

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

Dinâmica Hiperbólica e Rigidez de Difeomorfismos de Anosov no Toro

Eric de Oliveira Silva

ITAJUBÁ – MG

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

Eric de Oliveira Silva

**Dinâmica Hiperbólica e Rigidez de Difeomorfismos de Anosov no
Toro**

Orientador: Fernando Pereira Micena

ITAJUBÁ – MG

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

Eric de Oliveira Silva

**Dinâmica Hiperbólica e Rigidez de Difeomorfismos de Anosov no
Toro**

Dissertação de mestrado apresentada à banca examinadora em 5 de Dezembro de 2024.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Pereira Micena (Orientador)

Prof. Dr. José Santana Campos Costa

Prof. Dr. Luís Fernando de Osório Mello

ITAJUBÁ – MG

2024

Agradecimentos

Quero começar agradecendo ao Divino por iluminar meu caminho e me dar força para chegar até aqui.

Agradeço muito à minha família, que me acolheu desde o nascimento, ensinou valores importantes e sempre me apoiou, especialmente minha mãe Denise e meu pai Sérgio. Também sou grato às famílias que escolhi durante a vida, que me inspiraram e me encorajaram a seguir meus sonhos.

Um agradecimento especial à Anne Carolini, minha companheira, cujo amor, paciência e compreensão foram fundamentais durante meus estudos.

Aos meus amigos José Henrique, Bruno Gama, Rodrigo Lima, Júlio Cardoso, Lucinha, Henrique, Edson Alexsander, César Viana, Jorge Guitierrez e Liomar, obrigado por todo o apoio e amizade, que foram essenciais para mim.

Lembro com carinho do Alexandre Paulo, um amigo que se foi cedo. Ele me inspirou a perseguir meus sonhos acadêmicos, especialmente durante a pandemia, período no qual ele se foi.

Por fim, meu sincero agradecimento ao professor Dr. Fernando Pereira Micena, que foi mais do que um educador, mas também um grande ser humano que influenciou profundamente minha vida acadêmica e pessoal.

Expresso gratidão também ao corpo docente do PMAT.

Dirijo agradecimentos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), instituição cujo suporte foi decisivo para a realização do meu mestrado.

"Reductio ad absurdum, que Euclides tanto gostava, é uma das melhores armas do matemático. É um gambito muito mais fino do que qualquer jogada de xadrez: um jogador de xadrez pode oferecer o sacrifício de um peão ou até mesmo de uma peça com mais valor, mas um matemático oferece o jogo." - Godfrey Harold Hardy

Resumo

Dinâmica Hiperbólica é uma das áreas mais importantes no estudo de sistemas dinâmicos. De maneira geral, um conjunto hiperbólico para uma dinâmica é um conjunto compacto, não vazio e invariante, tal que para todo ponto neste conjunto, o espaço tangente se decompõe em soma direta de dois subespaços: um estável (uniformemente contrativo por ação da derivada) e um instável (uniformemente expansor por ação da derivada), os quais são invariantes pela ação da derivada. Através do Teorema da Variedade Estável sabe-se que estes subfibrados (estável e instável) admitem variedades locais invariantes pela dinâmica. Uma classe especial das dinâmicas hiperbólicas que terá lugar neste documento é a classe dos difeomorfismos de Anosov. Merecem destaque também os difeomorfismos tipo Axioma A, para os quais é válido o Teorema Espectral de Smale. Difeomorfismos de Anosov e do tipo Axioma A satisfazem propriedades de sombreamento, que são indispensáveis no estudo da estabilidade estrutural em dinâmica hiperbólica. Quando se trata de estabilidade estrutural, podemos nos perguntar sobre condições suficientes para que a conjugação topológica envolvida seja de classe C^1 . Pode-se mostrar que quando um difeomorfismo de Anosov no toro $\mathbb{T}^2$ tem mesmos dados periódicos que sua linearização, então estes dois são de fato C^1 conjugados, e isto pode ser obtido como aplicação do Teorema de Livsic.

Palavras-chaves: Dinâmica Hiperbólica, Sistemas Dinâmicos, Conjunto Hiperbólico, Subespaços Estável e Instável, Teorema da Variedade Estável, Difeomorfismos de Anosov, Difeomorfismos do Tipo Axioma A, Teorema Espectral de Smale, Propriedades de

Sombreamento, Estabilidade Estrutural, Conjugação Topológica C^1 , Teorema de Livsic,
Linearização no Toro $\mathbb{T}^2$

Abstract

Hyperbolic Dynamics is one of the most important areas in the study of dynamical systems. Roughly speaking, a hyperbolic set for a dynamic is a non-empty, compact, and invariant set, such that for every point in this set, the tangent space decomposes as a direct sum of two subspaces: one stable (uniformly contractive) and one unstable (uniformly expansive), both of which are invariant under the action of the derivative. Through the Stable Manifold Theorem, it is known that these subbundles (stable and unstable) admit local manifolds that are invariant under the dynamics. In the study of hyperbolic dynamical systems, some classes of dynamics deserve greater emphasis, namely diffeomorphisms of the Axiom A type and Anosov Diffeomorphisms. In the case of Axiom A type diffeomorphisms, the Smale Spectral Theorem is valid, a central result in the study of these types of transformations. Anosov Diffeomorphisms and Axiom A type satisfy shadowing properties, which are indispensable in the study of structural stability in hyperbolic dynamics. When it comes to structural stability, we can ask about sufficient conditions for the involved topological conjugation to be of class C^1 . It can be shown that when an Anosov diffeomorphism has the same periodic data as its linearization, then these two are indeed C^1 conjugated, and this can be obtained as an application of Livsic's Theorem.

Keywords: Hyperbolic Dynamics, Dynamical Systems, Hyperbolic Set, Stable and Unstable Subspaces, Stable Manifold Theorem, Anosov Diffeomorphisms, Axiom A Diffeomorphisms, Smale's Spectral Theorem, Shadowing Properties, Structural Stability, C^1

Topological Conjugacy, Livsic's Theorem, Linearization on the Torus $\mathbb{T}^2$

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
Sumário	vii
Lista de Figuras	ix
Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Conceitos preliminares	3
3 Dinâmica hiperbólica	19
3.1 Conjuntos hiperbólicos	19
3.2 ϵ -órbitas e o Teorema de Sombreamento	28
3.3 Cones invariantes	38
3.4 Estabilidade de conjunto hiperbólico	46
4 O Teorema Espectral de Smale	49
5 Difeomorfismos de Anosov	56
5.1 Estrutura de produto local e conjuntos hiperbólicos localmente maximal . .	56

5.2	Difeomorfismos de Anosov	62
6	Rigidez	67
6.1	Equações cohomológicas	67
6.2	O Teorema de Livšic	69
6.3	Rigidez de transformação expansoras de $\mathbb{S}^1$	78
6.4	Rigidez de difeomorfismos de Anosov no toro	86
6.5	Resultados complementares de rigidez	93
	Referências Bibliográficas	96

Lista de Figuras

2.1	Órbita total de f	4
2.2	Representação gráfica do Exemplo 1.1.	6
2.3	Representação gráfica do Exemplo 1.2.	6
2.4	Representação gráfica do Exemplo 1.3.(1)	7
2.5	Representação gráfica do Exemplo 1.3 (2).	7
2.6	Rotação.	11
2.7	R_α preserva comprimento.	12
2.8	Diagrama de conjugação.	17
2.9	Órbitas conjugadas.	18
3.1	Divisão do quadrado unitário.	26
3.2	Retângulos ternários horizontais.	26
3.3	Aplicação da f	27
3.4	Aplicação da f^{-1}	27
3.5	Ilustração da construção do conjunto A	28
3.6	Pseudo órbita	29
3.7	Cone instável e a diferencial.	40
3.8	Cone estável e a diferencial.	40
4.1	Ilustração λ -lema.	51
4.2	Ilustração das Variedades Estáveis e Instáveis de p e q	52
4.3	Variedades Estáveis e Instáveis de x e y em uma vizinhança $B_\epsilon(\Lambda_p)$	53
4.4	Variedades Estáveis e Instáveis de p, q, a e b	54

4.5	Apoio ilustrativo do Teorema 3.3(4).	54
5.1	Ilustração do Lema 4.1.	57
5.2	Ação da f	60
5.3	Interseções das Variedades Estáveis e Instáveis.	61
6.1	Intervalos de injetividade [19].	85
6.2	Convergência dos segmentos [19].	92

Capítulo 1

Introdução

A área de sistemas dinâmicos é um campo de estudo fundamental na matemática. Nele, a dinâmica hiperbólica se destaca por sua estrutura rigorosa e propriedades robustas.

As referências básicas nas quais se baseiam o presente texto são Brin e Stuck [3] (2002), Katok e Hasselblatt [11] (1995), que fornecem uma introdução aos sistemas dinâmicos, estabelecendo uma base sólida para o entendimento do campo. Além disso, os trabalhos de Rufus Bowen [2] (1975), Rafael De la Llave [4] (1992), Gogolev e Guysinky [6] (2008), Journé [10] (1988), Ledrappier [12] (1984), A. Livsic [13] (1972), M. Shub [18] (1969), Marcelo Viana e Kreley [20] (2016), F. Micena e R. De La Llave [16] (2021) oferecem base para este estudo sobre dinâmica hiperbólica, mais especificamente, nos fenômenos de rigidez.

O principal objetivo desta dissertação é desenvolver um material introdutório sobre dinâmica hiperbólica. De modo que este trabalho seja entendido como mais um recurso para estudantes e pesquisadores que buscam uma compreensão do tema.

Começaremos introduzindo definições e resultados básicos da teoria de sistemas dinâmicos discretos, estabelecendo as bases para os temas subsequentes. Logo em seguida, abordaremos o conceito de conjunto hiperbólico e apresentaremos a dinâmica hiperbólica, juntamente com algumas ferramentas fundamentais. Discutiremos brevemente o teorema da variedade estável e instável e exploraremos resultados como o teorema espectral de Smale. Examinaremos em detalhe os difeomorfismos de Anosov, indo além das definições

básicas para explorar propriedades e estruturas geométricas. Por fim, argumentaremos sobre a rigidez de transformações expansoras em $\mathbb{S}^1$ e de difeomorfismos de Anosov.

Capítulo 2

Conceitos preliminares

Um sistema dinâmico é essencialmente uma sequência de iterações por uma função específica, atuando sobre um espaço M dotado de certas propriedades. O espaço M pode assumir diversas estruturas, como um espaço topológico, uma variedade ou até mesmo um espaço métrico compacto. A função em questão, denotada por f deve ter certas propriedades a fim de que se obtenha resultados interessantes, tais como: continuidade, diferenciabilidade, mensurabilidade dentre outros.

No contexto de tempo discreto, a iteração é a aplicação da função f repetidas vezes um ponto inicial x , que resulta na sequência $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots$.

Definição 1. *Sejam M espaço métrico e $f : M \rightarrow M$ uma função contínua. Dado $x \in M$. Defina a órbita positiva de x como*

$$O_f^+(x) = \bigcup_{n \geq 0} \{f^n(x)\}.$$

Se f for invertível, a órbita negativa de x é definida como

$$O_f^-(x) = \bigcup_{n \geq 0} \{f^{-n}(x)\},$$

e a órbita total de x é definida como

$$O_f(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{f^n(x)\}.$$

Veja uma ilustração na Figura 2.1.

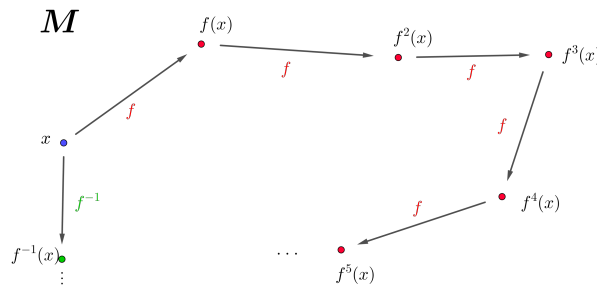


Figura 2.1: Órbita total de f .

Definição 2. *Sejam M um espaço métrico e $f : M \rightarrow M$ uma função contínua. $x \in M$ é ponto fixo de f se, e somente se, $f(x) = x$.*

Definição 3. *Sejam M um espaço métrico e $f : M \rightarrow M$ uma função contínua. Um ponto $x \in M$ é periódico de período $k \in \mathbb{N}$ se $f^k(x) = x$ se $1 \leq j < k$ então $f^j(x) \neq x$.*

Se x é periódico de período k , tem-se que $O_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{k-1}(x)\}$ forma

um conjunto finito. $O_f(x)$ neste caso é chamada de órbita periódica.

Definição 4 (Ponto fixo atrator). *Um ponto fixo p de uma aplicação $f : X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico, é chamado de ponto fixo atrator se existir uma vizinhança U de p tal que*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(U) = \{p\}.$$

Definição 5 (Ponto fixo repulsor). *Um ponto fixo p de uma aplicação $f : X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico, é chamado de ponto fixo repulsor se existir uma vizinhança U de p tal que $f(U) \subset U$ e*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U) = \{p\}.$$

Exemplo 2.1. *Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x$.*

Este exemplo mostra uma dinâmica simples, na qual é fácil verificar a existência de um ponto fixo em $x = 0$. Veja que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $f(0) = 0$, $f^2(0) = 0, \dots$, $f^n(0) = 0$.

Ao analisar o gráfico de f em conjunto com a função identidade, identificamos os pontos fixos nas interseções dos seus gráficos. Além disso, essa representação gráfica nos permite observar o comportamento assintótico da dinâmica, isto é, o comportamento das órbitas de f em relação ao tempo. O ponto $x = 0$ é um ponto fixo repulsor.

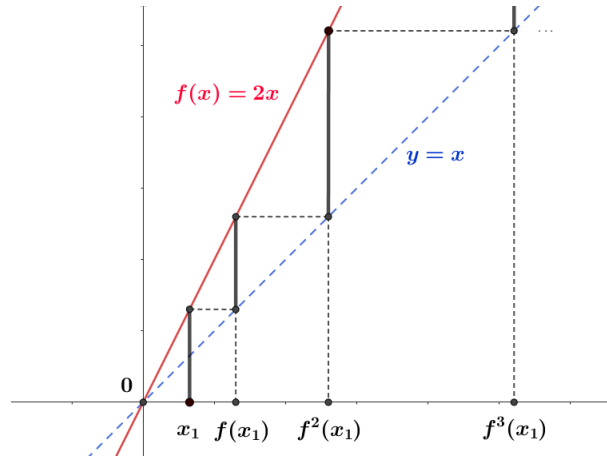


Figura 2.2: Representação gráfica do Exemplo 1.1.

Exemplo 2.2. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}x$.

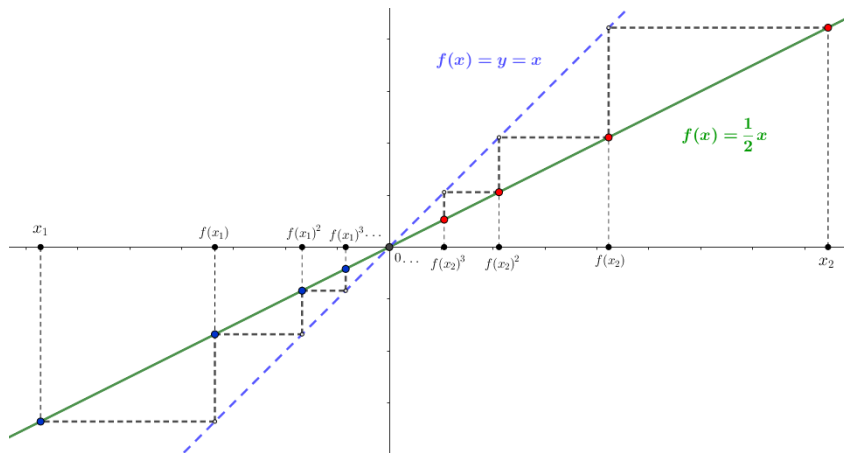


Figura 2.3: Representação gráfica do Exemplo 1.2.

Temos um único ponto fixo $x = 0$, entretanto agora ele representa um ponto fixo atrator. Os pontos em vermelho e em azul estão sobre o gráfico de f . Suas projeções sobre o eixo x via o gráfico da função identidade coincidem com os pontos da órbita de f .

Exemplo 2.3. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto f(x) = x^3$.

Têm-se três pontos fixos, especificamente em $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$. A análise gráfica destaca a natureza distinta de cada ponto fixo: $x = -1$ e $x = 1$ surgem como pontos fixos repulsores, enquanto $x = 0$ se caracteriza como um ponto fixo atrator.

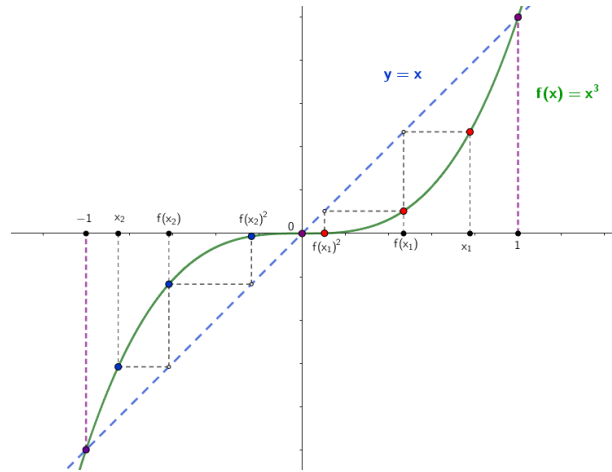


Figura 2.4: Representação gráfica do Exemplo 1.3.(1)

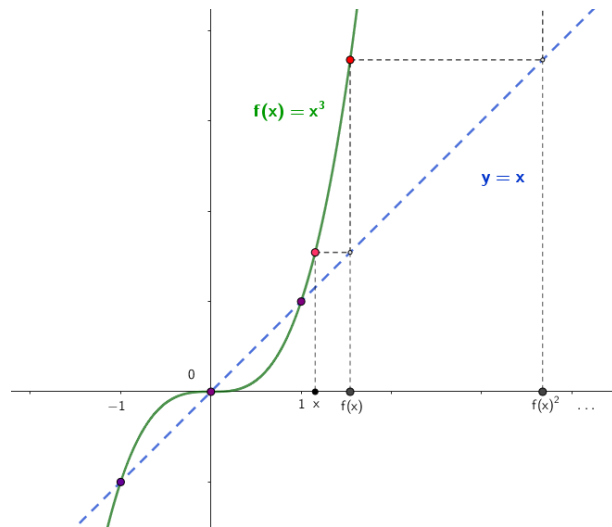


Figura 2.5: Representação gráfica do Exemplo 1.3 (2).

Definição 6. Sejam M um espaço métrico compacto e $f : M \rightarrow M$ uma função contínua. Definimos $\text{Fix}(f)$ como o conjunto de todos os pontos fixos em M da função f .

Definição 7. Sejam M um espaço métrico compacto e $f : M \rightarrow M$ uma função contínua. Definimos $\text{Per}(f)$ como o conjunto de todos os pontos periódicos da função f .

Definição 8. Considere M um espaço métrico compacto. Um sistema dinâmico dado por $f : M \rightarrow M$ é topologicamente transitivo se para quaisquer dois abertos não vazios $U, V \in M$, existe $n \geq 1$ tal que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset, \text{ ou equivalentemente}$$

$$f^{-n}(V) \cap U \neq \emptyset.$$

Em um sistema topologicamente transitivo, não é possível dividir o espaço em duas partes não vazias abertas que são invariantes sob a função f . De fato, se isso fosse possível, então a função f nunca levaria pontos de uma parte para a outra, o que contradiria a definição de transitividade.

Definição 9. Considere M um espaço métrico compacto. Um sistema dinâmico dado por $f : M \rightarrow M$ é topologicamente mixing se para quaisquer dois abertos não vazios $U, V \subset M$, existe $N = N(U, V)$ natural tal que para todo $n \geq N$ tem-se

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset, \text{ ou equivalentemente}$$

$$f^{-n}(V) \cap U \neq \emptyset.$$

Proposição 2.1. Se M é um espaço métrico compacto, então M tem base enumerável.

Demonstração. Seja M um espaço métrico compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$, construa uma cobertura aberta para M por $\frac{1}{n}$ -bolas. Pela compacidade do espaço cada cobertura aberta admite uma subcobertura finita em M , isto é, existem $x_1, x_2, \dots, x_N$ tal que

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{N(n)} B\left(x_i, \frac{1}{n}\right).$$

Fazer isto para cada $n \in \mathbb{N}$, obtem-se

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \mathcal{B}\left(x_i, \frac{1}{n}\right); 1 \leq i \leq N(n) \right\},$$

uma união enumerável de coleções finitas, portanto S é um conjunto enumerável.

Seja $x \in M$ e seja G aberto de M tal que $x \in G$. Como G é aberto de M , existe algum $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset G$. Escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$.

Seja então x_i tal que $x \in B(x_i, \frac{1}{n})$. Afirma-se que $B(x_i, \frac{1}{n}) \subset B(x, r)$. De fato, seja $y \in B(x_i, \frac{1}{n})$, temos

$$\begin{aligned} d(y, x) &\leq d(y, x_i) + d(x_i, x) \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{2}{n} < r. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.2. Se $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ são compactos encaixados não vazios em um espaço métrico, então $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$.

Demonstração. Escolhamos para cada $n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in F_n$. Todos os pontos da sequência (x_n) pertencem ao compacto F_1 . Pela compacidade de F_1 , a sequência (x_n) possui uma subsequência convergente $x_{n_i} \rightarrow x$, onde $x \in F_1$.

Afirmamos que $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$. Para provar isso, fixemos um $n \in \mathbb{N}$ arbitrário. Como $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$, existe um índice i_0 tal que para todo $i \geq i_0$, temos $x_{n_i} \in F_n$. Como F_n é fechado e $x_{n_i} \rightarrow x$, segue que $x \in F_n$.

Como n foi escolhido arbitrariamente, concluímos que $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$, e portanto essa interseção é não-vazia. □

Proposição 2.3. Se $O_f^+(x)$ é denso em M , então $O_f^+(f^k(x))$ também é denso em M .

Demonstração. Para mostrar que $O_f(f^k(x))$ é denso em M , precisamos provar que, para todo aberto $U \subseteq M$, temos $O_f(f^k(x)) \cap U \neq \emptyset$.

Sabemos que $O_f(x)$ é denso em M , então, para todo aberto $U \subseteq M$, temos $O_f(x) \cap U \neq \emptyset$. Isso significa que existe um $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(x) \in U$. Note que $O_f(f^k(x)) = \{f^{n+k}(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Tomemos $n_1 = n - k$. Como $n \in \mathbb{Z}$, também temos $n_1 \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, temos que:

$$f^{n_1+k}(x) = f^n(x) \in U.$$

Logo, $f^{n_1+k}(x) \in U$ para algum $n_1 \in \mathbb{Z}$.

Isso mostra que $O_f(f^k(x)) \cap U \neq \emptyset$. Portanto, $O_f(f^k(x))$ é denso em M .

□

Teorema 2.1. *Seja M espaço métrico compacto e $f : M \rightarrow M$ uma função contínua. Um sistema dinâmico dado por f é topologicamente transitivo se, e somente se, existe $x \in M$ tal que $O_f^+(x)$ é denso em M .*

Demonstração. Como M é um espaço métrico compacto, pela Proposição 2.1, sabemos que M possui uma base enumerável. Seja $\mathcal{B} = \{U_1, U_2, U_3, \dots\}$ uma base de M .

Suponha que f seja topologicamente transitiva. Isso significa que, para quaisquer abertos $U, V \subseteq M$, existe um inteiro $n \geq 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Escolha U_1 e U_2 , dois elementos quaisquer da base $\mathcal{B}$. Como f é topologicamente transitiva, existe um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_1}(U_2) \cap U_1 \neq \emptyset$. Isso implica que existe um ponto $z \in U_2$ tal que $f^{n_1}(z) \in U_1$.

Defina $x_1 = f^{n_1}(z) \in U_1$ e considere a bola $B_1 = U_1$, onde B_1 é um aberto da base que contém x_1 . Agora, tome uma bola B_2 com centro em x_1 e raio $0 < r_1 < \frac{1}{2}$, de forma que $\overline{B_2} \subset f^{-n_1}(U_2) \cap B_1$.

Em particular, se $x \in \overline{B_2}$, então $x \in B_1$ e $f^{n_1}(x) \in U_2$.

Agora, podemos construir iterativamente bolas B_i da seguinte forma:

Suponha que já construímos $B_1, B_2, \dots, B_{i-1}$, onde B_{i-1} é uma bola com raio r_{i-2} tal que $0 < r_{i-2} < \frac{1}{2^{i-2}}$ e $\overline{B_{i-1}} \subset f^{-n_{i-2}}(U_{i-1}) \cap B_{i-2}$.

Escolha $U_i \in \mathcal{B}$ e um inteiro $n_i \geq 0$ tal que $f^{-n_i}(U_i) \cap B_{i-1} \neq \emptyset$. Agora, tome B_i como uma bola com raio r_{i-1} tal que $0 < r_{i-1} < \frac{1}{2^{i-1}}$ e $\overline{B_i} \subset f^{-n_i}(U_i) \cap B_{i-1}$.

Dessa forma, temos que:

Se $z \in B_3$, então $z \in \overline{B_3} \cap \overline{B_2}$;

Se $z \in B_3$, então $O_f^+(z) \cap U_3 \neq \emptyset$;

Se $z \in B_2$, então $O_f^+(z) \cap U_2 \neq \emptyset$;

Se $z \in B_1$, então $O_f^+(z) \cap U_1 \neq \emptyset$;

Se $z \in \overline{B_i}$, então $O_f^+(z) \cap U_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Prossegue-se indutivamente, que $z \in \overline{B_n} \Rightarrow O_f^+(z) \cap U_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Assim, defina

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \neq \emptyset.$$

Para $z \in B$, temos que $z \in B_n$, logo $O_f^+(z) \cap U_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq 1$. Portanto, $O_f^+(z)$ é um conjunto denso em M .

Por outro lado suponha que exista um ponto x com órbita densa para f . Considere U e V dois abertos não vazios em M . Como a órbita de x é densa em M , existe $k \geq 0$ tal que $f^k(x) \in U$. Pela Proposição 2.3, sabemos que $O_f(f^k(x))$ é denso em M .

Seja $f^k(x) = z$; então, existe $j \geq 0$ tal que $f^j(z) \cap V \neq \emptyset$. Como $z \in U$, temos que

$$f^j(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Isso mostra que f é topologicamente transitiva.

□

Exemplo 2.4. Sejam $\mathbb{S}^1 = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ e $d(x, y) = \min(|x - y|, 1 - |x - y|)$ métrica em $\mathbb{S}^1$. Considere a rotação $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $x \mapsto x + \alpha \pmod{1}$.

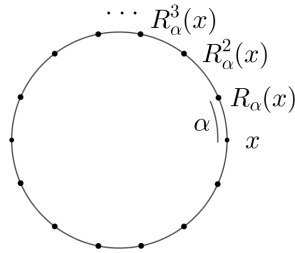


Figura 2.6: Rotação.

Dadas as iteradas $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$, $R_\alpha^2(x) = x + 2\alpha \pmod{1}$, $\dots$, $R_\alpha^n(x) = x + n\alpha \pmod{1}$. Têm-se dois casos a explorar, α racional e α irracional.

Se α é racional, ou seja $\alpha = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, p é o número de voltas ou período no círculo e tome p e q primos entre si. Segue que $R_\alpha^q(x) = x$, em outras palavras todos pontos de $\mathbb{S}^1$ são periódicos de ordem q . Seja $[x]$ a classe de equivalência de x no círculo $\mathbb{S}^1$, isto é, $[x]$ representa o valor de $x \pmod{1}$, ou seja, o valor de x no intervalo $[0, 1)$ ao considerar as equivalências definidas pelas rotações no círculo unitário $\mathbb{S}^1$.

Note que $[x]$ identifica todos os números reais x que diferem entre si por um múltiplo inteiro de 1, ou seja, $x \sim y$ se e somente se $x - y \in \mathbb{Z}$. Com isto a órbita da rotação tem a forma

$$O_{R_\alpha} = \left\{ [x], \left[x + \frac{p}{q} \right], \left[x + 2\frac{p}{q} \right], \dots, \left[x + (q-1)\frac{p}{q} \right] \right\}.$$

Se α é irracional, órbita neste caso é infinita. Neste caso a órbita será dada por $O_{R_\alpha}(x) = \{[x + n\alpha]\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Suponha por absurdo que $[x + n\alpha] = [x + m\alpha]$, $n, m \in \mathbb{Z}$ com $m \neq n$. Então $(x + n\alpha) - (x + m\alpha) = k \in \mathbb{Z}$. Além disso, $n\alpha + m\alpha = k$ o que implica que $\alpha = \frac{k}{m-n} \in \mathbb{Q}$, o que resulta em um absurdo. Portanto, $O_{R_\alpha} = \{[x + n\alpha]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é infinita.

Temos também que a órbita $O_{R_\alpha}(x)$ é densa em $\mathbb{S}^1$. Sejam $\epsilon > 0$, $I_\epsilon = (a, b)$ com $0 < b - a < \epsilon$ e $x \in \mathbb{S}^1$. Quer-se encontrar um inteiro $l \geq 1$, tal que $R_\alpha^l \in I_\epsilon$. Temos que $O_{R_\alpha}(x) = \{x + n\alpha\}$ é uma sequência infinita. Então, pela compacidade de $\mathbb{S}^1$, existe uma subsequência que converge para y , um ponto limite, tal que $R_\alpha^{n_i}(x)$ tende a y quando i vai pra infinito.

Então, existem $n > m$, tal que

$$|R_\alpha^n(x) - R_\alpha^m(x)| < \epsilon.$$

Como R_α preserva comprimento de intervalos

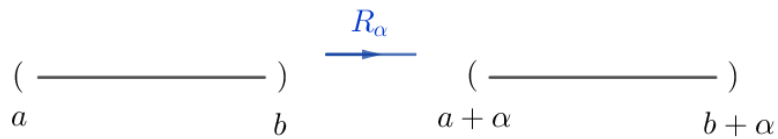


Figura 2.7: R_α preserva comprimento.

Segue que $|R_\alpha^k(x) - x| < \epsilon$, $k = n - m$. Portanto, os intervalos

$$[x, R_\alpha^k(x)], [R_\alpha^k(x), R_\alpha^{2k}(x)], \dots, [R_\alpha^{nk}(x), R_\alpha^{(n+1)k}(x)], \dots$$

tem comprimento menor que ϵ e cobrem $\mathbb{S}^1$. Logo, existe $l \geq 1$ tal que

$$[R_\alpha^{lk}(x), R_\alpha^{(l+1)k}(x)] \cap I_\epsilon \neq \emptyset.$$

Portanto, todo ponto tem órbita densa e consequentemente R_α é um sistema dinâmico topologicamente transitivo.

Definição 10. *Sejam M um espaço métrico compacto e $f : M \rightarrow M$ uma função contínua. Dizemos que f é minimal se para todo $x \in M$ a órbita $\overline{O_f^+(x)} = M$, ou seja, a órbita de f é densa em M para todo $x \in M$.*

Note que no exemplo 2.4 tem-se que R_α é minimal. Uma vez que f é minimal, implica que a mesma seja topologicamente transitiva pelo Teorema 2.1.

Definição 11. *Sejam M um espaço métrico compacto e $f : M \rightarrow M$ uma função contínua. Definimos o conjunto ω -limite de x sob f por*

$$\omega_f(x) = \{y \in M : \exists n_i \rightarrow \infty \text{ tal que } f^{n_i}(x) \rightarrow y\}.$$

Se f é invertível, definimos o conjunto α -limite de x sob f por

$$\alpha_f(x) = \{y \in M : \exists n_i \rightarrow \infty \text{ tal que } f^{-n_i}(x) \rightarrow y\}.$$

Note que $\omega_f(x) = \bigcap_{k \geq 1} \overline{\{f^n(x) : n \geq k\}}$ e $\alpha(x) = \bigcap_{k \geq 1} \overline{\{f^{-n}(x) : n \geq k\}}$. Decorre, portanto, que ambos são fechados. Mostremos a igualdade para $\omega_f(x)$, para $\alpha_f(x)$ a demonstração é análoga. Para mostrar tal igualdade devemos expor as inclusões.

$$1. \{y \in M, \exists n_i \rightarrow \infty : f^{n_i}(x) \rightarrow y\} \subset \bigcap_{k \geq 1} \overline{\{f^n(x) : n \geq k\}}.$$

Seja $y \in \omega_f(x)$, então existem $n_i \in \mathbb{N}$, $n_1 < n_2 < \dots$ tal que $f^{n_i}(x) \rightarrow y$ quando $i \rightarrow \infty$. Veja que

$$n_1 \geq 1, n_2 \geq 2, \dots, n_i \geq i,$$

com isto em mente, $f^{n_i}(x) \rightarrow y$ implica que $y \in \overline{\{f^j(x) | j \geq n_i\}} \subset \overline{\{f^j(x) | j \geq i\}}$ para todo $i \geq 1$. Daí $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\{f^i(x) | j \geq i\}}$.

$$2. \bigcap_{k \geq 1} \overline{\{f^n(x) : n \geq k\}} \subset \{y \in M, \exists n_i \rightarrow \infty : f^{n_i}(x) \rightarrow y\}.$$

Seja $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\{f^j(x) | j \geq i\}}$. Como y está na interseção do fecho de tais conjuntos existe uma subsequência do mesmo que converge para y , ou seja

$$y \in \overline{\{f^j(x) | j \geq i\}},$$

que implica dado $\varepsilon_1 = 1$, existe $n_1 \geq 1$ tal que $d(f^{n_1}(x), y) < \varepsilon_1$.

$$y \in \overline{\{f^j(x) | j \geq n_1 + 1\}},$$

que implica dado $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, existe $n_2 > n_1$ tal que $d(f^{n_2}(x), y) < \varepsilon_2$.

$$y \in \overline{\{f^j(x) | j \geq n_2 + 1\}},$$

que implica dado $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}$, existe $n_3 > n_2$ tal que $d(f^{n_3}(x), y) < \varepsilon_3$.

Rekursivamente, existem $n_1 < n_2 < n_3, \dots$, inteiros positivos tais que $d(f^{n_k}(x), y) < \varepsilon = \frac{1}{k}$, para todo $k \geq 1$. Por definição de convergência de sequência, $f^{n_k}(x) \rightarrow y$ quando $i \rightarrow \infty$, em outras palavras

$$y \in \omega_f(x) = \{y \in M, \exists n_k \rightarrow \infty : f^{n_k}(x) \rightarrow y\}.$$

Por fim, com as duas inclusões concluímos a igualdade dos conjuntos.

Note que no contexto dado, o conjunto $\omega_f(x)$ não pode ser vazio. Isso ocorre porque M é um espaço métrico compacto.

Proposição 2.4. *Sejam M um espaço métrico compacto e $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo. Os conjuntos $\alpha(x)$ e $\omega_f(x)$ são f -invariantes, ou seja, tem-se que $f(\omega_f(x)) = \omega_f(x)$ e $f(\alpha(x)) = \alpha(x)$.*

Demonstração. Devemos mostrar que $f(\omega_f(x)) \subset \omega_f(x)$ e $f(\alpha(x)) \subset \alpha(x)$.

Novamente mostraremos para $\omega_f(x)$ e para $\alpha(x)$ é análogo.

Primeiramente, sejam $x \in \omega_f(x)$ qualquer e $y \in \omega_f(x)$ tal que $z = f(y)$, mostremos que $z \in \omega_f(x)$. Existe n_i tal que $f^{n_i}(x) \rightarrow y$ se $i \rightarrow \infty$. Como f é contínua, temos que $f(f^{n_i}(x)) \rightarrow f(y) = z$ quando $i \rightarrow \infty$, que implica $f^{n_i+1}(x) \rightarrow z$, logo $z \in \omega_f(x)$.

Portanto, $f(\omega_f(x)) = \omega_f(x)$ e concluímos a proposição. Analogamente obtemos $f(\alpha(x)) = \alpha(x)$. $\square$

Definição 12. Sejam M um espaço métrico compacto e $f : M \rightarrow M$ uma função contínua, os conjuntos limite de f é dado por $L_+(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} \omega_f(x)}$ e caso f seja invertível $L_-(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} \alpha(x)}$. Definimos também

$$L(f) = L_+(f) \cup L_-(f).$$

Exemplo 2.5. Considere $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por $f(x) = x^k, k \in \mathbb{N}$ fixo. Note que f é uma bijeção cuja inversa é $f^{-1}(y) = \sqrt[k]{y}$. Tome um ponto q qualquer temos:

(a) A órbita total de f em q é dada por

$$O_f(q) = \left\{ \dots, \sqrt[k^{2n}]{q}, \dots, \sqrt[k^4]{q}, \sqrt[k^2]{q}, \sqrt[k]{q}, q, q^k, q^{k^2}, q^{k^4}, \dots, q^{k^{2n}}, \dots \right\}.$$

(b) Para que $p \in [0, 1]$ seja ponto fixo tem que ser satisfeito $p = f(p)$, ou seja

$$\begin{aligned} p^k &= p \Leftrightarrow p^k - p = 0 \\ &\Leftrightarrow p(p^{k-1} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow p = 0 \quad \text{ou} \quad p = 1. \end{aligned}$$

Assim concluímos que $\text{Fix}(f) = \{0, 1\}$, pelo gráfico de x^k e $\sqrt[k]{x}$ sabemos que f não possui pontos periódicos, que não são pontos fixos.

Para este caso é fácil notar que:

$$\omega_f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$\alpha_f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Exemplo 2.6. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto 2x$ temos que $\omega_f(0) = 0$ e $\omega_f(x) = \emptyset$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exemplo 2.7. No Exemplo 2.4, onde temos a α -rotação, definida por R_α temos que se α é irracional para cada x em $\mathbb{S}^1$, a órbita de x é densa, que implica em $\omega_f(x) = \mathbb{S}^1$.

Definição 13. Sejam M um espaço métrico compacto e $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo. Um ponto $x \in M$ é dito não errante se, para qualquer vizinhança U_x de x , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(U_x) \cap U_x \neq \emptyset,$$

ou, equivalentemente,

$$U_x \cap f^{-n}(U_x) \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos não errantes de f é denotado por $\Omega(f)$.

Dizemos que um ponto é errante se ele não for não errante.

Exemplo 2.8. A transformação $x \rightarrow x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ é tal que, todo ponto $x \in \mathbb{R}$ tem-se que $x \notin \Omega(f)$.

Proposição 2.5. Sejam M um espaço métrico compacto e $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo. O conjunto não errante de f , $\Omega(f)$, é sempre fechado e não vazio.

Demonstração. Seja $z \in (\Omega(f))^c$. Então, existe um aberto U_z de z tal que $f^n(U_z) \cap U_z = \emptyset$ para todo $n \geq 1$. Assim, para todo $y \in U_z$, existe um aberto $V_y = U_z$, tal que $f^n(U_z) \cap U_z = \emptyset$, para todo $n \geq 1$.

Portanto, $(\Omega(f))^c$ é aberto.

Seja $y \in L_+(f)$, suponha $y \in \omega_f(x)$ para algum x . Assim existem $m > n > 0$ tal que $f^m(x), f^n(x)$ ambos contidos em U_y uma vizinhança de y . Daí $f^{m-n}(f^n(x)) = f^m(x) \in U$, que implica $f^{m-n}(U_y) \cap U_y \neq \emptyset$.

Portanto, $y \in \Omega(f)$, conclui-se que $\Omega(f)$ é não vazio e $L(f) \subset \Omega(f)$. $\square$

Com esta proposição podemos concluir a cadeia de inclusões

$$\text{Fix}(f) \subseteq \text{Per}(f) \subseteq L(f) \subseteq \Omega(f).$$

Podemos classificar as dinâmicas segundo equivalências topológicas, diremos que duas dinâmicas são topologicamente equivalentes se existe uma conjugação topológica entre elas.

Definição 14. *Sejam M, N espaços topológicos. Dizemos que $f : M \rightarrow M$ e $g : N \rightarrow N$ são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow N$ que satisfaz $g \circ h = h \circ f$. Neste caso dizemos que h é uma conjugação topológica entre f e g .*

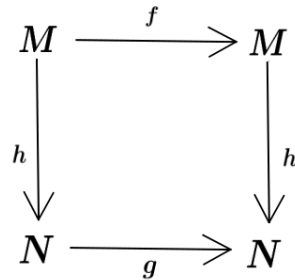


Figura 2.8: Diagrama de conjugação.

Exemplo 2.9. *Sejam $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ dinâmicas e $h : X \rightarrow Y$ uma conjugação topológica. Assim, obtemos que $h \circ f = g \circ h$. Portanto, h leva as órbitas O_f em órbitas O_g .*

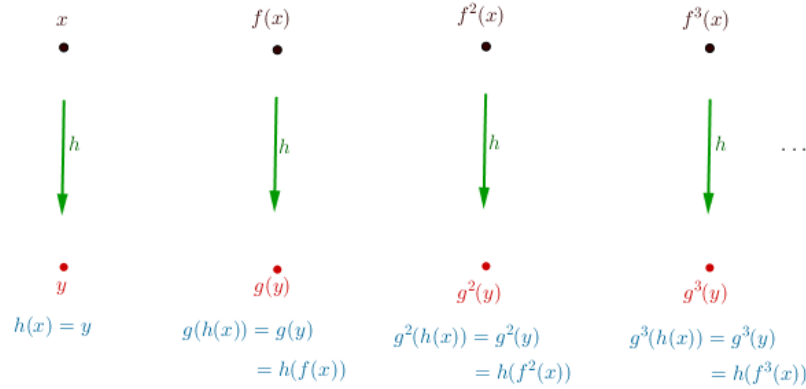


Figura 2.9: Órbitas conjugadas.

Pode-se provar indutivamente que, $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$.

De fato, sabemos que $h(f(x)) = g(h(x))$, agora suponha que para $n = k$ seja válido para a seguinte igualdade $h(f^k(x)) = g^k(h(x))$.

Queremos mostrar que $h(f^{k+1}(x)) = g^{k+1}(h(x))$. Veja que

$$\begin{aligned}
 g^{k+1}(h(x)) &= g(g^k(h(x))) \\
 &= g(h(f^k(x))) \\
 &= h(f(f^k(x))) \\
 &= h(f^{k+1}(x)).
 \end{aligned}$$

Logo, concluí-se que $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$, ou seja $h \circ f^n = g^n \circ h$.

Agora segue que $h(x) = y$, $h(\text{Per}(f)) = \text{Per}(g)$. Então, $h(p)$ tem período k , pois, $f^k(p) = p$ implica que $h(f^k(p)) = h(p)$ e assim $g^k(h(p)) = h(p)$. Logo, $h(p)$ é periódico.

Se existe $l < k$ tal que $g^l(h(p)) = h(p)$ então $h(f^l(p)) = h(p)$ e assim $f^l(p) = p$ para $l < k$, uma contradição.

Em suma, temos que a conjugação leva órbitas de f em órbitas de g , que preserva suas propriedades topológicas.

Capítulo 3

Dinâmica hiperbólica

3.1 Conjuntos hiperbólicos

Definição 15. *Uma métrica Riemanniana numa variedade diferenciável M é uma aplicação que associa cada ponto $x \in M$ a um produto interno definido no espaço tangente $T_x M$, que varia continuamente com $x \in M$.*

Definição 16. *M é uma variedade Riemanniana se, e somente se é uma variedade dotada de uma métrica Riemanniana.*

Para este capítulo, seja M uma variedade C^∞ , Riemanniana, compacta, conexa e sem bordo.

Definição 17. *Sejam $A \subset M$ e um homeomorfismo $f : M \rightarrow M$, A é dito f -invariante se $f^{-1}(A) = A$, onde $f^{-1}(A) = \{x \in M : f(x) \in A\}$.*

Definição 18 (Conjunto hiperbólico). *Sejam M uma variedade Riemanniana C^1 , $U \subset M$ um subconjunto aberto não vazio, e $f : U \rightarrow f(U) \subset M$ um difeomorfismo C^1 . Um subconjunto não-vazio compacto e f -invariante $\Lambda \subset U$ é chamado de hiperbólico se existirem $\lambda \in (0, 1)$, $C > 0$ e famílias de subespaços $E^s(x) \subset T_x M$ e $E^u(x) \subset T_x M$, para todo $x \in \Lambda$, tais que:*

1. $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$,
2. $\|Df_x^n v^s\| \leq C\lambda^n \|v^s\|$ para todo $v^s \in E^s(x)$ e $n \geq 0$,
3. $\|Df_x^{-n} v^u\| \leq C\lambda^n \|v^u\|$ para todo $v^u \in E^u(x)$ e $n \geq 0$,
4. $Df_x E^s(x) = E^s(f(x))$ e $Df_x E^u(x) = E^u(f(x))$.

Proposição 3.1. *Seja M uma variedade Riemanniana C^1 e Λ um conjunto hiperbólico para f um difeomorfismo. Então, para todo $x \in \Lambda$ existe uma métrica Riemanniana tal que:*

$$\|Df(v)\| < \lambda \|v\|, \quad \text{para } v \in E^s(x),$$

$$\|Df(v)\| > \lambda^{-1} \|v\|, \quad \text{para } v \in E^u(x).$$

Demonstração. Comece com uma métrica Riemanniana qualquer e escolha $n > 0$ tal que $\|Df^n(v)\| < \|v\|$ para todo $v \in E^s(x)$. Defina uma métrica $\|\cdot\|_a$ em $E^s(x)$ por

$$\|v\|_a = \|v\| + \|Df(v)\| + \cdots + \|Df^{n-1}(v)\|.$$

É fácil ver que $\|\cdot\|_a$ é uma métrica usando a linearidade de Df e as propriedades da métrica Riemanniana adotada.

Então

$$\|Df(v)\|_a = \|Df(v)\| + \|Df^2(v)\| + \cdots + \|Df^n(v)\| = \|v\|_a - \|v\| + \|Df^n(v)\|.$$

Como $\|Df^n(v)\| < \|v\|$ para $v \in E^s(x)$, concluimos que $\|Df(v)\|_a < \|v\|_a$, para $v \in E^s(x)$.

Seja $E_1^s = \{v \in E^s(x) | x \in \Lambda, \|v\|_a = 1\}$, o conjunto E_1^s é compacto, pois Λ é compacto. Defina uma aplicação

$$F : E_1^s \rightarrow (0, +\infty)$$

$$v \mapsto F(v) = \|Df_x v\|_a.$$

onde $0 < F(v) < 1$ para todo $v \in E_1^s$.

Como F é uma aplicação C^1 , F é contínua e assume valores máximos e mínimos no intervalo $(0, 1)$. Chame $\bar{\lambda} = \max\{F(v) | v \in E_1^s, \lambda \in (0, 1)\}$.

Assim $\|Df_x v\|_a < \bar{\lambda}$ para todo $v \in E_1^s$. Tome $v \in E^s \setminus \{0\}$, $\frac{v}{\|v\|_a} = u$ e com isso $\|u\|_a$. Agora

$$\|Df_x u\|_a \leq \bar{\lambda}$$

$$\|Df_x \frac{v}{\|v\|_a}\|_a \leq \bar{\lambda}$$

$$\frac{1}{\|v\|_a} \|Df_x v\|_a \leq \bar{\lambda}$$

$$\|Df_x v\|_a \leq \bar{\lambda} \|v\|_a.$$

Analogamente, escolha $n > 0$ tal que $\|Df^n(v)\| > \|v\|$ para algum $v \in E^u(x)$. Então $\|Df(v)\|_a > \|v\|_a$, para $v \in E^u(x)$ e $\|Df_x v\|_a \geq \bar{\lambda}^{-1} \|v\|_a$. $\square$

Definição 19 (Métrica adaptada). *A métrica $\|\cdot\|_a$ definida na prova anterior é chamada métrica adaptada.*

Proposição 3.2. *Seja Λ um conjunto hiperbólico de f . Então, os subespaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ dependem continuamente de $x \in \Lambda$.*

Demonstração. Seja $\{x_i\} \subset \Lambda$ uma sequência de pontos em Λ convergindo para $x_0 \in \Lambda$. Considerando uma subsequência, podemos assumir que $\dim E^s(x_i)$ é constante. Seja $\{w_{1,i}, \dots, w_{k,i}\}$ uma base ortonormal em $E^s(x_i)$.

Como a restrição do fibrado tangente unitário T^1M a Λ é compacta, ao passarmos a uma subsequência, os vetores $w_{j,i}$ convergem para $w_{j,0} \in T_{x_0}M$ para cada $j = 1, \dots, k$.

Pela definição de conjunto hiperbólico, sabemos que cada vetor do referencial ortonormal $\{w_{1,0}, \dots, w_{k,0}\}$ satisfaz a condição de contração no subespaço estável $E^s(x_0)$ e, pela invariância, esses vetores estão em $E^s(x_0)$. Portanto, $\dim E^s(x_0) \geq k = \dim E^s(x_i)$.

Um argumento similar mostra que $\dim E^u(x_0) \geq \dim E^u(x_i)$. Assim, temos que $\dim E^s(x_0) = \dim E^s(x_i)$ e $\dim E^u(x_0) = \dim E^u(x_i)$.

Dado que as dimensões dos subespaços são iguais para x_i e x_0 , concluímos que os subespaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ variam continuamente com x , como desejado. $\square$

Definição 20 ([3]). *Seja B uma matriz complexa $k \times k$. Se λ é um autovalor de B , defina*

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^k : (B - \lambda I)^i v = 0, \text{ para algum } i \in \mathbb{N}\}.$$

Se γ é um autovalor real, defina

$$V_\gamma^\mathbb{R} = \mathbb{R}^k \cap V_\gamma = \{v \in \mathbb{R}^k : (B - \gamma I)^i v = 0, \text{ para algum } i \in \mathbb{N}\}.$$

Se $\lambda, \bar{\lambda}$ formam um par de autovalores conjugados, defina

$$V_{\lambda, \bar{\lambda}}^\mathbb{R} = \mathbb{R}^k \cap (V_\lambda \oplus V_{\bar{\lambda}}).$$

Esses são chamados de espaços próprios generalizados.

Iremos enunciar dois lemas sem a demonstração dos mesmos.

Lema 3.1 ([3]). *Seja B uma matriz complexa $k \times k$, e λ um autovalor de B . Então, para todo $\delta > 0$, existe $C(\delta) > 0$ tal que*

$$C(\delta)^{-1}(|\lambda| - \delta)^n \|v\| \leq \|B^n v\| \leq C(\delta)(|\lambda| + \delta)^n \|v\|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $v \in V_\lambda$.

Lema 3.2 ([3]). *Seja B uma matriz real $k \times k$ e λ um autovalor de B . Então, para todo $\delta > 0$, existe $C(\delta) > 0$ tal que*

$$C(\delta)^{-1}(|\lambda| - \delta)^n \|v\| \leq \|B^n v\| \leq C(\delta)(|\lambda| + \delta)^n \|v\|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $v \in V_\lambda$ (se $\lambda \in \mathbb{R}$) ou todo $v \in V_{\lambda, \bar{\lambda}}$ (se $\lambda \notin \mathbb{R}$).

Exemplo 3.1. *Seja $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um isomorfismo linear. Se todos os autovalores de A têm módulo diferente de 1, então o conjunto unitário composto pelo vetor nulo é hiperbólico.*

Dado um λ autovalor de A defina

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^m : (A - \lambda I)^i v = 0, \text{ Para algum } i\}$$

e

$$V_{\lambda, \bar{\lambda}}^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^m \cap (V_\lambda \oplus V_{\bar{\lambda}}).$$

Se para cada i , têm-se que γ_i e λ_i são autovalores de A , então $\mathbb{R}^m$ pode ser decomposto por

$$\mathbb{R}^m = \bigoplus_{i=1}^j V_{\gamma_i} \oplus \bigoplus_{i=1}^n V_{\lambda_i, \bar{\lambda}_i}.$$

Veja que como

$$|\gamma_1| \leq |\gamma_2| \leq \cdots \leq |\gamma_{j_1}| < 1 < |\gamma_{j_1+1}| \leq |\gamma_{j_1+2}| \leq |\gamma_{j_1+3}| \leq \cdots \leq |\gamma_j|$$

e

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_{n_1}| < 1 < |\lambda_{n_1+1}| \leq |\lambda_{n_1+2}| \leq |\lambda_{n_1+3}| \leq \cdots \leq |\lambda_n|,$$

então

$$\mathbb{R}^m = \left(\bigoplus_{i=1}^{j_1} V_{\gamma_i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{n_1} V_{\lambda_i, \bar{\lambda}_i}^{\mathbb{R}} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=j_1+1}^j V_{\gamma_i} \oplus \bigoplus_{i=n_1+1}^n V_{\lambda_i, \bar{\lambda}_i}^{\mathbb{R}} \right).$$

Agora defina

$$E^s = \bigoplus_{i=1}^{j_1} V_{\gamma_i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{n_1} V_{\lambda_i, \bar{\lambda}_i}$$

e

$$E^u = \bigoplus_{i=j_1+1}^j V_{\gamma_i} \oplus \bigoplus_{i=n_1+1}^n V_{\lambda, \tilde{\lambda}}^{\mathbb{R}}.$$

Tome $K = \{0\}$ e veja que $T_x \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$, em particular $T_0 \mathbb{R}^m = E_0^s \oplus E_0^u$.

Seja $\delta > 0$ tal que se $\tilde{\lambda}$ é um autovalor qualquer de A tem-se que

$$\begin{cases} |\tilde{\lambda}| - \delta > 1, & \text{se } |\tilde{\lambda}| > 1, \\ |\tilde{\lambda}| + \delta < 1, & \text{se } |\tilde{\lambda}| < 1. \end{cases}$$

Pelos Lemas 3.1 e 3.2 obtemos que

$$C(\delta)^{-1}(|\tilde{\lambda}| - \delta)^n \|v\| \leq \|A^n v\| \leq C(\delta)(|\tilde{\lambda}| + \delta)^n \|v\|,$$

com isso se $v \in E^s$

$$\|A^n v\| \leq C(|\lambda| + \delta)^n \|v\|$$

e se $v \in E^u$

$$\|A^n v\| \geq C(|\lambda| - \delta)^n \|v\|.$$

Por último temos que $DA_0 E^s(0) = E^s(A_0)$ e $DA_0 E^u(0) = E^u(A_0)$.

Portanto, $K = \{0\}$ é um conjunto hiperbólico para A .

Exemplo 3.2. *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e $p \in M$ um ponto fixo. Considere o isomorfismo linear $Df_p : T_p M \rightarrow T_p M$, o conjunto $\Lambda = \{p\}$ é hiperbólico se, e somente se, cada autovalor de Df_p tem módulo diferente de 1.*

A condição suficiente é garantida pelo Exemplo 3.1. Em contrapartida, tomamos E_p^s como o autoespaço associado aos autovalores de módulo menor que 1, e em seguida, tomar E_p^u como o autoespaço associado aos autovalores de módulo maior que 1.

No exemplo anterior poderíamos ter considerado uma órbita periódica (de período k , por exemplo) ao invés de um ponto fixo. Neste contexto, o conjunto Λ cujos elementos são os pontos da órbita de p , isto é, $\Lambda = \{p, f(p), \dots, f^{k-1}(p)\}$ é hiperbólico se e somente se $f^j(p)$ é um ponto fixo hiperbólico para f^k , para cada $j = 0, \dots, k-1$.

Exemplo 3.3. Considere $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o isomorfismo linear dado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como os coeficientes são inteiros e $\det(A) = 1$, A induz um automorfismo linear $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ com $Df_x = A$ para todo $x \in \mathbb{T}^2$.

Note que

1. $f([0]) = [A \cdot 0] = [0]$,
2. $f(\alpha x + y) = [A(\alpha x + y)] = [\alpha Ax] + [Ay]$.

Seus autovalores têm módulos diferentes de 1. De fato, $\lambda_u = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ e $\lambda_s = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$.

Seja agora o autoespaço E^s gerado por v_s autovetor associado ao autovalor λ_s e o autoespaço E^u gerado por v_u autovetor associado ao autovalor λ_u .

Uma vez que v_u e v_s são linearmente independentes e $E^s \cap E^u = \{0\}$ temos que $\mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u$, então $T_x \mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u$.

Dado $x \in \mathbb{T}^2$, tem-se que uma vez que $\lambda_s = \lambda_u^{-1}$.

$$\|D_x f^n v^s\| = \|A^n v^s\| \leq |\lambda|^n \|v^s\| \text{ para todo } n \geq 0;$$

$$\|D_x f^{-n} v^u\| = \|A^{-n} v^u\| \leq |\lambda|^n \|v^u\| \text{ para todo } n \geq 0.$$

A Df -invariância de E^s e E^u é direta ao aplicar a derivada. Logo, $\mathbb{T}^2$ é hiperbólico para o difeomorfismo f .

Definição 21. Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Se M é um conjunto hiperbólico para f , então, f é um difeomorfismo de Anosov.

Agora daremos a ideia de um célebre exemplo na teoria de dinâmica hiperbólica.

Exemplo 3.4 (Ferradura de Smale).

Considere $Q = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Divida-o da seguinte forma:

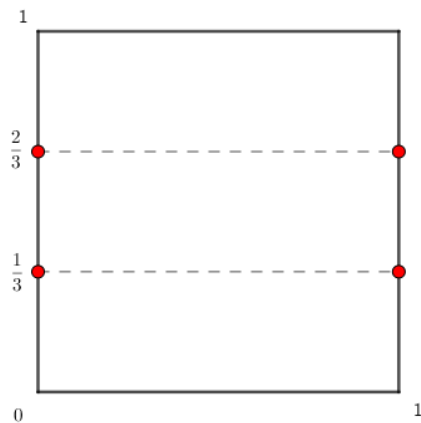


Figura 3.1: Divisão do quadrado unitário.

1º) Sejam H_0 e H_1 os retângulos ternários horizontais.

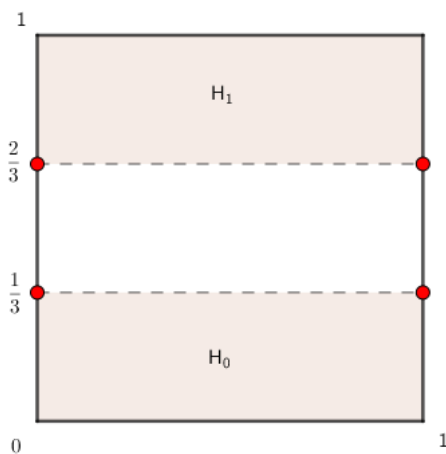


Figura 3.2: Retângulos ternários horizontais.

2º) Seja $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação tal que, f contrai uniformemente a direção horizontal em uma taxa $\frac{1}{3}$ e expande uniformemente a direção vertical em taxa 3, e depois dobra.

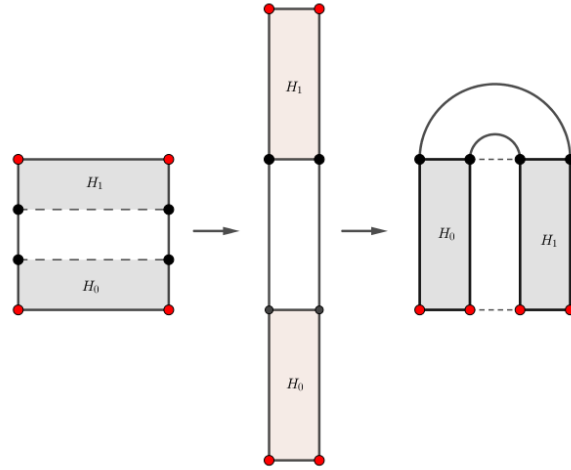


Figura 3.3: Aplicação da f .

Veja que pela construção podemos definir f^{-1} que atua da mesma maneira, porém nas faixas verticais. Se $f(H_0) = V_0$ e $f(H_1) = V_1$. Então $f^{-1}(V_1) = H_1$ e $f^{-1}(V_0) = H_0$.

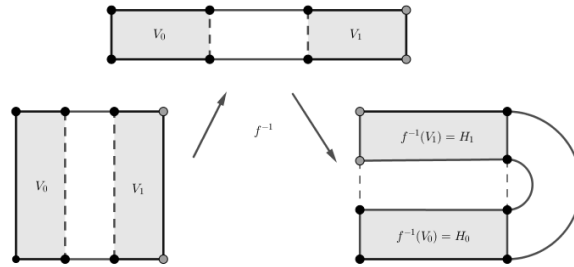


Figura 3.4: Aplicação da f^{-1} .

3º) Considere agora $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q)$ sendo o conjunto dos pontos que permanecem em Q por todos iterados possíveis. Pela construção, Λ é um compacto f -invariante. Além disso, como as retas horizontais são uniformemente contraídas enquanto que as retas verticais são uniformemente expandidas, segue que Λ é um conjunto hiperbólico em relação a f .

Definição 22 ([1]). *O sistema dinâmico $f|_{\Lambda} : \Lambda \rightarrow \Lambda$ em 3.4 é chamado ferradura de Smale.*

Pode-se construir f de modo que $A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(Q) = [0, 1] \times K$ onde K é o conjunto ternário de cantor, e $A \subset \Lambda$.

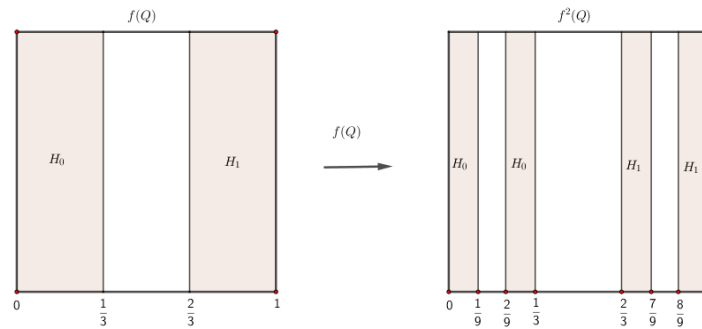


Figura 3.5: Ilustração da construção do conjunto A .

Analogamente, obtemos que $B = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(Q)$ é igual ao conjunto $K \times [0, 1]$ onde $B \subset \Lambda$. Finalmente, obtemos que

$$A \cap B = \Lambda = K \times K.$$

3.2 ϵ -órbitas e o Teorema de Sombreamento

Os próximos teoremas serão utilizados na demonstração do Teorema de sombreamento de Anosov, os mesmos não serão provados.

Teorema 3.1 ([9]). *Se M é uma variedade de dimensão n e diferenciável, então existe um mergulho diferenciável de M em $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Teorema 3.2 ([9]). *Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade sem bordo. Então, M admite uma vizinhança tubular em $\mathbb{R}^n$.*

Vamos introduzir o conceito de ϵ -órbitas ou também chamadas pseudo-órbitas.

Definição 23. *Uma ϵ -órbita de $f : U \subset M \rightarrow M$ é uma sequência finita ou infinita $(x_n) \subset U$ tal que $d(f(x_n), x_{n+1}) \leq \epsilon$ para todo n .*

As mesma podem ser chamadas também de pseudo órbitas.

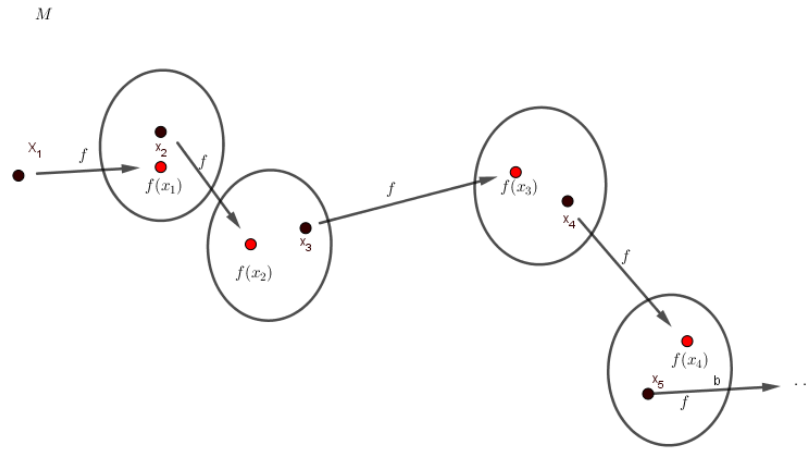


Figura 3.6: Pseudo órbita

Para $r \in \{0, 1\}$, denote por dist_r a distância definida no espaços das funções C^r .

Definição 24. *Sejam M uma variedade Riemanianna C^1 , $f : M \rightarrow M$ e $g : M \rightarrow M$ aplicações C^1 . Defina distância na topologia C^0 por*

$$\text{dist}_0(f, g) = \|f - g\|_\infty = \sup_{x \in M} |f(x) - g(x)|.$$

E distância na topologia C^1 por

$$\text{dist}_1(f, g) = \|f - g\|_{C^1} = \|f - g\|_\infty + \|f' - g'\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in X} |f'(x) - g'(x)|.$$

Teorema 3.3 (Teorema do sombreamento de Anosov). *Seja Λ um conjunto hiperbólico para $f : U \rightarrow M$. Então, existe um conjunto aberto $O \subset U$ contendo Λ e números positivos ϵ_0, δ_0 com a seguinte propriedade:*

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $g : O \rightarrow M$ com $\text{dist}_1(g, f) < \epsilon_0$, qualquer homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ de um espaço topológico X , e qualquer função contínua $\phi : X \rightarrow O$ que satisfaça $\text{dist}_0(\phi \circ h, g \circ \phi) < \delta$, existe um função contínua $\psi : X \rightarrow O$ com $\psi \circ h = g \circ \psi$ e $\text{dist}_0(\phi, \psi) < \epsilon$. Além disso, ψ é único no sentido de que, se $\psi' : X \rightarrow O$ for outra função com $\psi' \circ h = g \circ \psi'$ e $\text{dist}_0(\phi, \psi') < \delta_0$, então $\psi' = \psi$.

Demonstração. Inicialmente, M é uma variedade, pelo Teorema 3.1 tomaremos a mesma como uma subvariedade de dimensão m em $\mathbb{R}^N$, para algum N suficientemente grande satisfazendo o Teorema 3.1. Para $y \in M$. Definiremos como $D_\alpha(y)$ o disco de raio α centrado em y contidos no plano $E^\perp(y) \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão $(N - m)$ que passa por y e é perpendicular aos espaços tangentes $T_y M$.

Por definição, temos que $\Lambda \subset M$ é um compacto e $\Lambda \subset U$ é uma variedade, logo pelo Teorema 3.2, tem-se que para qualquer vizinhança relativamente compacta e aberta O de $\mathbb{R}^N$, com $O \subset U$ contendo Λ , existe $\alpha \in (0, 1)$ suficientemente pequeno tal que

$$O_\alpha = \{x \in U \mid \text{dist}(x, O) < \alpha\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Este é folheado pelos discos $D_\alpha(y)$.

Agora defina

$$\begin{aligned} \pi : O_\alpha &\longrightarrow M \\ z &\longmapsto \pi(z) \end{aligned}$$

a aplicação projeção de O_α para M ao longo dos discos $D_\alpha(y)$, uma vez que os mesmos folheiam O_α . Assim π está bem definida, pois, para cada $z \in O_\alpha$, temos um único $\pi(z) \in M$ tal que $\pi(z) = y \in M$.

Cada aplicação $g : O \rightarrow M$ pode ser estendida para uma aplicação $\tilde{g}$ com a seguinte

lei de formação

$$\begin{aligned}\tilde{g} : O_\alpha &\longrightarrow M \\ z &\longmapsto \tilde{g}(z) = f(\pi(z)).\end{aligned}$$

Dado $x \in O$ temos que $\tilde{g}(x) = g(\pi(x)) = g(x)$, que trata-se de uma extensão tal que $\tilde{g} = f \circ \pi$, como $\pi(z) \in M \subset O$. Temos que $\tilde{g}$ está bem definida desde que g também esteja.

Seja $C(X, O_\alpha)$ o conjunto das aplicações contínuas de X para O_α munido da distância dist_0 , onde X é como na hipótese. Note que O_α é limitado e $\phi \in C(X, O_\alpha)$.

Seja Γ o espaço de Banach dos campos vetoriais limitados e contínuos da forma $v : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ munido da norma $\|v\| = \sup_{x \in X} \|v(x)\|$.

A aplicação $B(\phi, \alpha) \rightarrow B(0, \alpha) = B_\alpha$ dada por $\phi' \mapsto \phi' - \phi$ é uma isometria da bola de raio α centrada em ϕ em $C(X, O_\alpha)$ sobre a bola B_α de raio α centrada em 0 em Γ . Defina $\Phi : B_\alpha \rightarrow \Gamma$ por

$$(\Phi(v))(x) = \tilde{g}(\phi(h^{-1}(x)) + v(h^{-1}(x))) - \phi(x), \quad (3.1)$$

com $v \in B_\alpha$, $x \in X$.

Se v é ponto fixo de Φ e $\psi(x) = \phi(x) + v(x)$, então da equação (2.1) temos que

$$\begin{aligned}(\Phi(v))(x) &= \tilde{g}(\phi(h^{-1}(x)) + v(h^{-1}(x))) - \phi(x) \\ v(x) + \phi(x) &= \tilde{g}(\phi(h^{-1}(x)) + v(h^{-1}(x)))\end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\psi(x) = \tilde{g}(\psi(h^{-1}(x)))$$

$$\psi(x) = \tilde{g} \circ \psi \circ h^{-1}(x)$$

$$\psi \circ h(x) = \tilde{g} \circ \psi(x) \quad (3.3)$$

Das equações destacadas agora, de (2.2) e (2.3) temos que ψ conjuga h e $\tilde{g}$, e $\psi(x)$ está próximo de $\phi(x)$ de modo que $v(x)$ é um "erro" que corrige a conjugação, uma perturbação.

Agora basta mostrar que Φ possui um único ponto fixo próximo a ϕ , o qual depende continuamente de g .

A aplicação Φ é diferenciável como uma aplicação entre espaços de Banach. Sejam $v, w \in B_\alpha$ e $x \in X$, então

$$\begin{aligned}\Phi(v) &= \tilde{g}(\phi \circ h^{-1} + v \circ h^{-1}) - \phi \\ \Phi(v + w) &= \tilde{g}(\phi \circ h^{-1} + v \circ h^{-1} + w \circ h^{-1}) - \phi.\end{aligned}$$

Subtraindo ambas equações e denotando por $\theta = \phi \circ h^{-1} + v \circ h^{-1}$ para facilitar os procedimentos obtemos

$$\Phi(v + w) - \Phi(v) = \tilde{g}(\theta + w \circ h^{-1}) - \tilde{g}(\theta). \quad (3.4)$$

Aqui $\tilde{g}$ é diferenciável, pois as derivadas de $\tilde{g}$ na direção do espaço tangente a M coincide com as derivadas de f , e as derivadas de $\tilde{g}$ na direção ortogonal ao espaço tangente de M é nula. Logo, $\tilde{g}$ é diferenciável.

Usando tal fato, pela definição de derivada e a equação (3.4)

$$\begin{aligned}\Phi(v + w) - \Phi(v) &= \tilde{g}(\theta + w \circ h^{-1}) - \tilde{g}(\theta) \\ &= D\tilde{g}(\theta)w \circ h^{-1} + r(w \circ h^{-1}).\end{aligned}$$

$$\text{com } \lim_{w \rightarrow 0} \frac{r(w \circ h^{-1})}{|r(w \circ h^{-1})|} = 0.$$

Logo temos

$$(D\Phi_v w)(x) = D\tilde{g}(\phi \circ h^{-1}(x) + v \circ h^{-1}(x))w \circ h^{-1}(x)$$

e consequentemente $(D\Phi_v w)(x)$ é contínua em v .

Para mostrar a existência e unicidade do ponto fixo v e sua dependência contínua de g , estudaremos as derivadas de Φ .

Tomando o máximo das derivadas apropriadas de Φ obtemos que

$$\|D\Phi_v w(x)\| \leq L\|w\|, \quad (3.5)$$

a constante L depende das derivadas de $\tilde{g}$, e também depende do espaço de Banach B_α e Γ , pois a norma utilizada na desigualdade (3.5) é mesma dos espaços. No entanto, L não depende de X, h e ϕ .

Para $v = 0$, o campo é identicamente nulo, obtemos

$$\begin{aligned}
(D\Phi_0 w)(x) &= D\tilde{g}(\phi \circ h^{-1}(x))w \circ h^{-1}(x) \\
&= D\tilde{g}(\phi(h^{-1}(x))w(h^{-1}(x))).
\end{aligned}$$

Como Λ é hiperbólico, para $\lambda \in (0, 1)$ e $C > 1$, temos para todo $y \in \Lambda$ e $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\|Df_y^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|, \text{ se } v \in E^s(y) \quad (3.6)$$

$$\|Df_y^{-n} v\| \leq C\lambda^n \|v\|, \text{ se } v \in E^u(y). \quad (3.7)$$

Para $z \in O_\alpha$, seja $\tilde{T}_z$ o plano de dimensão m a partir de z que é ortogonal aos discos $D_\alpha(\pi(z))$. Os planos $\tilde{T}_z$ formam uma distribuição diferencial em O_α .

Note que $\tilde{T}_z = T_z M$ para $z \in O$. Estenda a decomposição $T_y M = E^s(y) \oplus E^u(y)$ continuamente de Λ para O_α , diminuindo a vizinhança de O e α se necessário, de modo que

$$\tilde{T}_z = E^s(z) \oplus E^u(z)$$

e

$$T_z \mathbb{R}^N = E^s(z) \oplus E^u(z) \oplus E^\perp(\pi(z)).$$

Denote por P^s, P^u e $P^\perp$ a projeção de cada espaço tangente $T_z \mathbb{R}^N$ sobre $E^s(z), E^u(z)$ e $E^\perp(z)$ respectivamente.

Fixe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $C\lambda^n < \frac{1}{2}$. Por (3.6), (3.7) e continuidade, para algum $\alpha > 0$ pequeno o suficiente e alguma vizinhança O pequena onde $\Lambda \subset O$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para toda aplicação g com $\text{dist}_1(f, g) < \varepsilon_0$, todo $z \in O_\alpha$, e todo $v^s \in E^s(z)$, $v^u \in E^u(z)$ e $v^\perp \in E^\perp(z)$, temos:

$$\|P^s(D\tilde{g}_z^n v^s)\| \leq \frac{1}{2} \|v^s\|, \quad \|P^u(D\tilde{g}_z^n v^s)\| \leq \frac{1}{100} \|v^s\|, \quad (3.8)$$

$$\|P^u(D\tilde{g}_z^n v^u)\| \geq 2 \|v^u\|, \quad \|P^s(D\tilde{g}_z^n v^u)\| \leq \frac{1}{100} \|v^u\|, \quad (3.9)$$

$$D\tilde{g}_z^n v^\perp = 0. \quad (3.10)$$

Denote por $\Gamma^\nu = \{v \in \Gamma : v(x) \in E^\nu(\phi(x)), \text{ para todo } x \in X\}$ onde $\nu = s, u, \perp$. Os subespaços Γ^s, Γ^u e $\Gamma^\perp$ são fechados, pela continuidade da ϕ e a variação contínua dos E^ν e observe que $\Gamma = \Gamma^s \oplus \Gamma^u \oplus \Gamma^\perp$. Por construção vimos que $D\Phi_v$ depende de $D\tilde{g}$, tendo isso temos que $\tilde{g}$ pode ser expressa localmente como

$$\tilde{g}(x_s, x_u, x_\perp) = (\tilde{g}_s(x_s, x_u, x_\perp), \tilde{g}_u(x_s, x_u, x_\perp), \tilde{g}_\perp(x_s, x_u, x_\perp)),$$

$$D\tilde{g} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{g}_s}{\partial x_s} & \frac{\partial \tilde{g}_s}{\partial x_u} & \frac{\partial \tilde{g}_s}{\partial x_\perp} \\ \frac{\partial \tilde{g}_u}{\partial x_s} & \frac{\partial \tilde{g}_u}{\partial x_u} & \frac{\partial \tilde{g}_u}{\partial x_\perp} \\ \frac{\partial \tilde{g}_\perp}{\partial x_s} & \frac{\partial \tilde{g}_\perp}{\partial x_u} & \frac{\partial \tilde{g}_\perp}{\partial x_\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{g}_s}{\partial x_s} & \frac{\partial \tilde{g}_s}{\partial x_u} & a_{13} \\ \frac{\partial \tilde{g}_u}{\partial x_s} & \frac{\partial \tilde{g}_u}{\partial x_u} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

onde $a_{13}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ e a_{33} são constantes. Tomemos todas como idênticas a zero, assim:

$$D\tilde{g} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{g}_s}{\partial x_s} & \frac{\partial \tilde{g}_s}{\partial x_u} & \frac{\partial \tilde{g}_s}{\partial x_\perp} \\ \frac{\partial \tilde{g}_u}{\partial x_s} & \frac{\partial \tilde{g}_u}{\partial x_u} & \frac{\partial \tilde{g}_u}{\partial x_\perp} \\ \frac{\partial \tilde{g}_\perp}{\partial x_s} & \frac{\partial \tilde{g}_\perp}{\partial x_u} & \frac{\partial \tilde{g}_\perp}{\partial x_\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{g}_s}{\partial x_s} & \frac{\partial \tilde{g}_s}{\partial x_u} & 0 \\ \frac{\partial \tilde{g}_u}{\partial x_s} & \frac{\partial \tilde{g}_u}{\partial x_u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Denote $\frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial x_j} = A^{ij}$, $i, j = u, s$, pela construção

$$D\Phi_0 = \begin{bmatrix} A^{ss} & A^{su} & 0 \\ A^{us} & A^{uu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $A^{ij} : \Gamma^i \rightarrow \Gamma^j$. Pelas equações (3.8), (3.9) e (3.10); existe $\epsilon_0 > 0$ e δ tal que se $\text{dist}_1(f, g) < \epsilon_0$ e $\text{dist}_0(\phi \circ h, g \circ \phi) < \delta$, ou seja, estaremos usando pontos muito próximos ao conjunto hiperbólico. Então o espectro de $D\Phi_0$ é separado do círculo unitário. Portanto, $\det(D\Phi_0 - Id) \neq 0$ e $(D\Phi_0 - Id)$ é invertível, e

$$\|(D\Phi_0 - Id)^{-1}\| \leq K$$

onde $K > 0$ uma constante que depende de f e ϕ , o que garante a existência e limitação da inversa de $(D\Phi_0 - Id)$.

Pela diferenciabilidade de $\Phi(v)$ temos que $\Phi(v) = \Phi(0) + D\Phi_0 v + H(v)$, porém como $\Phi(v)$ é diferenciável implica que $H(v)$ também seja, e assim $H(v) - H(0) = DH(0)v + R(v)$ e

$$H(v) = DH(0)v + R(v),$$

com

$$\frac{R(v)}{|v|} \rightarrow 0 \quad (3.11)$$

e

$$\frac{H(v)}{|v|} \rightarrow 0 \quad (3.12)$$

ambas quando v tende a 0.

Usando (3.11) e (3.12) em $H(v) = DH(0)v + R(v)$, concluimos que $DH(0) = 0$. Aplicando a desigualdade do valor médio em H obtemos que

$$\begin{aligned} \|H(v_1) - H(v_2)\| &\leq \|v_1 - v_2\| \sup_{t \in [0,1]} \{\|DH(v_1 + t(v_2 - v_1))\|\} \\ &\leq C\|v_1 - v_2\|, \end{aligned} \quad (3.13)$$

C uma constante positiva e menor que $\sup_{t \in [0,1]} \{\|DH(v_1 + t(v_2 - v_1))\|\}$, uma vez que H seja C^1 , $\|v_1\|$ e $\|v_2\|$ sejam pequenos o bastante.

Caso aconteça de v ser ponto fixo tal que $\Phi(v) = v$ teremos que

$$\begin{aligned} v &= \Phi(v) = \Phi(0) + D\Phi_0 v + H(v) \\ v - D\Phi_0 v &= \Phi(0) + H(v) \\ (Id - D\Phi_0)v &= \Phi(0) + H(v) \\ v &= [-(D\Phi_0 - Id)^{-1}](\Phi(0) + H(v)). \end{aligned}$$

Tome $A = -(D\Phi_0 - Id)^{-1}$ e assim

$$v = A(\Phi(0) + H(v)).$$

Denote $F(v) = A(\Phi(0) + H(v))$, teremos obtido $F(v) = v$.

Se $\zeta > 0$ for pequeno o bastante, então para qualquer $v_1, v_2 \in \Gamma$ com $\|v_1\|, \|v_2\| < \zeta$, pela equação (3.13)

$$\|F(v_1) - F(v_2)\| \leq C\|v_1 - v_2\| \leq \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|,$$

uma vez que $\|DH(0)\| = 0$.

Com a escolha apropriada de constantes e vizinhanças e a construção, $F : \Gamma \rightarrow \Gamma$ é uma contração, e possui um único ponto fixo que depende continuamente de g . Demonstrando o Teorema. □

O Teorema 3.3, implica em particular, que qualquer coleção bi-infinita de pseudo órbitas de um conjunto hiperbólico pode ser aproximada por uma órbita, por isso do nome Anosov's Shadowing ou sombreamento de Anosov.

Corolário 3.1 (Sombreamento de Anosov). *Seja Λ um conjunto hiperbólico para $f : U \rightarrow M$, onde f é de classe C^k , $k \geq 1$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se (x_k) é uma δ -órbita finita ou infinita de f e $\text{dist}(x_k, \Lambda) < \delta$ para todo k , então existe um $x \in \Lambda_\epsilon$ com $\text{dist}(f^k(x), x_k) < \epsilon$.*

Demonstração. Seja Λ um conjunto hiperbólico da aplicação $f : U \rightarrow M$. Como Λ é compacto, escolhamos $O \subset U$ tal que $\Lambda \subset O$ e ϵ como no Teorema 3.3 e agora escolha um $\delta > 0$ tal que $\Lambda_\delta \subset O$, onde

$$\Lambda_\delta = \{x \in O \mid \text{dist}(x, \Lambda) < \delta\}.$$

Suponha que (x_k) é uma pseudo órbita. A ideia é construir uma δ -órbita bi-infinita a partir de $(x_k)_{k \in J}$ e que esteja contida em Λ_δ .

Para fazer isto adicione à (x_k) as pré-imagens de algum ponto $y_0 \in \Lambda$ cuja distância até o primeiro ponto de (x_k) é menor que δ . Essa interseção de pontos garante que a nova sequência contém pontos próximos o suficiente a Λ para dizer que a mesma está na vizinhança de Λ de raio δ . Dessa forma, obtém-se uma órbita bi-infinita que está contida em Λ_δ .

Se $X = (x_k)$ é um espaço topológico, dotado da topologia discreta,

Tome $g = f|_O$ e sejam $h : X \rightarrow X$ a aplicação definida por $h(x_k) = x_{k+1}$, $\phi : X \rightarrow U$ a aplicação inclusão, $\phi(x_k) = x_k$. Veja que

$$\begin{aligned} \text{dist}(\phi(h(x_k)), f(\phi(x_k))) &= \text{dist}(\phi(x_{k+1}), f(x_k)) \\ &= \text{dist}(f(x_k), x_{k+1}). \end{aligned}$$

Desde que (x_k) seja uma δ -órbita se tem que

$$\text{dist}(f(x_k), x_{k+1}) < \delta.$$

Aplicando o Teorema 3.3, existe um único $\psi : X \rightarrow O$ com $\psi \circ h = g \circ \psi$ e $\text{dist}_0(\phi, \psi) < \epsilon$, como $f = g$, se tem que ψ conjuga h e f também, veja que

$$f \circ \psi(x_i) = \psi \circ h(x_i) = \psi(x_{i+1}).$$

Seja agora $\psi(x_i) = z_i$, então $f(z_i) = z_{i+1}$, que é a órbita de f do ponto z_0 .

Caso X seja finito temos $x_0 = x_n$, aplicando ψ têm-se que $\psi(x_0) = z_0$ e $\psi(x_n) = z_n$, donde concluímos que neste caso z_0 é um ponto periódico.

Assim $\text{dist}_0(\psi, \phi) < \epsilon$, temos que para todo x_k são equivalentes as seguintes desigualdades

$$\text{dist}(\psi(x_k), \phi(x_k)) < \epsilon$$

$$\text{dist}(z_k, x_k) < \epsilon, \quad z_n = f^k(x_0).$$

$$\text{dist}(f^k(z_0), x_k) < \epsilon,$$

onde $z_0 \in O$, faça $z_0 = x$ e obtemos $\text{dist}(f^k(x), x_k)$, finalizando assim a demonstração. $\square$

Se Λ é f -invariante, denote por $\Omega(f|_\Lambda)$ o conjunto dos pontos não errantes de f restritos a Λ . Em geral, $\Omega(f|_\Lambda) \neq \Omega(f) \cap \Lambda$, ou seja, é possível haver elementos de $\Omega(f) \cap \Lambda$ que não pertencem a $\Omega(f|_\Lambda)$.

Proposição 3.3. *Seja Λ um conjunto hiperbólico para $f : U \rightarrow M$. Então,*
 $\overline{\text{Per}(f|_\Lambda)} = \Omega(f|_\Lambda).$

Demonstração. Fixe $\epsilon > 0$ e seja $x \in \Omega(f|_\Lambda)$. Escolha δ como no Teorema 3.3, e seja também $V = B(x, \frac{\delta}{2}) \cap \Lambda$.

Como $x \in \Omega(f|_\Lambda)$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$.

Seja $z \in f^{-n}(f^n(V) \cap V) = V \cap f^{-n}(V)$. Assim temos que $\{z, f(z), \dots, f_{n-1}(z)\}$ é uma δ -órbita. Logo pelo Teorema 3.1, existe x_1 , ponto periódico de período n , tal que a órbita de x_1 sombreia a δ -órbita de z , com distância ϵ . Logo $\Omega(f|_\Lambda) \subset \text{Per}(f|_\Lambda) \subset \overline{\text{Per}(f|_\Lambda)}$.

□

Corolário 3.2. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de Anosov. Então, $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)$.*

Posteriormente, iremos explorar as ferramentas vistas nesta seção.

3.3 Cones invariantes

Os resultados a seguir, apresentados sem prova, são importantes para o desenvolvimento desta seção.

Teorema 3.4 (Extensão de Tietze, [17]). *Seja X um espaço normal e seja $A \subset X$ um subespaço fechado.*

1. *Para qualquer função contínua $f : A \rightarrow [a, b]$, existe uma função contínua $\tilde{f} : X \rightarrow [a, b]$ tal que $\tilde{f}|_A = f$.*
2. *Para qualquer função contínua $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma função contínua $\tilde{g} : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{g}|_A = g$.*

Lema 3.3 (Número de Lebesgue, [17]). *Se $\mathcal{A}$ é uma cobertura aberta de um espaço métrico compacto (X, d) , então existe $\delta > 0$, tal que para cada subconjunto B de X com diâmetro menor que δ , existe um elemento U de $\mathcal{A}$, tal que $B \subset U$.*

Proposição 3.4. *Seja Λ um conjunto hiperbólico para $f : U \rightarrow M$. Se as distribuições E^s e E^u são contínuas, então estas podem ser estendidas a distribuições contínuas $\tilde{E}^s$ e $\tilde{E}^u$ definidas em uma vizinhança $U(\Lambda) \supset \Lambda$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{U} = U(\Lambda)$ e $f_s : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicação definida por $x \mapsto B_x^s$, onde B_x^s seja a base ordenada que gera E_x^s , com $B_x^s = \{v_1^s, \dots, v_k^s\}$.

Veja que $B_x^s = \{(a_{11}(x), a_{12}(x), \dots, a_{1n}(x)), \dots, (a_{k1}(x), a_{k2}(x), \dots, a_{kn}(x))\}$, onde cada $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e cada $v_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, n$.

Defina

$$f_{ij} : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f_{ij}(x) = a_{ij}(x) \in \mathbb{R}$$

onde $F_{ij}(x) = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots)$.

Como $\Lambda \subset M$, M é um espaço métrico compacto, logo o mesmo é um subespaço normal e pelo Teorema de extensão de Tietze temos que existe $\tilde{f}_{ij} : M \rightarrow \mathbb{R}$ extensão contínua de f_{ij} , assim a base B_x^s pode ser estendida a uma vizinhança de Λ , conseqüentemente o mesmo se vale para a distribuição $x \rightarrow E^s(x)$. Analogamente obtemos uma extensão contínua de $E^u(x)$ para $\tilde{E}^u(x)$. Note que para uma vizinhança pequena de Λ , $v = v^s + v^u$ com $v^s \in \tilde{E}^s(x)$ e $v^u \in \tilde{E}^u(x)$. $\square$

Vale também que, se $x \in U(\Lambda)$ e $v \in T_x M$, escrevemos $v = v^s + v^u$ com $v^s \in \tilde{E}^s(x)$ e $v^u \in \tilde{E}^u(x)$. Suponha que a métrica é adaptada com constante λ . Para $\alpha > 0$, defina os cones estáveis e instáveis de tamanho α por

$$K_\alpha^s(x) = \{v \in T_x M : \|v^u\| \leq \alpha \|v^s\|\},$$

$$K_\alpha^u(x) = \{v \in T_x M : \|v^s\| \leq \alpha \|v^u\|\}.$$

Para um cone K , seja $\overset{\circ}{K} = \text{int}(K) \cup \{0\}$. Seja $\Lambda_\epsilon = \{x \in U : \text{dist}(x, \Lambda) < \epsilon\}$.

Proposição 3.5. *Seja Λ um conjunto hiperbólico para $f : U \rightarrow M$. Então, para todo $\alpha > 0$ existe $\epsilon = \epsilon(\alpha)$ tal que $f^i(\Lambda_\epsilon) \subset U(\Lambda)$, $i = -1, 0, 1$, e para cada $x \in \Lambda_\epsilon$*

$$Df_x K_\alpha^u(x) \subset \overset{\circ}{K}_\alpha^u(f(x)) \quad e \quad Df_{f(x)}^{-1} K_\alpha^s(f(x)) \subset \overset{\circ}{K}_\alpha^s(x).$$

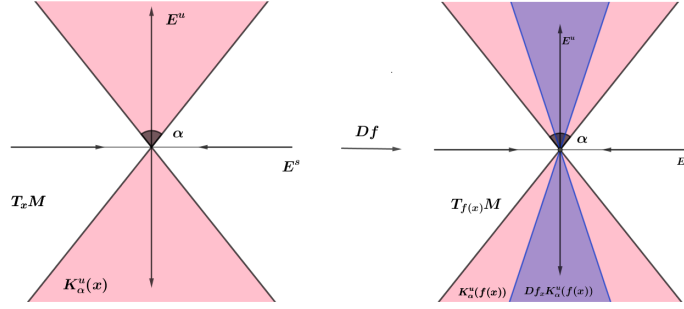


Figura 3.7: Cone instável e a diferencial.

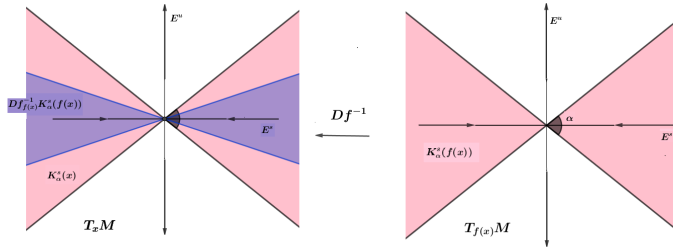


Figura 3.8: Cone estável e a diferencial.

Demonstração. Seja Λ um conjunto hiperbólico para o difeomorfismo f . Por definição, Λ possui uma decomposição invariante e contínua em E^s e E^u , e podemos estender estas distribuições a uma vizinhança $U(\Lambda)$ de forma contínua. Se escolhermos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a vizinhança $\Lambda_\epsilon = \{x \in M \mid \text{dist}(x, \Lambda) < \epsilon\}$ estará contida em $U(\Lambda)$.

Devido à continuidade de f e f^{-1} , e à invariância do conjunto Λ , temos que $f(\Lambda) \subset \Lambda$ e $f^{-1}(\Lambda) \subset \Lambda$. Portanto, se ϵ for suficientemente pequeno, a iteração de f e f^{-1} sobre Λ_ϵ também estará contida em $U(\Lambda)$. Logo tem-se

$$f^i(\Lambda_\epsilon) \subset U(\Lambda), \quad i = -1, 0, 1.$$

Vamos agora mostrar que para todo $x \in \Lambda_\epsilon$ tem-se $Df_x K_\alpha^u(x) \subset \overset{\circ}{K}_\alpha^u(f(x))$ e $Df_{f(x)}^{-1} K_\alpha^s(f(x)) \subset \overset{\circ}{K}_\alpha^s(x)$.

Seja $K_\alpha^u(x)$ o cone instável no ponto x . Por hipótese, sabemos que Df_x expande vetores em $E^u(x)$ e contrai vetores em $E^s(x)$. Em particular, existe uma constante $\lambda \in (0, 1)$ tal

que:

$$\|Df_x v^s\| \leq \lambda \|v^s\| \quad \text{e} \quad \|Df_x v^u\| \geq \lambda^{-1} \|v^u\|.$$

Para $v \in K_\alpha^u(x)$, temos $\|v^s\| \leq \alpha \|v^u\|$. Assim:

$$\|Df_x v^s\| \leq \lambda \|v^s\| \leq \lambda \alpha \|v^u\| \quad \text{e} \quad \|Df_x v^u\| \geq \lambda^{-1} \|v^u\|.$$

Assim, temos que:

$$\|Df_x v^s\| \leq \lambda \|v^s\| \leq \lambda \alpha \|v^u\| \leq \lambda^2 \alpha \|Df_x v^u\| \leq \alpha \|Df_x v^u\|$$

$$\|Df_x v^s\| \leq \alpha \|Df_x v^u\|.$$

Portanto, $Df_x v \in \overset{\circ}{K}_\alpha^u(f(x))$, o que mostra que:

$$Df_x K_\alpha^u(x) \subset \overset{\circ}{K}_\alpha^u(f(x)).$$

De maneira similar, $Df_{f(x)}^{-1}$ contrai vetores em $E^u(f(x))$ e expande vetores em $E^s(f(x))$, temos:

$$\|Df_{f(x)}^{-1} v^u\| \leq \lambda \|v^u\| \quad \text{e} \quad \|Df_{f(x)}^{-1} v^s\| \geq \lambda^{-1} \|v^s\|.$$

Para $v \in K_\alpha^s(f(x))$, temos $\|v^u\| \leq \alpha \|v^s\|$. Assim:

$$\|Df_{f(x)}^{-1} v^u\| \leq \lambda \|v^u\| \leq \lambda \alpha \|v^s\| \quad \text{e} \quad \|Df_{f(x)}^{-1} v^s\| \geq \lambda^{-1} \|v^s\|.$$

Logo

$$\|Df_{f(x)}^{-1} v^u\| \leq \alpha \|Df_{f(x)}^{-1} v^s\|.$$

Portanto, $Df_{f(x)}^{-1} v \in \overset{\circ}{K}_\alpha^s(x)$, mostrando que:

$$Df_{f(x)}^{-1} K_\alpha^s(f(x)) \subset \overset{\circ}{K}_\alpha^s(x).$$

□

Essa proposição é importante porque estabelece propriedades importantes das distribuições estáveis e instáveis em relação a um conjunto hiperbólico Λ e sua vizinhança $U(\Lambda)$ para uma determinada função f . Isso é útil para provar várias propriedades importantes do conjunto hiperbólico, como a estabilidade estrutural e a existência de variedades estáveis e instáveis.

Proposição 3.6. Para cada $\delta > 0$ existem $\alpha > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que $f^i(\Lambda) \subset U(\Lambda)$, $i = -1, 0, 1$, e para cada $x \in \Lambda_\epsilon$

$$\|Df^{-1}(x)v\| \leq (\lambda + \delta)\|v\| \quad \text{se } v \in K_\alpha^u(x),$$

e

$$\|Df_x v\| \leq (\lambda + \delta)\|v\| \quad \text{se } v \in K_\alpha^s(x).$$

Demonstração. Seja $\delta > 0$, considere ϵ_1 , tal que dado $x \in \Lambda_{\epsilon_1}$ se tenha $T_x M = \tilde{E}^s(x) \oplus \tilde{E}^u(x)$, com constantes de expansão e contração λ_1 e δ_1 (tais aparecem de forma natural no decorrer da demonstração).

Agora escolha $\bar{\epsilon}_1$ e α_1 , tais que $f^i(\Lambda_{\bar{\epsilon}_1}) \subset U(\Lambda_{\bar{\epsilon}_1})$ para $i = -1, 0, 1$ e $K_\alpha^u(x) \subset \tilde{E}_x^u$ e $K_\alpha^s(x) \subset \tilde{E}_x^s$, para $x \in \Lambda_{\bar{\epsilon}_1}$, isto é possível pela Proposição 3.4.

Veja que se $x \in \Lambda_{\bar{\epsilon}_1}$ e $v \in K_{\alpha_1}^u(x)$, logo $v \in E_{\alpha_1}^u(x)$ e $Df^{-1}(x)v \in \overset{\circ}{K}_{f(\alpha_1)}^u(f(x)) \subset E_x^u$.

Assim, note que

$$\begin{aligned} \|Df^{-1}(x)(v)\| &= \|Df^{-1}(x)(v^s + v^u)\|, v^s \in E_x^s \text{ e } v^u \in E_x^u, \\ &\leq \|Df^{-1}(x)v^s\| + \|Df^{-1}(x)v^u\|, \text{ pela linearidade de } Df \text{ e desigualdade triangular de } \|\cdot\|, \\ &\leq \alpha_1 \|Df^{-1}(x)v^s\| + \|Df^{-1}(x)v^u\| \\ &\leq \alpha_1 \|v^s\| + \alpha_2 \|v^u\| \\ &= (\alpha_1 \lambda_1 + \lambda_2) \|v^u\|. \end{aligned}$$

Tome $\delta_1 = \alpha_1 \lambda_1 + \lambda_2$ e obtemos $\|Df^{-1}(x)(v)\| \leq (\delta_1 + \lambda_1) \|v^u\| \leq (\delta_1 + \lambda_1) \|v\|$. Escrevendo melhor $\|Df^{-1}(x)(v)\| \leq (\delta_1 + \lambda_1) \|v\|$, se $v \in K_\alpha^u(x)$.

Em contrapartida, considere ϵ_2 tal que se $x \in \Lambda_{\epsilon_2}$ se tenha $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$, com constantes de expansão e contração λ_2 e δ_2 .

Escolha $\bar{\epsilon}_2$ e α_2 tais que $f^i(\Lambda_{\bar{\epsilon}_2}) \subset U(\Lambda_{\bar{\epsilon}_2})$ e $K_{\alpha_2}^u(x) \subset \tilde{E}_x^u$ e $K_{\alpha_2}^s(x) \subset \tilde{E}_x^s$, para todo $x \in \Lambda_{\bar{\epsilon}_2}$.

Então, note que se $x \in \Lambda_{\epsilon_2}$ e $v \in K_{\alpha_2}^s(x)$. Logo $v \in K_{\alpha_2}^s(x)$ e $Df_x v \in \overset{\circ}{K}_{\alpha_2}^s(f(x)) \subset E_x^s$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\|Df_x v\| &\leq \|Df_x v^s\| + \|Df_x v^u\| \\
&\leq \lambda_2 \|v^s\| + \alpha_2 \lambda_2 \|v^s\| \\
&= (\alpha_2 \lambda_2 + \lambda_2) \|v^s\|.
\end{aligned}$$

Se $\delta_2 = \alpha_2 \lambda_2$ temos que se $v \in K_{\alpha_2}^s(x)$ então $\|Df_x v\| \leq (\delta_2 + \lambda_2) \|v_2\|$. Considere $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$, $\epsilon = \max\{\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2\}$ e $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Logo, se $v \in K_\alpha^u(x)$, $\|Df^{-1}(x)v\| \leq (\lambda + \delta) \|v\|$ e se $v \in K_\alpha^s(x)$, então

$$\|Df_x v\| \leq (\lambda + \delta) \|v\|.$$

□

Com tal resultado é imediato que dado $x \in \Lambda_\epsilon$, temos que

$$Df_x K_\alpha^u(x) \subset \overset{\circ}{K}_\alpha^u(f(x)) \quad \text{e} \quad Df_{f(x)}^{-1} K_\alpha^s(f(x)) \subset \overset{\circ}{K}_\alpha^s(x).$$

A proposição a seguir nos fornece uma caracterização de conjunto hiperbólico através de cones.

Proposição 3.7. *Seja Λ um conjunto compacto e invariante de $f : U \rightarrow M$, onde f é um difeomorfismo de classe C^k , $k \geq 1$. Suponha que exista $\alpha > 0$ e para cada $x \in \Lambda$ existem subespaços $\tilde{E}^s(x)$ e $\tilde{E}^u(x)$ tal que $\tilde{E}^s(x) \oplus \tilde{E}^u(x) = T_x M$, e os α -cones $K_\alpha^s(x)$ e $K_\alpha^u(x)$ determinados pelos subespaços satisfazem:*

1. $Df_x K_\alpha^u(x) \subset K_\alpha^u(f(x))$ e $Df_{f(x)}^{-1} K_\alpha^s(x) \subset K_\alpha^s(f(x))$, e
2. $\|Df_x v\| < \|v\|$ para $v \in K_\alpha^s(x)$ não nulo, e $\|Df_x^{-1} v\| < \|v\|$, para $v \in K_\alpha^u(x)$ não nulo.

Então, Λ é um conjunto hiperbólico para f .

Demonstração. Por hipótese, $\Lambda \subset M$ é compacto e f -invariante por $f : U \rightarrow M$. Também por hipótese para cada $x \in \Lambda$

$$T_x M = \tilde{E}_x^s \oplus \tilde{E}_x^u.$$

Seja o fibrado unitário $T_x^1 M = \{v \in T_x M \mid \|v\| \leq 1\}$. Tome $x \in \Lambda$ e $v_x \in T_x^1 M$, se $v^s \in K_\alpha^s(x) \cap \tilde{E}_x^s$ que $\|Df_x v^s\| \leq \|v^s\| < 1$ para todo $v^s \in \tilde{E}_x^s$ ($\tilde{E}_x^s \subset K_\alpha^s(x)$). Assim obtemos que $\|Df_x|_{E_x^s}\| < 1$.

Agora defina $g : \Lambda \rightarrow [0, \infty)$ dado por $x \mapsto \|Df_x|_{E_x^s}\|$. Como f é C^1 , Df_x é contínua para todo $x \in \Lambda$, assim g é contínua com domínio compacto, então seja λ seu máximo, ou seja, existe $x_0 \in \Lambda$ tal que $g(x) \leq g(x_0) = \lambda < 1$, para todo $x \in \Lambda$. Daí concluímos que $\|Df_x|_{E_x^s}\| \leq \lambda < 1$.

Seja $0 \neq v \in \tilde{E}_x^s$, para todo $x \in \Lambda$

$$\frac{\|Df_x v\|}{\|v\|} \leq \|Df_x|_{\tilde{E}_x^s}\| \leq \lambda \Rightarrow \|Df_x v\| \leq \lambda \|v\|, \forall v \in E_x^s.$$

Analogamente, obtemos que

$$\|Df^{-1}(x)v\| \leq \|v\|, \forall v \in E_x^u.$$

Agora basta mostrarmos a Df -invariância dos cones, para qualquer $x \in \Lambda$. Queremos mostrar que K_α^s e K_α^u são invariantes por contração e expansão de Df e Df^{-1} , respectivamente.

Para cada $n \geq 0$, podemos aplicar $Df_{f^n(x)}^{-n}$ no cone invariante $K_\alpha^s(f^n(x))$ e obter

$$Df_{f^n(x)}^{-n} K_\alpha^s(x) \subset K_\alpha^s(f^{n-1}(x)).$$

Note que, iterando esse processo, obtemos

$$\begin{aligned} Df_{f^{n-1}(x)}^{-(n-1)} K_\alpha^s(f^{n-1}(x)) &\subset K_\alpha^s(x) \\ &\vdots \\ Df_{f(x)}^{-1} K_\alpha^s(f(x)) &\subset K_\alpha^s(x). \end{aligned}$$

Note também que pela prova da Proposição 3.6 obtemos que

$Df_{f^n(x)}^{-n} K_\alpha^s(f^n(x)) \subset Df_{f^{n-1}(x)}^{-(n-1)} K_\alpha^s(f^{n-1}(x)) \subset \dots \subset Df_{f(x)}^{-1} K_\alpha^s(f(x)) \subset K_\alpha^s(x)$. Logo para todo $n \geq 0$, $K_\alpha^s(f^n(x))$ é invariante por Df^{-n} .

Veja que ao tomar o limite das inclusões, com $n \rightarrow \infty$, temos que tomar a interseção

$$\bigcap_{n \geq 0} Df_{f^n(x)}^{-n} K_\alpha^s(f^n(x)) \subset \bigcap_{n \geq 0} K_\alpha^s(x).$$

Defina $E^s(x) := \bigcap_{n \geq 0} Df_{f^n(x)}^{-n} K_\alpha^s(f^n(x))$ e assim $E^s(x)$ é Df -invariante para todo $n \geq 0$.

Por outro lado, analogamente, podemos aplicar $Df_{f^{-n}(x)}^n$ em $K_\alpha^u(f^{-n}(x))$ e obter

$$Df_{f^n(x)}^n K_\alpha^u(f^{-n}(x)) \subset K_\alpha^u(x)$$

e com isso $E^u(x) := \bigcap_{n \geq 0} Df_{f^{-n}(x)}^n K_\alpha^u(f^{-n}(x)) \subset K_\alpha^u$, então $E^s(x)$ é Df^n -invariante para todo $n \geq 0$.

Portanto, Λ é hiperbólico para $f : U \rightarrow M$. □

Definição 25. *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico para $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Dado $\epsilon > 0$ defina*

$$\Lambda_\epsilon^s = \{x \in U : \text{dist}(f^n(x), \Lambda) \leq \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0\},$$

$$\Lambda_\epsilon^u = \{x \in U : \text{dist}(f^{-n}(x), \Lambda) \leq \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Observe que ambos os conjuntos estão contidos em Λ_ϵ e que $f(\Lambda_\epsilon^s) \subset \Lambda_\epsilon^s$, $f^{-1}(\Lambda_\epsilon^u) \subset \Lambda_\epsilon^u$.

Proposição 3.8. *Seja Λ um conjunto hiperbólico para f com uma métrica adaptada. Então, para cada $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que as distribuições E^s e E^u podem ser estendidas para Λ_ϵ de modo que:*

1. E^s é contínuo em Λ_ϵ^s , e E^u é contínuo em Λ_ϵ^u ;
2. Se $x \in \Lambda_\epsilon \cap f(\Lambda_\epsilon)$ então $Df_x E^s(x) = E^s(f(x))$ e $Df_x E^u(x) = E^u(f(x))$;
3. $\|Df_x v\| < (\lambda + \delta)\|v\|$ para cada $x \in \Lambda_\epsilon$ e $v \in E^s$;
4. $\|Df_x^{-1} v\| < (\lambda + \delta)\|v\|$ para cada $x \in \Lambda_\epsilon$ e $v \in E^u$.

Demonstração. Escolha $\epsilon > 0$ pequeno suficiente para $\Lambda_\epsilon \subset U(\Lambda)$. Para $x \in \Lambda_\epsilon^s$, seja $E^s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} df_{f^n(x)}^{-n} \left(\tilde{E}^s(f^n(x)) \right)$. Pela Proposição 3.5, o limite existe se δ , α , e ϵ é pequeno o suficiente. Se $x \in \Lambda_\epsilon \setminus \Lambda_\epsilon^s$, seja $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n(x)}(x) \in \Lambda_\epsilon$ para $n =$

$0, 1, \dots, n(x)$ e $f^{n(x)+1}(x) \notin \Lambda_\epsilon$, e seja $E^s(x) = df_{f^n(x)}^{-n(x)} \left(\tilde{E}^s(f^{n(x)}(x)) \right)$. A continuidade de E^s em Λ_ϵ^s e as propriedades requeridas seguem da Proposição 3.5. Uma construção similar com f substituído por f^{-1} dá uma extensão de E^u .

□

3.4 Estabilidade de conjunto hiperbólico

Utilizaremos o conceito de ϵ -órbitas e família de cones invariantes para obter uma das propriedades mais importantes do estudo de conjuntos hiperbólicos. As próximas duas proposições implicam que a hiperbolicidade de certa maneira é um fenômeno persistente por pequenas perturbações.

Proposição 3.9. *Seja Λ um conjunto hiperbólico para $f : U \rightarrow M$, onde f é difeomorfismo de classe C^k , $k \geq 1$. Existem um conjunto aberto $U(\Lambda) \supset \Lambda$ e $\epsilon_0 > 0$ tal que se $K \subset U(\Lambda)$ é um subconjunto invariante compacto de um difeomorfismo $g : U \rightarrow M$ com $\text{dist}_1(g, f) < \epsilon_0$, então K é um conjunto hiperbólico para g .*

Demonstração. Assuma uma métrica adaptada para f , ou seja, Λ é hiperbólico com $\lambda \in (0, 1)$ e $C = 1$, e estenda continuamente via Teorema de extensão Tietze as distribuições E_f^u e E_f^s para $\tilde{E}_f^u$ e $\tilde{E}_f^s$, respectivamente. Tais extensões são as distribuições definidas em um aberto $U(\Lambda) \supset \Lambda$.

Sabemos que com as extensões contínuas $\tilde{E}_f^u$ e $\tilde{E}_f^s$ podemos definir as famílias de cones estáveis $K_\alpha^s(x)$ e instáveis $K_\alpha^u(x)$, $x \in M$ e $T_x M = \tilde{E}_f^u \oplus \tilde{E}_f^s$. Com isto em mente e a escolha adequada da vizinhança $U(\Lambda)$, de ϵ_0 , e α , os α -cones determinados satisfazem a Proposição 3.5 para g , uma vez que $\text{dist}_1(f, g) < \epsilon_0$. Por hipótese $K \subset U(\Lambda)$ é compacto e invariante em relação a $g : U \rightarrow M$, com α apropriado e para todo $x \in K$ tem-se

$$T_x M = \tilde{E}_f^u \oplus \tilde{E}_f^s, \text{ e } \alpha\text{-cones } K_\alpha^s(x) \text{ e } K_\alpha^u(x), \text{ com } x \in K.$$

O mesmo satisfaz o item (1) da Proposição 3.8

$$Df_x K_\alpha^u(x) \subset K_\alpha^u(f(x)) \text{ e } Df_{f(x)}^{-1} K_\alpha^s(f(x)) \subset K_\alpha^s(x).$$

Satisfazendo também (2) da Proposição 3.8 $\|Df_x v\| < \|v\|$ para $v \in K_\alpha^s(x)$ não nulo, e $\|Df_x^{-1} v\| < \|v\|$ para $v \in K_\alpha^u(x)$ não nulo.

Assim, pela Proposição 3.8, obtemos que K é hiperbólico para g .

□

Denote por $\text{Diff}^1(M)$ o espaço dos difeomorfismos C^1 de M com a topologia C^1 .

Corolário 3.3. *O conjunto de difeomorfismos de Anosov de uma dada variedade compacta é aberto em $\text{Diff}^1(M)$.*

Demonstração. Seja $f \in \text{Diff}^1(M)$ um difeomorfismo de Anosov, ou seja, $f : M \rightarrow M$ onde M é hiperbólico para f . Pela Proposição 3.7 se é Anosov, então o conjunto $\Lambda = M$. Desta maneira, a vizinhança $U(\Lambda) = M$ e como M é invariante para qualquer g , C^1 suficientemente próximo de f , por aplicação direta da Proposição 3.7, o corolário está demonstrado.

□

Proposição 3.10. *Seja Λ um conjunto hiperbólico para $f : U \rightarrow M$. Para todo conjunto aberto $V \subset U$ contendo Λ e todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $g : V \rightarrow M$ com $\text{dist}_1(g, f) < \delta$, existe um conjunto hiperbólico $K \subset V$ de g e um homeomorfismo $\kappa : K \rightarrow \Lambda$ tal que $\kappa \circ g|_K = f|_\Lambda \circ \kappa$ e $\text{dist}_0(\kappa, Id) < \epsilon$.*

Demonstração. Sejam:

1. $X = \Lambda$ com a topologia induzida de M ;
2. $h := f|_\Lambda : \Lambda \rightarrow \Lambda$;
3. $\phi := \Lambda \hookrightarrow U$ a aplicação inclusão.

Pelo Teorema 3.3 existe $\psi : \Lambda \rightarrow U$ tal que $\psi \circ f|_\Lambda = g \circ \psi$ e $\text{dist}_0(\phi, \psi) < \epsilon$ e ψ é único.

Agora seja $K = \psi(\Lambda)$ e aplicando o Teorema 3.3 novamente para $X = K$, $h = g|_K$ e $\phi : K \hookrightarrow M$, obtemos $\psi' : K \rightarrow U$ com $\psi' \circ g|_K = f|_\Lambda \circ \psi'$. Assim pela unicidade de ψ e

ψ' temos que

$$\psi' = \psi^{-1},$$

e ϕ' é identidade, ou seja, ψ' é próximo a identidade, tome $\kappa = \psi'$, e pela Proposição 3.7 K é hiperbólico para g e f .

□

Definição 26. Um difeomorfismo f de classe C^1 de uma variedade M também C^1 é chamado estruturalmente estável se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $g \in \text{Diff}^1(M)$ e $\text{dist}_1(g, f) < \delta$, então existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ para o qual $f \circ h = h \circ g$ e $\text{dist}_0(h, \text{Id}) < \epsilon$.

Corolário 3.4. Difeomorfismos de Anosov são estruturalmente estáveis.

Demonstração. A demonstração segue como aplicação direta das Proposições 3.7 e 3.8.

□

Capítulo 4

O Teorema Espectral de Smale

Considere $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo C^1 . Já estabelecemos os critérios para que um subconjunto $\Lambda \subset M$ seja classificado como hiperbólico.

Uma questão interessante é sobre a integrabilidade dos subfibrados E^s e E^u , que é pauta do teorema da variedade estável.

Definição 27 (Conjunto estável e instável). *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo C^1 e Λ hiperbólico em relação a f . Dado $x \in \Lambda$ definimos os conjuntos estável e instável de x pelos respectivos conjuntos:*

$$W^u(x) = \{y \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\},$$

$$W^s(x) = \{y \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}.$$

Os conjuntos W^u e W^s podem muitas vezes apresentar uma estrutura complicada, apresentando recorrências não triviais, densidade, entre outras. Entretanto, no contexto da dinâmica hiperbólica, do ponto de vista local, tais conjuntos apresentam uma estrutura de variedade.

Definição 28 (Conjuntos estável e instável local). *Dado $\epsilon > 0$ podemos definir a conjunto instável local por*

$$W_\epsilon^u(x) = \{y \in M \mid d(x, y) < \epsilon \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\},$$

e a conjunto estável local por

$$W_\epsilon^s(x) = \{y \in M \mid d(x, y) < \epsilon \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}.$$

O Teorema da Variedade Estável que apresentaremos a seguir é um resultado central na Dinâmica Hiperbólica. Apresentamos a seguir o enunciado sem prova deste Teorema. Para uma demonstração recomendamos, [11].

Defina por D^n o disco centro O e raio 1 e dimensão $n = \dim E^s$.

Teorema 4.1 (Teorema da Variedade Estável). *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo C^k , $k \geq 1$ e $\Lambda \in M$ um conjunto hiperbólico de f com constante de hiperbolicidade λ . Então, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in \Lambda$, o conjunto $W_\epsilon^s(x)$ é uma variedade C^k mergulhada em M , chamada de variedade estável local de x , a qual satisfaz:*

1. $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n d(x, y)$, para todo $y \in W_\epsilon^s(x)$, $\forall n \geq 1$,
2. $f(W_\epsilon^s(x)) \subset W_\epsilon^s(f(x))$,
3. $T_x W_\epsilon^s(x) = E_x^s$,
4. a aplicação $\theta^s : \Lambda \rightarrow \text{Merg}^k(D^n, M)$ que associa a cada x uma parametrização local de $W_\epsilon^s(x)$ é contínua na topologia C^1 (ou seja, as variedades estáveis locais variam C^1 continuamente).

Note que o resultado é análogo para $W_\epsilon^u(x)$, basta provar o Teorema da variedade Estável para f^{-1} , pois

$$W_\epsilon^u(x, f) = W_\epsilon^s(x, f^{-1}).$$

Do Teorema da variedade estável segue que

$$W^u(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_\epsilon^u(f^{-n}(x))) \text{ e,}$$

$$W^s(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\epsilon^s(f^n(x))).$$

O valor $\epsilon > 0$ é uniforme e não depende do ponto específico $x \in \Lambda$, mas que vale de forma global para o conjunto hiperbólico Λ .

O próximo resultado a ser explorado, chamado de λ -lema é um resultado no contexto de pontos fixos hiperbólicos. Este resultado oferece uma visão geométrica sobre o comportamento dos iterados de discos transversais às variedades estáveis e instáveis na vizinhança de um ponto fixo hiperbólico.

Teorema 4.2 (λ -lema [3]). *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo C^1 e p um ponto fixo hiperbólico de f . Considere $V \subseteq M$ vizinhança de p tal que $V \cong B^s \times B^u$, onde $B^s \subseteq W_{loc}^s(p)$, $B^u \subseteq W_{loc}^u(p)$ cujo B^s e B^u são discos abertos contendo p . Se $q \in W^s(p) \setminus \{p\}$ e D^u é um disco C^1 contendo q transversal a $W^s(p)$ e D_n^u a componente conexa de $f^n(D^u)$ em V , então, $D_n^u \rightarrow_{C^1} W^u(p) \cap V$, a componente conexa de $W_{loc}^u(p) \cap V$ que contém p .*

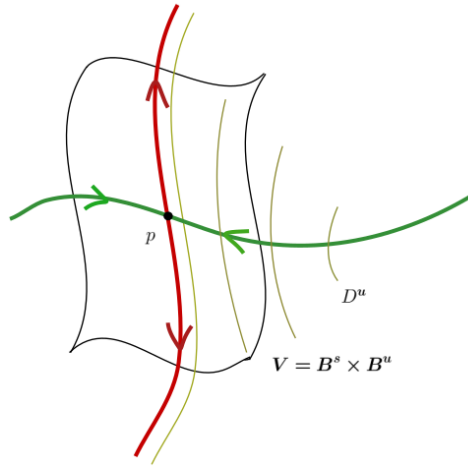


Figura 4.1: Ilustração λ -lema.

Uma consequência dos resultados anteriores é o Teorema Espectral de Smale.

Definição 29. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo C^1 . A variedade estável de uma órbita periódica é definida como a união das variedades estáveis de cada ponto pertencente a essa órbita periódica.*

$$W^s(O_f(p)) = \bigcup_{i=1}^n W^s(p_i),$$

onde $O_f(p)$ denota a órbita periódica de p e $W^s(p_i)$ representa a variedade estável de um ponto p_i pertencente à órbita.

Teorema 4.3 (Espectral de Smale). *Se $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo C^1 e $\overline{\text{Per}(f)}$ é um conjunto hiperbólico, então, existem conjuntos $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ fechados, dois a dois disjuntos e invariantes por f , satisfazendo:*

1. $\overline{\text{Per}(f)} = \bigcup_{i=1}^n \Lambda_i$,
2. $f|_{\Lambda_i} : \Lambda_i \rightarrow \Lambda_i$ é topologicamente transitiva.

Demonstração. Sejam $p, q \in \text{Per}(f)$. Defina a relação $p \sim q$ se, e somente se, $W^s(O(p)) \pitchfork W^u(O(q))$ e $W^s(O(q)) \pitchfork W^u(O(p))$, interseções transversais.

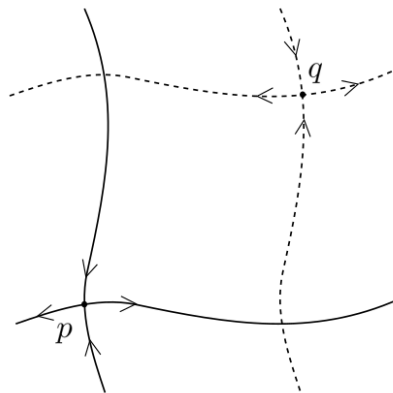


Figura 4.2: Ilustração das Variedades Estáveis e Instáveis de p e q .

Usando o λ -lema é possível mostrar que $\sim$ é uma relação de equivalência.

Dado $p \in \text{Per}(f)$, seja $H(p)$ a classe de equivalência de p em $\text{Per}(f)$, $H(p) = \{q \in \text{Per}(f) | q \sim p\}$.

Considere $\Lambda_p = \overline{H(p)}$. Assim, obtemos que $\overline{H(p)} \subset \overline{\text{Per}(f)}$, para todo $p \in \text{Per}(f)$.

Note que, pelo Teorema da Variedade Estável 4.1, existe $\epsilon > 0$ tal que $\Lambda_q \cap B_\epsilon(\Lambda_p) \neq \emptyset$, então $\Lambda_p = \Lambda_q$. De fato, seja $\epsilon = \frac{\delta}{2}$ veja a ilustração 4.3.

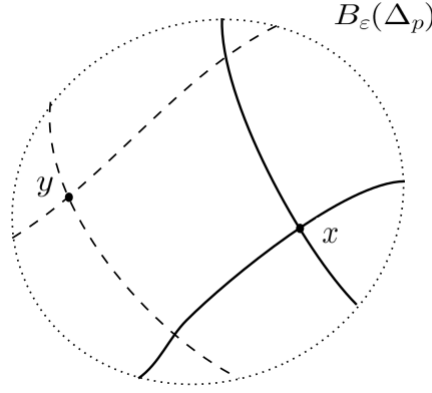


Figura 4.3: Variedades Estáveis e Instáveis de x e y em uma vizinhança $B_\epsilon(\Delta_p)$.

A continuidade da variedade estável e instável, faz com que possamos encontrar

$$x \in \Lambda_p \cap \text{Per}(f) \text{ e}$$

$$y \in \Lambda_q \cap \text{Per}(f) \cap B_\epsilon(\Lambda_p),$$

tais que $x \sim y$, implicando que $p \sim q$ e por fim implicando que $H(p) = H(q)$.

Logo, as classe Λ_p estão isoladas, pela compacidade de M , existem finitos conjuntos Λ_p , $p \in \text{Per}(f)$. Logo, $\overline{\text{Per}(f)} = \bigcup_{i=1}^n \Lambda_i$.

Mostremos agora que $f|_{\Lambda_i}$ é transitiva. Para tal seja $p, q \in \text{Per}(f)$ tal que $p \sim q$. Sejam $a \in W^s(O(p)) \cap W^u(O(q))$ e $b \in W^s(O(q)) \cap W^u(O(p))$.

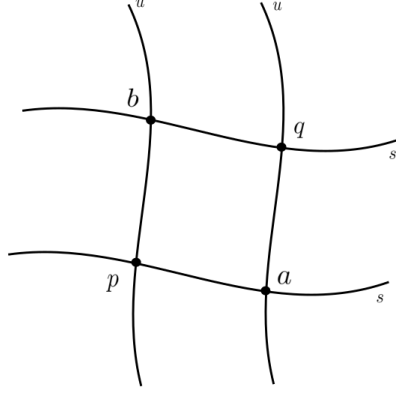


Figura 4.4: Variedades Estáveis e Intavéis de p, q, a e b .

A menos de tomar um iterado de f que fixa p e q , suponha que q e p são pontos fixos. Seja $\Lambda = \overline{\{O(a), O(b), p, q\}}$, veja que, como a relação de equivalência é tomada com a interseção transversal, é possível dotar Λ de uma estrutura de conjunto hiperbólico.

Fixe $r > 0$ suficientemente pequeno e seja ϵ do Teorema 3.3. Considere a ϵ -órbita $\{a, a_1, \dots, a_n, p, b_{-n}, b_{-n+1}, \dots, b, f(b), \dots, f^n(b), q, a_{-n}, \dots, a\}$, onde n é tal que, $d(a_n, a) < \frac{\epsilon}{100}$ e $d(b_n, b) < \frac{\epsilon}{100}$ quando $n \rightarrow \infty$. Vide Figura 4.5.

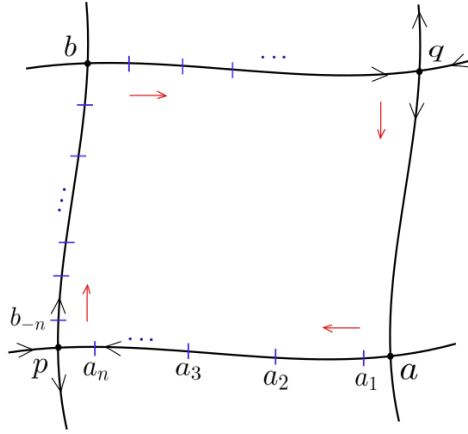


Figura 4.5: Apoio ilustrativo do Teorema 3.3(4).

Analogamente, $d(b_{-n}, a) < \frac{\epsilon}{100}$ e $d(a_{-n}, q) < \frac{\epsilon}{100}$ quando $n \rightarrow \infty$.

Pelo Teorema 3.1 existe uma órbita periódica hiperbólica em uma r -vizinhança da pseudo órbita.

Concluimos que dadas ϵ -bolas centradas em p e q , denotadas por U e V respectivamente, existe um ponto periódico θ em U , tal que $f^N(\theta) \in V$, para algum $N > 0$, inteiro. Portanto, $f|_\Lambda$ é transitiva.

□

Definição 30. *Sejam M uma variedade C^k e um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$. Então f é um difeomorfismo Axioma A, se as seguintes duas condições forem satisfeitas:*

1. *O conjunto não errante de f , $\Omega(f)$, é um conjunto hiperbólico e compacto.*
2. *O conjunto de pontos periódicos de f é denso em $\Omega(f)$.*

O próximo resultado decorre do Teorema 3.3.

Corolário 4.1. *Todo difeomorfismo de Anosov é Axioma A.*

Corolário 4.2 (Espectral de Smale Axioma A). *Se $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo Axioma A. Então, existem $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ fechados invariantes tais que:*

1. $\Omega(f) = \bigcup_{i=1}^n \Lambda_i$,
2. $f|_{\Lambda_i} : \Lambda_i \rightarrow \Lambda_i$ é topologicamente transitiva.

Corolário 4.3. *Se f é um difeomorfismo de Anosov tal que $\Omega(f) = M$, então f é topologicamente transitivo.*

Como f é um difeomorfismo de Anosov e M é conexo, em uma variedade conexa onde os pontos periódicos são densos e há uma estrutura hiperbólica, qualquer ponto pode ser aproximado por órbitas periódicas. Isso garante que para quaisquer abertos não vazios $U, V \subset M$, existe uma iteração n tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, satisfazendo a definição de topológica transitividade.

Capítulo 5

Difeomorfismos de Anosov

5.1 Estrutura de produto local e conjuntos hiperbólicos localmente maximal

Definição 31 (Conjunto hiperbólico localmente maximal). *Um conjunto hiperbólico Λ para $f : U \rightarrow M$ é chamado localmente maximal se existe um conjunto aberto V tal que $\Lambda \subset V \subset U$ e $\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(V)$.*

Essa definição captura a ideia de que o conjunto hiperbólico Λ é "máximo" em relação à sua propriedade hiperbólica em uma vizinhança local, no sentido de que não podemos adicionar mais pontos ao conjunto que preservem as características hiperbólicas. Por exemplo, as ferraduras são conjuntos hiperbólicos localmente maximais.

Como todo subconjunto invariante fechado de um conjunto hiperbólico também é um conjunto hiperbólico, a estrutura geométrica de um conjunto hiperbólico pode ser muito complicada e difícil de descrever. No entanto, devido às suas propriedades especiais, os conjuntos hiperbólicos localmente maximais permitem uma caracterização geométrica.

Como $E^s(x) \cap E^u(x) = \{0\}$, as variedades locais estáveis e instáveis de x intersectam-se em x transversalmente.

Lema 5.1. *Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\phi : B_\epsilon^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ e $\psi : B_\epsilon^l \rightarrow \mathbb{R}^k$ são aplicações diferenciáveis e $|\phi(x)|, \|d\phi(x)\|, |\psi(y)|, \|d\psi(y)\| < \delta$ para todo $x \in B_\epsilon^k$ e $y \in B_\epsilon^l$, então a interseção $\text{graph}(\phi) \cap \text{graph}(\psi) \subset \mathbb{R}^{k+l}$ é transversal e consiste em exatamente um ponto que depende continuamente de ϕ e ψ na topologia C^1 .*

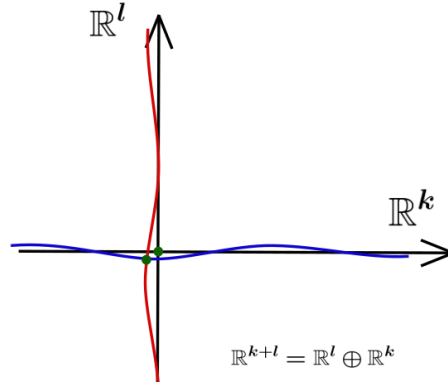


Figura 5.1: Ilustração do Lema 4.1.

Demonstração. Note que $z \in \text{graph}(\phi) \cap \text{graph}(\psi)$ se, e somente se existem x e y tais que $(x, \phi(x)) = (\psi(y), y)$ se, e somente se

$$\begin{cases} x - \psi(y) = 0 \\ y - \phi(x) = 0 \end{cases}.$$

Agora defina a transformação $F : B^l \times B^l \rightarrow \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l$ dado por $(x, y) \mapsto (x - \psi(y); y - \phi(x))$.

Veja que $Df(x, y) = \begin{bmatrix} Id & -D\psi \\ -D\phi & Id \end{bmatrix}$, onde $|D\psi| < \delta$ e $|D\phi| < \delta$ para δ pequeno o bastante. Então, $Df \approx Id$, implicando que Df é invertível se $\delta > 0$ é pequeno o suficiente.

Seja $\tilde{\phi}(x, y, t) = t\phi(x, y)$ e $\tilde{\psi}(x, y, t) = t\psi(x, y)$ tal que $t \in [0, 1]$. Temos que

$$\max\{|D\tilde{\psi}|, |D\tilde{\phi}|, |\tilde{\psi}|, |\tilde{\phi}|\} < \delta$$

se as hipóteses do lema são satisfeitas.

Defina $\tilde{F} : B^l \times B^l \times \rightarrow \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l$ dado por $(x, y, t) \mapsto \tilde{F}(x, y, t) = (x - \tilde{\psi}(y); y - \tilde{\phi}(x))$ e

$$D\tilde{F} = \begin{bmatrix} Id & -tD\Psi & | & -\Psi \\ -tD\Phi & Id & | & -\Phi \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Observe que da derivada acima $D_{x,y}\tilde{F}$ é isomorfismo se δ é suficientemente pequeno, pois existe a C^1 proximidade a Id .

Além disso, $\tilde{F}(0, 0, 0) = F(0, 0) = 0$. Pelo Teorema da função implícita existem únicas funções $x(t), y(t)$ com $t \in [0, 1]$, ambas C^1 tais que $\tilde{F}(x(t), y(t), t) = 0$ se, e somente se, $Z(t) = (x(t), y(t))$ é o ponto comum dos gráficos $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$.

Suponha que ϕ_0 está ϵ C^1 -próximo de ϕ e ψ_0 está ϵ C^1 -próximo de ψ . Sejam $Z = \text{graf}(\phi) \cap \text{graf}(\psi)$ e $Z_0 = \text{graf}(\phi_0) \cap \text{graf}(\psi_0)$. Pela definição Z_0 está ϵ próximo de $\text{graf}(\phi)$ e $\text{graf}(\psi)$, respectivamente, logo Z_0 está na intersecção dos ϵ tubos em torno de ϕ_0 e ψ_0 , o que demonstra a continuidade das intersecções. $\square$

Proposição 5.1. *Seja Λ um conjunto hiperbólico para $f : U \rightarrow M$. Para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in \Lambda$ e $d(x, y) < \delta$, então a intersecção $W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y)$ é transversal e consiste em exatamente um ponto $[x, y]$, que depende continuamente de x e y . Além disso, existe $C_p = C_p(\delta) > 0$ tal que se $x, y \in \Lambda$ e $d(x, y) < \delta$, então $d^s(x, [x, y]) \leq C_p d(x, y)$ e $d^u(x, [x, y]) \leq C_p d(x, y)$, onde d^s e d^u denotam distâncias ao longo das variedades estáveis e instáveis.*

Demonstração. Considere a intersecção $W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y)$, onde $x, y \in \Lambda$ e $d(x, y) < \delta$. Pelo o Lema 5.1 tem-se a garantia de que para as funções ϕ e ψ , a intersecção de seus respectivos gráficos é transversal e consiste em exatamente um ponto.

Agora, observe que podemos associar as funções ϕ e ψ do Lema 5.1 às variedades estáveis $W_\epsilon^s(x)$ e instáveis $W_\epsilon^u(y)$. As variedades estáveis e instáveis são subvariedades invariantes. Portanto, podemos aplicar o Lema 5.1 às variedades estáveis $W_\epsilon^s(x)$ e instáveis $W_\epsilon^u(y)$. Isso implica que a intersecção $W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y)$ é transversal e consiste em exatamente um ponto.

Suponha que $x, y \in \Lambda$ e $d(x, y) < \delta$ para um certo δ .

Primeiro, sabemos que a distância ao longo da variedade estável satisfaz a desigualdade:

$$d^s(x, [x, y]) \leq d(x, y) + d^u(x, [x, y]).$$

Como o ângulo entre as variedades estáveis e instáveis é uniformemente afastado de zero. Ao aproximar linearmente estas variedades suas propriedades geométricas locais são parecidas à geometria euclidiana.

Assim $d^s(x, [x, y]) \leq C_p d(x, y)$, onde C_p pode ser deduzido aproximado localmente por W^s e W^u com seus tangentes via lei dos senos. analogamente obtêm-se $d^u(x, [x, y]) \leq C_p d(x, y)$. $\square$

Sejam $\epsilon > 0, k, l \in \mathbb{N}$, e seja $B_\epsilon^k \subset \mathbb{R}^k, B_\epsilon^l \subset \mathbb{R}^l$ ϵ -bolas com centro na origem.

A seguinte propriedade dos conjuntos hiperbólicos desempenha um papel importante em sua descrição geométrica e é equivalente à maximalidade local.

Definição 32. *Um conjunto hiperbólico Λ possui estrutura de produto local se existirem $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ suficientemente pequenos tais que:*

1. *Para todos $x, y \in \Lambda$, a interseção $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y)$ consiste em no máximo um ponto, que pertence a Λ .*
2. *Para $x, y \in \Lambda$ com $d(x, y) < \delta$, a interseção consiste em exatamente um ponto de Λ , denotado por $[x, y] = W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y)$, e a interseção é transversal (Proposição 5.1).*

Se um conjunto hiperbólico Λ possui uma estrutura de produto local, então para cada $x \in \Lambda$ existe uma vizinhança $U(x)$ tal que

$$U(x) \cap \Lambda = \{[y, z] : y \in U(x) \cap W_\varepsilon^s(x), z \in U(x) \cap W_\varepsilon^u(x)\}.$$

Proposição 5.2. *Um conjunto Λ hiperbólico é localmente maximal se, e somente se, tem uma estrutura com produto local.*

Demonstração. Suponha que Λ seja localmente maximal. Se $x, y \in \Lambda$ e $d(x, y)$ for pequeno o suficiente, pela Proposição 5.1. $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y) = [x, y] =: z$ está bem definida. Agora, note que

$$z \in W_\varepsilon^s(x) \text{ e } z \in W_\varepsilon^u(y)$$

se, e somente se,

$$d(f^n(z), f^n(x)) < \varepsilon \text{ e } d(f^n(z), f^n(y)) < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Se ε é tomado pequeno o suficiente, $\Lambda_\varepsilon \subset V$ e $f_z^n \in \Lambda_\varepsilon \subset V$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim, $z \in f^{-n}(V)$, para todo n . Então, $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(V) = \Lambda$. Logo, $z \in \Lambda$. Concluindo que Λ tem estrutura de produto local.

Passemos à prova da recíproca. Suponha que Λ tenha estrutura de produto local com as constantes ε, δ, C_p da Proposição 5.1.

Devemos mostrar que se toda órbita de um ponto q está próxima de Λ implica que o ponto q está em Λ . Seja $q \in V$ de modo que como $\Lambda \subset V \subset U$ aberto tal que $f^n(q) \in V$, ou seja $q \in f^{-n}(V)$ o que implica em $q \in \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(V)$. Queremos mostrar que $q \in \Lambda$.

Para isso, fixe $\alpha \in (0, \frac{\delta}{3})$ de modo que $f(p) \in W_{\frac{\delta}{3}}^u(f(x))$ sempre que $x \in \Lambda$ e $p \in W_\delta^u(x)$.

Seja $x_0 \in \Lambda$ qualquer. Primeiramente, iremos assumir o caso em que $q \in W_\alpha^u(x_0)$, logo existe $y_n \in \Lambda$ tal que $d(f^n(q), y_n) < \frac{\alpha}{C_p}$, para todo $n > 0$. Veja figura 5.2

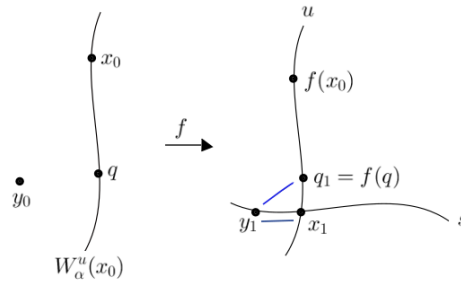


Figura 5.2: Ação da f .

Desde que $f(x_0), y_1 \in \Lambda$ e

$$\begin{aligned} d(f(x_0), y_1) &< d(f(x_0), f(q)) + d(f(q), y_1) \\ &< \frac{\delta}{3} + \frac{\alpha}{C_p} \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Temos que $x_1 = [y_1, f(x_0)] = [y_1, f(q)] \in \Lambda$, pela Proposição 5.1 $f(q) \in W_\alpha^u(x_1)$.

Repetindo este raciocínio, temos que $x_n = [y_n, f^n(q)] \in \Lambda$ com $f^n(q) \in W_\alpha^u(x_n)$.

Defina $q_n = f^{-n}(x_n)$, tal sequência converge para q quando $n \rightarrow \infty$.

Assim, $q_n \rightarrow q$. Como $x_n \in \Lambda$ para todo n , e Λ é fechado, segue que $q \in \Lambda$. Analogamente, se $q \in W_\alpha^s(x_0)$ para algum $x_0 \in \Lambda$ e $f^n(q)$ ficar próximo o suficiente de Λ para todo n , segue que $q \in \Lambda$.

Assuma que $f^n(y)$ está suficientemente próximo a $x_n \in \Lambda$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, então, $y \in \Lambda_\varepsilon^s \cap \Lambda_\varepsilon^u$, implicando que, pelas Proposições 3.5 e 3.7, $\Lambda \cup (y)$ é um conjunto hiperbólico com constantes próximas às constantes de hiperbolicidade de Λ se ε é suficientemente pequeno. Além disso, do Teorema da Variedade Estável, estão bem definidos $W_{\text{loc}}^s(y)$ e $W_{\text{loc}}^u(y)$.

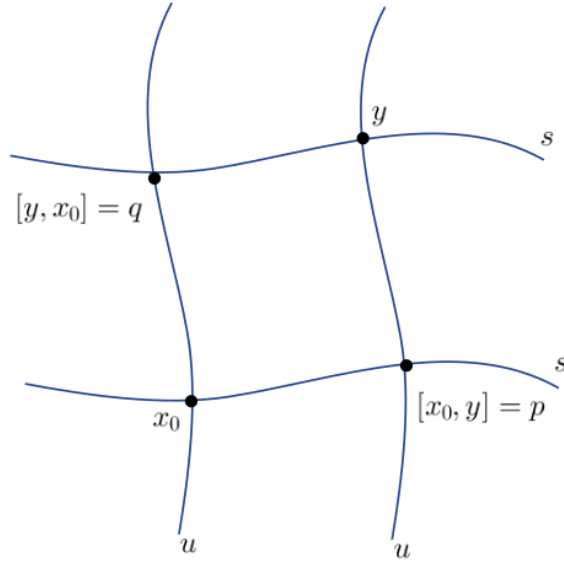


Figura 5.3: Interseções das Variedades Estáveis e Instáveis.

Aplicando a ideia anterior, concluímos que $p, q \in \Lambda$. Finalmente $y = [q, p]$, com

$p, q \in \Lambda$. Pela estrutura de produto local segue que $y \in \Lambda$.

□

5.2 Difeomorfismos de Anosov

Note que um difeomorfismo f , da classe C^1 e atuando em uma variedade diferenciável conexa M , é chamado de Anosov se, e somente se, todo o conjunto M for hiperbólico para f . Essa caracterização vem diretamente da definição de um difeomorfismo de Anosov, o que implica que M deve ser não apenas maximal em relação a essa propriedade, mas também compacto.

Recorde dos capítulos passados que o automorfismo gerado por $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ no toro $\mathbb{T}^2 = \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}$ é Anosov.

Vamos generalizar os automorfismos dessa forma $\mathbb{T}^n = \frac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}^n}$, ou seja, qualquer automorfismo hiperbólico induzido por uma matriz $M_{n \times n}(\mathbb{Z})$, com $\det(A) = \pm 1$ e cujos autovalores tem valor absoluto diferente de 1, induzem difeomorfismos de Anosov no toro. A prova deste fato é similar ao Exemplo 3.2.

Existe uma classe de variedades, conhecidas como infranilvariedades, que são como toros generalizados, estas não está no nosso escopo detalhar este assunto. Sabe-se que é possível definir difeomorfismos de Anosov em infranilvariedades, de modo parecido aos automorfismos lineares do toro e que, em infranilvariedade todo difeomorfismo de Anosov é topologicamente conjugado a um difeomorfismo de Anosov tipo linear. Ainda permanece em aberto a questão sobre a classificação das variedades Riemannianas conexas que admitem difeomorfismos de Anosov. Pode-se ler mais sobre em [14].

Assumiremos juntamente a métrica adaptada que as famílias de variedades estáveis e instáveis de um difeomorfismo de Anosov formam duas folheações, uma estável denotado por W^s e uma instável denotado por W^u .

A proposição a seguir apresenta uma propriedades básicas das distribuições estáveis e instáveis E^s e E^u , e das folheações estáveis e instáveis W^s e W^u , de um difeomorfismo de

Anosov f . Essas propriedades seguem imediatamente das seções anteriores deste capítulo. Assumimos que a métrica é adaptada a f e denotada por d^s e d^u , as distâncias ao longo das folhas estáveis e instáveis.

Proposição 5.3. *Seja $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo de Anosov. Então, existem $\lambda \in (0, 1)$, $C_p > 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ e para cada $x \in M$ uma decomposição $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$, tal que:*

1. $df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$ e $df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$;
2. $\|Df_x v^s\| \leq \lambda \|v^s\|$ e $\|Df_x^{-1} v^u\| \leq \lambda \|v^u\|$ para todo $v^s \in E^s(x), v^u \in E^u(x)$;
3. $W^s(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$ e $d^s(f(x), f(y)) \leq \lambda d^s(x, y)$ para cada $y \in W^s(x)$;
4. $W^u(x) = \{y \in M : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$ e $d^u(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \leq \lambda d^u(x, y)$ para cada $y \in W^u(x)$;
5. $f(W^s(x)) = W^s(f(x))$ e $f(W^u(x)) = W^u(f(x))$;
6. $T_x W^s(x) = E^s(x)$ e $T_x W^u(x) = E^u(x)$;
7. Se $d(x, y) < \delta$, então a interseção $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y)$ é exatamente um ponto $[x, y]$, e depende continuamente de x e y , e $d^s([x, y], x) \leq C_p d(x, y)$, $d^u([x, y], y) \leq C_p d(x, y)$.

Relembremos que uma das propriedades fundamentais dos difeomorfismos de Anosov é a estabilidade estrutural.

Proposição 5.4. *É válido que:*

1. Os difeomorfismos de Anosov formam um subconjunto aberto na topologia C^1 ;
2. Os difeomorfismos de Anosov são estruturalmente estáveis;
3. O conjunto de pontos periódicos de um difeomorfismo de Anosov é denso no conjunto de pontos não-errantes.

Iremos complementar mais resultados sobre difeomorfismos de Anosov com o próximo teorema.

Definição 33. O conjunto $X \subset M$ é uma ε -malha se, para qualquer ponto $p \in M$, existe $x \in X$ tal que:

$$d(p, x) < \varepsilon.$$

Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de Anosov e $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ uma coleção finita de pontos periódicos que formam uma $\frac{\varepsilon}{4}$ -malha em M . Defina P como sendo o produto dos períodos dos pontos x_i , e em seguida defina $g := f^P$.

Lema 5.2. Existe $q \in \mathbb{N}$ tal que se $d(W^u(y), x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(x_i, x_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ para algum $y \in M$, i e j . Então $d(g^{nq}(W^u(y)), x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(g^{nq}(W^u(y)), x_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Pela Proposição 5.4 (3) existe $z \in W^u(y) \cap W_{C_p \varepsilon_p}^s(x_i)$. Portanto, $d(g^t(z), x_j) < \varepsilon$ para cada $t \geq t_0(\varepsilon)$.

Desde que $d(g^t(z), x_j) < \varepsilon$, Proposição 5.4 (3) existe $w \in W^u(y)(g^t(z)) \cap W_{C_p \varepsilon_p}^s(x_j)$. Por isso $d(g^\tau(w), x_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $\tau \geq s_0$, onde $\tau(\varepsilon)$.

Tomando $q = t_0 + s_0$ e repetindo o processo n vezes obtemos $d(g^{nq}(W^u(y)), x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(g^{nq}(W^u(y)), x_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Lema 5.3. Se toda variedade instável/estável é densa em M , então para todo $\varepsilon > 0$ existe $R = R(\varepsilon) > 0$ tal que para toda bola de raio R em toda variedade instável/estável é ε -densa em M .

Demonstração. Tome $x \in M$. Como $W^u(x) = \bigcup_R W_R^u(x)$ é denso em M , há um $R(x)$ tal que a bola $W_{R(x)}^u(x)$ centrado em x com raio $R(x)$ é ε -densa em M , existe um ponto na bola $W_{R(x)}^u(x)$ que está à uma distância menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ de z .

Desde que a folheação W^u seja contínua podemos encontrar um $\delta(x)$, tal que, para todo y na bola $B(x, \delta(x))$, a bola $W_{R(x)}^u(y)$ é $\frac{\varepsilon}{2}$ -densa, uma extensão local do x para a vizinhança $B(x, \delta(x))$.

Como M é compacto, uma coleção finita de $\delta(x)$ -bolas cobrem M . Seja $\mathcal{B}$ a coleção destas $\delta(x)$ -bolas.

Tome o maior valor possível de $R(x)$ entre as bolas em $\mathcal{B}$, teremos qualquer bola de raio R em qualquer variedade estável ou instável será ε -densa em M . $\square$

Teorema 5.1. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de Anosov. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\Omega(f) = M$,
2. toda variedade instável é densa em M ,
3. toda variedade estável é densa em M ,
4. f é topologicamente transitiva,
5. f é topologicamente mixing.

A demonstração seguirá a estrutura lógica de provar que $1 \implies 2 \implies 5 \implies 4 \implies 1$ e $1 \implies 3 \implies 5$.

Demonstração. Suponha que $\Omega(f) = M$. Devemos mostrar que toda variedade instável é densa em M .

Tome $\varepsilon > 0$ que satisfaça a Proposição 5.3 (7), que nos diz que todo Anosov tem propriedade de produto local.

A Proposição 5.4 (3) diz que $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f) = M$.

Escolha uma coleção finita $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ de pontos periódicos que formam uma $\frac{\varepsilon}{4}$ -malha em M , ou seja, para qualquer $y \in M$, existe x_i tal que $d(y, x_i) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Defina P como sendo o produto dos períodos dos pontos x_i , e em seguida defina $g := f^P$.

Assim $g(x_i) = x_i$ para todo x_i . Em suma, g é uma dinâmica semelhante a f , ela herda as propriedades de f , porém é acelerada.

Pela Proposição 5.3 (5) as variedades estáveis e instáveis de f e g são as mesmas.

Como M é compacto e conexo, qualquer X_i pode ser conectado a qualquer x_j por uma cadeia de não mais que N pontos periódicos com distância menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ entre qualquer dois pontos consecutivos, logo as bolas de centro x_k e raio $\frac{\varepsilon}{2}$ são conectadas pelo mesmo argumento.

Pelo Lema 5.2, $d(g^{Nq}(W^u(y)), x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo $g^{Nq}(W^u(y))$ é ε -denso em M para $y \in M$ qualquer. Portanto, $W^u(x)$ é denso em M . Analogamente tomando o tempo inverso temos que toda variedade estável é densa em M .

Agora vamos mostrar que se toda variedade instável ou estável é densa em M , implica que f é topologicamente mixing.

Sejam $U, V \subset M$ abertos não-vazios, $x, y \in M$ e $\delta > 0$ tal que $W_\delta^u(x) \subset U$ e $B(y, \delta) \subset V$.

Pelo Lema 5.3, existe $R(\delta)$ tal que qualquer R -bola em qualquer variedade (ins)estável é δ -densa em M .

Como f expande variedades instáveis uniformemente e com taxa exponencial, existe N tal que, o aberto U , iterado, terá interseção com V .

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset, \text{ para todo } n \geq N.$$

Logo, f é topologicamente mixing, por definição a mesma também é topologicamente transitiva.

Para terminar a prova nos resta mostrar que se f é topologicamente transitiva, implica que $\Omega(f) = M$. Temos que mostrar que M é um conjunto não errante, ou seja, dado $x \in M$, deve existir um aberto U_x que contenha x tal que para ao menos um $n > 0$ se tenha $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Porém, pelas hipóteses de f ser topologicamente transitiva tem que a interseção ocorre para quaisquer dois abertos, basta tomar ambos sendo U . Terminando a prova deste teorema. □

Capítulo 6

Rigidez

6.1 Equações cohomológicas

As equações cohomológicas aparecem naturalmente em sistemas dinâmicos em diversas situações como por exemplo, em construção de conjugações e cálculo da densidade de medida invariante.

A forma básica de uma equação cohomológica é frequentemente algo parecido com:

$$f \circ T - f = g - h,$$

onde T é uma transformação do espaço X em si mesmo, e f, g, h são funções de X para algum outro espaço (geralmente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Essas equações são uma ferramenta fundamental para entender a estrutura dos sistemas dinâmicos e suas propriedades e dada a importância das equações cohomológicas em sistemas dinâmicos, o tema por si só merece estudo individual.

Sob boas condições, dada uma dinâmica $f : X \rightarrow X$ e uma função $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, a equação

$$\varphi(x) = u(f(x)) - u(x), \tag{6.1}$$

possui uma solução $u = \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$.

A menos que se mencionem outras hipóteses, X sempre será um espaço métrico compacto e f, φ, u, ψ são pelo menos contínuas.

Considerando f, φ, ψ como acima, indutivamente pode-se verificar que

$$\psi(f^n(x)) = \psi(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)), n \in \mathbb{N}. \quad (6.2)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \psi(f(x)) - \psi(x) \\ \varphi(f(x)) &= \psi(f^2(x)) - \psi(f(x)) \\ \varphi(f^2(x)) &= \psi(f^3(x)) - \psi(f^2(x)) \\ &\vdots \\ \varphi(f^{n-1}(x)) &= \psi(f^n(x)) - \psi(f^{n-1}(x)). \end{aligned}$$

Somando ambos os lados da igualdade, vê-se que a soma do lado esquerdo é do tipo telescópica.

Logo, $\psi(f^n(x)) = \psi(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, validando a Equação (5.1).

Analogamente, quando f é invertível

$$\psi(f^{-n}(x)) = \psi(x) - \sum_{j=1}^n \varphi(f^{-j}(x)), n \in \mathbb{N}. \quad (6.3)$$

Observe que se $p \in X$ é tal que $f^n(p) = p$, onde $n \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned} \psi(f^n(p)) &= \psi(p) + \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(p)) \\ \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(p)) &= \psi(p) - \psi(p) = 0 \\ \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(p)) &= 0. \end{aligned}$$

A equação acima é uma condição suficiente, para que φ seja um cobordo de f , ou seja, a Equação 6.1 seja satisfeita com $u = \psi$. Mostraremos que, sob boas hipóteses sobre f e φ a equação acima ser satisfeita para todo ponto periódico é também suficiente para que φ seja um cobordo de f .

6.2 O Teorema de Livšic

Existem problemas em sistemas dinâmicos, a saber: construir conjugações topológicas, determinar densidade de medidas invariantes e etc, para os quais naturalmente aparecem equações cohomológicas. O Teorema de Livsic que apresentaremos nesta seção apresenta condições suficientes para que tais equações possuam solução com algum tipo de regularidade.

O Teorema de Livšic aborda especificamente a relação entre funções Hölder contínuas e a dinâmica de difeomorfismos suaves em variedades Riemannianas. Ele fornece uma estrutura para entender quando uma função, que satisfaz certas condições de soma ao longo das órbitas do sistema, pode ser expressa em termos de uma equação cohomológica.

A unicidade da solução desta equação cohomológica, exceto por uma constante aditiva, é outro aspecto crucial do teorema. Ela sugere que, sob as condições estabelecidas, a solução encontrada é robusta e, de certa forma, a única maneira de expressar a relação entre a função e a dinâmica do sistema.

Teorema 6.1 (Closing Lemma de Anosov, [13]). *Seja Λ um conjunto hiperbólico $f : U \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^1 entre U e $f(U)$, e Λ com uma (λ, μ) -decomposição hiperbólica. Então, para qualquer $\alpha > \max\{\lambda, \mu^{-1}\}$ existem uma vizinhança V de Λ , $C > 0, \epsilon_0 > 0$ tais que se $f^j(x) \in V, j = 0, \dots, n$ e $d(f^n(x), x) < \epsilon_0$, então existe um ponto periódico y tal que $f^n(y) = y$ e*

$$d(f^j(x), f^j(y)) < C\alpha^{\min\{j, n-j\}}d(f^n x, x).$$

Enunciado o Closing Lemma de Anosov vamos prosseguir para o Teorema de Livšic.

Teorema 6.2 (Teorema de Livšic, [13]). *Seja M uma variedade Riemanniana, $U \subset M$ aberto, $f : U \rightarrow M$ um difeomorfismo suave entre U e $f(U)$ e $\Lambda \subset U$, um conjunto hiperbólico tal que $f|_{\Lambda}$ seja topologicamente transitivo. Suponha $\varphi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hölder contínua tal que, $\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = 0$, para todo $x \in \Lambda$ tal que $f^n(x) = x$. Então, existe uma função Hölder contínua $\psi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi = \psi \circ f - \psi.$$

Além disso, ψ é única a menos de uma constante aditiva.

Demonstração. Como $f|_{\Lambda}$ é transitiva, existe x_0 tal que $O_f^+(x_0)$ é tal que $\overline{O_f^+(x_0)} = \Lambda$.

Vamos construir ψ , escolha $\psi(x_0) = c_0$ e defina $\psi(f^n(x_0)) = c_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x_0))$. Note que $\psi(f^{n+1}(x_0)) - \psi(f^n(x_0)) = \phi(f^n(x_0))$. Observe que, tomando $z = f^n(x_0)$ tem-se que $\psi(f(z)) - \psi(z) = \phi(z)$.

Nos falta mostrar que ψ é definida em Λ e é Hölder contínua.

Afirmção: ψ é Hölder contínua com mesmo expoente Hölder de ϕ .

De fato, seja $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^n(x_0), f^m(x_0)) = \varepsilon$. Então, pelo Lema 6.1, se $m > n$, dado $\max\{\lambda, \mu^{-1}\} < \alpha < 1$, existe $y \in \Lambda$ tal que $f^{m-n}(y) = y$, e $d(f^{n+i}(x_0), f^i(y)) < C\varepsilon\alpha^{\min\{m-n, m-n-i\}}$ com $i = 0, 1, \dots, m-n$.

Seja $\theta \in (0, 1]$ o expoente de Hölder de φ , ou seja, existe $M > 0$ tal que $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq M(d(x_1, x_2))^\theta$, quando x_1, x_2 estão suficientemente próximos.

Assim,

$$\begin{aligned}
|\psi(f^m(x_0)) - \psi(f^n(x_0))| &= \left| \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(f^j(x_0)) - \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x_0)) \right| \\
&= \left| \sum_{j=n}^{m-1} \varphi(f^j(x_0)) \right| \\
&= \left| \sum_{j=0}^{m-n-1} \varphi(f^{n+j}(x_0)) \right| \\
&= \left| \sum_{j=0}^{m-n-1} \varphi(f^{n+j}(x_0)) - \sum_{j=0}^{m-n} \varphi(f^j(y)) \right| \\
&= \left| \sum_{j=0}^{m-n-1} \varphi(f^{n+j}(x_0)) - \varphi(f^j(y)) \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{m-n-1} |\varphi(f^{n+j}(x_0)) - \varphi(f^j(y))| \\
&\leq \sum_{j=0}^{m-n-1} MC^\theta \varepsilon^\theta \alpha^{\theta \min\{j, m-n-j\}} \\
&= MC^\theta \varepsilon^\theta \frac{1}{1 - \alpha^\theta} \\
&= \frac{MC^\theta}{1 - \alpha^\theta} (d(f^n(x_0), f^m(x_0)))^\theta.
\end{aligned}$$

Provando, assim a afirmação.

Logo, ψ é uniformemente contínua em $O_f^+(x_0)$.

Como $\overline{O_f^+(x_0)} = \Lambda$ e ψ é contínua existe uma única extensão $\psi : \overline{O_f^+(x_0)} = \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$.

Dados $x, y \in \Lambda$, existem $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ contidas órbitas positivas de x_0 tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Note que $|\psi(x_n) - \psi(y_n)| \leq M(d(x_n, y_n))^\theta$, já que $x_n \in O_f^+(x_0)$ e $y_n \in O_f^+(x_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\psi(x_n) - \psi(y_n)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M(d(x_n, y_n))^\theta,$$

logo

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq M(d(x, y))^\theta.$$

Concluindo que ψ é θ -Hölder contínua em Λ .

Mostremos agora que $\phi = \psi \circ \phi - \psi$ para todo $x \in \Lambda$. Temos que a mesma é solução para $x \in O_f^+(x_0)$.

Seja $x \in \Lambda$, existe (x_n) uma sequência de pontos em $O_f^+(x_0)$ com $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Veja que ao tomarmos $x_k = f^{n_k}(x_0)$ obtemos que

$$\begin{aligned}\phi(x_n) &= \phi(x_k) \\ &= \psi f(x_k) - \psi(x_k).\end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} [\psi(f(x_k)) - \psi(x_k)].$$

Implicando que $\phi(x) = \psi(f(x)) - \psi(x)$, para todo $x \in \Lambda$. Portanto, ψ é solução de ϕ de Λ .

Mostremos agora a unicidade, a menos de uma constante aditiva. Seja β nas mesmas condições de ψ . Seja $\beta(x_0) = b_0$, então

$$\begin{aligned}\beta(f^n(x_0)) - \psi(f^n(x_0)) &= b_0 - c_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x_0)) - \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x_0)) \\ &= b_0 - c_0.\end{aligned}$$

Como β e ψ é constante em um conjunto denso, logo pela continuidade das funções, concluímos que $\beta - \psi = c_0 - b_0$, ou seja $\beta - \psi$ é contante.

□

Existem outras versões deste teorema como por exemplo a versão a seguir.

Teorema 6.3 (Teorema de Livšic, [13]). *Seja M uma variedade Riemanniana, $U \subset M$ aberto, $f : U \rightarrow M$ um mergulho suave. Suponha que $\Lambda = \overline{\text{Per}(f)}$ seja um conjunto hiperbólico e $\varphi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hölder contínua tal que, $\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = 0$, para todo $x \in \Lambda$ tal que $f^n(x) = x$. Então, existe uma função Hölder contínua $\psi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi = \psi \circ f - \psi.$$

Nesta versão, não há menção à unicidade de ψ , ao contrário da versão anterior, na qual foi afirmado que ψ é única a menos de uma constante aditiva. A ausência dessa declaração de unicidade significa que, nessa formulação do teorema, não é garantido que a solução ψ seja única, mesmo considerando uma constante aditiva.

Segue a demonstração do teorema.

Demonstração. Neste caso, como $\Lambda = \overline{\text{Per}(f)}$ é hiperbólico, vale o Teorema espectral de Smale 4.3

$$\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_m,$$

uma união de peças básicas mutuamente disjuntas, compactas, f -invariantes e $f|_{\Lambda_i}, i = 1, \dots, m$ é topologicamente transitiva. De acordo com o Teorema de Livšic, em cada peça básica Λ_i está definida(a menos de uma constante aditiva) uma única função Hölder contínua $\psi_i : \Lambda_i \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x) = \psi_i \circ f(x) - \psi_i(x), \forall x \in \Lambda_i, i = 1, \dots, m.$$

□

Temos também a versão C^1 . do Teorema de Livšic, o qual darei uma ideia da prova.

Teorema 6.4 (Versão C^1 do Teorema de Livšic, [13]). *Se no Teorema de Livšic, φ é de classe C^1 , então a solução ψ também é de classe C^1 .*

No Teorema de Livšic original, φ é assumida como uma função Hölder contínua, e a solução ψ é encontrada dentro da mesma classe de regularidade. No entanto, a "Versão C^1 " estabelece que, se φ for de classe C^1 , então a solução ψ também será de classe C^1 .

Ideia da prova. A menos de tomar cartas locais, podemos supor que as variedades estáveis dos pontos $z \in \Lambda$ são espaços lineares. Assim se x, y são pontos na mesma variedade estável, para os quais estão definidos valores $\psi(x), \psi(y)$ temos:

$$\psi(y) - \psi(x) = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) - \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(y)) \right] + (\psi(f^n(y)) - \psi(f^n(x))),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$\psi(y) - \psi(x) = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) - \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(y)) \right] + (\psi(f^n(y)) - \psi(f^n(x))),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tomando limite quando $n \rightarrow +\infty$ e uma vez que ψ é uniformemente contínua, obtemos

$$\psi(y) - \psi(x) = - \sum_{j=0}^{+\infty} (\varphi(f^j(y)) - \varphi(f^j(x))).$$

Uma vez que $y = x + tv, v \in E_x^s$, fixando x e variando t podemos derivar formalmente em $t = 0$ a expressão acima, obtendo

$$D_v \psi(x) = - \sum_{j=0}^{+\infty} D_{v_i} \varphi(f^i(x)) \cdot D_v f^i(x) \cdot v,$$

de modo que $v_i = D_v f^i(x)$.

Como $v \in E_x^s$, segue que $\|v_k\| \leq C\lambda^k \|v\|$, e como φ é C^1 , as derivadas direcionais $D_{v_i} \varphi(f^i(x))$ são limitadas por uma constante $K > 0$, desta forma, a expressão em série para $D_v \psi(x)$ é uniformemente convergente. Portanto, ψ é C^1 sobre as variedades estáveis.

De modo análogo, tomando a inversa f^{-1} , concluímos que ψ é C^1 sobre as variedades instáveis.

Do Lema de Journé 6.1, decorrerá a conclusão da prova da versão C^1 do Teorema de Livšic. $\square$

Lema 6.1 (Lema de Journé[13]). *Se $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é C^1 ao longo das folhas de duas folheações contínuas e transversais W^s e W^u , então ϕ é C^1 .*

Uma das aplicações do Teorema de Livšic é o Teorema de Livšic-Sinai, que atua no estudo de difeomorfismos de Anosov. Este teorema estabelece uma relação entre a existência de certas medidas invariantes e propriedades específicas do difeomorfismo. Vamos introduzir o teorema de forma mais detalhada:

Teorema 6.5 (Teorema de Livšic-Sinai, [13]). *Considere M uma variedade Riemanniana equipada com uma forma de volume m . Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de Anosov, que é transitivo e de classe C^2 . As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe uma medida absolutamente contínua em relação a m , invariante sob a ação de f , cuja densidade é contínua e positiva em todo M .*
2. *O jacobiano de f^n em um ponto p , denotado por $Jf^n(p)$, é igual a 1 para todo ponto $p \in M$ que satisfaz $f^n(p) = p$.*
3. *Existe uma medida absolutamente contínua em relação a m , invariante sob f , cuja densidade é de classe C^1 e positiva em todos os pontos de M .*

A existência de medidas invariantes absolutamente contínuas é um tópico central na teoria ergódica e nos sistemas dinâmicos. Essas medidas são importantes para entender a distribuição estatística das órbitas do sistema ao longo do tempo.

Demonstração. Suponha que existe uma medida absolutamente contínua em relação a m , invariante sob a ação de f , cuja densidade é contínua e positiva em todo M , vamos mostrar que o jacobiano de f^n em um ponto p , denotado por $Jf^n(p)$, é igual a 1 para todo ponto $p \in M$ que satisfaz $f^n(p) = p$.

Suponha que exista $\mu \ll m$, pelo Teorema de Radon Nikodym existe $\rho \in L_m^1(X)$ tal que $\mu(A) = \int_A \rho dm$, para todo $A \in \Sigma_m$, ρ é a derivada de Radon-Nikodym, $\rho = \frac{d\mu}{dm} \geq 0$ por hipótese.

Como μ é f -invariante $\mu(A) = \mu(f(A))$, para todo A mensurável

$$\int_A d\mu = \int_{f(A)} d\mu \Rightarrow \int_A \rho dm = \int_{f(A)} \rho dm.$$

Aplicando mudança de variáveis, obtemos

$$\int_A \rho dm = \int_A \rho(f(y)) \cdot Jf(y) \cdot dm(y),$$

ou seja,

$$\int_A \rho dm = \int_A (\rho \circ f) Jf dm.$$

Então, $\rho = (\rho \circ f) Jf$ m -qtp em A .

Da mesma forma, $\mu(A) = \mu(f^n(A))$, assim $\rho = \rho \circ f^n \cdot Jf^n$ e aplicando p tal que $f^n(p) = p$ obtemos que

$$\rho(p) = \rho(p) \cdots Jf^n(p), \quad \rho(p) > 0. \text{ Então } Jf^n(p) = 1.$$

Suponha que o jacobiano de f^n em um ponto p , denotado por $Jf^n(p)$, é igual a 1 para todo ponto $p \in M$ que satisfaz $f^n(p) = p$, queremos mostrar que existe uma medida absolutamente contínua em relação a m , invariante sob f , cuja densidade é de classe C^1 e positiva em todos os pontos de M .

Pela regra da cadeia, temos que $1 = Jf^n(p) = \prod_{j=0}^{n-1} Jf(f^j(p))$, segue que $0 = \sum_{j=0}^{n-1} \ln(Jf(f^j(p)))$, para todo p tal que $f^n(p) = p$.

Note que tomando $\phi(x) = \ln(Jf(x))$, $x \in M$ e $\Lambda = M$, como f é C^2 , estamos em condições de aplicar a versão C^1 do Teorema de Livšic, logo existe $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$$\ln(Jf(x)) = \psi(f(x)) - \psi(x), \quad x \in M.$$

Desta maneira,

$$Jf(x) = e^{\psi(f(x)) - \psi(x)} = e^{\psi(f(x))} e^{-\psi(x)}$$

e organizando teremos

$$Jf(x) e^{-\psi(f(x))} = e^{-\psi(x)}.$$

Defina $\rho(x) := e^{-\psi(x)}$ que é C^1 e positivo, defina também μ tal que $\rho(x) = \frac{d\mu}{dm}$. Desta forma se A é um boreliano em M , temos que

$$\begin{aligned}
\mu(f(A)) &= \int_{f(A)} d\mu(x) \\
&= \int_{f(A)} \rho(x) dm(x) \\
&= \int_A \rho \circ f(x) \cdot Jf(x) dm(x) \\
&= \int_A Jf(x) e^{-\psi(f(x))} dm(x) \\
&= \int_A e^{-\psi(x)} dm(x) \\
&= \int_A \rho(x) dm(x) \\
&= \mu(A).
\end{aligned}$$

Portanto, μ é f -invariante, $\mu \ll m$ por Radon-Nikodym, além disso, ρ é C^1 e positiva como queríamos. $\square$

Observe que podemos escolher a constante aditiva no Teorema de Livšic de forma que $\mu(M) = 1$.

Teorema 6.6 ([15]). *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo C^2 -Anosov. Se $Jf^n(p) = 1$, para qualquer $p \in \text{Per}(f)$, tal que $f^n(p) = p$, então f é transitivo e deixa uma forma de volume C^1 invariante.*

A aplicação do teorema acima mencionado possibilita a reformulação do Teorema de Livsic-Sinai, eliminando a necessidade da transitividade como uma hipótese geral.

Corolário 6.1 ([15]). *Seja f um difeomorfismo C^2 -Anosov. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *f admite uma medida invariante da forma $d\nu = h dm$ onde h é uma função C^1 positiva.*
2. *f admite uma medida invariante ν absolutamente contínua com respeito à m .*
3. *$Jf^n(x) = 1$ sempre que $f^n(x) = x$.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [15].

6.3 Rigidez de transformação expansoras de $\mathbb{S}^1$

Segundo Gogolev no abstract de um minicurso que ele ministrou [7], o mesmo expôs a frase "When a weak form of equivalence of two dynamical systems, such as coincidence of some numerical invariants, implies a stronger equivalence we say that dynamics exhibits a rigidity phenomenon.", a mesma pode ser traduzida para o português como: "Quando uma forma fraca de equivalência entre dois sistemas dinâmicos, como a coincidência de alguns invariantes numéricos, implica uma equivalência mais forte, dizemos que a dinâmica exibe um fenômeno de rigidez.".

O fenômeno de rigidez ocorre quando essas formas mais fracas de equivalência (como a coincidência de invariantes numéricos) sugerem ou implicam uma equivalência mais forte entre os sistemas. Uma equivalência é a conjugação topológica regular (por exemplo C^r com $r \geq 1$).

Podemos entender que condições rígidez são opostas às condições flexíveis. Uma vez que flexibilidade garante o mesmo tipo de fenômeno por pequenas perturbações; na rigidez, a mínima perturbação da condição rompe por completo o fenômeno original.

Vamos analisar a rigidez de transformações expansoras em $\mathbb{S}^1$ e em seguida dos difeomorfismos de Anosov.

Sabemos que difeomorfismos de Anosov são estruturalmente estáveis. Isto significa que

dado um difeomorfismo de Anosov $f : M \rightarrow M$, se $g : M \rightarrow M$ está C^1 -suficientemente próximo de f , então g é um difeomorfismo de Anosov, e existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que

$$h \circ f = g \circ h.$$

Outros exemplos de sistemas estruturalmente estáveis são as transformações expansoras.

Definição 34 (Transformação expansora). *Uma transformação $f : X \rightarrow X$ em um espaço métrico compacto X é dita expansora se existem constantes $r > 0$ e $\lambda > 1$ tal que se $d(x, y) < r$, então para todos os pontos x, y em X com $x \neq y$, $d(f(x), f(y)) \geq \lambda \cdot d(x, y)$, onde $d(\cdot, \cdot)$ denota a distância no espaço X .*

Em outras palavras, significa que f dilata distâncias de pontos próximos.

Dado $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ um difeomorfismo de Anosov, a este corresponde uma transformação linear $f_* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por uma matriz hiperbólica com coeficientes inteiros e determinante ± 1 . A matriz de f_* induz um automorfismo hiperbólico de $A : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$. Pela Teoria de Franks-Manning [14], f e A são conjugados, via um homeomorfismo h , tal que

$$h \circ f = A \circ h.$$

Módulo conjugação C^0 , os automorfismos hiperbólicos do toro são os únicos difeomorfismos de Anosov do toro, do ponto de vista topológico.

Da mesma forma, as transformações expansoras de $\mathbb{S}^1$ dadas por $x \mapsto mx \pmod{1}$, onde $m > 1$ é um número inteiro, do ponto de vista topológico, são as únicas transformações expansoras de $\mathbb{S}^1$, ver [18].

A fim de conhecer os fenômenos ou teoremas de rigidez em difeomorfismos de Anosov do toro ou transformações expansoras do círculo, podemos nos perguntar que condições mínimas estas funções devem cumprir para que sistemas conjugados, sejam conjugados por homeomorfismos de classe C^1 .

O próximo teorema a ser enunciado e provado é um exemplo de um teorema de rigidez, que segue como uma consequência do Teorema de Livšic.

Teorema 6.7 ([19]). *Seja $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ uma função expansora, de classe C^2 , que preserva orientação, e de grau $k > 1$. Suponha que em todo $p \in \mathbb{S}^1$ tal que $f^n(p) = p$, tenha-se que $Df^n(p) = k^n$. Então, f é C^1 -conjugada a $g(x) = kx \pmod{1}$.*

Demonstração. Note que em cada ponto periódico de período n , vale que

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\log |Df(f^j(p))| - \log(k)) = 0.$$

De fato, para mostrar a igualdade da expressão

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\log |Df(f^j(p))| - \log(k)) = 0,$$

onde $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ é uma função expansor de classe C^2 , k é o grau de f que é maior que 1, p é um ponto fixo de f^n (ou seja, um ponto periódico de período n), e Df é a derivada de f .

Vamos começar aplicando a regra da cadeia. Se temos um ponto periódico p tal que $f^n(p) = p$, então a aplicação da regra da cadeia para a derivada de f^n em p é dada por:

$$Df^n(p) = Df(f^{n-1}(p)) \cdot Df(f^{n-2}(p)) \cdot \dots \cdot Df(p).$$

Tomando o logaritmo natural de ambos os lados, temos:

$$\log |Df^n(p)| = \log |Df(f^{n-1}(p))| + \log |Df(f^{n-2}(p))| + \dots + \log |Df(p)|,$$

a qual pode ser reescrita como uma soma:

$$\log |Df^n(p)| = \sum_{j=0}^{n-1} \log |Df(f^j(p))|.$$

Dado que $Df^n(p) = k^n$ pelo enunciado do teorema, podemos escrever:

$$\log |k^n| = \sum_{j=0}^{n-1} \log |Df(f^j(p))|.$$

Como $\log |k^n| = n \cdot \log |k|$, temos:

$$n \cdot \log |k| = \sum_{j=0}^{n-1} \log |Df(f^j(p))|.$$

Agora, se subtrairmos $n \cdot \log |k|$ de ambos os lados, obtemos:

$$0 = \sum_{j=0}^{n-1} \log |Df(f^j(p))| - n \cdot \log |k|$$

E como $\log |k|$ é uma constante, podemos distribuí-lo pela soma:

$$0 = \sum_{j=0}^{n-1} (\log |Df(f^j(p))| - \log |k|).$$

Esta é a expressão que queríamos mostrar, e isto completa a verificação da igualdade usando a regra da cadeia e as propriedades do logaritmo.

Segue do Teorema de Livšic caso C^1 com $\phi = \log$ que existe $\psi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$$\log \left(\frac{Df(x)}{k} \right) = \psi(f(x)) - \psi(x) \Leftrightarrow Df(x) \cdot e^{-\psi(f(x))} = k \cdot e^{-\psi(x)}, x \in \mathbb{S}^1.$$

Podemos mostrar que f preserva a medida $\mu(A) = \int_A e^{-\psi(x)} dm(x)$, $A \in \mathcal{B}$.

Dados $x \leq y$ em $\mathbb{S}^1$, defina $d(x, y) = \int_x^y e^{-\psi(t)} dt$ uma métrica ou distância. De fato, para mostrar que $d(x, y) = \int_x^y e^{-\psi(t)} dt$ define uma métrica no espaço $\mathbb{S}^1$, precisamos verificar que d satisfaz as três propriedades que caracterizam uma métrica.

A função $e^{-\psi(t)}$ é positiva para todo t , pois o expoente de um número real é sempre positivo. Portanto, a integral de uma função positiva sobre um intervalo é também positiva ou zero. Isso garante que $d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in \mathbb{S}^1$.

A métrica d deve satisfazer $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. Se $x = y$, então o intervalo de integração é nulo, e a integral de qualquer função sobre um intervalo nulo é zero: $\int_x^x e^{-\psi(t)} dt = 0$.

Inversamente, suponha que $d(x, y) = 0$. Como $e^{-\psi(t)}$ é positiva (já que $e^{-\psi(t)}$ nunca é zero para uma função exponencial real), a única maneira da integral ser zero é se o intervalo de integração for nulo, ou seja, $x = y$.

A métrica deve satisfazer $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{S}^1$. Para verificar isso, considere $x \leq y \leq z$ (caso contrário, podemos reordená-los já que estamos em $\mathbb{S}^1$). Então, pela aditividade da integral:

$$d(x, z) = \int_x^z e^{-\psi(t)} dt = \int_x^y e^{-\psi(t)} dt + \int_y^z e^{-\psi(t)} dt = d(x, y) + d(y, z).$$

Portanto, a desigualdade triangular é satisfeita.

Como todas as três propriedades são satisfeitas, podemos concluir que d é de fato uma métrica no espaço $\mathbb{S}^1$.

Se $|x - y|$ é suficientemente pequeno, por f ser expansora tenhamos que f é injetora em $[x, y]$, assim

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \int_{f(x)}^{f(y)} e^{-\psi(t)} dt = \int_x^y e^{-\psi(f(t))} Df(t) dt \\ &= k \cdot \int_x^y e^{-\psi(t)} dt = k \cdot d(x, y). \end{aligned}$$

Em outras palavras, com a métrica d temos que f age em $\mathbb{S}^1$ de modo linear. Observe que a métrica d induz a medida μ em $\mathbb{S}^1$. Segue dos resultados clássicos do estudo de transformações expansoras lineares que

$$h_\mu(f) = \log(k) = h_{\text{top}}(f).$$

Logo, μ é a única medida de máxima entropia de f .

Seja $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ a conjugação entre g e f tal que $h \circ g = f \circ h$. Sabemos que m (medida de Lebesgue) é a medida de máxima entropia de g e que $h_*(m)$ tal que $h_*(m)(A) = m(h^{-1}(A))$, para todo $A \in \mathcal{B}$ é medida de máxima entropia para f e h é uma função absolutamente contínua (tem derivada em quase todo ponto em relação a medida e satisfaz Teorema Fundamental do Cálculo),

$$X - 0 = \int_{h(0)}^{h(x)} e^{-\psi(t)} dt,$$

derivando em x

$$1 = e^{-\psi(h(x))} \cdot h'(x) \Rightarrow h'(x) = e^{\psi(h(x))}, \text{ q.s.}$$

Como h é absolutamente contínua, então satisfaz a equação integral

$$h(x) = h(0) + \int_0^x e^{\psi(h(t))} dt,$$

que tem solução única pelo Teorema de Picard. Finalmente, h é de classe C^1 , assim como f . □

Vamos voltar à discussão de quais condições mínimas devem se cumprir para que sistemas conjugados, sejam conjugados por homeomorfismos de classe C^1 .

Suponha que h na equação $h \circ f = g \circ h$ seja de classe C^1 . Seja p um ponto periódico de f tal que $f^n(p) = p$, assim $q = h(p)$ é periódico para g tal que $g^n(q) = q$. Temos $h \circ f^n = g^n \circ h$. Derivando em p , temos

$$\begin{aligned} Dh(f^n(p)) Df^n(p) &= Dg^n(q) Dh(p) \Rightarrow \\ \Rightarrow Dg^n(q) &= [Dh(p)]^{-1} \cdot Df^n(p) \cdot Dh(p). \end{aligned}$$

Concluimos que $Dg^n(h(p))$ e $Df^n(p)$ são matrizes semelhantes, qualquer que seja p ponto periódico. Sempre esta condição sobre pontos periódicos se cumpre para funções conjugadas f, g dizemos que estes tem mesmos dados periódicos.

Veremos que em dimensão baixa ter mesmos dados periódicos também é suficiente para conjugação C^1 no caso de transformações expansoras e difeomorfismos de Anosov.

Lema 6.2 ([19]). *Seja $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ uma transformação expansora de classe C^r , $r \geq 2$. Então, f admite uma única medida de probabilidade f -invariante, absolutamente contínua $\mu \ll m = \text{Leb}_{\mathbb{S}^1}$. Além disso, a densidade $\omega_f = \frac{d\mu}{dm}$ é positiva de classe C^{r-1} .*

Este lema será utilizado, porém omitiremos a prova do mesmo.

Teorema 6.8 ([19]). *Sejam $f, g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ duas transformações expansoras de classe C^r , com $r \geq 2$, que preservam orientação. Se f e g têm os mesmos dados periódicos, então f e g são C^r -conjugadas.*

Para provar este teorema usaremos a propriedade de distorção que em resumo é uma condição que impõe um controle sobre a variação da taxa de expansão de uma função (no caso a dinâmica) ao longo de um conjunto de pontos. Em outras palavras, ela limita o quanto a derivada da função pode variar em diferentes partes do domínio.

Para uma dinâmica $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, que é uma transformação expansora, toda transformação expansora C^2 tem a propriedade da distorção limitada.

$$C^{-1} \leq \frac{|(f^n)'(p)|}{|(f^n)'(x)|} \leq C.$$

Demonstração. Em dimensão 1, a condição dos dados periódicos se resume em

$$|(f^n)'(p)| = |(g^n)'(q)|, \quad h(p) = q$$

e

$$f^n(p) = p.$$

Denote por $\lambda(p) := \frac{1}{n} \log(|(f^n)'(p)|)$, ou seja $(f^n)'(p) = e^{n\lambda(p)}$. Em particular, a condição dos dados periódicos fornece-nos que $|(g^n)'(q)| = e^{n\lambda(p)}$ e $\lambda(p) = \lambda(q)$, $q = h(p)$.

A estrutura do gráfico das transformações expansoras diz que em cada intervalo I_i , um intervalo maximal de injetividade de f^n existe um único ponto fixo p_i de f^n . Via conjugação, em $J_i = h(I_i)$ existe um único ponto fixo $q_i = h(p_i)$ para g^n e J_i é um intervalo maximal de injetividade para g^n . Veja a Figura 6.1.

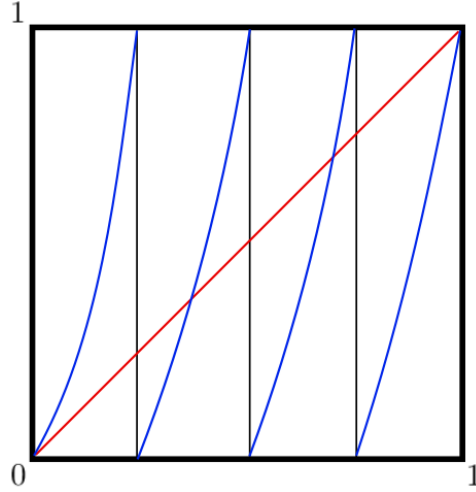


Figura 6.1: Intervalos de injetividade [19].

Da propriedade de distorção limitada temos que existe $C > 1$ tal que

$$C^{-1} \leq \frac{|(f^n)'(p_i)|}{|(f^n)'(x)|} \leq C.$$

Como $\mathbb{S}^1 = f^n(I_i)$ e $1 = |f^n(I_i)|$ temos que $\int_{I_i} |f^n(I_i)|(t) dt \leq C e^{\lambda n(p)}$ e conclui-se que

$$C^{-1} e^{n\lambda(p)} |I_i| \leq 1 \leq C e^{n\lambda(p)} |I_i|$$

$$\frac{1}{C e^{n\lambda(p)}} \leq |I_i| \leq \frac{C}{e^{n\lambda(p)}},$$

temos que $h(I_i) = J_i$, e assim

$$\frac{1}{C e^{n\lambda(p)}} \leq |J_i| \leq \frac{C}{e^{n\lambda(p)}}.$$

Disto, segue que cancela as exponenciais e

$$\frac{1}{C^2} \leq \frac{|h(I_i)|}{|I_i|} \leq C^2.$$

Como os extremos dos intervalos de injetividade de f^n , $n = 1, 2, 3, \dots$ e de g^n , $n = 1, 2, 3, \dots$, e depois tomando a união temos que estes conjuntos são densos em $\mathbb{S}^1$, a desigualdade acima e da continuidade de h , concluímos que h é bi-Lipschitz em $\mathbb{S}^1$.

Vamos usar o Lema 6.2, como h é Lipschitz, h leva medidas absolutamente contínuas em medidas absolutamente contínuas, $h_*(\mu_f) = \mu_g$. Sejam ω_g a densidade de Radon-Nikodyn da medida μ_g e ω_f a densidade de Radon-Nikodyn da medida μ_f . Da teoria das funções absolutamente contínuas temos que h é absolutamente contínua em quase todo ponto e satisfaz teorema fundamental do cálculo e o teorema de mudança de variáveis, temos que segue que para qualquer intervalo aberto (a, b) vale que

$$\int_a^b \omega_f(x) dm(x) = \int_{h(a)}^{h(b)} \omega_g(y) dm(y) = \int_a^b \omega_g(h(x)) h'(x) dm(x).$$

Finalmente,

$$\omega_g(h(x)) h'(x) = \omega_f(x), m - q.s \text{ em } x \in \mathbb{S}^1.$$

$$h'(x) = \frac{\omega_f(x)}{\omega_g(h(x))}.$$

Fixado $x_0 \in \mathbb{S}^1$ a equação acima diz que

$$h(x) = h(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{\omega_f(t)}{\omega_g(h(t))} dm(t),$$

para todo $x \in \mathbb{S}^1$.

Pelo Teorema de Picard, a solução $z(x)$ de classe C^r da EDO acima é a única que satisfaz as equações

$$\begin{aligned} z(x) &= z(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{\omega_f(t)}{\omega_g(h(t))} dm(t), \\ z'(t) &= \frac{\omega_f(t)}{\omega_g(z(t))}, z(x_0) = h(x_0). \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{S}^1$. Portanto, $z(x) = h(x)$. □

Chamamos aqui a atenção, pois, esta demonstração é de grande importância, pois servirá de modelo para a demonstração de outro teorema ao tratar-se dos difeomorfismos de Anosov no toro.

6.4 Rigidez de difeomorfismos de Anosov no toro

É de nosso conhecimento que os fibrados E^s e E^u de um difeomorfismo de Anosov f são (unicamente) integráveis a subvariedades locais W^s e W^u caracterizados por:

$$W_x^s = \{y \in M \mid d(f^n(y), f^n(x)) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty\} \text{ Variedade estável global de } x$$

$W_x^u = \{y \in M \mid d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty\}$ Variedade instável global de x .

A união das variedades instáveis decompõe M em uma folheação chamada folheação instável. A união das variedades estáveis decompõe M em uma folheação chamada folheação estável.

Por volta de 1987, R. De la Llave, J.M. Marco e R. Morryón, em um compêndio de quatro trabalhos classificaram, módulo conjugação C^1 , os difeomorfismos de Anosov de classe $C^r, r \geq 2$, do toro $\mathbb{T}^2$.

Posteriormente, De la Llave ofereceu uma simplificação dos métodos das provas anteriores. Esta simplificação, baseia-se na teoria das medidas SRB.

Nem todo difeomorfismo de Anosov admite uma medida de probabilidade absolutamente contínua invariante, tal qual ocorre com transformações expansoras de classe $C^{1+\alpha}, \alpha > 0$. Do ponto de vista da Teoria Ergódica, as medidas equivalentes as absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue para sistemas Anosov (ou Axioma A) são as medidas SRB.

Embora a Teoria SRB seja mais geral, focaremos no caso Anosov aceitando resultados de [2] que serão apenas apresentados, mas não demonstrados neste trabalho.

Considerando um difeomorfismo de Anosov $f : M \rightarrow M$ de classe $C^{1+\alpha}$, onde $\alpha > 0$, introduzimos a noção de uma medida de probabilidade f -invariante, denominada medida SRB.

Uma medida SRB, representada por μ , distingue-se por uma propriedade especial relacionada à entropia métrica de f sob μ .

Definição 35 (Medida SRB). *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de Anosov de classe $C^{1+\alpha}, \alpha > 0$. Dizemos que uma medida de probabilidade f -invariante, μ é uma medida SRB se*

$$h_\mu(f) = \int_M \log(J^u f(x)) d\mu(x).$$

O próximo teorema a ser enunciado aborda a existência e a unicidade das medidas SRB, que são fundamentais para compreender a natureza estatística desses sistemas dinâmicos

complexos.

Teorema 6.9 (Medida SRB, [2]). *Todo difeomorfismo de Anosov de classe $C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$, admite ao menos uma medida SRB. Além disso, se f for topologicamente transitiva a medida SRB é única.*

Definição 36. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e $\mathcal{F}$ uma folheação f -invariante, ou seja, $f(\mathcal{F}(x)) = \mathcal{F}(f(x))$. Suponha que f preserve uma medida de probabilidade invariante μ . Uma partição mensurável η de M é dita uma partição crescente e subordinada a $\mathcal{F}$ se:*

1. $\eta(x) \subset \mathcal{F}(x)$, para μ -quase todo $x \in M$.
2. $f^{-1}(\eta) \geq \eta$ (a partição $f^{-1}(\eta)$ refina η).
3. $\eta(x)$ contém uma vizinhança aberta de x em $\mathcal{F}(x)$, para μ -quase todo $x \in M$.

De acordo com a definição acima, considere $\pi : M \rightarrow M/\eta, x \mapsto \eta(x)$. Defina $\tilde{\mu} = \pi_*(\mu)$ com a σ -álgebra induzida de π .

Com o colocado acima, existe um (único) sistema de medidas de probabilidade boreliadas $\mu_P, P \in \eta$ tais que:

- $\mu_P(P) = 1$,
- Dado um boreliano B a função $B \mapsto \mu_P(B)$ é $\tilde{\mu}$ -mensurável,
- Para toda $\phi \in C^0(M, \mathbb{R})$ vale que $\int_M \phi d\mu = \int_{M/\eta} \left(\int_P \phi d\mu_P \right) d\tilde{\mu}$.

As afirmações acima correspondem a um caso particular do Teorema de decomposição de Rokhlin. As medidas μ_P são chamadas medidas condicionais.

O Teorema de Ledrappier foca especificamente na folheação instável associada a tais sistemas. Este teorema, ao abordar a existência de uma partição crescente subordinada à folheação instável.

Teorema 6.10 (Ledrappier, [12]). *Dado um f um difeomorfismo Anosov, a folheação instável $\mathcal{F}^u$ admite partição crescente subordinada.*

Teorema 6.11 (Teorema da densidade de Ledrappier, [12]). *Dado um difeomorfismo de Anosov transitivo $f : M \rightarrow M$ de classe $C^r, r \geq 2$, considere μ a medida SRB de f e uma partição η crescente subordinada a $\mathcal{F}^u$, para μ -quase todo $x \in M$, vale que:*

1. $\mu_{\eta(x)} \sim \text{Leb}_{\eta(x)},$

2. $\frac{d\mu_{\eta(x)}}{d\text{Leb}_{\eta(x)}} = \rho(x),$

3. Para μ quase todo $x \in M$, tem-se que $\frac{\rho(y)}{\rho(y')} = \frac{\prod_{k=1}^{+\infty} J^u f^{-k}(y')}{\prod_{k=1}^{+\infty} J^u f^{-k}(y)} := \Delta_f^u(y', y),$
onde y, y' percorrem um conjunto de medida $\mu_{\eta(x)}$ total em $\eta(x)$.

A diferenciabilidade deve ser pelo menos C^2 para termos a convergência de

$$\frac{\rho(y)}{\rho(y')} = \frac{\prod_{k=1}^{+\infty} J^u f^{-k}(y')}{\prod_{k=1}^{+\infty} J^u f^{-k}(y)} := \Delta_f^u(y', y).$$

Logo, tenhamos em mente que tal hipótese é de suma importância.

Lema 6.3 (Llave, [4]). *Com a notação e hipóteses do Teorema da densidade de Ledrappier-Young, fixados $\delta > 0$ e $y' \in W_\delta^u(y)$, tem-se que $z \mapsto \Delta_f^u(y', z)$, $z \in W_\delta^u(y)$ é C^{r-1} com derivadas uniformemente limitadas. Em particular, as densidades ρ definidas em $\eta(x)$ são de classe C^{r-1} , para μ - quase todo $x \in M$.*

É possível obter uma medida SRB. Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de Anosov,

transitivo, de classe C^r , $r \geq 2$. Para cada $n \geq 1$, considere as medidas μ_n dadas por

$$\mu_n = \frac{\sum_{x \in \text{Fix}(f^n)} J^u f^n(x) \cdot \delta_x}{\sum_{x \in \text{Fix}(f^n)} J^u f^n(x)}.$$

Teorema 6.12 (Bowen, [2]). *Se $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de Anosov, transitivo, de classe C^r , $r \geq 2$ e μ é a medida SRB para f , então $\mu_n \rightarrow \mu$, na topologia fraca*.*

A essência do teorema está na análise da convergência de medidas. Aqui, μ representa a medida SRB para f . O teorema afirma que as medidas μ_n , associadas a uma sequência específica no contexto do sistema dinâmico, convergem para a medida SRB μ na topologia fraca*.

A topologia fraca* é um conceito matemático que, em termos simples, trata da convergência de medidas com base na integração de funções contínuas, pode-se ler mais sobre em [20]. O resultado de Bowen, portanto, indica que, à medida que o sistema evolui, a distribuição estatística das órbitas periódicas, como representado por μ_n , se aproxima da distribuição estatística descrita pela medida SRB μ .

Dado $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ um difeomorfismo de Anosov, definimos (quando existem os limites)

$$\lambda^u(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\|Df^n(x)|E_x^u\|),$$

$$\lambda^s(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\|Df^n(x)|E_x^s\|).$$

Os números $\lambda^s(x)$ e $\lambda^u(x)$ são chamados, respectivamente, de expoentes de Lyapunov instável e estável de f no ponto x . Pelo Teorema de Oseledec, o conjunto dos pontos para os quais os expoentes de Lyapunov estão definidos é um conjunto de probabilidade total (não necessariamente é toda variedade).

O Teorema de Llave-Marco-Moriyón aborda uma questão sobre o toro $\mathbb{T}^2$. Este teorema oferece um ponto de vista sobre a relação entre dois difeomorfismos de Anosov que são conjugados entre si, revelando implicações sobre a regularidade da conjugação.

Teorema 6.13 (Llave-Marco-Moriyón, [4]). *Sejam $f, g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ difeomorfismos de Anosov de classe C^r , $r \geq 2$. Suponha que f e g sejam conjugados por h tal que $h \circ f = g \circ h$. Se para cada par de pontos p e $q = h(p)$ pontos periódicos de f e g respectivamente valer que*

$$\lambda_f^*(p) = \lambda_g^*(q), \quad * \in \{s, u\}$$

então h é C^{r-1} .

Em particular, se f, g são C^∞ , então h é C^∞ .

Demonstração. Sejam μ_f e μ_g respectivamente as medidas SRB de f e g . Dados p, q como no enunciado, pontos periódicos em $\text{Fix}(f^n)$ e $\text{Fix}(g^n)$ respectivamente, uma vez que $J^u f^n(p) = J^u g^n(q)$, como $h(\text{Fix}(f^n)) = \text{Fix}(g^n)$ segue que

$$h_*(\mu_f^n) = \mu_g^n,$$

onde μ_f^n e μ_g^n são tais como no Teorema de Bowen. Passando limite quando $n \rightarrow \infty$ na expressão acima, segue que

$$h_*(\mu_f) = \mu_g.$$

Fixada η uma partição mensurável crescente subordinada a F^u , então $\eta' := h(\eta)$ é uma partição mensurável crescente subordinada a $F^{u'}$. Como $h_*(\mu_f^n) = \mu_g^n$, segue que para μ_f quase todo $x \in \mathbb{T}^2$ tem-se que para as medidas condicionais

$$h_*(\mu_{f,\eta}(x)) = \mu_{g,\eta'}(h(x)).$$

Como as medidas condicionais são equivalentes à medida de Lebesgue nas folhas instáveis, segue que h restrita a $\eta(x)$ é uma transformação absolutamente contínua, em um conjunto contendo um intervalo aberto de x , para μ_f quase todo x .

A exemplo do caso uniformemente expansor

$$\int_a^b \rho_f(x) dx = \int_{h(a)}^{h(b)} \rho_g(y) dy = \int_a^b \rho_g(h(x)) h'(x) dx.$$

Assim, para μ_f quase todo z , podemos encontrar h restrita a $\eta(z)$ por meio da equação

$$h'(x) = \frac{\rho_f(x)}{\rho_g(h(x))}.$$

Como ρ_f e ρ_g são C^{r-1} , segue da Teoria das EDOs que h é C^r restrita a $\eta(x)$, para μ_f quase todo x .

Fixado W um segmento (intervalo compacto) de folha instável. Podemos selecionar um ponto $x \in \mathbb{T}^2$ para o qual vale as afirmações sobre ρ_f para cada um dos $f^n(x)$, $n \geq 0$ nos átomos $(f^n\eta)(x)$. Como $f^n(\eta(x))$ torna-se densa em $\mathbb{T}^2$ à medida que n cresce, podemos selecionar intervalos compactos $W_n \subset (f^n\eta)(x)$ de modo que:

- $W_n \xrightarrow{c_1} W$.
- $h_n := h|_{W_n}$ seja de classe C^r .

Veja a Figura 6.2

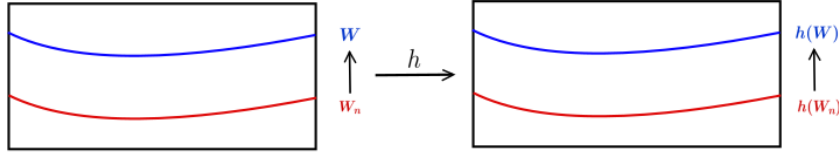


Figura 6.2: Convergência dos segmentos [19].

Para cada n podemos encontrar selecionar pontos $p_n \in W_n$, $p_n \rightarrow p \in W$. Além disso, pode-se encontrar $c_n > 0$ tais que $\rho(z) = c_n \cdot \Delta_f^u(p_n, z)$, $z \in W_n$. tal que

$$\int_{W_n} c_n \cdot \Delta_f^u(p_n, z) dz = 1.$$

Como h_* envia medidas condicionais μ_f em respectivas medidas condicionais de μ_g segue que

$$h_* \left(\int_{W_n} c_n \cdot \Delta_f^u(p_n, z) dz \right) = \int_{h(W_n)} c'_n \cdot \Delta_g^u(q_n, z) dz,$$

$$\int_{h(W_n)} c'_n \cdot \Delta_g^u(q_n, z) dz = 1, \quad q_n = h(p_n).$$

Note que a sequência $\frac{c_n}{c'_n}$ é positiva, uniformemente afastada de zero e limitada.

Por conveniência, vamos supor que $\frac{c_n}{c'_n} = 1$. Lembre-se de quando solicitei atenção após a prova do Teorema 6.8, como for semelhante as h_n podem ser encontradas resolvendo as EDOs

$$h'(x) = \frac{\Delta_f^u(p_n, x)}{\Delta_g^u(q_n, h(x))}, \quad h(p_n) = q_n.$$

Pelo Lema 6.2, a coleção das soluções h_n formam uma sequência equicontínua e uniformemente limitada.

Segue do Teorema de Arzelà-Ascoli que (a menos de subsequência) $h_n \rightarrow h$ ($h : W \rightarrow h(W)$) a qual é solução do problema análogo

$$h'(x) = \frac{\Delta_f^u(p, x)}{\Delta_g^u(q, h(x))}, \quad h(p) = q,$$

logo $h|_W$ é de classe C^r .

Finalmente a restrição de h às folhas instáveis $F^u(x)$ é uniformemente C^r . Tomando a inversa f^{-1} concluímos que a restrição de h às folhas estáveis $F^s(x)$ é uniformemente C^r .

A conclusão do Teorema segue do seguinte lema de Journé.

Lema 6.4 (Lema de Journé, [10]). *Sejam F e G duas folheações contínuas transversais com folhas suaves e $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que as restrições de ϕ às folhas de F e G são uniformemente C^r , então ϕ é $C^{r-\varepsilon}$, para qualquer $\varepsilon > 0$, em particular é C^{r-1} .*

□

6.5 Resultados complementares de rigidez

Esta seção será curta e tem o objetivo de expor mais resultados sobre rigidez sem as provas dos mesmos.

Lema 6.5 (Llave-Marco-Moriyón II, [4]). *Sejam $f, g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ difeomorfismos de Anosov de classe C^r , $r \geq 2$. Suponha que f e g sejam conjugados por h tal que $h \circ f = g \circ h$. Se h e h^{-1} são absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue, então h é de classe C^{r-1} .*

Em particular, se f, g são C^∞ , então h é C^∞ .

A prova do Teorema de Llave-Marco-Moriyón II, lança mão de outra caracterização de medida SRB, medidas físicas baseadas no seguinte teorema.

Teorema 6.14 (SRB, [2]). *Dado $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de Anosov transitivo de classe C^r , $r \geq 2$, e μ a medida SRB de f se, e somente se, para m -quase todo ponto $x \in M$ vale que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi(f^j(x)) \rightarrow \int_M \varphi d\mu,$$

para qualquer $\varphi \in C^0(M, \mathbb{R})$.

O conjunto dos $x \in M$, como no teorema acima é denotado por $B(\mu)$, a bacia da medida μ .

Sejam μ_f e μ_g as medidas SRB de f e g respectivamente. Uma vez que h, h^{-1} são absolutamente contínuas, segue que $h(B(\mu_f))$ em $B(\mu_g)$, tem medida de Lebesgue total. Assim, existe x tal que $x, h(x)$ satisfazem

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} \varphi \circ h d\mu_f &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi \circ h(f^j(x)) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi(g^j(h(x))) = \int_{\mathbb{T}^2} \varphi d\mu_g. \end{aligned}$$

para qualquer $\varphi \in C^0(M, \mathbb{R})$.

Portanto, $h_*(\mu_f) = \mu_g$, ou seja, h_* leva SRB de f em SRB de g e a prova segue como no caso anterior.

Teorema 6.15. *Seja $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ um difeomorfismo de Anosov C^∞ e Λ , o conjunto dos pontos regulares de f no sentido do Teorema de Oseledec. Se $\Lambda = \mathbb{T}^2$, então f é C^∞ conjugado com sua linearização A .*

A demonstração se encontra em [16].

Referências Bibliográficas

- [1] L. Barreira and C. Valls. *Dynamical Systems: An Introduction*. Universitext. Springer-Verlag, London, 2013.
- [2] R. Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, volume 470 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1975.
- [3] M. Brin and G. Stuck. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [4] R. De la Llave. Smooth conjugacy and srb measures for uniformly and nonuniformly hyperbolic systems. *Communications in Mathematical Physics*, 150(2):289–320, 1992.
- [5] A. Diniz. *Tópicos de Dinâmica Hiperbólica*. PPGMAT-UFMA, sob orientação da Profa. Dra. Vanessa Ribeiro Ramos.
- [6] A. Gogolev. Smooth conjugacy of anosov diffeomorphisms on higher dimensional tori. *Journal of Modern Dynamics*, 2(4):645–700, 2008.
- [7] A Gogolev. *Minicursos - EBSD 2023*. Disponível em: <https://sites.google.com/view/ebsd2023/minicursos?authuser=0>, 2023. Acessado em: 13/05/2024.
- [8] A. Gogolev and M. Guysinsky. c^1 -differentiable conjugacy on three dimensional torus. *DCDS-A*, 22(1/2):183–200, 2008.
- [9] M. W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1976 original.

- [10] J.-L. Journé. A regularity lemma for functions of several variables. *Revista Matemática Iberoamericana*, 4:187–193, 1988.
- [11] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1995.
- [12] F. Ledrappier. Propriétés ergodiques des mesures de sinaï. *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques*, 59:163–188, 1984. MR743818.
- [13] A. Livsic. Cohomology of dynamical systems. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 6:1278–1301, 1972.
- [14] A. Manning. There are no new anosov diffeomorphisms on tori. *American Journal of Mathematics*, 96(3):422–429, 1974.
- [15] F. Micena. Some sufficient conditions for transitivity of anosov diffeomorphisms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 515:126433, 2022.
- [16] F. Micena and R. De la Llave. Lyapunov exponents everywhere and rigidity. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 27:819–831, 2021.
- [17] J. Munkres. *Topology*. Pearson New International Edition, 2 edition, 2000.
- [18] M. Shub. Endomorphisms of compact differentiable manifolds. *Amer. J. Math.*, XCI:175–199, 1969.
- [19] V International Meeting on Mathematical Sciences. V International Meeting on Mathematical Sciences. <https://eicmfacym.editorx.io/veicm2023>, December 6–8 2023. Online, Lambayeque, Peru. Organized by COMAP (Colegio de Matemática de Lambayeque).
- [20] M. Viana and K. Oliveira. *Foundations of Ergodic Theory*. Cambridge University Press, 2016.