UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS

MARCOS ANDREY ROSA

DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA À SALA DE AULA: explorando problemas históricos para o ensino de Probabilidade

ITAJUBÁ - MG
2024

MARCOS ANDREY ROSA

DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA À SALA DE AULA: explorando problemas históricos para o ensino de Probabilidade

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências (PPGEC) da Universidade Federal de Itajubá, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências.

Área de concentração: Educação em Ciências

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Mariana Feiteiro Cavalari Silva

ITAJUBÁ - MG

2024

MARCOS ANDREY ROSA

DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA À SALA DE AULA: explorando problemas históricos para o ensino de Probabilidade

BANCA EXAMINADORA:

Prof.ª Dr.ª Mariana Feiteiro Cavalari Silva
Orientadora
Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI

Prof. Dr. Evandro Fortes Rozentalski
Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI

Prof.ª Dr.ª Giselle Costa de Sousa
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

ITAJUBÁ - MG
2024

Dedicado à memória de Leonora (Nora), minha mãe, e Guilhermina (Dona Tuta), minha avó.

AGRADECIMENTOS

Em uma sociedade cada vez mais centrada no indivíduo, esquecemos daqueles que nos permitiram chegar aonde estamos. Mesmo que escrever seja, em sua maior parte, uma atividade solitária, outras pessoas, sejam elas conhecidas ou não, fazem parte deste processo.

Guardo um dos aforismos[1] de Nietzsche, que acredito refletir essa percepção. Em sua obra, Nietzsche escreve: “Um bom escritor não tem apenas o seu próprio espírito, mas também o espírito de seus amigos”. Não sou um bom escritor, nem tenho intenção de provar isto, mas nada mais justo que reconhecer aqueles que formam o meu espírito e, por isso, expressar meus agradecimentos:

À memória de minha mãe, cuja influência ainda se faz presente, agradeço por todos os princípios e valores transmitidos, e que sua ausência é sentida a cada conquista.

À memória de minha avó, que partiu recentemente, agradeço por mostrar que um sorriso no rosto pode mudar tudo.

Ao meu pai, agradeço o apoio constante para ser perseverante em minha trajetória acadêmica.

À Sara, agradeço por estar sempre comigo, sua paciência e colaboração foram fundamentais para enfrentar os desafios de realização e escrita da pesquisa.

À Mariana, minha orientadora, agradeço por toda compreensão durante a escrita desta dissertação. Mesmo te trazendo diversas preocupações, sua orientação trouxe confiança e tornou tudo possível.

Aos membros da banca examinadora, o Prof. Dr. Evandro Fortes Rozentalski e Prof.ª Dr.ª Giselle Costa de Sousa, agradeço a avaliação cautelosa tanto do texto de qualificação quanto de defesa. Graças às suas observações, foi possível aprimorar ainda mais o texto.

Ao Bruno, agradeço por sua amizade e cooperação na realização da pesquisa.

À Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), agradeço o apoio financeiro e toda a estrutura para a realização do mestrado.

[1] Aforismo 180 sobre o Espírito Coletivo retirado de NIETZSCHE, Friedrich Wilhelm. **Humano, demasiado humano:** um livro para espíritos livres. Tradução: Paulo César De Souza. São Paulo: Companhia das Letras, 2005.

Os cursos regulares de matemática são mistificadores num aspecto fundamental. Eles apresentam uma exposição do conteúdo matemático logicamente organizada, dando a impressão de que os matemáticos passam de teorema a teorema quase naturalmente, de que eles podem superar qualquer dificuldade e de que os conteúdos estão completamente prontos e estabelecidos... As exposições polidas dos cursos não conseguem mostrar os obstáculos do processo criativo, as frustações e o longo e árduo caminho que os matemáticos tiveram que trilhar para atingir uma estrutura considerável.
Morris Kline (1972, IX)

RESUMO

A História da Matemática, implementada no ensino, pode contribuir para construção do conhecimento matemático, assim como para uma mudança de percepção de uma imagem da Matemática mais afetiva. Este trabalho visa identificar e analisar potencialidades e limitações pedagógicas de uma proposta didática apoiada em problemas históricos para o ensino de Probabilidade na Educação Básica. Para tanto, elaboramos e implementamos uma proposta baseada em três problemas históricos para ensinar os conceitos da Probabilidade, sendo o primeiro o Problema dos Dados, que foi proposto a Galileu Galilei (1564 – 1642), no qual abordamos conceitos de experimento aleatório, espaço amostral, evento e tipos de eventos. Já o segundo foi o Problema dos Pontos, que marca o início do desenvolvimento da Teoria da Probabilidade, resolvido por Blaise Pascal (1623 – 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665), no qual abordamos a definição do cálculo das probabilidades. Por fim, o Dilema de Monty Hall, que, embora tenha menções de diferentes versões em livros antigos, se tornou popular recentemente com o programa televisivo *Let's Make a Deal*, apresentado por Monty Hall, e solução controversa de Marilyn vos Savant (1946 – presente) em que abordamos os conceitos de probabilidade condicional. Esta proposta foi implementada em uma turma do 3° ano do Ensino Médio de uma escola pública de um município do Sul de Minas Gerais, com 30 alunos regularmente matriculados. Em uma abordagem qualitativa de pesquisa, utilizando múltiplos procedimentos de coleta de dados (diário de campo, atividades realizadas, gravações em áudio), os dados foram identificados e analisados com interrelações entre os autores, que propõem que abordagem histórica tenha potencial para alterar a imagem da Matemática, bem como para auxiliar na construção do conhecimento matemático. Dessa forma, identificamos e analisamos essas potencialidades na proposta implementada, evidenciando que os problemas históricos têm muito a contribuir para apresentar os conceitos de Probabilidade, além de revelar a Matemática como uma construção humana. Há indícios de contribuições para os alunos ao evidenciar que não há grupos específicos predestinados a fazer matemática, como homens ou pessoas geniais; mostrar que o trabalho do matemático não é necessariamente solitário; mostrar a possibilidade de diversas soluções para um mesmo problema e o fato de elas serem aceitas ou não depende do contexto/momento histórico; apresentar a relevância dos problemas da matemática ou reais na construção do pensamento matemático. Além disso, também há indícios para a apresentação de conceitos e teorias matemáticas e permite compreender certos motivos relacionados à Matemática. Como limitações percebemos que a proposta não foi interessante para todos os alunos, por motivos como falta de identificação e/ou dificuldades na execução das atividades.

Palavras-chave: Proposta didática. Ensino Médio. Problema dos Dados. Problema dos Pontos. Dilema de Monty Hall.

ABSTRACT

The History of Mathematics, when implemented in teaching, can contribute to the construction of mathematical knowledge as well as to a shift towards a more positive and affective perception of Mathematics. This study aims to identify and analyze the pedagogical potential and limitations of a didactic approach based on historical problems for teaching probability in basic education. To achieve this, we designed and implemented a proposal based on three historical problems to teach probability concepts. The first is the Dice Problem, proposed by Galileo Galilei (1564 – 1642), which addresses concepts such as random experiments, sample space, events, and types of events. The second is the Problem of Points, which marks the beginning of probability theory and was solved by Blaise Pascal (1623 – 1662) and Pierre de Fermat (1601 – 1665). In this problem, we explored the definition of probability calculation. Lastly, the Monty Hall Dilemma, although having references to various versions in ancient texts, gained popularity through the TV show Let's Make a Deal, hosted by Monty Hall, and the controversial solution submitted by Marilyn vos Savant (1946 – present). Here, we addressed the concepts of conditional probability. This proposal was implemented with a third-year high school class at a public school in a city in the southern region of Minas Gerais, involving 30 regularly enrolled students. Adopting a qualitative research approach, multiple data collection procedures were employed (field diary, completed activities, audio recordings), with the data analyzed by authors who suggest that a historical approach has the potential to change the perception of Mathematics and assist in the construction of mathematical knowledge. In this way, we identified and analyzed these potentials in the implemented proposal, highlighting that historical problems greatly contribute to the presentation of probability concepts while revealing Mathematics as a human construct. There is evidence of contributions for students, such as showing that no specific groups, such as men or geniuses, are predestined to practice Mathematics; demonstrating that the work of mathematicians is not necessarily solitary; showing the possibility of multiple solutions to the same problem, with their acceptance depending on historical context; and illustrating the relevance of mathematical or real-world problems in the construction of mathematical thought. Additionally, there are indications of contributions toward the presentation of mathematical concepts and theories, which allows us to understand certain reasons related to Mathematics. However, limitations were noted, such as the proposal not engaging all students due to reasons like lack of identification or difficulty in executing the activities.

Keywords: Didactic proposal. High School. Dice Problem. Problem of Points. Monty Hall Dilemma.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CEP	Comitê de Ética em Pesquisa
CREPHIMat	Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática
CRMG	Currículo Referência de Minas Gerais
HM	História da Matemática
ICMI	*International Commission on Mathematical Instruction*
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO INICIAL

No que diz respeito às aulas de Matemática, é corriqueiro ouvirmos expressões como: "Matemática é complicada demais", "Matemática não é para mim", "Não sou de Exatas", "Reprovei somente em Matemática, mas isso é normal" ou, ainda, "Que utilidade a Matemática terá na minha vida?". Essas expressões transmitem um discurso de que só é possível aprender Matemática quando ela é difícil e, quem sabe, nem todos terão essa oportunidade.

Como se estudar Matemática fosse aprender em uma ilha. Viajamos para essa ilha durante as aulas de Matemática, onde nos são apresentados conhecimentos aparentemente dogmáticos. Logo, a sensação que se tem é de que a Matemática está fora da nossa sociedade, é restritiva e não há o que descobrir. Ou até mesmo que a Matemática está inteiramente concentrada em um livro ou na mente do professor, pronta para ser divulgada e assimilada.

Quando vamos aprender sobre Probabilidade, essa reação também é semelhante — tanto que nos é apresentada como um corpo de conhecimento fora do cotidiano. É comum falarmos e resolvermos questões sobre jogos, sem ao menos tentar praticá-los. Se não compreendermos os conceitos, não somos dignos de pertencer ao grupo de alunos que podem ser considerados matemáticos.

Paulo Freire — quando entrevistado por Maria do Carmo Domite e Ubiratan D'Ambrosio, para 8ª Conferência Internacional sobre Educação Matemática (ICME-8) (em inglês, *8th International Conference on Mathematical Education*), realizada em 1996 — disse que, quando se falava em Matemática "era negócio para deuses ou gênios, já que faziam concessão ao sujeito genial, que podia fazer Matemática sem ser Deus" e indaga quantas mentes foram perdidas por esse discurso?

Fui uma dessas mentes perdidas por um tempo. Até os anos finais do Ensino Fundamental, sentia que não tinha a permissão para visitar essa ilha da Matemática. Apesar de enfrentar obstáculos que pareciam intransponíveis, não me sentia parte do grupo de alunos que tinha facilidade na Matemática, aqueles que eram considerados deuses ou gênios.

No entanto, minha percepção começou a mudar quando estava no Ensino Médio. Para conseguir o passe de entrada para a ilha da Matemática, precisava me esforçar ainda mais, mas já entendia que não era uma tarefa impossível. Por isso, decidi estudar Matemática, mesmo com os receios anteriores, por passar a acreditar que aprender Matemática era possível.

Quando estava na graduação conheci a História da Matemática (HM), percebi que, sim, houve pessoas geniais que contribuíram significativamente para o desenvolvimento da

Matemática, mas também aqueles que não se dedicaram inteiramente à mesma atividade e tiveram contribuições significativas para a organização e formalização desse conhecimento.

Apesar de ter me dedicado a uma linha teórica da Matemática ao longo da graduação, minha trajetória pessoal me fez retornar à pesquisa na área de ensino. Durante o curso de especialização em Educação Matemática, no qual fiz um estudo sobre a disciplina HM nas licenciaturas em Matemática dos Institutos Federais do Estado de Minas Gerais, acabei me interessando mais sobre o assunto, assim como em suas implicações em sala de aula.

Nesse estudo, identifiquei que a participação curricular da HM na formação inicial é justificada por suas contribuições para o ensino. Compreendi que a HM tem muito a acrescentar para a compreensão de temas específicos da Matemática, além de apresentar um lado afetivo da disciplina, tornando o exercício matemático mais natural e humano, que pode ser realizado por pessoas comuns que não são necessariamente profissionais da área. Além de apresentar que a disciplina é motivada por contextos socioculturais e não como uma ilha isolada da sociedade.

Por isso, resolvi realizar uma investigação sobre a utilização da HM no ensino, mais especificamente voltada para compreender como a implementação da HM em sala de aula pode contribuir para o aprendizado de determinados tópicos da Matemática, particularmente a Probabilidade. Além de buscar identificar indícios das potencialidades apresentadas na literatura sobre HM para o ensino — apesar de as contribuições serem amplamente conhecidas —, como toda abordagem, existem limitações e esses fatores serão também analisados neste trabalho.

1 INTRODUÇÃO

Há muito se discute na academia o papel e a relevância da HM para modificar qualitativamente o modo de ensinar e aprender Matemática. Não que essa seja a única ou a melhor das abordagens a serem utilizadas, mas sim uma opção de trabalho que tem mostrado sua viabilidade em diversas situações. A comunidade científica, tanto no Brasil quanto no exterior, tem se empenhado em realizar pesquisas sobre o tema, visando, cada vez mais, esclarecê-lo e divulgá-lo. Podemos, a título de ilustração, destacar o trabalho de Mendes e Pires (2020), que aborda as contribuições da HM para o ensino de Matemática sob a ótica nacional, assim como Chorlay, Clark e Tzanakis (2022) sob a ótica internacional.

De acordo com Miguel e Miorim (2021), a atenção crescente para o uso da abordagem histórica na Matemática se associa ao movimento global em torno da Educação Matemática, que resulta num aumento expressivo na literatura acadêmica sobre as implicações da HM para a sala de aula. Ao olhar para essa literatura, Fried (2001) identificou presença de três principais contribuições:

1. humaniza a Matemática;
2. torna a Matemática mais interessante, mais compreensível e mais acessível;
3. fornece *insights* sobre conceitos, problemas e soluções de problemas.

Segundo Fried (2014), essas três contribuições ainda são pertinentes na literatura acadêmica e o autor propõe uma nova nomenclatura para sistematizá-las, a saber: "tema cultural", "tema motivacional" e "tema curricular". Sob outra perspectiva, Furinghetti (2019) corrobora com as contribuições da HM para o ensino, mas as organiza em dois eixos nos quais ela: contribuiria para "promover a Matemática" e para a "construção do conhecimento matemático".

No entanto, também são investigadas as dificuldades e os obstáculos para a abordagem histórica no ensino de Matemática. Para Tzanakis e colaboradores (2000), as dificuldades se materializam na falta de tempo, recursos pedagógicos, formação do professor e avaliação. Miguel e Miorim (2021, p. 59) corroboram com essas limitações e destacam que entre as dificuldades estão "[…] à ausência de literatura adequada, à natureza imprópria da literatura disponível, à história como um fator complicador, à ausência do sentido de progresso histórico".

Detalharemos e discutimos esses referenciais envolvendo as contribuições e limitações da HM no capítulo posterior.

Nesse contexto, podemos identificar que a HM, para o ensino de Matemática, tem sido cada vez mais difundida entre os pesquisadores e professores. Como consequência, o currículo do Brasil e de outros países tem orientado para uma abordagem histórica no ensino de Matemática. Em um estudo realizado por Fasanelli e colaboradores (2000), sobre a análise dos currículos de diferentes países[2], afirma que:

> Cada vez mais, vários governos locais e nacionais e outros órgãos responsáveis pela elaboração de currículos e diretrizes são persuadidos pelos argumentos desses professores de Matemática de que vale a pena integrar a História da Matemática na Educação Matemática (Fasanelli *et al.*, 2000, p. 1-2, tradução nossa)

Tanto que os documentos oficiais brasileiros também enfatizam a contribuição da HM para o ensino de Matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para a área de Matemática, em 1997, argumentam pela relevância da HM para a desmistificação do conhecimento matemático como um conhecimento restrito a poucos e para o resgate da identidade cultural durante o processo de ensino e aprendizagem, como é ilustrado a seguir:

> Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático (Brasil, 1997, p. 34).

Diante do que foi apresentado, a HM pode não somente desmistificar as aulas de Matemática, como também apresentar a Matemática como uma atividade humana, ou seja, que produz conhecimentos influenciados por fatores culturais. Em nossa interpretação, isto se reflete em um dos princípios dos PCN para a área de Matemática, sob o qual:

> O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo (Brasil, 1997, p. 19).

Outra contribuição relevante da HM, citada nos PCN, é o trabalho integrado com diversos temas, especialmente a diversidade cultural. Pois, a HM permite localizar a dinâmica

---

[2] O estudo de Fasanelli e colaboradores (2000) abrangem os seguintes países: Argentina, Áustria, Brasil, China, Dinamarca, Grécia, Israel, Itália, Japão, Países Baixos, Nova Zelândia, Noruega, Polônia, Reino Unido e Estados Unidos.

da produção intelectual em Matemática, de forma histórica e social, pontualmente, por apresentar:

> A construção e a utilização do conhecimento matemático não são feitas apenas por matemáticos, cientistas ou engenheiros, mas, de formas diferenciadas, por todos os grupos socioculturais, que desenvolvem e utilizam habilidades para contar, localizar, medir, desenhar, representar, jogar e explicar, em função de suas necessidades e interesses (Brasil, 1997, p. 27-28).

Da mesma forma, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), referentes aos conteúdos de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, publicados em 1999, promovem a abordagem histórica para o ensino de Matemática, além de destacarem suas contribuições supracitadas pelos PCN. Logo, os PCNEM se referem à HM para a humanização da Matemática, uma vez que, ao compreenderem as dificuldades enfrentadas pelos sujeitos históricos, os alunos têm suas dificuldades mais bem compreendidas pelos professores, conforme evidenciado no trecho a seguir:

> A História da Matemática pode contribuir também para que o próprio professor compreenda algumas dificuldades dos alunos, que, de certa maneira, podem refletir históricas dificuldades presentes também na construção do conhecimento matemático. Por exemplo, reconhecer as dificuldades históricas da chamada "regra de sinais", relativa à multiplicação de números negativos, ou da construção dos números irracionais pode contribuir bastante para o ensino desses temas (Brasil, 1999, p. 86).

Para ilustrar essa afirmação, o PCNEM estabelece que, ao reconhecer as dificuldades históricas que envolvem a multiplicação de números negativos — conhecida como "regra de sinais" — ou a construção de números irracionais, pode haver um grande impacto no ensino, visto que a HM pode ser um fator relevante na atribuição de significados aos conceitos matemáticos (Brasil, 1999).

Já a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que está em vigência, estabelece as habilidades e competências que todos os alunos devem apresentar ao concluir a Educação Básica. O documento cita o uso de diferentes materiais e abordagens para o ensino, em particular, apresenta a relevância de incluir a HM nas aulas de Matemática. De acordo com ele:

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais

> precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos (Brasil, 2018, p. 298).

Assim, compreendemos que a integração da HM no ensino pode suscitar o interesse dos alunos pelo tema, uma vez que a HM permite mostrar o papel da Matemática na sociedade. Isso também apresenta um contexto relevante para o ensino e aprendizagem, pois a HM é uma grande fonte de cenários e problemas históricos que podem ser trabalhados em sala de aula. Sendo essa proposta reiterada na BNCC:

> Cumpre também considerar que, para aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática (Brasil, 2018, p. 299).

Considerando todos os pontos supracitados, como a descrição e a sistematização das contribuições (Fried, 2001, 2014; Furinghetti, 2019), as limitações (Tzanakis *et al.*, 2000; Miguel e Miorim, 2021) da HM para o ensino de Matemática, assim como a participação da HM nos currículos (Fasanelli *et al.*, 2000; Brasil, 1997, 1999, 2018), nos questionamos: quais as são potencialidades pedagógicas de uma proposta didática apoiada na HM para ensino de tópicos específicos da Matemática? Quais são os obstáculos e dificuldades em sua implementação?

Vislumbramos essa possibilidade ao elaborar uma proposta didática com apoio de problemas históricos para identificar as potencialidades e limitações pedagógicas da HM para o ensino e aprendizagem da Probabilidade. Para tanto, utilizamos a palavra "problema histórico" aqui para descrever, segundo Swetz (2000, p. 65, tradução nossa) aqueles problemas que "podem ser encontrados em livros antigos de Matemática e em muitos livros de pesquisa sobre a História da Matemática", ou seja, são os que advém tanto de fontes primárias (livros antigos de Matemática) quanto de secundárias (pesquisas em HM).

Optamos pelo ensino de Probabilidade devido à necessidade premente de investigação em HM deste tópico em específico, que se fundamenta no número reduzido de trabalhos elaborados e implementados em sala de aula até o presente momento, como é descrito em Mendes e Pires (2020).

Sendo assim, o presente trabalho visa compreender as potencialidades e limitações de uma proposta didática apoiada em problemas históricos para ensino de tópicos da

Probabilidade. E, de modo específico, dentro dos eixos propostos por Furinghetti (2019), pensamos nos objetivos e em identificá-los e analisá-los da seguinte maneira:

- O potencial de uma proposta didática apoiada em problemas históricos para promover a Matemática, tendo em vista humanizá-la e torná-la acessível aos alunos;
- O potencial desta proposta, por meio da abordagem histórica, para a aprendizagem de conceitos matemáticos ou sua (re)construção;
- As dificuldades de implementação desta proposta e suas limitações para o ensino de Probabilidade.

A proposta didática elaborada é constituída de três momentos, nos quais cada um terá um problema histórico para abordar conceitos da Probabilidade, sendo eles: o Problema dos Dados, o Problema dos Pontos e o dilema de Monty Hall. Tal proposta foi implementada em treze encontros, cada encontro teve duas aulas (1h e 40 min), totalizando 26 aulas (21h e 40 min), em uma turma do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do município do Sul de Minas Gerais.

A escrita deste trabalho está estruturada em seis capítulos.

Neste primeiro capítulo, apresentamos a proposta de pesquisa, destacando sua relevância e justificativas, fundamentadas em referências sobre a HM para o ensino. Além disso, definimos o problema de pesquisa e os nossos objetivos gerais e específicos.

No segundo capítulo, apresentamos a base teórica da HM para o ensino de Matemática, fazendo uma discussão sobre seus potenciais e limitações.

O terceiro capítulo trata da HM e de sua relação com o ensino de Probabilidade, bem como de alguns problemas históricos que podem ser trabalhados no ensino da disciplina.

O quarto capítulo apresenta o caminho metodológico da pesquisa, visando detalhar as etapas do processo, incluindo a descrição do contexto e dos participantes, bem como os procedimentos de coleta e análise dos dados coletados. Por fim, apresenta o panorama da implementação da proposta.

Já o quinto capítulo identifica e analisa com base no referencial levantado, buscando entender as contribuições da HM para modificar a percepção da Matemática e para a construção do conhecimento matemático, assim como as dificuldades durante a implementação da proposta.

Terminamos o último capítulo, o seis, com as conclusões finais da pesquisa, de modo a entender a viabilidade da proposta apoiada em problemas históricos para o ensino de Matemática.

2 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO

Neste capítulo, temos o propósito de apresentar os referenciais que nortearão a nossa discussão. Para tanto, estruturamos sua escrita em duas partes, sendo a primeira nomeada "Potencialidades pedagógicas" — a qual discute as contribuições da HM para o ensino, sobretudo o referencial Furinghetti (2019) — e a segunda, "Obstáculos e dificuldades" — a qual trata das dificuldades da abordagem histórica no ensino.

2.1 Potencialidades pedagógicas

Com relação às potencialidades pedagógicas da HM para o ensino, a comunidade científica tem se empenhado em realizar pesquisas sobre o tema, para esclarecê-lo e divulgá-lo. Fauvel (1991) lista quinze razões para abordar a HM em sala de aula, como mostrado no Quadro 1:

Quadro 1 – Razões para uso da HM para o ensino

Algumas razões que têm sido apresentadas para o uso da história na Educação Matemática
▪ Contribui para aumentar a motivação para o aprendizado. ▪ Confere à Matemática uma perspectiva humana. ▪ O desenvolvimento histórico ajuda a ordenar a apresentação dos tópicos no currículo. ▪ Apresenta aos alunos como os conceitos se desenvolveram podem auxiliar em sua compreensão. ▪ Permite alterar a percepção negativa dos alunos sobre a Matemática. ▪ Compara o antigo e o moderno estabelece o valor das técnicas atuais. ▪ Ajuda a desenvolver uma abordagem multicultural. ▪ Fornece novas oportunidades de investigações. ▪ Dificuldades enfrentadas no passado ajudam a explicar o que os alunos de hoje acham difícil. ▪ Alunos sentem conforto ao perceberem que não são os únicos com dificuldades. ▪ Incentiva os alunos com mais facilidade em Matemática a buscar novos conhecimentos. ▪ Ajuda a explicar o papel da Matemática na sociedade. ▪ Faz com que a Matemática seja menos intimidadora. ▪ Explora a história e ajuda a manter o interesse e entusiasmo pela Matemática. ▪ Oferece oportunidades para o trabalho transversal do currículo com outros professores ou disciplinas.

Fonte: Fauvel (1991, p. 4, tradução nossa)

Fried (2001) — ao analisar a literatura em HM para o ensino da Matemática, valendo-se das quinze razões listadas por Fauvel (1991) — propõe, em seu trabalho, o que chama de três temas, mas que podem ser tratados como objetivos/contribuições que caracterizam as potencialidades pedagógicas e cita trabalhos relevantes para corroborá-las.

A primeira contribuição é que a HM "humaniza a Matemática". Para o autor "vê-se a HM como um incentivo às abordagens multiculturais, fornecendo aos alunos modelos históricos, ligando o estudo da Matemática às emoções e motivações humanas" (Fried, 2001, p. 392). Nosso olhar para o primeiro objetivo nos permite relacionar com algumas das razões apresentadas por Fauvel (1991), que diz respeito à HM: conferir uma perspectiva humana para Matemática, o desenvolvimento de uma abordagem multicultural.

Com relação à segunda, o autor a considera mais ampla que as outros, pois "inclui afirmações de que a HM acrescenta variedade ao ensino, diminui o medo dos alunos em relação à matemática, dá alguma noção do lugar da matemática na sociedade" (Fried, 2001, p. 392, tradução nossa). Também podemos relacionar esse tema com as razões apresentadas por Fauvel (1991), que dizem respeito à HM tornar a Matemática menos intimidadora, diminuindo o desconforto dos alunos ao mostrar que não são os únicos com dificuldades. Para além desse lado afetivo, também é importante explicar o papel da Matemática na sociedade, com o objetivo de manter o interesse e entusiasmo do aluno pela matemática.

Já na última, em que a HM "fornece *insights* sobre conceitos, problemas e soluções de problemas", há uma diferença significativa entre a importância da HM para os professores e a sua relevância para os alunos. Como a proposta deste trabalho está voltada para o ensino, consideraremos a concepção de que a HM pode contribuir: "fornecendo um contexto para problemas e ideias, sugerindo abordagens alternativas para a resolução de problemas, mostrando as relações entre ideias, definições e aplicações" (Fried, 2001, p. 392, tradução nossa). Tal concepção pode se relacionar com as razões apresentadas por Fauvel (1991), que diz respeito à HM possibilitar novas oportunidades de investigação e contribuir para a compreensão dos alunos na Matemática, além de mostrar dificuldades enfrentadas no passado ajudam a explicar o que os alunos de hoje acham difícil.

Essas três contribuições ainda persistem nas discussões atuais da HM para o ensino de Matemática. Em outro trabalho, Fried (2014) propôs uma nova nomenclatura, sendo: "tema cultural", "tema motivacional" e "tema curricular", que entendemos serem relacionados respectivamente às contribuições do estudo anterior.

O tema cultural abrange o reconhecimento da influência da Matemática na cultura e vice-versa, sendo a cultura parte da natureza do conhecimento matemático e a HM proporciona, por sua vez, "[…] uma reflexão sobre a cultura geral, incluindo a Matemática, como também sobre a Matemática como sendo cultural" (Fried, 2014, p. 680, tradução nossa). Entendemos que esse tema se assemelha à proposta do estudo anterior, de que HM humaniza a Matemática, tendo em vista que apresentar elementos culturais mostra a Matemática como uma construção humana e de um conhecimento que parte das necessidades de cada sociedade.

Já o tema motivacional trata de uma introdução de uma abordagem mais afetiva na Matemática, de modo que a HM pode tornar "[…] o ensino da Matemática menos ameaçador, mais humano, menos formal e mais interessante" (Fried, 2014, p. 680, tradução nossa). De forma análoga, esse tema se assemelha à proposta anterior, que HM torna a Matemática mais interessante, mais compreensível e mais acessível, dado que visa mudar a percepção dos alunos sobre a disciplina como sendo menos intimidadora.

Por fim, o tema curricular abrange, por meio da abordagem histórica, o auxílio na compreensão dos alunos e a HM "[…] pode ajudar a esclarecer ou aprofundar a compreensão das ideias matemáticas" (Fried, 2014, p. 680, tradução nossa). É perceptível que este tema está relacionado à proposta anterior, de que HM fornece *insights* sobre conceitos, problemas e soluções de problemas, devido ao potencial de ela trazer novos contextos para serem trabalhados em sala de aula.

Outra perspectiva que se debruça sobre as contribuições da HM para o ensino é a de Furinghetti (2019). Esta autora apresenta dois "eixos" que se referem a HM contribuir para "promover a Matemática" e para a "construção do conhecimento matemático".

O eixo de promoção tem em vista modificar a percepção da Matemática e de alguns mitos e atitudes negativas em relação a ela. A abordagem histórica se propõe a recuperar "[…] o valor da Matemática visto como parte das culturas por meio da reflexão sobre a natureza da Matemática como um processo sociocultural e como uma construção humana" (Furinghetti, 2019, p. 10, tradução nossa). Entendemos que esse eixo condensa a proposta do tema cultural e motivacional de Fried (2014), ao apresentar uma Matemática mais humanizada e menos intimidadora.

Já o eixo da HM para a construção do conhecimento matemático tem em vista a compreensão dos conceitos, de modo que ela esteja voltada "[…] para a abordagem de conceitos e métodos matemáticos" (Furinghetti, 2019, p. 10, tradução nossa). Identificamos a presença da temática curricular de Fried (2014), já que menciona as implicações da HM para a sala de aula.

Segundo Furinghetti (2019, p. 10, tradução nossa), "é possível que ter uma imagem enriquecedora da Matemática estimule o interesse pela compreensão de seus conceitos e vice-versa, a compreensão de seus conceitos pode influenciar a imagem da Matemática”. Isso significa que esses dois eixos propostos não são antagônicos, em alguns casos podem ser complementares.

Com o objetivo de sintetizar as ideias apresentadas por Fried (2001, 2014) e Furinghetti (2019), elaboramos o Quadro 2, que reúne e relaciona as contribuições da HM para o ensino de Matemática apresentadas por eles.

Quadro 2 – Quadro síntese das potencialidades pedagógicas da HM apresentadas por Fried (2001, 2014) e Furinghetti (2019).

<table>
<tr><th>Fried (2001)</th><th>Fried (2014)</th><th>Furinghetti (2019)</th></tr>
<tr><td>Incentivo às abordagens culturais, fornecendo aos alunos modelos históricos e relacionando o estudo da Matemática às emoções e motivações humanas.</td><td>Faz uma reflexão sobre a cultura geral, incluindo a Matemática, bem como sobre ela como uma expressão cultural. Além de abordar aspectos da natureza da disciplina.</td><td rowspan="2">HM para promover a Matemática</td></tr>
<tr><td>Fornece uma abordagem diversificada no ensino, diminuindo o medo dos alunos em relação à matemática e confere ideia do papel da Matemática na sociedade.</td><td>Apresenta uma abordagem afetiva de modo a tornar o ensino menos ameaçador, mais humano, menos formal e mais interessante.</td></tr>
<tr><td>Apresenta contexto para os problemas e ideias, sugerindo abordagens alternativas para a solução de problemas, demonstrando as relações entre ideias, definições e aplicações.</td><td>Auxilia no esclarecimento ou aprofundamento da compreensão das ideias matemáticas.</td><td>HM para a construção do conhecimento matemático</td></tr>
</table>

Fonte: Fundamentado dos trabalhos de Fried (2001, 2014) e Furinghetti (2019).

Após esta breve explanação das potencialidades pedagógicas da HM, apresentaremos, na sequência, os eixos propostos por Furinghetti (2019), os quais são o foco principal deste estudo, em discussão com outros autores, dentre os quais: Liu (2003), Tzanakis e colaboradores (2000), Valdés (2006), Mendes (2006), Fossa (2006), Lopes e Ferreira (2013), Panasuk e Horton (2013) Agterberg, Oostdam e Janssen (2022).

2.1.1 História da Matemática contribui para promover a Matemática

Furinghetti (2019), no eixo “História para promover a Matemática”, argumenta que a abordagem histórica pode atuar na imagem da Matemática, o que ocorre de duas maneiras, a saber:

> A primeira, que apresenta os matemáticos como pessoas; que torna uma experiência do aluno mais próxima com o mundo da Matemática. Já segunda promove a comunicação e a interação em sala de aula; dá ao aluno a oportunidade de participar do convívio da turma com diferentes atitudes e capacidades (Furinghetti, 2019, p. 13, tradução nossa).

Entendemos que a HM pode contribuir para promover a Matemática por humanizá-la, ao evidenciar que não há grupos específicos predestinados a entendê-la e que o trabalho do matemático não é necessariamente solitário. Além disso, por mostrar a possibilidade de haver diversas soluções para um mesmo problema e elas serem aceitas ou não, dependendo do contexto/momento histórico.

De modo geral, os alunos têm a percepção de que a Matemática é um conjunto de conhecimentos rígido, desumanizado e sem espaço para descobertas. É próprio da literatura acadêmica na área da Matemática não transparecer seu lado humano, tampouco os altos e baixos enfrentados cotidianamente no trabalho do matemático (Liu, 2003). Logo, a HM oportuniza trazer aspectos culturais para sala de aula, apresentando a disciplina como um processo dinâmico, estreitamente ligado a outras ciências, à cultura e à sociedade.

Consonante ao que é apresentado por Tzanakis e colaboradores (2000, p. 207, tradução nossa) de que a HM […] pode fornecer exemplos de como o desenvolvimento interno da Matemática, quer impulsionado por razões utilitárias ou 'puras', foi influenciado, ou mesmo determinado em grande medida, por fatores sociais e culturais". Ou seja, mesmo as questões propriamente restritas da Matemática sofrem influência de fatores externos.

De forma análoga, Valdés (2006, p. 17) reafirma o papel da HM de mostrar a Matemática como "[…] dependente do momento e das circunstâncias sociais, ambientais, dos prejuízos do momento, assim como dos mútuos e fortes impactos que a cultura em geral, a filosofia, a matemática, a tecnologia, as diversas ciências têm exercido umas sobre as outras". Dessa forma, identificando a transversalidade da Matemática em outras áreas do conhecimento.

Relevar a participação de fatores internos e externos na construção do conhecimento Matemática, apresentando a disciplina como um conhecimento fechado em si, consequentemente não permite que os alunos, segundo Lopes e Ferreira (2013, p. 86), "compreendam como uma construção humana, desenvolvida ao longo de muitos séculos, com a contribuição de diferentes povos". Em outras palavras, não permite que os alunos entendam a natureza do conhecimento matemático como uma expressão cultural.

Ao tratar a Matemática como uma expressão cultural, Panasuk e Horton (2013) argumentam que essa percepção pode ser alterada pelo estudo dos significados e das crenças atribuídas a ela por cada civilização. Liu (2003) também evidencia estes fatores ao mostrar que:

> A aceitação ou rejeição de um conceito está principalmente ligada às crenças dos matemáticos sobre o que a Matemática deveria ser. Essas crenças podem ser ilógicas, até mesmo metafísicas. Exemplos como a rejeição dos números irracionais pelos pitagóricos, a crítica de Kronecker sobre existirem infinitos números reais e a negação dos números complexos por Cauchy indicam aspectos ilógicos e irracionais do desenvolvimento matemático (Liu, 2003, p. 419, tradução nossa).

Ou seja, ao contrário do que o senso comum prega, a Matemática não é neutra e puramente racional. Fried (2014) corrobora com a abordagem da Matemática como expressão cultural e destaca que é uma possibilidade. É tratar da natureza do conhecimento matemático, pois a expressão cultural traz:

> […] uma concepção diferente da usual, na qual os objetos e as relações matemáticas são eternos, entidades platônicas ideais, vistas em todos os lugares da mesma maneira e com o mesmo peso, ideias sem geografia e sem passado. Essa mudança de perspectiva não significa necessariamente que o relativismo se torne a filosofia da Matemática, mas convida a uma visão pluralista na qual não se presume que a Matemática sempre e em todos os lugares signifique o mesmo e seja direcionada para os mesmos fenômenos (Fried, 2014, p. 688-689, tradução nossa).

Entendemos que esses aspectos culturais estejam estritamente relacionados com uma imagem menos intimidadora da Matemática ou com o tema motivacional proposto por Fried (2014). Fossa (2006, p. 138) argumenta nesse sentido que, com a HM, seria possível observar "[…] como a matemática faz parte da cultura humana e isto certamente pode aumentar o interesse que o aluno terá pela matemática". Embora seja reconhecido que nem todos os alunos mostrarão o mesmo interesse.

A utilização da HM pode ser uma forma de resgatar a cultura, permitindo que os estudantes criem ligações entre fatos cotidianos, escolares e científicos da Matemática. Segundo Mendes (2006, p. 94), seria possível "[…] valorizarmos os saberes matemáticos da tradição e a capacidade matemática criativa da sociedade em todos os tempos". Dessa maneira, seria possível reconhecer os conhecimentos matemáticos e a criatividade da sociedade em todos os tempos.

No que diz respeito à desmistificação da disciplina, Tzanakis e colaboradores (2000) afirmam que a HM permite conhecer que fracassos, erros, incertezas ou mal-entendidos fazem parte do trabalho dos matemáticos mais proeminentes. Segundo os autores, a Matemática não é um sistema rígido de verdades, mas que sempre está em desenvolvimento, pois:

> É uma construção humana que requer esforço intelectual, além de ser determinada por vários fatores, tanto inerentes à própria Matemática quanto externos a ela. Particularmente, a Matemática não é um produto acabado dado por Deus e projetado para o aprendizado mecânico (Tzanakis *et al.,* 2000, p. 206, tradução nossa).

Nessa perspectiva, para Mendes (2006, p. 92), o uso da HM em sala de aula pode desmistificá-la, pois ela pode ser usada para "[…] desvelar outras faces da matemática e, com isso, mostrar que ela é um conhecimento estruturalmente humano", tornando-a acessível a todos, podendo levar os alunos a perceberem que a disciplina não é só "decorar fórmulas".

Semelhantemente, Valdés (2006) retomada essa ideia ao argumenta que um olhar histórico nos

> [...] aproxima da matemática como ciência humana, não-endeusada, às vezes penosamente rastejante e, em ocasiões falíveis, porém, capaz também de corrigir seus erros. Nos aproxima das interessantes personalidades dos homens, que têm ajudado a impulsioná-la ao longo de muitos séculos, por motivações distintas (Valdés, 2006, p. 16).

Já tratando de fornecer o papel da Matemática na sociedade, autores como Liu (2003) afirmam que ela tem a reputação de ser uma disciplina "monótona" e a HM pode despertar o interesse dos alunos e desenvolver atitudes positivas em relação à sua aprendizagem.

Dessa forma, compreendemos que a HM traz oportunidades para buscar novas formas de resolver um problema, não se engessando nas fórmulas. Além de contribuir para a percepção de que os erros são inerentes à atividade matemática e mesmo os matemáticos mais experientes não são infalíveis — isso rompe com a imagem de que a Matemática é para poucos e como pode contribuir para a desenvolver "afetividade" com a matéria.

Para Panasuk e Horton (2013), a abordagem histórica pode ser uma oportunidade não ameaçadora para o aprendizado da Matemática, principalmente para os alunos que têm uma visão negativa da disciplina. A HM apresenta como os conceitos matemáticos eram extremamente difíceis de refinar, entender e aceitar — até mesmo para os matemáticos mais talentosos.

Consonante a essa perspectiva, Agterberg, Oostdam e Janssen (2022) afirmam que HM permite ao professor ilustrar o desenvolvimento de conceitos subjacentes relacionados a rotinas e procedimentos. Ao apresentar o contexto histórico, o professor cria a possibilidade de demonstrar a matemática em ação, em vez de apresentar fórmulas engessadas.

Diante ao exposto, entendemos que a HM pode contribuir para uma mudança da imagem da Matemática, ao fornecer elementos que podem auxiliar os alunos a entenderem-na como construção humana, expressão cultural e corpo de conhecimento em permanente desenvolvimento que, muitas vezes, está relacionado a questões cotidianas. Tudo isso permite mostrar que disciplina não é restrita a um grupo de pessoas. Em seguida, trataremos do eixo da HM para construção do conhecimento matemático.

2.1.2 História da Matemática contribui para a construção do conhecimento matemático

Furinghetti (2019), no eixo "História para a construção do conhecimento matemático", argumenta que a abordagem histórica pode tratar de conceitos e métodos matemáticos, pois:

> Quando a Matemática é apresentada de forma polida e acabada, os alunos (tanto na escola como nos cursos de formação de professores) têm dificuldades em identificar as raízes cognitivas dos conceitos no magma de processos, conceitos e regras que têm à sua disposição (Furinghetti, 2019, p. 13).

Entendemos que a HM pode contribuir para a construção do conhecimento matemático por apresentar conceitos e teorias matemáticas e permite compreender certos motivos relacionados à Matemática.

De acordo com Valdés (2006, p. 18), a HM "[…] pode e deve ser utilizada, por exemplo, para entender e fazer compreender uma ideia difícil de modo mais adequado" e, ao resgatar o processo/contexto histórico dos conceitos da Matemática, os alunos poderiam, de acordo com Mendes (2006), compreender seus significados, perceber a sua relevância para a construção da disciplina e estabelecer conexões com outras áreas do conhecimento.

Além disso. Fossa (2006, p. 139) afirma que a HM é uma fonte de "[…] problemas interessantes e desafiantes que podem ser incorporados ao ensino da matemática, especialmente na forma de atividades de redescoberta ou de resolução de problemas" propiciando ao aluno uma experiência pedagógica, que segundo Valdés (2006, p. 62), em determinados casos, os alunos "[…] ao dedicar-se a um problema original, se relacionam com a experiência da criação matemática, sem nenhuma interpretação intermediária".

Ao tratar da aprendizagem de conceitos da Matemática, Tzanakis e colaboradores (2001) apresentam que a Matemática é ensinada de forma axiomática. A impressão que fica é de que a disciplina é construída dessa maneira, contudo, os autores argumentam que:

> No entanto, o desenvolvimento histórico da matemática mostra que a organização dedutiva (ou até mesmo estritamente axiomática) de uma disciplina matemática ocorre somente depois que essa disciplina atinge a maturidade, de modo que se torna necessário fazer uma apresentação a posteriori de sua estrutura lógica e de sua integridade (Tzanakis *et al.,* 2000, p. 204, tradução nossa.).

Para entender as dificuldades dos alunos, Tzanakis e colaboradores (2000), com relação à HM argumentam que, ao reconstruir aspectos do desenvolvimento histórico da Matemática de uma forma didaticamente apropriada, as dificuldades, ou mesmo obstáculos, que surgiram na história podem reaparecer na sala de aula.

Semelhantemente, autores como Agterberg, Oostdam e Janssen (2022) e Liu (2003) sustentam que os obstáculos do passado no desenvolvimento da matemática podem contribuir para explicar o que os alunos de hoje consideram difícil. Liu (2003) apresenta de exemplo o caso da definição de função, que embora seja amplamente estudada em sala de aula, tem uma definição recente. Nesse sentido, é até mesmo plausível entender que os alunos tenham dificuldades ao trabalhar esse assunto.

Dessa forma, foi possível notar, com base nos estudos apresentados pelos pesquisadores, que a HM pode ser abordada em sala de aula para ensinar conceitos matemáticos gerais ao permitir que, dependendo da forma como é apresentada, seja possível compreender conceitos e teorias matemáticas, bem como determinados porquês relacionados à disciplina, seja por meio de atividades apoiadas em dados históricos, seja pelo uso de problemas históricos.

Diante do exposto, destacamos que foi principalmente na perspectiva de utilizar a HM para a aprendizagem que elaboramos algumas atividades do nosso conjunto. Ao resgatar três problemas históricos, o Problema dos Dados, o Problema dos Pontos e o Dilema de Monty Hall, empregados para resolver problemas que envolviam conceitos de Probabilidade. Entendemos, portanto, estar proporcionando aos alunos o contato com formas diferenciadas de resolução que podem levar a uma compreensão mais aprofundada acerca do conteúdo da Teoria da Probabilidade. Tendo conhecimento das potencialidades pedagógicas da HM para o ensino, no item subsequente apresentamos as limitações pedagógicas da história para o ensino de Matemática.

2.2 Obstáculos e dificuldades

Mesmo que sejam conhecidas as potencialidades pedagógicas da HM; que hajam quinze razões para abordá-la em sala de aula, de acordo com Fauvel (1991); bem como os eixos propostos por Furinghetti (2019), em discussão com outros autores, ressaltamos haver obstáculos e dificuldades da HM no âmbito do ensino. Tanto que Siu (2004) lista dezesseis razões pelas quais um professor hesita ou decide não recorrer à HM no ensino em sala de aula.

Quadro 3 – Fatores limitadores da HM em sala de aula

1. “Não tenho tempo para isso na aula!”
2. “Isso não é matemática!”
3. “Como você pode questionar isso em uma prova?”
4. “Não pode melhorar a nota do aluno!”
5. “Os alunos não gostam!”
6. “Os alunos consideram isso como história e odeiam as aulas de história!”
7. “Os alunos consideram isso tão chato quanto a própria disciplina de matemática!”
8. “Os alunos não têm conhecimentos gerais suficientes sobre cultura para apreciá-la!”
9. “O progresso na matemática consiste em transformar problemas difíceis em rotina, então por que se preocupar em olhar para trás?”
10. “Há falta de recursos materiais sobre isso!”
11. “Falta formação de professores nisso!”
12. “Não sou um historiador profissional da matemática. Como posso ter certeza da precisão da exposição?”
13. “O que realmente aconteceu pode ser bastante tortuoso. Contar como foi pode confundir em vez de esclarecer!”
14. “Ajuda realmente a ler textos originais, que é uma tarefa muito difícil?”
15. “É suscetível de gerar chauvinismo cultural e nacionalismo paroquial?”
16. “Existe alguma evidência empírica de que os alunos aprendem melhor quando a história da matemática é utilizada na sala de aula?”

Fonte: Siu (2004, p. 3, tradução nossa)

No entanto, também são investigadas as dificuldades e os obstáculos para a abordagem histórica no ensino de Matemática. Para Tzanakis e colaboradores (2000), as dificuldades se materializam na falta de tempo, recursos pedagógicos, formação do professor e avaliação. Miguel e Miorim (2021, p. 59) corroboram haver limitações para a inserção da HM no ensino e destacam que entre as dificuldades estão "[…] à ausência de literatura adequada, à natureza imprópria da literatura disponível, à história como um fator complicador, à ausência do sentido de progresso histórico".

De acordo com os autores (2021), o primeiro argumento sustenta que o uso da HM pelo professor torna-se difícil devido à quase ausência de literatura adequada sobre a HM anterior aos dois últimos séculos. Isso impediria a utilização pedagógica da história, uma vez que a maioria dos conteúdos ensinados de Matemática em nossas escolas pertence a esses períodos.

Pensamos que esse argumento é um apelo à necessidade de constituição de núcleos de pesquisa em HM, dos quais façam parte historiadores, matemáticos e educadores matemáticos e outros profissionais que possam contribuir para a elaboração de reconstituições esclarecedoras de épocas, temas, situações e biografias.

O segundo argumento, segundo os autores (2021), que segue de forma direta o primeiro, sustenta que a natureza da literatura histórica disponível a torna particularmente imprópria para o uso didático. Isso se deve ao fato de as publicações matemáticas destacarem apenas os resultados matemáticos e ocultarem os processos de sua produção.

De acordo com os autores, esse argumento, apesar de legítimo, deveria ser encarado menos como uma barreira intransponível às iniciativas pedagógicas, mas sim como um estímulo à continuidade das investigações nesse sentido. Tal como ocorre com esta pesquisa e com o Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat). Como, por exemplo, os livros dos minicursos do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM) promovidos pela Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat) e diversos materiais reunidos no CREPHIMat.

Com relação ao terceiro argumento, os autores sustentam que, ao introduzir o elemento histórico no ensino da Matemática, ao invés de facilitar a aprendizagem, isso tornaria a situação ainda mais complexa. Segundo eles: "Isso se deve ao fato de que, ao ser confrontado com os problemas originais e com as soluções que, historicamente, lhe foram dadas, o aluno gastaria um tempo e um esforço sem precedentes, tentando reconstruir um contexto que não lhe é familiar (Miguel; Miorim, 2021, p. 60).

Por fim, outro obstáculo se revela na incapacidade de ordenar os eventos sucessivos ou simultâneos. Trata-se da incapacidade de dominar a duração. Isso decorreria do fato de a criança se sentir impotente para se desvencilhar do evento vivido e compará-lo com outros ou com algum outro tomado como referência ou, em outras palavras, seria consequência do fato de ela viver no instante presente e no futuro.

Dessa forma, compreendemos que os conhecimentos sobre a HM, dependendo da abordagem escolhida, podem auxiliar na melhor compreensão da Matemática e de certos tópicos matemáticos na Educação Básica. Apesar de a abordagem histórica exigir mais tempo do que a tradicional, o que é inerente à qualquer atividade diferente, enfatizamos a sua relevância, pois compreendemos que seria ineficiente cumprir todo o planejamento com os alunos se eles não tivessem a oportunidade e o tempo necessários para compreender o porquê matemático dos procedimentos e métodos estudados.

Desenvolvemos uma proposta didática que se apresenta como uma opção para o estudo dos conceitos da Probabilidade, sem se limitar à compreensão teórica dos conteúdos, por meio da aplicação experimental das chances dos jogos propostos nos livros didáticos. Essa proposta foi elaborada visando, ao trabalhar com problemas históricos, transmitir aos alunos conceitos de probabilidades que ultrapassam a teoria. Para a elaboração desta proposta, realizamos um estudo sobre os problemas históricos da Probabilidade, o qual apresentamos no capítulo subsequente.

3 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E ENSINO DE PROBABILIDADE: UM OLHAR PARA A LITERATURA

Neste capítulo, temos o propósito de apresentar uma revisão da literatura pertinente, a fim de localizarmos nossa proposta de pesquisa. Para tanto, estruturamos sua escrita em duas partes, sendo a primeira nomeada "Nosso olhar para a literatura", em que identificamos as aproximações e as lacunas entre os trabalhos selecionados; e a segunda, "Problemas históricos selecionados para nossa proposta", na qual nos situamos neste campo ao tratar de alguns problemas históricos para nossa abordagem de conceitos da Probabilidade.

3.1 História da Matemática no ensino de Probabilidade em trabalhos acadêmicos brasileiros

Realizamos um levantamento bibliográfico, em setembro de 2023, em quatro bases digitais[3] de produção científica no Brasil, a saber: CREPHIMat, Oasisbr, Portal de Periódicos e o Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES. Para tal busca, foram utilizados os descritores "História da Matemática" E "Ensino de Probabilidade". Os resumos localizados foram lidos, sendo selecionadas as pesquisas que abordavam uma HM para o ensino de Probabilidade em materiais e/ou propostas didáticas (implementadas ou não), nos diferentes níveis de ensino. Em seguida, no Quadro 4, apresentamos os trabalhos, com seus autores e natureza.

Quadro 4 – Trabalhos selecionados em nossa busca

AUTOR(ES)	TÍTULO	NATUREZA
Moraes (2014)	Ensino de Probabilidade: Historicidade e Interdisciplinaridade.	Dissertação
Dias (2015)	O Uso da Simulação no Cálculo de Probabilidades	Dissertação
Fernandes e Santos Junior (2015)	História da matemática: uma estratégia contextualizada para o ensino de estatística e probabilidade nos anos iniciais do ensino fundamental	Artigo
Silva (2018)	Uma proposta para o estudo da probabilidade no ensino médio utilizando a contextualização histórica	Dissertação
Silva e Sousa (2020)	Investigação-histórica-com-tecnologia para a Unidade de Números, Probabilidade e Estatística no	Artigo

[3] As bases estão disponíveis, respectivamente, nos endereços eletrônicos abaixo:
https://crephimat.com.br/
https://oasisbr.ibict.br
https://www.periodicos.capes.gov.br/
https://catalogodeteses.capes.gov.br/

	8º Ano o Caso do Princípio da Casa dos Pombos de Dirichlet	
Kachel e Sad (2021)	Uma Prática Pedagógica para o Ensino de Probabilidade com o Aporte da História da Matemática	Artigo
Vidarte, Chachapoyas e Cavalari (2021)	O paradoxo de Bertrand e os axiomas de Kolmogorov: uma proposta para a formação de professores	Artigo
Vasconcelos, Vasconcelos e Chaquiam (2022)	Um percurso pela história da probabilidade	Artigo

Fonte: Autoria própria

A proposta didática de Moraes (2014) foi fundamentada em uma abordagem interdisciplinar, com uma contextualização histórica do ensino de Probabilidade para Educação Básica. Inicialmente, o material faz uma contextualização histórica tratando das cartas de Pierre de Fermat (1601–1665) e Blaise Pascal (1623–1662), a definição clássica de Probabilidade de Pierre-Simon Laplace (1749–1827) e a definição frequentista de Jacob Bernoulli (1655–1705). O material traz jogos e problemas históricos, tais como: o Problema dos Pontos, o Problema dos Dados e o dilema de Monty Hall. Já o elemento interdisciplinar se limita a tratar de aspectos da biologia com as Leis de Mendel.

O material didático de Dias (2015), faz a resolução de problemas históricos e do cotidiano com a intermediação de simuladores. Esse material é constituído por alguns problemas conhecidos na história da Probabilidade, como o Problema dos Dados, o paradoxo da caixa de Bertrand e o dilema de Monty Hall. A autora aplicou sua proposta e argumentou que as simulações permitiram a compreensão dos problemas apresentados, além de oferecer aos alunos um papel mais ativo na concretização de todas as tarefas propostas.

Visando compreender como uma proposta didática que se baseie na HM pode auxiliar no ensino de Estatística e Probabilidade nos primeiros anos do Ensino Fundamental, Fernandes e Santos Junior (2015) conduziram uma pesquisa utilizando a HM para ensinar conceitos da Estatística e Probabilidade. Os autores notaram que as atividades permitiram que os alunos refletissem sobre o desenvolvimento desses conteúdos, além de ampliarem a sua compreensão da Estatística e Probabilidade.

O produto educacional de Silva (2018) foi desenvolvido para o ensino de Probabilidade na Educação Básica, utilizando aspectos da HM. Esse material apresenta uma breve história dos jogos de azar e destaca alguns problemas: o Problema dos Pontos, o Problema dos Dados, o problema da agulha de Buffon, o dilema de Monty Hall, o problema da moeda de Bertrand, o Problema dos Três prisioneiros e o paradoxo de Bertrand.

Ao delinear elementos da história do princípio da casa dos pombos, Silva e Sousa (2020) apresentam uma proposta pedagógica de uso da HM apoiada pelas Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) e a Investigação Matemática (IM). Os autores encontraram elementos da história que podem ser abordados numa investigação-histórica-com-tecnologia. Embora os autores se limitem a tratar apenas dos dados que levaram a produção do produto educacional, é prevista uma aplicação que se encontra na dissertação Silva (2019).

Kachel e Sad (2021) desenvolveram uma proposta didática que utiliza elementos históricos da História da Probabilidade e um jogo de roleta. Foi utilizado na proposta um fragmento das correspondências trocadas por Pascal e Fermat em 1654, que tratavam do Problema dos Pontos (divisão das apostas) que representam um marco na Teoria das Probabilidades. Com base na sua aplicação, os autores argumentam que esses elementos históricos tornaram o estudo da probabilidade mais interessante para os alunos, suscitando o desejo de conhecer as produções desses matemáticos.

Vidarte, Chachapoyas e Cavalari (2021) descrevem uma proposta didática, que apresenta elementos da HM para o ensino de Probabilidade, em cursos de formação de professores. A proposta se apoiou na HM para problematizar conceitos de Probabilidade Clássica e Geométrica, além de relacionar o Paradoxo de Bertrand e os Axiomas de Kolmogorov. Para os autores, essa proposta pode possibilitar uma ampliação do conhecimento matemático e permitir discussões que repensem a natureza da Matemática, embora não esteja prevista sua aplicação.

Vasconcelos, Vasconcelos e Chaquiam (2022) elaboraram recortes da história da probabilidade para serem usados em sala de aula. Esses recortes tratam contribuições de alguns nomes para a Probabilidade, como: Cardano, Pascal e Fermat, dentre outros. Apesar de ser um estudo em andamento, os autores afirmam a relevância de usar os recortes da história da probabilidade para o ensino e aprendizagem da probabilidade, bem como a necessidade de ampliar esses estudos a fim de demonstrar a importância da HM para o ensino.

Feita a apresentação dos trabalhos selecionados em nossa busca de quatro bases digitais de produção científica no Brasil, apresentamos, então, no Quadro 5, que sintetiza as abordagens e contribuições de cada trabalho.

Quadro 5 – Quadro síntese das abordagens e contribuições dos trabalhos localizados

AUTOR(ES)	ABORDAGENS	CONTRIBUIÇÕES
Moraes (2014)	- Abordagem interdisciplinar (Biologia) e histórica; - Resolução do Problema dos Pontos.	- Contextualização histórica; - Interdisciplinaridade; - Confronto da definição clássica e frequentista de Probabilidade.
Dias (2015)	- Resolução de problemas históricos e reais pelo uso de simulações.	- Facilitaram o entendimento e resolução dos problemas; - Papel ativo do aluno.
Fernandes e Santos Junior (2015)	- Abordagem histórica da Estatística e Probabilidade; - Investigação e apresentação dos alunos sobre o desenvolvimento da Estatística e Probabilidade, bem como suas aplicações no cotidiano.	- Maior interesse e predisposição dos alunos ao estudo; - Ampliação dos conhecimentos matemáticos dos alunos.
Silva (2018)	- Abordagem histórica por meio de problemas, a saber alguns: Problema dos Pontos; Problema da agulha de Buffon; O Enigma de Monty Hall; Problema do paradoxo de Bertrand, dentre outros.	- Complementação das informações históricas apresentadas nos livros didáticos, que é apresentada de forma resumida.
Silva e Sousa (2020)	- Abordagem histórica para princípio da casa dos pombos de Dirichlet para trabalhar com o princípio multiplicativo da Probabilidade.	- Ampliação dos conhecimentos matemáticos dos alunos sobre os conceitos e problemas.
Kachel e Sad (2021)	- Apresentação e resolução de um problema histórico (Problema dos Pontos); - Aplicação de um jogo de roleta;	- Contextualização histórica; - Ampliação dos conhecimentos matemáticos dos alunos ao apresentar diferentes formas de pensar sobre um problema.
Vidarte, Chachapoyas e Cavalari (2021)	- Abordagem histórica de conceitos e problemas, a saber: conceitos da Probabilidade clássica e geométrica, paradoxo de Betrand e axiomas de Kolmogorov.	- Problematização do conteúdo abordado; - Ampliação do conhecimento matemático; - Discussões que podem auxiliar um repensar sobre a natureza da Matemática.
Vasconcelos, Vasconcelos e Chaquiam (2022)	- Recortes históricos para contextualização e/ou problematização da Probabilidade em sala de aula.	- Possibilidade de integração da história da probabilidade no ensino. - Estímulo à resolução de problemas usando estratégias inovadoras.

Fonte: Autoria própria

Podemos considerar, pela leitura e análise dos trabalhos selecionados, que a abordagem histórica apresenta grande potencial de contribuição para o ensino de Probabilidade. De modo geral, as contribuições da abordagem histórica estão presentes na mudança da percepção dos alunos sobre a Matemática e na ampliação dos conhecimentos matemáticos. Inseridos nessa temática, nossa proposta se alinha a essa produção ao abordar problemas históricos para o ensino de Probabilidade, tais como o Problema dos Dados, o Problema dos Pontos e o dilema de Monty Hall, ao mesmo tempo em que introduz novos elementos para esta discussão ao trabalhar os problemas históricos com os alunos por meio dos conteúdos de Probabilidade para a Ensino Médio. Tais problemas serão apresentados no tópico a seguir.

3.2 Problemas Históricos no ensino de Probabilidade

Como já foi mencionado anteriormente, a literatura sobre a HM no ensino de Probabilidade evidencia o uso de problemas históricos em suas propostas. Consideramos que a escolha de problemas ou episódios tidos como motivadores da aprendizagem também é uma estratégia que pode ser utilizada pelo professor para abordar a HM em suas aulas (Lopes; Ferreira, 2013).

A relevância do trabalho com problemas históricos no ensino é ressaltada por Liu (2003), que sustenta que a abordagem de tais problemas pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, de acordo com a proposta da HM para a construção do conhecimento matemático por Furinghetti (2019), discutido no trecho a seguir:

> Além de ampliar a compreensão do pensamento matemático por parte dos alunos, o uso de problemas históricos humaniza a matemática ao ilustrar as dificuldades dos matemáticos em resolver problemas e estabelecer conceitos. Os alunos são pedagogicamente conscientizados quando percebem que tais problemas não são criados em um vácuo e, mais importante, que os matemáticos também cometem erros (Liu, 2003, p. 419, tradução nossa).

O desenvolvimento histórico da Probabilidade apresenta diversos problemas históricos passíveis de serem abordados em sala de aula em diferentes níveis. Trataremos nesta seção de três desses problemas históricos selecionados em nossa proposta. Contudo, antes de apresentá-los, são necessárias algumas explanações iniciais sobre a Probabilidade.

Destacamos que a palavra probabilidade foi associada à palavra latina *'probo'* e às palavras inglesas *'probe'* e *'probable'*, que utilizadas no contexto matemático tinham um significado mais ou menos parecido com plausibilidade (Debnath; Basu, 2015). Nesse sentido, podemos definir o ramo no qual a Probabilidade se insere.

Segundo Viali (2008, p.1), “A probabilidade é o ramo da matemática que pretende modelar fenômenos não determinísticos, isto é, aqueles fenômenos no qual o 'acaso' representa um papel preponderante”. Ou seja, a Probabilidade estuda os fenômenos que não podem ser previstos.

A ideia de acaso não é tão simples quanto aparenta e diferentes civilizações trouxeram diferentes percepções sobre esse conceito. Conforme afirma Coutinho (2007, p. 51): “A noção de acaso é bastante complexa e recebeu diversas interpretações ao longo da história das ciências e da filosofia, uma vez que se vincula a nossa própria interpretação de mundo”.

Corroborando com esse autor, Viali (2008, p. 2) afirma:

> A idéia de acaso é quase tão antiga quanto às primeiras civilizações, só que a percepção de que isto é um fenômeno natural veio a ocorrer bem mais tarde. Inicialmente o acaso era percebido como fruto ou obra da divindade. A bem da verdade, ainda hoje, a idéia de fenômenos aleatórios (sem causa definida) ainda encontra dificuldades para serem naturalmente aceitos.” (Viali, 2008, p. 2)

A Probabilidade, como disciplina Matemática, iniciou-se efetivamente nos últimos 500 anos, sendo que os jogos de azar foram um dos fatores fundamentais para o seu desenvolvimento (Viali, 2008; Coutinho, 2007; Debnath; Basu, 2015). Nesse contexto, surgiram diversos problemas que contribuíram para o desenvolvimento da probabilidade e alguns deles podem ser utilizados no ensino.

Abordaremos, nos próximos itens, os três problemas que selecionamos para serem abordados em nossa proposta, seguindo a ordem cronológica crescente (do mais antigo ao mais recente), a saber: o Problema dos Dados (na Itália), o Problema dos Pontos (na França), por fim, o dilema de Monty Hall da história recente.

3.2.1 Problema dos Dados

A Itália dos séculos XV e XVI foi, possivelmente, a primeira localidade onde houve uso de cálculos probabilísticos. Os italianos daquele período, além de listar as possibilidades para problemas em jogos de azar, também comparavam a frequência de ocorrências de ganhos e perdas, contudo, ainda se limitavam a resolver apenas problemas concretos (Viali, 2008).

Nesse contexto, é possível notar que os italianos se dedicavam às aplicações da Probabilidade, por exemplo, jogos de azar com dados. Destacaremos um jogo específico, denominado “Problema dos Dados”, com o seguinte enunciado no Quadro 6, em uma linguagem atual:

Quadro 6 – Enunciado do Problema dos Dados

Em um jogo com três dados, mostrar que os números 9 e 10 podem ser obtidos de seis maneiras. Mostrar, também, que a possibilidade de aparecer o número 10 é maior que a do número 9.

Fonte: Calabria; Cavalari (2013, p.10).

Este problema foi proposto a Galileu Galilei (1564 – 1642), renomado físico italiano, por um amigo.

Figura 1 – Galileu Galilei (1564 – 1642)

Fonte: O’Connor; Robertson (2024)[4]

Galileu mostrou o porquê de, em um jogo de três dados, o número 9 e o número 10 são produzidos por seis combinações diferentes e, ainda assim, a experiência mostra que o número 10 é mais frequentemente jogado do que o 9. O trecho, a seguir, mostra o comentário de Galileu na obra *Sopra le scoperta dei dadi* (Sobre o jogo de dados), um manual sobre jogos de azar.

> O fato que em um jogo de dados certos números são mais vantajosos que outros tem uma razão óbvia, ou seja, que alguns são obtidos com mais facilidade e mais frequência do que outros, o que depende de poderem ser compensados com mais variedade de números. Então, um 3 e um 18, que são

[4] Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Galileo/pictdisplay/ Acesso em: 18 jan. 2024

> lançamentos que só podem ser feitos de uma maneira com 3 números (isto é, o último com 6, 6, 6 e o primeiro com 1, 1, 1, e de nenhuma outra maneira), são mais difíceis de fazer do que, por exemplo, 6 ou 7, que podem ser feitos de várias maneiras, isto é, um 6 com 1, 2, 3, e com 2, 2, 2 e com 1, 1, 4 e um 7 com 1, 1, 5; 1, 2, 4; 1, 3, 3; 2, 2, 3. Todavia, embora 9 e 12 possam ser obtidos de tantas maneiras quanto 10 e 11 e, portanto, devem ser considerados como sendo de igual vantagens, no entanto, sabe-se que a longa observação fez com que os jogadores de dados considerassem 10 e 11 como sendo mais vantajosos do que 9 e 12 (GALILEU *apud* DAVID, 1962, p. 65. tradução nossa).

O Quadro 7 mostra cada uma das seis combinações possíveis (arranjos não ordenados) para as notas de 9-12. Também é mostrado o número de formas (permutações ou arranjos ordenados) em que cada combinação pode ocorrer.

Quadro 7 – Análise dos possíveis resultados do Problema dos Dados

	PONTUAÇÃO							
	12		11		10		9	
	6-5-1	6	6-4-1	6	6-3-1	6	6-2-1	6
	6-4-2	6	6-3-2	6	6-2-2	3	5-3-1	6
	6-3-3	3	5-5-1	3	5-4-1	6	5-2-2	3
	5-5-2	3	5-4-2	6	5-3-2	6	4-4-1	3
	5-4-3	6	5-3-3	3	4-4-2	3	4-3-2	6
	4-4-4	1	4-4-3	3	4-3-3	3	3-3-3	1
TOTAL DE POSSIBILIDADES		25		27		27		25

Fonte: Autoria própria

Nesse problema, verificamos que situações nas quais a soma é formada por três números iguais, apresentam uma desvantagem em relação aos outros, como é o caso 9 e 10, assim como 11 e 12, ou até mesmo 6 e 7. No item seguinte, trataremos de outro problema histórico, o Problema dos Pontos, que marca o início da Teoria da Probabilidade.

3.2.2 Problema dos Pontos

Outro problema envolvendo os jogos de azar foi resolvido pelos franceses, apesar de ter começado com os italianos. O Problema dos Pontos foi estudado por Luca Pacioli (1445 – 1517) em 1494 e, posteriormente, foi discutido por Girolamo Cardano (1501 – 1576) e Niccolò

Fontana (1500 – 1557), mais conhecido por Tartaglia, que apresentaram uma solução incorreta, utilizando conceitos de proporcionalidade.

Figura 2 – Luca Pacioli (1445 – 1517), Girolamo Cardano (1501 – 1576) e Niccolò Fontana (1500 – 1557)

Fonte: O'Connor; Robertson (2024)[5]

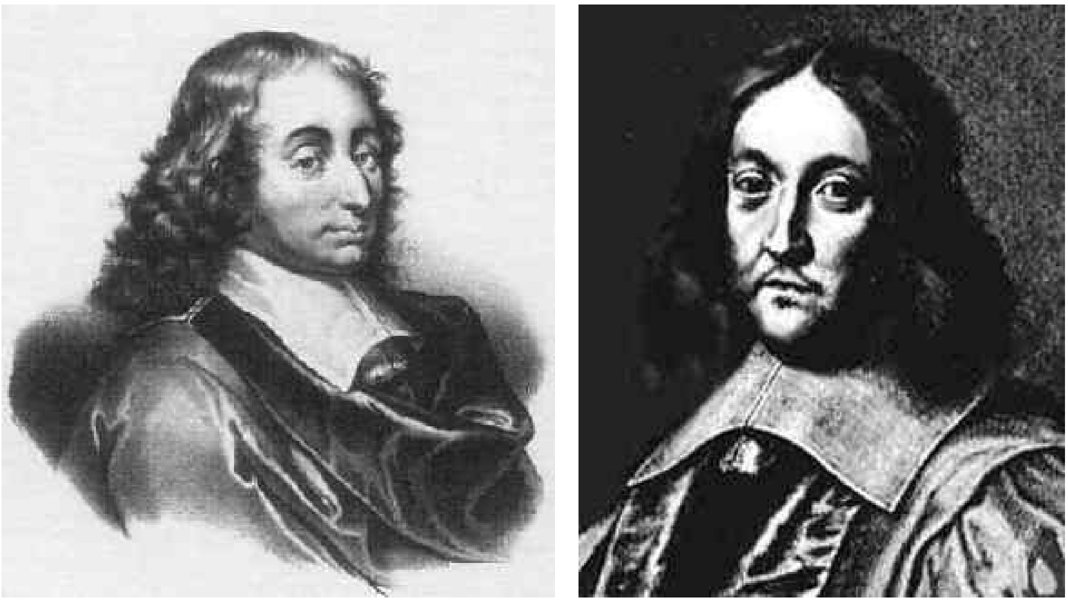
Em 1654, Antoine Gombauld (1610 – 1685), que ganhava a vida jogando, e se autodenominava cavaleiro de Méré, apresentou o problema ao francês Blaise Pascal (1623 – 1662) e, assim, houve um grande progresso na sua resolução, uma vez que Pascal e Pierre de Fermat (1601 – 1665) trocaram correspondências sobre o tema, chegando às soluções coerentes, utilizando ideias da probabilidade (Viali, 2008).

Segundo Debnath e Basu (2015), Blaise Pascal foi um matemático e filósofo francês extremamente influente, que fez contribuições significativas para vários domínios da matemática. Ele se dedicou ao estudo de seções cônicas e geometria projetiva e, por meio de sua correspondência com Fermat, estabeleceu os princípios fundamentais da teoria da probabilidade (Debnath; Basu, 2015).

Já Pierre de Fermat foi um jurista e funcionário governamental francês, mais notavelmente homenageado por suas contribuições na teoria dos números; especificamente, pelo último teorema de Fermat. Ele também tem importância nos fundamentos do cálculo (Debnath; Basu, 2015).

[5] Pacioli (à esquerda). Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pacioli/pictdisplay/
Cardano (centro). Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cardan/pictdisplay/
Tartaglia (à direita). Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Tartaglia/pictdisplay/

Figura 3 – Blaise Pascal (1623 – 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665)



Fonte: O'Connor; Robertson (2024)[6]

A famosa correspondência entre eles introduziu o conceito de probabilidade, valor médio (ou esperado) e probabilidade condicional e, portanto, pode ser considerada a marca do nascimento da teoria clássica da probabilidade (Debnath; Basu, 2015).

A troca de correspondência entre Pascal e Fermat, que envolveu a discussão de problemas relacionados a jogos de azar, arranjos de objetos e a chance de ganhar um jogo justo, pode ser considerado o início da Teoria da Probabilidade (Debnath; Basu, 2015). Uma tradução do Problema dos Pontos pode ser encontrada a seguir:

Quadro 8 – Enunciado do Problema dos Pontos

Dois jogadores disputam um jogo de três pontos onde cada um fez uma aposta de 32 pistoles[7]. Como a aposta deve ser dividida se eles têm ou decidirem interromper o jogo antes do final (ambos assumiam que os dois jogadores tinham habilidades equivalentes).

Fonte: Viali (2008, p. 148)

A solução apresentada por Pascal foi examinar todas as possibilidades futuras do desenvolvimento do jogo. De acordo com Pascal, quando uma moeda é lançada duas vezes, há quatro resultados possíveis: CC, CK, KC e KK, onde C significa cara e K coroa, cuja solução

[6] Pascal (à esquerda). Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pascal/pictdisplay/
Fermat (à direita). Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fermat/pictdisplay/
[7] *Pistoles* foi a moeda utilizada em vários países europeus até o século XIX (Viali, 2008).

está relacionada aos coeficientes binomiais de $(C + K)^2 = C^2 + CK + KC + K^2 = C^2 + 2CK + K^2$. Da mesma forma, quando uma moeda ideal é lançada três vezes, há oito resultados possíveis: CCC, CCK, KCK, KCC, CKK, KCK, KKC e KKK. Uma solução que eles associaram aos coeficientes binomiais (reunindo todos os termos de C e K) de $(C + K)^3 = C^3 + 3C^2K + 3CK^2 + K^2$ (Debnath; Basu, 2015). Para ilustrar a resolução, exploramos um caso no quadro a seguir Quadro 9:

Quadro 9 – Possibilidades nos Problema dos Pontos

1° RODADA	**2° RODADA**	**3° RODADA**	**GANHADOR**	**CHANCES**
K	K	K	Jogador 1	7/8
		C	Jogador 1	
	C	K	Jogador 1	
		C	Jogador 1	
C	K	K	Jogador 1	1/8
		C	Jogador 1	
	C	K	Jogador 1	
		C	Jogador 2	

Fonte: Autoria própria

Esses coeficientes conduziram ao triângulo aritmético, como é mostrado na Figura 3. Pascal também escreveu seu *Traité du triangle arithmetique* (Tratado sobre o triângulo aritmético), no qual encontrou um arranjo triangular dos coeficientes binomiais e provou muitas propriedades novas para eles (Debnath; Basu, 2015). Destaca-se que o triângulo aritmético, tornou-se conhecido como triângulo de Pascal, embora já tivesse sido elaborado por outro acadêmico, o chinês Chu Shih-Chieh, cerca de três séculos antes (Nobre, 2004). Feita apresentação do Problema dos Pontos, em seguida trataremos de um problema recente, o Dilema de Monty Hall que teve repercussão pela solução apresentada.

3.2.3 Dilema de Monty Hall

O terceiro problema é conhecido como o dilema de Monty Hall e é referente a história recente. Embora o problema de Monty Hall tenha se tornado conhecido a partir de uma publicação em uma edição de 1959 da *Scientific American* na seção "*Mathematical Games*", versões desse problema foram encontradas em textos de filosofia do século XVII (Bennett, 2018). O dilema de Monty Hall tem o seguinte enunciado:

Quadro 10 – Enunciado Dilema de Monty Hall

Suponha que os participantes de um programa de auditório recebam a opção de escolher uma dentre três portas: atrás de uma delas há um carro; atrás das outras, há cabras. Depois que um dos participantes escolhe uma porta, o apresentador, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das portas não escolhidas, revelando uma cabra. Ele diz então ao participante: 'Você gostaria de mudar sua escolha para a outra porta fechada?' Para o participante, é vantajoso trocar sua escolha?

Fonte: Mlodinow (2018, p. 61-62)

Este problema ficou bem conhecido, nos Estados Unidos, entre 1963 e 1990 no programa de televisão de Monty Hall. Porém, a controvérsia sobre a solução correta começou depois que uma mulher que não era matemática, mas escritora e colunista Marilyn vos Savant apresentou esse problema aos leitores de sua coluna "*Ask Marilyn*" e disse que a melhor estratégia era trocar de porta (vos Savant 1990a, 1990b, 1991a, 1999b apud Bennet 2018).

Figura 4 – Marilyn vos Savant (1946 – presente)

Fonte: BBC[8]

No entanto, a colunista e recordista do Guinness Book de maior Q.I. manteve o seu raciocínio e respondeu às críticas de sua solução da seguinte maneira: Sim, você deve trocar. Seguindo o seu raciocínio:

[8] Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/articles/cy90p2y5v1xo. Acesso em: 18 jan. 2024

> A primeira porta tem 1/3 de chance de ganhar, mas a segunda porta tem 2/3 de chance. Esta é uma boa maneira de visualizar o que aconteceu. Suponha que haja um milhão de portas e que você escolha a porta número 1. Em seguida, o apresentador, que sabe o que está por trás das portas e sempre evitará a que tem o prêmio, abre todas elas, exceto a porta número 777.777. Você mudaria para essa porta bem rápido, não é mesmo? (vos Savant apud Rosenhouse, 2009, p. 23, tradução nossa).

Para ilustrar esta solução, elaboramos o quadro a seguir para tratar das possibilidades envolvidas em cada estratégia no dilema de Monty Hall.

Quadro 11 – Possibilidades do Dilema de Monty Hall ao ficar com a porta

POSSÍVEIS RESULTADOS DA ESTRATÉGIA DE FICAR				
Porta correta	1° escolha	Porta aberta	2° escolha	Resultado
A	A	B ou C	A	**Ganha**
A	B	C	B	Perde
A	C	B	C	Perde
B	A	C	A	Perde
B	B	A ou C	B	**Ganha**
B	C	A	C	Perde
C	A	B	A	Perde
C	B	A	B	Perde
C	C	A ou B	C	**Ganha**
Chances de ganhar: 3/9 = 1/3 = 33%				

Fonte: Autoria própria.

Agora, vamos analisar os possíveis resultados da estratégia de trocar. Claramente, não há necessidades de explorar essas opções, obtendo o resultado mais curto ao utilizar a ideia de evento complementar[9].

[9] Ao considerarmos o evento, ficar com a porta como A e sua probabilidade $P(A) = 1/3$. Isso implica a probabilidade de A não acontecer, ou seja, a probabilidade de trocar a porta A será o evento complementar A^C, tendo sua probabilidade calculada por $P(A^C) = 1 - 1/3 = 2/3$, de acordo com o axioma da Probabilidade $P(A) + P(A^C) = 1$.

Quadro 12 – Possibilidades Dilema de Monty Hall ao trocar de porta

POSSÍVEIS RESULTADOS DA ESTRATÉGIA DE TROCAR				
Porta correta	1° escolha	Porta aberta	2° escolha	Resultado
A	A	B ou C	B ou C	Perde
A	B	C	A	**Ganha**
A	C	B	A	**Ganha**
B	A	C	B	**Ganha**
B	B	A ou C	A ou C	Perde
B	C	A	B	**Ganha**
C	A	B	C	**Ganha**
C	B	A	C	**Ganha**
C	C	A ou B	A ou B	Perde
Chances de ganhar: 6/9 = 2/3 = 66%				

Fonte: Autoria própria

Note que a estratégia de trocar de porta fornece mais chances do que permanecer na escolha, para ser mais específico as chances chegam a dobrar. Cabe destacar que ter mais chances não significa a certeza de que o evento irá acontecer, mas que número de possibilidades é maior do que outros eventos. Feita apresentação dos problemas. Em seguida trataremos do percurso metodológico em nossa proposta.

Após a apresentação desta solução, ela recebeu diversas cartas, sendo que em 92% destas, havia a informação de que ela estava errada. Se considerassem as cartas vindas de universidades, 65% eram contrárias à sua resposta (Bennett, 2018). Seguiu-se um debate acrimonioso e ela recebeu, inclusive, críticas às soluções de forma bastante desrespeitosas. Rosenhouse (2009) mostra isto ao destacá-las, como mostrado a seguir:

Quadro 13 – Críticas feitas a solução de vos Savant para o Dilema de Monty Hall

Como você parece gostar de ir direto ao ponto, farei o mesmo. Na pergunta e resposta a seguir, você errou! Deixe-me explicar. Se for demonstrado que uma porta é perdedora, essa informação altera a probabilidade de qualquer uma das opções restantes, nenhuma das quais tem qualquer razão para ser mais provável, para 1/2. Como matemático profissional, estou muito preocupado com a falta de habilidades matemáticas do público em geral. Por favor, ajude-o confessando seu erro e, no futuro, sendo mais cuidadoso.

Você errou, e errou muito! Como você parece ter dificuldade em entender o princípio básico em ação aqui, vou explicar. Depois que o apresentador revela um bode, você tem uma chance em duas de estar correto. Quer você mude sua seleção ou não, as chances são as mesmas. Já existe analfabetismo matemático suficiente neste país, e não precisamos que o Q.I. mais alto do mundo propague mais. Que vergonha!
Sua resposta à pergunta está errada. Mas se serve de consolo, muitos dos meus colegas acadêmicos também ficaram perplexos com esse problema.
Você está totalmente incorreta sobre a pergunta do game-show, e espero que essa controvérsia chame a atenção do público nacional para a grave crise nacional na educação matemática. Se conseguir admitir seu erro, terá contribuído de forma construtiva para a solução de uma situação deplorável. Quantos matemáticos irritados são necessários para fazer com que você mude de ideia?
Você cometeu um erro, mas veja o lado positivo. Se todos esses PhDs estivessem errados, o país estaria com problemas muito sérios.

Fonte: Rosenhouse (2009, p. 24-25, tradução nossa)

Encerramos a discussão sobre os problemas históricos que influenciaram o desenvolvimento da Probabilidade, evidenciando seu papel central na formalização de conceitos fundamentais para a ciência moderna. A análise dos principais desafios enfrentados ao longo do tempo permitiu compreender as bases teóricas que sustentam essa área de estudo. Com esse panorama histórico estabelecido, a próxima etapa deste trabalho focará no percurso metodológico da pesquisa, apresentando as abordagens, as técnicas e os procedimentos utilizados para a investigação dos problemas propostos.

4 PERCURSO METODOLÓGICO

Neste capítulo, temos o propósito de descrever o percurso metodológico que guiará no processo de pesquisa. Para tanto, estruturamos sua escrita em três partes, sendo a primeira nomeada "Elaboração da proposta", na qual detalhamos o processo de elaboração da proposta; a segunda, "Contexto, procedimentos de coleta e análise", em que situamos o contexto, procedimentos de coleta e análise; e, por fim, a terceira, "Panorama da implementação da proposta", na qual detalhamos a implementação da nossa proposta.

4.1 Elaboração da proposta

Antes de iniciarmos a investigação, procuramos referências teóricas que tratassem de HM para o ensino de Matemática, tanto no âmbito nacional quanto internacionalmente. Durante esse processo, analisamos os trabalhos de Fauvel e Van Maneen (2000), Fried (2001), Mendes, Fossa e Valdés (2006), Miguel e colaboradores (2009), Mendes (2009) e Miguel e Miorim (2021) para identificar formas de abordar a HM em sala de aula.

Também verificamos a literatura pertinente à HM para o ensino de Probabilidade, como apresentado na primeira parte do Capítulo 3. Com base nisso, identificamos como estratégia para nossa abordagem trazer problemas históricos para o contexto educacional.

Além disso, realizamos um estudo sobre o contexto/processo histórico do desenvolvimento da Teoria da Probabilidade, apoiado pelos trabalhos de Coutinho (2007), Viali (2008), Calabria e Cavalari (2013) e Vasconcelos, Vasconcelos e Chaquiam (2022), visando obter dados para a elaboração das atividades propostas.

Esses estudos fundamentaram a elaboração de uma proposta didática, que utiliza elementos da HM para o ensino de Probabilidade. Nesse caso, entendemos que a utilização de problemas históricos é uma estratégia eficaz, que será detalhada no item seguinte.

A escolha desses problemas se justifica pelo fato de permitir trabalhar os conceitos da teoria da Probabilidade no Ensino Médio e utilizar materiais concretos. Ademais, os problemas permitem: compreender os matemáticos/estudiosos envolvidos; reproduzir os métodos empregados ao longo do tempo; discutir a influência histórica dos jogos de azar no desenvolvimento da Probabilidade; e, sobretudo, conhecer a Probabilidade experimentalmente, para que, posteriormente, seja realizado o cálculo efetivo com base no conhecimento teórico (Arcego; Berlanda. 2016).

Após a escolha dos problemas históricos, foram consultados documentos oficiais, como a BNCC e o Currículo Referência de Minas Gerais (CRMG), para que a proposta se adequasse às diretrizes desses documentos. De modo especial, o CRMG faz menção, nos tópicos destinados ao 3º Ano do Ensino Médio, a um dos problemas citados anteriormente (o dilema de Monty Hall), ao qual se refere como "problema dos bodes e do carro", conforme apresentado no trecho a seguir:

> Tema 17: Probabilidade
> - Relacionar o cálculo de probabilidades com os princípios de contagem.
> - Utilizar simulações para estimar probabilidades como, por exemplo, o **problema dos bodes e do carro** (ver Revista do professor de Matemática - SBM - Número 36).
> - Calcular a probabilidade da união e da interseção de dois eventos de probabilidade conhecida.
> - Calcular a probabilidade de se ganhar em um jogo da Mega-Sena, de obter uma determinada nota em uma prova de múltipla escolha, marcando-se as alternativas ao acaso, etc. (Minas Gerais, 2018, p. 75, grifo nosso)

Além disso, foram consultados livros didáticos e propostas elaboradas por acadêmicos, dentre os quais: Moraes (2014), Dias (2015), Fernandes e Santos Junior (2015), Kachel e Sad (2021) Vidarte, Chachapoyas e Cavalari (2021), Vasconcelos, Vasconcelos e Chaquiam (2022). Dessa forma, foi possível identificar diferentes abordagens sobre os temas de probabilidade, sob uma perspectiva histórica, além de retomar os trabalhos já identificados e estudados no Capítulo 2.

Assim, com base nesses estudos, elaboramos a proposta com objetivo de que os alunos compreendessem todo o conteúdo proposto de Probabilidade para o 3º ano do Ensino Médio, sendo estes os conceitos da Teoria da Probabilidade: experimentos aleatórios, espaço amostral, eventos, cálculo da probabilidade e probabilidade condicional — por meio de problemas históricos.

Inicialmente, adotamos como o referencial teórico os temas propostos pelo trabalho de Fried (2001). Durante o desenvolvimento da proposta, tivemos contato com outros trabalhos como o de Fried (2014) e o de Furinghetti (2019). Conforme exposto no capítulo de referencial teórico, existem aproximações entre as ideias dos trabalhos consultados. Além das competências e habilidades da BNCC e o CRMG para o Ensino Médio (EM13MAT106), (EM13MAT311), (EM13MAT312) (EM13MAT511), conforme apresentado no quadro a seguir:

Quadro 14 – Competências e Habilidades da BNCC e CRMG

Competência Específica 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

- **(EM13MAT106)** Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.)

Competência Específica 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

- **(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

- **(EM13MAT312)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Competência Específica 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

- **(EM13MAT511)** Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: Adaptado de Brasil (2018) e Minas Gerais (2018)

A proposta foi elaborada inicialmente para 20 aulas (de 50 minutos) e dividida em três momentos, cada um dedicado ao estudo de um dos problemas históricos. Foram seguidas a ordem cronológica, além de consideradas as possiblidades didáticas de cada problema histórico para a abordagem de conceitos. Contudo, cabe ressaltar que a organização ficou a critério do pesquisador e poderia ser elaborada de outra maneira. O primeiro momento foi dedicado ao Problema dos Dados, o segundo ao Problema dos Pontos e, por fim, o terceiro ao dilema de Monty Hall, conforme indicado no Quadro 15:

Quadro 15 – Estrutura da proposta didática elaborada

MOMENTO	QUANTIDADE DE AULAS
Momento 1 – Problema dos Dados	4 aulas (3h e 20 min)
Momento 2 – Problema dos Pontos	8 aulas (6h e 40 min)
Momento 3 – Dilema de Monty Hall	8 aulas (6h e 40 min)
TOTAL	**20 aulas (16h e 40min)**

Fonte: Autoria própria

De modo geral, cada momento visa tratar de um problema específico em que foram desenvolvidos os conceitos da Teoria da Probabilidade, e os alunos só seriam informados de que se tratava de um problema histórico durante a correção das atividades. Além disso, após a correção das atividades realizadas pelos alunos, seria feita uma breve contextualização histórica do problema resolvido, além de apresentados os personagens envolvidos em sua solução (APÊNDICE H). A seguir será detalhado o desenvolvimento de cada aula da proposta.

O objetivo deste Momento 1, ao trabalhar com o Problema dos Dados, é que os alunos aprendam os conceitos de experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos, identificando-os e descrevendo-os para resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de probabilidades. Detalhamos, no Quadro 16, o planejamento das aulas do Momento 1.

Quadro 16 – Planejamento das aulas do Momento 1

<table>
<tr><th colspan="2">MOMENTO 1 – Problema dos Dados</th></tr>
<tr><td>Previsto</td><td>Conteúdo programático: Experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos</td></tr>
<tr><td rowspan="5">2 Aulas (1h e 40 min)</td><td>Objetivos das aulas:
Espera-se que ao término das aulas os alunos sejam capazes de:
▪ Compreender o conceito de experimento aleatório;
▪ Reconhecer e determinar um espaço amostral;
▪ Compreender o que caracteriza um evento;
▪ Classificar eventos aleatórios, sendo “impossível”, “certo” ou “elementar”.
▪ Desenvolver os conceitos de experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos na resolução de problemas históricos.</td></tr>
<tr><td>Competências e Habilidades: C1 (EM13MAT106) C3 (EM13MAT311) C5 (EM13MAT511)</td></tr>
<tr><td>Procedimentos:
▪ Socialização inicial com os alunos;
▪ Aplicação da Atividade 1, feita em grupos, que explora os conceitos de experimento aleatório, espaço amostral, eventos e seus tipos, bem como o Problema dos Dados resolvido por Galileu Galilei (1564-1642).</td></tr>
<tr><td>Recursos. Impressão da Atividade 1 (APÊNDICE A), lápis, borracha, três dados de 6 faces cada (para cada grupo).</td></tr>
<tr><td>Avaliação. Envolvimento dos alunos na realização da Atividade 1.</td></tr>
<tr><td></td><td>Conteúdo programático: Experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos</td></tr>
</table>

2 Aulas (1h e 40 min)	**Objetivos das aulas:** Espera-se que ao término das aulas os alunos sejam capazes de: ▪ Compreender o conceito de experimento aleatório; ▪ Reconhecer e determinar um espaço amostral; ▪ Compreender o que caracteriza um evento; ▪ Classificar eventos aleatórios, sendo "impossível", "certo" ou "elementar".
	Competências e Habilidades: C1 (EM13MAT106) C3 (EM13MAT311) C5 (EM13MAT511)
	Procedimentos: ▪ Debate sobre as soluções encontradas pelos alunos; ▪ Apresentação formal dos conceitos trabalhados na Atividade 1, tais como: experimento aleatório, espaço amostral, eventos e seus tipos, além da correção das questões; ▪ Apresentação em slides do Problema dos Dados resolvido por Galileu Galilei (1564-1642) (APÊNDICE H).
	Recursos: Apresentação em slides, computador, televisão, quadro, pincel e apagador
	Avaliação: Entrega da Atividade 1 (Problema dos Dados) (APÊNDICE A), assim como envolvimento dos alunos na apresentação dos conceitos e sua correção.
	Referências utilizadas no Momento 1: ANDRADE, Thais Marcelle de (ed.). **Matemática Interligada**: estatística, análise combinatória e probabilidade. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020. CALABRIA, Angelica Raiz; CAVALARI, Mariana Feiteiro. Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades. *In:* **X Seminário Nacional de História da Matemática.** Campinas, 2013.
TOTAL	**4 aulas (3h e 20 min)**

Fonte: Autoria própria

O Momento 2, ao trabalhar com o Problema dos Pontos, visa que os alunos entendam o conceito de probabilidade de um evento e da união de eventos, reconhecendo os diferentes tipos de espaços amostrais e investigando suas implicações no cálculo de probabilidades; além de resolver e desenvolver problemas que envolvam o cálculo de probabilidade de eventos aleatórios sucessivos. Detalhamos, no Quadro 17, o planejamento das aulas do Momento 2.

Quadro 17 – Planejamento das aulas do Momento 2

MOMENTO 2 – Problema dos Pontos	
Previsto	**Conteúdo programático:** Probabilidade de um evento e da união de eventos
2 Aulas (1h e 40 min)	**Objetivos das aulas:** Espera-se que ao término das aulas os alunos sejam capazes de: ▪ Reconhecer e determinar um espaço amostral; ▪ Compreender o que caracteriza um evento; ▪ Classificar eventos aleatórios, sendo "impossível", "certo" ou "elementar"; ▪ Compreender o conceito de probabilidade; ▪ Calcular a probabilidade de determinado evento e da união de eventos ocorrer nas formas fracionária, decimal e percentual; ▪ Calcular a probabilidade de acontecimentos em um espaço amostral; ▪ Calcular a probabilidade de um evento não ocorrer.
	Competências e Habilidades: C3 (EM13MAT311) C5 (EM13MAT511)
	Procedimentos:

	▪ Revisão dos conceitos trabalhados na 2° Aula; ▪ Aplicação da Atividade 2 que explora seis situações envolvendo o cálculo das probabilidades de um evento e da união de evento, assim como os axiomas da Teoria das Probabilidades, nas quais algumas serão resolvidas pelo professor;
	Recursos: Apresentação em slides, computador, televisão, quadro pincel, apagador, impressão da Atividade 2 (APÊNDICE B), lápis e borracha.
	Avaliação: Envolvimento dos alunos na realização da Atividade 2.
2 Aulas (1h e 40 min)	**Conteúdo programático:** Probabilidade de um evento e da união de eventos
	Objetivos das aulas: Além dos objetivos anteriores, ao término das aulas, espera-se que os alunos sejam capazes de: ▪ Conhecer elementos da HM de modo a mostrá-la como uma construção humana e que pode ser interessante e acessível. ▪ Desenvolver os conceitos do cálculo de probabilidade de evento na resolução de problemas históricos.
	Competências e Habilidades: C3 (EM13MAT311) C5 (EM13MAT511)
	Procedimentos: ▪ Debate com a turma sobre as questões e as dúvidas da Atividade 2; ▪ Correção das questões da Atividade 2; ▪ Aplicação da Atividade 3 (APÊNDICE C) que apresenta o Problema dos Pontos resolvido por Pascal (1623 – 1662) e Fermat (1601 – 1655) e que explora o cálculo das probabilidades numa divisão de apostas ▪ Debate com a turma sobre as questões e as dúvidas da Atividade 3; ▪ Apresentação do vídeo https://youtu.be/NnJHdr3BXno que tratar do Problema dos Pontos resolvido por Pascal (1623 – 1662) e Fermat (1601 – 1655). Após o vídeo debater com os alunos as seguintes questões: – Vocês perceberam como a Matemática pode ser desenvolvida? – Será que a Matemática é feita apenas por Matemáticos (ou gênios)?
	Recursos: Apresentação em slides, computador, televisão, quadro, pincel e apagador.
	Avaliação: Entrega da Atividade 3 (APÊNDICE C), assim como o envolvimento dos alunos na apresentação dos conceitos e sua correção.
2 Aulas (1h e 40 min)	**Conteúdo programático:** Probabilidade de um evento e da união de eventos
	Objetivos das aulas: Espera-se que ao término das aulas os alunos sejam capazes de: ▪ Reconhecer e determinar um espaço amostral; ▪ Compreender o que caracteriza um evento; ▪ Classificar eventos aleatórios, sendo "impossível", "certo" ou "elementar"; ▪ Compreender o conceito de probabilidade; ▪ Calcular a probabilidade de determinado evento e da união de eventos ocorrer nas formas fracionária, decimal e percentual; ▪ Calcular a probabilidade de acontecimentos em um espaço amostral; ▪ Calcular a probabilidade de um evento não ocorrer.
	Competências e Habilidades: C3 (EM13MAT311) (EM13MAT312) C5 (EM13MAT511)
	Procedimentos: ▪ Revisão dos conceitos trabalhados na 4° Aula; ▪ Aplicação das atividades de revisão (parte 1).
	Recursos: Impressão das atividades de revisão (parte 1) (APÊNDICE D), lápis e borracha.
	Avaliação: Envolvimento dos alunos na realização das atividades de revisão (parte 1).
2 Aulas (1h e 40 min)	**Conteúdo programático:** Probabilidade de um evento e da união de eventos
	Objetivos da aula: Espera-se que ao término das aulas os alunos sejam capazes de: ▪ Reconhecer e determinar um espaço amostral;

<table>
<tr><td></td><td>
▪ Compreender o que caracteriza um evento;
▪ Classificar eventos aleatórios, sendo “impossível”, “certo” ou “elementar”;
▪ Compreender o conceito de probabilidade;
▪ Calcular a probabilidade de determinado evento e da união de eventos ocorrer nas formas fracionária, decimal e percentual;
▪ Calcular a probabilidade de acontecimentos em um espaço amostral;
▪ Calcular a probabilidade de um evento não ocorrer.</td></tr>
<tr><td></td><td>Competências e Habilidades: C3 (EM13MAT311) C5 (EM13MAT511)</td></tr>
<tr><td></td><td>Procedimentos:
▪ Debate com a turma sobre as questões e as dúvidas das atividades de revisão (parte 1);
▪ Correção das questões da das atividades de revisão (parte 1).</td></tr>
<tr><td></td><td>Recursos: Apresentação em slides, computador, televisão, quadro, pincel e apagador.</td></tr>
<tr><td></td><td>Avaliação: Entrega atividades de revisão (parte 1) (APÊNDICE D), assim como o envolvimento dos alunos na apresentação dos conceitos e sua correção.</td></tr>
<tr><td></td><td>Referências utilizadas no Momento 2:
ANDRADE, Thais Marcelle de (ed.). Matemática Interligada: estatística, análise combinatória e probabilidade. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

CALABRIA, Angelica Raiz; CAVALARI, Mariana Feiteiro. Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades. In: X Seminário Nacional de História da Matemática. Campinas, 2013.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; DE SOUSA, Paulo Roberto Câmara. Prisma matemática: estatística, combinatória e probabilidade. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.

MORAES, Luís Cláudio Longo. ensino de Probabilidade: Historicidade e Interdisciplinaridade. 2014. 136 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2014.</td></tr>
<tr><td>TOTAL</td><td>8 aulas (6h e 40 min)</td></tr>
</table>

Fonte: Autoria própria

Por último, o Momento 3, dedicado ao Dilema da Monty Hall, objetiva que os alunos compreendam o conceito de Probabilidade condicional, identificando eventos independentes e não independentes em questões relacionadas ao cálculo de probabilidades, resolvendo problemas que envolvem o conceito de probabilidade condicional. Detalhamos, no Quadro 18, o planejamento das aulas do Momento 3.

Quadro 18 – Planejamento das aulas do Momento 3

<table>
<tr><td colspan="2">MOMENTO 3 – Dilema de Monty Hall</td></tr>
<tr><td>Previsto</td><td>Conteúdo programático: Probabilidade condicional.</td></tr>
<tr><td>2 Aulas (1h e 40 min)</td><td>Objetivos da aula:
▪ Reconhecer e determinar um espaço amostral;
▪ Compreender o que caracteriza um evento;
▪ Compreender e aplicar o conceito de probabilidade condicional;
▪ Conhecer elementos da HM de modo a mostrá-la como uma construção humana e que pode ser interessante e acessível.</td></tr>
</table>

	▪ Desenvolver os conceitos de probabilidade condicional na resolução de problemas históricos.
	Competências e Habilidades: C3 (EM13MAT311) (EM13MAT312) C5 (EM13MAT511)
	Procedimentos: ▪ Apresentação do vídeo https://youtu.be/T5QYTrDReTo que irá tratar do dilema de Monty Hall resolvido por Marilyn vos Savant (1946 – presente); ▪ Aplicação da Atividade 4 envolvendo o dilema de Monty Hall, que irá explorar a noção intuitiva de probabilidade condicional por meio de realização do jogo de Monty Hall com os alunos, além de outras questões sobre o cálculo da probabilidade condicional.
	Recursos: Impressão Atividade 4 (APÊNDICE E), lápis e borracha, 3 copos e brinquedos.
	Avaliação: Envolvimento dos alunos na realização da Atividade 4.
	Conteúdo programático: Probabilidade condicional.
	Objetivos da aula: ▪ Reconhecer e determinar um espaço amostral; ▪ Compreender o que caracteriza um evento; ▪ Compreender e aplicar o conceito de probabilidade condicional; ▪ Humanizar a Matemática por meio da HM; ▪ Tornar a Matemática mais interessante, mais compreensível e mais acessível por meio da HM; ▪ Fornecer insight sobre temas, problemas e soluções por meio da HM.
2 Aulas (1h e 40 min)	**Competências e Habilidades:** C3 (EM13MAT311) (EM13MAT312) C5 (EM13MAT511)
	Procedimentos: ▪ Debate com a turma sobre as questões e as dúvidas da Atividade 4; ▪ Correção das questões da Atividade 4; ▪ Apresentação em slides do dilema de Monty Hall Marilyn vos Savant (1946 – presente). Após a apresentação será questionado aos alunos: – Vocês conhecem mulheres que contribuíram para Matemática? – Será que a Matemática é feita apenas por homens?
	Recursos: Apresentação em slides, computador, televisão, quadro, pincel e apagador.
	Avaliação: Entrega da Atividade 4 (APÊNDICE E), assim como o envolvimento dos alunos na apresentação dos conceitos e sua correção.
	Conteúdo programático: Probabilidade condicional.
	Objetivos da aula: ▪ Reconhecer e determinar um espaço amostral; ▪ Compreender o que caracteriza um evento; ▪ Compreender e aplicar o conceito de probabilidade condicional.
2 Aulas (1h e 40 min)	**Competências e Habilidades:** C3 (EM13MAT311) (EM13MAT312) C5 (EM13MAT511)
	Procedimentos: ▪ Revisão dos conceitos trabalhados na 4° Aula; ▪ Aplicação das atividades de revisão (parte 2).
	Recursos: Impressão das atividades de revisão (parte 2) (APÊNDICE F), lápis e borracha.
	Avaliação: Envolvimento dos alunos na realização das atividades de revisão (parte 2),
	Conteúdo programático: Probabilidade condicional.
2 Aulas (1h e 40 min)	**Objetivos da aula:** ▪ Reconhecer e determinar um espaço amostral; ▪ Compreender o que caracteriza um evento; ▪ Compreender e aplicar o conceito de probabilidade condicional.

	Competências e Habilidades: C3 (EM13MAT311) (EM13MAT312) C5 (EM13MAT511)
	Procedimentos: ▪ Debate com a turma sobre as questões e as dúvidas das atividades de revisão (parte 2); ▪ Correção das questões da das atividades de revisão (parte 2).
	Recursos: Apresentação em slides, computador, televisão, quadro, pincel e apagador.
	Avaliação: Entrega atividades de revisão (parte 2) (APÊNDICE F), assim como o envolvimento dos alunos na apresentação dos conceitos e sua correção.
	Referências utilizadas no Momento 3: BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; DE SOUSA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática**: estatística, combinatória e probabilidade. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020. MORAES, Luís Cláudio Longo. **ensino de Probabilidade**: Historicidade e Interdisciplinaridade. 2014. 136 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2014. MLODINOW, Leonard. **O andar do bêbado**: como o acaso determina nossas vidas. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2018.
TOTAL	**8 aulas (6h e 40 min)**

Fonte: Autoria própria

Após tratarmos dos processos envolvidos na elaboração da nossa proposta didática, na seção subsequente descrevemos o contexto, os procedimentos de coleta e a análise empregada em nossa investigação.

4.2 Contexto, procedimentos de coleta e análise

Para atingirmos os objetivos estabelecidos para nossa investigação, a abordagem adotada para este estudo foi a qualitativa. Segundo Goldenberg (2004, p. 14), nessa abordagem, "[…] a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória etc.".

Como nossa investigação tem como ambiente natural a sala de aula, sendo esta nossa fonte direta dos dados, utilizamos registros em áudio e documentos. Esses dados coletados são, sobretudo, descritivos, mostrando que nossa preocupação com o processo foi maior do que com o resultado, o que, segundo Lüdke e André (2018), define uma pesquisa qualitativa.

Para tanto, a proposta didática foi desenvolvida no segundo bimestre de 2023, em uma turma do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública no município do Sul de Minas Gerais, mediante a aprovação da direção escolar, com 30 alunos regularmente matriculados[10] que optaram pela participação da pesquisa. Nesse contexto, destacamos que obtivemos a aprovação[11] de um Comitê de Ética em Pesquisa para a realização da investigação.

Embora a proposta inicial tenha sido elaborada para 20 aulas, sua implementação se estendeu para 26. A extensão do período ocorreu devido às interferências durante a implementação, dentre as quais estão saídas de alguns alunos para participar ou organizar eventos escolares, avisos de membros da comunidade escolar e/ou externos para informar sobre outros eventos, o que, consequentemente, dificultou o acompanhamento da proposta por alguns alunos. Posteriormente, detalharemos essas e outras dificuldades enfrentadas, bem como o processo de implementação da proposta didática. Detalhamos, no Quadro 19, o cronograma de implementação da proposta.

Quadro 19 – Cronograma de implementação da proposta didática

	Encontro	**Data**	**Descrição**
MOMENTO 1	1	08/05/23	- Apresentação da pesquisa - Atividade 1 (Problema dos Dados) (APÊNDICE A)
	2	10/05/23	- Continuação da Atividade 1
	3	15/05/23	- Correção da Atividade 1 - Definição de conceitos trabalhados
	4	17/05/23	- Continuação da correção da Atividade 1 - Apresentação do Problema dos Dados (APÊNDICE H)
MOMENTO 2	5	22/05/23	- Atividade 2 (APÊNDICE B)
	6	24/05/23	- Continuação da Atividade 2
	7	29/05/23	- Correção da Atividade 2
	8	31/05/23	- Atividade 3 (Problema dos Pontos) (APÊNDICE C)
	9	05/06/23	- Questionamentos do Momento 2
	10	07/06/23	- Atividades de revisão (parte 1) (APÊNDICE D)

[10] Não foi realizado um cálculo de amostra para seleção dos participantes, sendo suficiente os alunos de uma turma do Ensino Médio.
[11] Número do CAAE: 62760422.2.0000.5102 – Número do Parecer: 5682958 de 04 de outubro de 2022.

	11	12/06/23	- Correção das Atividades de revisão (parte 1)
MOMENTO 3	12	14/06/23	- Atividade 4 (Dilema de Monty Hall) (APÊNDICE E) - Questionamentos do Momento 3
	13	26/06/23	- Atividades de revisão (parte 2) (APÊNDICE F) - Correção Atividades de revisão (parte 2) - Atividade final (APÊNDICE G)

Fonte: Autoria própria

Cada encontro teve duas aulas (1h e 40 min), totalizando 26 aulas (21h e 40 min). As aulas foram gravadas em áudio e, posteriormente, transcritas para análise dos dados. Cabe ressaltar que, em diversos momentos, os alunos se sentiram inibidos pela presença do gravador, de modo que ficaram receosos para responder às perguntas. Embora inicialmente tenha havido essa complicação, com o tempo os alunos foram se habituando à presença do gravador durante as aulas.

Além disso, as atividades foram registradas em diário de campo, nos moldes do indicado por Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 119), em que "[…] o pesquisador registra observações de fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos". Também contamos com um diário de campo elaborado pelo docente regente da turma, que participou das aulas. Foi estabelecido que o professor regente, por ter mais contato com a turma, fizesse anotações sobre mudanças de postura e entendimentos dos alunos em sala de aula.

Além disso, foram recolhidas as 6 atividades realizadas pelos alunos ao longo do desenvolvimento da proposta elaborada e, ainda, foi proposta uma atividade final (APÊNDICE G), desenvolvida com o intuito de ter um *feedback* dos alunos acerca das propostas vivenciadas. A atividade final não foi realizada em sala de aula: os alunos puderam levar para casa e responder. Tal atividade foi opcional e anônima, assim, apenas 12 alunos responderam.

Com vistas a manter o sigilo da identidade dos alunos, elaboramos códigos para identificá-los, assim, cada um será identificado com um nome das constelações descritas no *Almagesto*[12] de Ptolomeu.

[12] O *Almagesto*, obra de Cláudio Ptolomeu (c. 100 – 178 d.C.), consiste em 13 livros com uma descrição matemática abrangente do modelo grego do universo, detalhando os movimentos do Sol, Lua e planetas. O *Almagesto* foi o alicerce da astronomia grega, substituindo trabalhos anteriores e estabelecendo a base para criar modelos matemáticos para prever fenômenos naturais. Além disso, exerceu uma influência notável por séculos, servindo de base para estudos astronômicos posteriores, tanto no mundo islâmico quanto no Ocidente, incluindo o trabalho de Copérnico. O termo *"Almagesto"* originou-se da tradução árabe *"al-magisti",* que significa "a maior", destacando sua importância como a maior coleção no campo da astronomia (Katz, 2009).

Após a etapa de coleta de dados, iniciamos as análises, selecionando trechos das transcrições de áudio, atividades e anotações no diário de campo, que poderiam nos ajudar a responder às perguntas da pesquisa.

Os dados obtidos por meio dos diferentes instrumentos já mencionados — registros em áudios das aulas e suas transcrições, registros do diário de campo do pesquisador e do professor regente, bem como as atividades dos alunos — foram confrontados e combinados. Assim, utilizamos elementos da triangulação, que segundo Flick (2009), na pesquisa qualitativa

> […] implica que os pesquisadores assumam diferentes perspectivas sobre uma questão em estudo ou, de forma mais geral, ao responder a pergunta de pesquisa. Essas perspectivas podem ser substanciadas pelo emprego de vários métodos e/ou várias abordagens teóricas. […] Além disso, refere-se à **combinação de diferentes tipos de dados** no contexto das perspectivas teóricas que são aplicadas aos dados (Flick, 2009, p. 62, grifo nosso).

Esses dados foram analisados por meio de agrupamentos de semelhança, tendo como base a literatura voltada à HM em sala de aula, sobretudo, Furinghetti (2020). Conforme já explicitado, essa autora apresenta dois eixos que reúnem as potencialidades da utilização da HM em sala de aula, sendo: 1. História para promover a Matemática; 2. História para a construção do conhecimento matemático.

No quadro, exposto a seguir, fazemos uma síntese para a análise dos dados, que apresenta os dois eixos propostos por Furinghetti (2019) e os seus temas centrais, abordados no Capítulo 2, que, em nosso entendimento, se relaciona e contempla as principais ideias apresentadas por Fried (2001, 2014).

Quadro 20 – Síntese dos agrupamentos elaborados

EIXO	AGRUPAMENTOS
História para promover a Matemática	A abordagem histórica contribuiu para: Humanizar a Matemática; evidenciar que não há grupos específicos predestinados a fazer matemática, como homens ou pessoas geniais; mostrar que o trabalho do matemático não é necessariamente solitário; mostrar a possibilidade de ter diversas soluções para um mesmo problema e ela ser aceita ou não depende do contexto/momento histórico; apresentar a relevância dos problemas da matemática ou reais na construção do pensamento matemático.

História para a construção do conhecimento Matemático	A apresentação de conceitos e teorias matemáticas e permite compreender certos motivos relacionados à Matemática.

Fonte: Autoria própria

Feita a apresentação do percurso metodológico do nosso trabalho, no próximo capítulo, relatamos a implementação da proposta didática, assim como analisamos as potencialidades e as limitações pedagógicas identificadas.

4.3 Panorama da implementação da proposta

Como mencionado no início deste capítulo, apresentamos, neste tópico, um panorama da implementação da nossa proposta didática, que se desenvolveu em uma turma do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública no município do Sul de Minas Gerais, com 30 alunos regularmente matriculados.

De acordo com o planejamento inicial, implementamos a proposta no horário das aulas de Matemática, com a presença do professor regente. Conforme mencionado anteriormente, embora sua elaboração tenha sido feita para 20 aulas, esse período se estendeu para 26. Essa extensão ocorreu devido às interferências durante a implementação, dentre as quais estão saídas de alguns alunos para participar ou organizar eventos escolares, avisos de membros da comunidade escolar e/ou externos para informar sobre outros eventos.

Nesse contexto, iniciamos com o relato do Momento 1, que foi elaborado para tratar dos conceitos iniciais da Teoria da Probabilidade.

O Momento 1, dedicado ao Problema dos Dados, foi desenvolvido no período compreendido entre os dias 8 de maio de 2023 e 17 de maio de 2023, tendo duração de quatro encontros de duas aulas, totalizando oito aulas (6h e 40 min). Visamos, nesse Momento 1, trabalhar com o conteúdo referente aos experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos.

Em vista disso, elaboramos a Atividade 1 (APÊNDICE A) para trabalhar com os alunos em grupos questões envolvendo o lançamento de dados, até chegarmos ao Problema dos Dados, com o intuito de introduzir os conceitos fundamentais da Teoria da Probabilidade. Salientamos que, ao implementar a Atividade 1, desenvolvemos conceitos que se referem às seguintes habilidades da BNCC e CRMG para o estudo Probabilidade, a saber:

1. (EM13MAT106) – “Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.)” (Brasil, 2018, p. 525).
2. (EM13MAT311) – “Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade” (Brasil, 2018, p. 529).
3. (EM13MAT511) – “Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades” (Brasil, 2018, p. 533).

Para desenvolver essas habilidades, a Atividade 1 foi estruturada em duas questões divididas em três etapas. A questão 1 faz uma prévia do que seria o Problema dos Dados, descrevendo uma situação mais simples, envolvendo a escolha do número de maior chance num jogo de 2 dados honestos de 6 faces cada. Posteriormente, são exploradas as possibilidades desse mesmo jogo, de modo a determinar conceitos da Teoria da Probabilidade, como: espaço amostral, evento e tipos de evento.

Já a questão 2 está voltada para o Problema dos Dados. Mas antes de chegar em seu enunciado, são exploradas as possibilidades de escolha do número de maior chance num jogo, agora com 3 dados honestos de 6 faces cada. Depois, também foram trabalhadas outras possibilidades desse mesmo jogo, de modo a guiar os alunos à pergunta que levou ao Problema dos Dados, proposto por um amigo de Galileu Galilei (1564 – 1642), o qual resolveu em sua obra *Sopra le scoperta dei dadi* (Sobre o jogo de dados), um manual sobre jogos de azar.

Nos dois primeiros encontros, realizados nos dias 8 e 10 de maio de 2023, nos dedicamos à apresentação inicial da pesquisa e à realização da Atividade 1. Após esclarecer nossa proposta, disponibilizamos o TCLE para àqueles que se dispuseram a participar da pesquisa para assinatura dos responsáveis. Todos optaram pela participação e os alunos que atingiram a maioridade assinaram e entregaram o TCLE no mesmo dia.

Antes de iniciar a Atividade 1, solicitamos que os alunos se organizassem em trios e fossem responsáveis pela escolha dos outros membros. Assim, entregamos 3 dados de 6 faces cada para cada trio realizar as questões propostas.

O desenvolvimento da Atividade 1, assim como das outras, ocorreu conforme o entendimento da sala. Logo, havia questões que se alongaram mais do que outras e que precisaram de um pouco mais de discussões e interações em sala de aula, já que nossa proposta se utilizou constantemente de experimentação [lançamento dos dados] e da análise teórica dos conceitos de Probabilidade. Além disso, por se tratar de uma turma do 3° ano do Ensino Médio, houve algumas interrupções que ocorreram devido às atividades escolares como reuniões com os representantes de sala, mediadas pela direção, bem como reuniões com a turma acerca da formatura.

Já os Encontros 3 e 4, realizados nos dias 15 e 17 de maio de 2023, foram dedicados à correção da Atividade 1 e à definição formal dos conceitos de Probabilidade trabalhados. Optamos por definir os conceitos após a realização da Atividade 1 como uma alternativa ao que é comum no ensino de Matemática: trazer as definições antes de trabalhar as atividades. Como não mencionamos que os alunos resolveram um problema histórico, optamos por não falar diretamente sobre ele para não inibirmos os alunos e/ou acharem que não iriam conseguir resolvê-lo. Ao final do Momento 1, apresentamos o Problema dos Dados e a solução proposta por Galileu Galilei (1564 – 1642), que gerou certo espanto nos alunos.

Encerramos o Momento 1, que tinha como objetivo trabalhar com o conteúdo referente aos experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos, com o apoio do Problema dos Dados. Em seguida, detalhamos o Momento 2, que visava desenvolver o conceito de cálculo da probabilidade de um evento e da união de eventos.

MOMENTO 2 – Problema dos Pontos

O Momento 2, dedicado ao Problema dos Pontos, foi desenvolvido no período compreendido entre 22 de maio de 2023 e 12 de junho de 2023, tendo duração de sete encontros de duas aulas, totalizando catorze aulas (11h e 40 min). Visamos, nesse experimento, trabalhar com o conteúdo referente à probabilidade de um evento e da união de eventos.

Em vista disso, elaboramos a Atividade 2 (APÊNDICE B) e a Atividade 3 (APÊNDICE C). A Atividade 2 foi estruturada em 6 situações, nas quais foram trabalhados o cálculo da probabilidade de um evento e da união de eventos, além de abordar os axiomas da Probabilidade. Optamos por trabalhar previamente com o cálculo da probabilidade para os alunos poderem desenvolvê-lo no Problema dos Pontos, proposto na Atividade 3. Também salientamos que, ao implementar a Atividade 2 e 3, desenvolvemos conceitos que se referem às habilidades EM13MAT311 e EM13MAT511 da BNCC e CRMG para o estudo Probabilidade, que já foram mencionadas neste capítulo.

Os Encontros 5 e 6, realizados nos dias 22 e 24 de maio de 2023, foram dedicados à realização da Atividade 2. Durante seu desenvolvimento, foram propostas 6 situações envolvendo o cálculo de probabilidades. Foram discutidas formas de realizar esse cálculo junto dos alunos. No Encontro 7, realizado no dia 29 de maio de 2023, realizamos a correção da Atividade 2, bem como a formalização dos conceitos trabalhados.

Já o Encontro 8, realizado no dia 31 de maio de 2023, foi dedicado à realização da Atividade 3, que envolvia o Problema dos Pontos, marcando o início do desenvolvimento da Teoria da Probabilidade, tendo sido resolvido por Blaise Pascal (1623 – 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665).

Para a realização da Atividade 3, solicitamos, no encontro anterior, que os alunos levassem moedas. Então, organizamos a sala de aula em duplas para os alunos jogarem e elaborarem, caso o jogo fosse interrompido antes do fim, uma estratégia justa para dividir a aposta. Destacamos que, nesse encontro, apenas 9 alunos realizaram a atividade até o fim devido às condições climáticas anteriores e aos ensaios da festa junina.

Novamente, não era de conhecimento dos alunos que Atividade 3 era um problema histórico. Sendo assim, no Encontro 9, realizado no dia 05 de junho de 2023, apresentamos os aspectos históricos do Problema dos Pontos e àqueles que se dedicaram na sua solução. Após a apresentação, alguns questionamentos foram propostos aos alunos, com intuito de refletir por meio HM sobre a percepção da Matemática, saber:

Quadro 21 – Questionamentos propostos para o Momento 2

PERGUNTAS (Problema dos Pontos)
1. O que vocês entenderam da animação? 2. Vocês reconhecem os dois personagens da animação? 3. Vocês entendem que nessa troca de correspondências houve a produção do conhecimento matemático? 4. Como vocês entendem que o conhecimento matemático é produzido? 5. O trabalho do Matemático é solitário? Existem discordâncias entre os matemáticos? 6. Vocês entendem que o conhecimento matemático surge dos problemas da realidade ou da própria Matemática? 7. Ao longo da história, vocês acham que somente pessoas dedicadas exclusivamente a Matemática produziram o conhecimento matemático? A Matemática é feita apenas por pessoas geniais?

Fonte: Autoria própria

Para encerrar o Momento 2, tendo em vista o trabalho com o conteúdo referente à probabilidade de um evento e da união de eventos com o apoio do Problema dos Dados, propomos Atividades de Revisão I (APÊNDICE D) para retomar os conteúdos até então trabalhados.

Os Encontros 10 e 11, realizados nos dias 07 e 12 de junho de 2023, foram dedicados à realização das Atividades de Revisão I, retomando os conteúdos referentes aos conceitos de experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos, bem como ao cálculo da probabilidade de um evento e da união de eventos. Em seguida, detalhamos o Momento 3, que visava desenvolver o conceito de cálculo de probabilidade condicional.

MOMENTO 3 – Dilema de Monty Hall

O Momento 2, dedicado ao Dilema de Monty Hall, foi desenvolvido no período compreendido entre 14 de junho de 2023 e 26 de junho de 2023, tendo duração de dois encontros de duas aulas, totalizando quatro aulas (3h e 20 min). —Visamos, nesse Momento 3, trabalhar com o conteúdo referente à probabilidade condicional.

Em vista disso, elaboramos a Atividade 4 (APÊNDICE E) para trabalhar com os alunos em grupos: questões envolvendo o cálculo de probabilidade de eventos sucessivos, como o Dilema de Monty Hall. A Atividade 4 foi estruturada em 3 questões e optamos por realizar o jogo de Monty Hall antes de introduzir o conceito de probabilidade condicional, o qual é o cálculo da probabilidade de um evento ocorrer, tendo como base um evento prévio. Após discutir o dilema de Monty Hall, apresentamos a definição do cálculo de probabilidade condicional para que fosse desenvolvido pelos alunos nas questões posteriores.

Com a Atividade 4, desenvolvemos conceitos que se referem às habilidades EM13MAT311 e EM13MAT511 da BNCC e CRMG para o estudo Probabilidade, que já foram mencionadas no momento anterior. Além da habilidade EM13MAT312, que envolve “Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos” (Brasil, 2018, p. 529). Também, destacamos que o dilema de Monty Hall é mencionado no CRMG, nos tópicos destinados ao 3º Ano do Ensino Médio, encontrado como “problema dos bodes e do carro” (Minas Gerais, 2018, p. 75).

Antes de iniciar a Atividade 4, organizamos a turma para realizar o jogo de Monty Hall. Com isso, apresentamos um vídeo do programa de televisão, cujo nome do apresentador é homônimo ao dilema. O programa em questão tinha uma dinâmica semelhante aos apresentados no Brasil por Silvio Santos, algo que chamou a atenção dos alunos. A dinâmica proposta são três portas que escondem prêmios, sendo apenas uma delas a com prêmio de maior valor. Então, o dilema propõe a mesma situação com um carro (prêmio de maior valor) e duas cabras (menor valor). Feita a escolha de uma das portas, o apresentador abre uma porta com a cabra e questiona o participante se ele mantém a escolha ou troca de porta.

Propomos a Atividade 4 no Encontro 12, realizado no dia 14 de junho de 2023. Na questão 1, estruturada em 4 etapas, propomos a realização desse jogo, nesse caso utilizando 3 copos escuros (para representar as portas), 2 animais de brinquedos (cabras) e 1 carrinho de brinquedo (carro). Antes, o pesquisador explicou as regras do jogo e realizou o jogo com os alunos, para que eles o realizassem depois com os colegas.

Já na segunda e terceira etapas, os alunos foram apresentados ao raciocínio de Marilyn vos Savant (1946 — presente) e questionados se esse raciocínio seria verdadeiro. Até que chegamos à quarta etapa, que envolvia listar as possibilidades do jogo para chegar a uma melhor estratégia de levar o prêmio. Assim, formalizamos o conceito de probabilidade de condicional.

Feita a formalização do cálculo de probabilidade condicional, os alunos aplicaram o conceito nas Questões 2 e 3. Após o término da Atividade 4, alguns questionamentos foram propostos aos alunos, com intuito de refletir, por meio HM, a percepção da Matemática, a saber:

Quadro 22 – Questionamentos propostos para o Momento 3

PERGUNTAS (dilema de Monty Hall)

1. O que vocês entenderam do dilema (ou jogo) de Monty Hall?
2. O que o dilema (ou jogo) de Monty Hall difere dos problemas/atividades resolvidos nas aulas anteriores?
3. Vocês conhecem nomes de matemáticos famosos? E se não citarem nenhuma mulher, então questionar: por que não falaram o nome de alguma mulher na Matemática?
4. No dia 12 de maio é comemorado o Dia Internacional das Mulheres na Matemática, em homenagem à Maryam Mirzakhani, primeira mulher a ganhar a Medalha Fields, a maior premiação que um pesquisador matemático pode ganhar. Como vocês imaginam serem as condições das mulheres na Matemática?
5. Vocês acham que os meninos se desempenham melhor a Matemática do que as meninas? Ou de maneira igual? Por quê?

Fonte: Autoria própria

Para encerrar o Momento 3, tendo em vista trabalhar com o conteúdo referente à probabilidade condicional, com o apoio do Problema dos Dados, assim como no momento anterior, propomos as Atividades de Revisão II (APÊNDICE f) para retomar os conteúdos até então trabalhados.

O Encontro 13, realizado no dia 26 de junho de 2023, foi dedicado à realização das Atividades de Revisão II, retomando os conteúdos referentes à probabilidade condicional, assim como a uma Atividade Final (APÊNDICE G), para obter um retorno sobre a proposta implementada.

Após realizar um panorama da implementação de nossa proposta didática apoiada em problemas históricos, apresentaremos, no capítulo a seguir, nossas compreensões sobre suas potencialidades e limitações pedagógicas.

5 CONTRIBUIÇÕES E LIMITAÇÕES DO ENSINO DE CONCEITOS DA PROBABILIDADE POR MEIO DE PROBLEMAS HISTÓRICOS

Neste capítulo, temos o propósito de discutir os dados produzidos segundo o referencial teórico. Para tanto, estruturamos sua escrita em duas partes, sendo a primeira nomeada “Indícios da História da Matemática para promover a Matemática”, na qual identificamos e analisamos as potencialidades pedagógicas deste eixo proposto; a segunda “Indícios da História da Matemática para construção do conhecimento matemático”, em que apresentamos as potencialidades pedagógicas deste eixo proposto; e, por fim, a terceira, “Obstáculos e dificuldades da implementação”, na qual identificamos e analisamos as dificuldades pedagógicas.

5.1 Indícios da História da Matemática para promover a Matemática

Conforme apresentado anteriormente, o eixo da HM para promover a Matemática foi proposto por Furinghetti (2019) que afirma que, para motivar os alunos, é preciso humanizar a Matemática. Para a autora com HM, isso é possível de duas maneiras:

> A primeira, que apresenta os matemáticos como pessoas; que torna uma experiência do aluno mais próxima com o mundo da Matemática. A segunda promove a comunicação e a interação em sala de aula; dá ao aluno a oportunidade de participar do convívio da turma com diferentes atitudes e capacidades. (Furinghetti, 2019, p. 13, tradução nossa)

Além disso, a autora destaca que outra forma de humanizar a Matemática é relacionar com o contexto cultural, especialmente o contexto em que os alunos vivem. Entendemos que este eixo da HM, promover a Matemática, está consoante com o tema cultural e motivacional proposto por Fried (2014), pois suas ideias centrais envolvem humanizar a Matemática, tornar sua abordagem afetiva e entender seu papel na sociedade.

Identificamos indícios para HM na promoção da Matemática nos questionamentos propostos, após desenvolvemos o Problema dos Pontos e o dilema de Monty Hall. A abordagem histórica contribuiu para: Humanizar a Matemática; evidenciar que não há grupos específicos predestinados a fazer matemática, como homens ou pessoas geniais; mostrar que o trabalho do matemático não é necessariamente solitário; mostrar a possibilidade de ter diversas soluções para um mesmo problema e ela ser aceita ou não depende do contexto/momento histórico;

apresentar a relevância dos problemas da matemática ou reais na construção do pensamento matemático.

Ressaltamos que os alunos se demonstraram receosos durante os questionamentos, então alguns responderam mais do que outros. Porém, de modo geral, eles se envolveram nas discussões propostas.

Em primeiro lugar, analisamos as contribuições da HM para promover a Matemática com os questionamentos propostos no Problema dos Pontos, trataremos de cada questão. A primeira questão teve como foco o entendimento dos alunos sobre a animação. Dessa forma, identificamos a presença deste eixo no Quadro 23:

Quadro 23 – Resposta para o primeiro questionamento do Momento 2

QUESTIONAMENTO	
O que vocês entenderam da animação?	
Resposta	**Agrupamento**
"Eu entendi que duas pessoas pensam melhor que uma. Tipo, você pode chegar com formas mais fáceis de resolver um problema do que pensando sozinho" (Ursa Major, informação verbal, encontro 9).	Mostrar que o trabalho do matemático não é necessariamente solitário

Fonte: Dados da pesquisa

A justificativa para trazer a fala de *Ursa Major* faz menção à Matemática como construção humana e à desmistificação da Matemática. *Ursa Major* apresenta uma perspectiva que ressalta a importância de Pascal e Fermat de terem trabalhado juntos na solução do problema, evidenciando que o trabalho do matemático não é necessariamente solitário. O Problema dos Pontos teve outras tentativas de solução pelos italianos Luca Pacioli (1445 – 1517) e Niccolo Fontana (1499 – 1557), conhecido por Tartaglia, mas foram os franceses Pascal e Fermat que solucionaram corretamente o problema por meio da troca de correspondências. Isso permite refletir que a Matemática não é uma ciência exata, mas sim uma ciência construída pela humanidade, sujeita a erros e desenvolvida a partir de tentativas de solucionar problemas (Lopes; Ferreira, 2013).

O segundo[13] é se os alunos reconhecem ambos os personagens da animação.

O terceiro tinha o objetivo de tratar aspectos referentes à construção do conhecimento matemático. Nesse momento, a sala se envolveu em uma discussão sobre o questionamento, os

[13] Como as respostas se limitaram à figura de Pascal e seu papel na Física, não destacamos nenhuma resposta pertinente a esse eixo.

alunos *Centaurus, Corvus e Cepheus* apresentaram suas opiniões, iniciando com *Centaurus,* conforme apresentado no Quadro 24:

Quadro 24 – Respostas para terceiro questionamento do Momento 2

QUESTIONAMENTO	
Vocês entendem que nessa troca de correspondências houve a produção do conhecimento matemático?	
Respostas	**Agrupamentos**
"Teve a discussão de ideias" (Centaurus informação verbal, encontro 9)	Mostrar a possibilidade de ter diversas soluções para um mesmo problema e ela ser aceita ou não depende do contexto/momento histórico; apresentar a relevância dos problemas da matemática ou reais na construção do pensamento matemático.
"*Teve discussão de novas ideias, mas também de vários pontos de vistas*" *(Corvus, informação verbal, encontro 9)*	
"Eles tinham que ver outros problemas, né... também pra ver se funcionava" (Cepheus informação verbal, encontro 9)	

Fonte: Dados da pesquisa

De início, todos os alunos afirmaram que houve a produção do conhecimento matemático, logo surgiram outras respostas e algumas se assemelhavam, por exemplo, os alunos *Centaurus* e *Corvus*, que se referiram aos diferentes casos e modos de solução explorados por Pascal e Fermat na troca de correspondências, apresentados no vídeo da UNIVESP. Entretanto, outro aluno, *Cepheus*, fez um contraponto ao se referir à generalização do problema, um aspecto importante da construção do conhecimento matemático, já que, na animação, são apresentados determinados casos, que é um aspecto importante da natureza do conhecimento da natureza da Matemática, apresentado por Tzanakis e colaboradores (2000) ao destacar que erros, incertezas e abordagens alternativas fazem parte da atividade matemática. Assim, o pesquisador respondeu para o aluno que, depois que Pascal propõe o teorema para o problema, outros modos de jogos também são explorados, como a divisão de apostas para 3 jogadores.

Outro questionamento que remonta à natureza da Matemática é a quarta questão sobre como os alunos entendem que o conhecimento matemático é produzido. Esses indícios foram encontrados nas respostas de:

Quadro 25 – Respostas para o quarto questionamento do Momento 2

QUESTIONAMENTO	
Como vocês entendem que o conhecimento matemático é produzido?	
Respostas dos alunos	**Agrupamento**

"A partir de um determinado raciocínio" (Corvus, informação verbal, encontro 9)	Apresentar a relevância dos problemas da matemática ou reais na construção do pensamento matemático.
"Com problemas também. Porque se tem algum problema, precisa resolver, é bom criar tal coisa pra poder resolver isso. Entende?" (Lepus, informação verbal, encontro 9)	
"Através de um problema, você precisa de uma solução." (Perseus informação verbal, encontro 9)	

Fonte: Dados da pesquisa

Após a reposta do aluno *Corvus*, o pesquisador questionou se seria apenas dessa forma e mais dois alunos, *Lepus* e *Perseus* complementaram a resposta. Nesse contexto, os alunos tiveram a oportunidade de refletir sobre os aspectos referentes à construção do conhecimento matemático e apresentar a relevância dos problemas da matemática (ou reais) na construção do pensamento matemático. Essas ideias estão coerentes com a que Mendes, Fossa e Valdés (2006) propõem, isto é: que um problema representa um contexto diferente e cada etapa possível é capaz de despertar a curiosidade sobre a resolução. Embora a Matemática possa partir de um determinado raciocínio ou da solução de um problema, ela está longe de não sofrer influências socioculturais ao longo do seu desenvolvimento histórico.

A próxima questão aborda os alunos sobre a solidão do trabalho do matemático e se existem discordâncias entre eles. Destacamos a resposta de *Corvus.*

Quadro 26 – Respostas para o quinto questionamento do Momento 2

QUESTIONAMENTO	
O trabalho do Matemático é solitário? Existem discordâncias entre os matemáticos?	
Resposta do aluno	**Agrupamento**
"Não, é porque ele começou com a ideia, os outros só foram dando sugestões de como ele poderia melhorar" (Corvus, informação verbal, encontro 9)	Mostrar que o trabalho do matemático não é necessariamente solitário; mostrar a possibilidade de ter diversas soluções para um mesmo problema e ela ser aceita ou não depende do contexto/momento histórico;

Fonte: Dados da pesquisa

Para a primeira parte todos disseram que não, já para segunda todos concordaram haver discordâncias entre os matemáticos. Nesse contexto, os alunos se referem às trocas de correspondências entre Pascal e Fermat como ilustrativas para a construção coletiva do conhecimento matemático, não se tratando, portanto, de algo solitário. Já para segunda parte, os alunos discutiram que, na animação, há três modos de solucionar o Problema dos Pontos. O pesquisador ainda questionou se o trabalho do matemático não é solitário, dizendo "por que alguns conceitos levam o nome apenas de um matemático?". Daí a resposta do aluno *Corvus*: uma situação semelhante ocorreu no Problema dos Pontos, tanto que antes da solução de Pascal e Fermat, Pacioli e Tartaglia já tinham tratado do problema, apesar de a solução de ambos estarem incorretas. Isso também indica haver discordâncias entre os matemáticos. Liu (2003) demonstra que a aceitação ou rejeição dos conteúdos da Matemática estão ligados às crenças sobre o que a Matemática deveria ser naquele contexto.

O sexto questionamento, como os alunos entendem que o conhecimento matemático surgiria, dos problemas da realidade ou da própria matemática. Essa pergunta incitou a discussão de *Perseus, Corvus, Cepheus e Ursa Major*, conforme apresentado no Quadro 27:

Quadro 27 – Respostas para o sexto questionamento do Momento 2

<table>
<tr><th colspan="2">QUESTIONAMENTO</th></tr>
<tr><td colspan="2">Vocês entendem que o conhecimento matemático surge dos problemas da realidade ou da própria Matemática?</td></tr>
<tr><th>Respostas dos alunos</th><th>Agrupamento</th></tr>
<tr><td>"Na realidade [...] do dia a dia." (Perseus, informação verbal, encontro 9)</td><td rowspan="4">Apresentar a relevância dos problemas da matemática ou reais na construção do pensamento matemático.</td></tr>
<tr><td>"Não, é dos dois." (Corvus, informação verbal, encontro 9)</td></tr>
<tr><td>"Um problema gera o outro, né?" (Cepheus, informação verbal, encontro 9)</td></tr>
<tr><td>"Porque você arruma um problema no dia a dia. Mas dentro do problema, quando você está solucionando ele matematicamente, você arruma outros problemas" (Ursa Major, informação verbal, encontro 9)</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa

São indícios que remetem a aspectos da construção do conhecimento matemático, assim como apresentam a relevância dos problemas na construção do pensamento matemático. E a velha questão: a Matemática é descoberta ou criada? Entendemos que a influência cultural exerce um papel fundamental na Matemática, mas que seu desenvolvimento também ocorre no abstrato, em sua forma, notações e modos de representação (Tzanakis *et al*. 2000).

Por fim, quando questionados se, ao longo da história, eles pensavam que somente pessoas dedicadas exclusivamente à disciplina produziram o conhecimento matemático, ou que ela seria feita apenas por pessoas geniais, tivemos em vista trabalhar no eixo de promoção da Matemática em uma perspectiva motivacional.

Quadro 28 – Respostas para o sétimo questionamento do Momento 2

<table>
<tr><th colspan="2">QUESTIONAMENTO</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ao longo da história, vocês acham que somente pessoas dedicadas exclusivamente a Matemática produziram o conhecimento matemático? A Matemática é feita apenas por pessoas geniais?</td></tr>
<tr><th>Respostas</th><th>Agrupamento</th></tr>
<tr><td>“Eu penso assim, sou um cara de Humanas e não sou chegado muito em Exatas. Mas ainda assim, eu consigo desenvolver um raciocínio matemático... Tipo, eu posso tentar (Ursa Major, informação verbal, encontro 13)</td><td rowspan="5">Evidenciar que não há grupos específicos predestinados a fazer matemática, como homens ou pessoas geniais</td></tr>
<tr><td>“Eu acho que a matemática, acho que tem gente sim que nasce para aquilo, porque, tipo, Gauss. Gauss encontrou a progressão lá, tipo, molecão de tudo. Até o professor pediu para ele fazer a soma de um a cem, lembra?” (Lepus, informação verbal, encontro 13)</td></tr>
<tr><td>“Acho que qualquer um pode formar um raciocínio. Na matemática, tipo, assim, acho que não precisa ser, tipo, um gênio para chegar a um... [raciocínio]” (Pegasus, informação verbal, encontro 13)</td></tr>
<tr><td>“Eu acho que não é assim, não é ser [gênio].... Não. Basta a pessoa querer e querer estudar também...” (Cassiopeia, informação verbal, encontro 13)</td></tr>
<tr><td>“O professor [nome docente] passou um trabalho para a gente sobre as mulheres, sabe? Mulheres, a importância das mulheres na matemática. Tinha umas mulheres especiais. Tinha uma mulher [Hipátia de Alexandria] que ela mexia com filosofia e com a matemática. Parecia que ela nasceu para isso, porque ela passou em uma faculdade [Academia de Alexandria]. Só que ela acabou morrendo porque achava que a matemática para ela era, sei lá, tipo, era bruxaria. Eu esqueci o nome. Ô, professor [questionando o professor regente de turma]” (Cepheus, informação verbal, encontro 13)</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa

O excerto de *Ursa Major* sugere que embora pessoas tenham habilidades para determinados conteúdos, isso não é um impeditivo para fazer Matemática. Tanto que os excertos de *Pegasus e Cassiopeia* corroboram com a ideia de que a Matemática não é uma atividade exclusiva dos gênios, há um esforço envolvido no processo. Essa observação é particularmente relevante porque, tal como apresenta Tzanakis e colaboradores (2000), a HM serviria para quebrar estereótipos.

Também houve alunos que destacam o papel daqueles ditos gênios, tal como exposto no seguinte excerto: *“Eu acho que a matemática, acho que tem gente sim que nasce para* *aquilo, porque, tipo, Gauss. Gauss encontrou a progressão lá, tipo, molecão de tudo. Até o professor pediu para ele fazer a soma de um a cem, lembra?" (Lepus, informação verbal, encontro 13).* A intenção também não é abominar as contribuições de pessoas de excelência na Matemática, mas esta não ser tida uma condição para o entendimento sobre o assunto.

Esses foram os indícios do eixo da HM para promoção da Matemática identificados no desenvolvimento do Problema dos Pontos. Em seguida, trataremos desses indícios identificados no dilema de Monty Hall, presente no Momento 3.

Os questionamentos propostos para o dilema de Monty Hall tiveram em vista dois primeiros questionamentos sobre a compreensão do conceito de probabilidade condicional. Nesse momento, os alunos reafirmaram o entendimento do dilema de Monty Hall e a importância de conhecer a "informação extra" e suas contribuições para a Probabilidade Condicional.

Assim, foram encontrados indícios de contribuições da HM sobre a promoção da Matemática, para desmistificá-la, assim como para além de grupos específicos como homens ou pessoas geniais

Já no terceiro questionamento, ao serem questionados sobre nomes de matemáticos famosos, os alunos fazem menções a Bháskara, Gauss, Pitágoras e, antes mesmo de o pesquisador prosseguir, *Scorpius* diz no Quadro 29:

Quadro 29 – Respostas para o terceiro questionamento do Momento 3

QUESTIONAMENTO	
Vocês conhecem nomes de matemáticos famosos? E se não citarem nenhuma mulher, então questionar: por que não falaram o nome de alguma mulher na Matemática?	
Respostas	**Agrupamento**
"Só [para falar] matemático ou pode ser matemática também? (Scorpius, informação verbal, informação verbal, encontro 13)"	Evidenciar que não há grupos específicos predestinados a fazer matemática, como homens ou pessoas geniais

Fonte: Dados da pesquisa

Antes mesmo de o pesquisador questionar sobre o papel das mulheres na Matemática alguns alunos citam Sofia Kovalevskaya e a Hipátia de Alexandria, estudadas por eles em virtude do professor regente, algo bastante incomum. Isso se refere a questões de gênero/imagem do cientista e da natureza da matemática e uma forma de evidenciar que não há grupos específicos predestinados a fazê-la, como homens ou pessoas geniais. Outra questão surge como apontado no Quadro 30:

Quadro 30 – Respostas para o quarto questionamento do Momento 3

QUESTIONAMENTO	
No dia 12 de maio é comemorado o Dia Internacional das Mulheres na Matemática, em homenagem à Maryam Mirzakhani, primeira mulher a ganhar a Medalha Fields, a maior premiação que um pesquisador matemático pode ganhar. Como vocês imaginam serem as condições das mulheres na Matemática?	
Respostas	**Agrupamento**
“Tem, mas os homens durante a história tinham mais oportunidades [de estudar] por conta da nossa a sociedade” (Pegasus, informação verbal, encontro 13)	Evidenciar que não há grupos específicos predestinados a fazer matemática, como homens ou pessoas geniais
"Com certeza tiveram mais mulheres, que tipo, contribuiu para a Matemática e não foi destacada por ser mulher ou não tiveram oportunidade” (Cepheus, informação verbal, encontro 13).	

Fonte: Dados da pesquisa

Cepheus propõe até uma situação hipotética na qual envolve seus colegas de turmas: na situação *Aquarius* saberia o teorema de Pitágoras e o ensinaria ao *Lepus* que teria mais reconhecimento, *Lepus* poderia se apropriar deste conhecimento e apagar o nome de *Aquarius*. *Cepheus*, então, complementa *“O mérito é dela [Aquarius], como na época tinha esse preconceito [com as mulheres], eles podiam chegar e falar que [o conhecimento apresentado por Lepus] não era dela [Aquarius] por ser mulher” (Cepheus, informação verbal, encontro 13).*

O pesquisador explica, então, seu pensamento, dizendo que pode ser que muitas mulheres tenham tido seus conhecimentos apropriados por homens justamente por elas não terem o devido reconhecimento na época delas. E, ao continuar para o quinto questionamento:

Quadro 31 – Respostas para o quinto questionamento do Momento 3

QUESTIONAMENTO	
Vocês acham que os meninos se desempenham melhor a Matemática do que as meninas? Ou de maneira igual? Por quê?	
Respostas	**Agrupamento**
“É porque, tipo assim, Engenheira Mecânica, as mulheres podem achar que não é lugar para elas. Elas meio que não entram por acharem serão excluídas. (Scorpius, informação verbal, encontro 13)”	Evidenciar que não há grupos específicos predestinados a fazer matemática, como homens ou pessoas geniais
Ela pode até gostar da área, mas não vai. Se você tiver entre [escolher] um mecânico homem ou	Evidenciar que não há grupos específicos predestinados a fazer

mulher, qual você vai? óbvio que no homem. (Virgo, informação verbal, encontro 13)"	matemática, como homens ou pessoas geniais

Fonte: Dados da pesquisa

Isso gera uma discussão autônoma entre *Scorpius e Pegasus*, na qual *Scorpius* declara o hipotético interesse das mulheres para às Ciências Humanas, em contraposição às Ciências Exatas: *"É porque, tipo assim, Engenheira Mecânica, as mulheres podem achar que não é lugar para elas. Elas meio que não entram por acharem serão excluídas. (Scorpius, informação verbal, encontro 13)"*

Virgo também entra no assunto *"Ela pode até gostar da área, mas não vai. Se você tiver entre [escolher] um mecânico homem ou mulher, qual você vai? óbvio que no homem. (Virgo, informação verbal, encontro 13)"*. Então, o pesquisador questiona, nessa mesma linha, se tiver um matemático homem e uma matemática mulher, esse raciocínio vale? Pois esse estereótipo seria bastante comum na área de Ciências Exatas.

No Quadro 32, apresentamos um quadro síntese dos indícios de contribuições da HM para promover a Matemática.

Quadro 32 – Síntese dos indícios da História da Matemática para promover a Matemática

	AGRUPAMENTOS
Questionamentos sobre o Problema dos Pontos	- Evidenciar que não há grupos específicos predestinados a fazer matemática, como homens ou pessoas geniais - Mostrar que o trabalho do matemático não é necessariamente solitário; mostrar a possibilidade de ter diversas soluções para um mesmo problema e ela ser aceita ou não depende do contexto/momento histórico - A presentar a relevância dos problemas da matemática ou reais na construção do pensamento matemático.
Questionamentos sobre o dilema de Monty Hall	- Evidenciar que não há grupos específicos predestinados a fazer matemática, como homens ou pessoas geniais

Fonte: Autoria própria

Compreendemos que a partir dos questionamentos houvera indícios de contribuições para a promoção da Matemática enquanto os alunos debateram e refletiriam sobre tais aspectos. Pelo fato de a discussão ser com a sala toda, como é habitual, alguns mais extrovertidos participaram mais, mas que houve uma participação da sala na totalidade.

Em seguida trataremos do outro eixo de análise da HM para a construção do conhecimento matemático.

5.2 Indícios da História da Matemática para a construção do conhecimento matemático

Conforme apresentado anteriormente, o eixo da HM para a construção do conhecimento matemático foi proposto por Furinghetti (2019), tendo em vista que ela pode promover a compreensão da disciplina ao abordar as raízes em torno das quais os conceitos se desenvolveram. Segundo a autora:

> Quando a Matemática é apresentada de forma polida e acabada, os alunos (tanto na escola como nos cursos de formação de professores) têm dificuldades em identificar as raízes cognitivas dos conceitos no magma de processos, conceitos e regras que têm à sua disposição. (Furinghetti, 2019, p. 13, tradução nossa).

Entendemos que esse eixo, promoção da Matemática, está consoante com o tema curricular proposto por Fried (2014), pois, com a HM podemos trabalhar problemas que levaram ao desenvolvimento da área de conhecimento, como o Problema dos Pontos no desenvolvimento da Teoria da Probabilidade. E as dificuldades apresentadas durante o processo histórico podem reaparecer em sala de aula.

Compreendemos que os indícios voltados para o eixo da HM, fundamentais para a construção do conhecimento matemático, podem ser identificados na realização das atividades propostas, e é a partir dessa perspectiva que analisamos a Atividade 1.

Os objetivos almejados pela atividade, tal como descritos em sua proposta, eram compreender o conceito de experimento aleatório, reconhecer e determinar um espaço amostral, entender o que caracteriza um evento, classificar eventos aleatórios como “impossível”, “certo” ou “elementar” e desenvolvê-los na resolução de problemas históricos. Para tanto, elaboramos duas questões. A primeira, voltada para o entendimento do experimento aleatório e seus conceitos básicos, e a segunda focada na aplicação desses conceitos no “Problema dos Dados”, resolvido por Galileu.

De modo geral, todos os alunos responderam à questão 1, desenvolvendo suas respostas a partir da primeira e segunda etapas propostas. Dos 27 alunos presentes, 21 finalizaram a atividade, enquanto outros 6 não completaram mais de 80%. A atividade foi realizada em grupos, e dados foram distribuídos para os alunos terem uma experiência mais dinâmica dos conceitos trabalhados.

A questão 1 propôs um jogo com dois dados reais de seis faces cada, desafiando os alunos a identificarem o resultado de maior probabilidade e justificarem em qual apostariam.

Nesse momento, três tipos de respostas foram observados. Um aluno optou por uma abordagem teórica da probabilidade, que consideramos satisfatória, tendo em vista o objetivo de estudar a noção de experimento aleatório sob a perspectiva teórica, considerando as possibilidades matemáticas do experimento. Conforme mostrado na Figura 5:

Figura 5 – Atividade 1 de *Canis Major* 1ª e 2ª Etapa da questão 1

ATIVIDADE 1

QUESTÃO 1 – Considere um jogo com **dois dados** honestos de 6 faces cada. Ao lançar os dados simultaneamente, o resultado será a soma de suas faces viradas para cima. Sendo assim, qual é o resultado de maior chance? Em qual soma você apostaria? Justifique.

7, porque se for considerar a ordem dos dados lançados a maior possibilidade de resultados aparecer é 7, sendo 6 combinações diferentes.

2-1 3-1 4-2 5-2 6-3 7-3 8-3 9.2 10.2 11-1 12-1

1ª Etapa: Vamos fazer alguns lançamentos.

Face do dado 1	*Face do dado 2*	*Resultado (soma)*
1	1	2
3	4	7
1	3	4
2	2	4
3	2	5
6	3	9
6	4	10
2	2	4
5	3	8
5	4	9

1.1 - 2, 1-2 = 3, 1-3 = 4, 1-4 = 5, 1-5 = 6, 1-6 = 7, 2-2 = 4, 2-3 = 5, 2-4 = 6, 2-5 = 7, 2-6 = 8

33=6, 34=7, 35=8, 36=9, 44=8, 45=9, 46=10, 55=10, 56=11, 66=12

2ª Etapa: Agora, vamos pensar a partir dos resultados e, assim, verificar as possibilidades de cada face dos dados para encontrarmos a soma.

Resultados (soma)	*Face do dado 1*	*Face do dado 2*	*Possibilidades*
2	1	1	(1,1) = 1
3	1,2	2,1	(1,2), (2,1) = 2
4	1,2,3	1,2,3	(1,3), (3,1), (2,2) = 3
5	1,2,3,4	1,2,3,4	(1,4), (4,1), (2,3), (3,2) = 4
6	1,2,3,4,5	1,2,3,4,5	(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3) = 5
7	1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,5,6	(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3) = 6
8	2,3,4,5,6	2,3,4,5,6	(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4) = 5
9	3,4,5,6	3,4,5,6	(3,6), (6,3), (4,5), (5,4) = 4
10	4,5,6	4,5,6	(4,6), (6,4), (5,5) = 3
11	5,6	5,6	(5,6), (6,5) = 2
12	6	6	(6,6) = 1

Fonte: Dados da pesquisa

Outros 18 alunos optaram por uma perspectiva frequentista, fundamentando suas respostas nas frequências observadas durante a execução do experimento com os dados, conforme ilustrado na seguinte Figura 6

Figura 6 – Atividade 1 de *Orion* 1ª e 2ª Etapa da questão 1

ATIVIDADE 1

QUESTÃO 1 – Considere um jogo com **dois dados** honestos de 6 faces cada. Ao lançar os dados simultaneamente, o resultado será a soma de suas faces viradas para cima. Sendo assim, qual é o resultado de maior chance? Em qual soma você apostaria? Justifique.

A maior chance de resultado seria 7, pois atráves da soma e o lançamento simultaneo é o número que mais aparece.

1ª Etapa: Vamos fazer alguns lançamentos.

Face do dado 1	*Face do dado 2*	*Resultado (soma)*
2	1	3
6	1	7
6	1	7
6	6	12
3	6	9
5	6	11
5	3	8
4	2	6
6	3	9
2	2	4

2ª Etapa: Agora, vamos pensar a partir dos resultados e, assim, verificar as possibilidades de cada face dos dados para encontrarmos a soma.

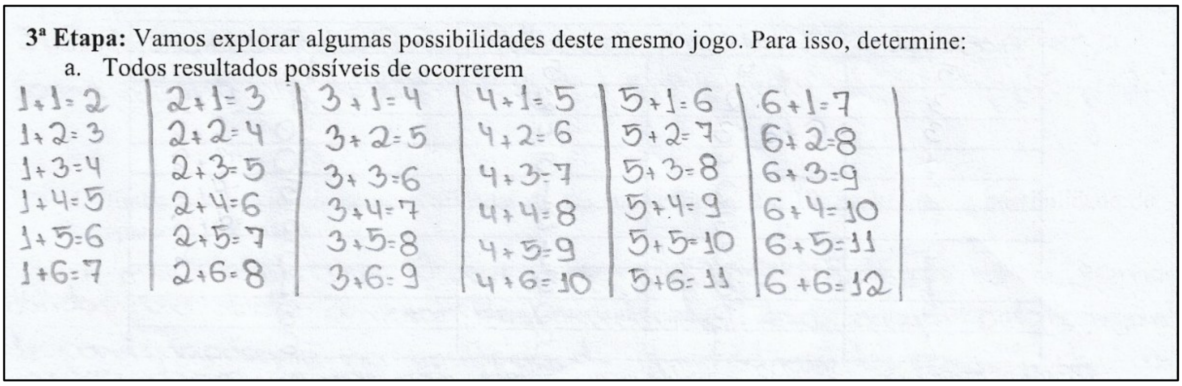
Resultados (soma)	*Face do dado 1*	*Face do dado 2*	*Possibilidades*
1	x	x	x
2	1	1	(1,1)
3	2	1	(2,1)
4	2	2	(2,2)(3,1)
5	3	2	(3,2)(4,1)
6	3	3	(3,3)(2,4)(5,1)
7	3	4	(3,4)(5,2)(6,1)
8	4	4	(4,4)(6,2)(5,3)
9	6	3	(6,3)(5,4)
10	5	5	(5,5)(6,4)
11	6	5	(6,5)
12	6	6	(6,6)

Fonte: Dados da pesquisa

Apesar de não terem respondido diretamente à questão, dois alunos participaram das atividades dinâmicas. O objetivo da primeira questão era, em essência, compreender o conceito de experimento aleatório, destacando que o resultado de tais experimentos depende sempre do acaso. Verificamos que os alunos utilizaram diferentes perspectivas de probabilidade — uma mais teórica e outra mais baseada na frequência —, evidenciando a diversidade de abordagens possíveis, sem haver uma resposta única, como pudemos observar em atividades anteriores.

Na sequência, a terceira etapa da atividade tinha como foco o desenvolvimento de alguns conceitos fundamentais da probabilidade. O exercício (a) buscava avaliar a capacidade dos alunos de compreender e definir um espaço amostral. Dos 21 alunos, 14 atingiram o objetivo ao evidenciar corretamente todos os elementos do espaço amostral, como mostrado na figura 7:

Figura 7 – Atividade 1 de *Orion* 3ª Etapa exercício (a)



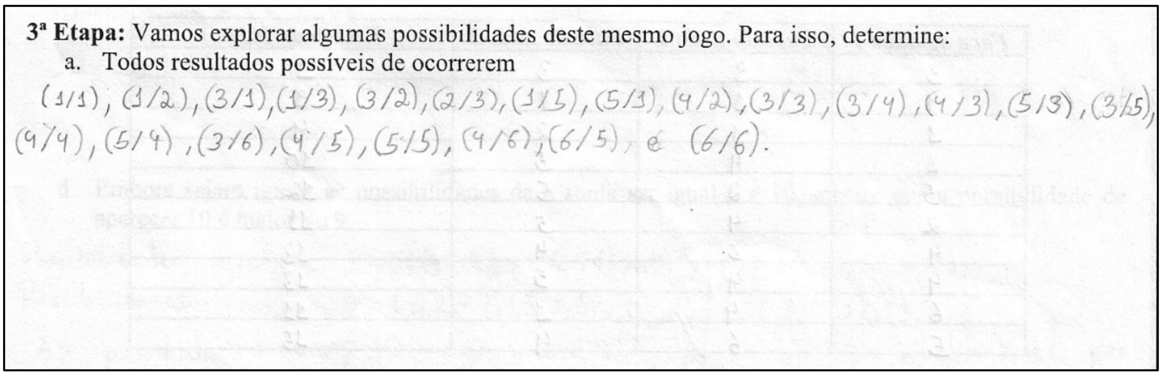
3ª Etapa: Vamos explorar algumas possibilidades deste mesmo jogo. Para isso, determine:
a. Todos resultados possíveis de ocorrerem

1+1=2	2+1=3	3+1=4	4+1=5	5+1=6	6+1=7
1+2=3	2+2=4	3+2=5	4+2=6	5+2=7	6+2=8
1+3=4	2+3=5	3+3=6	4+3=7	5+3=8	6+3=9
1+4=5	2+4=6	3+4=7	4+4=8	5+4=9	6+4=10
1+5=6	2+5=7	3+5=8	4+5=9	5+5=10	6+5=11
1+6=7	2+6=8	3+6=9	4+6=10	5+6=11	6+6=12

Fonte: Dados da pesquisa

Entretanto, 7 alunos não conseguiram desenvolver adequadamente essa noção:

Figura 8 – Atividade de *Scorpius* 3ª Etapa exercício (a)

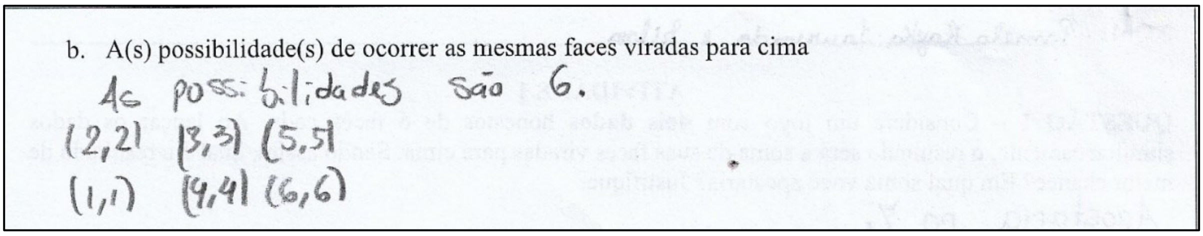


3ª Etapa: Vamos explorar algumas possibilidades deste mesmo jogo. Para isso, determine:
a. Todos resultados possíveis de ocorrerem
(1/1), (1/2), (3/1), (1/3), (3/2), (2/3), (1/5), (5/1), (4/2), (3/3), (3/4), (4/3), (5/3), (3/5), (4/4), (5/4), (3/6), (4/5), (5/5), (4/6), (6/5), e (6/6).

Fonte: Dados da pesquisa

O exercício (b), por sua vez, abordava a noção de evento. Consideramos que 14 alunos atingiram o objetivo, ao identificarem corretamente os eventos propostos, como (1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6), que representam a ocorrência das mesmas faces voltadas para cima, conforme ilustrado a seguir:

Figura 9 – Atividade 1 de *Aquarius* 3ª Etapa exercício (b)


b. A(s) possibilidade(s) de ocorrer as mesmas faces viradas para cima

As possibilidades são 6.

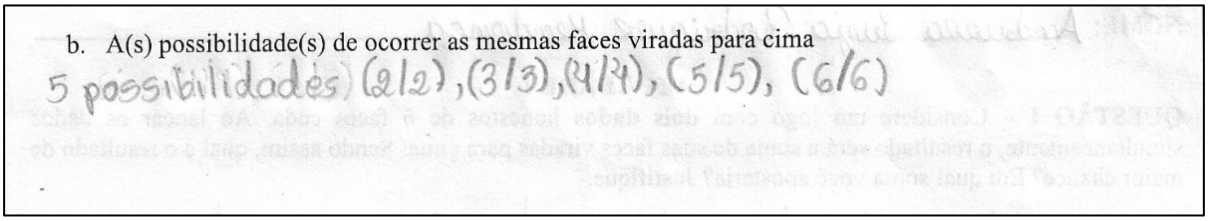
(2,2) (3,3) (5,5)

(1,1) (4,4) (6,6)

Fonte: Dados da pesquisa

Por outro lado, 7 alunos não desenvolveram essa noção de maneira satisfatória:

Figura 10 – Atividade 1 de *Leo* 3ª Etapa exercício (b)

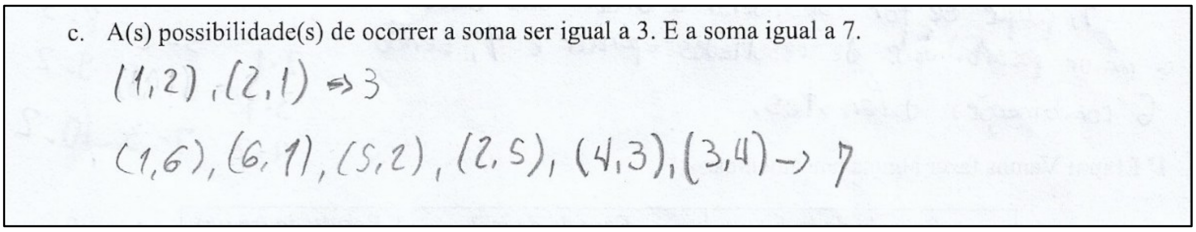

b. A(s) possibilidade(s) de ocorrer as mesmas faces viradas para cima

5 possibilidades (2/2),(3/3),(4/4),(5/5),(6/6)

Fonte: Dados da pesquisa

Outra questão relacionada à noção de evento foi a (c), na qual 12 alunos responderam corretamente:

Figura 11 – Atividade 1 de *Canis Major* 3ª Etapa exercício (c)


c. A(s) possibilidade(s) de ocorrer a soma ser igual a 3. E a soma igual a 7.

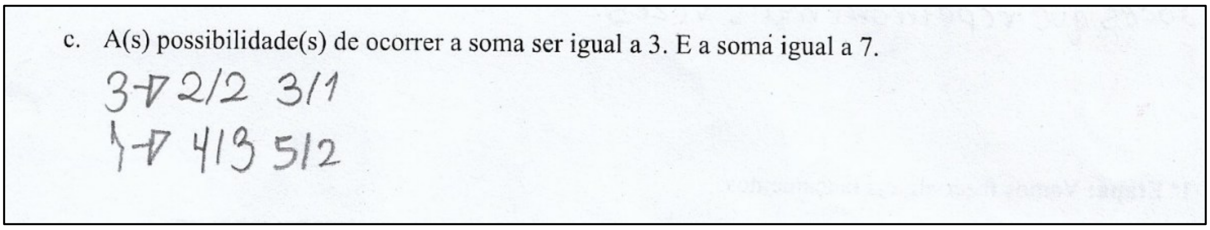
(1,2),(2,1) ⇒ 3

(1,6),(6,1),(5,2),(2,5),(4,3),(3,4) -> 7

Fonte: Dados da pesquisa

No entanto, 9 alunos não conseguiram desenvolver corretamente o conceito nessa questão:

Figura 12 – Atividade 1 de *Auriga* 3ª Etapa exercício (c)


c. A(s) possibilidade(s) de ocorrer a soma ser igual a 3. E a soma igual a 7.

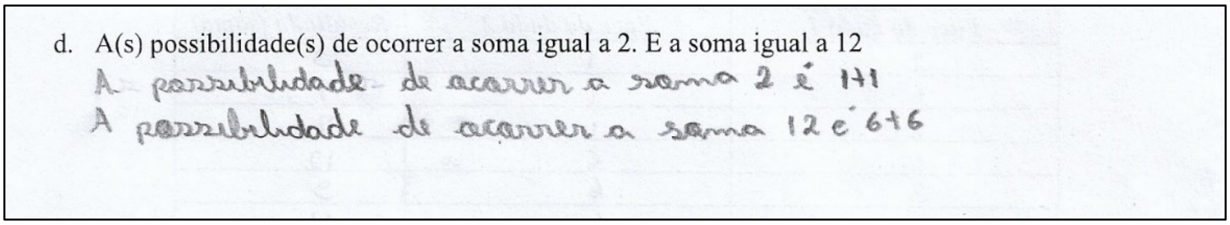
3 → 2/2 3/1

7 → 4/3 5/2

Fonte: Dados da pesquisa

O exercício (d), voltado para a análise de tipos específicos de eventos, foi respondidp corretamente por todos os 21 alunos:

Figura 13 – Atividade 1 de *Ara* 3ª Etapa exercício (d)


d. A(s) possibilidade(s) de ocorrer a soma igual a 2. E a soma igual a 12

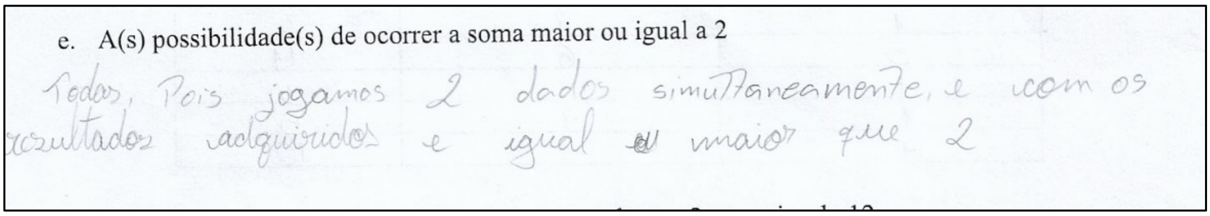
A possibilidade de ocorrer a soma 2 é 1+1

A possibilidade de ocorrer a soma 12 é 6+6

Fonte: Dados da pesquisa

Já o exercício (e), que também tratava de tipos específicos de eventos, foi desenvolvido corretamente por 11 alunos:

Figura 14 – Atividade 1 de *Aries* 3ª Etapa exercício (e)

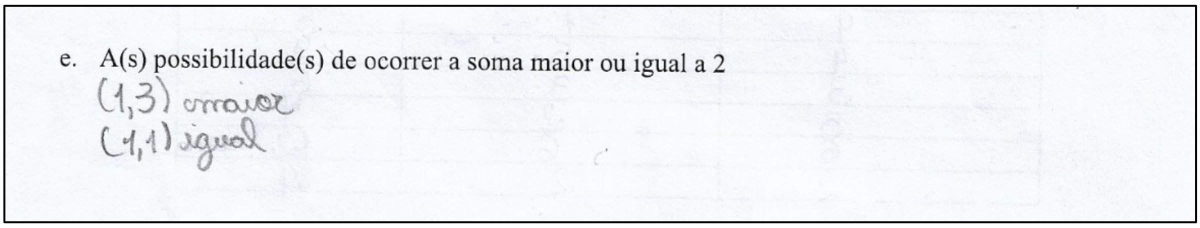

e. A(s) possibilidade(s) de ocorrer a soma maior ou igual a 2

Todos, Pois jogamos 2 dados simultaneamente, e com os resultados adquiridos e igual ~~ou~~ maior que 2

Fonte: Dados da pesquisa

Por outro lado, 10 alunos não conseguiram atingir o objetivo esperado:

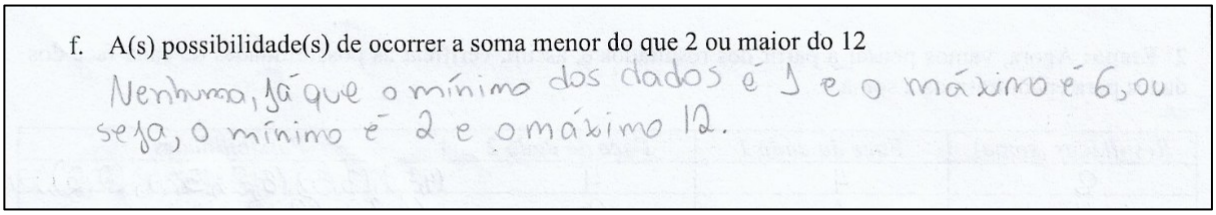
Figura 15 – Atividade 1 de *Libra* 3ª Etapa exercício (e)


e. A(s) possibilidade(s) de ocorrer a soma maior ou igual a 2
(1,3) maior
(1,1) igual

Fonte: Dados da pesquisa

Por fim, o exercício (f), que também abordava tipos específicos de eventos, apresentou apenas 7 alunos com a resposta correta:

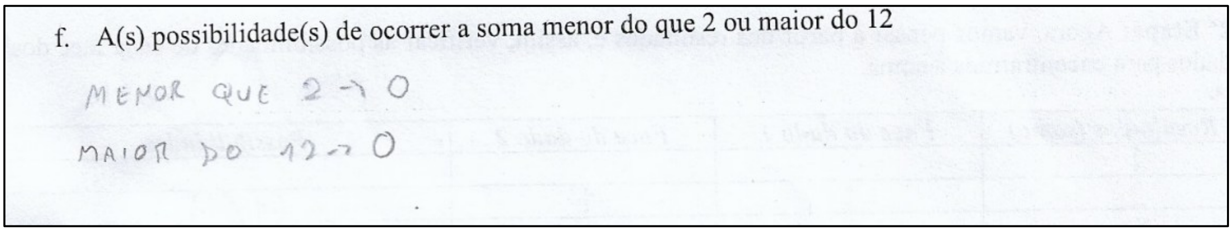
Figura 16 – Atividade 1 de *Virgo* 3ª Etapa exercício (f)


f. A(s) possibilidade(s) de ocorrer a soma menor do que 2 ou maior do 12
Nenhuma, já que o mínimo dos dados é 1 e o máximo é 6, ou seja, o mínimo é 2 e o máximo 12.

Fonte: Dados da pesquisa

Os outros 14 alunos não desenvolveram a questão conforme esperado, não apresentando justificativa adequada:

Figura 17 – Atividade 1 de *Lepus* 3ª Etapa exercício (f)


f. A(s) possibilidade(s) de ocorrer a soma menor do que 2 ou maior do 12
MENOR QUE 2 → 0
MAIOR DO 12 → 0

Fonte: Dados da pesquisa

Na questão 2, foi trabalhado o Problema dos Dados propriamente dito, estruturado em três etapas, cujo objetivo era aplicar os conceitos abordados anteriormente para resolver o problema. De maneira geral, 18 alunos adotaram uma abordagem frequentista, como apresentado:

Figura 18 – Atividade 1 de *Virgo* 1ª e 2ª Etapa da questão 2

QUESTÃO 2 – Agora, vamos acrescentar **mais um dado** honesto neste jogo. Nesse caso, o jogo com **três dados** de 6 faces cada são lançados simultaneamente e tem como resultado a soma das três faces viradas para cima. Novamente, em qual resultado você apostaria? De 10 jogadas, 3 vezes o resultado foi 8 e, 3 vezes foi 10.
Apostaria no 8 e no 10, já que a soma das três faces viradas, em maior chance de cair esses números.

1ª Etapa: Vamos fazer alguns lançamentos.

Face do dado 1	*Face do dado 2*	*Face do dado 3*	*Resultado (soma)*
2	1	5	8
6	6	3	15
2	5	3	10
2	4	6	12
1	1	6	8
5	3	2	10
4	5	2	11
6	2	2	10
6	3	3	12
6	1	1	8

2ª Etapa: Agora, vamos pensar a partir dos resultados e, assim, verificar as possibilidades de cada face dos dados para encontrarmos a soma.

Resultados (soma)	*Face do dado 1*	*Face do dado 2*	*Face do dado 3*	*Possibilidades*
7	1	2	4	(1,2,4),(1,1,5),(3,3,1)
14	3	5	6	(3,5,6),(6,6,2),(5,5,4)
12	5	5	2	(5,5,2),(6,3,3),(5,4,3)
16	6	6	4	(6,6,4),(5,5,6)
15	4	5	6	(4,5,6),(5,5,5)
9	6	2	1	(6,2,1)
10	1	4	5	(1,4,5),(6,2,2)
3	1	2	2	(1,2,2)
13	3	4	6	(3,4,6),
8	5	2	1	(5,2,1)
11	2	4	5	(2,4,5)
6	1	2	3	(1,2,3),(2,2,2),(4,1,1)
5	1	2	2	(1,2,2),(3,1,1)
18	6	6	6	(6,6,6)
17	6	6	5	(6,6,5)
4	1	1	2	(1,1,2)

Fonte: Dados da pesquisa

Três alunos não responderam diretamente à questão, mas participaram das atividades práticas. Na terceira etapa, 5 alunos desenvolveram corretamente os conceitos, conforme ilustrado nas figuras:

Figura 19 – Atividade 1 de *Cassiopeia* 3ª Etapa da questão 2

3ª Etapa: Vamos explorar algumas possibilidades deste mesmo jogo. Para isso, determine:

a. A(s) possibilidade(s) de ocorrer a soma ser igual a 3. E a soma ser igual a 18

3 -> (1,1,1)

18 -> (6,6,6)

b. A(s) possibilidade(s) de ocorrer a soma ser igual 6. E a soma ser igual a 7

7 -> (2,3,2), (1,3,3)

6 -> (1,3,2), (2,2,2)

c. A(s) possibilidade(s) de ocorrer a soma ser igual 9. E a soma ser igual a 10.

9 -> (5,2,2), (3,2,4), (3,3,3), (1,3,5), (6,2,1), (4,4,1)

10 -> (4,4,2), (4,5,1), (2,5,3), (3,4,3), (1,6,3), (2,2,6)

d. Embora sejam iguais as possibilidades de a soma ser igual 9 e 10, mostre que a possibilidade de aparecer 10 é maior do 9. A possibilidade de sair 10 tem a maior chance, porque tem outras formas para dar esse resultado.

E a possibilidade do 9 é única porque (3,3,3) = 9 e por isso tem menos chance.

Fonte: Dados da pesquisa

Segundo o professor regente de turma, *Cassiopeia* sempre teve dificuldades com a Matemática, no entanto, durante a proposta, demonstrou bastante interesse na participação da Atividade 1, tanto que se sentiu animada em aprender Matemática novamente. *"Estou com vontade novamente de ser professora de Matemática (Cassiopeia, informação verbal, encontro 3).* Assim, retomando o entendimento de Furinghetti (2019) de que esses dois eixos propostos não são antagônicos, em alguns casos, podem ser complementares.

Outra resposta bastante detalhada foi de *Orion,* exemplificada na Figura 20:

Figura 20 – Atividade 1 de *Orion* 3ª Etapa da questão 2

3ª Etapa: Vamos explorar algumas possibilidades deste mesmo jogo. Para isso, determine:

a. A(s) possibilidade(s) de ocorrer a soma ser igual a 3. E a soma ser igual a 18

A possibilidade de ocorrer a soma igual a 3 será de apenas 1, sendo assim: 1+1+1. Já a possibilidade de ocorrer a soma igual à 18 será também de 1 sendo: 6+6+6.

b. A(s) possibilidade(s) de ocorrer a soma ser igual 6. E a soma ser igual a 7

A possibilidade de ocorrer a soma igual a 6 será de apenas 3, sendo assim: 2+2+2, 3+2+1, 4+1+1. Já a possibilidade de ocorrer a soma igual a 7 será de apenas 4, sendo assim: 3+2+2, 3+3+1, 4+2+1, 5+1+1.

c. A(s) possibilidade(s) de ocorrer a soma ser igual 9. E a soma ser igual a 10.

A possibilidade de ocorrer a soma igual a 9 será de: 4+3+2, 3+3+3, 5+3+1, 6+2+1, 5+2+2, 4+4+1. Já a possibilidade de ocorrer a soma igual a 10 será de: 4+4+2, 3+2+5, 3+3+4, 6+3+1, 5+4+1, 6+2+2.

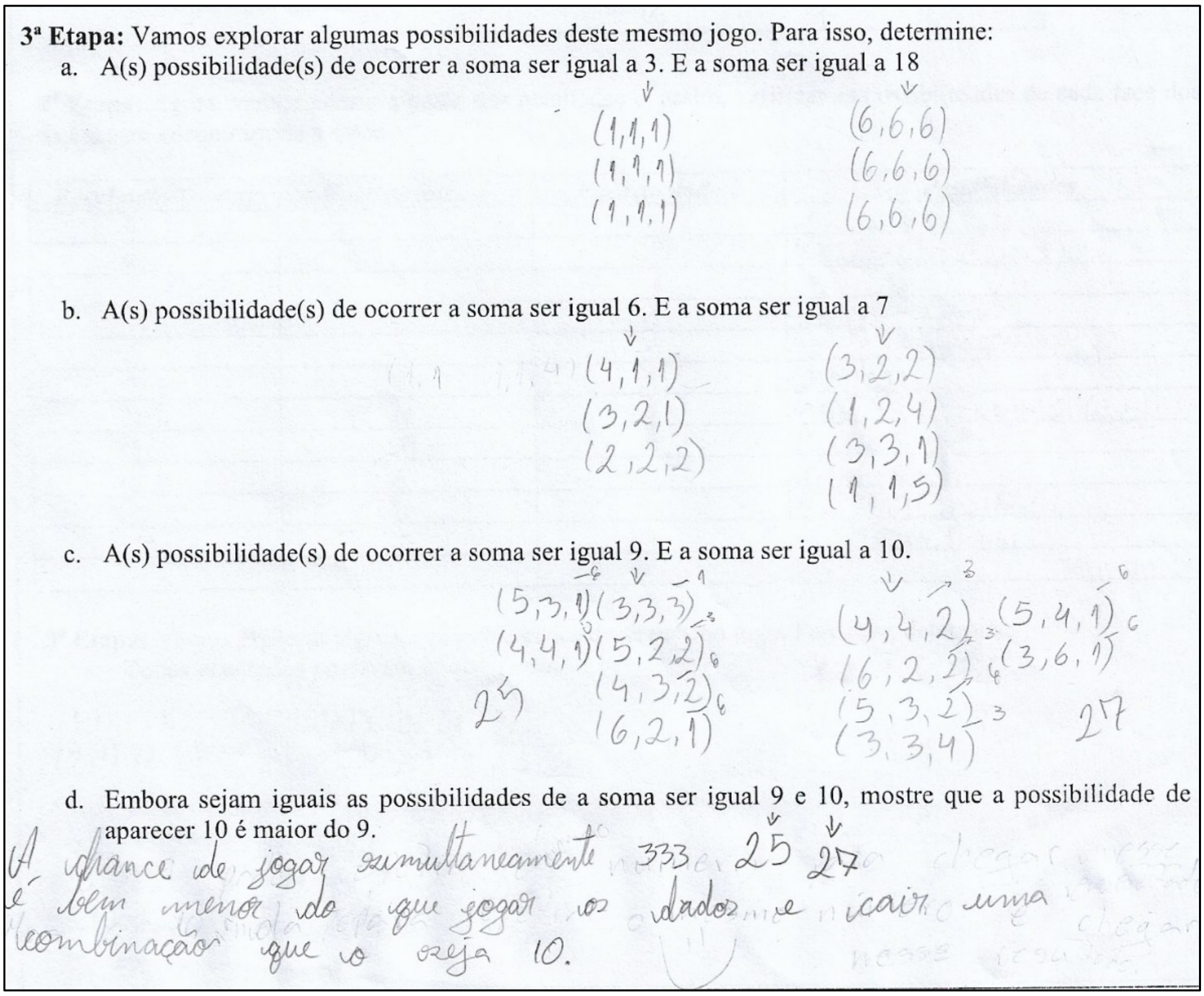
d. Embora sejam iguais as possibilidades de a soma ser igual 9 e 10, mostre que a possibilidade de aparecer 10 é maior do 9.

A possibilidade do 10 ser maior que 9, será pois diante das somas obtidas pelo dado o valor dos resultados dará maior pelo conjunto de combinações, já no resultado do 9 as somas dos conjunto das combinações daria menor por ter a repetição de 3 números iguais.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na resposta da Atividade 1, *Aries* chega a calcular até o número de possibilidades das combinações. Como exposto a seguir:

Figura 21 – Atividade 1 de *Aries* 3ª Etapa da questão 2



3ª Etapa: Vamos explorar algumas possibilidades deste mesmo jogo. Para isso, determine:

a. A(s) possibilidade(s) de ocorrer a soma ser igual a 3. E a soma ser igual a 18

(1,1,1) (6,6,6)
(1,1,1) (6,6,6)
(1,1,1) (6,6,6)

b. A(s) possibilidade(s) de ocorrer a soma ser igual 6. E a soma ser igual a 7

(4,1,1) (3,2,2)
(3,2,1) (1,2,4)
(2,2,2) (3,3,1)
(1,1,5)

c. A(s) possibilidade(s) de ocorrer a soma ser igual 9. E a soma ser igual a 10.

(5,3,1) (3,3,3) (4,4,2) (5,4,1)
(4,4,1) (5,2,2) (6,2,2) (3,6,1)
25 (4,3,2) (5,3,2) 27
(6,2,1) (3,3,4)

d. Embora sejam iguais as possibilidades de a soma ser igual 9 e 10, mostre que a possibilidade de aparecer 10 é maior do 9.

A chance de jogar simultaneamente ~~333~~ 25 27
é bem menor do que jogar os dados e cair uma
combinação que o seja 10.

Fonte: Dados da pesquisa

Durante as discussões sobre os resultados, um aluno, *Canis Major*, foi solicitado a compartilhar seu raciocínio. Ao explicá-lo, ele demonstrou certa dificuldade na articulação entre as relações dos dados e dos números sorteados:

> Beleza, o resultado 9, no caso, tem uma possibilidade de que, ao sortear 3 dados, ele consegue… cair 3 números iguais e dar o resultado o (3, 3, 3) e isso meio que tira a possibilidade de… ah, não sei explicar. Porque o 10 não pode sortear 3 números iguais e sair 10 (Canis Major, informação verbal, encontro 3).

Além disso, surgiram dúvidas entre os alunos sobre diferentes anotações matemáticas para denotar o símbolo de espaço amostral. Contudo, o diálogo foi interrompido devido a uma solicitação da direção para uma reunião com os alunos, o que resultou na conclusão da aula.

De modo geral, entendemos que os objetivos da Atividade 1 foram comtemplados em relação aos conteúdos da Probabilidade, como experimento aleatório, espaço amostral, eventos e seus tipos, bem como o desenvolvimento destes conceitos na solução do problema histórico.

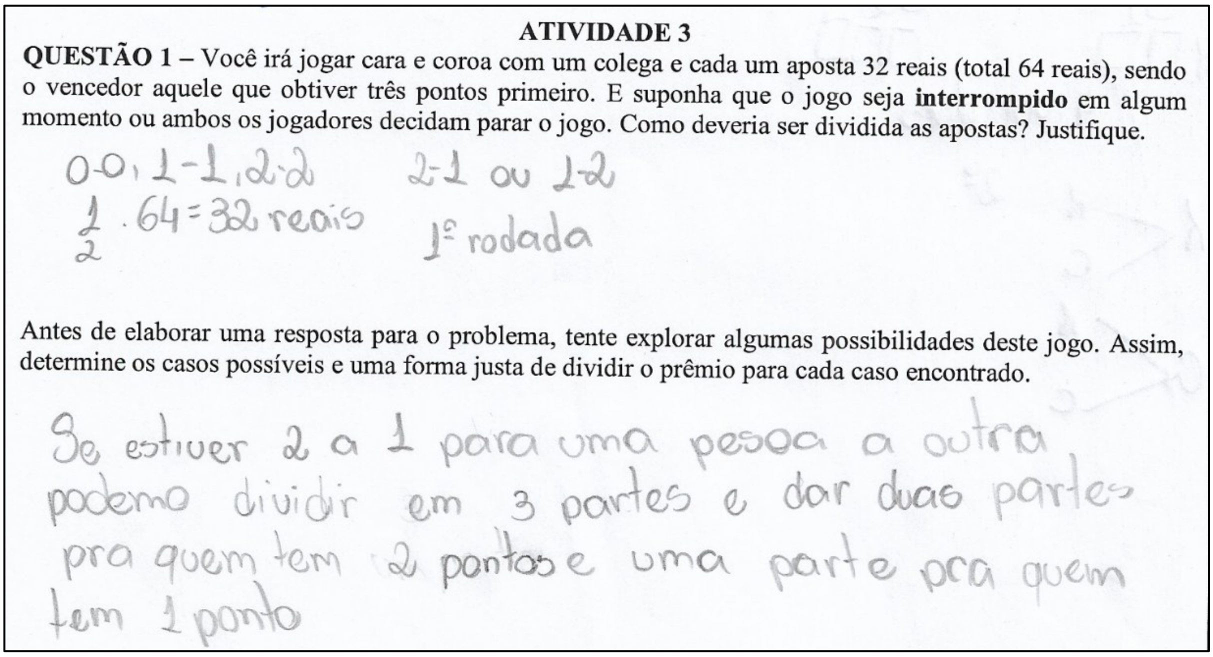
Na análise da Atividade 2, observamos que, dos 27 alunos presentes, 22 completaram pelo menos 80% das questões, enquanto 5 não atingiram esse percentual. A atividade foi elaborada com base nas referências utilizadas pelos alunos, abordando situações que exigiam a aplicação de conceitos fundamentais de probabilidade. Seu principal objetivo era reforçar os seguintes tópicos: reconhecimento e determinação de espaço amostral, compreensão do que caracteriza um evento, classificação de eventos aleatórios (como "impossível", "certo" ou "elementar"), além do cálculo de probabilidades. Os alunos também foram incentivados a calcular a probabilidade de um evento ocorrer, da união de eventos nas formas fracionária, decimal e percentual, bem como a probabilidade complementar, ou seja, a chance de um evento não ocorrer.

A atividade foi desenvolvida em sala, com o acompanhamento direto do professor pesquisador, de modo que suas respostas não serão analisadas quanto à correção, pois o foco era a retomada dos conceitos em conjunto com o docente. Por esse motivo, não faremos distinção entre respostas certas ou erradas. É importante ressaltar que quatro alunos não realizaram a atividade.

Na análise da Atividade 3, observamos que, dos 25 alunos presentes, 13 completaram a atividade integralmente, enquanto outros 12 não completaram mais de 80%. Essa atividade focava diretamente no "Problema dos Pontos", uma questão histórica que marca o início do estudo da Probabilidade. A proposta da atividade buscava reforçar a compreensão dos alunos sobre os principais conceitos abordados até o momento, tais como reconhecer e determinar um espaço amostral, compreender o que caracteriza um evento, calcular a probabilidade de um evento ocorrer (nas formas fracionária, decimal e percentual), bem como calcular a probabilidade de um evento não ocorrer. Além disso, o objetivo era desenvolver esses conceitos na resolução de problemas históricos.

Durante a realização da atividade, os alunos inicialmente sugeriram que os jogadores poderiam dividir o prêmio pela metade, sem levar em conta quem havia feito mais ou menos pontos. No entanto, o pesquisador questionou se essa estratégia permanecia justa em casos em que o resultado era claramente favorável a um jogador. Com base nesse questionamento, 4 alunos propuseram uma solução alternativa, sugerindo que seria mais justo dividir o prêmio proporcionalmente, conforme o número de pontos de cada jogador. Por exemplo, em um placar de 3-2, o primeiro jogador ficaria com três partes do prêmio e o segundo com duas, como ilustrado na imagem a seguir:

Figura 22 – Atividade 3 de *Sagittarius*


ATIVIDADE 3

QUESTÃO 1 – Você irá jogar cara e coroa com um colega e cada um aposta 32 reais (total 64 reais), sendo o vencedor aquele que obtiver três pontos primeiro. E suponha que o jogo seja **interrompido** em algum momento ou ambos os jogadores decidam parar o jogo. Como deveria ser dividida as apostas? Justifique.

0-0, 1-1, 2-2   2-1 ou 1-2

$\frac{1}{2} \cdot 64 = 32$ reais   1º rodada

Antes de elaborar uma resposta para o problema, tente explorar algumas possibilidades deste jogo. Assim, determine os casos possíveis e uma forma justa de dividir o prêmio para cada caso encontrado.

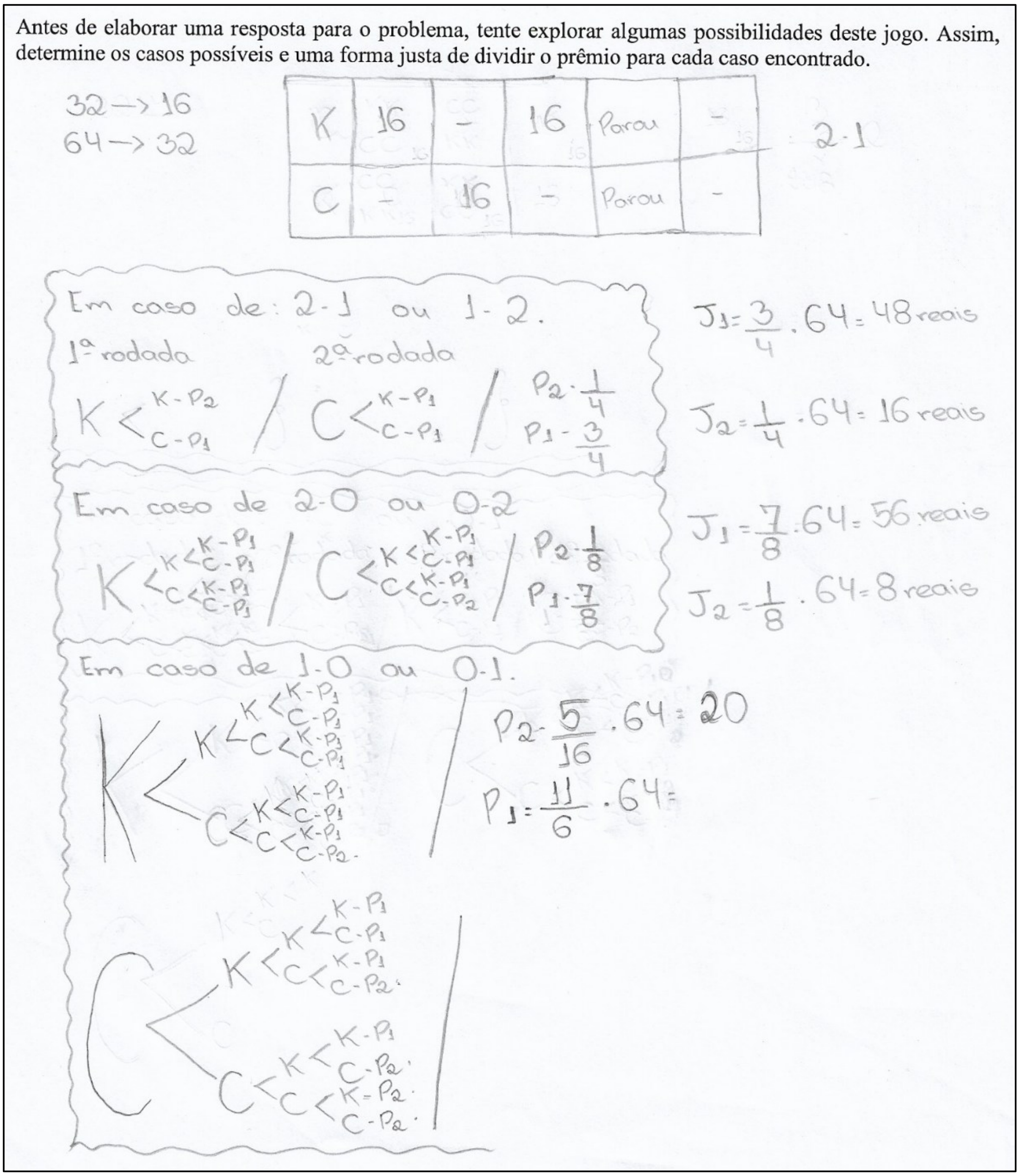
Se estiver 2 a 1 para uma pessoa a outra podemo dividir em 3 partes e dar duas partes pra quem tem 2 pontos e uma parte pra quem tem 1 ponto

Fonte: Dados da pesquisa

Essa proposta é interessante, porque remete às primeiras tentativas de solução para o Problema dos Pontos, desenvolvidas pelos italianos Luca Pacioli (1445-1517) e Niccolò Fontana (1499-1557), conhecido como Tartaglia. Na época, essa abordagem foi considerada adequada, embora posteriormente matemáticos como Blaise Pascal e Pierre de Fermat tenham introduzido uma solução mais justa, mostrando que a matemática evolui e que consensos podem ser alterados com o tempo.

Em seguida, o pesquisador questionou os alunos se a estratégia de divisão proporcional seria justa em casos extremos, como 2-0 ou 1-0. Mesmo assim, os alunos mantiveram a sugestão de dividir proporcionalmente o prêmio. Para aprofundar a discussão, o pesquisador introduziu o uso de uma árvore de possibilidades, a fim de explicitar o espaço amostral dos diferentes cenários do Problema dos Pontos. Esse recurso auxiliou os alunos a visualizarem de maneira mais clara as diferentes possibilidades e a divisão de apostas em outras situações problema. Ao fim da aula, 9 alunos conseguiram resolver a questão conforme o esperado, utilizando a solução histórica para o problema, como apresentado no exemplo a seguir:

Figura 23 – Atividade 3 de *Orion*



Fonte: Dados da pesquisa

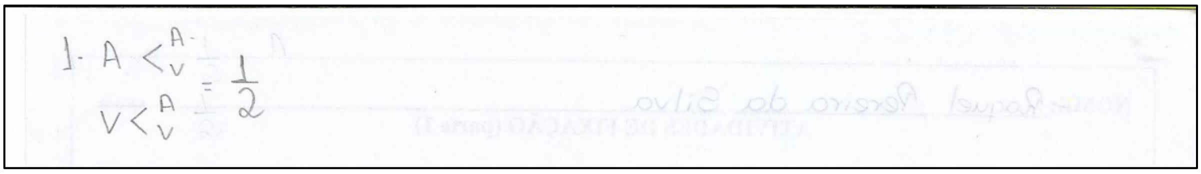
Essas respostas são significativas, pois evidenciam a conexão dos alunos com os obstáculos enfrentados por matemáticos no passado, que também encontraram dificuldades ao desenvolver soluções para o Problema dos Pontos. A primeira solução, sugerida por Pacioli e Tartaglia, foi considerada adequada na época, mas a matemática continuou a se desenvolver, mostrando que o consenso pode mudar à medida que novos métodos são descobertos. Esse processo ressalta a importância de compreender a HM, não apenas para resolver problemas contemporâneos, mas também para entender como os obstáculos do passado ajudam a moldar o pensamento matemático atual, como discutido por autores como Agterberg, Oostdam e Janssen (2022) e Liu (2003).

De modo geral, entendemos que os objetivos da Atividade 3 foram comtemplados em relação aos conteúdos da Probabilidade, como cálculo de probabilidade, bem como o desenvolvimento deste conceito na solução do problema histórico.

Na análise das Atividades de Revisão (parte 1), dos 23 alunos presentes, 14 completaram todas as atividades, enquanto 9 não as finalizaram. A atividade foi elaborada como uma revisão dos conceitos trabalhados nas aulas anteriores, com o objetivo de reforçar a compreensão sobre o reconhecimento e a determinação de um espaço amostral, a caracterização de eventos e o cálculo da probabilidade de um evento ocorrer nas formas fracionária, decimal e percentual, além da probabilidade de eventos em um espaço amostral.

As questões 1 e 2 foram focadas nos conceitos de experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos. A questão 1 foi retirada da proposta de Moraes (2014) e foi respondida corretamente por 6 alunos, conforme a imagem a seguir:

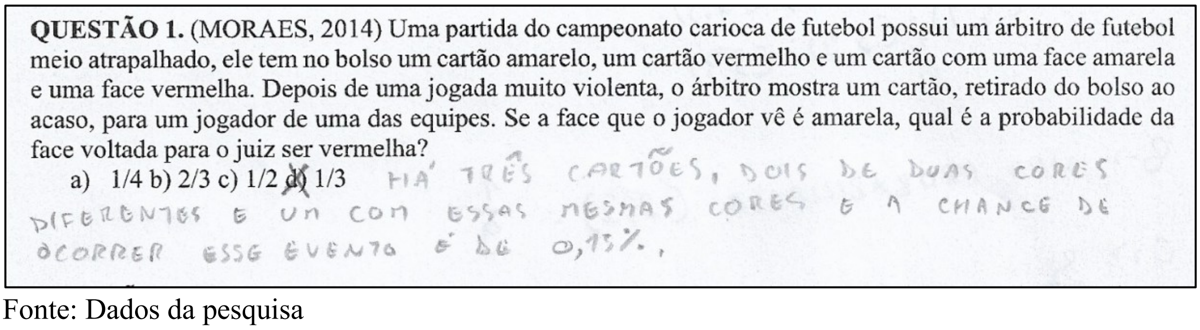
Figura 24 – Atividade de Revisão (parte 1) de *Orion* resposta para a questão 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Por outro lado, 8 alunos não responderam corretamente ou apresentaram justificativas incorretas:

Figura 25 – Atividade de Revisão (parte 1) de *Lepus* resposta para a questão 1



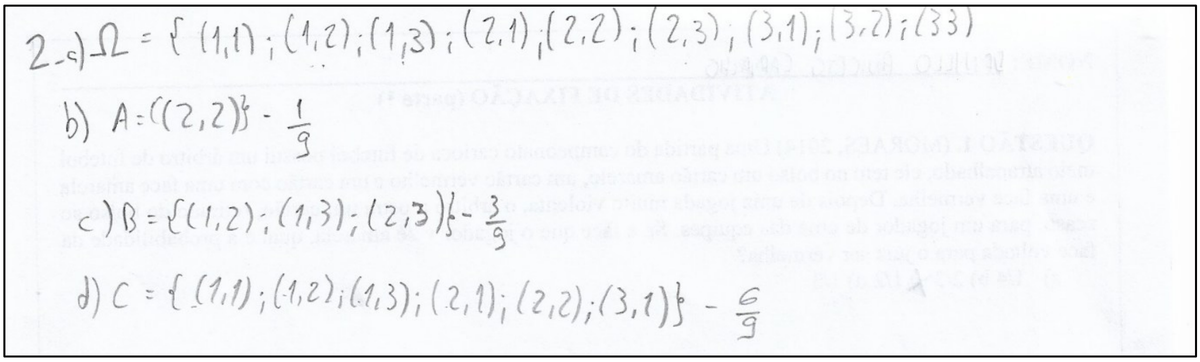
QUESTÃO 1. (MORAES, 2014) Uma partida do campeonato carioca de futebol possui um árbitro de futebol meio atrapalhado, ele tem no bolso um cartão amarelo, um cartão vermelho e um cartão com uma face amarela e uma face vermelha. Depois de uma jogada muito violenta, o árbitro mostra um cartão, retirado do bolso ao acaso, para um jogador de uma das equipes. Se a face que o jogador vê é amarela, qual é a probabilidade da face voltada para o juiz ser vermelha?

a) 1/4 b) 2/3 c) 1/2 d) 1/3 HÁ TRÊS CARTÕES, DOIS DE DUAS CORES DIFERENTES E UN COM ESSAS MESMAS CORES E A CHANCE DE OCORRER ESSE EVENTO É DE 0,13%.

Fonte: Dados da pesquisa

A questão 2 foi dividida em subquestões para trabalhar especificamente os conceitos de espaço amostral e evento. Na questão (a), 13 alunos responderam corretamente, enquanto apenas 1 aluno não apresentou o resultado esperado:

Figura 26 – Atividade de Revisão (parte 1) de *Canis Major* resposta para a questão 2



2-a) $\Omega = \{(1,1); (1,2); (1,3); (2,1); (2,2); (2,3); (3,1); (3,2); (3,3)$

b) $A = \{(2,2)\} - \frac{1}{9}$

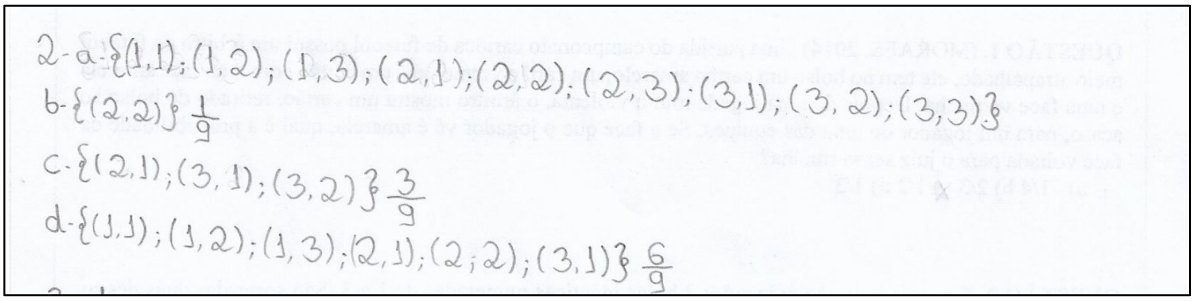
c) $B = \{(1,2); (1,3); (2,3)\} - \frac{3}{9}$

d) $C = \{(1,1); (1,2); (1,3); (2,1); (2,2); (3,1)\} - \frac{6}{9}$

Fonte: Dados da pesquisa

Na questão (b), 4 alunos responderam de acordo com o esperado, 2 inverteram a resposta e o restante não apresentou a resposta correta:

Figura 27 – Atividade de Revisão (parte 1) de *Orion* resposta para a questão 2



2-a-$\{(1,1); (1,2); (1,3); (2,1); (2,2); (2,3); (3,1); (3,2); (3,3)\}$

b-$\{(2,2)\}$ $\frac{1}{9}$

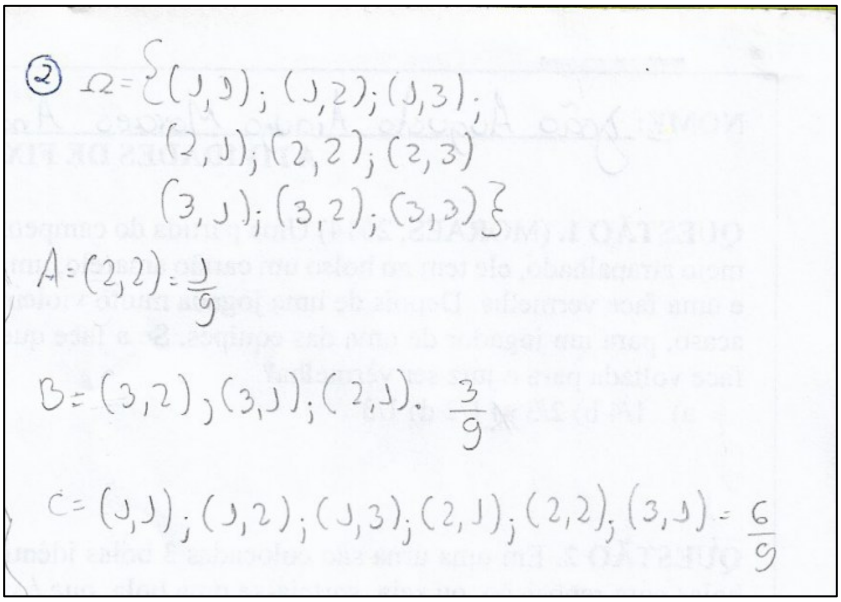
c-$\{(2,1); (3,1); (3,2)\}$ $\frac{3}{9}$

d-$\{(1,1); (1,2); (1,3); (2,1); (2,2); (3,1)\}$ $\frac{6}{9}$

Fonte: Dados da pesquisa

Já na questão (c), enquanto 9 não conseguiram atingir o resultado esperado, 4 alunos acertaram

Figura 28 – Atividade de Revisão (parte 1) de *Cepheus* resposta para a questão 2



② $\Omega = \{(1,1); (1,2); (1,3); (2,1); (2,2); (2,3); (3,1); (3,2); (3,3)\}$

$A = (2,2) = \frac{1}{9}$

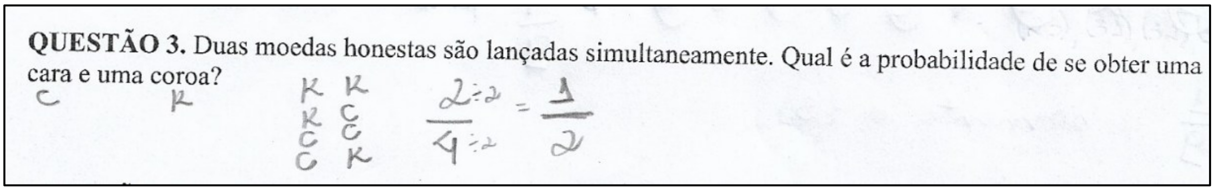
$B = (3,2), (3,1); (2,1). \frac{3}{9}$

$C = (1,1); (1,2); (1,3); (2,1); (2,2); (3,1) = \frac{6}{9}$

Fonte: Dados da pesquisa

As questões 3, 4 e 5 abordavam o cálculo da probabilidade de um evento e a união de eventos. Na questão 3, enquanto 1 errou, 13 alunos acertaram a resposta:

Figura 29 – Atividade de Revisão (parte 1) de *Serpens* resposta para a questão 3



QUESTÃO 3. Duas moedas honestas são lançadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de se obter uma cara e uma coroa?

C K

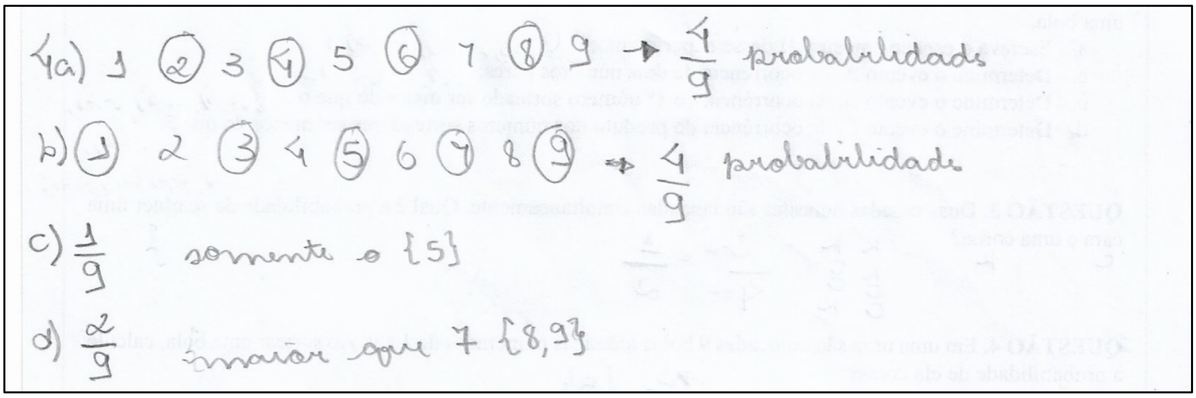
K K
K C
C C
C K

$\frac{2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{1}{2}$

Fonte: Dados da pesquisa

Sobre a questão 4, na parte (a), 13 alunos acertaram, porém, 1 aluno identificou as possibilidades, mas não calculou a probabilidade corretamente. Na parte (b), 11 alunos acertaram, enquanto 3 erraram. Já nas partes (c) e (d), 13 alunos responderam corretamente em ambas, enquanto 1 aluno errou. A figura a seguir ilustra um exemplo do consideramos atingir o objetivo da questão.

Figura 30 – Atividade de Revisão (parte 1) de *Serpens* resposta para a questão 4


4a) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 → $\frac{4}{9}$ probabilidade

b) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 → $\frac{4}{9}$ probabilidade

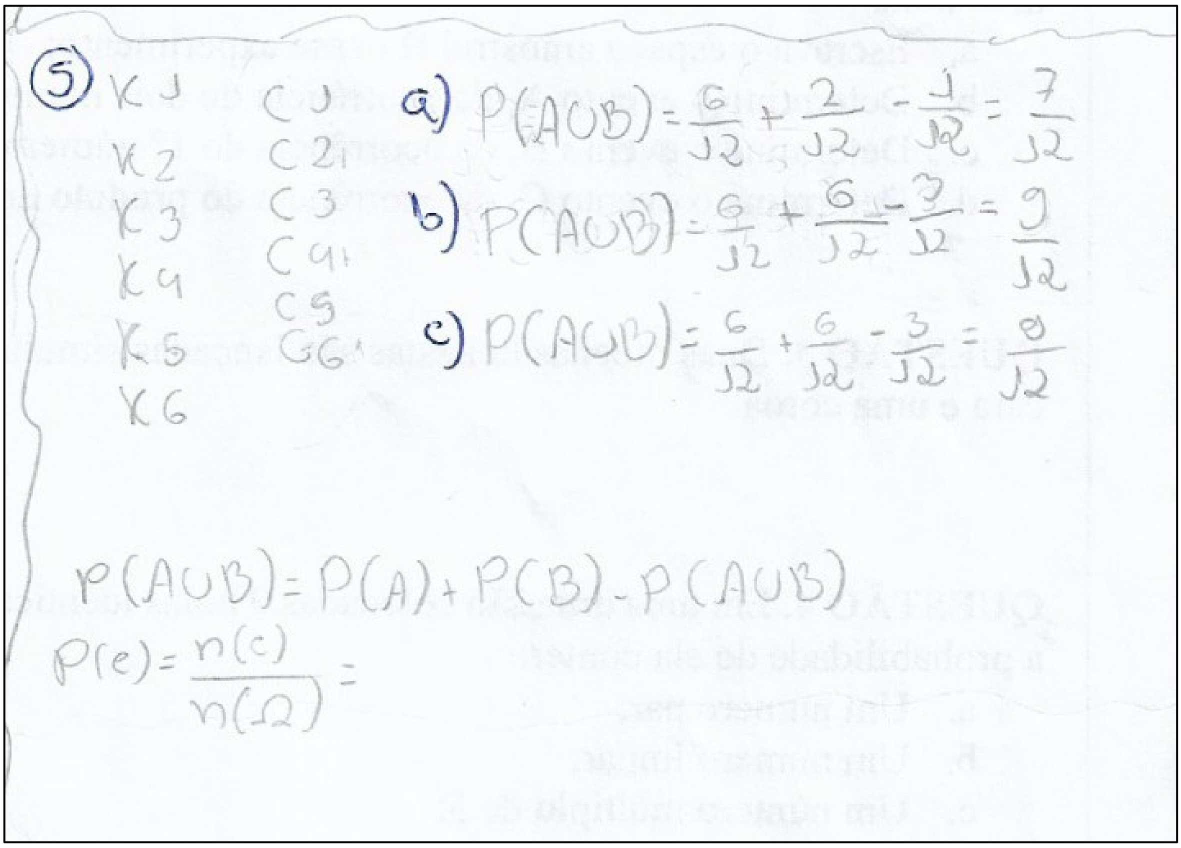
c) $\frac{1}{9}$ somente o {5}

d) $\frac{2}{9}$ maior que 7 {8,9}

Fonte: Dados da pesquisa

Com relação à questão 5, na parte (a), 6 alunos acertaram, enquanto 8 erraram. Na parte (b), 8 alunos responderam corretamente, enquanto 6 erraram. Por fim, na parte (c), apenas 1 aluno acertou, enquanto 13 erraram. A figura a seguir ilustra um exemplo do consideramos atingir o objetivo da questão.

Figura 31 – Atividade de Revisão (parte 1) de *Cepheus* resposta para a questão 5


5) K1 K2 K3 K4 K5 K6 C1 C2 C3 C4 C5 C6

a) $P(A\cup B) = \frac{6}{12} + \frac{2}{12} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$

b) $P(A\cup B) = \frac{6}{12} + \frac{6}{12} - \frac{3}{12} = \frac{9}{12}$

c) $P(A\cup B) = \frac{6}{12} + \frac{6}{12} - \frac{3}{12} = \frac{8}{12}$

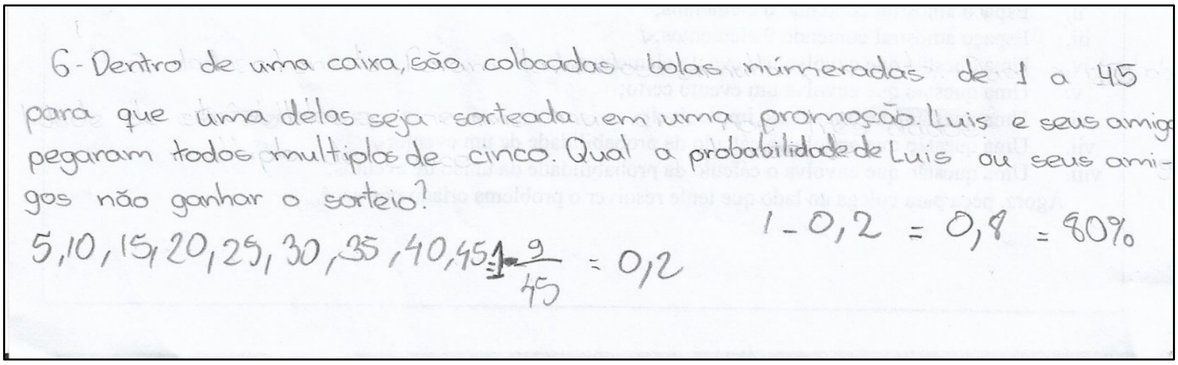
$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$

$P(e) = \frac{n(c)}{n(\Omega)} =$

Fonte: Dados da pesquisa

A questão 6 foi elaborada pelos próprios alunos e apresentou respostas bastante interessantes, especialmente as respostas de *Orion*, que se destacaram:

Figura 32 – Atividade de Revisão (parte 1) de *Orion* resposta para a questão 6


6- Dentro de uma caixa, são colocadas bolas númeradas de 1 a 45 para que uma delas seja sorteada em uma promoção. Luis e seus amigos pegaram todos multiplos de cinco. Qual a probabilidade de Luis ou seus amigos não ganhar o sorteio?

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 = $\frac{9}{45}$ = 0,2

1 - 0,2 = 0,8 = 80%

Fonte: Dados da pesquisa

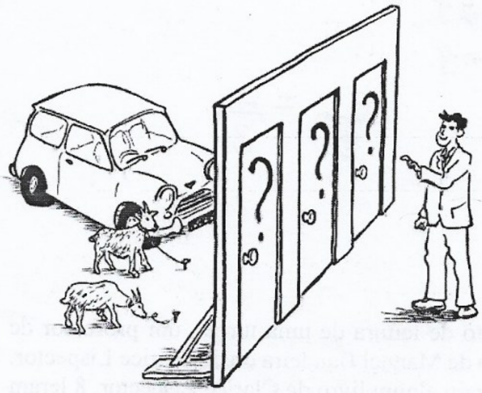
Na análise da Atividade 5, dos 26 alunos presentes, 21 completaram a atividade, enquanto 5 não a finalizaram. A atividade foi estruturada em uma questão dividida em quatro etapas, abordando a noção intuitiva de probabilidade condicional e estratégias relacionadas ao conhecido “problema das portas”, no qual os alunos precisavam decidir se trocariam de porta após a intervenção do apresentador.

Na primeira etapa, que focava em explorar a intuição dos alunos sobre probabilidade condicional, os alunos se dividiram em dois grupos principais: os que não trocariam de porta e os que trocariam. Entre aqueles que decidiram não trocar, 5 alunos justificaram a escolha dizendo que o apresentador estaria tentando “enganá-los”, como mostrado na resposta de *Leo.*

Figura 33 – Atividade 4 de *Leo* resposta para a questão 1

ATIVIDADE 4

QUESTÃO 1 – O dilema de Monty Hall, cujo nome é inspirado no apresentador do programa televisivo estadunidense *"Let's Make a Deal"* transmitido de 1963 a 1976, tem o seguinte enunciado:



"Suponha que os participantes de um programa de auditório recebam a opção de escolher uma dentre três portas: atrás de uma delas há um carro; atrás das outras, há cabras. Depois que um dos participantes escolhe uma porta, o apresentador, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das portas não escolhidas, revelando uma cabra. Ele diz então ao participante: ***'Você gostaria de mudar sua escolha para a outra porta fechada?' Para o participante, é vantajoso trocar sua escolha?"***

1ª Etapa: Tendo em vista o problema apresentado, em qual estratégia você utilizaria? Justifique.

Eu não trocaria a porta porque ele não quer que você tire o carro, então ele te faz trocar.

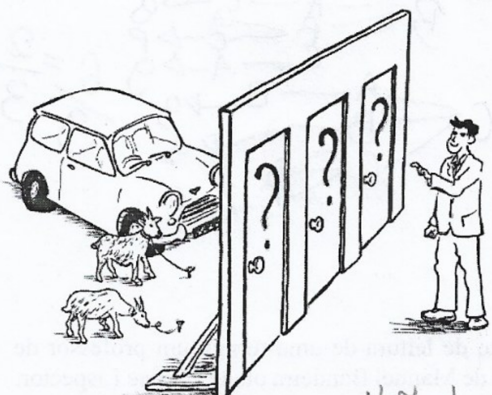
Fonte: Dados da pesquisa

Três alunos explicaram que não trocariam de porta porque acreditavam que as chances não mudavam, conforme ilustrado na resposta de *Auriga*:

Figura 34 – Atividade 4 de *Auriga* resposta para a questão 1

ATIVIDADE 4

QUESTÃO 1 – O dilema de Monty Hall, cujo nome é inspirado no apresentador do programa televisivo estadunidense *"Let's Make a Deal"* transmitido de 1963 a 1976, tem o seguinte enunciado:



"Suponha que os participantes de um programa de auditório recebam a opção de escolher uma dentre três portas: atrás de uma delas há um carro; atrás das outras, há cabras. Depois que um dos participantes escolhe uma porta, o apresentador, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das portas não escolhidas, revelando uma cabra. Ele diz então ao participante: ***'Você gostaria de mudar sua escolha para a outra porta fechada?' Para o participante, é vantajoso trocar sua escolha?"***

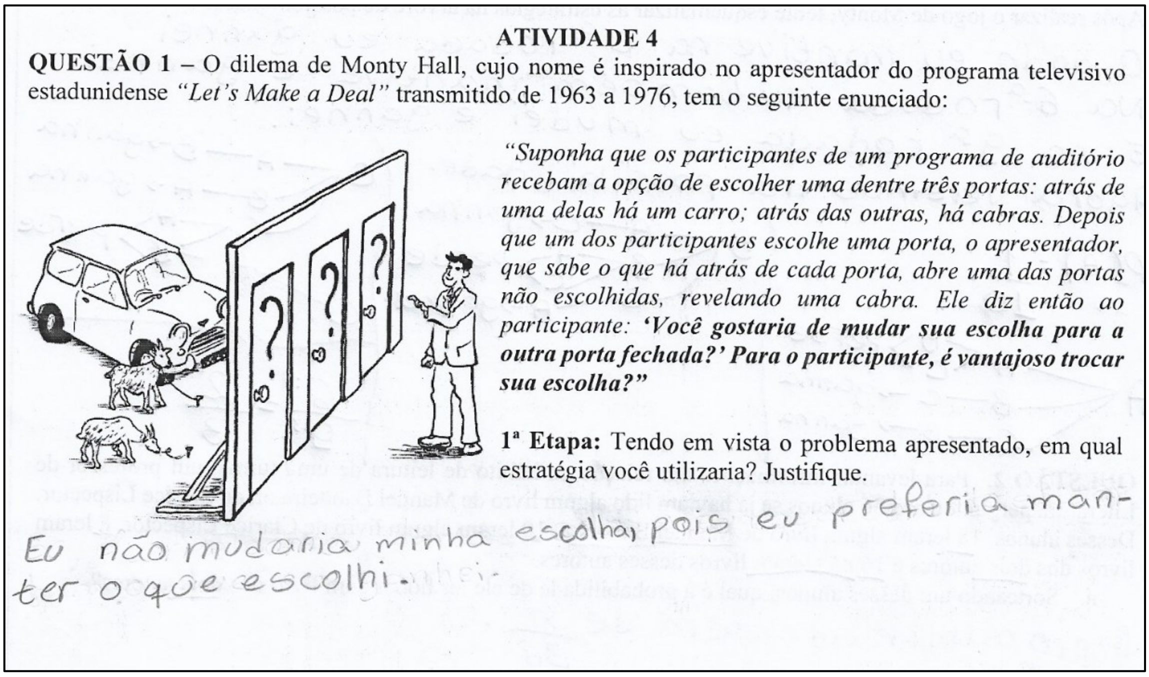
1ª Etapa: Tendo em vista o problema apresentado, em qual estratégia você utilizaria? Justifique.

Não trocaria pois a chance é a mesma 50% de chance de acerto ou erro então, não há necessidade de troca.

Fonte: Dados da pesquisa

Quatro alunos optaram por não trocar simplesmente por convicção pessoal, como exemplificado na resposta de *Cassiopeia:*

Figura 35 – Atividade 4 de *Cassiopeia* resposta para a questão 1



ATIVIDADE 4

QUESTÃO 1 – O dilema de Monty Hall, cujo nome é inspirado no apresentador do programa televisivo estadunidense *"Let's Make a Deal"* transmitido de 1963 a 1976, tem o seguinte enunciado:

"Suponha que os participantes de um programa de auditório recebam a opção de escolher uma dentre três portas: atrás de uma delas há um carro; atrás das outras, há cabras. Depois que um dos participantes escolhe uma porta, o apresentador, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das portas não escolhidas, revelando uma cabra. Ele diz então ao participante: ***'Você gostaria de mudar sua escolha para a outra porta fechada?' Para o participante, é vantajoso trocar sua escolha?"***

1ª Etapa: Tendo em vista o problema apresentado, em qual estratégia você utilizaria? Justifique.

Eu não mudaria minha escolha, pois eu preferia manter o qoe escolhi.

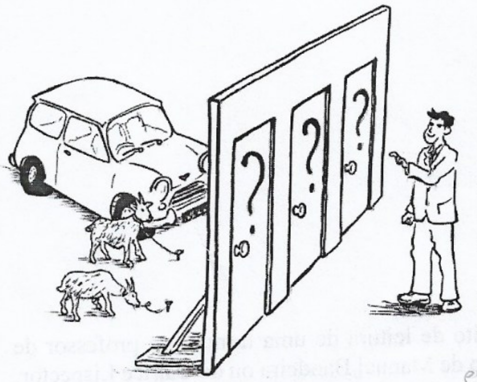
Fonte: Dados da pesquisa

Por outro lado, 4 alunos escolheram trocar de porta e suas justificativas destacam a percepção de que a troca aumentaria suas chances de ganhar, conforme a imagem de *Cepheus*

Figura 36 – Atividade 4 de *Cepheus* resposta para a questão 1

ATIVIDADE 4

QUESTÃO 1 – O dilema de Monty Hall, cujo nome é inspirado no apresentador do programa televisivo estadunidense *"Let's Make a Deal"* transmitido de 1963 a 1976, tem o seguinte enunciado:



"Suponha que os participantes de um programa de auditório recebam a opção de escolher uma dentre três portas: atrás de uma delas há um carro; atrás das outras, há cabras. Depois que um dos participantes escolhe uma porta, o apresentador, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das portas não escolhidas, revelando uma cabra. Ele diz então ao participante: ***'Você gostaria de mudar sua escolha para a outra porta fechada?' Para o participante, é vantajoso trocar sua escolha?"***

1ª Etapa: Tendo em vista o problema apresentado, em qual estratégia você utilizaria? Justifique.

em trocar a porta porque só tem apenas uma porta que esta o carro, então a nossa probabilidade de você acerta esta em $\frac{1}{3}$. como mostra uma porta onde não esta o carro assim tendo $\frac{1}{2}$ da probabilidade de acertar então sua chance de ganhar aumenta.

2ª Etapa:

Fonte: Dados da pesquisa

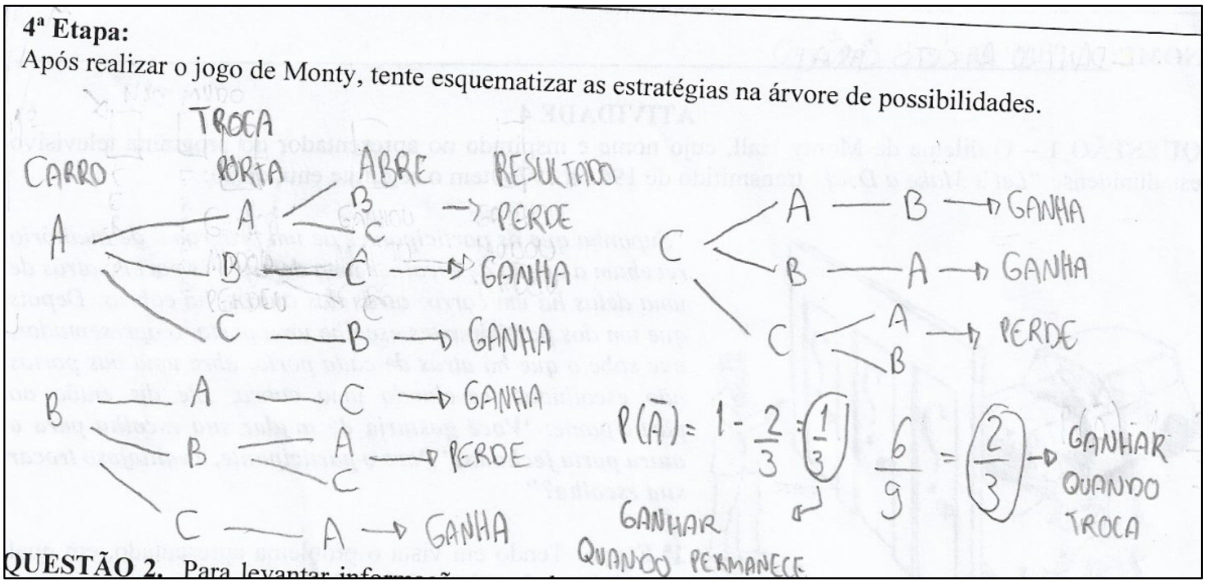
Quatro alunos não responderam ou não apresentaram uma resposta coerente com o esperado.

Na segunda etapa, os alunos foram expostos à famosa solução de Marilyn vos Savant para o dilema de Monty Hall, em que a estratégia de troca é demonstrada como vantajosa. Essa etapa proporcionou o contato com uma abordagem formal do problema, fazendo com que os alunos refletissem sobre suas respostas iniciais. Retomando, assim, as ideias de Mendes, Fossa e Valdés (2006) ao se referir à HM e aos problemas históricos como uma oportunidade de apresentar ideias e esclarecer conceitos da Matemática.

A terceira etapa envolveu as tentativas práticas, nas quais todos os alunos participaram, engajando nas discussões sobre qual a melhor estratégia a ser seguida. Essa etapa procedeu com a realização dos jogos em grupos. Além de poder destacar os conceitos da probabilidade condicional

Na quarta etapa, os alunos esquematizaram as estratégias e calcularam as probabilidades para ambas as abordagens: trocar ou não trocar de porta. Sete alunos, incluindo *Canis Major*, conseguiram calcular corretamente as probabilidades de ambas as estratégias:

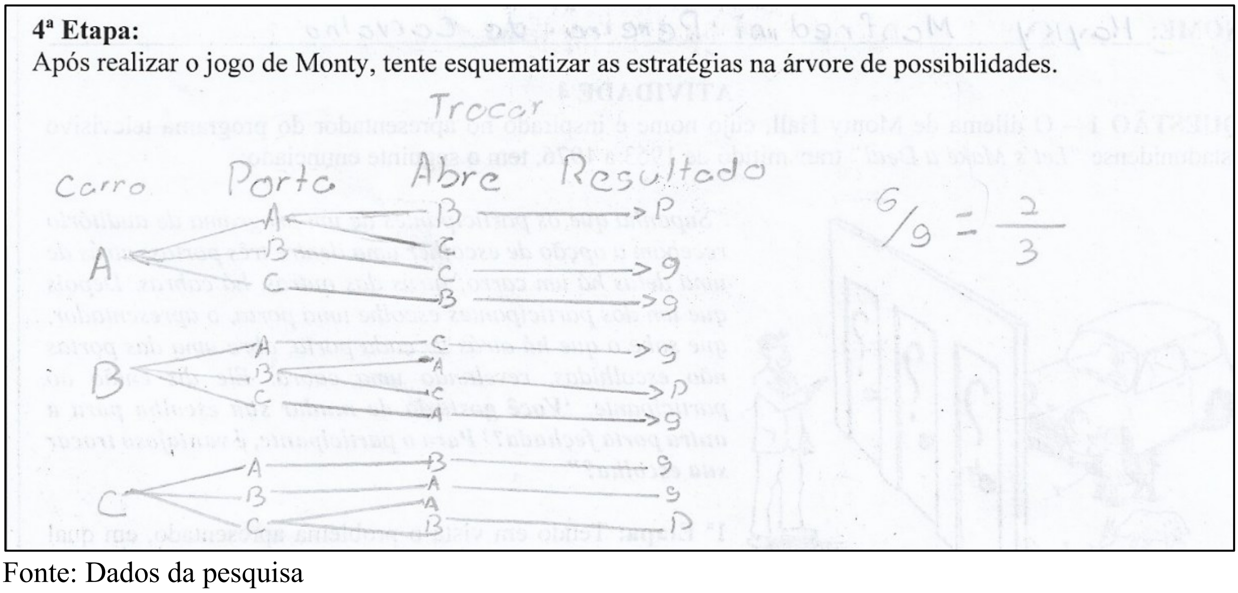
Figura 37 – Atividade 4 de *Canis Major* resposta para 4ª etapa



Fonte: Dados da pesquisa

Doze alunos calcularam apenas a probabilidade de uma das estratégias, como mostrado na resposta de *Perseus*:

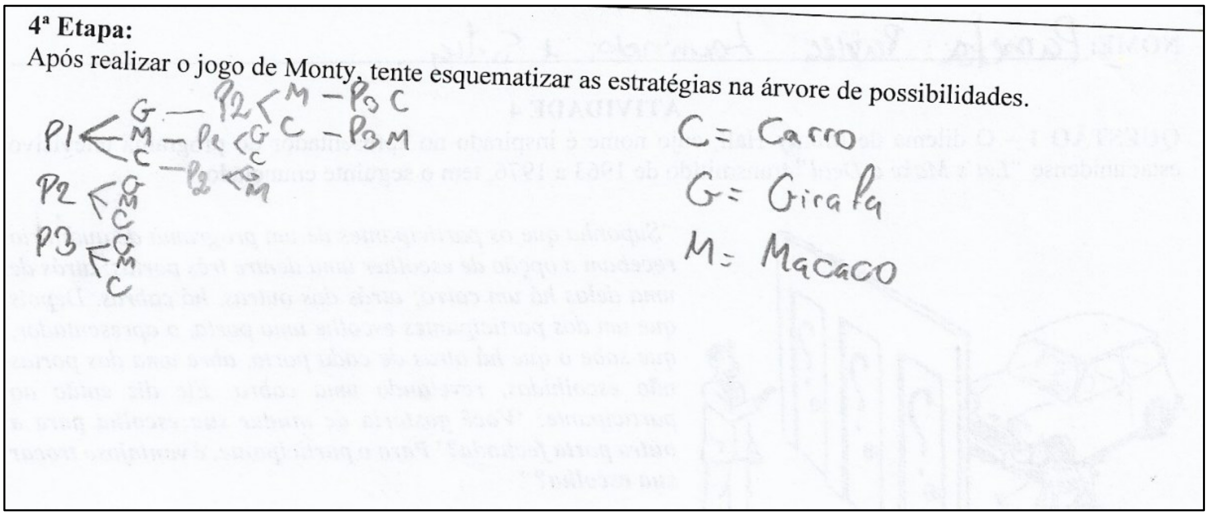
Figura 38 – Atividade 4 de *Perseus* resposta para 4ª etapa



Fonte: Dados da pesquisa

Dois alunos, incluindo *Aquarius*, não calcularam as probabilidades:

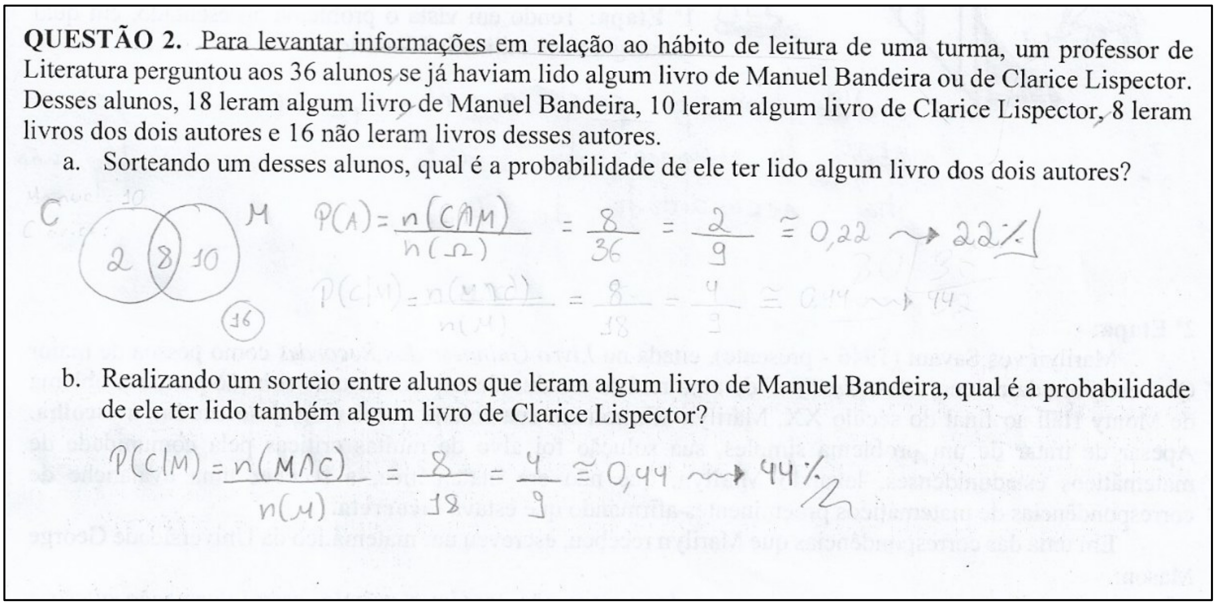
Figura 39 – Atividade 4 de *Aquarius* resposta para 4ª etapa


4ª Etapa:
Após realizar o jogo de Monty, tente esquematizar as estratégias na árvore de possibilidades.

Fonte: Dados da pesquisa

A questão 2 da atividade foi desenvolvida com o objetivo de introduzir a probabilidade condicional de forma prática. *Scorpius* destacou-se ao realizar o exercício junto com o professor, conforme a imagem a seguir:

Figura 40 – Atividade 4 de *Scorpius* resposta para questão 2


QUESTÃO 2. Para levantar informações em relação ao hábito de leitura de uma turma, um professor de Literatura perguntou aos 36 alunos se já haviam lido algum livro de Manuel Bandeira ou de Clarice Lispector. Desses alunos, 18 leram algum livro de Manuel Bandeira, 10 leram algum livro de Clarice Lispector, 8 leram livros dos dois autores e 16 não leram livros desses autores.

a. Sorteando um desses alunos, qual é a probabilidade de ele ter lido algum livro dos dois autores?

$$P(A) = \frac{n(C \cap M)}{n(\Omega)} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \cong 0{,}22 \rightarrow 22\%$$

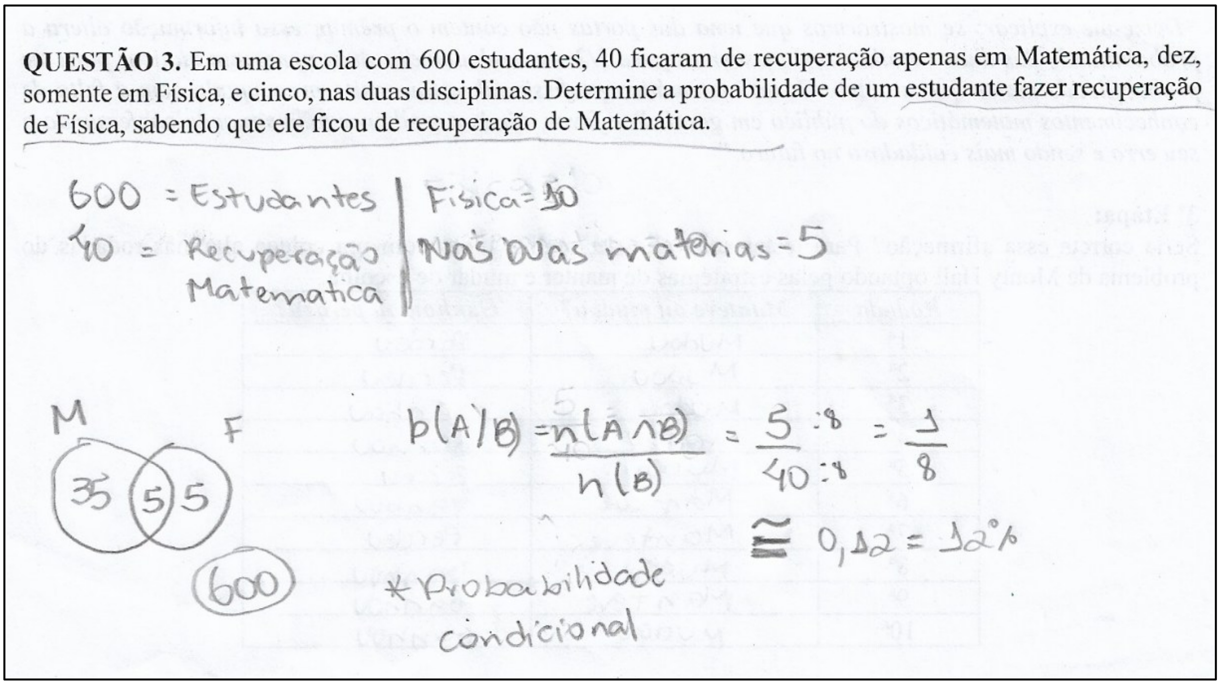
b. Realizando um sorteio entre alunos que leram algum livro de Manuel Bandeira, qual é a probabilidade de ele ter lido também algum livro de Clarice Lispector?

$$P(C|M) = \frac{n(M \cap C)}{n(M)} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \cong 0{,}44 \rightarrow 44\%$$

Fonte: Dados da pesquisa

Na questão 3, que envolvia conceitos de teoria dos conjuntos, 3 alunos deixaram de responder, enquanto os outros 18 alunos erraram em virtude do enunciado, devido à falta de domínio da teoria dos conjuntos. *Serpens*, por exemplo, errou devido ao enunciado, conforme ilustrado na imagem:

Figura 41 – Atividade 4 de *Serpens* resposta para questão 3



QUESTÃO 3. Em uma escola com 600 estudantes, 40 ficaram de recuperação apenas em Matemática, dez, somente em Física, e cinco, nas duas disciplinas. Determine a probabilidade de um estudante fazer recuperação de Física, sabendo que ele ficou de recuperação de Matemática.

Fonte: Dados da pesquisa

Essa análise da atividade revela que, embora muitos alunos tenham conseguido desenvolver uma intuição inicial sobre probabilidade condicional, a formalização do conceito e a aplicação correta de estratégias probabilísticas, especialmente no que diz respeito à teoria dos conjuntos, ainda representou um desafio significativo para a maioria.

De modo geral, entendemos que os objetivos da Atividade 4 foram comtemplados em relação aos conteúdos da Probabilidade, como o conceito de probabilidade condicional, bem como o desenvolvimento deste conceito na solução do problema histórico.

Nas Atividades de Revisão (parte 2), todos os 23 alunos presentes completaram a atividade. A questão 1 foi respondida corretamente por 21 alunos, com destaque para *Orion*, que apresentou uma justificativa clara e correta:

Figura 42 – Atividade de Revisão (parte 2) de *Orion* resposta para questão 1

QUESTÃO 1. Dois jogadores, Kleber e Arnaldo, lançam um dado, cada um uma única vez. Vence o jogo quem tirar o maior número. Sabendo que Kleber tirou 4, qual é a probabilidade de:

a. Kleber vencer?

$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$

b. Haver empate?

$P = \frac{1}{6} = 0,17 = 17\%$

c. Arnaldo vencer?

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,33 = 33\%$

Fonte: Dados da pesquisa.

No entanto, dois alunos, como *Libra*, cometeram erros na parte (c) da questão, como ilustrado nas imagens a seguir:

Figura 43 – Atividade de Revisão (parte 2) de *Libra* resposta para questão 1

QUESTÃO 1. Dois jogadores, Kleber e Arnaldo, lançam um dado, cada um uma única vez. Vence o jogo quem tirar o maior número. Sabendo que Kleber tirou 4, qual é a probabilidade de:

a. Kleber vencer? (a) $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$

b. Haver empate?

Probabilidade de tirar (4) $P = \frac{1}{6}$

c. Arnaldo vencer?

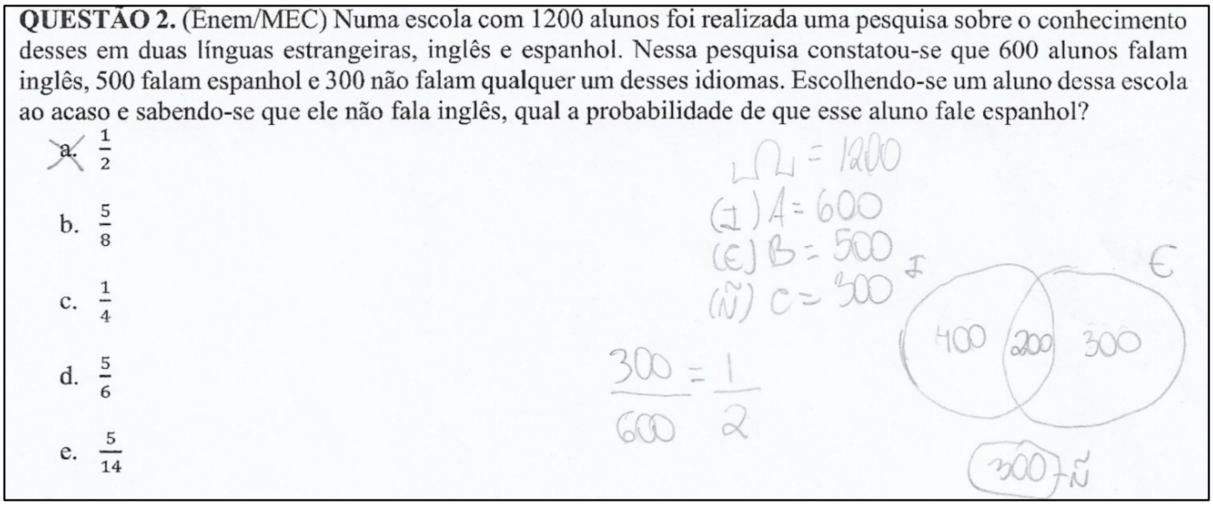
tirar maior que (4)

$P = \frac{4}{6}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Na questão 2, dois alunos erraram, enquanto os outros 20 a acertaram, incluindo *Virgo*, que apresentou uma resposta bem estruturada:

Figura 44 – Atividade de Revisão (parte 2) de *Virgo* resposta para questão 2



QUESTÃO 2. (Enem/MEC) Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{5}{8}$

c. $\frac{1}{4}$

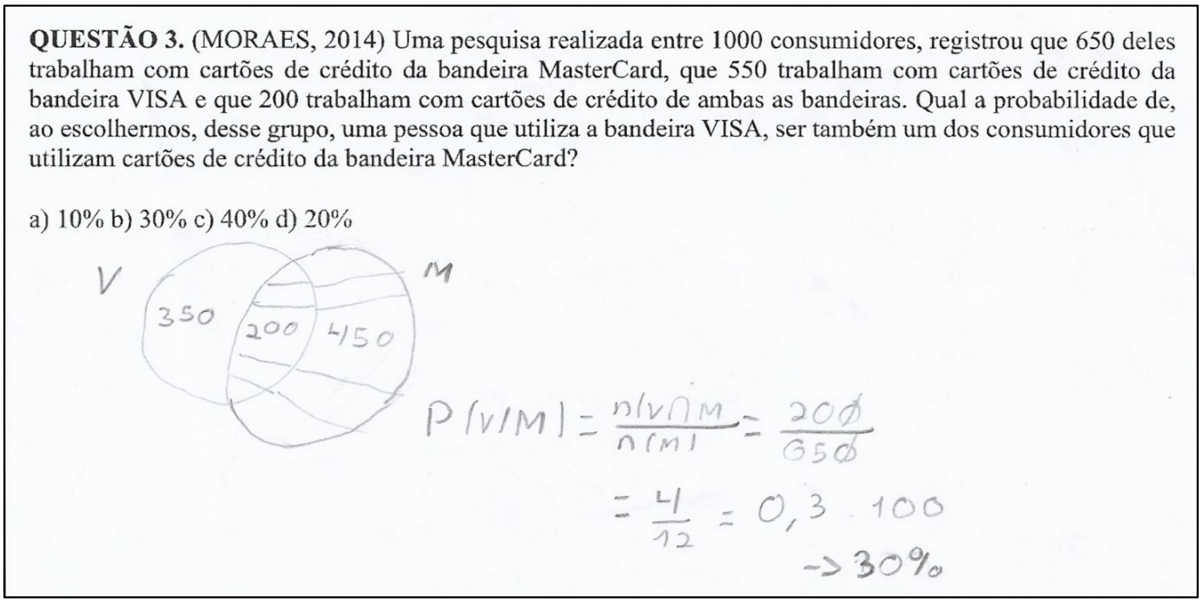
d. $\frac{5}{6}$

e. $\frac{5}{14}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Na questão 3, apenas um aluno cometeu um erro, enquanto o restante dos alunos respondeu corretamente, incluindo *Perseus*, que apresentou uma solução precisa:

Figura 45 – Atividade de Revisão (parte 2) de *Perseus* resposta para questão 3



QUESTÃO 3. (MORAES, 2014) Uma pesquisa realizada entre 1000 consumidores, registrou que 650 deles trabalham com cartões de crédito da bandeira MasterCard, que 550 trabalham com cartões de crédito da bandeira VISA e que 200 trabalham com cartões de crédito de ambas as bandeiras. Qual a probabilidade de, ao escolhermos, desse grupo, uma pessoa que utiliza a bandeira VISA, ser também um dos consumidores que utilizam cartões de crédito da bandeira MasterCard?

a) 10% b) 30% c) 40% d) 20%

Fonte: Dados da pesquisa

Essa análise da Atividade 6 demonstra que a maioria dos alunos conseguiu dominar os conceitos abordados, com apenas alguns erros pontuais em questões específicas. A consistência no desempenho geral reflete o entendimento sólido dos temas trabalhados ao longo das atividades anteriores.

Entendemos que a HM pode contribuir para a construção do conhecimento matemático pela apresentação de conceitos e teorias matemáticas e permite compreender certos motivos relacionados à Matemática. Abaixo fornecemos um panorama das atividades

Quadro 33 – Síntese dos indícios da História da Matemática para construção do conhecimento matemático

PROBLEMA	**AGRUPAMENTO**	**CONCEITOS TRABALHADOS**
Problema dos Dados	A apresentação de conceitos e teorias matemáticas e permite compreender certos motivos relacionados à Matemática.	- Experimento aleatório; - Espaço amostral; - Evento e tipos de eventos.
Problema dos Pontos		- Experimento aleatório; - Espaço amostral; - Evento e tipos de eventos; - Cálculo de probabilidade.
Dilema de Monty Hall		- Probabilidade condicional.

Fonte: Autoria própria

Feita a apresentação dos indícios da HM para a construção do conhecimento matemático, apresentaremos uma análise dos obstáculos e das dificuldades encontradas durante a implementação.

5.3 Obstáculos e dificuldades da implementação

Nossa intenção, ao descrever e compreender as dificuldades da implementação da proposta, é destacar as formas com que podemos trabalhar essas dificuldades em pesquisas futuras. Os dados produzidos que mais fazem sentido com essa temática foram obtidos, principalmente, após à aplicação do questionário final e alguns elementos do diário de campo, como será demostrado a seguir.

Foi possível identificar que não foram todos os alunos que se interessaram pelas atividades envolvendo os problemas históricos. Em uma das anotações do diário de campo do professor regente de turma, há indicações de alunos que não faziam nenhuma das atividades propostas, bem como outros alunos que saíram frequentemente da sala de aula, tanto que o professor escreveu "*Argo Navis* e *Crater* saíram da sala de aula e não voltaram até o final da aula (informação escrita, diário de campo, encontro 8)". De fato, *Argo Navis e Crater*, dentre outros alunos, não realizaram grande parte das atividades, o que evidencia o argumento de

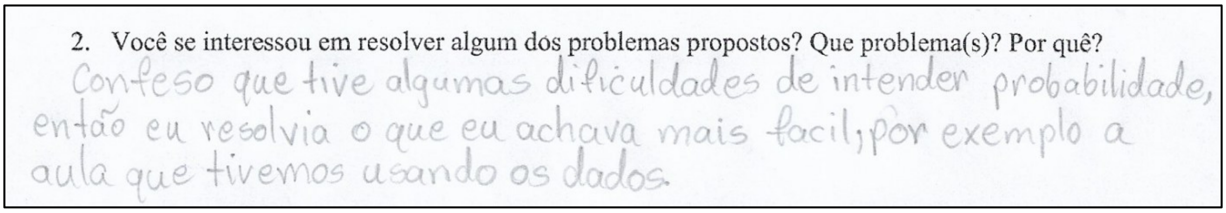
Tzanakis e colaboradores (2000) acerca de que muitos não se interessarão por aulas com abordagem histórica.

Os indícios que consideramos limitações da abordagem dos problemas históricos abrangem a falta de tempo para a implementação da proposta, ocasionada pelas interrupções que foram geradas em sala de aula, o que levou nossa abordagem de 20 aulas se tornarem 26.

Outros indícios apontam a HM como um fator complicador. Alguns alunos não se sentiram confortáveis com a abordagem histórica e temos a presença desses indícios na atividade final.

No primeiro questionamento, obtivemos respostas positivas em relação a proposta no que se refere à motivação. Já no segundo questionamento “2. Você se interessou em resolver algum dos problemas propostos? Que problema(s)? Por quê?”, tivemos um indício de dificuldade por parte do aluno.

Figura 46 – Indício de dificuldade apresentado na Atividade Final na questão 2



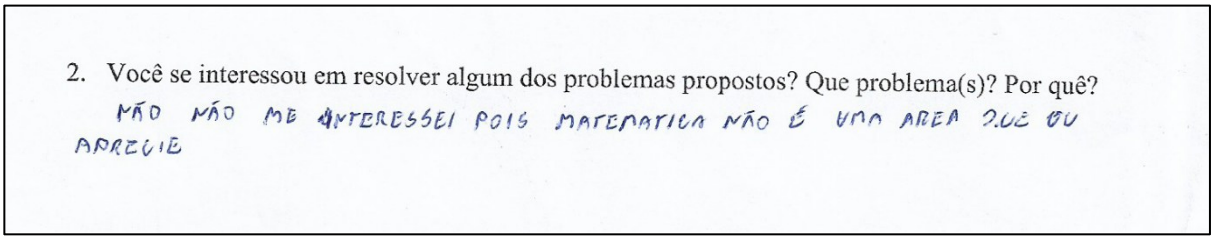
2. Você se interessou em resolver algum dos problemas propostos? Que problema(s)? Por quê?

Confeso que tive algumas dificuldades de intender probabilidade, então eu resolvia o que eu achava mais facil, por exemplo a aula que tivemos usando os dados.

Fonte: Dados da pesquisa

Mesmo que a resposta indique uma dificuldade em relação às atividades propostas, a dinâmica proposta com os dados facilitou o entendimento em alguns casos. Também há uma resposta que indica que a proposta não interessou o aluno, como apontado na Figura 48.

Figura 47 – Outro indício de dificuldade apresentado na Atividade Final na questão 2



2. Você se interessou em resolver algum dos problemas propostos? Que problema(s)? Por quê?

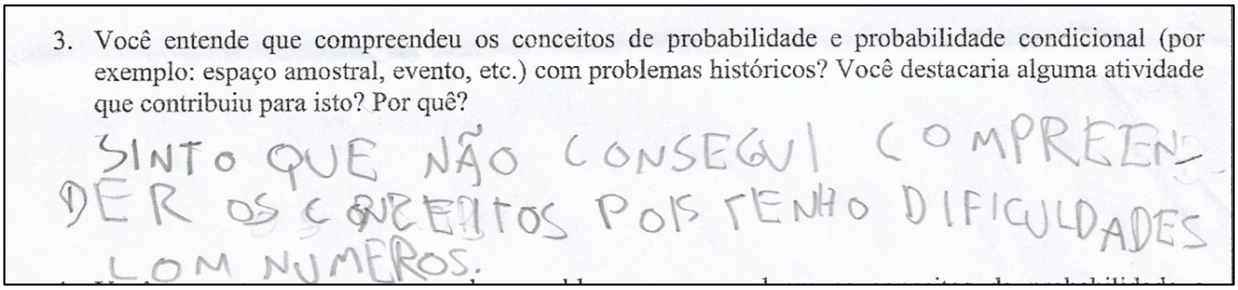
NÃO NÃO ME INTERESSEI POIS MATEMATICA NÃO É UMA AREA QUE EU APRECIE

Fonte: Dados da pesquisa

Entendemos que a HM nem sempre será uma abordagem interessante para todos os alunos, pois nem todos se interessam pela disciplina, consequentemente, não têm interesse por sua história, como apontado por Tzanakis e colaboradores (2000).

Já o terceiro questionamento, “Você entende que compreendeu os conceitos de probabilidade e probabilidade condicional (por exemplo: espaço amostral, evento etc.) com problemas históricos? Você destacaria alguma atividade que contribuiu para isto? Por quê?”. Também, tivemos indícios da HM como um fator complicador, como apresentado a seguir:

Figura 48 – Indício de dificuldade apresentado na Atividade Final na questão 3



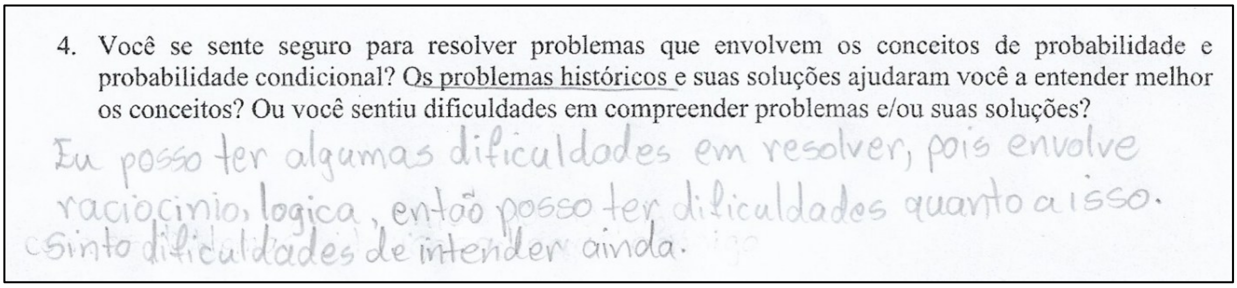
3. Você entende que compreendeu os conceitos de probabilidade e probabilidade condicional (por exemplo: espaço amostral, evento, etc.) com problemas históricos? Você destacaria alguma atividade que contribuiu para isto? Por quê?

SINTO QUE NÃO CONSEGUI COMPREENDER OS CONCEITOS POIS TENHO DIFICULDADES COM NUMEROS.

Fonte: Dados da pesquisa

Já no quarto questionamento, “Você se sente seguro para resolver problemas que envolvem os conceitos de probabilidade e probabilidade condicional? Os problemas históricos e suas soluções ajudaram você a entender melhor os conceitos? Ou você sentiu dificuldades em compreender problemas e/ou suas soluções?”, também tivemos indícios da HM como um fator complicador, como apresentado a seguir:

Figura 49 – Indício de dificuldade apresentado na Atividade Final na questão 4



4. Você se sente seguro para resolver problemas que envolvem os conceitos de probabilidade e probabilidade condicional? Os problemas históricos e suas soluções ajudaram você a entender melhor os conceitos? Ou você sentiu dificuldades em compreender problemas e/ou suas soluções?

Eu posso ter algumas dificuldades em resolver, pois envolve raciocinio, logica, então posso ter dificuldades quanto a isso. Sinto dificuldades de intender ainda.

Fonte: Dados da pesquisa

Dessa forma, entendemos que as dificuldades relacionadas à abordagem histórica nas atividades têm a ver com a construção dos conhecimentos de Matemática com a HM. Cabe destacar que muitos alunos não conseguiram resolver determinados problemas históricos e/ou desenvolver os conceitos propostos naquele momento. Tal como proposto por Miguel e Miorim (2021), em que muitos elementos históricos não são adequados para a sala de aula, o que torna a HM um elemento complicador.

Foram identificadas algumas limitações com relação à implementação em sala de aula, devido a diversas interrupções externas e ao atraso na execução da proposta.

Além disso, o pesquisador não era o professor da turma na qual a proposta foi realizada, o que poderia ter afetado a dinâmica da sala de aula e, possivelmente, o comportamento de alguns alunos. Contudo, ressaltamos que as dificuldades de estar em sala de aula são inerentes a qualquer pesquisa de campo e que não causaram prejuízo à implementação das atividades.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente investigação analisou as potencialidades, bem como as limitações de uma proposta didática com problemas históricos para o ensino de Probabilidades. Dessa forma, visamos identificar, ao longo da implementação da proposta, indícios que demonstrassem as contribuições da utilização de elementos da HM para a promoção da Matemática, assim como para a construção do conhecimento matemático.

Para tanto, elaboramos e implementamos uma proposta baseada em três problemas históricos para ensinar os conceitos da Probabilidade, sendo o primeiro o Problema dos Dados proposto a Galileu Galilei (1564 – 1642), no qual abordamos conceitos de experimento aleatório, espaço amostral, evento e tipos de eventos. O segundo foi o Problema dos Pontos, que marca o início do desenvolvimento da Teoria da Probabilidade, resolvido por Blaise Pascal (1623 – 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665), no qual abordamos a definição do cálculo das probabilidades. Por fim, o Dilema de Monty Hall, que embora tenha diferentes versões mencionadas em livros antigos, se tornou popular recentemente com o programa televisivo *Let's Make a Deal*, apresentando por Monty Hall e a controvérsia da solução de Marilyn vos Savant (1946 – presente), em que abordamos os conceitos de probabilidade condicional.

Como mencionado anteriormente, o Problema dos Dados, discutido no Momento 1, trouxe elementos que podem contribuir para a compreensão de conceitos fundamentais da probabilidade, como: espaço amostral, evento e seus tipos.

Já o Problema dos Pontos, discutido no Momento 2, trouxe uma abordagem mais humana da matemática, desmistificando-a e ajudando os alunos a entender conceitos como probabilidade e árvore de eventos. As análises realizadas indicam que a HM pode ser uma abordagem valiosa na construção do conhecimento matemático, especialmente ao ensinar conceitos de cálculo de probabilidade.

Por fim, o Problema de Monty Hall, no Momento 3, focou em ensinar a probabilidade condicional e como ela influencia no cálculo das chances, reforçando, assim como no problema anterior, o papel da HM na construção do conhecimento e na promoção de uma visão mais ampla da Matemática.

Diante dessas observações, defendemos que a utilização da HM, quando combinada com outros recursos, como o uso de materiais concretos, pode enriquecer o ensino de Probabilidade e métodos de resolução. Não propomos que a HM substitua outras abordagens, pois todas possuem potencialidades próprias que podem auxiliar na compreensão dos conceitos matemáticos. Apoiamos, junto com outros estudiosos do campo, uma maior integração da HM com outras metodologias, pois ela, quando bem organizada, contribui significativamente para o aprendizado de determinados conceitos.

Nesta investigação apresentamos a possibilidade de utilizar problemas históricos no ensino, o que pode facilitar a compreensão do processo de calcular a probabilidade, além de contribuir para a mudança de percepção dos alunos sobre a Matemática, uma vez que permite discussões sobre aspectos da construção do conhecimento matemático.

Também destacamos algumas dificuldades encontradas durante a implementação da proposta apoiada em problemas históricos, algumas voltadas para HM como um fator complicador e outras em relação ao convívio em sala de aula. Com relação às dificuldades, ressaltamos as interrupções que ocorrem durante a abordagem que prolongou o tempo de implementação.

Para pesquisas futuras, salientamos a possibilidade de estudar diferentes problemas históricos para trabalhar diferentes conceitos da Matemática de modo a sanar as limitações encontradas, visto que os problemas históricos, quando contextualmente trabalhados, como mostrado na presente pesquisa, permitem refletir sobre a percepção da Matemática e a construção do conhecimento matemático. Além disso, diante do volume de dados apresentados recomendamos uma investigação cautelosa, a fim de entender as dificuldades e os obstáculos das atividades propostas.

REFERÊNCIAS

AGTERBERG, D. A.; OOSTDAM, R. J.; JANSSEN, F. J. J. M. From speck to story: relating history of mathematics to the cognitive demand level of tasks. **Educational Studies in Mathematics,** v. 110, n. 1, p. 49–64, 2022. DOI: 10.1007/s10649-021-10093-6

ARCEGO, Priscila; BERLANDA, Juliane Carla. A História da Matemática como Meio de Interlocução no ensino de Probabilidade. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM), 2016, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2016.

BENNETT, Kevin L. Teaching the Monty Hall Dilemma to explore decision-making, probability, and regret in behavioral science classrooms. **International Journal for the Scholarship of Teaching and Learning**, v. 12, n. 2, p. 13, 2018. DOI:10.20429/ijsotl.2018.120213

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio).** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Secretaria de Educação Básica/MEC, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

CALABRIA, Angelica Raiz; CAVALARI, Mariana Feiteiro. Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades. *In:* **X Seminário Nacional de História da Matemática.** Campinas, 2013.

CHORLAY, Renaud; CLARK, Kathleen Michelle; TZANAKIS, Constantinos. History of mathematics in mathematics education: Recent developments in the field. **ZDM – Mathematics Education**, v. 54, p. 1407-1420, 2022.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT)**, v. 2, n. 1, p. 50-67, 2007.

DAVID, Florence Nightingale. **Games, Gods and Gambling**: the origins and history of probability and statistical ideas from the earliest times to the Newtonian era. New York: Hafner Publishing Company, 1962.

DIAS, Andrea Inês Gaspar Cravo. **O uso da simulação no cálculo de probabilidades**. 2015. Dissertação (Mestrado em Ciências da Educação) - Escola Superior de Educação e Ciências Sociais, Instituto Politécnico de Leiria, Leiria, 2015.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FASANELLI, Florence *et al*. The political context. *In*: FAUVEL, John; VAN MAANEN, Jan (ed.). **History in Mathematics Education**: the ICMI study. Dordrecht: Kluwer, 2000. v. 6, cap. 1, p. 1-18.

FAUVEL, John. Using History in Mathematics Education. **For the Learning of Mathematics**, v. 11, n. 2, p. 3-6, 1991.

FAUVEL, John; VAN MAANEN, Jan (ed.). **History in Mathematics Education**: the ICMI study. Dordrecht: Kluwer, 2000. v. 6.

FERNANDES, Rúbia Juliana Gomes; SANTOS JUNIOR, Guataçara dos. História da matemática: uma estratégia contextualizada para o ensino de estatística e probabilidade nos anos iniciais do ensino fundamental. **Imagens da Educação**, v. 5, n. 2, p. 25-35, 2015.

FIORENTINI, Dario.; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FLICK, Uwe. **Qualidade na pesquisa qualitativa**. Porto Alegre: Artmed, 2009.

FOSSA, John A. Recursos pedagógicos para o ensino da matemática a partir das obras de dois matemáticos da Antiguidade. *In:* MENDES, Iran Abreu; FOSSA, John A.; VALDÉS, Juan E. Nápoles. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática.** Porto Alegre: Sulina, 2006. p. 137-182.

FRIED, Michael N. Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? **Science & Education**, Netherlands, v. 10, p. 391-408, 2001.

FRIED, Michael N. History of Mathematics in Mathematics Education. *In*: MATTHEWS, Michael R. (org.). **International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2014. p. 669–703. DOI: 10.1007/978-94-007-7654-8_21

FURINGHETTI, Fulvia. Rethinking history and epistemology in mathematics education. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,** v. 51, n. 6, p. 967–994, 2019. DOI: 10.1080/0020739X.2019.1565454

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

KACHEL, Gabriel Luiz Santos; SAD, Lígia Arantes. Uma Prática Pedagógica para o ensino de Probabilidade com o Aporte da História da Matemática. **Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco**, v. 10, n. 2, p. 123-136, 2021.

KATZ, Victor Joseph. **A History of Mathematics**: An Introduction. 3. ed. United States of America: Pearson, 2009.

LIU, Po-Hung. Connecting Research to Teaching: Do Teachers Need to Incorporate the History of Mathematics in Their Teaching? **The Mathematics Teacher**, v. 96, n. 6, p. 416–421, 2003. DOI: https://doi.org/10.5951/MT.96.6.0416

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2018.

MENDES, Iran Abreu. A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. *In*: MENDES, Iran Abreu; FOSSA, John A.; VALDÉS, Juan E. Nápoles. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006. p. 79-136.

MENDES, Iran Abreu; PIRES, Lucas Silva. Classificação de Teses e Dissertações nas Subáreas em História para o Ensino da Matemática (1990-2018). **Revista Paranaense De Educação Matemática,** v. 9, n. 19, p. 410–434, 2020.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2021.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. **Currículo Referência de Minas Gerais.** Minas Gerais, 2018.

MLODINOW, L. **O andar do bêbado**: como o acaso determina nossas vidas. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2018.

MORAES, Luís Cláudio Longo. **ensino de Probabilidade**: Historicidade e Interdisciplinaridade. 2014. 136 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2014.

NOBRE, Sergio. Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 10, p. 531–543, 2004. DOI: 10.1590/S1516-73132004000300015

PANASUK, Regina M.; HORTON, Leslie Bolinger. Integrating History of Mathematics into the Classroom: Was Aristotle Wrong? **Journal of Curriculum and Teaching**, v. 2, n. 2, p. 1-46, 2013. DOI: 10.5430/jct.v2n2p37

SIU, Man-Keung. No, I don’t use history of mathematics in my class: Why? *In:* FURINGHETTI, Fulvia; KAIJSERSTEN, Sten; TZANAKIS, Constatinos, (ed.). **Proceedings HPM 2004 & ESU 4** – Revised edition. Iraklion: University of Crete; p. 268–277. 2006.

SWETZ, Frank J. Problem Solving from the History of Mathematics. *In*: KATZ, Victor J. (ed.). **Using History to Teach Mathematics**: an international perspective. Washington: The Mathematical Association of America, 2000. p. 59-69.

TZANAKIS, Constatinos *et al*. Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. *In:* FAUVEL, John; VAN MAANEN, Jan. **History in Mathematics Education:** the ICMI study. Dordrecht: Springer, 2000. v. 6, cap. 7, p. 201-232.

VALDÉS, Juan E. Nápoles. A história como elemento unificador na educação matemática. *In*: MENDES, Iran Abreu; FOSSA, John A.; VALDÉS, Juan E. Nápoles. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006. p. 15-78.

VASCONCELOS, Veraciv Brabo de; VASCONCELOS, Gabriel Brabo de; CHAQUIAM, Miguel. Um percurso pela história da probabilidade. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática (BOCEHM)**, v. 9, n. 26, p. 31-46, 2022.

VIDARTE, José; CHACHAPOYAS, Nancy; CAVALARI, Mariana Feiteiro. O paradoxo de Bertrand e os axiomas de Kolmogorov: uma proposta para a formação de professores. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática (BOCEHM)**, v. 8, n. 24, p. 84-103, 2021.

APÊNDICES

APÊNDICE A – ATIVIDADE 1 (Problema dos Dados)

<table>
<tr><th>COMPETÊNCIAS E HABILIDADES</th></tr>
<tr><td>Competência Específica 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.)
Competência Específica 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
Competência Específica 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.</td></tr>
<tr><th>OBJETIVOS</th></tr>
<tr><td>Compreender o conceito de experimento aleatório;
Reconhecer e determinar um espaço amostral;
Compreender o que caracteriza um evento;
Classificar eventos aleatórios, sendo “impossível”, “certo” ou “elementar”;
Desenvolver os conceitos de experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos na resolução de problemas históricos, no caso, o Problema dos Dados resolvido por Galileu Galilei (1564 – 1642).</td></tr>
<tr><th>RECURSOS</th></tr>
<tr><td>Impressão da Atividade 1, lápis, borracha, três dados de 6 faces cada (para cada grupo).</td></tr>
</table>

ATIVIDADE 1

QUESTÃO 1 – Considere um jogo com dois dados honestos de 6 faces cada. Ao lançar os dados simultaneamente, o resultado será a soma de suas faces viradas para cima. Sendo assim, qual é o resultado de maior chance? Em qual soma você apostaria? Justifique.

1ª Etapa: Vamos fazer alguns lançamentos

Face do dado 1	***Face do dado 2***	***Resultado (soma)***

2ª Etapa: Agora, vamos pensar a partir dos resultados e, assim, verificar as possibilidades de cada face dos dados para encontrarmos a soma.

Resultados (soma)	***Face do dado 1***	***Face do dado 2***	***Possibilidades***

3ª Etapa: Vamos explorar algumas possibilidades deste mesmo jogo. Para isso, determine:

a. Todos resultados possíveis de ocorrerem

b. As possibilidades de ocorrer as mesmas faces viradas para cima

c. As possibilidades de ocorrer a soma ser igual a 3 e 7

d. As possibilidades de ocorrer a soma igual a 2 e 12

e. As possibilidades de ocorrer a soma maior ou igual a 2

f. As possibilidades de ocorrer a soma menor do que 2 ou maior do 12

QUESTÃO 2 – Agora, vamos acrescentar mais um dado honesto neste jogo. Nesse caso, o jogo com três dados de 6 faces cada são lançados simultaneamente e tem como resultado a soma das três faces viradas para cima. Novamente, em qual resultado você apostaria?

1ª Etapa: Vamos fazer alguns lançamentos.

Face do dado 1	*Face do dado 2*	*Face do dado 3*	*Resultado (soma)*

2ª Etapa: Agora, vamos pensar a partir dos resultados e, assim, verificar as possibilidades de cada face dos dados para encontrarmos a soma.

Resultados (soma)	*Face do dado 1*	*Face do dado 2*	*Face do dado 3*	*Possibilidades*

3ª Etapa: Vamos explorar algumas possibilidades deste mesmo jogo. Para isso, determine:

a. As possibilidades de ocorrer a soma ser igual a 3 e 18

b. As possibilidades de ocorrer a soma ser igual 6 e 7

c. As possibilidades de ocorrer a soma ser igual 9 e 10;

d. Embora sejam iguais as possibilidades de a soma ser igual 9 e 10, mostre que a possibilidade de aparecer 10 é maior do 9.

APÊNDICE B – ATIVIDADE 2

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES
Competência Específica 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. ▪ **(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. **Competência Específica 5.** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. ▪ **(EM13MAT511)** Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.
OBJETIVOS
▪ Reconhecer e determinar um espaço amostral; ▪ Compreender o que caracteriza um evento; ▪ Classificar eventos aleatórios, sendo “impossível”, “certo” ou “elementar”; ▪ Compreender o conceito de probabilidade; ▪ Calcular a probabilidade de determinado evento e da união de eventos ocorrer nas formas fracionária, decimal e percentual; ▪ Calcular a probabilidade de acontecimentos em um espaço amostral; ▪ Calcular a probabilidade de um evento não ocorrer.
RECURSOS
Impressão da Atividade 2, lápis e borracha.

ATIVIDADE 2

QUESTÃO 1. Considere as seguintes situações:

1ª situação. No lançamento de um dado honesto de 6 faces, a probabilidade de sair o número 3 é menor do que a probabilidade de sair o número 5?

2ª situação. No lançamento de uma moeda, qual a probabilidade de sair "cara"? E de não sair "cara"?

3ª situação. No lançamento de dois dados honestos de 6 faces cada, qual probabilidade de a soma dos resultados dos dois dados ser maior do que 7? E a probabilidade de não ocorrer um número maior do que 7?

4ª situação. Uma urna contém 30 bolas numeradas de 1 a 30. Retirando-se uma bola ao acaso, qual é a probabilidade de que seu número seja:

a. Par?
b. Ímpar?
c. Par e menor do que 15?
d. Múltiplo de 4 ou de 5?

5ª situação. Considerando o lançamento de um dado honesto de 6 faces, determine a probabilidade de obter um número de pontos ímpar ou um número de pontos maior do que 2.

6ª situação. Em um experimento aleatório são lançados um dado e uma moeda. Calcule a probabilidade de se obter:

a. Uma cara e um número 3.
b. Uma cara e um número par.
c. Uma coroa ou um número ímpar.

REFERÊNCIAS DO MATERIAL

ANDRADE, Thais Marcelle de (ed.). **Matemática Interligada**: estatística, análise combinatória e probabilidade. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; DE SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática**: estatística, análise combinatória e probabilidade. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.

APÊNDICE C – ATIVIDADE 3 (Problema dos Pontos)

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES
Competência Específica 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. ▪ **(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. **Competência Específica 5.** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. ▪ **(EM13MAT511)** Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.
OBJETIVOS
▪ Reconhecer e determinar um espaço amostral; ▪ Compreender o que caracteriza um evento; ▪ Calcular a probabilidade de determinado evento ocorrer nas formas fracionária, decimal e percentual; ▪ Calcular a probabilidade de acontecimentos em um espaço amostral; ▪ Calcular a probabilidade de um evento não ocorrer; ▪ Desenvolver os conceitos de experimentos aleatórios, espaço amostral, eventos e cálculo de probabilidade na resolução de problemas históricos, no caso, o Problema dos Pontos resolvido por Blaise Pascal (1623 – 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665).
RECURSOS
Impressão da Atividade 3, moedas, lápis e borracha.

ATIVIDADE 3

QUESTÃO 1 – Você irá jogar cara e coroa com um colega e cada um aposta 32 reais (total 64 reais), sendo o vencedor aquele que obtiver três pontos primeiro. E suponha que o jogo seja **interrompido** ou ambos os jogadores decidam parar o jogo. Como deveria ser dividida as apostas?

Vamos explorar algumas possibilidades deste mesmo jogo. Para isso, determine os casos possíveis e uma forma justa de dividir o prêmio para cada caso encontrado.

APÊNDICE D – ATIVIDADES DE REVISÃO (parte 1)

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES
Competência Específica 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. ▪ **(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. **Competência Específica 5.** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. ▪ **(EM13MAT511)** Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.
OBJETIVOS
▪ Reconhecer e determinar um espaço amostral; ▪ Compreender o que caracteriza um evento; ▪ Calcular a probabilidade de determinado evento ocorrer nas formas fracionária, decimal e percentual; ▪ Calcular a probabilidade de acontecimentos em um espaço amostral;
RECURSOS
Impressão das atividades de revisão (parte 1), lápis e borracha.

ATIVIDADES DE REVISÃO (parte 1)

EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS, ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTOS

QUESTÃO 1. (MORAES, 2014) Uma partida do campeonato carioca de futebol possui um árbitro de futebol meio atrapalhado, ele tem no bolso um cartão amarelo, um cartão vermelho e um cartão com uma face amarela e uma face vermelha. Depois de uma jogada muito violenta, o árbitro mostra um cartão, retirado do bolso ao acaso, para um jogador de uma das equipes. Se a face que o jogador vê é amarela, qual é a probabilidade da face voltada para o juiz ser vermelha?

a) 1/4 b) 2/3 c) 1/2 d) 1/3

QUESTÃO 2. Em uma urna são colocadas 3 bolas idênticas numeradas de 1 a 3. São sorteadas duas dessas bolas com reposição, ou seja, sorteia-se uma bola, que é reposta na urna e, em seguida, sorteia-se novamente uma bola.

a. Escreva o espaço amostral Ω desse experimento;
b. Determine o evento A, da ocorrência de dois números pares;
c. Determine o evento B, da ocorrência do 1° número sorteado ser maior do que o 2°
d. Determine o evento C, da ocorrência do produto dos números sorteadores ser menor do que

PROBABILIDADE DE UM EVENTO E DA UNIÃO DE EVENTOS

QUESTÃO 3. Duas moedas honestas são lançadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de se obter uma cara e uma coroa?

QUESTÃO 4. Em uma urna são colocadas 9 bolas idênticas numeradas de 1 a 9. Ao sortear uma bola, calcule a probabilidade de ela conter:

a. Um número par;
b. Um número ímpar;
c. Um número múltiplo de 5;
d. Um número maior do que 7.

QUESTÃO 5. Em um experimento aleatório são lançados um dado e uma moeda, ambos honestos. Calcule a probabilidade de se obter:

a. Uma cara ou um número 3;
b. Uma cara ou um número par;
c. Uma coroa e um número par.

QUESTÃO 6. Elabore o enunciado de um problema de probabilidade com pelo menos 3 itens a seguir:

i. Espaço amostral contendo 3 elementos;
ii. Espaço amostral contendo 6 elementos;
iii. Um problema que envolva um evento elementar;
iv. Um problema que envolva um evento certo;
v. Um problema que um evento impossível;
vi. Um problema que envolva cálculo da probabilidade de um evento;
vii. Um problema que envolva o cálculo da probabilidade da união de eventos;

Agora, peça para colega ao lado que tente resolver o problema criado por você.

REFERÊNCIAS DO MATERIAL
ANDRADE, Thais Marcelle de (ed.). **Matemática Interligada**: estatística, análise combinatória e probabilidade. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020. BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; DE SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática**: estatística, análise combinatória e probabilidade. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020. MORAES, Luís Cláudio Longo. **Ensino de Probabilidade**: Historicidade e Interdisciplinaridade. 2014. 136 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2014.

APÊNDICE E – ATIVIDADE 4 (Dilema de Monty Hall)

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES
Competência Específica 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. ▪ **(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. ▪ **(EM13MAT312)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. **Competência Específica 5.** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. ▪ **(EM13MAT511)** Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.
OBJETIVOS
▪ Reconhecer e determinar um espaço amostral; ▪ Compreender o que caracteriza um evento; ▪ Compreender e aplicar o conceito de probabilidade condicional; ▪ Desenvolver os conceitos de probabilidade condicional na resolução de problemas históricos, no caso, o dilema de Monty Hall resolvido por Marilyn vos Savant (1946 – presente).
RECURSOS
Impressão da Atividade 4, copos coloridos, brinquedos (carrinhos e animais), lápis e borracha.

ATIVIDADE 4

QUESTÃO 1 – O dilema de Monty Hall, cujo nome é inspirado no apresentador do programa televisivo estadunidense *"Let's Make a Deal"* transmitido de 1963 a 1976, tem o seguinte enunciado:

"Suponha que os participantes de um programa de auditório recebam a opção de escolher uma dentre três portas: atrás de uma delas há um carro; atrás das outras, há cabras. Depois que um dos participantes escolhe uma porta, o apresentador, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das portas não escolhidas, revelando uma cabra. Ele diz então ao participante: ***'Você gostaria de mudar sua escolha para a outra porta fechada?' Para o participante, é vantajoso trocar sua escolha?"***

1ª Etapa: Tendo em vista o problema apresentado, em qual estratégia você utilizaria? Justifique.

2ª Etapa:

Marilyn vos Savant (1946 - presente), citada no *Livro Guinness dos Recordes* como pessoa de maior QI e escritora da coluna *"Ask Marilyn"* de uma revista estadunidense, trouxe uma solução para o problema de Monty Hall ao final do século XX. Marilyn afirmou em sua coluna que **é vantajoso mudar a escolha.** Apesar de tratar de um problema simples, sua solução foi alvo de muitas críticas pela comunidade de matemáticos estadunidenses, levando Marilyn, que não era matemática, a receber uma avalanche de correspondências de matemáticos proeminentes afirmando que estava **incorreta.**

Em uma das correspondências que Marilyn recebeu, escreveu um matemático da Universidade George Mason:

"Deixe-me explicar: se mostrarmos que uma das portas não contém o prêmio, essa informação altera a probabilidade das duas escolhas remanescentes para 1/2 – e nenhuma das duas apresenta motivos para ter probabilidade maior que a outra. Como matemático profissional, estou muito preocupado com a falta de conhecimentos matemáticos do público em geral. Por favor, ajude a melhorar essa situação confessando o seu erro e sendo mais cuidadosa no futuro."

3ª Etapa:

Seria correta essa afirmação? Para testar sua validade, realize junto com um colega algumas rodadas do problema de Monty Hall optando pelas estratégias de manter e mudar de escolha.

Rodada	*Manteve ou mudou?*	*Ganhou ou perdeu?*
1ª		
2ª		
3ª		
4ª		
5ª		
6ª		
7ª		
8ª		
9ª		
10ª		

4ª Etapa:
Após realizar o jogo de Monty, tente esquematizar as estratégias na árvore de possibilidades.

QUESTÃO 2. Para levantar informações em relação ao hábito de leitura de uma turma, um professor de Literatura perguntou aos 36 alunos se já haviam lido algum livro de Manuel Bandeira ou de Clarice Lispector. Desses alunos, 18 leram algum livro de Manuel Bandeira, 10 leram algum livro de Clarice Lispector, 8 leram livros dos dois autores e 16 não leram livros desses autores.

a. Sorteando um desses alunos, qual é a probabilidade de ele ter lido algum livro dos dois autores?

b. Realizando um sorteio entre alunos que leram algum livro de Manuel Bandeira, qual é a probabilidade de ele ter lido também algum livro de Clarice Lispector?

QUESTÃO 3. Em uma escola com 600 alunos, 40 ficaram de recuperação apenas em Matemática, dez, somente em Física, e cinco, nas duas disciplinas. Determine a probabilidade de um estudante fazer recuperação de Física, sabendo que ele ficou de recuperação de Matemática.

APÊNDICE F – ATIVIDADES DE REVISÃO (parte 2)

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES
Competência Específica 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. ▪ **(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. ▪ **(EM13MAT312)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. **Competência Específica 5.** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. ▪ **(EM13MAT511)** Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.
OBJETIVOS
▪ Reconhecer e determinar um espaço amostral; ▪ Compreender o que caracteriza um evento; ▪ Compreender e aplicar o conceito de probabilidade condicional;
RECURSOS
Impressão da Atividade 4, lápis e borracha.

ATIVIDADES DE REVISÃO (PARTE 2)

PROBABILIDADE CONDICIONAL

QUESTÃO 1. Dois jogadores, Kleber e Arnaldo, lançam um dado, cada um uma única vez. Vence o jogo quem tirar o maior número. Sabendo que Kleber tirou 4, qual é a probabilidade de:

a. Kleber vencer?
b. Haver empate?
c. Arnaldo vencer?

QUESTÃO 2. (Enem/MEC) Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

a. $\frac{1}{2}$
b. $\frac{5}{8}$
c. $\frac{1}{4}$
d. $\frac{5}{6}$
e. $\frac{5}{14}$

QUESTÃO 3. (MORAES, 2014) Uma pesquisa realizada entre 1000 consumidores, registrou que 650 deles trabalham com cartões de crédito da bandeira MasterCard, que 550 trabalham com cartões de crédito da bandeira VISA e que 200 trabalham com cartões de crédito de ambas as bandeiras. Qual a probabilidade de, ao escolhermos, desse grupo, uma pessoa que utiliza a bandeira VISA, ser também um dos consumidores que utilizam cartões de crédito da bandeira MasterCard?

a) 10% b) 30% c) 40% d) 20%

REFERÊNCIAS DO MATERIAL

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; DE SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática**: estatística, análise combinatória e probabilidade. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.

MORAES, Luís Cláudio Longo. **Ensino de Probabilidade**: Historicidade e Interdisciplinaridade. 2014. 136 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2014.

APÊNDICE G – ATIVIDADE FINAL

ATIVIDADE FINAL

Caro(a) aluno(a),

Esta atividade final faz parte de uma pesquisa acadêmica envolvendo atividades sobre os conceitos de probabilidade e probabilidade condicional com problemas históricos, propostas durante as aulas de Matemática. Sua participação é voluntária e extremamente valiosa para a pesquisa.
Antes de começar, leia as instruções abaixo:

- Suas respostas serão mantidas em sigilo e utilizadas apenas para fins acadêmicos. Não é necessário fornecer informações pessoais;
- Não existem respostas certas ou erradas. Queremos saber a sua opinião sincera e pessoal;
- Caso não queira responder alguma pergunta, fique à vontade para deixá-la em branco. A sua participação é voluntária.

1. Algum momento ou atividade durante as aulas chamou a sua atenção? Por quê?

2. Você se interessou em resolver algum dos problemas propostos? Que problema(s)? Por quê?

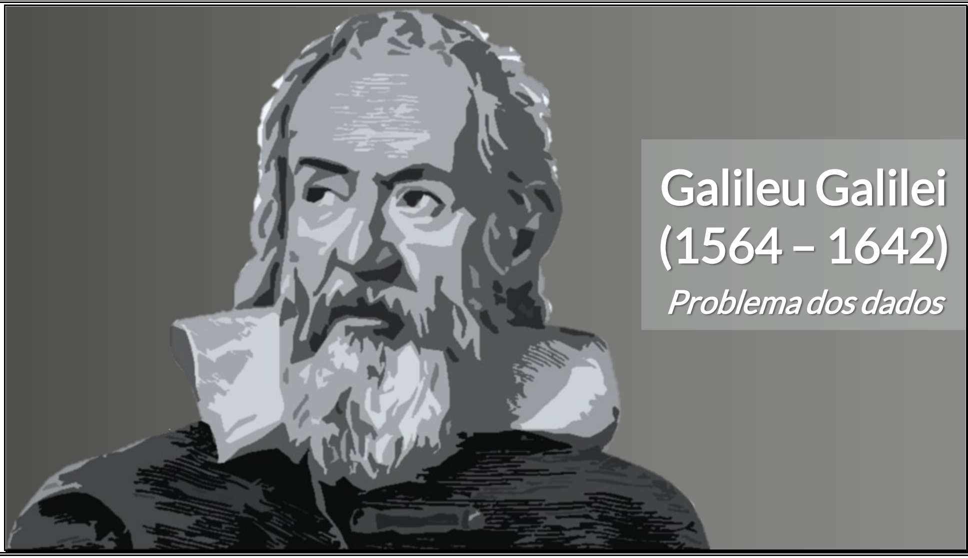
3. Você entende que compreendeu os conceitos de probabilidade e probabilidade condicional (por exemplo: espaço amostral, evento, etc.) com problemas históricos? Você destacaria alguma atividade que contribuiu para isto? Por quê?

4. Você se sente seguro para resolver problemas que envolvem os conceitos de probabilidade e probabilidade condicional? Os problemas históricos e suas soluções ajudaram você a entender melhor os conceitos? Ou você sentiu dificuldades em compreender problemas e/ou suas soluções?

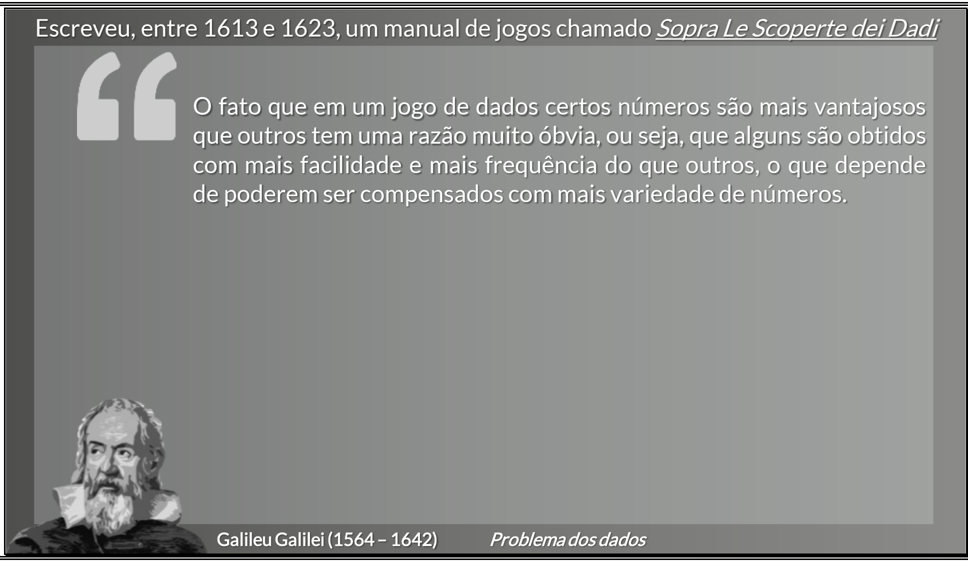
5. Ao explorarmos os problemas históricos, notamos que os jogos de azar e seguros desempenharam um papel significativo no desenvolvimento inicial da Teoria da Probabilidade. Além disso, indivíduos não diretamente relacionados à Matemática também fizeram contribuições importantes, como apostadores em busca de lucro, um magistrado com interesse em Matemática como passatempo, e até mesmo uma mulher que acertou um problema que muitos matemáticos haviam errado. Você acredita que a inclusão desses elementos contribuiu para que você entendesse mais sobre como a Matemática é produzida? Concorda que os matemáticos são sempre homens geniais? Por quê?

APÊNDICE H – Apresentação dos problemas

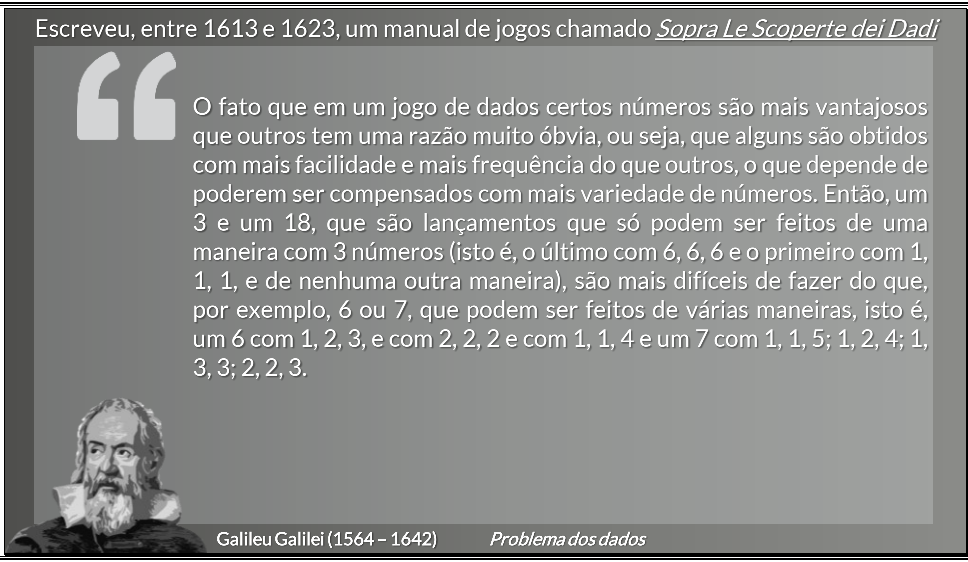
SLIDE 1



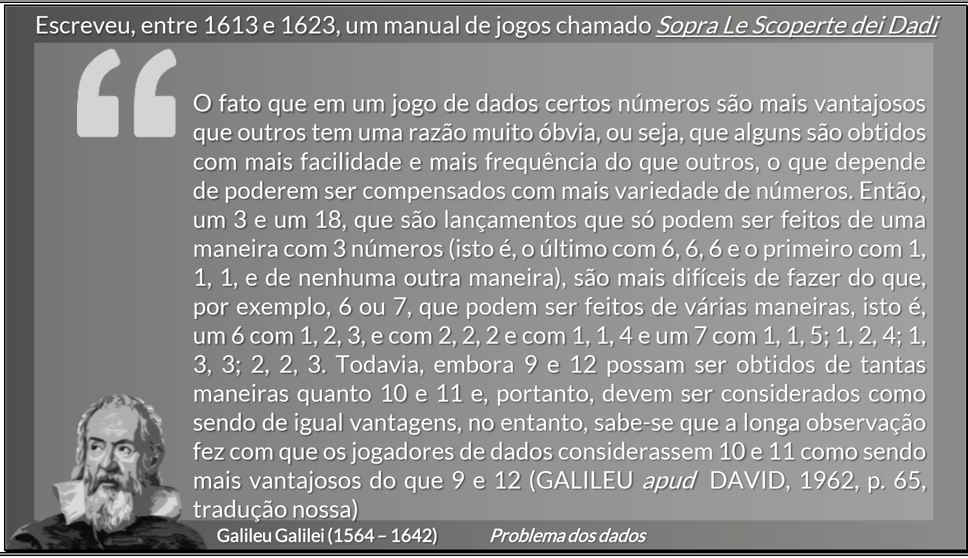
SLIDE 2



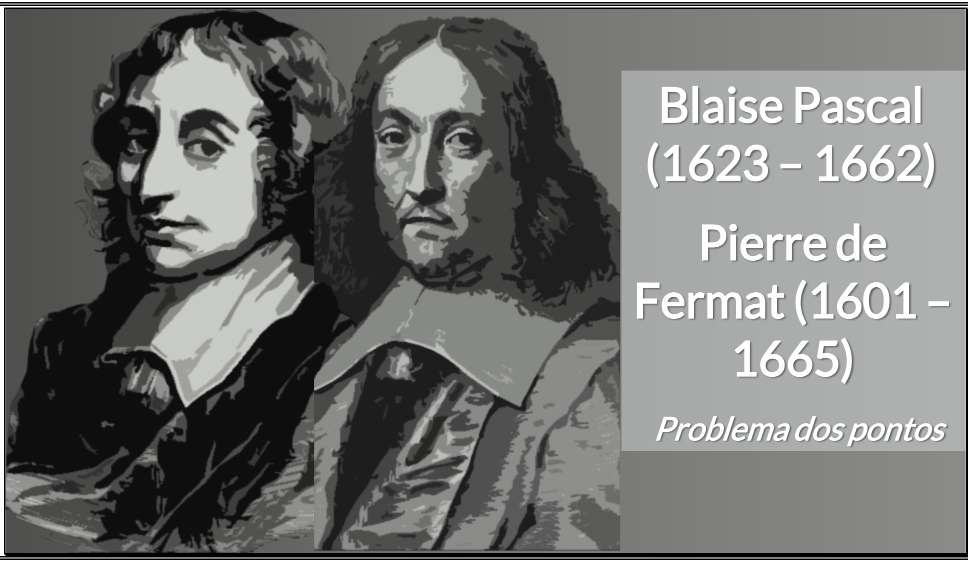
SLIDE 3



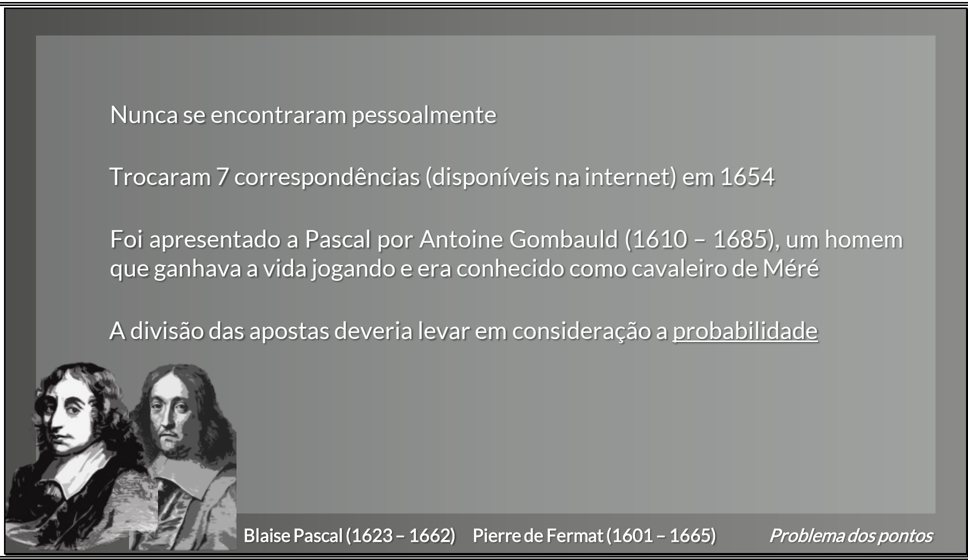
SLIDE 4



SLIDE 5



SLIDE 6



SLIDE 7

SLIDE 8