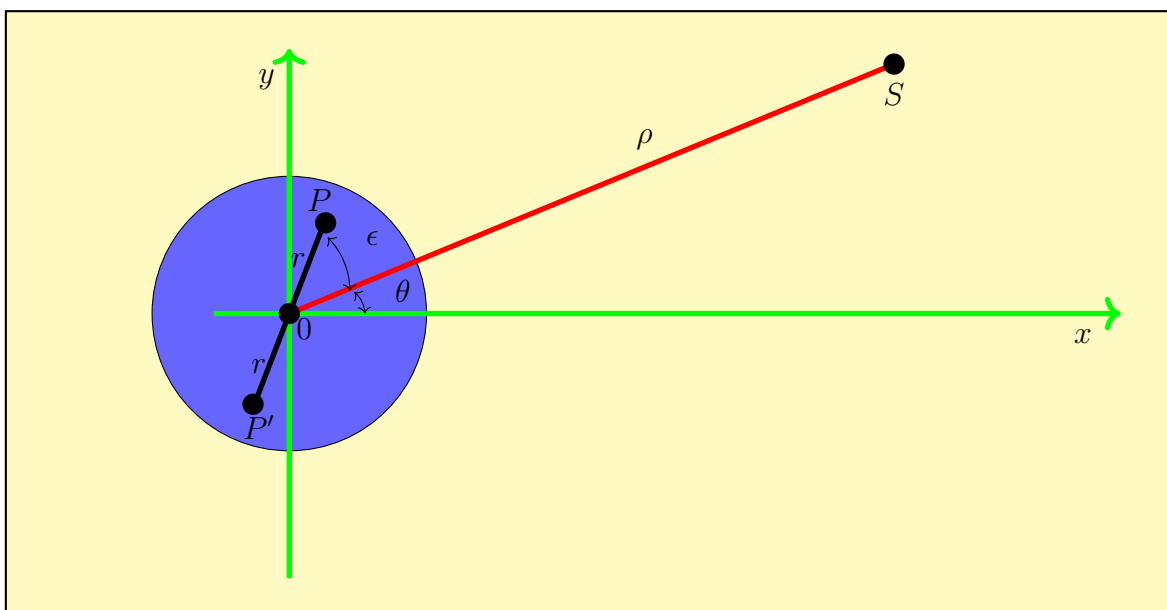


Figura 4.1: Sistema Terra-Lua.

Portanto, a energia cinética total do sistema é

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2(\dot{\theta} + \dot{\epsilon})^2, \quad (4.1)$$

onde  $I$  é o momento de inércia da Terra.

A energia potencial é a soma de três componentes de atração gravitacional, aquela entre a Terra (destituída do halter) e a Lua, aquela entre o ponto  $P$  (uma protuberância do halter) e a Lua, e aquela entre o ponto  $P'$  (a outra protuberância do halter) e a Lua.

Ainda pela Figura 4.1 vemos que, pela lei dos cossenos, a distância entre os pontos  $P$  e  $S$ , denotada aqui por  $x$ , tem a forma

$$x = \sqrt{(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\epsilon))}. \quad (4.2)$$

Além disso, a distância entre  $P'$  e  $S$  também pode ser obtida pela lei dos cossenos usando o ângulo suplementar e a identidade  $\cos(\pi - \epsilon) = -\cos(\epsilon)$ , de forma que  $d(P', S) = \sqrt{(r^2 + \rho^2 + 2r\rho \cos(\epsilon))}$ . O potencial total, portanto, tem a forma

$$V = -\frac{G_U(M_E - \mu)m}{\rho} - \frac{G_U\frac{\mu}{2}m}{\sqrt{(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\epsilon))}} - \frac{G_U\frac{\mu}{2}m}{\sqrt{(r^2 + \rho^2 + 2r\rho \cos(\epsilon))}}. \quad (4.3)$$

Em seguida vamos estudar a expansão de Taylor da energia potencial total do sistema até a segunda ordem, conhecida na literatura como aproximação de satélite.

Na equação (4.3), considere  $x = \frac{r}{\rho} \leq 1$ . Então segue que,

$$\begin{aligned} V &= -\frac{G_U(M_E - \mu)m}{\rho} - \frac{G_U\frac{\mu}{2}m}{\rho\sqrt{\left(\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 + 1 - 2\left(\frac{r}{\rho}\right)\cos(\epsilon)\right)}} - \frac{G_U\frac{\mu}{2}m}{\rho\sqrt{\left(\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 + 1 + 2\left(\frac{r}{\rho}\right)\cos(\epsilon)\right)}} \\ &= -\frac{G_U(M_E - \mu)m}{\rho} - \frac{G_U\frac{\mu}{2}m}{\rho\sqrt{(x^2 + 1 - 2x \cos(\epsilon))}} - \frac{G_U\frac{\mu}{2}m}{\rho\sqrt{(x^2 + 1 + 2x \cos(\epsilon))}} \\ &= \left(\frac{-G_U m}{\rho}\right) \left[ (M_E - \mu) + \frac{\frac{\mu}{2}}{\sqrt{x^2 + 1 - 2x \cos(\epsilon)}} + \frac{\frac{\mu}{2}}{\sqrt{x^2 + 1 + 2x \cos(\epsilon)}} \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Pela equação (4.4) assumimos que

$$f_1(x) = \frac{\frac{\mu}{2}}{\sqrt{x^2 + 1 - 2x \cos(\epsilon)}}, \quad f_2(x) = \frac{\frac{\mu}{2}}{\sqrt{x^2 + 1 + 2x \cos(\epsilon)}}. \quad (4.5)$$

Para  $x = 0$  em (4.5) temos  $f_1(0) = \frac{\mu}{2}$  e  $f_2(0) = \frac{\mu}{2}$ . Suas derivadas são

$$f_1'(x) = \frac{-\frac{\mu}{2}(x - \cos(\epsilon))}{(x^2 + 1 - 2x \cos(\epsilon))^{\frac{3}{2}}}, \quad f_2'(x) = \frac{-\frac{\mu}{2}(x + \cos(\epsilon))}{(x^2 + 1 + 2x \cos(\epsilon))^{\frac{3}{2}}} \quad (4.6)$$

Portanto, quando tomamos  $x = 0$ , obtemos  $f_1'(0) = \frac{\mu}{2} \cos(\epsilon)$  e  $f_2'(0) = -\frac{\mu}{2} \cos(\epsilon)$ .

As segundas derivadas de  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  são dadas por

$$f_1''(x) = \frac{-\frac{\mu}{2}}{(x^2 + 1 - 2x \cos(\epsilon))^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2}\mu \frac{(x - \cos(\epsilon))^2}{(x^2 + 1 - 2x \cos(\epsilon))^{\frac{5}{2}}}, \quad (4.7)$$

$$f_2''(x) = \frac{-\frac{\mu}{2}}{(x^2 + 1 + 2x \cos(\epsilon))^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2}\mu \frac{(x + \cos(\epsilon))^2}{(x^2 + 1 + 2x \cos(\epsilon))^{\frac{5}{2}}}, \quad (4.8)$$

de forma que  $f_1''(0) = -\frac{\mu}{2} + \frac{3}{2}\mu \cos^2(\epsilon)$  e  $f_2''(0) = -\frac{\mu}{2} + \frac{3}{2}\mu \cos^2(\epsilon)$ .

Então, obtivemos os polinômios de Taylor, até segunda ordem, do par de funções

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} \cos(\epsilon)x + \frac{1}{2}\left(-\frac{\mu}{2} + \frac{3}{2}\mu \cos^2(\epsilon)\right)x^2 + \mathcal{O}(x^3), \\ f_2(x) = \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2} \cos(\epsilon)x + \frac{1}{2}\left(-\frac{\mu}{2} + \frac{3}{2}\mu \cos^2(\epsilon)\right)x^2 + \mathcal{O}(x^3). \end{cases} \quad (4.9)$$

A expansão em Taylor da energia potencial (4.4), usando (4.9), tem a expressão

$$\begin{aligned} V &= \frac{-G_U m}{\rho} [M_E - \mu + \mu + (1/2)(-\mu + 3\mu \cos^2(\epsilon))x^2] + \mathcal{O}(x^3) \\ &= \frac{-G_U m M_E}{\rho} \left( 1 + \frac{\mu}{2M_E} \left( \frac{r}{\rho} \right)^2 (3 \cos^2(\epsilon) - 1) \right) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r}{\rho} \right)^3 \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Definindo  $g = G_U M_E$ , temos que (4.10) pode ser aproximada, até segunda ordem, da seguinte forma

$$V(\rho, \epsilon) = -\frac{gm}{\rho} \left( 1 + \frac{\mu}{2M_E} \left( \frac{r}{\rho} \right)^2 (3 \cos^2(\epsilon) - 1) \right). \quad (4.11)$$

Como a Lagrangiana é dada por  $\mathcal{L} = T - V$ , podemos escrever

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2(\dot{\theta} + \dot{\epsilon})^2 + \frac{gm}{\rho} \left[ 1 + \frac{\mu}{M_E} \frac{r^2}{\rho^2} \left( \frac{3}{2} \cos^2(\epsilon) - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (4.12)$$

Mais uma vez, como no Capítulo 2, as equações de movimento serão obtidas através das equações de Euler-Lagrange, (2.7), com coordenadas generalizadas  $q_1 = \rho$ ,  $q_2 = \theta$ ,  $q_3 = \phi$  e  $q_4 = \epsilon$ .

**Proposição 4.1.1.** *Para o sistema dinâmico descrito por uma partícula de massa  $m$ , tomando  $q_1 = \rho$  na equação de Euler-Lagrange concluímos que*

$$m\ddot{\rho} = m\rho\dot{\theta}^2 - \frac{mg}{\rho^2} \left( 1 + \frac{3\mu r^2}{2M_E\rho^2} (3\cos^2(\epsilon) - 1) \right).$$

*Demonstração.* Pela Equação (2.7), temos que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}$ . Portanto, a equação de movimento tem a forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho},$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) = m\rho\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial \rho},$$

como consequência concluímos que

$$m\ddot{\rho} = m\rho\dot{\theta}^2 - \frac{mg^2}{\rho} \left( 1 + \frac{3\mu r^2}{2M_E\rho^2} (3\cos^2(\epsilon) - 1) \right). \quad (4.13)$$

□

**Proposição 4.1.2.** *Para  $q_2 = \theta$ , a partir da equação de Euler-Lagrange, conclui-se que na ausência de forças dissipativas, o momento angular é conservado.*

*Demonstração.* Partindo da Lagrangiana, como descrito em (4.12), temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta} + \mu r^2(\dot{\theta} + \dot{\epsilon}), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0.$$

Portanto, temos a seguinte equação de movimento:

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\theta} + \mu r^2(\dot{\theta} + \dot{\epsilon})) = 0,$$

o que significa que temos uma função constante ao longo do movimento, ou seja, uma quantidade conservada. Em outras palavras, na ausência de outros tipos de interação ou forças dissipativas, o momento angular é constante. Podemos reescrever esta conservação como

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\theta}) + \mu r^2(\ddot{\theta} + \ddot{\epsilon}) = 0. \quad (4.14)$$

□

**Proposição 4.1.3.** Para  $q_3 = \phi$ , a partir da equação de Euler-Lagrange, conclui-se que na ausência de forças dissipativas o momento angular rotacional é conservado.

*Demonstração.* De acordo com a Equação (4.12), temos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = I\dot{\phi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0,$$

de forma que a equação de movimento é

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0,$$

o que nos leva à conclusão de que

$$I\ddot{\phi} = 0, \tag{4.15}$$

o que prova que o momento angular rotacional é constante.  $\square$

**Proposição 4.1.4.** A equação de Euler-Lagrange para  $q_4 = \epsilon$  é dada por

$$\mu r^2(\ddot{\theta} + \ddot{\epsilon}) = \frac{-3gm\mu r^2}{M_E \rho^3} \text{sen}(\epsilon) \cos(\epsilon).$$

*Demonstração.* De acordo com a Equação (4.12), temos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\epsilon}} = \mu r^2(\dot{\theta} + \dot{\epsilon}).$$

Além disso, a derivada em relação a  $\epsilon$  da Lagrangiana é igual à derivada em relação a  $\epsilon$  da energia potencial:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} = \frac{\partial V}{\partial \epsilon}.$$

Agora, calculando a derivada em relação a  $\epsilon$  da energia potencial  $V$ , obtemos

$$\frac{\partial V}{\partial \epsilon} = - \left( -\frac{gm}{\rho} \left( \frac{\mu r^2}{M_E \rho^2} (-3 \cos(\epsilon) \text{sen}(\epsilon)) \right) \right). \tag{4.16}$$

A equação de Euler-Lagrange para  $\epsilon$  é

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\epsilon}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon},$$

portanto, chegamos à seguinte equação de movimento

$$\mu r^2(\ddot{\theta} + \ddot{\epsilon}) = \frac{-3gm\mu r^2}{M_E \rho^3} \text{sen}(\epsilon) \cos(\epsilon). \tag{4.17}$$

$\square$

Agora queremos introduzir efeitos dissipativos no sistema, sendo a principal influência das marés sobre os movimentos orbital e rotacional. O mecanismo razoável para essa dissipação deve surgir do atrito entre as rotações do halter e da Terra, de forma que a dissipação deve cessar apenas na ausência de movimento relativo. Uma vez que tanto o oceano quanto a Terra podem ser considerados fluidos (assumindo que a Terra seja um fluido altamente viscoso), é razoável assumir um tipo de atrito do tipo Stokes tanto para as marés oceânicas quanto para as sólidas: ou seja, um atrito proporcional à diferença entre a velocidade angular da Terra (isto é,  $\dot{\phi}$ ) e a das protuberâncias do oceano (isto é,  $\dot{\theta} + \dot{\epsilon}$ ).

Assumimos uma força de atrito (mais precisamente, um torque de atrito) da forma

$$f = -\alpha(\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}), \quad (4.18)$$

com  $\alpha > 0$  representando um pequeno coeficiente de atrito. Embora  $\alpha$  dependa de  $\mu$ , podemos considerá-lo constante desde que consideremos  $\mu$  como constante, conforme argumentado anteriormente.

Uma abordagem padrão para tratar o atrito viscoso no formalismo Lagrangiano é usar a função de dissipação de Rayleigh  $R$ , definida como uma função tal que  $\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = f_i$ , onde  $f_i$  é a força de atrito atuando na  $i$ -ésima variável. As equações de Euler-Lagrange com função dissipação são

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}, \quad (4.19)$$

cujas propriedades podem ser encontradas, por exemplo, em (Ferraz-Mello et al., 2015).

Para que o torque (4.18) seja a derivada de  $R$  com respeito às frequências, a função de dissipação de Rayleigh só pode assumir a seguinte forma

$$R = -\frac{\alpha}{2}(\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon})^2. \quad (4.20)$$

Finalmente, é fácil mostrar que, dado que  $R$  tem a forma  $R = -\frac{1}{2}v^2(\dot{q})$  com  $v(\dot{q}) = \sum_j a_j \dot{q}_j$  (ou seja,  $v(\dot{q})$  é linear em  $\dot{q}$ ), a taxa de dissipação de energia é duas vezes a função dissipação, dada por

$$\dot{E} = 2R = -\alpha(\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon})^2. \quad (4.21)$$

Na literatura clássica, assume-se uma potência dissipada linear na diferença das velocidades angulares, o que implica em um comportamento não diferenciável na força em função de  $\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}$ , o que não acontece com a escolha feita neste trabalho.

Finalmente, as equações de Euler-Lagrange resultam nas seguintes equações para as variáveis dinâmicas  $\rho$ ,  $\phi$ ,  $\theta$ , e  $\epsilon$  quando se leva em consideração a existência de forças dissipativas

$$m\dot{\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho}, \quad (4.22)$$

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\theta}) + \mu r^2(\ddot{\theta} + \ddot{\epsilon}) = \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = \alpha(\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}), \quad (4.23)$$

$$I\ddot{\phi} = \frac{\partial R}{\partial \dot{\phi}} = -\alpha(\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}), \quad (4.24)$$

$$\mu r^2(\ddot{\theta} + \ddot{\epsilon}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\epsilon}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} + \alpha(\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}). \quad (4.25)$$

A partir dessas quatro equações, podemos estabelecer duas relações de interesse.

Em primeiro lugar, somando as equações (4.23) e (4.24), obtemos a conservação do momento angular total

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\theta}) + \mu r^2(\dot{\theta} + \dot{\epsilon}) + I\dot{\phi} = 0, \quad (4.26)$$

ou seja,  $J := m\rho^2\dot{\theta} + \mu r^2(\dot{\theta} + \dot{\epsilon}) + I\dot{\phi}$  é integral primeira do sistema.

A equação (4.26) demonstra que, mesmo na presença destas forças dissipativas, o princípio da conservação do momento angular se mantém. Nesta equação, podemos identificar três componentes do momento angular: o momento angular orbital da Lua, representado por  $(m\rho^2\dot{\theta})$ , o momento angular associado às marés, expresso por  $(\mu r^2(\dot{\theta} + \dot{\epsilon}))$  e o momento angular de rotação da Terra, descrito por  $(I\dot{\phi})$ . Um aspecto notável nessa nova abordagem é a presença desse último termo, que não estava presente no caso conservativo, reforçando que as forças dissipativas acoplam estas variáveis.

A segunda relação de interesse se torna evidente quando subtraímos a equação (4.23) da equação (4.25). Isso nos leva à equação que determina a evolução do momento angular orbital, um dos elementos de Delaunay como definido no Capítulo 3,  $G :=$



$m\rho^2\dot{\theta}$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( m\rho^2\dot{\theta} \right) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon}. \quad (4.27)$$

É importante lembrar que as equações (4.13), (4.14), (4.15) e (4.17) podem ser transformadas em um sistema Hamiltoniano, permitindo uma formulação geométrica. No entanto, devido à inclusão da função dissipativa, não é possível fazer o mesmo com o sistema de equações (4.22), (4.23), (4.24) e (4.25).

Observamos que em (4.27) o torque que a Terra exerce sobre a Lua, representado pelo termo  $(\partial \mathcal{L} / \partial \epsilon)$ , é um múltiplo de  $\sin(2\epsilon)$ . Sabemos que a função seno se anula nos ângulos de  $0^\circ$  e  $180^\circ$ . Portanto, podemos concluir que  $\sin(2\epsilon)$  se anula quando  $\epsilon = 0^\circ$  e quando  $\epsilon = 90^\circ$ .

Na Figura 4.1, quando  $\epsilon = 0^\circ$  a linha que conecta o centro de massa da Terra  $\overline{OP}$  se alinha com  $\overline{OS}$ , resultando em uma posição de equilíbrio que se espera ser estável. No entanto, quando  $\epsilon = 90^\circ$ , isso significa que os dois pontos do halter,  $P$  e  $P'$ , estão a igual distância da Lua, o que implica que o sistema está em equilíbrio. No entanto, espera-se que esse equilíbrio seja instável.

Nas equações (4.22) a (4.25), existem alguns termos desprezíveis. De fato, assumindo uma pequena excentricidade,  $\rho \approx a$ , após algumas manipulações algébricas, conclui-se de (4.16) que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} \propto \frac{\mu r^2}{M_E a^3}$  e a equação (4.27) se transforma em

$$ma^2\ddot{\theta} \propto \frac{1}{a} \left( \frac{\mu}{M_E} \frac{r^2}{a^2} \right).$$

Queremos estudar o sistema mantendo a ordem mais baixa em  $\frac{\mu r^2}{M_E a^2}$ , que é uma quantidade muito pequena. Dado que

$$\mu r^2 \ddot{\theta} \propto \frac{M_E}{m} \frac{1}{a} \left( \frac{\mu}{M_E} \frac{r^2}{a^2} \right)^2,$$

o termo  $\mu r^2 \ddot{\theta}$  em (4.23) e (4.25) pode ser desprezado. Além disso, também é razoável assumir condições iniciais tais que  $\ddot{\epsilon} = O(\ddot{\theta})$ , ou seja, a variação da velocidade angular das saliências é da mesma ordem de grandeza que a variação da velocidade angular da Lua. Portanto, o termo  $\mu r^2 \ddot{\epsilon}$  em (4.23) e (4.25) também pode ser desprezado.

Conseqüentemente, as equações simplificadas de movimento são

$$m\ddot{\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho}. \quad (4.28)$$

$$\frac{d}{dt} (m\rho^2\dot{\theta}) = \alpha (\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}). \quad (4.29)$$

$$I\ddot{\phi} = -\alpha (\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}). \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} + \alpha (\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}) = 0. \quad (4.31)$$

A partir da equação (4.29), podemos obter a equação simplificada para o momento angular orbital

$$\dot{G} = \alpha (\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}). \quad (4.32)$$

Neste caso, temos  $\dot{G} = 0$  exatamente quando a frequência orbital da Lua se iguala à frequência de rotação da maré da Terra. Por outro lado, a taxa de dissipação de energia é dada por (4.21). Esta variação da energia do sistema é determinada pela contribuição da variação de energia da Terra, a variação de energia orbital da Lua e a variação de energia do halter, a qual podemos novamente desprezar. Dessa forma, a equação (4.21) pode ser simplificada na forma

$$-\alpha (\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon})^2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 \right) + \frac{dE^{(O)}}{dt}, \quad (4.33)$$

onde  $E^{(O)}$  é a energia orbital da Lua

$$E^{(O)} := \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) - \frac{gm}{\rho}.$$

Das equações (4.30), (4.32) e (4.33), temos

$$-\alpha (\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon})^2 = -\alpha \dot{\phi} (\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}) + \frac{dE^{(O)}}{dt} \implies \frac{dE^{(O)}}{dt} = (\dot{\theta} + \dot{\epsilon}) \dot{G}. \quad (4.34)$$

Portanto, a variação da energia orbital do sistema é dada por (4.34).

Seja, neste caso,  $L$  o outro elemento de Delaunay definido como anteriormente

$$L = \frac{m^{\frac{3}{2}} g}{\sqrt{-2E^{(O)}}}, \quad (4.35)$$

de tal modo que a derivada de (4.35) em relação a  $t$  é dada por

$$\dot{L} = \frac{g\dot{E}^{(O)}}{\left(-\frac{2E^{(O)}}{m}\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.36)$$

onde lembramos que nos restringiremos apenas ao caso de energia orbital negativa, ou seja o caso de órbita limitada, de forma que a raiz quadrada em (4.35) está bem definida. Desde que a deformação da Terra é suficientemente pequena, então o movimento se dá como se a Terra fosse ponto material, como acontece no caso de formato esférico. Dessa forma, podemos admitir a solução de Kepler e suas consequências:

$$E^{(O)} = -\frac{mg}{2a} \implies \frac{-2E^{(O)}}{m} = \frac{g}{a}$$

e a terceira lei de Kepler, Proposição 2.4.3,

$$\omega^2 a^3 = g,$$

onde  $\omega = 2\pi/T$ ,  $T$  período da órbita. Portanto a (4.36) toma a forma

$$\dot{L} = \frac{g\dot{E}^{(O)}}{\left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\omega^2 a^3 \dot{E}^{(O)}}{\left(\frac{\omega^2 a^3}{a}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\omega^2 a^3 \dot{E}^{(O)}}{\omega^3 a^3} = \frac{\dot{E}^{(O)}}{\omega},$$

e portanto, de (4.34), decorre

$$\dot{L} = \frac{(\dot{\theta} + \dot{\epsilon})\dot{G}}{\omega}. \quad (4.37)$$

Na órbita elíptica, o ângulo  $\theta$  não mantém uma derivada constante. Como consequência da segunda lei de Kepler, Proposição 2.4.2, à medida que o corpo celeste se distancia, o ângulo  $\theta$  torna-se mais lento, enquanto ao se aproximar, acelera. Nesse contexto, os elementos de Delaunay desempenham um papel crucial, permitindo-nos estudar o sistema de maneira média e, assim, desconsiderar o efeito repetido da órbita da Lua sobre as demais variáveis.

Agora, observamos que diversas quantidades, como as médias  $\langle \dot{\phi} \rangle = \Omega$  e  $\langle \dot{\theta} \rangle = \omega$ , assim como a energia orbital e o momento angular orbital (e, conseqüentemente,  $L$  e  $G$ ), variam muito lentamente. Portanto, podemos calcular a média em uma órbita de  $\dot{G}$  e  $\dot{L}$ , obtendo

$$\langle \dot{G} \rangle = \langle \alpha(\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}) \rangle = \alpha(\Omega - \omega) \quad (4.38)$$

e

$$\langle \dot{L} \rangle = \left\langle \frac{\dot{\theta} + \dot{\epsilon}}{\omega} \right\rangle = \frac{\alpha}{\omega} \langle (\dot{\theta} + \dot{\epsilon})(\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}) \rangle. \quad (4.39)$$

Da órbita de Kepler, o ângulo polar  $\theta$  pode ser expandido para pequenas excentricidades pela seguinte fórmula:  $\theta = \omega t + 2e \operatorname{sen}(\omega t) + \mathcal{O}(e^2)$ . Dessa forma, a taxa de variação temporal de  $\theta$  é dada por  $\dot{\theta} = \omega + 2e\omega \cos(\omega t) + \mathcal{O}(e^2)$ . Por outro lado, ao realizar algumas operações básicas, obtemos uma expressão para o ângulo  $\epsilon$  na forma  $\epsilon = A + eB \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$ , sendo  $A, B \in \mathbb{R}$  constantes. Ressaltamos que esta expressão, obtida pelos autores em (Scoppola et al., 2022), foi resultado de uma série de aproximações não mencionadas no artigo. Assim, a taxa de variação temporal de  $\epsilon$  é dada por  $\dot{\epsilon} = eB\omega \cos(\omega t + \delta)$ .

Entretanto,

$$\langle \dot{L} \rangle = \frac{\alpha}{\omega} \langle [\omega + 2e\omega \cos(\omega t) + eB\omega \cos(\omega t + \delta)][\Omega - \omega - 2e\omega \cos(\omega t) - eB\omega \cos(\omega t + \delta)] \rangle. \quad (4.40)$$

Fazendo as operações algébricas necessárias em (4.40), temos,

$$\begin{aligned} \langle \dot{L} \rangle &= \frac{\alpha}{\omega} \left[ \omega(\Omega - \omega) + \omega e(\Omega - 2\omega) \langle 2 \cos(\omega t) + B \cos(\omega t + \delta) \rangle \right. \\ &\quad \left. - \omega^2 e^2 \langle [2 \cos(\omega t) + B \cos(\omega t + \delta)]^2 \rangle \right] \\ &= \langle \dot{G} \rangle + \alpha e(\Omega - 2\omega) \langle 2 \cos(\omega t) + B \cos(\omega t + \delta) \rangle - \alpha \omega e^2 \langle [2 \cos(\omega t) + B \cos(\omega t + \delta)]^2 \rangle. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Após realizar os cálculos das médias das funções apresentadas na equação (4.41), vale destacar que a média de uma função constante é a própria constante. Além disso, é importante lembrar que a média de funções senoidais, sobre seu período, é nula. Portanto,

$$\langle 2 \cos(\omega t) + B \cos(\omega t + \delta) \rangle = 0.$$

Enquanto para a média de funções senoidais ao quadrado segue o resultado

$$\begin{aligned} \langle [2 \cos(\omega t) - B \cos(\omega t + \delta)]^2 \rangle &= \langle 4 \cos^2(\omega t) + 4B \cos(\omega t) \cos(\omega t + \delta) + B^2 \cos^2(\omega t + \delta) \rangle \\ &= 2 + 4B \langle \cos^2(\omega t) \cos(\delta) - \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin(\delta) \rangle + \frac{B^2}{2} \\ &= 2 + 2B \cos(\delta) + \frac{B^2}{2}. \end{aligned}$$

Com base nessas propriedades e após as devidas operações algébricas, obtemos o seguinte resultado,

$$\langle \dot{L} \rangle = \langle \dot{G} \rangle - \alpha \omega e^2 \left( 2 + 2B \cos(\delta) + \frac{B^2}{2} \right) = \langle \dot{G} \rangle - e^2 C, \quad (4.42)$$

com  $C := \alpha \omega \left( 2 + 2B \cos(\delta) + \frac{B^2}{2} \right) > 0$ .

Agora, se assumirmos inicialmente  $L \sim G$ , com  $L > G$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{G^2}{L^2} \right) &= \frac{2G\dot{G}L^2 - 2L\dot{L}G^2}{L^4} \approx \frac{2G\dot{G}L^2 - 2LG^2(\dot{G} - e^2 C)}{L^4} = \frac{2G\dot{G}(L^2 - G^2) + 2LG^2 e^2 C}{L^4} \\ &= \frac{2G\dot{G}L^2 e^2 + 2LG^2 e^2 C}{L^4} = \frac{2G\dot{G}L^2 + LG^2 C}{L^4} e^2 = \frac{2}{\tau_M} e^2, \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde  $\tau_M := \frac{L^4}{G\dot{G}L^2 + LG^2 C} > 0$ .

Finalmente, as variáveis de Delaunay  $L$  e  $G$  obedecem à relação (3.42),  $G^2 = (1 - e^2)L^2$ . Isso implica

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{G^2}{L^2} \right) = \frac{d}{dt} (1 - e^2) = -2e\dot{e}. \quad (4.44)$$

Juntando as equações (4.43) e (4.44), obtemos

$$-2e\dot{e} = \frac{2}{\tau_M} e^2 \Rightarrow \dot{e} = -\frac{e}{\tau_M} \Rightarrow e(t) = e_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_M}\right). \quad (4.45)$$

Assim, à medida que  $t \rightarrow +\infty$ , a excentricidade diminui exponencialmente, aproximando-se de zero. Em outras palavras, a órbita se torna circular.

Agora, considere o cenário em que a órbita é perfeitamente circular, ou seja,  $e \equiv 0$ . Nesse caso, em cada volta da órbita, tanto a taxa de variação de  $\phi$ ,  $\dot{\phi}$ , quanto do ângulo polar,  $\dot{\theta}$ , são as constantes  $\Omega$  e  $\omega$ , respectivamente. Substituindo isso na

equação (4.31), obtemos uma força constante. Portanto, a solução dessa equação tende assintoticamente a ser uma solução de equilíbrio  $\epsilon = \text{const}$ .

A partir das equações (4.31) e (4.32), então temos

$$\dot{G} = \alpha(\dot{\phi} - \dot{\theta}) = \alpha(\Omega - \omega) = -\frac{\partial L}{\partial \epsilon} = \Gamma, \quad (4.46)$$

sendo  $\Gamma$  um torque médio.

Assumimos uma variação muito lenta de  $\Gamma$ , aplicado como um impulso final após uma órbita Kepleriana não perturbada, sendo portanto assumido constante. Dessa forma, integrando (2.35) ao longo de um período

$$G(T) - G(0) = \int_0^T \frac{dG}{dt} dt = \Gamma T. \quad (4.47)$$

Por outro lado, usaremos novamente a terceira lei de Kepler  $a^3\omega^2 = g$  e a aproximação  $G^2 = m^2\rho^4\dot{\theta}^2 \approx m^2a^4\omega^2 = m^2ag$ . Dessa forma,  $G(t) \approx m\sqrt{ga(t)}$ . Portanto,

$$G(T) = G(0) + \Gamma T \approx m\sqrt{ga(0)} + \Gamma T, \quad \text{e} \quad G(T) \approx m\sqrt{ga(T)} \approx m\sqrt{g[a(0) + \dot{a}T]},$$

logo,

$$m\sqrt{g[a(0) + \dot{a}T]} = m\sqrt{ga(0)} + \Gamma T, \\ ga(0) + g\dot{a}T = \left( \sqrt{ga(0)} + \frac{\Gamma T}{m} \right)^2 \approx ga(0) + 2\frac{\Gamma}{m}T\sqrt{ga(0)} \Rightarrow \dot{a} = 2\frac{\Gamma}{m}\sqrt{\frac{a(0)}{g}}, \quad (4.48)$$

onde, na segunda igualdade, desprezamos o termo  $(\frac{\Gamma T}{m})^2 \ll 1$ .

Finalmente, utilizando novamente a terceira lei de Kepler,

$$\dot{a} = \frac{2\alpha}{m\omega a}(\Omega - \omega). \quad (4.49)$$

Sua solução é obtida de forma elementar, sendo que  $\dot{a} = \frac{2\alpha}{m\omega}(\Omega - \omega)\frac{1}{a} \Rightarrow \dot{a} = k\frac{1}{a}$ , então  $a\frac{da}{dt} = k \Rightarrow \int_{a_0}^a ada = k \int_{t_0}^t dt \Rightarrow \frac{a^2 - a_0^2}{2} = k(t - t_0)$ , logo

$$a(t) = \sqrt{\frac{4\alpha}{m\omega}(\Omega - \omega)t + a(0)^2}.$$

No contexto da equação (4.49), a relação entre  $\dot{a}$  e  $(\Omega - \omega)$  é regular, ao contrário da literatura, onde essa dependência se torna singular em  $(\Omega - \omega) = 0$  devido à influência do

sinal de  $(\Omega - \omega)$ . Os resultados na literatura estão associados a uma escolha diferente da lei de atrito em (Murray, 1999), especificamente  $f = -\text{const}$ , equivalente a considerar o sistema como duas superfícies sólidas deslizando. Destaca-se que a não singularidade já foi observada em modelos de marés que usam uma função de dissipação de Rayleigh, conforme exemplificado em (Ragazzo & Ruiz, 2017).

## 4.2 Sistema Júpiter-Io

O sistema Júpiter-Io possui uma distinção única em nosso sistema solar. Enquanto Io é o corpo planetário mais ativo vulcanicamente, Júpiter é o maior planeta, possui o campo magnético mais forte, a rotação mais rápida, a maior e mais intensa magnetosfera, e a atmosfera planetária mais densa, como afirmado em (Scoppola et al., 2022).

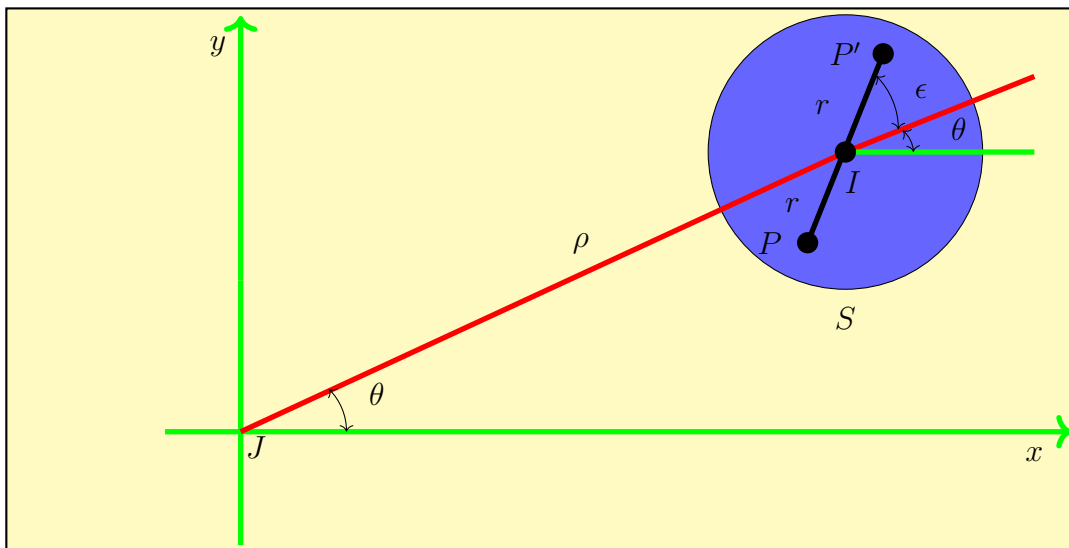


Figura 4.2: Sistema Júpiter-Io.

A distinção deste problema para o anterior, Terra-Lua, está no potencial gravitacional entre ambos. A Lagrangiana do sistema Júpiter-Io é expressa da seguinte maneira

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left( \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2}I \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 \left( \dot{\theta} + \dot{\epsilon} \right)^2 + \frac{gm}{\rho} \left[ 1 + \frac{\mu}{m} \frac{r^2}{\rho^2} \left( \frac{3}{2} \cos^2(\epsilon) - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (4.50)$$

onde  $I$  agora representa o momento de inércia de Io, enquanto em (4.12) ele representa o momento de inércia da Terra. Além disso, agora  $g = G_U M_J$ , sendo  $M_J$  a massa de Júpiter.

Considerando o mesmo método de dissipação da seção anterior, fundamentado no fato de ser conhecido que Io é constituído por material em estado líquido, obtemos a função de dissipação de Rayleigh idêntica àquela discutida no caso do sistema Terra-Lua. Como antes, ela deve se anular quando a rotação da lua for a mesma do halter

$$R = -\frac{\alpha}{2}(\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon})^2. \quad (4.51)$$

Conseqüentemente, as equações simplificadas de movimento são as mesmas que as discutidas na seção anterior

$$m\ddot{\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho}, \quad (4.52)$$

$$\frac{d}{dt} (m\rho^2 \dot{\theta}) = \alpha (\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}), \quad (4.53)$$

$$I\ddot{\phi} = -\alpha (\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}), \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} + \alpha (\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}) = 0. \quad (4.55)$$

Por outro lado, as condições iniciais dos dois sistemas são distintas. No sistema Terra-Lua, observamos que  $\dot{\phi} \gg \dot{\theta}$ , indicando que a frequência de rotação da Terra é muito maior do que a da Lua. Já no sistema Júpiter-Io, a lua está em sincronia, o que significa que  $\langle \dot{\phi} \rangle = \langle \dot{\theta} \rangle = \omega$ .

A equação (4.55) admite uma solução da forma  $\epsilon(t) = eB \text{sen}(\omega t + \delta)$ , com  $B$  e  $\delta$  sendo constantes. As médias ao longo de uma órbita de  $\dot{G}$  e  $\dot{L}$  são ligeiramente diferentes daquelas na seção anterior.



Tomando a (4.38), para o caso Júpiter-Io, temos que  $\Omega = \omega$ , como justificamos acima, e portanto

$$\langle \dot{G} \rangle = 0 \quad (4.56)$$

e

$$\langle \dot{L} \rangle = \left\langle \frac{\dot{\theta} - \dot{\epsilon}}{\omega} \dot{G} \right\rangle = \frac{\alpha}{\omega} (\dot{\theta} + \dot{\epsilon}) (\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}). \quad (4.57)$$

A partir de agora, todos os cálculos e demonstrações feitos para o caso Terra-Lua são válidos para o sistema Júpiter-Io, tomando  $\langle \dot{\phi} \rangle = \omega$ .

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \frac{\alpha}{\omega} \langle [\omega + 2e\omega \cos(\omega t) + eB\omega \cos(\omega t + \delta)] [\omega - \omega - 2e\omega \cos(\omega t) - eB\omega \cos(\omega t + \delta)] \rangle \\ &= \frac{\alpha}{\omega} [-\omega^2 e \langle 2 \cos(\omega t) + B \cos(\omega t + \delta) \rangle - \omega^2 e^2 \langle [2 \cos(\omega t) + B \cos(\omega t + \delta)]^2 \rangle] \\ &= -\alpha \omega e^2 \langle 4 \cos^2(\omega t) + 4B \cos(\omega t) \cos(\omega t + \delta) + B^2 \cos^2(\omega t + \delta) \rangle \\ &= -\alpha \omega e^2 \left( 2 + 2B \cos \delta + \frac{B^2}{2} \right) = -e^2 C, \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde  $C = \alpha \omega \left( 2 + 2B \cos \delta + \frac{B^2}{2} \right) > 0$ .

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{G^2}{L^2} \right) = -\frac{2L\dot{L}G^2}{L^4} = \frac{2LG^2 e^2 C}{L^4} = \frac{2}{\tau_I} e^2, \quad (4.59)$$

onde  $\tau_I = \frac{L^4}{LG^2 C} > 0$ .

Finalmente,

$$\frac{d}{dt} \frac{G^2}{L^2} = \frac{d}{dt} (1 - e^2) = -2e\dot{e}. \quad (4.60)$$

Igualando as equações (4.59) e (4.60), temos

$$-2e\dot{e} = \frac{2}{\tau_I} e^2 \implies \dot{e} = -\frac{2e^2}{-2e\tau_I} = -\frac{e}{\tau_I} \implies e(t) = e_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_I}\right). \quad (4.61)$$

Da equação (4.61) vemos que ao longo do tempo ( $t \rightarrow \infty$ ), a excentricidade da órbita no sistema Júpiter-Io diminui exponencialmente até atingir zero. Isso implica que a órbita, mesmo inicialmente elíptica, se torna circular à medida que o tempo avança indefinidamente. Essa tendência específica é observada no contexto da relação entre Júpiter e sua lua Io.

# Capítulo 5

## Análise qualitativa do modelo de halter

Neste capítulo vamos apresentar uma abordagem própria sobre o modelo de marés discutido no Capítulo 4, o qual foi baseado no tratamento original dos autores do artigo Scoppola et al. (2022). Nosso objetivo é tornar os resultados mais precisos e detalhados, com a ajuda da teoria qualitativa das equações diferenciais.

### 5.1 Estabilidade por Lyapunov

A estabilidade de Lyapunov é um conceito fundamental na teoria dos sistemas dinâmicos, especialmente na teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, quando se pretende estudar o comportamento assintótico do problema de valor inicial da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde  $x(t), x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de vetores continuamente diferenciável, com  $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$  conjunto aberto não vazio. Precisaremos de alguns resultados básicos da teoria para nos auxiliar a entender as equações do modelo de interesse,

Barreira & Valls (2012) e Hale (1969).

Diremos que uma função escalar  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Lyapunov para o sistema (5.1) em um conjunto aberto  $G \subset U$  se  $V$  é diferenciável em  $G$ , contínua em  $\bar{G}$ , o fecho de  $G$ , e

$$\dot{V}(x) := \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0, \quad (5.2)$$

para todo  $x \in G$ .

Seja

$$S = \{x \in \bar{G} : \dot{V}(x) = 0\},$$

e seja  $M$  o maior conjunto invariante pelo fluxo de  $\dot{x} = f(x)$  em  $S$ .

**Teorema 5.1.1.** *Se  $V$  é uma função de Lyapunov em  $G$  e  $\gamma^+(x_0)$  uma semi-órbita positiva limitada do sistema  $\dot{x} = f(x)$  que está completamente contida em  $G$ , então o conjunto  $\omega$ -limite de  $\gamma^+(x_0)$ , não vazio, está contido em  $M$ , o que é equivalente a afirmar que  $x(t, x_0) \rightarrow M$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .*

*Demonstração.* Desde que  $\gamma^+(x_0)$  é limitado e  $V$  é contínua,  $V(x(t, x_0))$  é limitado para  $t \geq 0$  e  $\dot{V}(x(t, x_0)) \leq 0$  implica que  $V(x(t, x_0))$  é não crescente. Portanto, existe o limite  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t, x_0)) = a$ , constante. A continuidade de  $V$  implica que  $V(y) = a$  para qualquer  $y$  em  $\omega(\gamma^+(x_0))$ . Como  $\omega(\gamma^+(x_0))$  é invariante,  $V(x(t, y)) = a$  para todos  $t \in \mathbb{R}$  e  $y \in \omega(\gamma^+(x_0))$ . Portanto,  $\omega(\gamma^+(x_0))$  está contido em  $S$ . Isso prova o teorema.  $\square$

**Teorema 5.1.2.** *Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$  em um conjunto aberto  $D \subset \mathbb{R}^n$  e seja  $x_0 \in D$  um equilíbrio da equação  $\dot{x} = f(x)$ . Além disso, seja  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  em uma vizinhança  $U \subset D$  de  $x_0$  tal que*

(a)  $V(x_0) = 0$  e  $\dot{V}(x) > 0$  para todo  $x \in U \setminus \{x_0\}$ ,

(b)  $V$  assume valores positivos em qualquer vizinhança de  $x_0$ ,

então o ponto de equilíbrio  $x_0$  é instável.

*Demonstração.* Seja  $A \subset U$  uma vizinhança de  $x_0$  e seja  $\varphi_t(x)$  a solução do problema de valor inicial (5.1). Se em cada vizinhança  $A$  existe uma solução  $\varphi_t(x)$  que não está definida para todo  $t > 0$ , então não há nada a mostrar.

Portanto, pode-se assumir que todas as soluções  $\varphi_t(x)$  com  $x \in A$  estão definidas para todo  $t > 0$ .

Agora, tome  $y \in A$  com  $V(y) > 0$  (o que, pela hipótese, sempre existe). Como  $\dot{V}(x) > 0$  para  $x \in U \setminus \{x_0\}$ , concluímos que a função  $t \rightarrow V(\varphi_t(y))$  é crescente sempre que  $\varphi_t(y) \in U$ . Assim, como  $V(x_0) = 0$ , a solução  $\varphi_t(y)$  não se aproxima de  $x_0$ , ou seja, existe uma vizinhança  $B$  de  $x_0$  tal que  $\varphi_t(y) \notin B$  para  $t > 0$ .

Agora, assumimos que a solução não deixa  $A$  e para  $t > 0$  definimos

$$m = \inf\{\dot{V}(\varphi_t(y)) : t \geq 0\}.$$

Como  $\dot{V} = \nabla V \cdot f$  é contínua e  $\overline{A \setminus B}$  é compacto, temos

$$m \geq \inf\{\dot{V}(x) : x \in \overline{A \setminus B}\} > 0.$$

Dessa forma, temos  $V(\varphi_t(y)) \geq V(y) + mt$  para  $t > 0$ . Portanto, existe  $T > 0$  tal que

$$V(\varphi_T(y)) > \max\{V(x) : x \in A\},$$

e, portanto,  $\varphi_T(y) \notin A$ . Essa contradição mostra que existem pontos  $x$  arbitrariamente próximos de  $x_0$  tais que a solução  $\varphi_t(x)$  sai da vizinhança  $A$ . Portanto, o ponto de equilíbrio  $x_0$  é instável.  $\square$

## 5.2 Lagrangiana e energia total em variáveis e parâmetros adimensionais

Para simplificar a notação, vamos adimensionalizar as equações de movimento. Para isso, considere novamente a Lagrangiana da equação (4.12). Lembramos que ao

multiplicarmos a Lagrangiana por uma constante, as equações de movimento permanecem inalteradas. Dessa forma, podemos dividir a Lagrangiana por  $m$ , resultando na seguinte expressão

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \frac{I}{m} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2m} \mu r^2 (\dot{\theta} + \dot{\epsilon})^2 + \frac{g}{\rho} \left[ 1 + \frac{\mu}{M_E} \frac{r^2}{\rho^2} \left( \frac{3}{2} \cos^2(\epsilon) - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (5.3)$$

Em seguida, vamos definir uma nova variável adimensional para o raio, denotada por  $\tilde{\rho}$ , e dada por

$$\tilde{\rho} := \frac{\rho}{\sqrt{\frac{I}{m}}}, \quad (5.4)$$

de forma que  $\rho = \sqrt{\frac{I}{m}} \tilde{\rho}$  e  $\dot{\rho} = \sqrt{\frac{I}{m}} \dot{\tilde{\rho}}$ . Com essa variável, a Lagrangiana (5.3) fica

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{I}{m} (\dot{\tilde{\rho}}^2 + \tilde{\rho}^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \frac{I}{m} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2m} \mu r^2 (\dot{\theta} + \dot{\epsilon})^2 + g \sqrt{\frac{I}{m}} \frac{1}{\tilde{\rho}} \left[ 1 + \frac{\mu}{M_E} \frac{m}{I} \frac{r^2}{\tilde{\rho}^2} \left( \frac{3}{2} \cos^2(\epsilon) - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (5.5)$$

Multiplicando a (5.5) por  $\frac{m}{I}$  temos

$$\left(\frac{m}{I}\right) \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\tilde{\rho}}^2 + \tilde{\rho}^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2I} \mu r^2 (\dot{\theta} + \dot{\epsilon})^2 + g \left(\frac{m}{I}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\tilde{\rho}} \left[ 1 + \frac{\mu}{M_E} \frac{m}{I} \frac{r^2}{\tilde{\rho}^2} \left( \frac{3}{2} \cos^2(\epsilon) - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (5.6)$$

Feito isso, podemos recorrer a uma reescala do tempo, definindo um novo tempo  $T$  na forma

$$T := \left[ \left( \frac{I}{m} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{g}} \right]^{-1} t, \quad (5.7)$$

de onde vemos que

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \Rightarrow \frac{dx}{dT} \frac{dT}{dt} = \left[ \left( \frac{I}{m} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{g}} \right]^{-1} \dot{x}.$$

Portanto, pela Lagrangiana dada em (5.6), escrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & g \left(\frac{m}{I}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{2} ((\tilde{\rho}')^2 + \tilde{\rho}^2 (\theta')^2) + \frac{1}{2} \phi'^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2I} \mu r^2 (\theta' + \epsilon')^2 \right] + g \left(\frac{m}{I}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\tilde{\rho}} \left[ 1 + \frac{\mu}{M_E} \frac{m}{I} \frac{r^2}{\tilde{\rho}^2} \left( \frac{3}{2} \cos^2(\epsilon) - \frac{1}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.8)$$

e que, portanto, tem as mesmas equações de movimento da Lagrangiana adimensional

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{\varepsilon \nu}{2} (\dot{\theta} + \dot{\epsilon})^2 + \frac{1}{\rho} \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{2\rho^2} (3 \cos^2(\epsilon) - 1) \right]. \quad (5.9)$$

onde,  $\varepsilon := \frac{\mu r^2 m}{I M_E}$  e  $\nu := \frac{M_E}{m}$  são constantes adimensionais e, por simplicidade de notação, fizemos novamente as trocas de símbolos  $x' \rightarrow \dot{x}$  e  $\tilde{\rho} \rightarrow \rho$ .

Na nova Lagrangiana (5.9) percebemos a presença de apenas dois parâmetros, simplificando nossa análise. Contudo, torna-se evidente que, dentre os dois parâmetros  $\varepsilon$  e  $\nu$ ,  $\nu$  é conhecido com grande precisão. Tal precisão advém do fato de que a razão de massas de qualquer corpo celeste é mais acuradamente determinada. A determinação do parâmetro  $\varepsilon$  está condicionada à determinação de  $\mu$  e  $r^2$  que são parâmetros do modelo simplificado do halter que busca resumir o fenômeno complexo das marés. Tais parâmetros devem ser fixados de forma fenomenológica, o que foge do escopo deste trabalho.

Assim, todas grandes imprecisões dos parâmetros do modelo concentram-se agora unicamente na constante  $\varepsilon$ . Mesmo diante dessa incerteza, podemos afirmar que  $\varepsilon$  é muito pequena. Essa estimativa surge devido a sua relação inversamente proporcional com o momento de inércia total da Terra e à proporcionalidade direta com  $\mu r^2$ , que representa a contribuição da calota gerada pelas marés. Por isso neste trabalho assumimos por hipótese que  $\varepsilon \ll 1$ .

Por outro lado, tomando a equação do momento angular dada em (4.26) e a dividindo pela massa  $m$  obtemos

$$\rho^2 \dot{\theta} + \frac{\mu r^2}{M_E} \frac{M_E}{m} (\dot{\theta} + \dot{\epsilon}) + \frac{I}{m} \dot{\phi} = \frac{J}{m}. \quad (5.10)$$

Fazendo a reescala do tempo como foi no caso anterior a (5.10) toma a forma

$$\rho^2 \dot{\theta}' + \frac{\mu r^2}{I M_E} \frac{M_E}{m} (\dot{\theta}' + \dot{\epsilon}') + \dot{\phi}' = \frac{J}{m} \frac{m}{I} T. \quad (5.11)$$

Substituindo as constantes  $\varepsilon$  e  $\nu$ , e retornando à notação simplificada usada na Lagrangiana (5.9), a conservação do momento angular fica

$$\rho^2 \dot{\theta} + \varepsilon \nu (\dot{\theta} + \dot{\epsilon}) + \dot{\phi} = \tilde{J}, \quad (5.12)$$

onde  $\tilde{J} = JT/I$  também é adimensional. Notamos que esta equação é consequência imediata da equação para  $\theta$  na Lagrangiana (5.9).

Na relação expressa pela equação (5.12), temos a presença da integral primeira, representando uma quantidade conservada. Portanto, podemos usá-la de forma a resolver para  $\dot{\theta}$ . Desta forma, vamos olhar equações de movimento restritas a cada nível da integral primeira. Nosso objetivo é analisar os equilíbrios das equações diferenciais resultantes e determinar quais constituem mínimos locais da energia, quando restrita ao nível de momento angular constante.

Para alcançar esse propósito, buscaremos a solução de (5.12) em relação a  $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = \frac{-\dot{\phi} - \dot{\epsilon}\nu + \tilde{J}}{\epsilon\nu + \rho^2}. \quad (5.13)$$

A energia total do sistema nestas coordenadas é dada pela soma das energias cinética e potencial

$$E_T = \frac{1}{2} \left( \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{\epsilon\nu}{2} \left( \dot{\theta} + \dot{\epsilon} \right)^2 - \frac{1}{\rho} \left[ 1 + \frac{\epsilon}{2\rho^2} (3 \cos^2(\epsilon) - 1) \right], \quad (5.14)$$

consequentemente, a energia total do sistema restrita ao nível do momento angular constante é

$$\begin{aligned} E_r(\rho, \dot{\rho}, \dot{\phi}, \epsilon, \dot{\epsilon}) &= \frac{1}{2\rho^3(\nu\epsilon + \rho^2)} \nu\epsilon(\epsilon + \rho^2(-2 + \dot{\rho}^2\rho + \dot{\phi}^2\rho + \dot{\epsilon}^2\rho^3)) \\ &\quad + \rho^2(\epsilon + \rho(-2\dot{\phi}\tilde{J} + \tilde{J}^2 + \rho(-2 + \dot{\rho}^2\rho) + \dot{\phi}(1 + \rho^2))) \\ &\quad - 3\epsilon(\epsilon\nu + \rho^2) \cos^2(\epsilon). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Reforçamos que esta energia é uma função diferenciável  $E_r : U \subset \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $U = \{(\rho, \dot{\rho}, \dot{\phi}, \epsilon, \dot{\epsilon}) \in \mathbb{R}^5 : \rho > 0\}$  é um conjunto aberto. Além disso, pelo formalismo exposto em Ferraz-Mello et al. (2015), ao longo das soluções das equações de Euler-Lagrange com função dissipação, vale a identidade (4.21) desde que a função dissipação é quadrática nas velocidades

$$R = \epsilon \frac{\tilde{\alpha}}{2} (\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon})^2, \quad (5.16)$$

sendo  $\tilde{\alpha} := g\alpha/(\epsilon\sqrt{mI}) > 0$  uma constante de dissipação adimensional.

Concluimos desta discussão que  $E_r$  é uma função de Lyapunov para o sistema de equações diferenciais do modelo, pois satisfaz (5.2). Pelo Teorema 5.1.1, o conjunto  $\omega$ -limite de qualquer solução limitada está contido no maior conjunto invariante pelo fluxo que satisfaz  $\dot{E}_r = -2R \equiv 0$ , e portanto  $\dot{\phi} \equiv \dot{\theta} + \dot{\epsilon}$ , ou seja, a maré do corpo extenso tem uma velocidade angular igual à velocidade angular orbital como também concluimos no Capítulo 4. Notamos que este resultado se aplica, em particular, a todas soluções de equilíbrio de forma que necessariamente têm que satisfazer a condição de movimento rígido  $\dot{\phi} \equiv \dot{\theta} + \dot{\epsilon}$ .

### 5.3 Determinação dos pontos de equilíbrios

Nestas novas coordenadas, as equações de movimento (4.22), (4.23), (4.24) e (4.25) ficam

$$\ddot{\rho} = \rho\dot{\theta}^2 - \frac{1}{\rho^2} \left[ 1 + \frac{3\varepsilon}{2\rho^2} (3\cos^2(\epsilon) - 1) \right], \quad (5.17)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) + \varepsilon\nu(\ddot{\theta} + \ddot{\epsilon}) = \varepsilon\tilde{\alpha}(\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}), \quad (5.18)$$

$$\ddot{\phi} = -\varepsilon\tilde{\alpha}(\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}), \quad (5.19)$$

$$\nu(\ddot{\theta} + \ddot{\epsilon}) = -\frac{3}{2\rho^3} \text{sen}(2\epsilon) + \tilde{\alpha}(\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}). \quad (5.20)$$

Pelas considerações da seção anterior, os conjuntos  $\omega$ -limite desse sistema, em particular os equilíbrios, necessariamente têm que satisfazer  $(\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\epsilon}) \equiv 0$ . Como consequência, em (5.18), temos  $\ddot{\phi} = 0$ , indicando que a função possui derivada nula, logo  $\dot{\phi}$  é constante. Além disso, devido a  $(\ddot{\phi} - \ddot{\theta} - \ddot{\epsilon}) \equiv 0$ , temos  $\ddot{\theta} + \ddot{\epsilon} = 0$ . Com isso, a equação (5.20) implica que  $\text{sen}(2\epsilon) = 0$  e portanto temos apenas as possibilidades  $\epsilon = 0$  e  $\epsilon = \pi/2$ . Devido à simetria do halter, as demais raízes desta equação correspondem à mesma configuração do sistema. Desde que  $\epsilon$  deve ser um ângulo constante e  $\ddot{\theta} + \ddot{\epsilon} = 0$ ,  $\dot{\theta}$  também é uma constante. Consequentemente, as frequências  $\dot{\phi} = \dot{\theta}$  coincidem e são constantes. Pela equação (5.18), observamos que  $(\rho^2\dot{\theta})' = \dot{\theta}(\rho^2)' = 0$ , o que implica



que  $\rho$  também é um raio constante no equilíbrio. Além disso, pela equação (5.17), percebemos que os raios de equilíbrio são determinados pela seguinte equação

$$3\varepsilon(1 - 3\cos^2(\epsilon)) - 2\rho^2 + 2\dot{\theta}^2\rho^5 = 0. \quad (5.21)$$

Usando a conservação do momento angular (5.13), vemos que os raios de equilíbrio devem resolver uma equação envolvendo os parâmetros  $\varepsilon$ ,  $\nu$  e  $\tilde{J}$ , em particular os equilíbrios dependem do valor do momento angular determinado pelas condições iniciais. Dividimos a análise dos equilíbrios e suas estabilidades em dois casos, com halter alinhado ( $\epsilon = 0$ ) e halter desalinhado ( $\epsilon = \pi/2$ ).

### 5.3.1 Primeiro caso: halter alinhado

Em caso de halter alinhado, a equação (5.21) fica equivalente a

$$\rho^5\dot{\theta}^2 - \rho^2 - 3\varepsilon = 0. \quad (5.22)$$

Tomando em consideração a equação (5.13) sobre o equilíbrio  $\epsilon = 0$  e  $\dot{\phi} = \dot{\theta}$ , a frequência de equilíbrio  $\dot{\theta}$  deve satisfazer

$$\dot{\theta} = \frac{\tilde{J}}{1 + \varepsilon\nu + \rho^2}. \quad (5.23)$$

Assim, usando as equações (5.22) e (5.23), concluímos que a equação de equilíbrio do raio é equivalente a

$$-\frac{3\varepsilon}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} + \frac{\tilde{J}^2\rho}{(1 + \varepsilon\nu + \rho^2)^2} = 0. \quad (5.24)$$

Portanto, fazendo algumas manipulações algébricas, vemos que a equação (5.24) é equivalente à seguinte expressão

$$\left(\frac{3\varepsilon}{\rho} + \rho\right) \left(\frac{1 + \varepsilon\nu}{\rho^2} + 1\right)^2 = \tilde{J}^2. \quad (5.25)$$

**Proposição 5.3.1.** *A função  $f(\rho) = \left(\frac{3\varepsilon}{\rho} + \rho\right) \left(\frac{1 + \varepsilon\nu}{\rho^2} + 1\right)^2$  tem um único ponto crítico que é mínimo absoluto no domínio  $(0, +\infty)$ .*

*Demonstração.* A função  $f(\rho)$  satisfaz  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} f(\rho) = +\infty$  e  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} f(\rho) = +\infty$ .

Suponhamos agora que em (5.25)  $\tilde{J}^2$  seja muito grande. Nesse caso, a equação terá pelo menos duas soluções: uma para  $\rho$  pequeno e outra para  $\rho$  grande, devido às assíntotas. Definindo  $x = \frac{1}{\rho}$ , a equação (5.26) se torna

$$f(x) = \left(3\varepsilon x + \frac{1}{x}\right) ((1 + \varepsilon\nu)x^2 + 1)^2, \quad (5.26)$$

Derivando a equação (5.26) em relação a  $x$  e igualando a zero temos

$$\frac{(x^2(\varepsilon\nu + 1) + 1)(15\varepsilon x^4(\varepsilon\nu + 1) + 3x^2(\varepsilon\nu + \varepsilon + 1) - 1)}{x^2} = 0. \quad (5.27)$$

As soluções da equação (5.27) são as mesmas soluções da equação biquadrática

$$15\varepsilon(x^2)^2(\varepsilon\nu + 1) + 3(x^2)(\varepsilon\nu + \varepsilon + 1) - 1 = 0, \quad (5.28)$$

Na equação (5.28), temos os seguintes coeficientes:  $a = 15\varepsilon(1 + \varepsilon\nu)$ ,  $b = 3(1 + \varepsilon + \varepsilon\nu)$  e  $c = -1$ , sendo assim, seu discriminante é

$$9(\varepsilon\nu + \varepsilon + 1)^2 + 60\varepsilon(\varepsilon\nu + 1) > 0, \quad (5.29)$$

Observarmos nesse caso que  $\sqrt{b^2 - 4ac} > \sqrt{b^2} = b$  e que portanto  $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} > -b + b = 0$  e  $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$ . Dessa forma, a única raiz positiva,  $x^2$ , da equação biquadrática (5.28) fornece uma única raiz  $x > 0$ , que é dada por

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{9(\varepsilon\nu + \varepsilon + 1)^2 + 60\varepsilon(\varepsilon\nu + 1)} - 3(\varepsilon\nu + \varepsilon + 1)}{30\varepsilon(\varepsilon\nu + 1)}}$$

a qual corresponde a um único  $\rho$  crítico, que denominaremos por  $\rho_c$  e que se escreve

$$\rho_c = \sqrt{\frac{30\varepsilon(\varepsilon\nu + 1)}{\sqrt{9(\varepsilon\nu + \varepsilon + 1)^2 + 60\varepsilon(\varepsilon\nu + 1)} - 3(\varepsilon\nu + \varepsilon + 1)}}. \quad (5.30)$$

Portanto, a função  $f(\rho)$  possui duas assíntotas e um único ponto  $\rho_c > 0$  onde a derivada se anula. Além disso,  $f(\rho)$  é uma função diferenciável para  $\rho > 0$ . Portanto, o ponto crítico dela é um mínimo absoluto, como queríamos mostrar.  $\square$

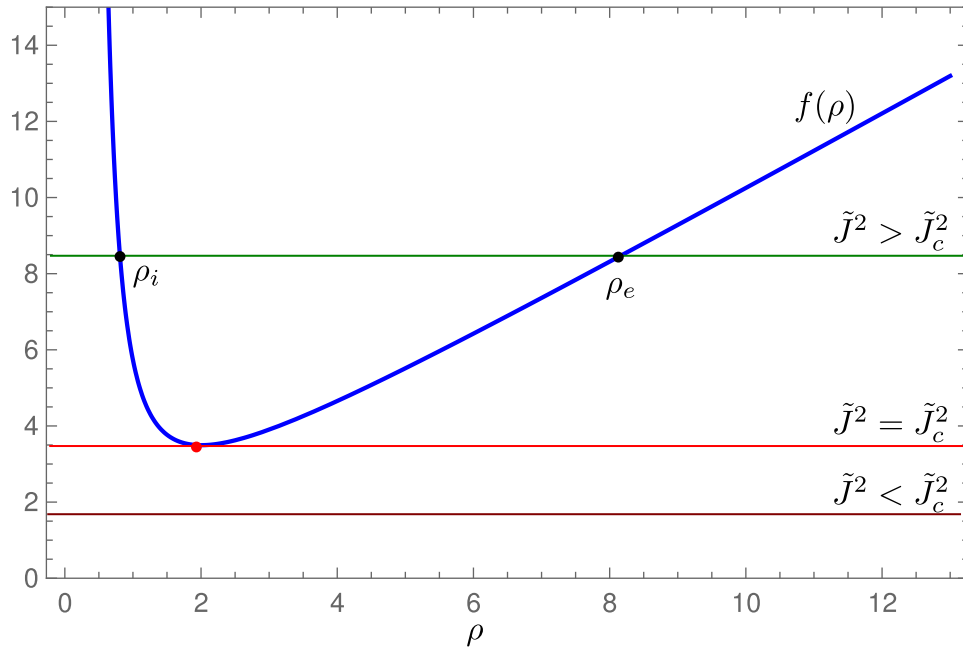


Figura 5.1: Equilíbrios relativos em função do momento angular total, para halter alinhado.

Note que  $f(\rho)$  é igualada ao momento angular ao quadrado,  $\tilde{J}^2$ , uma constante. Caso  $\tilde{J}^2$  não alcance o valor mínimo  $f(\rho_c)$  então o sistema não possui equilíbrio neste nível de momento angular. No entanto, se  $\tilde{J}^2$  for maior que  $f(\rho_c)$  teremos duas soluções, sendo a menor correspondendo a um raio de equilíbrio interno e a maior a um raio de equilíbrio externo. A situação é ilustrada na Figura 5.1.

Este valor mínimo do momento angular para que exista o equilíbrio, que não foi observado no estudo exibido no Capítulo 4, o qual chamaremos de  $J_c$  é dado por

$$\tilde{J}_c^2 = f(\rho_c) = \sqrt{\frac{3\varepsilon}{10(\varepsilon\nu + 1)}} \left( 7(\varepsilon\nu + 1) - 3\varepsilon + \sqrt{9(\varepsilon\nu + \varepsilon + 1)^2 + 60\varepsilon(\varepsilon\nu + 1)} \right) \times \left( \frac{\sqrt{9(\varepsilon\nu + \varepsilon + 1)^2 + 60\varepsilon(\varepsilon\nu + 1)} - 3(\varepsilon\nu + \varepsilon + 1)}{30\varepsilon} + 1 \right)^2. \quad (5.31)$$

Apesar da complexidade dessas expressões, podemos obter o polinômio de Taylor

na variável  $\varepsilon \ll 1$  que tem a expressão simples

$$\tilde{J}_c^2 = \frac{16}{3\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{2+\nu}{2}\varepsilon + \left( -\frac{\nu^2}{8} - \frac{\nu}{2} - \frac{4}{3} \right) \varepsilon^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (5.32)$$

a qual curiosamente não tende a zero quando  $\varepsilon \rightarrow 0+$ .

Lembramos agora que a energia restrita  $E_r(\rho, \dot{\rho}, \dot{\phi}, \varepsilon, \dot{\varepsilon})$  (5.15) é uma função de Lyapunov do sistema de equações. Além disso, podemos verificar que seu vetor gradiente sobre os equilíbrios de halter alinhado é

$$\nabla E_r(\rho, 0, 0, 0, 0) = \left( -\frac{12\varepsilon}{\rho^5} - \frac{2\tilde{J}^2(3\rho^2 - \varepsilon\nu)}{\rho^3(\varepsilon\nu + \rho^2)(\varepsilon\nu + \rho^2 + 1)^2}, 0, 0, 0, 0 \right), \quad (5.33)$$

que se anula exatamente nos dois raios de equilíbrio de cada nível de momento angular, ou seja, nas soluções de  $f(\rho) = 0$ . Dessa forma, para cada  $\tilde{J} \geq \tilde{J}_c$ , os equilíbrios do sistema (5.17), (5.18), (5.19), (5.20) são pontos críticos de  $E_r$ , função de Lyapunov deste sistema. Em cada um desses equilíbrios, vamos analisar os autovalores da matriz Hessiana de  $E_r$ , ou seja, a matriz de suas derivadas segundas

$$\text{Hess}(E_r) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_r}{\partial \rho^2} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \rho \partial \dot{\rho}} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \rho \partial \dot{\phi}} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \rho \partial \varepsilon} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \rho \partial \dot{\varepsilon}} \\ \frac{\partial^2 E_r}{\partial \dot{\rho} \partial \rho} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \dot{\rho}^2} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \dot{\rho} \partial \dot{\phi}} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \dot{\rho} \partial \varepsilon} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \dot{\rho} \partial \dot{\varepsilon}} \\ \frac{\partial^2 E_r}{\partial \dot{\phi} \partial \rho} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{\rho}} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \dot{\phi}^2} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \dot{\phi} \partial \varepsilon} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{\varepsilon}} \\ \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varepsilon \partial \rho} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varepsilon \partial \dot{\rho}} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varepsilon \partial \dot{\phi}} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varepsilon^2} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varepsilon \partial \dot{\varepsilon}} \\ \frac{\partial^2 E_r}{\partial \dot{\varepsilon} \partial \rho} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \dot{\varepsilon} \partial \dot{\rho}} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \dot{\varepsilon} \partial \dot{\phi}} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \dot{\varepsilon} \partial \varepsilon} & \frac{\partial^2 E_r}{\partial \dot{\varepsilon}^2} \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

Avaliando (5.34) em um equilíbrio na forma  $(\rho, 0, 0, 0, 0)$ , temos

$$\text{Hess}(E_r) = \begin{bmatrix} \frac{-3\varepsilon\nu(5\varepsilon + \rho^2) - 3\varepsilon\rho^2 + \rho^4}{\varepsilon\nu\rho^5 + \rho^7} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{\frac{3\varepsilon}{\rho} + \rho}}{\varepsilon\nu\rho + \rho^3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\varepsilon}{\rho^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon\nu\rho^2}{\varepsilon\nu + \rho^2} & 0 \\ \frac{2\sqrt{\frac{3\varepsilon}{\rho} + \rho}}{\varepsilon\nu\rho + \rho^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon\nu + \rho^2 + 1}{\varepsilon\nu + \rho^2} \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

A matriz (5.35) possui cinco autovalores. Para facilitar a determinação desses autovalores, devido à complexidade da matriz, optamos por analisá-la em blocos.

O bloco diagonal no centro da matriz, de dimensões  $3 \times 3$ , possui os autovalores positivos  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \frac{3\varepsilon}{\rho^3}$  e  $\lambda_3 = \frac{\varepsilon\nu\rho^2}{\varepsilon\nu+\rho^2}$ , para  $\rho = \rho_i$  e  $\rho = \rho_e$ , os raios de equilíbrio interno e externo, respectivamente.

**Proposição 5.3.2.** *Os dois últimos autovalores da matriz fornecida em (5.35) são os autovalores do bloco  $2 \times 2$  da forma*

$$\begin{bmatrix} \frac{-3\varepsilon\nu(5\varepsilon+\rho^2)-3\varepsilon\rho^2+\rho^4}{\varepsilon\nu\rho^5+\rho^7} & \frac{2\sqrt{\frac{3\varepsilon}{\rho}+\rho}}{\varepsilon\nu\rho+\rho^3} \\ \frac{2\sqrt{\frac{3\varepsilon}{\rho}+\rho}}{\varepsilon\nu\rho+\rho^3} & \frac{\varepsilon\nu+\rho^2+1}{\varepsilon\nu+\rho^2} \end{bmatrix}, \quad (5.36)$$

sendo que, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, pelo menos um dos seus autovalores é positivo.

*Demonstração.* Sabemos que a soma dos autovalores é igual ao traço da matriz. Para a matriz dada em (5.36), o traço é dado por

$$\frac{\varepsilon\nu(-15\varepsilon+\rho^5-3\rho^2)-3\varepsilon\rho^2+\rho^7+\rho^5+\rho^4}{\varepsilon\nu\rho^5+\rho^7} = \frac{\rho^3+\rho+1}{\rho^3} + \mathcal{O}(\varepsilon) > 0. \quad (5.37)$$

Podemos ver assim que o traço é positivo se  $\varepsilon$  é próximo de zero. Lembramos que a matriz Hessiana é simétrica, e portanto todos seus autovalores são reais. Concluimos que necessariamente pelo menos um dos autovalores é positivo nesse caso.  $\square$

Por outro lado, pode-se mostrar que o determinante da matriz (5.36), o produto dos seus autovalores, tem a forma de uma função racional cujo denominador é sempre positivo. O numerador do mesmo, quando feitas as simplificações, é dado por

$$\begin{aligned} & -(\varepsilon\nu+\rho^2+1)^2 \times \\ & (3\nu^2\varepsilon^2(5\varepsilon+\rho^2)+\varepsilon\nu(3\varepsilon(6\rho^2+5)+(2\rho^2+3)\rho^2)+3\varepsilon(\rho^2+5)\rho^2-((\rho^2-3)\rho^4)) \\ & = (\rho^2+1)^2\rho^4(-3+\rho^2)+\mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Portanto, para  $\varepsilon \ll 1$ , vemos que o sinal do determinante é positivo para  $\rho > \sqrt{3}$  e negativo para  $\rho < \sqrt{3}$ . Coincidentemente o limite do raio crítico (5.30) é  $\sqrt{3}$  quando  $\varepsilon$  tende a zero

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \sqrt{30} \sqrt{\frac{\varepsilon(\varepsilon\nu + 1)}{\sqrt{9(\varepsilon\nu + \varepsilon + 1)^2 + 60\varepsilon(\varepsilon\nu + 1)} - 3(\varepsilon\nu + \varepsilon + 1)}} \right] = \sqrt{3}, \quad (5.39)$$

portanto nossa expectativa é que o último autovalor seja positivo para  $\rho = \rho_e > \rho_c \approx \sqrt{3}$  e negativo para  $\rho = \rho_i < \rho_c \approx \sqrt{3}$ , o que provaremos com detalhes a partir de agora.

Pretendemos achar os raios de equilíbrio como expansão polinomial de  $\rho_i$  e  $\rho_e$  em função do parâmetro  $\varepsilon$ , além da expansão do próprio momento angular  $\tilde{J}^2(\varepsilon)$  do raio de equilíbrio  $\rho(\varepsilon)$ . Então, definimos os coeficientes

$$\rho(\varepsilon) := \sqrt{3} + \rho_1\varepsilon + \rho_2\varepsilon^2 + \rho_3\varepsilon^3 + \rho_4\varepsilon^4 + \rho_5\varepsilon^5 + \mathcal{O}(\varepsilon^6), \quad (5.40)$$

$$\tilde{J}^2(\varepsilon) := \frac{16}{3\sqrt{3}} + J_1\varepsilon + J_2\varepsilon^2 + J_3\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (5.41)$$

**Proposição 5.3.3.** *Os autovalores da matriz Hessiana (5.35) são todos positivos para  $\rho = \rho_e$ , raio de equilíbrio externo, e quatro positivos e um negativo para  $\rho = \rho_i$ , raio de equilíbrio interno.*

*Demonstração.* A equação (5.25) pode ser fatorada ficando na forma  $p/q = 0$ , onde  $p$  e  $q$  são polinômios com

$$\begin{aligned} p(\varepsilon, \rho, \tilde{J}^2) &= -3\varepsilon^3\nu^2 - \varepsilon^2\rho^2\nu^2 - 6\varepsilon^2\rho^2\nu - 6\varepsilon^2\nu - 2\varepsilon\rho^4\nu - 3\varepsilon\rho^4 - 2\varepsilon\rho^2\nu - 6\varepsilon\rho^2 \\ &\quad - 3\varepsilon + \tilde{J}^2\rho^5 - \rho^6 - 2\rho^4 - \rho^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Desta forma, se substituirmos (5.40) e (5.41) na equação (5.42), obtemos uma função

$$g(\varepsilon) := p(\varepsilon, \rho(\varepsilon), \tilde{J}^2(\varepsilon)) = 0. \quad (5.43)$$

Para resolver a equação (5.43) na ordem  $\varepsilon^0$ , fazemos  $g(0) = 0$  que já é identicamente satisfeita. Em ordem  $\varepsilon^1$ , impomos  $g'(0) = 0$ , que é equivalente a

$$J_1 = \frac{8(\nu + 2)}{3\sqrt{3}}. \quad (5.44)$$

Em ordem  $\varepsilon^2$ , impomos  $g''(0) = 0$ , que implica

$$g''(0) = -18 \left( -12 \left( \sqrt{3}\rho_1 - 2 \right) \nu + 4\rho_1 \left( 3\rho_1 - 8\sqrt{3} \right) + 3\nu^2 \right) = 0 \quad (5.45)$$

de modo que suas soluções são

$$\rho_{i1} = \frac{8 + 3\nu - \sqrt{6\nu^2 + 24\nu + 64}}{2\sqrt{3}}, \quad \rho_{e1} = \frac{8 + 3\nu + \sqrt{6\nu^2 + 24\nu + 64}}{2\sqrt{3}}, \quad (5.46)$$

onde  $\rho_{i1}$  corresponde ao raio interno e  $\rho_{e1}$  ao raio externo.

Daqui em diante, continuando o mesmo procedimento perturbativo, encontramos a expansão dos raios interno e externo independentemente, obtendo

$$\begin{aligned} \rho_i(\varepsilon) := & \sqrt{3} + \frac{8 + 3\nu - \sqrt{6\nu^2 + 24\nu + 64}}{2\sqrt{3}} \varepsilon \\ & + \frac{8(9\nu^2 + 126\nu + 416) - \sqrt{6\nu^2 + 24\nu + 64}(3\nu^2 + 48\nu + 416)}{72\sqrt{6}\sqrt{3\nu^2 + 12\nu + 32}} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} \rho_e(\varepsilon) := & \sqrt{3} + \frac{8 + 3\nu + \sqrt{6\nu^2 + 24\nu + 64}}{2\sqrt{3}} \varepsilon \\ & + \frac{8(9\nu^2 + 126\nu + 416) + \sqrt{6\nu^2 + 24\nu + 64}(3\nu^2 + 48\nu + 416)}{72\sqrt{6}\sqrt{3\nu^2 + 12\nu + 32}} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Ao substituir as expressões (5.47) e (5.48) na matriz (5.36), seu determinante tem as seguintes expansões

$$\det_{int} = -144\varepsilon\sqrt{6\nu^2 + 24\nu + 64} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) < 0 \quad (5.49)$$

para  $\rho = \rho_i$  e

$$\det_{ext} = 144\varepsilon\sqrt{6\nu^2 + 24\nu + 64} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) > 0 \quad (5.50)$$

para  $\rho = \rho_e$ . Desde que já provamos que seu traço é positivo, concluimos que todos os autovalores de  $\text{Hess}E_r$  são positivos no equilíbrio  $\rho = \rho_e$  no entanto,  $\text{Hess}E_r$  tem um autovalor negativo e os demais positivos no equilíbrio  $\rho = \rho_i$ .  $\square$

Concluimos que, para cada  $\tilde{J} > \tilde{J}_c$  o equilíbrio  $(\rho_e, 0, 0, 0, 0)$  é um mínimo local da energia  $E_r$  e o equilíbrio  $(\rho_i, 0, 0, 0, 0)$  é ponto de sela, ou seja, para cada vizinhança sua,  $(\rho_i, 0, 0, 0, 0) \in W$ , existem  $x_1, x_2 \in W$  tais que  $E_r(x_1) < E_r(\rho_i, 0, 0, 0, 0) < E_r(x_2)$ .

O Teorema 5.1.2 e Proposição 5.3.3 podem ser usados para concluir imediatamente a instabilidade da órbita com raio menor.

**Corolário 5.3.1.** *Para cada  $\tilde{J} > \tilde{J}_c$ , e  $\varepsilon \ll 1$  suficientemente pequeno, a solução de equilíbrio  $(\rho_i, 0, 0, 0, 0)$  é instável.*

*Demonstração.* Considerando a função  $V(\rho, \dot{\rho}, \dot{\phi}, \epsilon, \dot{\epsilon}) := -E_r(\rho, \dot{\rho}, \dot{\phi}, \epsilon, \dot{\epsilon}) + E_r(x_0)$ , onde  $x_0 = (\rho_i, 0, 0, 0, 0)$ , vemos que  $V(x_0) = 0$ ,  $\dot{V}(x) > 0$  para todo  $x$  próximo de  $x_0$ ,  $x \neq x_0$ , e  $V$  assume valores positivos em qualquer vizinhança de  $x_0$ , pois sempre existe um ponto próximo de  $x_0$  com  $E_r(x) < E_r(x_0)$ , pela Proposição 5.3.3.  $\square$

Por outro lado, a Proposição 5.3.3 pode ser usada com o Teorema 5.1.1 para inferir a estabilidade da órbita com raio maior.

**Corolário 5.3.2.** *Para cada  $\tilde{J} > \tilde{J}_c$ , e  $\varepsilon \ll 1$  suficientemente pequeno, a solução de equilíbrio  $(\rho_e, 0, 0, 0, 0)$  é assintoticamente estável.*

*Demonstração.* Neste caso, diretamente da definição, a função energia  $E_r(\rho, \dot{\rho}, \dot{\phi}, \epsilon, \dot{\epsilon})$  é uma função de Lyapunov do sistema, como já observado. Mostramos também que o conjunto  $M$  da definição de função de Lyapunov consiste nos pontos de equilíbrio  $(\rho, 0, 0, 0, 0)$ , com  $\rho = \rho_i(\varepsilon)$  ou  $\rho = \rho_e(\varepsilon)$ . A Proposição 5.3.3 garante que em cada nível de momento angular, o equilíbrio com raio maior é um mínimo estrito de  $E_r$ , portanto existe um aberto  $G$ , neste nível, vizinhança deste equilíbrio  $x_0$  de forma que  $E_r(x_0) < E_r(x)$  para todo  $x \in G$ ,  $x \neq x_0$  e invariante pelo fluxo da equação. Decorre do Teorema 5.1.1 que para toda condição inicial em  $x_1 \in G$ , a solução  $x(t)$  com  $x(0) = x_1$  satisfaz  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$ , que é a definição de ponto de equilíbrio assintoticamente estável.  $\square$

Os Corolários 5.3.1 e 5.3.2 respondem à pergunta de qual é o comportamento das soluções próximas aos dois equilíbrios, além disso a prova do Corolário 5.3.2 mostra que toda solução que se inicia na maior vizinhança do equilíbrio estável em que ele seja mínimo, convergirá para ele. No entanto, não estimamos a extensão dessa região, já



que provavelmente neste sistema também há órbitas parabólicas e hiperbólicas como no Capítulo 2. Também vemos que para  $\tilde{J} < \tilde{J}_c$ , o conjunto  $M$  da definição de função de Lyapunov é vazio, portanto toda solução é levada a uma colisão ou ejeção.

Observamos que todos os resultados obtidos até aqui se basearam na expressão da energia relativa  $E_r$  e o fato de que ao longo das soluções  $\dot{E}_r \leq 0$ , se anulando apenas sobre os dois equilíbrios encontrados, tanto é que em nenhum dos cálculos ocorreu a constante  $\tilde{\alpha}$ . Portanto, estes resultados são muito gerais nesse modelo, independente do mecanismo de dissipação, como esperado devido a resultados independentes, também gerais, encontrados na literatura (Hut, 1980).

### 5.3.2 Segundo caso: halter desalinhado

Lembramos que o equilíbrio com halter desalinhado é definido por  $\epsilon = \pi/2$ . Neste caso, a equação (5.21) é equivalente a

$$2\theta^2 \rho^5 + 3\epsilon - 2\rho^2 = 0. \quad (5.51)$$

Como foi visto no primeiro caso, no equilíbrio vale a equação (5.23), e portanto a equação (5.51) é equivalente a

$$\frac{\tilde{J}^2 \rho}{(\nu\epsilon + \rho^2 + 1)^2} + \frac{3\epsilon}{2\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} = 0. \quad (5.52)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas, podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$\left(\rho - \frac{3\epsilon}{2\rho}\right) \left(\frac{\nu\epsilon + 1}{\rho^2} + 1\right)^2 = \tilde{J}^2. \quad (5.53)$$

O caso dos equilíbrios com halter desalinhado é bem diferente do anterior. A expressão  $f(\rho) = \tilde{J}^2$  em (5.53) agora tem as seguintes propriedades

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} f(\rho) = -\infty, \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} f(\rho) = +\infty.$$

Definindo novamente  $x = 1/\rho$ , derivando a equação (5.53) em relação a  $x$  e igualando a zero temos

$$-\frac{(x^2(\nu\epsilon + 1) + 1)(15\epsilon x^4(\nu\epsilon + 1) + x^2((3 - 6\nu)\epsilon - 6) + 2)}{2x^2} = 0, \quad (5.54)$$

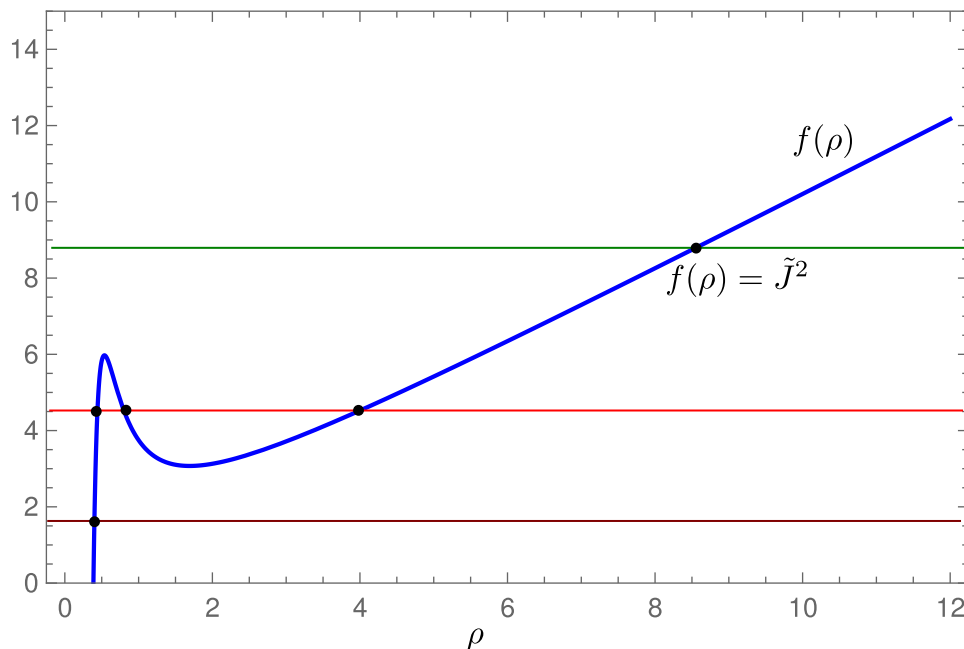


Figura 5.2: Equilíbrios relativos do sistema em função do momento angular total, para halter desalinhado.

e, portanto, os pontos críticos de  $f(x)$  são as raízes da nova equação biquadrática

$$15\varepsilon(x^2)^2(\nu\varepsilon + 1) + 3x^2(-2\nu\varepsilon + \varepsilon - 2) + 2 = 0. \quad (5.55)$$

Novamente (5.55) tem discriminante positivo  $9(-2\nu\varepsilon + \varepsilon - 2)^2 - 120\varepsilon(\nu\varepsilon + 1) > 0$ , para  $\varepsilon$  próximo de zero. Mas neste caso, os coeficientes da equação biquadrática (5.55) satisfazem  $-4ac < 0$  e  $-b > 0$ , então  $\sqrt{b^2 - 4ac} < \sqrt{b^2} = -b$ , logo  $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$  e  $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} > -b + b = 0$ . Portanto, neste caso sempre temos duas raízes positivas da equação biquadrática, gerando duas raízes positivas para a equação original (5.53). Concluimos que a função  $f(\rho)$ , para  $\varepsilon$  pequeno, tem uma assíntota em  $\rho = 0$ , dois pontos  $0 < \rho_1 < \rho_2$  de máximo e mínimo local, respectivamente, e é crescente a  $+\infty$  após  $\rho_2$ . Dessa forma, ao contrário do caso alinhado, para qualquer valor de momento angular  $\tilde{J}$  sempre há equilíbrios relativos, podendo um ou três equilíbrios no total. A situação é ilustrada na Figura 5.2.

Poderíamos analisar a existência desses equilíbrios como função dos parâmetros, no

entanto, veremos na sequência que todos eles são necessariamente instáveis. Isso tira a relevância desta análise.

Como no caso alinhado, todos os equilíbrios que encontramos são pontos críticos da energia relativa (5.15). Sua matriz Hessiana sobre eles agora tem a forma

$$\text{Hess}(E_r) = \begin{bmatrix} \frac{3\nu\varepsilon(5\varepsilon-2\rho^2)+3\varepsilon\rho^2+2\rho^4}{2(\nu\varepsilon\rho^5+\rho^7)} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\tilde{J}\rho}{(\nu\varepsilon+\rho^2)(\nu\varepsilon+\rho^2+1)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3\varepsilon}{\rho^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu\varepsilon\rho^2}{\nu\varepsilon+\rho^2} & 0 \\ \frac{2\tilde{J}\rho}{(\nu\varepsilon+\rho^2)(\nu\varepsilon+\rho^2+1)} & 0 & 0 & 0 & \frac{\nu\varepsilon+\rho^2+1}{\nu\varepsilon+\rho^2} \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

Vemos imediatamente do bloco central  $3 \times 3$  dessa matriz que ela sempre possui os autovalores positivos  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \nu\varepsilon\rho^2/(\nu\varepsilon + \rho^2)$  mas um autovalor negativo  $\lambda_3 = -3\varepsilon/\rho^3$ , para quaisquer um dos equilíbrios citados anteriormente. Portanto, pelo mesmo argumento da seção anterior, todos eles são instáveis.

## 5.4 Estimativa de atração da órbita circular estável

Nesta seção, vamos usar a linearização das equações de movimento para estimar a velocidade de atração das soluções vizinhas em direção à solução de equilíbrio assintoticamente estável determinado na seção anterior. Para isso, precisamos usar a conservação do momento angular para reduzir o sistema de equações diferenciais (5.17), (5.18), (5.19) e (5.20). Usando (5.13), podemos eliminar a variável  $\theta$  do sistema e encontrar o sistema de dimensão 5 na forma  $(\dot{\rho}, \ddot{\rho}, \ddot{\phi}, \dot{\epsilon}, \ddot{\epsilon}) = F(\rho, \dot{\rho}, \dot{\phi}, \epsilon, \dot{\epsilon})$ . Explicitamente, temos

$$\ddot{\rho} = \frac{\rho(\dot{\epsilon}\nu\varepsilon + \dot{\phi} - \tilde{J})^2}{(\nu\varepsilon + \rho^2)^2} - \frac{1}{\rho^2} \left[ 1 + \frac{3\varepsilon}{2\rho^2} (3\cos^2(\epsilon) - 1) \right], \quad (5.57)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\tilde{\alpha} \left( \tilde{J} - \dot{\phi}(\varepsilon\nu + \rho^2 + 1) + \rho^2\dot{\epsilon} \right)}{\varepsilon\nu + \rho^2}, \quad (5.58)$$

$$\ddot{\epsilon} = -\frac{3}{2\nu\rho^3} \text{sen}(2\epsilon) - \frac{\rho \left( 2\dot{\rho}(-\tilde{J} + \dot{\phi} + \epsilon\nu\dot{\epsilon})\epsilon\nu + \tilde{\alpha}\rho \left( \tilde{J} - \dot{\phi}(\epsilon\nu + \rho^2 + 1) + \rho^2\dot{\epsilon} \right) \right)}{(\epsilon\nu + \rho^2)^2 \epsilon\nu}. \quad (5.59)$$

A matriz Jacobiana de  $F$  no equilíbrio estável  $(\rho, 0, 0, 0, 0)$  é

$$DF = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2(6\epsilon + \rho^2)}{\rho^5} + \frac{\tilde{J}^2(\epsilon\nu - 3\rho^2)}{(\epsilon\nu + \rho^2)(\epsilon\nu + \rho^2 + 1)^2} & -\frac{2\tilde{\alpha}\tilde{J}\rho}{(\epsilon\nu + \rho^2)(\epsilon\nu + \rho^2 + 1)} & 0 & \frac{2\tilde{\alpha}\tilde{J}\rho^3}{\epsilon\nu(\epsilon\nu + \rho^2)^2(\epsilon\nu + \rho^2 + 1)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\tilde{J}\rho}{(\epsilon\nu + \rho^2)(\epsilon\nu + \rho^2 + 1)} \\ 0 & -\frac{2\tilde{J}\rho}{(\epsilon\nu + \rho^2)(\epsilon\nu + \rho^2 + 1)} & -\frac{\tilde{\alpha}(\epsilon\nu + \rho^2 + 1)}{\epsilon\nu + \rho^2} & 0 & \frac{\tilde{\alpha}\rho^2(\epsilon\nu + \rho^2 + 1)}{\epsilon\nu(\epsilon\nu + \rho^2)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{\rho^3\nu} \\ 0 & -\frac{2\epsilon\tilde{J}\rho\nu}{(\epsilon\nu + \rho^2)(\epsilon\nu + \rho^2 + 1)} & \frac{\tilde{\alpha}\rho^2}{\epsilon\nu + \rho^2} & 1 & -\frac{\tilde{\alpha}\rho^4}{\epsilon\nu(\epsilon\nu + \rho^2)^2} \end{pmatrix}, \quad (5.60)$$

onde  $\rho = \rho_e(\epsilon)$ , o raio exterior.

Seus autovalores são as soluções da equação  $\det(DF - \lambda\text{Id}) = 0$ . Vamos encontrar as expansões dos cinco autovalores de  $DF$  na forma  $\Lambda(\epsilon) = \sum \Lambda_k \epsilon^k$ , anulando todos os termos da expansão em série da função

$$g(\epsilon) = \det(DF(\rho_e(\epsilon)) - \Lambda(\epsilon)\text{Id}). \quad (5.61)$$

A equação  $g(0) = 0$  é equivalente a

$$\Lambda_0 \left( 3\sqrt{3}\Lambda_0^2 + 1 \right) \left( \sqrt{3}\Lambda_0 (\tilde{\alpha} + \Lambda_0\nu) + 1 \right) = 0. \quad (5.62)$$

As cinco raízes de (5.62) serão o primeiro termo de cada um dos cinco autovalores da Jacobiana. Portanto temos as expressões para os autovalores em ordem  $\epsilon^0$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon), \\ \lambda_2 &= \frac{-\tilde{\alpha} - \sqrt{\tilde{\alpha}^2 - \frac{4\nu}{\sqrt{3}}}}{2\nu} + \mathcal{O}(\epsilon), \\ \lambda_3 &= \frac{-\tilde{\alpha} + \sqrt{\tilde{\alpha}^2 - \frac{4\nu}{\sqrt{3}}}}{2\nu} + \mathcal{O}(\epsilon), \\ \lambda_4 &= \frac{1}{3^{\frac{3}{4}}}i + \mathcal{O}(\epsilon), \\ \lambda_5 &= -\frac{1}{3^{\frac{3}{4}}}i + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (5.63)$$

Prosseguindo com as ordens superiores, obtemos os autovalores

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\frac{1}{3}\sqrt{2}\tilde{\alpha}\sqrt{3\nu^2 + 12\nu + 32}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\
\lambda_2 &= \frac{-\tilde{\alpha} - 3^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\sqrt{3}\tilde{\alpha}^2 - 4\nu}}{2\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon), \\
\lambda_3 &= \frac{-\tilde{\alpha} + 3^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\sqrt{3}\tilde{\alpha}^2 - 4\nu}}{2\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon), \\
\lambda_4 &= \frac{1}{3^{\frac{3}{4}}}i - \frac{6\tilde{\alpha}}{(3\sqrt{3}\tilde{\alpha}^2 + (\nu - 3)^2)}\varepsilon \\
&\quad - i\sqrt[4]{3} \left( \frac{\sqrt{6\nu^2 + 24\nu + 64}}{12} + \frac{3\sqrt{3}\tilde{\alpha}^2(3\nu + 2) + 3\nu^3 - 16\nu^2 - 9\nu + 90}{12(3\sqrt{3}\tilde{\alpha}^2 + (\nu - 3)^2)} \right) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\
\lambda_5 &= -\frac{1}{3^{\frac{3}{4}}}i - \frac{6\tilde{\alpha}}{(3\sqrt{3}\tilde{\alpha}^2 + (\nu - 3)^2)}\varepsilon \\
&\quad + i\sqrt[4]{3} \left( \frac{\sqrt{6\nu^2 + 24\nu + 64}}{12} + \frac{3\sqrt{3}\tilde{\alpha}^2(3\nu + 2) + 3\nu^3 - 16\nu^2 - 9\nu + 90}{12(3\sqrt{3}\tilde{\alpha}^2 + (\nu - 3)^2)} \right) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Notamos que para valores típicos da constante de dissipação  $\tilde{\alpha}$ , o fator  $\sqrt{\sqrt{3}\tilde{\alpha}^2 - 4\nu}$  deve ser imaginário e portanto  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  devem ser complexos conjugados, com parte real negativa, da mesma forma que  $\lambda_4$  e  $\lambda_5$ . Para  $\varepsilon \ll 1$  suficiente pequeno, a parte real de todos os autovalores é negativa, sendo assim o ponto de equilíbrio é hiperbólico e atrator, como esperado pelos resultados da seção anterior.

O autovetor associado ao autovalor  $\lambda_1$  tem a expansão

$$V_1 = (0, 0, 1, 0, 0) + \varepsilon\tilde{\alpha} \left( 0, -2\sqrt[4]{3}, 0, -1, 0 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{5.65}$$

O autovetor associado ao autovalor  $\lambda_3$  tem a expansão

$$\begin{aligned}
 V_3 = & \left( \frac{2 \left( \nu^2 \left( \sqrt{9\tilde{\alpha}^2 - 12\sqrt{3}\nu} - 3\tilde{\alpha} \right) + 9\tilde{\alpha}^2 \left( \sqrt{3\tilde{\alpha}^2 - 4\sqrt{3}\nu} - \sqrt{3}\tilde{\alpha} \right) + 18\tilde{\alpha}\nu \right)}{3^4\sqrt{3}}, 4 \cdot 3^{3/4}\nu^2, \right. \\
 & \frac{4}{3} \left( \nu^2 \left( \sqrt{9\tilde{\alpha}^2 - 12\sqrt{3}\nu} - 3\tilde{\alpha} \right) + 9\tilde{\alpha}^2 \left( \sqrt{3\tilde{\alpha}^2 - 4\sqrt{3}\nu} - \sqrt{3}\tilde{\alpha} \right) + 18\tilde{\alpha}\nu \right), \\
 & \left. 2\sqrt{3}(\nu - 3)\nu - 3\tilde{\alpha} \left( \sqrt{9\tilde{\alpha}^2 - 12\sqrt{3}\nu} - 3\tilde{\alpha} \right), \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} \left( \sqrt{3\tilde{\alpha}^2 - 4\sqrt{3}\nu} - \sqrt{3}\tilde{\alpha} \right) \left( 3\tilde{\alpha} \left( \sqrt{9\tilde{\alpha}^2 - 12\sqrt{3}\nu} - 3\tilde{\alpha} \right) - 2\sqrt{3}(\nu - 3)\nu \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon).
 \end{aligned} \tag{5.66}$$

O autovetor associado ao autovalor  $\lambda_5$  tem a expansão

$$V_5 = (-i, 3^{\frac{3}{4}}, -2i3^{\frac{1}{4}}, 0, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{5.67}$$

sendo que os autovetores de  $\lambda_2$  e  $\lambda_4$  são apenas os conjugados dos autovetores (5.66) e (5.67), respectivamente.

Notamos que o autovalor  $\lambda_1$  tem a menor parte real, em módulo, e portanto corresponde à velocidade de atração mais lenta do equilíbrio estável, correspondendo à parte das variáveis que mais demoram para atingir o equilíbrio. Vemos da expressão de seu autovetor que está associado, predominantemente, à atenuação da frequência  $\dot{\phi}$  para a frequência de equilíbrio. Nosso objetivo seria fornecer uma estimativa mais precisa do que (4.45) para a atenuação da excentricidade da órbita, por exemplo. Vamos usar o seguinte teorema, cuja prova se encontra em Barreira & Valls (2012), para nos auxiliar nesta resposta.

**Teorema 5.4.1.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$  e seja  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  um ponto tal que  $f(x_0) = 0$  e sua jacobiana  $Df(x_0)$  tem apenas autovalores com parte real negativa. Então existem constantes  $C, \eta, \delta > 0$  tais que a solução  $x(t)$  do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

satisfaz

$$\|x(t) - x_0\| \leq C e^{-\eta t} \|\bar{x}_0 - x_0\|,$$

para todo  $t \geq 0$  e  $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  com  $\|\bar{x}_0 - x_0\| < \delta$ .

Em outras palavras, sob as hipóteses do Teorema 5.4.1, as condições iniciais próximas ao equilíbrio geram soluções que convergem a ele exponencialmente rápido, de forma proporcional à distância da condição ao equilíbrio, assim como a estimativa (4.45). Na demonstração fica claro que podemos tomar  $\eta = \min\{|\operatorname{Re}(\lambda)| : \lambda \text{ é autovalor de } Df(x_0)\}$ . Esta estimativa de aproximação é mais completa, pois leva em conta todas as variáveis do problema, incluindo as orbitais, fornecendo uma cota superior para a distância. Para o sistema (5.57), (5.58) e (5.59), vemos que

$$\eta = -\lambda_1 = \frac{1}{3} \sqrt{2\tilde{\alpha} \sqrt{3\nu^2 + 12\nu + 32\varepsilon^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)}. \quad (5.68)$$

Notamos que esta estimativa é feita com a nova variável temporal, para comparar com a constante  $1/\tau_M$  de (4.45) ou  $1/\tau_I$  de (4.61) é preciso retornar à variável original. Além disso, para fins de comparação também parece necessário considerar os autovalores  $\lambda_{2,3}$  e  $\lambda_{4,5}$  devido ao aspecto de seus autovalores, que têm componentes orbitais não nulas.

# Capítulo 6

## Equações médias

Neste último capítulo, procuramos aplicar o formalismo do Capítulo 3 na construção das variáveis de Delaunay para compreender o comportamento médio do sistema de equações diferenciais (5.17), (5.18), (5.19) e (5.20). Vamos compreender as dificuldades encontradas e obter resultados parciais.

### 6.1 Média das equações completas

Para converter o sistema de equações do modelo para um sistema nas variáveis de Delaunay (3.67), vimos que basta encontrar as componentes da força perturbativa na base móvel  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_b, \vec{e}_n\}$ ,  $F_r$ ,  $F_b$  e  $F_n$ . Como estamos tratando de um sistema planar,  $F_n = 0$ . Neste caso, tomando a obliquidade nula  $i = 0$ , temos  $\vec{e}_r = (\cos(h + \theta), \sin(h + \theta), 0)$ . No entanto, a variável  $h$  está mal definida, podendo assumir qualquer valor. Supondo que  $h = 0$ , podemos reescrever essa expressão como  $\vec{e}_r = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ , que representa o vetor radial. Por outro lado, temos  $\vec{e}_n = (0, 0, 1)$  e  $\vec{e}_b = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)$ .

No contexto do modelo em análise, a força que atua sobre o ponto  $S$  não é radial, pois estamos lidando com um halter, assim o corpo é localizável pelas coordenadas  $\vec{r} = (x, y) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = \rho \vec{e}_r = \rho \hat{r}$ .

As derivadas temporais da posição são dadas por  $\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \vec{e}_r + \rho \dot{\theta} (-\sin(\theta), \cos(\theta)) =$



$\rho\dot{\vec{e}}_r + \rho\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_b$  e  $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\rho}\vec{e}_r + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_b + \rho\ddot{\theta}\dot{\vec{e}}_b + \rho\dot{\theta}^2(-\cos(\theta), -\sin(\theta)) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\dot{\vec{e}}_b$ .

Portanto, a aceleração do satélite terá uma componente radial e outra componente perpendicular à direção radial. Dessa forma, o problema perturbativo da Lei de Newton da Gravitação fica  $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\dot{\vec{e}}_b = (-G_U m M / \rho^2)\vec{e}_r + F_r\vec{e}_r + F_b\dot{\vec{e}}_b$ . Isso nos leva a escrever

$$\begin{aligned}\ddot{\rho} &= \rho\dot{\theta}^2 - \frac{G_U M}{\rho^2} + \frac{F_r}{m}, \\ \rho\ddot{\theta} &= -2\frac{\dot{\rho}\dot{\theta}}{\rho} + \frac{F_b}{m\rho}.\end{aligned}$$

Das equações (5.17), (5.18), (5.19) e (5.20) determinamos as componentes da força perturbativa

$$\frac{F_r}{m} = -\frac{\varepsilon}{\rho^4} (3 \cos^2(\epsilon) - 1), \quad \frac{F_b}{m} = \frac{\varepsilon}{\rho^4} \sin(2\epsilon). \quad (6.1)$$

Dessa forma, nas coordenadas de Delaunay, as componentes orbitais do sistema ficam na forma

$$\dot{L} = \varepsilon \frac{L^3 (e\rho \sin(v) (1 - 3 \cos^2(\epsilon)) + G^2 \sin(2\epsilon))}{G\rho^5}, \quad (6.2)$$

$$\dot{G} = \varepsilon \frac{\sin(2\epsilon)}{\rho^3}, \quad (6.3)$$

$$\dot{\ell} = \frac{1}{L^3} - \varepsilon \frac{((3 \cos^2 \epsilon - 1) (e \cos^2(v) - 2e + \cos(v))) + \sin(v) \sin(2\epsilon) (e \cos(v) + 2)}{eL\rho^3}, \quad (6.4)$$

$$\dot{g} = \varepsilon \frac{((G^2 + \rho) \sin(v) \sin(2\epsilon) + \frac{1}{2}G^2 \cos(v) (3 \cos(2\epsilon) + 1))}{eG\rho^4}. \quad (6.5)$$

A média dessas equações, em relação à anomalia média  $\ell$ , podem ser obtidas com o auxílio de (3.80), resultando em

$$\dot{L} = \varepsilon \frac{(3e^2 + 2) \sin(2\epsilon)}{2G^6}, \quad (6.6)$$

$$\dot{G} = \varepsilon \frac{\sin(2\epsilon)}{G^3 L^3}, \quad (6.7)$$

$$\dot{g} = \varepsilon \frac{(3e^2 + 2) \sin(2\epsilon)}{2G^6}. \quad (6.8)$$

Também podemos usar a definição da excentricidade (3.42) para calcular sua evolução média. Derivando essa equação, obtemos

$$\dot{e} = -\frac{G}{eL^2}\dot{G} + \frac{G^2}{eL^3}\dot{L}.$$

Substituindo (6.2) e (6.3) e fazendo novamente a média, obtemos a evolução média da excentricidade

$$\dot{e} = \frac{5\varepsilon \operatorname{sen}(2\varepsilon)}{2G^4L^3}e. \quad (6.9)$$

A equação (6.9) tem exatamente a mesma forma das equações (4.45) e (4.61) do Capítulo 4. De fato, assumindo que as variáveis  $L$ ,  $G$  e  $\varepsilon$  são quase constantes, próximo da órbita circular por exemplo, e que o ângulo  $\varepsilon$  é próximo de zero mas negativo, como esperado no fenômeno das marés, também concluímos que a excentricidade decresce exponencialmente na forma

$$e(t) = e_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_R}\right), \quad \tau_R = -\frac{2G^4L^3}{5\varepsilon \operatorname{sen}(2\varepsilon)}. \quad (6.10)$$

Da mesma forma, o semi-eixo maior da órbita também é dado na equação (3.42) e, portanto, sua derivada é da forma

$$\dot{a} = 2L\dot{L} = \varepsilon \frac{(3e^2 + 2) \operatorname{sen}(2\varepsilon)}{G^6} \sqrt{a}, \quad (6.11)$$

também em clara analogia com (4.48).

As equações para  $\dot{\phi}$  e  $\dot{\varepsilon}$  nas coordenadas de Delaunay ficam

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon} = & -\frac{1}{G^{10}} \left( \alpha G^7 \left( \dot{\varepsilon} G^3 - \dot{\phi} G^3 + (e \cos(v) + 1)^2 \right) - 2eG^4 \varepsilon \nu \operatorname{sen}(v) (e \cos(v) + 1)^3 \right) \\ & + \varepsilon \operatorname{sen}(2\varepsilon) (e \cos(v) + 1)^3 \left( \varepsilon \nu (e \cos(v) + 1)^2 + G^4 \right). \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\ddot{\phi} = -\alpha \left( -\dot{\varepsilon} + \dot{\phi} - \frac{(e \cos(v) + 1)^2}{G^3} \right). \quad (6.13)$$

Suas médias são

$$\ddot{\varepsilon} = \alpha \left( \dot{\phi} - \frac{1}{L^3} - \dot{\varepsilon} \right) - \varepsilon \frac{(3e^2 + 2) \varepsilon \nu + 2G^4}{2G^7L^3} \operatorname{sen}(2\varepsilon), \quad (6.14)$$

$$\ddot{\phi} = -\alpha \left( \dot{\phi} - \frac{1}{L^3} - \dot{\epsilon} \right). \quad (6.15)$$

Notamos que o sistema médio, autônomo, de equações (6.6), (6.7), (6.14) e (6.15) apesar de parecer uma boa aproximação do sistema original, possui por exemplo o seguinte problema: ao tomar a condição inicial  $\epsilon = 0$ ,  $\dot{\epsilon} = 0$  e  $\dot{\phi} = 1/L^3$ , vemos que o sistema fica em equilíbrio, não importando os valores iniciais de  $L$  e  $G$ , e, portanto, a órbita fica estacionária. Sabemos do Capítulo 5 que esse não é o comportamento correto do modelo.

No caso especial em que a órbita inicial é circular, por (6.6) e (6.7) ao longo das soluções temos a identidade  $L \equiv G$  e portanto  $e \equiv 0$ . Neste caso, podemos analisar apenas as equações (6.6), (6.14) e (6.15)

$$\dot{L} = \varepsilon \frac{\text{sen}(2\epsilon)}{L^6}, \quad (6.16)$$

$$\ddot{\epsilon} = \alpha \left( \dot{\phi} - \frac{1}{L^3} - \dot{\epsilon} \right) - \varepsilon \frac{\varepsilon\nu + L^4}{L^{10}} \text{sen}(2\epsilon), \quad (6.17)$$

$$\ddot{\phi} = -\alpha \left( \dot{\phi} - \frac{1}{L^3} - \dot{\epsilon} \right). \quad (6.18)$$

Os equilíbrios de (6.16), (6.17) e (6.18) são  $\dot{\epsilon} = 0$ ,  $\epsilon = 0$  ou  $\pi/2$  e  $\dot{\phi} = L^{-3}$ . Vemos então que os equilíbrios não são isolados, e portanto não hiperbólicos. No entanto, somando as equações (6.17) e (6.18) concluímos que

$$\ddot{\epsilon} + \ddot{\phi} = -\varepsilon \frac{\varepsilon\nu + L^4}{L^{10}} \text{sen}(2\epsilon) = -\frac{\varepsilon\nu + L^4}{L^4} \dot{L} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\varepsilon\nu}{3L^3} - L \right). \quad (6.19)$$

A equação (6.19) mostra que o sistema tem uma integral primeira

$$C(\dot{\epsilon}, \dot{\phi}, L) = \dot{\epsilon} + \dot{\phi} + L - \frac{\varepsilon\nu}{3L^3}. \quad (6.20)$$

Usando essa integral primeira, podemos reduzir o sistema de equações para

$$\dot{L} = \varepsilon \frac{\text{sen}(2\epsilon)}{L^6}, \quad (6.21)$$

$$\ddot{\epsilon} = -\alpha \left( C - L + \frac{\varepsilon\nu - 3}{3} \frac{1}{L^3} - 2\dot{\epsilon} \right) - \varepsilon \frac{\varepsilon\nu + L^4}{L^{10}} \text{sen}(2\epsilon). \quad (6.22)$$

Desta vez, os equilíbrios de (6.21) e (6.22) são  $\epsilon = 0$  ou  $\pi/2$  e as raízes de

$$C = L - \frac{\epsilon\nu - 3}{3} \frac{1}{L^3}, \quad (6.23)$$

para cada nível da integral primeira fixado. Notamos que para todos esses equilíbrios, por (6.20) e (6.23) valem

$$C = \dot{\phi} + L - \frac{\epsilon\nu}{3L^3} = L - \frac{\epsilon\nu - 3}{3} \frac{1}{L^3}, \quad (6.24)$$

portanto  $\dot{\phi} = L^{-3}$  e temos novamente a configuração spin-órbita síncrona.

Observamos também que a função do lado direito de (6.23),

$$f(L) := L + \frac{3 - \epsilon\nu}{3} \frac{1}{L^3},$$

desde que  $\epsilon\nu < 3$ , também satisfaz como antes

$$\lim_{L \rightarrow 0^+} f(L) = \lim_{L \rightarrow +\infty} f(L) = +\infty,$$

tendo um único ponto crítico, mínimo absoluto, em  $L^4 = 3 - \epsilon\nu$ . Portanto, a cada valor de  $C > 4\sqrt[4]{3 - \epsilon\nu}/3$  corresponde um par de soluções de equilíbrio  $L_i < 4\sqrt[4]{3 - \epsilon\nu}/3 < L_e$ . Como no Capítulo 4, para  $C < 4\sqrt[4]{3 - \epsilon\nu}/3$  não existem soluções de equilíbrio.

O polinômio característico desta equação diferencial no equilíbrio  $\epsilon = 0$  é

$$\frac{2\alpha\epsilon(\epsilon\nu + L^4 - 3)}{L^{10}} + \frac{2\epsilon(\epsilon\nu + L^4)}{L^{10}}\lambda + 2\alpha\lambda^2 + \lambda^3, \quad (6.25)$$

enquanto no equilíbrio  $\epsilon = \pi/2$  fica

$$-\frac{2\alpha\epsilon(\epsilon\nu + L^4 - 3)}{L^{10}} - \frac{2\epsilon(L^4 + \epsilon\nu)}{L^{10}}\lambda + 2\alpha\lambda^2 + \lambda^3. \quad (6.26)$$

Pelo critério de estabilidade de Routh-Hurwitz, um polinômio de grau 3 na forma

$$a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

tem todos os zeros com parte real negativa se, e somente se,  $a_j > 0$  para  $0 \leq j \leq 3$  e  $a_2a_1 - a_3a_0 > 0$ . Vemos imediatamente que o polinômio (6.26) não atende ao critério,

então todos os equilíbrios com  $\epsilon = \pi/2$  são instáveis. Para o polinômio (6.25), como  $\epsilon\nu - 3 + L_e^4 > 0$ , temos que

$$a_2a_1 - a_3a_0 = \frac{2\alpha\epsilon(\epsilon\nu + L_e^4 + 3)}{L_e^{10}} > 0,$$

e portanto todos os equilíbrios com  $\epsilon = 0$  e  $L = L_e$ , em cada nível da integral primeira, são assintoticamente estáveis, como esperado. Para  $L = L_i$ ,  $\epsilon\nu - 3 + L^4 < 0$  e assim um dos coeficientes de (6.25) fica negativo, fazendo com que o equilíbrio seja instável.

A compreensão do comportamento médio completo do modelo proposto está em aberto, até onde sabemos. Como podemos ver no artigo mais recente Pinzari et al. (2024), ainda não publicado, os autores estudam médias das equações apenas nas vizinhanças de ressonâncias spin-órbita.

# Capítulo 7

## Conclusão

Concluimos que ferramentas básicas de teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias se mostraram adequadas para um detalhamento da dinâmica de halteres com atrito, na tentativa de compreender o fenômeno físico das marés. Com esta abordagem, conseguimos exibir vários aspectos da dinâmica que não foram mencionados nos trabalhos anteriores.

Desta forma, acreditamos que a vasta literatura em equações diferenciais, do ponto de vista matemático, tem muito potencial para explorar aspectos da dinâmica não-linear deste problema. A maior parte dos nossos resultados decorrem da linearização dos equilíbrios. No entanto, integrações numéricas do problema (Pinzari et al., 2024) sugerem que há uma rica dinâmica a ser explorada e caracterizada do ponto de vista analítico.

# Referências Bibliográficas

- Barreira, L. & Valls, C. (2012). *Equações diferenciais ordinárias: teoria qualitativa*. São Paulo: Livraria da Física.
- Celletti, A. & Sidorenko, V. (2008). Some properties of the dumbbell satellite attitude dynamics. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 101, 105–126.
- Chicone, C. (2006). *Ordinary differential equations with applications*. Springer.
- Cushman, R. (1983). Reduction, Brouwer’s Hamiltonian, and the critical inclination. *Celestial Mechanics*, 31(4), 401–429.
- de Menezes Neto, J. L. (2024). Investigation of the nonlinear stability of a pendulum with variable length in elliptic orbit. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, 29(4), 1611–1623.
- de Menezes Neto, J. L., Araujo, G. C., Rothen, Y. P., & Vidal, C. (2022). Parametric stability of a double pendulum with variable length and with its center of mass in an elliptic orbit. *Journal of Geometric Mechanics*, 14(3), 381–408.
- Dilao, R. & Murteira, M. (2020). Principal periodic orbits of the keplerian dumbbell system. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 19(1), 181–207.
- Ferraz-Mello, S., Grotta-Ragazzo, C., & dos Santos, L. R. (2015). Dissipative forces in celestial mechanics. 30º Colóquio Brasileiro de Matemática. *Publicações Matemáticas, IMPA*.

- Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J. (1980). *Classical mechanics*. Addison-Wesley Reading, MA.
- Golubović, L. & Knudsen, S. (2017). Physics of celestial scale dumbbells. *Applied Physics Research*, 9(5).
- Hale, J. K. (1969). *Ordinary differential equations*. Wiley-Interscience.
- Hut, P. (1980). Stability of tidal equilibrium. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 92, no. 1-2, Dec. 1980, p. 167-170., 92, 167–170.
- Kibble, T. & Berkshire, F. H. (2004). *Classical mechanics*. World Scientific publishing company.
- Morbidelli, A. (2002). *Modern celestial mechanics*. London, England: CRC Press.
- Murray, Carl Dand Dermott, S. F. (1999). *Solar system dynamics*. Cambridge University Press.
- Newton, I. (1687). *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. *Londini, iussu Societatis Regiæ ac typis Josephi Streater*.
- Ortega, R., Loria, A., Nicklasson, P. J., Sira-Ramirez, H., Ortega, R., Loría, A., Nicklasson, P. J., & Sira-Ramírez, H. (1998). *Euler-Lagrange systems*. Springer.
- Owen, J. E. & Wu, Y. (2013). Kepler planets: a tale of evaporation. *The Astrophysical Journal*, 775(2), 105.
- O’Leary, J. & Hill, J. M. (2018). Post-newtonian satellite orbits. *Astrophysics and Space Science*, 363(10), 211.
- Pinzari, G., Scoppola, B., & Veglianti, M. (2024). Spin orbit resonance cascade via core shell model. Application to Mercury and Ganymede. *arXiv preprint arXiv:2402.07650*.



- Ragazzo, C. & Ruiz, L. (2017). Viscoelastic tides: models for use in celestial mechanics. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 128, 19–59.
- Scoppola, B., Troiani, A., & Veglianti, M. (2022). Tides and dumbbell dynamics. *Regular and Chaotic Dynamics*, 27(3), 369–380.
- Scoppola, B. & Veglianti, M. (2023). Dumbbell dynamics: a didactical approach. *arXiv preprint arXiv:2307.00292*.
- Valeriano, L. R. (2016). Parametric stability in Robe’s problem. *Regular and Chaotic Dynamics*, 21, 126–135.
- Vieira Neto, E. (2020). Introdução à mecânica celeste. *XXIV Escola de Verão em Dinâmica Orbital e Planetologia*.
- Zeng, S., Chen, M., Zhang, T., Hu, W., Guo, Q., & Lu, D. (2018). Analytical modeling of soliton interactions in a nonlocal nonlinear medium analogous to gravitational force. *Physical Review A*, 97(1), 013817.