

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

**Otimização não-linear multiobjetivo das condições de  
eficiência usando uma abordagem híbrida CFD-DOE: Uma  
aplicação prática em ventiladores centrífugos para fornos  
industriais**

Matheus Costa Pereira

ITAJUBÁ

FEVEREIRO DE 2025

Matheus Costa Pereira

**Otimização não-linear multiobjetivo das condições de eficiência usando uma abordagem híbrida CFD-DOE: Uma aplicação prática em ventiladores centrífugos para fornos industriais**

Dissertação submetida para **defesa** do tema ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Itajubá, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **Mestre em Ciências em Engenharia de Produção**.

**Área de concentração:** Engenharia de Produção.

**Orientador:** Prof. Anderson Paulo de Paiva, Dr.

ITAJUBÁ

FEVEREIRO DE 2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Matheus Costa Pereira

**Otimização não-linear multiobjetivo das condições de eficiência usando uma abordagem híbrida CFD-DOE: Uma aplicação prática em ventiladores centrífugos para fornos industriais**

Dissertação submetida para **defesa** do tema ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Itajubá, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **Mestre em Ciências em Engenharia de Produção**.

**Banca examinadora:**

Dr. Fabrício José Pontes (Embraer)

Prof. Dr. Matheus Brendon Francisco (UNIFEI)

Prof. Dr. Anderson Paulo de Paiva (Orientador)

ITAJUBÁ

FEVEREIRO DE 2025

## DEDICATÓRIA

*À minha família, que me deu suporte e força ao longo de todos os desafios.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus pelas inúmeras bênçãos recebidas ao longo de toda a minha trajetória, que me deram forças para chegar até aqui.

À minha família, por sempre estar ao meu lado, especialmente nos momentos mais difíceis, oferecendo amor, compreensão e apoio.

Ao meu orientador, Dr. Anderson Paulo de Paiva, pela amizade que construímos ao longo destes anos, pelo apoio constante e pelos ensinamentos valiosos, tanto dentro quanto fora da sala de aula.

Aos professores do Instituto de Engenharia de Produção e Gestão, que contribuíram para meu desenvolvimento acadêmico e pessoal, com destaque aos professores Dr. Carlos Eduardo Sanches da Silva, Dr. Matheus Brendon Francisco e Dra. Juliana Helena Daroz Gaudêncio, cujas orientações e dedicação foram essenciais para o sucesso deste trabalho.

À Universidade Federal de Itajubá e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais pelo apoio financeiro e pela oportunidade de desenvolver um trabalho de tamanha relevância.

## **EPIGRAFE**

*A felicidade de sua vida depende da qualidade de seus pensamentos.*

## RESUMO

Este estudo apresenta a combinação de fluidodinâmica computacional, planejamento de experimentos e otimização multiobjetivo para auxiliar os tomadores de decisão na seleção de uma configuração geométrica ideal e viável, de acordo com suas preferências. Essa abordagem híbrida permite uma seleção automática de soluções Pareto-ótimas. O método proposto utiliza modelos de superfície de resposta, métricas de classificação e técnicas de otimização a posteriori para refinar os parâmetros e identificar as soluções mais adequadas no espaço de soluções. A metodologia é exemplificada com um estudo de caso de um ventilador centrífugo feito de material AISI 304, usado para circulação de ar em um forno industrial operando em altas temperaturas. A abordagem abrange a otimização individual com base nas respostas originais, seguida pela validação do modelo por meio de novas simulações, comparando os resultados obtidos usando o Ansys Fluent® e avaliando os ganhos percentuais em relação ao ventilador original. As variáveis de entrada referem-se às pás do ventilador, enquanto as variáveis de resposta estão relacionadas à massa, vazão mássica, torque, desempenho, custo, velocidade, pressão e turbulência. As melhorias mais significativas foram observadas na massa da pá, que foi minimizada em 65,8%, na magnitude da velocidade máxima, que foi maximizada em 23,7%, e na vazão mássica, que foi maximizada em 19,9%. Para fins de comparação e avaliação, os resultados obtidos também são comparados com o algoritmo genético de ordenação não dominada e técnicas de aprendizado de máquina, revelando um desempenho adequado.

**Palavras-chave:** Otimização multiobjetivo; Otimização pós-Pareto; Interseção normal à fronteira; Planejamento de experimentos; Fluidodinâmica computacional; Tomada de decisão multicritério; Aprendizado de máquina.

## **ABSTRACT**

*This study presents the combination of computational fluid dynamics, design of experiments, and multi-objective optimization to assist decision-makers in selecting an ideal and feasible geometric configuration according to their preferences. This hybrid approach enables the automatic selection of Pareto-optimal solutions. The proposed method utilizes response surface models, classification metrics, and posterior optimization techniques to refine parameters and identify the most suitable solutions within the solution space. The methodology is exemplified through a case study of a centrifugal fan made of AISI 304 material, used for air circulation in an industrial oven operating at high temperatures. The approach covers individual optimization based on the original responses, followed by model validation through new simulations, comparing the results obtained using Ansys Fluent® and assessing the percentage gains relative to the original fan. The input variables refer to the fan blades, while the response variables are related to mass, mass flow rate, torque, performance, cost, speed, pressure, and turbulence. The most significant improvements were observed in blade mass, which was minimized by 65.8%, magnitude of maximum velocity, which was maximized by 23.7%, and mass flow rate, which was maximized by 19.9%. For comparison and assessment purposes, the results obtained are also compared with the non-dominated sorting genetic algorithm and machine learning techniques, revealing suitable performance.*

**Keywords:** *Multiobjective optimization; Post-Pareto Optimization; Normal Boundary Intersection; Design of experiments; Computational fluid dynamics; Multi-criteria decision making; Machine learning.*

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> - Produção científica envolvendo otimização multiobjetivo e fluidodinâmica computacional .....	31
<b>Figura 2</b> - Artigos mais citados (2019-2025) .....	32
<b>Figura 3</b> - Revistas com mais publicações (2019-2025) .....	32
<b>Figura 4</b> - Revistas com mais publicações ao longo do tempo (2019-2025) .....	33
<b>Figura 5</b> - Nuvem de palavras com as palavras-chave mais frequentes .....	33
<b>Figura 6</b> - Coocorrência das palavras-chave (2019-2025) .....	34
<b>Figura 7</b> - Autores com mais publicações (2019-2025) .....	34
<b>Figura 8</b> - Universidades com mais publicações (2019-2025) .....	35
<b>Figura 9</b> - Países com mais publicações (2019-2025) .....	35
<b>Figura 10</b> - Rede de colaboração entre países em publicações (2019-2025) .....	36
<b>Figura 11</b> - Fronteira de Pareto e seus elementos geométricos .....	43
<b>Figura 12</b> - Estrutura VRF-NBI: Método de otimização multiobjetivo .....	45
<b>Figura 13</b> - Diagrama em árvore da atribuição de pesos para $p = 4$ e $\delta = 0,2$ .....	47
<b>Figura 14</b> - <i>Design Simplex-lattice</i> {4, 5} .....	48
<b>Figura 15</b> - Método VRF-NBI assistido pela estratégia MDE .....	50
<b>Figura 16</b> - Esquema detalhado da metodologia .....	62
<b>Figura 17</b> - Superfície de mistura de Pareto com gráfico de contorno .....	64
<b>Figura 18</b> - Ventilador objeto de estudo .....	67
<b>Figura 19</b> - Vista explodida do ventilador .....	68
<b>Figura 20</b> - Etapas para a simulação de cada ventilador .....	69
<b>Figura 21</b> - Passo a passo no Ansys® .....	72
<b>Figura 22</b> - Detalhamento do passo a passo no Ansys® .....	73
<b>Figura 23</b> - Medições das variáveis de controle .....	75
<b>Figura 24</b> - Linhas de fluxo com cilindro médio de acordo com a trajetória das partículas .....	76
<b>Figura 25</b> - Mapa de correlação .....	79
<b>Figura 26</b> - Variância explicada por componente principal .....	80
<b>Figura 27</b> - Cargas dos fatores sem rotação e com rotação Varimax .....	81
<b>Figura 28</b> - Dendrograma dos <i>clusters</i> de variáveis e fatores combinado com gráficos de contorno .....	82

<b>Figura 29</b> - Dendrograma dos clusters de observações em relação ao planejamento de composto central .....	82
<b>Figura 30</b> - Impacto das variáveis de entrada nas variáveis de saída (Variáveis originais) .....	83
<b>Figura 31</b> - Impacto das variáveis de entrada nas variáveis de saída (Fatores rotacionados) .....	84
<b>Figura 32</b> - Simplex-lattice {3,10} e fronteira normalizada escalonada de Pareto em 3D .....	86
<b>Figura 33</b> - Resultados do Simplex-lattice com os valores obtidos do NBI em relação às variáveis de resposta e métricas de resposta .....	87
<b>Figura 34</b> - Gráfico de Contorno e Gráfico de Superfície das métricas .....	88
<b>Figura 35</b> - Gráfico de contorno de mistura para distância generalizada e entropia de Shannon .....	93
<b>Figura 36</b> - Fronteira de Pareto e observações de clusters para GD e S .....	95
<b>Figura 37</b> - Gráfico de contorno sobreposto para variáveis de resposta, fatores e métricas .....	97
<b>Figura 38</b> - Gráficos de dispersão sobrepostos para NBI e VRF-NBI em termos de S/GPE x MD .....	98
<b>Figura 39</b> - Distribuição do lado direito e correlação entre pares de restrições do NBI .....	99
<b>Figura 40</b> - Fronteiras de Pareto com real (COEF) e simulado (SE COEF) .....	102
<b>Figura 41</b> - Comparativo do Simplex-lattice real e simulado .....	103
<b>Figura 42</b> - Agrupamento de fatores reais e simulados com K-Means .....	103
<b>Figura 43</b> - Elipse de Confiança 95% para fatores reais e simulados .....	104
<b>Figura 44</b> - Gráfico de intervalo de análise de variância dos métodos de otimização em relação a distância generalizada .....	106
<b>Figura 45</b> - Gráfico de intervalo de análise de variância do método proposto e da abordagem anterior ao método .....	108
<b>Figura 46</b> - Feature Importance em relação aos modelos de aprendizado de máquina .....	111
<b>Figura 47</b> - Gráficos de contorno referente as variáveis de entrada mais importantes .....	112
<b>Figura 48</b> - Comparativo entre a geometria do ventilador original e dos ventiladores propostos .....	113

<b>Figura 49</b> - Comparação dos resultados entre o ventilador original e os modelos otimizados.....	114
<b>Figura 50</b> - Linhas de corrente e de contorno do ventilador original e do obtido com a P-O .....	114

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> - Valores de $k$ e $\gamma$ usados para definir o ângulo de rotação no método Varimax .....	39
<b>Tabela 2</b> - Respostas em relação a abordagem anterior ao método proposto.....	71
<b>Tabela 3</b> - Variáveis de controle e níveis experimentais correspondentes .....	74
<b>Tabela 4</b> - Variáveis de entrada do experimento com o planejamento composto central .....	74
<b>Tabela 5</b> - Respostas originais e Fatores .....	77
<b>Tabela 6</b> - Coeficientes das variáveis de resposta e fatores.....	78
<b>Tabela 7</b> - Resumo estatístico .....	78
<b>Tabela 8</b> - Análise de componentes principais .....	79
<b>Tabela 9</b> - Matriz <i>payoff</i> .....	85
<b>Tabela 10</b> - Matriz <i>payoff</i> (Fatores), utopia e pseudo-nadir e matriz <i>payoff</i> escalonada (fatores).....	85
<b>Tabela 11</b> - Principais resultados em relação a GD e S .....	88
<b>Tabela 12</b> - Matriz de <i>design</i> codificada ( $\mathbf{X}$ ) relativa ao arranjo CCD para $k = 3$ variáveis de entrada.....	91
<b>Tabela 13</b> - Matriz de variância-covariância das superfícies de resposta preditivas.....	91
<b>Tabela 14</b> - Polinômio quártico completo em relação às métricas GD e S e seus respectivos fatores .....	92
<b>Tabela 15</b> - Soluções de P-O em relação às métricas e pesos .....	94
<b>Tabela 16</b> - Comparação entre os melhores pontos em termos de métricas (NBI) e a P-O .....	96
<b>Tabela 17</b> - Dados para a confecção da elipse de confiança.....	104
<b>Tabela 18</b> - Análise de variância dos métodos de otimização em relação à distância generalizada com a restrição da entropia de Shannon.....	107
<b>Tabela 19</b> - Coeficientes de determinação provenientes dos modelos de aprendizado de máquina (variáveis originais) .....	110
<b>Tabela 20</b> - Coeficientes de determinação provenientes dos modelos de aprendizado de máquina (fatores rotacionados) .....	110
<b>Tabela 16</b> - Comparação entre os melhores pontos em termos de métricas (NBI) e a P-O .....	113

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1</b> - Publicações por área temática.....	31
--	----

## LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E UNIDADES

adm	Adimensional
AISI	<i>American Iron and steel institute</i> - Instituto Americano do ferro e do aço
ANN	<i>Artificial neural networks</i> - Redes neurais artificiais
ANOVA	<i>Analysis of variance</i> - Análise de variância
AR	<i>Radial velocity</i> - Velocidade radial
AT $\epsilon$	Average turbulence $\epsilon$ - Turbulência média $\epsilon$
AV	<i>Axial velocity</i> - Velocidade axial
BBD	Box-Behnken <i>design</i>
BEA	<i>Blade entry angle</i> - Ângulo de entrada das pás
BL	<i>Blade length</i> - Comprimento das pás
BM	<i>Blade mass</i> - Massa da pá
BOA	<i>Blade opening angle</i> - Ângulo de abertura das pás
CAD	<i>Computer-aided design</i> - Projeto assistido por computador
CCD	<i>Central composite design</i> - Planejamento composto central
CFD	<i>Computational fluid dynamics</i> - Fluidodinâmica computacional
CHIM	<i>Convex hull of individual minima</i> - Envoltório convexo dos mínimos individuais
CPU	<i>Central processing units</i> - Unidades centrais de processamento
CUDA	<i>Compute unified device architecture</i> - Arquitetura de dispositivo unificado de computação
DOE	<i>Design of experiments</i> - Planejamento de experimentos
DP	<i>Dynamic pressure</i> - Pressão dinâmica
DT	<i>Decision Tree</i> - Árvore de decisão
Exp	Experimento
FA	<i>Factor analysis</i> - Análise fatorial
FEA	<i>Finite element analysis</i> - Análise de elementos finitos
FI	<i>Feature importance</i> - Importância de características
FSI	<i>Fluid-structure interaction</i> - Interações fluido-estrutura
FV	<i>Finite volume</i> - Volume finito
GA	<i>Genetic algorithm</i> - Algoritmo genético
GB	Gigabyte
GD	<i>Generalized distance</i> - Distância generalizada

GPa	Gigapascal
GPE	<i>Global percentage error</i> - Erro percentual global
GPU	<i>Graphics processing units</i> - Unidade de processamento gráfico
GRG	<i>Generalized reduced gradient</i> - Gradiente reduzido generalizado
IA	Inteligência artificial
J/kg°C	Joule por quilograma por grau Celsius
LES	<i>Large eddy simulation</i> - Simulação de grandes vórtices
m/s	Metros por segundo
m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	Metro ao quadrado por segundo ao quadrado
MAE	<i>Mean absolute error</i> - Erro médio absoluto
Max	Máximo
MBPA	<i>Mixture-based performance assessment</i> - Avaliação de desempenho baseado em mistura
MC	<i>Material cost</i> - Custo do material
MCDM	<i>Multi-criteria decision making</i> - Tomada de decisão multicritério
MD	<i>Mahalanobis distance</i> - Distância de Mahalanobis
MDE	<i>Mixture design of experiments</i> - Planejamento de experimentos de mistura
Med	Média
MFR	<i>Mass flow rate</i> - Vazão mássica
MHz	Megahertz
Min	Mínimo
ML	<i>Machine learning</i> - Aprendizado de máquina
mm	Milímetro
MMSE	<i>Multivariate mean square error</i> - Erro quadrático médio multivariado
MMV	<i>Magnitude of Maximum Velocity</i> - Magnitude da velocidade máxima
MO	<i>Multiobjective optimization</i> - Otimização multiobjetivo
MOP	<i>Multiobjective optimization problem</i> - Problema de otimização multiobjetivo
MRS	<i>Multiple response surfaces</i> - Superfícies de resposta múltipla
MSE	<i>Mean squared error</i> - Erro quadrático médio
MTP	<i>Maximum total pressure</i> - Pressão total máxima
MV	<i>Velocity magnitude</i> - Magnitude de velocidade
NB	<i>Number of blades</i> - Número de pás

NBI	<i>Normal boundary intersection</i> - Intersecção normal à fronteira
NED	<i>Normalized Euclidean distance</i> - Distância Euclidiana normalizada
NSGA-II	<i>Non-dominated sorting genetic algorithm</i> - Algoritmo genético de ordenação não dominada
OLS	<i>Ordinary least squares</i> - Mínimos quadrados ordinários
Pa	Pascal
PCA	<i>Principal component analysis</i> - Análise de componentes principais
PI	<i>Performance Index</i> - Índice de desempenho
P-O	<i>Post-optimization</i> - Otimização a posteriori
R <sup>2</sup>	Coefficiente de determinação
RAM	<i>Random access memory</i> - Memória de acesso aleatório
Re	<i>Reynolds number</i> - Número de Reynolds
RF	<i>Random forest</i> - Floresta aleatória
RHS	<i>Right-hand side of constraints</i> - Lado direito das restrições
RMSE	<i>Root mean squared error</i> - Raiz do erro quadrático médio
RSM	<i>Response surface methodology</i> - Metodologia de superfície de respostas
S	Entropia de Shannon
s <sup>-1</sup>	Segundo elevado a menos um
s <sup>-2</sup>	Segundo elevado a menos dois
s <sup>-3</sup>	Segundo elevado a menos três
S <sub>r</sub>	Erro padrão de dispersão
SE COEF	<i>Standard error of the coefficients</i> - Erro padrão dos coeficientes
SLSQP	<i>Sequential least squares programming</i> - Programação sequencial de mínimos quadrados
SP	<i>Static pressure</i> - Pressão estática
SVR	<i>Support Vector Regression</i> - Máquina de vetores de suporte
T	Torque
TB	<i>Turbulence</i>
TOPSIS	<i>Technique for order preference by similarity to ideal solution</i> - Técnica de ordem de preferência por similaridade para a solução ideal
TP	<i>Total pressure</i> - Pressão total
TV	<i>Tangential velocity</i> - Velocidade tangencial
US\$	Dólar americano

VBA	<i>Virtual basic for applications</i>
VRF-NBI	<i>Varimax-rotated factor normal boundary intersection</i> - Interseção normal à fronteira de fatores rotacionados por Varimax
W/m-K	Watt por metro-Kelvin
WS	<i>Weighted Sums</i> - Somas ponderadas
XGB	<i>Extreme gradient boosting</i> - impulso de gradient extremo

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	20
1.1. Contexto de pesquisa .....	20
1.2. Objetivos.....	27
1.2.1. Objetivo geral .....	28
1.2.2. Objetivos específicos .....	28
1.3. Contribuições esperadas .....	28
1.4. Delimitações da pesquisa.....	28
1.5. Estrutura do trabalho.....	29
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	30
2.1. Análise bibliométrica.....	30
2.2. Metodologia de superfície de respostas .....	36
2.3. Análise fatorial.....	38
2.4. Interseção normal à fronteira .....	41
2.5. Planejamento de experimentos de mistura.....	47
2.6. Métricas de desempenho.....	51
2.7. Otimização a posteriori.....	53
2.8. Elipse de confiança .....	55
2.9. Aprendizado de máquina .....	59
3. MÉTODO PROPOSTO .....	62
3.1. Considerações iniciais .....	62
3.2. Método.....	62
3.3. Caracterização da pesquisa .....	65
4. APLICAÇÃO DO MÉTODO: OTIMIZAÇÃO MULTI OBJETIVO DE UM VENTILADOR CENTRÍFUGO INDUSTRIAL .....	66
4.1. Abordagem anterior ao projeto .....	70
4.2. Processo no Ansys .....	71

4.3. Dados experimentais.....	73
4.4. Otimização individual.....	84
4.5. Aplicação do método interseção normal à fronteira .....	86
4.6. Otimização a posteriori.....	89
4.7. Comparações entre as abordagens do NBI .....	98
4.8. Análise de sensibilidade com simulação multivariada de coeficientes .....	100
4.9. Comparação com outros métodos e métricas .....	105
4.10. Aprendizado de máquina .....	109
4.11. Resultados com a fluidodinâmica computacional .....	113
5. CONCLUSÕES.....	117
5.1. Conclusões gerais .....	117
5.2. Contribuições do trabalho.....	118
5.3. Sugestões para estudos futuros .....	120
REFERÊNCIAS .....	122
APÊNDICE A - Códigos utilizados .....	133
APÊNDICE B - <i>Templates</i> em Python e VBA.....	134
APÊNDICE C - Outras respostas obtidas.....	138

# 1. INTRODUÇÃO

No setor industrial, a competitividade é intensa, levando as empresas a buscarem constantemente melhorias na eficiência e a redução dos custos associados à produção de equipamentos. Nesse cenário, os ventiladores centrífugos se destacam, pois possuem uma ampla gama de aplicações, incluindo controle de temperatura, secagem e ventilação. Assim, investimentos em equipamentos que ofereçam alta eficiência, menor perda de carga e um *design* eficaz tornam-se cada vez mais necessários.

## 1.1. Contexto de pesquisa

A fluidodinâmica computacional (CFD) trata da análise computacional do comportamento dos fluidos e dos efeitos desses fluidos sobre objetos sólidos. Envolve o uso de métodos numéricos e algoritmos computacionais para resolver equações. O uso da CFD apresenta diversos desafios, incluindo alto custo computacional e demanda significativa de hardware (Ezzatneshan, 2019; Li *et al.*, 2021; Raman e Hassanaly, 2019; Zakaria *et al.*, 2019). Além disso, simulações detalhadas podem resultar em tempos de execução prolongados devido à complexidade do problema (Casas *et al.*, 2020; Liu *et al.*, 2019; Sobieski, 2019; Srivastav, Paul e Jain, 2019) e à necessidade de definir condições de contorno precisas em relação aos níveis experimentais (Han *et al.*, 2020; Schittkowski, 2008). Outra dificuldade está na escolha adequada do modelo para garantir uma representação precisa do fenômeno físico em estudo (Li *et al.*, 2019).

Para enfrentar esses desafios, o planejamento de experimentos (DOE) pode ser uma metodologia adequada. O DOE é um método sistemático voltado para o planejamento, condução e interpretação de experimentos com base em dados significativos, com o objetivo de obter o máximo de informações com o menor número possível de experimentos. Portanto, a combinação do uso de CFD com DOE oferece várias vantagens, incluindo uma abordagem mais eficiente para modelagem e simulação, análises mais robustas e redução no tempo e no uso de recursos computacionais.

Outro passo crucial no desenvolvimento e simulação de modelos é determinar qual deles é mais adequado para a tarefa em questão, com o objetivo de construir um *design* otimizado. Nesse contexto, a otimização multiobjetivo (MO) desempenha um papel fundamental. A interseção normal à fronteira (NBI) é uma técnica de MO desenvolvida por Das e Dennis (1998), projetada para lidar com problemas de otimização com múltiplos objetivos conflitantes. Ela busca encontrar soluções distribuídas dentro do

conjunto de Pareto, representando um equilíbrio entre esses objetivos, e gera superfícies de Pareto equiespaçadas em problemas de otimização não linear multicritério.

Uma das principais vantagens da NBI é sua eficiência no tratamento de um grande número de objetivos (Das e Dennis, 1998). Além disso, o NBI pode ser facilmente adaptado para problemas de superfícies de resposta múltipla (MRS), uma classe de problemas de otimização multiobjetivo (MOP) em que as funções objetivo e as restrições são representadas por modelos quadráticos completos, resultantes de planejamentos experimentais como o planejamento composto central (CCD) ou o Box-Behnken *design* (BBD) (Myers, Montgomery e Anderson-Cook, 2016).

A combinação de MO e CFD tem sido amplamente explorada na literatura. Essa sinergia foi evidenciada por uma variedade de estudos. Khatir *et al.* (2013) otimizaram *designs* de forno de convecção forçada usando mínimos quadrados móveis, enquanto Arcos *et al.* (2020) integraram DOE com NBI para melhorar o desempenho de um trocador de calor de forno a gás. Na otimização de desempenho de um trocador de calor de aleta retangular curva (Sharma, Mishra e Brar, 2024).

Liu, Bu e Xu (2017) avaliaram a otimização de um trocador de calor de placas para o retardador hidráulico, utilizando algoritmo genético de ordenação não dominada (NSGA-II) e realizando otimizações no fator de Colburn  $j$  e no fator de atrito  $f$ , bem como avaliando os resultados em termos de temperatura, pressão e velocidade. Sun *et al.* (2023) investigaram trocadores de calor com fita perfurada para aumentar a transferência de calor, enquanto Entezari *et al.* (2023) otimizaram *scaffolds* ósseos com NSGA-II, considerando desempenho mecânico e capacidade biológica. Em um contexto semelhante, Azadani e Gharouni (2021) investigaram o efeito de elementos rugosos em trocadores de calor cilíndricos, otimizando parâmetros de rugosidade com NSGA-II combinado com algoritmo genético (GA). Lee *et al.* (2021) utilizaram otimização de topologia térmica e de fluxo derivada de um procedimento de volume finito (FV) em um dissipador de calor com aletas cilíndricas. Na concepção de dissipadores de calor com aletas perfuradas usando aprendizado de máquina (ML) combinado com CFD e MOP (Abdollahi *et al.*, 2024), Bhattacharjee, Singh e Ray (2018) empregaram uma abordagem multiobjetivo para otimizar *designs* computacionalmente caros, como problemas de CFD e Análise de elementos finitos (FEA), enquanto Habib, Singh e Ray (2019) focaram na otimização de alta fidelidade para problemas multiobjetivo envolvendo CFD e FEA.

Dong e Liu (2021) utilizaram um algoritmo de Pareto baseado em soma ponderada para otimizar problemas de transferência de calor em fluidos não newtonianos, e Hoseini

*et al.* (2021) otimizaram a forma de agitadores em reatores tanque agitado, considerando interações fluido-estrutura (FSI). Na otimização do desempenho de transferência de calor em aletas longitudinais de rotores, a avaliação foca no fator de desempenho, coeficiente de transferência de calor e perda de pressão relativa (Sun *et al.*, 2023) . Ao avaliar o desempenho térmico e hidráulico de redes fractais usando GA, o foco está na dissipação de calor (He *et al.*, 2021).

Hoseinzade, Lakzian e Hashemian (2021) otimizaram caixas pretas para reduzir a umidade em turbinas a vapor com GA, enquanto Zhou *et al.* (2021) usaram NSGA-II para melhorar a eficiência de ventiladores centrífugos em edifícios. Da mesma forma, Liu *et al.* (2021) adotaram um algoritmo heurístico de MO para operar processos transientes em máquinas hidráulicas. Diez, Campana e Stern (2018) estudaram um catamarã de alta velocidade em quatro problemas, considerando o desempenho estocástico e custo-benefício. Mi *et al.* (2024) buscaram otimizar os parâmetros de um tubo em relação ao número de Nusselt, coeficiente de arrasto e fator de transferência de calor, empregando uma combinação de metodologia de superfície de respostas (RSM) e o NSGA-II. Chen *et al.* (2019) abordaram a otimização de um sistema de resfriamento para módulos de baterias de íon-lítio, visando menor consumo de energia e temperatura, usando NSGA-II, e avaliaram a uniformidade da temperatura em gabinetes de resfriamento para centros de dados (Liu e Chang, 2024). Rio-Chanona *et al.* (2019) empregaram aprendizado profundo na otimização de fotobiorreatores.

Shi *et al.* (2019) usaram redes neurais artificiais (ANN) para otimizar a distribuição de ar em caldeiras ultra-supercríticas. Polat e Cadirci (2022) utilizaram ANN treinadas com resultados obtidos por CFD para estimar os números de Nusselt e Poiseuille de pinos com aletas em forma de diamante em um dissipador de calor com microcanais. Além disso, eles empregaram NSGA-II para otimizar a configuração dos microcanais. Bellary *et al.* (2016) usaram GA para melhorar o desempenho de bombas centrífugas. Du, Mak e Li (2019) aprimoraram o conforto térmico urbano com GA, e Chen *et al.* (2021) usaram um algoritmo de MO disruptivo para projetar sistemas robóticos de peixes.

Todos os trabalhos citados anteriormente utilizam a combinação de MO e CFD. A maioria dos artigos mencionados possui pelo menos um par de variáveis de resposta observadas nas matrizes do tipo CCD em que apresenta correlações de média a alta significância, o que gera estruturas de variância-covariância capazes de influenciar o desempenho dos algoritmos na modelagem e otimização.

A presença de correlação é uma condição necessária para o uso de técnicas estatísticas multivariadas, que são úteis para reduzir a dimensionalidade de MOP ao utilizar RSM. Procedimentos como análise de componentes principais (PCA) e análise fatorial (FA) permitem a construção de novas funções objetivo e restrições que são linearmente independentes, representando as funções originais em novas dimensões dentro dos mesmos grupos (Almeida *et al.*, 2019; Naves *et al.*, 2017; Paiva *et al.*, 2010). Ao agrupar várias variáveis em fatores, minimizar a superfície de resposta do fator também resulta na minimização das variáveis associadas a essa dimensão. Para atribuir novas funções objetivo ortogonais, é necessário decompor a matriz de variância-covariância (ou de correlação) ( $\Sigma$  ou  $\mathbf{R}$ , respectivamente) das repostas originais ( $\mathbf{Y}$ ) em uma combinação de cargas fatoriais antes da etapa de modelagem por mínimos quadrados ordinários (OLS). Basicamente, essa decomposição envolve a determinação dos pares de autovalores e autovetores de  $\Sigma$  ou  $\mathbf{R}$ , seguidos de um subsequente peso dos autovetores usando a raiz quadrada de seus respectivos autovalores, resultando em uma nova matriz chamada de cargas fatoriais. Um escore fatorial é, portanto, o produto do conjunto padronizado de repostas originais ( $\mathbf{Z}|\mathbf{Y} \sim \text{MVN}(\boldsymbol{\mu}_Y, \Sigma_Y)$ ) por uma combinação dessas cargas. A matriz adimensional  $\mathbf{F}$ , contendo todos os escores (rotacionados ou não), pode ser usada para substituir a matriz de resposta  $\mathbf{Y}$  no método OLS com perda mínima de informação, em um procedimento conhecido como regressão de escore fatorial (FSR) (Pratiwi *et al.*, 2023).

Há diversos exemplos em que utiliza-se RSM acoplado a escores fatoriais para produzir funções objetivo ortogonais (Bacci *et al.*, 2019; Lopes *et al.*, 2013, 2016; Luz, Romão, Streitenberger, Gomes, *et al.*, 2021; Melo *et al.*, 2022; Oliveira *et al.*, 2020; Toledo *et al.*, 2023). Na maioria das vezes, a combinação do NBI, FA e RSM para ter êxito depende da correlação estabelecida entre os escores fatoriais e as repostas originais que os geraram, ou seja, se a correlação entre um fator e o grupo de repostas que ele representa for positiva, a minimização da superfície de resposta desse escore fatorial resultará na minimização de todas as repostas pertencentes ao grupo representado pelo fator. Caso contrário, se alguma das repostas do grupo apresentar correlação negativa com o fator, o resultado da otimização da variável será contrário ao atribuído ao fator, gerando um conflito entre as direções de otimização das duas funções objetivo. Em conjunto com a FA, a técnica de rotação Varimax é utilizada, ajustando os eixos de um espaço para tornar os padrões de carga das variáveis mais claros e interpretáveis, facilitando a identificação de padrões e relacionamentos entre elas, com isso.

Ao combinar os fatores rotacionados com a NBI, é possível otimizar simultaneamente esses fatores, gerando respostas ótimas e viáveis que auxiliam na tomada de decisões. Alguns MOP resolvidos com NBI podem ser encontrados em estudos como os de Costa *et al.* (2016a; 2016b), Lopes *et al.* (2016), Naves *et al.* (2017), Gaudêncio *et al.* (2019), Luz *et al.* (2021a; 2021b), Almeida *et al.* (2022), Amorim *et al.* (2022), Souza *et al.* (2022) e Streitenberger *et al.* (2022).

Ao considerar o conceito do erro quadrático médio (MSE) proposto por Vining e Myers (1990), no qual o valor esperado de  $f(\mathbf{x})$  é combinado com seu respectivo alvo ( $T_{f(\mathbf{x})}$ ) e variância ( $\text{Var} [f(\mathbf{x})]$ ) formando um índice de aglutinação como MSE. Independentemente da direção de otimização adotada para  $f(\mathbf{x})$ , o MSE é sempre minimizado. Adaptando essa ideia para as superfícies de resposta dos escores de PCA, Paiva *et al.* (2009) e Gomes *et al.* (2013) apresentaram a função de aglutinação do erro quadrático médio multivariado (MMSE), posteriormente adaptada por Leite (2019), para ser utilizada com superfícies de resposta em escores fatoriais rotacionados. Essa abordagem foi seguida, implementada e testada com sucesso em trabalhos como Bacci *et al.* (2019), Gaudêncio *et al.* (2019), Amorim *et al.* (2022) e Streitenberger *et al.* (2022).

Portanto, independente do sentido de otimização adotado para as superfícies de resposta (univariadas ou multivariadas) e das correlações observadas entre cada par de funções objetivo, a função proposta deverá ser sempre minimizada. Essa minimização individual permite a estimativa de uma matriz *payoff* multivariada. Ao incorporar tal estratégia na formulação do NBI, os grupos de funções objetivo podem ser otimizadas simultaneamente, de acordo com as preferências dos tomadores de decisão.

Quando o MOP é resolvido utilizando a técnica NBI, três vantagens surgem: (a) a redução da dimensionalidade do MOP; (b) a formação de funções objetivo e restrições ortogonais (independentes); e (c) a possibilidade de obter fronteiras ou superfícies de Pareto equiespaçadas. A validade dessas suposições pode ser verificada em trabalhos como os de Lopes *et al.* (2016), Arruda *et al.* (2019), Gaudêncio *et al.* (2019), Almeida *et al.* (2022), Amorim *et al.* (2022) e Streitenberger *et al.* (2022), Souza *et al.* (2022), Luz *et al.* (2021a, 2021b). Com base na observação do desempenho de vários métodos de escalonamento para MOP, acredita-se que a ortogonalidade entre múltiplas funções objetivo e restrições contribui significativamente para o sucesso dos algoritmos de busca, e, apesar de sua complexidade, as abordagens multivariadas são uma das mais adequadas para lidar com a otimização de superfícies de resposta múltiplas.

Assim como nos algoritmos tradicionais de MOP, a combinação NBI-FA-RSM (daqui em diante chamada de interseção normal à fronteira de fatores rotacionados por Varimax, VRF-NBI) também depende de uma distribuição de pesos para gerar o conjunto de subproblemas ou alternativas. Com o vetor de pesos percentuais necessários forma uma combinação convexa de  $p-1$  graus de liberdades, uma escolha natural para essas disposições é o planejamento de experimentos de misturas. Além da vantagem de gerar combinações equilibradas dentro do espaço de soluções de misturas, o uso do MDE permite modelar qualquer característica de desempenho do MOP medida durante o processo de otimização. Por exemplo, distâncias euclidianas ou de Mahalanobis podem ser expressas como polinômios canônicos, escritos em termos de um vetor de pesos. Essa abordagem já foi aplicada com sucesso em vários problemas de otimização multiobjetivo, como em Mendes *et al.* (2016), Aquila *et al.* (2018), Bacci *et al.* (2019), Gaudêncio *et al.* (2019), Rocha *et al.* (2022), Streitenberger *et al.* (2022), Gao, Ren e Zhang (2023) e Chen *et al.* (2023).

O último aspecto de MOP que deve ser abordado é a análise pós-Pareto, um procedimento de tomada de decisão multicritério (MCDM) utilizado para avaliar, classificar e ranquear soluções ótimas de Pareto. O MCDM pode ser útil em várias aplicações, como em diagnósticos médicos (Liao e Peng, 2024), avaliação das condições de operação de células de redução de alumínio (Huang *et al.*, 2023), avaliação de tecnologias de segregação de resíduos sólidos baseadas em inteligência artificial (IA) (Banu *et al.*, 2024) e gestão de resíduos médicos gerados durante a pandemia de coronavírus (Demir e Moslem, 2024), entre outros.

Audet *et al.* (2021) apresentaram uma ampla revisão do estado da arte sobre os indicadores de desempenho mais relevantes para MOP. Especificamente em relação ao NBI, os critérios mais citados na literatura incluem: (a) a distância Euclidiana entre uma solução ótima de Pareto e o ponto de Utopia (Pereira *et al.*, 2019; Yin e Cai, 2024); (b) o Índice de Diversidade (Rocha *et al.*, 2017; Yin e Cai, 2024); (c) a distância de Mahalanobis (Cui *et al.*, 2022; Fuente, Vega-Rodríguez e Pérez, 2018; Streitenberger *et al.*, 2022; Yuan *et al.*, 2020); (d) o hipervolume do conjunto de alternativas (Yin e Cai, 2024); (e) o erro percentual global (GPE) (Aquila *et al.*, 2018; Belinato *et al.*, 2019; Costa, Brito, *et al.*, 2016; Fonseca *et al.*, 2018; Gaudêncio *et al.*, 2019; Gomes *et al.*, 2013; Rocha *et al.*, 2021); e (f) o índice de entropia de Shannon (S) (Aquila *et al.*, 2018, 2020; Bacci *et al.*, 2019; Belinato *et al.*, 2019; Gaudêncio *et al.*, 2019; Mendes *et al.*, 2016; Rocha *et al.*, 2022; Streitenberger *et al.*, 2022). Frequentemente, essas métricas de

MCDM são usadas na forma de combinações convexas para definir as melhores alternativas.

Outra abordagem pós-Pareto amplamente utilizada em estudos de MCDM e MOP é a técnica de ordem de preferência por similaridade para a solução ideal (TOPSIS). Conforme verificado em trabalhos de Aquila *et al.* (2020), Subasi *et al.* (2021) Pires *et al.* (2023), o TOPSIS envolve os seguintes passos: (a) normalização da matriz de decisão, (b) ponderação da matriz de decisão normalizada, (c) encontrar a solução ideal positiva e negativa, (d) calcular a distância geométrica entre cada alternativa e a solução ideal e (e) medir a proximidade relativa de cada alternativa à solução ideal. O passo (d) geralmente utiliza uma distância Euclidiana n-dimensional (Ahmadi e Nascimento, 2015) entre uma alternativa e ambas as soluções, ideal positiva e negativa. No entanto, se as alternativas forem oriundas de dados multivariados, recomenda-se substituir a distância Euclidiana pela distância de Mahalanobis (Yuan *et al.*, 2020). Em consonância com essa descoberta, neste trabalho é proposto o uso da Distância Generalizada (GD), uma métrica proposta por Khuri e Conlon (1981), que substitui a matriz de variância-covariância ( $\Sigma$ ) na distância de Mahalanobis por uma matriz de variância-covariância das superfícies de resposta estimadas (Zhang *et al.*, 2019). Originalmente, a GD foi desenvolvida para servir como um procedimento de aglutinação capaz de transformar o vetor de múltiplas respostas em uma única função global,  $F(\mathbf{x})$ , permitindo a incorporação da estrutura de correlação dentro do MOP. Claramente, a ideia de Khuri e Conlon (1981) era superar as desvantagens observadas no método *Desirability* (Derringer e Suich, 1980; Dong *et al.*, 2024; Li *et al.*, 2023), principalmente relacionadas à presença de correlações entre as múltiplas superfícies de resposta. Além disso, também é utilizado o método proposto por Shannon (1948). A GD quantifica a separação multivariada, sendo uma extensão da distância Euclidiana, mas para espaços multidimensionais, enquanto S avalia a incerteza de uma distribuição de probabilidade.

Este estudo aborda uma otimização multiobjetivo não linear combinada com CFD e outras técnicas, com o propósito de ser um componente chave para a tomada de decisões no planejamento do melhor *design* entre opções ótimas. Inicialmente, o conjunto de dados é construído com base no DOE, seguido pela execução de simulações computacionais e pelo armazenamento dos resultados obtidos com o Ansys Fluent®. Em seguida, a PCA é empregada para avaliar a dimensionalidade do conjunto de dados, considerando os autovalores e sua soma cumulativa, definindo a quantidade de variáveis latentes que serão extraídas.

Subsequentemente, a FA é utilizada para transformar as variáveis em fatores rotacionados, permitindo a criação de novas funções objetivo e restrições. O próximo passo envolve a definição da distribuição de pesos por meio do *Simplex-lattice* MDE. Com os pesos definidos, a fase de MO é realizada utilizando a NBI. Cada iteração da NBI é avaliada com base nas métricas GD e S, visando avaliar as respostas ótimas.

Em seguida, é realizada a otimização a posteriori (P-O), empregando MDE para gerar novos pesos. Nesta fase, as funções objetivo são GD e S, juntamente com seus respectivos fatores rotacionados. Busca-se um peso médio para atribuir igual importância a ambas as funções, utilizando novamente a NBI. Com o peso ideal determinado, uma nova otimização é conduzida para identificar o melhor ponto.

Para exemplificar essa abordagem, a MO de um ventilador centrífugo operando em um forno industrial a altas temperaturas é considerada como estudo de caso, utilizando material *American Iron and Steel Institute* (AISI) 304. As variáveis de controle referem-se às pás, incluindo o número de pás (NB ou  $x_1$ ), ângulo de entrada das pás (BEA ou  $x_2$ ), ângulo de abertura das pás (BOA ou  $x_3$ ) e comprimento das pás (BL ou  $x_4$ ). Um CCD é empregado, resultando em 24 experimentos, onde oito respostas são avaliadas, divididas em três dimensões: o fator 1 (**VRF<sub>1</sub>**) compreende torque (T ou  $Y_3$ ), magnitude da velocidade máxima (MMV ou  $Y_7$ ), pressão total máxima (MTP ou  $Y_6$ ) e turbulência média  $\varepsilon$  (AT $\varepsilon$  ou  $Y_8$ ), enquanto o fator 2 (**VRF<sub>2</sub>**) abrange índice de desempenho (PI ou  $Y_4$ ) e vazão mássica (MFR ou  $Y_2$ ). Por sua vez, o fator 3 (**VRF<sub>3</sub>**) inclui custo do material (MC ou  $Y_5$ ) e massa da pá (BM ou  $Y_1$ ). Os resultados obtidos neste estudo serão comparados com os do ventilador atualmente em operação neste forno industrial.

Esta pesquisa tem como objetivo avaliar as variáveis de entrada e suas respectivas variáveis de saída que influenciam a otimização do desempenho de um ventilador centrífugo utilizado em fornos industriais. O trabalho propõe a otimização de um produto já existente, buscando melhorias na metodologia de modelagem do ventilador centrífugo e otimizando o conjunto de fatores significativos, evitando o uso de inúmeras simulações baseadas em tentativa e erro.

## 1.2. Objetivos

Esta seção tem como propósito delinear o objetivo geral e os objetivos específicos deste trabalho, destacando as metas a serem alcançadas e os resultados esperados. Será

descrito o que se busca encontrar neste trabalho, proporcionando uma visão clara do direcionamento e das intenções deste.

#### 1.2.1. Objetivo geral

O principal objetivo deste trabalho é integrar a CFD, o DOE e a MO para a seleção de configurações ótimas para ventiladores centrífugos, visando reduzir o tempo e os custos computacionais, além de utilizar métricas multivariadas para avaliar a qualidade dos resultados obtidos.

#### 1.2.2. Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Avaliar as vantagens da utilização do DOE em projetos que envolvem CFD;
- Comparar os resultados obtidos pelo método com aqueles provenientes de modelos de ML;
- Comparar os resultados da otimização utilizando a técnica de NBI com as variáveis originais e com fatores rotacionados;
- Identificar e compreender os fatores que mais influenciam na busca pela solução ótima;
- Reduzir o custo computacional associado ao processo de otimização.

#### 1.3. Contribuições esperadas

Este estudo visa contribuir para a indústria que opera com simulação computacional, especialmente na área de fluidodinâmica, com o objetivo de auxiliar os tomadores de decisão, reduzir o tempo de simulação e apoiar projetistas e engenheiros no desenvolvimento de produtos com configurações ótimas. A finalidade é encontrar o *trade-off* entre custo e desempenho. O método proposto é aplicado a um ventilador centrífugo existente, e os resultados obtidos evidenciam a relevância do trabalho.

#### 1.4. Delimitações da pesquisa

Os resultados obtidos referem-se especificamente à operação de ventiladores centrífugos com o uso de CFD. Esses resultados são aplicáveis a este processo e estas condições específicas analisadas. Quaisquer alterações nos níveis de parâmetros,

condições de operação ou aplicação podem impactar os resultados apresentados e esperados, que também podem variar dependendo do conjunto de respostas utilizado.

Além disso, é importante ressaltar que a precisão dos resultados depende da adequação dos modelos de CFD utilizados, incluindo a definição correta das condições de contorno e a escolha do modelo turbulento apropriado. A calibração do modelo é crucial para garantir a validade dos resultados.

As limitações também podem estar associadas ao algoritmo de otimização, pois algoritmos baseados em gradiente são sensíveis aos métodos de inicialização. Isso significa que a escolha dos pontos iniciais pode influenciar significativamente a convergência e a qualidade da solução encontrada.

Os resultados obtidos não foram testados em ambientes reais e industriais, uma vez que esse aspecto não foi o foco da pesquisa. Portanto, validações adicionais podem ser realizadas em trabalhos futuros para dar continuidade na aplicabilidade prática dos resultados encontrados.

## 1.5. Estrutura do trabalho

Este estudo está estruturado em cinco seções. A **Seção 1** apresenta a contextualização dos temas abordados, os objetivos, as contribuições e as delimitações da pesquisa.

A **Seção 2** traz a fundamentação teórica do trabalho, iniciando com uma Análise bibliométrica e seguida pela descrição dos métodos que serão utilizados, como: **Metodologia de superfície de respostas, Análise fatorial, Interseção normal à fronteira, Planejamento de experimentos de mistura, Métricas de desempenho, Otimização a posteriori, Elipse de confiança e Aprendizado de máquina.**

A **Seção 3** detalha a metodologia, desde as considerações iniciais até a explicação do passo a passo e dos avanços metodológicos propostos.

Na **Seção 4**, o método é aplicado a um exemplo prático utilizando um ventilador centrífugo industrial. Essa é a seção mais extensa, contendo o detalhamento do estudo, comparações e resultados.

Por fim, a **Seção 5** apresenta as conclusões da pesquisa, as contribuições do trabalho e possíveis estudos futuros. Ao final do documento, os dados e códigos utilizados estão disponibilizados para consulta.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este estudo utiliza uma versão aprimorada do método NBI, desenvolvida para resolver modelos de superfícies de resposta múltiplas e correlacionadas, aplicada a problemas relacionados a fluidos. Denominado VRF-NBI, o método emprega superfícies de resposta baseadas em escores fatoriais rotacionados por Varimax como funções objetivo, substituindo as respostas originais e integrando-as na otimização multiobjetivo (MO). A atribuição dos pesos para as iterações é controlada por um planejamento sequencial de mistura de experimentos (MDE). Após cada iteração, métricas de desempenho, como Distância Generalizada (GD) e Entropia (S), são calculadas e modeladas seguindo um polinômio canônico de quarta ordem de Scheffé. A solução Pareto-ótima (P-O) mais adequada surge a partir do equilíbrio entre GD e S, sendo obtida por meio de técnicas a posteriori para identificar a solução mais eficaz. Os principais aspectos das metodologias e algoritmos envolvidos serão destacados e descritos nas próximas seções.

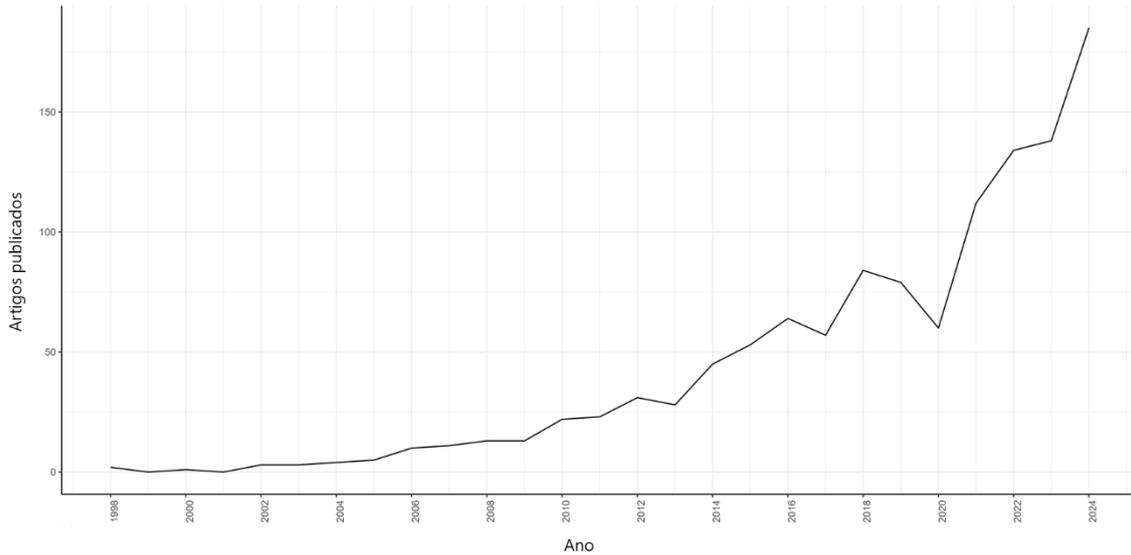
### 2.1. Análise bibliométrica

Ao realizar uma análise bibliométrica (fevereiro/2025) utilizando termos presentes no título, nas palavras-chave ou no resumo, com a seguinte *query* de busca: *(TITLE-ABS-KEY ("Computational Fluid Dynamics") AND TITLE-ABS-KEY ("Multiobjective optimization" OR "Multi-objective optimization"))*, identificaram-se 1.212 artigos publicados. Esses itens serão evidenciados com maior destaque em Figuras e Quadro desta seção. Ao aplicar uma limitação para apenas artigos, esse número cai para 904. Com uma limitação adicional ao período de 2019 a 2025, constatou-se que existem 632 artigos, o que representa cerca de 70% do total, publicados após 2018. Isso indica uma tendência crescente de integração entre a MO e a CFD.

Ao adotar a mesma pesquisa e incluir o termo DOE, a nova *query* torna-se: *(TITLE-ABS-KEY ("Computational Fluid Dynamics") AND TITLE-ABS-KEY ("Multiobjective optimization" OR "Multi-objective optimization") AND TITLE-ABS-KEY ("Design of Experiment")) AND PUBYEAR > 2018 AND PUBYEAR < 2025 AND (LIMIT-TO (DOCTYPE, "ar"))*. Nesse caso, a quantidade de artigos reduz para 46, evidenciando o grande potencial e a expectativa de crescimento do tema em questão.

A evolução da produção científica desde a primeira publicação combinando esses termos até o momento é apresentada na **Figura 1**, enquanto o **Quadro 1** exhibe a

quantidade de publicações por áreas temáticas, destacando aquelas com mais de 100 publicações, especialmente na área de engenharia. Tanto a **Figura 1** quanto o **Quadro 1** abrangem a pesquisa de forma geral, sem restrições por ano.

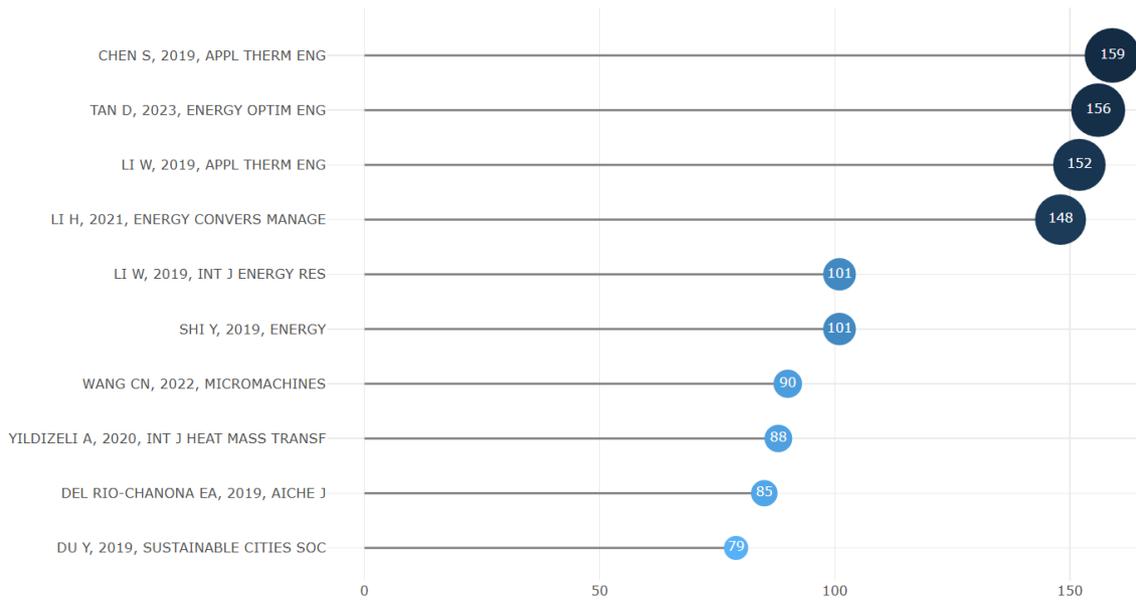


**Figura 1** - Produção científica envolvendo otimização multiobjetivo e fluidodinâmica computacional  
(Fonte: elaborada pelo autor)

**Quadro 1** - Publicações por área temática

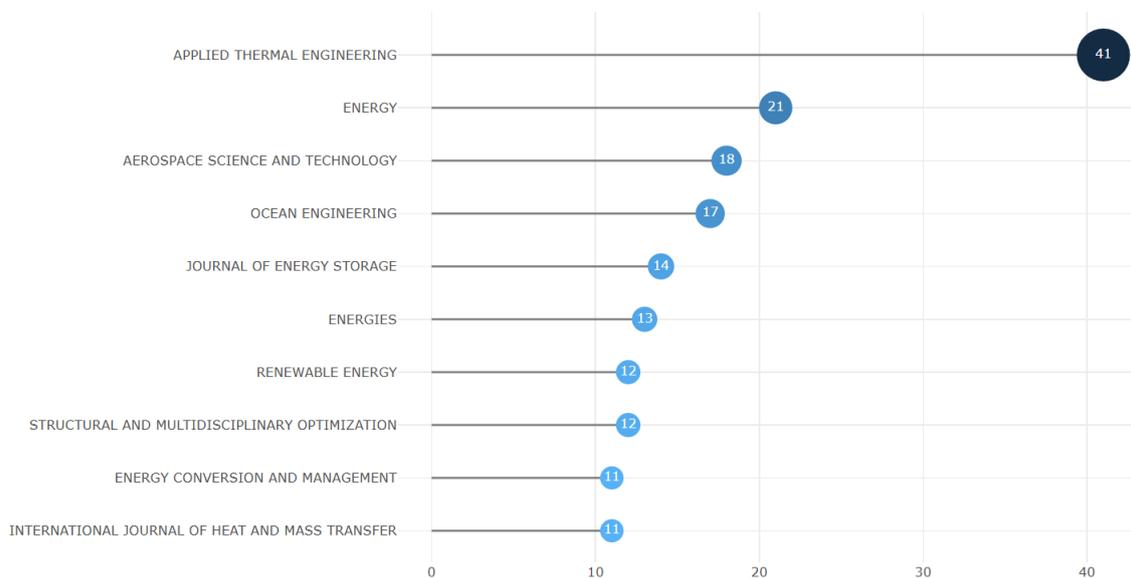
Área temática	Artigos publicados
Engenharia	555
Energia	208
Engenharia química	168
Matemática	112
Física e astronomia	108
Ciência da computação	101
Ciências ambientais	100

O artigo mais citado é “A comprehensive analysis and optimization process for an integrated liquid cooling plate for a prismatic lithium-ion battery module” (Chen *et al.*, 2019) publicado na *Applied Thermal Engineering*, com 159 citações. Apenas 6 artigos têm mais de 100 citações. A **Figura 2** mostra os 10 artigos com a maior quantidade de citações.



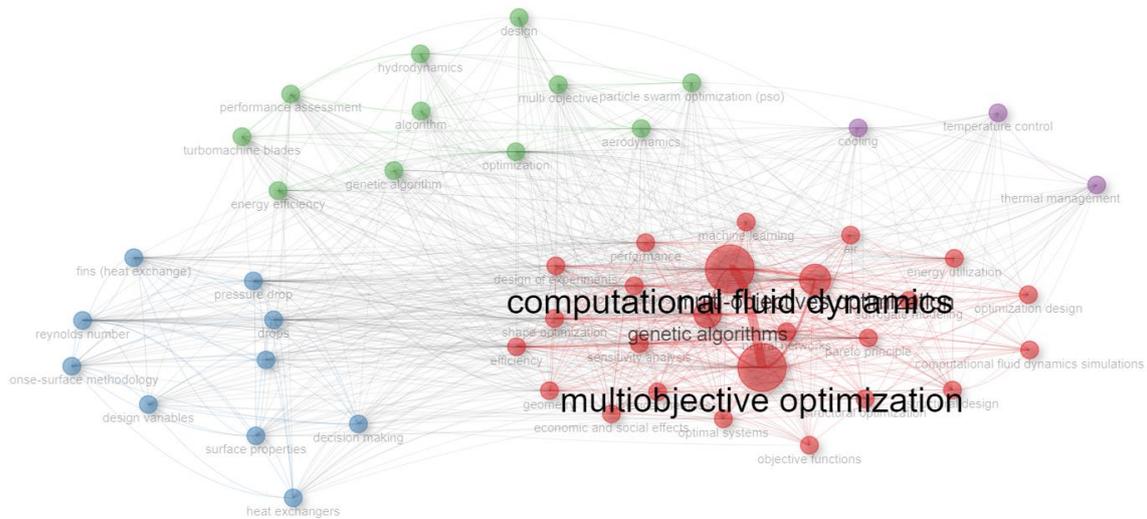
**Figura 2** - Artigos mais citados (2019-2025) (Fonte: elaborada pelo autor)

A revista com mais publicações na área é a mesma que possui o artigo mais citado, a *Applied Thermal Engineering*, que conta com 41 publicações, enquanto a segunda revista, *Energy*, possui 21. A **Figura 3** apresenta as 10 revistas com mais publicações, e a **Figura 4** ilustra as cinco revistas com mais publicações ao longo do tempo.



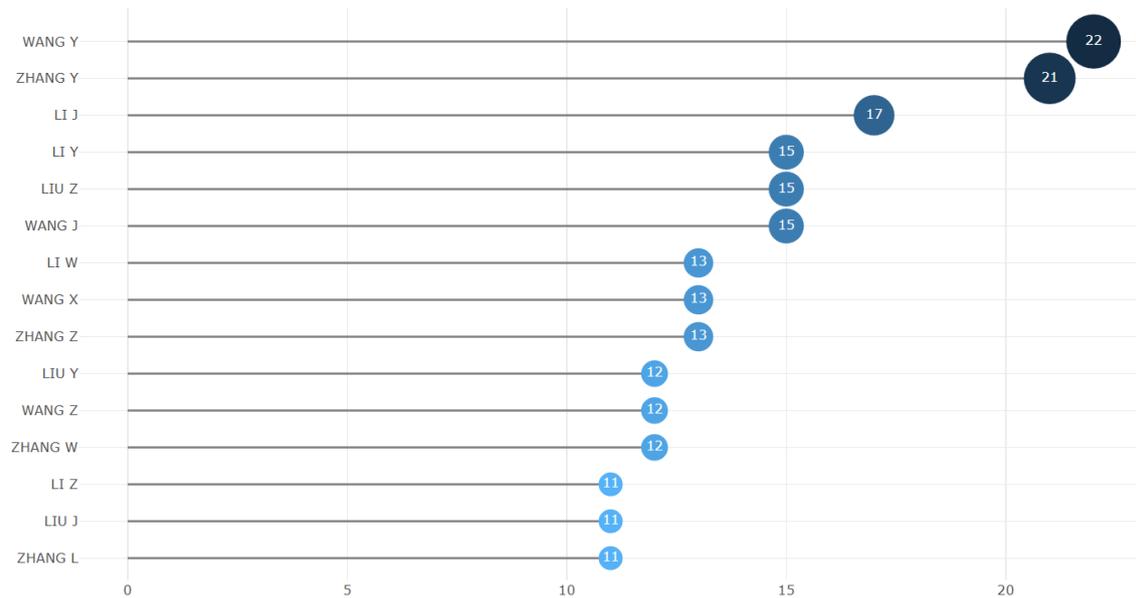
**Figura 3** - Revistas com mais publicações (2019-2025) (Fonte: elaborada pelo autor)





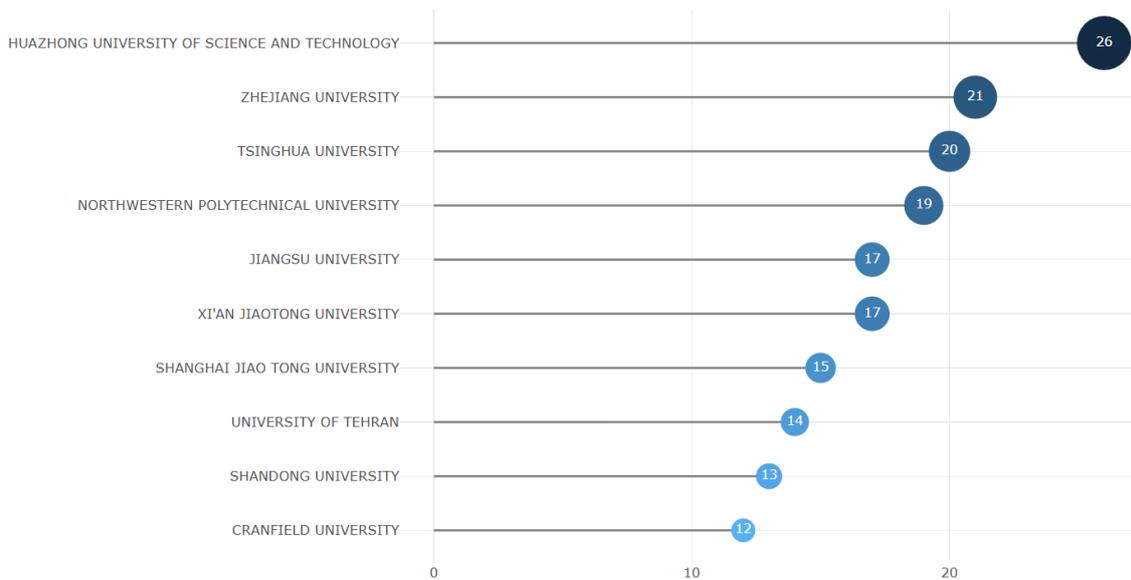
**Figura 6** - Coocorrência das palavras-chave (2019-2025) (Fonte: elaborada pelo autor)

Os autores mais relevantes foram destacados com base na quantidade de publicações. Os três primeiros, Y. Wang, Y. Zhang e J. Li, possuem mais de 15 publicações cada um. Foram incluídos apenas os autores que têm mais de 10 publicações, conforme ilustrado na **Figura 7**.



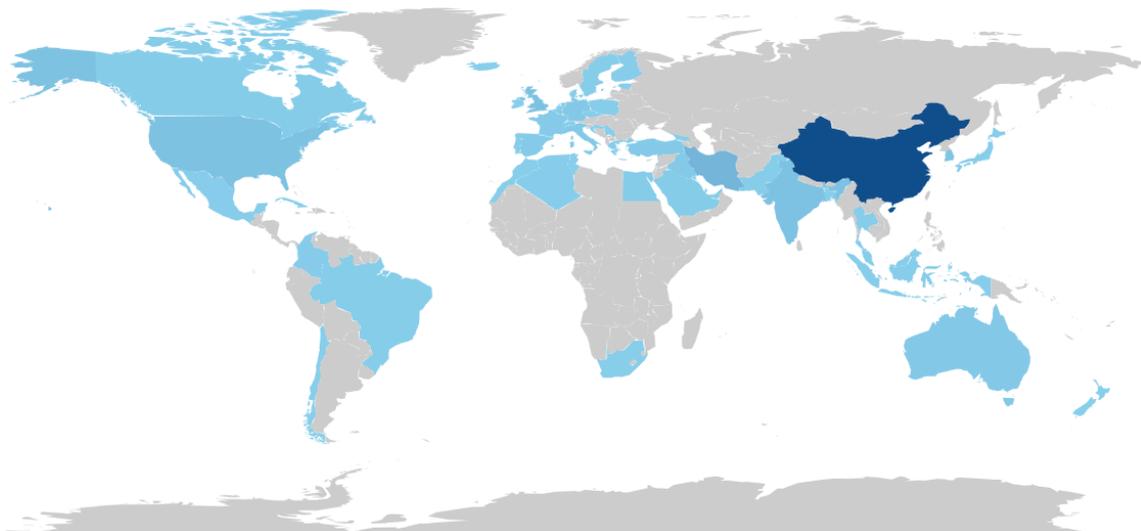
**Figura 7** - Autores com mais publicações (2019-2025) (Fonte: elaborada pelo autor)

As 10 universidades mais produtivas, todas com mais de 10 publicações, têm destaque para *Huazhong University of Science and Technology*, que é a única com mais de 25 publicações. Esta distribuição é mostrada na **Figura 8**.

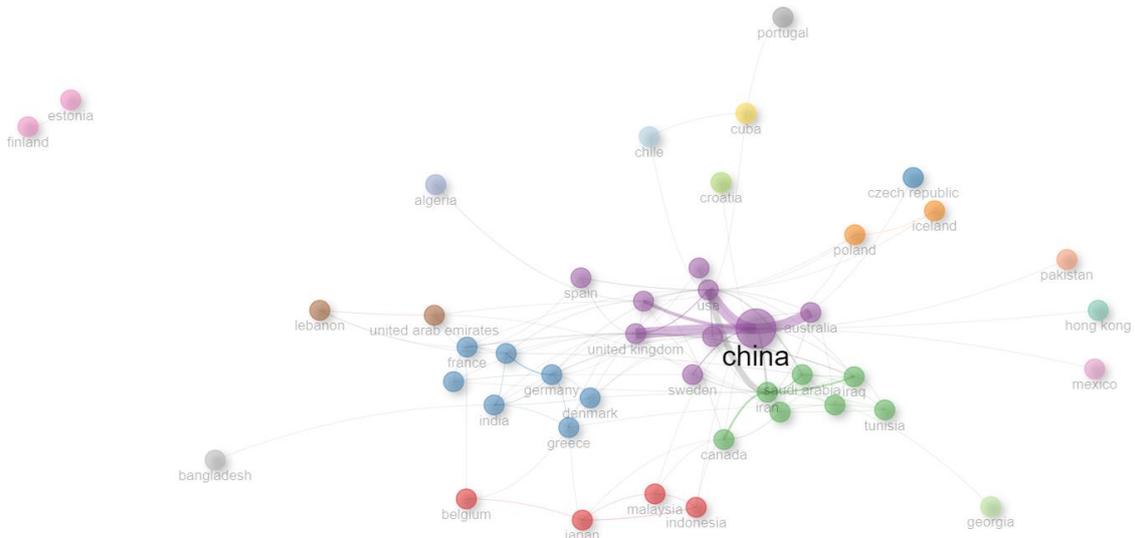


**Figura 8** - Universidades com mais publicações (2019-2025) (Fonte: elaborada pelo autor)

A contribuição científica por país é apresentada na **Figura 9**, destacando a China, com 761 documentos publicados, enquanto o Brasil possui apenas 7. Além disso, a rede de colaboração entre os países nas publicações é ilustrada na **Figura 10**.



**Figura 9** - Países com mais publicações (2019-2025) (Fonte: elaborada pelo autor)



**Figura 10** - Rede de colaboração entre países em publicações (2019-2025) (Fonte: elaborada pelo autor)

Essas análises ressaltam as contribuições de autores, universidades e países, além de identificar os artigos mais influentes na combinação de MO com CFD. Com base nos dados obtidos, é possível realizar uma verificação detalhada das importâncias e tendências do tema, tanto nos últimos 5 anos quanto em um contexto geral. Essas percepções fornecem uma base sólida para a avaliação de estratégias, técnicas e metodologias utilizadas neste campo de pesquisa.

## 2.2. Metodologia de superfície de respostas

A RSM é uma abordagem estatística e matemática que utiliza modelos empíricos para ajustar os dados obtidos de acordo com o planejamento experimental, usando funções polinomiais, sejam lineares ou quadráticas, para descrever e otimizar modelos (Montgomery, 2017). A escolha mais comum para modelos estocásticos não lineares é um polinômio quadrático completo de segunda ordem, descrito de forma (Myers, Montgomery e Anderson-Cook, 2016):

$$f_p(\mathbf{x}) = \hat{\beta}_{0p} + \sum_{i=1}^k \hat{\beta}_{ip} x_i + \sum_{i=1}^k \hat{\beta}_{iip} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1+i}^k \hat{\beta}_{ijp} x_i x_j \quad \forall p = 1, 2, \dots, r \quad (1)$$

Onde:  $k$  é o número de variáveis independentes;  $\beta_0$  é o termo independente,  $\beta_i$  são os coeficientes referentes aos efeitos lineares;  $\beta_{ii}$  são os coeficientes referentes aos efeitos quadráticos;  $\beta_{ij}$  são os coeficientes referentes aos efeitos de interação medidos entre as variáveis de entrada ( $x_i$  e  $x_j$ ) e  $p$  denota o número de funções objetivo consideradas.

A aplicação da RSM pode ser dividida em várias etapas (Bezerra *et al.*, 2008), que incluem a seleção de variáveis significativas, o DOE, a utilização de técnicas estatísticas e matemáticas para o processamento de dados, a avaliação do modelo e a determinação da região ótima para obter os melhores valores para cada variável de entrada.

As metodologias comuns incluem *design* fatorial, CCD e Box-Behnken *design* (Mäkelä, 2017). Devido à facilidade de modelagem de polinômios de segunda ordem, o CCD foi empregado neste estudo. O CCD integra um conjunto de pontos fatoriais, pontos axiais e pontos centrais (Angelopoulos, Evangelaras e Koukouvinos, 2009). De acordo com Montgomery, um modelo de segunda ordem pode ser expresso como:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1+i}^k \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon \quad (2)$$

Onde:  $k$  é o número de variáveis independentes;  $\beta_0$  é o termo de compensação ou intercepto;  $\beta_i$  representa o efeito linear;  $\beta_{ii}$  é o efeito quadrático;  $\beta_{ij}$  é o efeito de interação;  $\varepsilon$  é o termo residual;  $x_i$  e  $x_j$  são as variáveis independentes codificadas.

Para estimar os parâmetros ( $\beta$ ) do modelo polinomial, o método dos mínimos quadrados é comumente utilizado. Embora um modelo polinomial específico possa não representar com precisão a relação real entre todas as variáveis independentes (Montgomery, 2017), dentro de um certo intervalo, essa aproximação muitas vezes é eficaz e apresenta um desempenho satisfatório. Esta é uma das razões pelas quais a RSM é amplamente utilizada na área industrial para modelagem e otimização de processos.

Uma das suposições levantadas nesta pesquisa é que  $p$  respostas originais podem ser adequadamente substituídas por  $p-m$  escores fatoriais rotacionados, dependendo, obviamente, da quantidade de correlação entre eles. O parâmetro  $m$  denota o número de dimensões que podem ser reduzidas com esta abordagem estatística multivariada. Supondo que  $\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{R}}$  seja uma matriz  $[n \times (p - m)]$  onde  $n$  é o número de execuções experimentais realizadas, a matriz de coeficientes multivariadas,  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{R}}}$ .

Ao substituir a matriz de múltiplas respostas ( $\mathbf{Y}$ ) usando os escores dos fatores rotacionados ( $\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{R}}$ ) com o método OLS, obtém-se um novo vetor de coeficientes, que são independentes. Com essa modificação dada por:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{R}}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{R}}) = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Z} \{(\mathbf{L} \mathbf{T}) [(\mathbf{L} \mathbf{T})^T (\mathbf{L} \mathbf{T})]^{-1}\} \quad (3)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{R}}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{R}}) = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \{ \mathbf{Z} [\tilde{\mathbf{L}} (\tilde{\mathbf{L}}^T \tilde{\mathbf{L}})^{-1}] \} \quad (4)$$

Uma superfície de resposta para o  $i$ -ésimo escore fatorial rotacionado,  $\tilde{\mathbf{F}}_i^{\mathbf{R}}(\mathbf{x})$ , é dada por:

$$\tilde{\mathbf{F}}_i^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) = \mathbf{z}^T(\mathbf{x})\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{(\tilde{\mathbf{F}}_i^{\mathbf{R}})_i} \begin{cases} \mathbf{z}^T(\mathbf{x}) = [1 & x_1 & x_2 & \dots & x_k & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_k^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \dots & x_{k-1}x_k] \\ \tilde{\boldsymbol{\beta}}^T = [\beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_k & \beta_{11} & \beta_{22} & \dots & \beta_{kk} & \beta_{12} & \beta_{13} & \dots & \beta_{k-1,k}] \end{cases} \quad (5)$$

Com isso,  $\mathbf{X}$  é uma matriz *design* (como um CCD, por exemplo),  $\mathbf{Z}$  é a matriz da variável de resposta padronizada, e  $\mathbf{T}$  é a matriz de rotação.  $\mathbf{L}$  representa a matriz de cargas fatoriais, uma matriz formada pelos autovetores da matriz de correlação ( $\mathbf{R}$ ) de múltiplas respostas, onde cada coluna é multiplicada por seu respectivo autovalor, como:

$$\mathbf{L} = \left[ \sqrt{\lambda_1}\mathbf{e}_1 \mid \sqrt{\lambda_2}\mathbf{e}_2 \mid \dots \mid \sqrt{\lambda_p}\mathbf{e}_p \right] \quad (6)$$

O que foi apresentado nesta seção se refere a construção aos coeficientes estimados para cada termo da RSM em relação aos escores rotacionados. Ela fornece uma representação da superfície de resposta em função das variáveis independentes codificadas, permitindo a análise e otimização dos resultados experimentais.

### 2.3. Análise fatorial

Na FA, um fator é uma variável não observável ou latente que pode explicar as correlações ou covariâncias observadas entre um conjunto maior de variáveis. Assume-se que esses fatores latentes capturam a variância comum compartilhada pelas variáveis observadas (Johnson e Wichern, 1982). Um vetor aleatório ( $\mathbf{X}$ ), com  $p$  componentes, tem um vetor médio ( $\boldsymbol{\mu}$ ) e uma matriz de variância-covariância ( $\boldsymbol{\Sigma}$ ), então:

$$\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{L}\mathbf{F} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (7)$$

Quando há um nível de redundância entre as variáveis originais,  $\boldsymbol{\Sigma}$  pode ser aproximada usando uma combinação linear de cargas com menos componentes do que o número de variáveis e uma matriz de erro ( $\boldsymbol{\Psi}$ ), tal que:

$$\boldsymbol{\Sigma} = E[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T] = E[(\mathbf{L}\mathbf{F} + \boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{L}\mathbf{F} + \boldsymbol{\varepsilon})^T] = E[(\mathbf{L}\mathbf{F} + \boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{L}^T\mathbf{F}^T + \boldsymbol{\varepsilon}^T)] \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T\boldsymbol{\Psi} \quad (9)$$

Onde:  $\boldsymbol{\Psi}$  é a matriz diagonal das variâncias específicas, tal que  $\Psi = \sigma_i^2 - h_i^2$ . O segundo termo da expressão ( $h_i^2$ ) é conhecido como comunalidade ou quantidade de variância explicada.

Considerando a carga ( $\mathbf{L}$ ), a matriz de dados padronizados ( $\mathbf{Z}$ ) pode ser convertida em uma variável adimensional chamada escore de fator ( $\mathbf{F}$ ), que é dado por:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Z}[\mathbf{L}(\mathbf{L}^T\mathbf{L})^{-1}] \quad (10)$$

A matriz de carga ( $\mathbf{L}$ ) pode ser rotacionada para aumentar a interpretabilidade dos fatores. O uso de uma matriz de rotação ortogonal preserva a independência dos fatores

enquanto as variáveis originais permanecem correlacionadas. Este estudo emprega o processo de rotação Varimax, que simplifica a estrutura do fator, tornando-a mais clara e destacando os padrões encontrados nas variáveis originais ao associar termos comuns em um fator latente. O método tem como objetivo concentrar as variáveis originais com altas cargas em um único fator, o que é particularmente útil ao lidar com um grande número de variáveis (Kaiser, 1958).

Após a rotação dos componentes, o critério global Varimax é calculado, e o processo é repetido para pares de componentes. Ao final de cada iteração, o critério é verificado para ver se aumentou, continuando até que a convergência seja alcançada. O critério proposto por Kaiser (1958) visa maximizar a soma da variância dos quadrados das cargas dentro de cada fator, levando a uma solução que simplifica as cargas fatoriais e melhora significativamente a interpretabilidade. A matriz de rotação ( $\mathbf{T}$ ) é dada por:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (11)$$

Enquanto isso, o ângulo de rotação para a rotação Varimax ( $\gamma$ ) é dado por:

$$\gamma = \frac{1}{4} \arctan \left[ \left( \sum_{i=1}^n u_i v_i - \frac{2 \sum_{i=1}^n u_i \sum_{i=1}^n v_i}{p} \right) \left( \sum_{i=1}^n (u_i^2 - v_i^2) - \frac{(\sum_{i=1}^n u_i)^2 (\sum_{i=1}^n v_i)^2}{p} \right)^{-1} \right] \quad (12)$$

De acordo com Kaiser (1958), a relação entre as variáveis  $k_1$  e  $k_2$  e o ângulo de rotação ( $\gamma$ ) é observada conforme descrito na **Tabela 1**. A **Eq. (12)** pode ser reescrita em termos das variáveis  $k_1$  e  $k_2$ , de tal forma que o ângulo de rotação ( $\gamma$ ) é igual a:

$$\gamma = \frac{1}{4} \arctan \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left\{ \begin{array}{l} k_1 = \sum_{i=1}^n u_i v_i - \frac{2 \sum_{i=1}^n u_i \sum_{i=1}^n v_i}{p} \\ k_2 = \sum_{i=1}^n (u_i^2 - v_i^2) - \frac{(\sum_{i=1}^n u_i)^2 - (\sum_{i=1}^n v_i)^2}{p} \end{array} \right. \quad (13)$$

**Tabela 1** - Valores de  $k$  e  $\gamma$  usados para definir o ângulo de rotação no método Varimax

$k_1$	$k_2$	$\gamma$
-	+	0.0° to -22.5°
-	-	-22.5° to -45.0°
+	+	0.5° to 22.5°
+	-	22.5° to 45.0°

A matriz de coeficientes é dada por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{L}(\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \quad (14)$$

O processo iterativo de cálculo das cargas rotacionadas pode ser entendido, tal como dada pelo **Algoritmo 1**.

---

**Algoritmo 1** - Cálculo das cargas rotacionadas

---

Início do Algoritmo 1

*Input:* Cargas fatoriais sem rotação

Passo 1: Escolha o número desejado de fatores (utilize o PCA como guia)

Passo 2: Calcule as cargas não rotacionadas para os fatores escolhidos

Passo 3: Forme uma matriz  $\Psi$  com um par arbitrário de cargas, por exemplo,  $L_1$  e  $L_2$

Passo 4: Multiplique  $\Psi$  pela matriz de rotação  $p \times p$  com o  $\gamma$  calculado pelas cargas  $L_1$  e  $L_2$

Passo 5: Repita o passo 3 e 4 para  $L_1$  e  $L_3$ , considerando o vetor rotacionado de  $L_1$

Passo 6: Repita o passo 3 e 4 para  $L_2$  e  $L_3$ , já considerando os vetores rotacionados nas etapas anteriores

Passo 7: Repita os passos 2 a 6 até que os ângulos de rotação sejam zerados

*Output:* Cargas rotacionadas com a rotação Varimax

Fim do Algoritmo 1

---

Abaixo estão descritas as matrizes de rotação relacionadas a 3 fatores:

$$J_1(\ell_1, \ell_2) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$J_2(\ell_{1Rot}, \ell_3) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$J_3(\ell_{2Rot}, \ell_{3Rot}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (17)$$

Os elementos  $u_i$  e  $v_i$ , podem ser calculados da seguinte forma:

$$u_i = \left( \frac{L_{i1}}{\sqrt{h_i^2}} \right)^2 - \left( \frac{L_{i2}}{\sqrt{h_i^2}} \right)^2 \quad (18)$$

$$v_i = \left( \frac{L_{i1}}{\sqrt{h_i^2}} \right) \times \left( \frac{L_{i2}}{\sqrt{h_i^2}} \right) \quad (19)$$

$$h_i^2 = \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, r \end{array} \right. \quad (20)$$

Nas equações anteriores,  $L_{ij}$  é a carga  $j$ -ésima da  $i$ -ésima variável original,  $p$  é o número de variáveis no problema multivariado (neste caso, o número de respostas e/ou funções objetivo), e  $r$  é o número de fatores a serem extraídos. Além disso, também foi apresentado o passo a passo para a rotação Varimax dos fatores.

A rotação de fatores é frequentemente utilizada para melhorar a interpretabilidade dos fatores. Métodos de rotação ortogonais, como Varimax buscam manter os fatores não correlacionados, enquanto métodos de rotação oblíqua, com o Promax, permitem correlações entre os fatores. A FA pode ser vista como uma extensão do PCA, com ambas as metodologias entendidas como tentativas de aproximar  $\Sigma$ . No entanto, o PCA não busca formar agrupamentos, mas sim mostrar o número de dimensões presentes nos dados, enquanto a FA visa formar agrupamentos por meio da extensão de métricas.

#### 2.4. Interseção normal à fronteira

Das e Dennis (1998) propuseram o método NBI com o objetivo de gerar superfícies Pareto espaçadas para resolver problemas de otimização multicritério não lineares, buscando um equilíbrio entre funções objetivo conflitantes. Ele foi projetado para ser uma alternativa às somas ponderadas (WS) e outros tipos de combinações convexas. O NBI tornou-se uma alternativa apropriada para obter soluções de Pareto equidistantes.

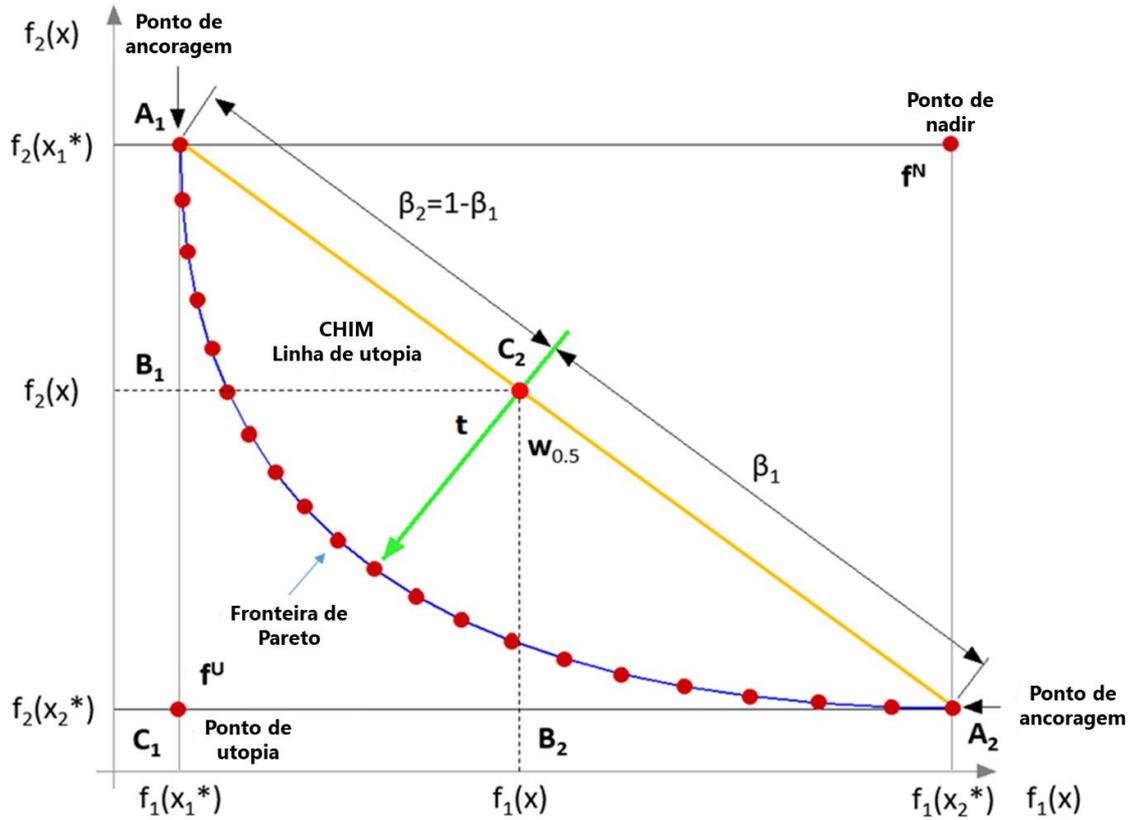
Algebricamente, definindo um subespaço afim de menor dimensão que contém o envoltório convexo dos mínimos individuais (CHIM), tal que  $\{\Phi\beta: \beta \in \mathfrak{R}^n, \sum_{i=1}^n \beta_i = 1, \beta_i \geq 0\}$ , a ideia central do NBI é encontrar o ponto de interseção entre a fronteira  $\partial\mathcal{F}$  e a normal apontando para a origem, partindo de qualquer ponto no CHIM (Das e Dennis, 1998). Considerando  $\hat{\mathbf{n}}$  como a normal unitária ao simplex CHIM apontando para a origem, então  $\Phi\beta + t\hat{\mathbf{n}}, t \in \mathfrak{R}$ , representa o conjunto de pontos nessa normal. O ponto de interseção da normal com a fronteira  $\mathcal{F}$  mais próximo da origem é a solução global MOP (Das e Dennis, 1998). Portanto, para manter a ortogonalidade de  $\Phi\beta + t\hat{\mathbf{n}}$ , essa quantidade deve ser igual a distância de  $F(\mathbf{x}) - F^U(\mathbf{x})$ , que pode ser representado pelo vetor de funções objetivo escalonadas  $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ . O parâmetro  $t$  observado na formulação é um escalar perpendicular à linha de utopia, e  $\Phi$  representa a matriz *payoff*, uma matriz obtida calculando os mínimos individuais  $f_i^*(\mathbf{x}_i^*)$  para cada função objetivo. Consequentemente, a matriz  $\bar{\Phi}$  representa a matriz *payoff* escalonada, e  $\beta_k$  é o  $k$ -ésimo vetor de peso que determina diferentes pontos ao longo da linha de utopia. Concluindo os elementos matemáticos do NBI, a normal unitária  $\hat{\mathbf{n}}$  pode ser substituída por um vetor quasi-normal que mantém uma equivalência com a matriz *payoff* escalonada, como  $\hat{\mathbf{n}} = -\bar{\Phi}\mathbf{e}$ , onde  $\mathbf{e}$  é o vetor coluna de todos os “uns”. Portanto, segundo o trabalho seminal de Das e Dennis

(1998) combinaram esses elementos nos seguintes sistemas de otimização equivalente.

Com isso, o NBI pode ser dado por:

$$\left. \begin{array}{l} \max_{(x,t)} t \\ S. t.: \bar{\Phi}\beta_k + t\hat{n} = \bar{F}(x) \\ g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \\ x \in \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \min_{(x,t)} -t \\ S. t.: \bar{F}(x) - \bar{\Phi}\beta_k - t\hat{n} = 0 \\ g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \\ x \in \Omega \end{array} \right\} \quad (21)$$

A fronteira de Pareto descrita na **Figura 11** é fixada no espaço de soluções por dois pontos de ancoragem representados pelos elementos  $A_1$  e  $A_2$ . Esses pontos representam os vetores que contêm os ótimos individuais de cada função, como  $A_1^T = [f_1(x_1^*), f_2(x_1^*)]$ , onde  $x_1^*$  é o ótimo individual para  $f_1(x)$ . Analogamente, o segundo ponto de ancoragem é  $A_2^T = [f_1(x_2^*), f_2(x_2^*)]$ , onde  $x_2^*$  é o ótimo individual para  $f_2(x)$ . O segmento  $\overline{A_1 A_2}$  é chamado de linha de utopia. Em outras palavras, a utopia representa a idealização de um estado em que todas as metas e objetivos são alcançados simultaneamente. Quando a distância entre as soluções para diferentes objetivos é zero, indicando sobreposição completa, não há uma definição clara de eficiência ou superioridade entre as soluções, resultando na ausência da Fronteira de Pareto. O ponto de utopia ( $f^U$ ) é o vetor que contém os ótimos individuais das funções, dada por  $f^U = [f_1^*(x_1^*), f_2^*(x_2^*)]$ . Embora represente o ponto ideal, geralmente está fora da região viável. Em contraste, os pontos de nadir contêm os valores não ótimos de cada função objetivo, representando a pior solução possível no espaço viável, dada por  $f^N = [f_1(x_2^*), f_2(x_1^*)]$ . A **Figura 11** ilustra as relações entre os elementos da otimização multiobjetivo bidimensional, em que ambas as funções devem ser minimizadas.



**Figura 11** - Fronteira de Pareto e seus elementos geométricos (Fonte: elaborada pelo autor)

Uma generalização bidimensional do método NBI pode ser derivada observando os triângulos semelhantes  $\Delta A_1 A_2 C_1$  e  $\Delta A_1 B_1 C_2$ , bem como os triângulos  $\Delta A_1 A_2 C_1$  e  $\Delta A_2 B_2 C_2$ , reportados na **Figura 11**. Usando o fato de que dois triângulos são semelhantes se seus ângulos correspondentes forem congruentes e seus lados correspondentes estiverem em proporção igual, isso é dado por:

$$\frac{\Delta A_2 B_2 C_2}{\Delta A_1 A_2 C_1} = \frac{\overline{B_1 C_1}}{\overline{A_1 C_1}} = \frac{f_2(x) - f_2^*(x_2^*)}{f_2(x_1^*) - f_2^*(x_2^*)} = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \quad (22)$$

$$\frac{\Delta A_1 B_1 C_2}{\Delta A_1 A_2 C_1} = \frac{\overline{C_1 B_2}}{\overline{A_1 C_1}} = \frac{f_1(x) - f_1^*(x_1^*)}{f_1(x_2^*) - f_1^*(x_1^*)} = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} = \frac{(1 - \beta_1)}{\beta_1 + \beta_2} \quad (23)$$

A **Eq. (26)** exhibe o equacionamento da matriz *payoff*.

$$\Phi = \begin{bmatrix} f_1^*(x_1^*) & \cdots & f_1(x_i^*) & \cdots & f_1(x_m^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_i(x_1^*) & \cdots & f_i^*(x_i^*) & \cdots & f_i(x_m^*) \\ \cdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(x_1^*) & \cdots & f_m(x_i^*) & \cdots & f_m^*(x_m^*) \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} f_1^*(x_1^*) & \cdots & f_1(x_i^*) & \cdots & \bar{f}_1(x_m^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_i(x_1^*) & \cdots & f_i^*(x_i^*) & \cdots & f_i(x_m^*) \\ \cdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(x_1^*) & \cdots & f_m(x_i^*) & \cdots & f_m^*(x_m^*) \end{bmatrix} \quad (24)$$

Nas expressões anteriores, observa-se que a relação entre a *i*-ésima função objetivo  $f_i(x)$  e os pontos de utopia ( $f_i^U$ ) e nadir ( $f_i^N$ ) é dada por:

$$\bar{f}_i = \frac{f_i(\mathbf{x}) - f_i^U}{f_i^N - f_i^U} \quad (25)$$

A expressão descrita pela **Eq. (25)** funciona como uma normalização convertendo as funções objetivo originais em funções adimensionais, com valores no intervalo [0,1]. A partir das **Eq. (22)** e **Eq. (23)** é possível escrever que:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \Phi \beta \begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = \beta_1 f_1^*(\mathbf{x}_1^*) + \beta_2 f_1(\mathbf{x}_2^*) \\ f_2(\mathbf{x}) = \beta_1 f_2(\mathbf{x}_1^*) + \beta_2 f_2^*(\mathbf{x}_2^*) \end{cases} \Rightarrow \frac{\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}{\mathbf{F}(\mathbf{x})} = \frac{\begin{bmatrix} f_1^*(\mathbf{x}_1^*) & f_1(\mathbf{x}_2^*) \\ f_2(\mathbf{x}_1^*) & f_2^*(\mathbf{x}_2^*) \end{bmatrix}}{\Phi} \times \frac{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}}{\beta} \quad (26)$$

Os elementos do sistema mostrados anteriormente podem ser normalizados como  $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \bar{\Phi} \beta$ , onde:

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \frac{\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) - f_1^*(\mathbf{x}_1^*) \\ f_1(\mathbf{x}_2^*) - f_1^*(\mathbf{x}_1^*) \\ f_2(\mathbf{x}) - f_2^*(\mathbf{x}_2^*) \\ f_2(\mathbf{x}_1^*) - f_2^*(\mathbf{x}_2^*) \end{bmatrix}}{\bar{\Phi}} = \frac{\begin{bmatrix} f_1^*(\mathbf{x}_1^*) - f_1^*(\mathbf{x}_1^*) & f_1(\mathbf{x}_2^*) - f_1^*(\mathbf{x}_1^*) \\ f_1(\mathbf{x}_2^*) - f_1^*(\mathbf{x}_1^*) & f_1(\mathbf{x}_2^*) - f_1^*(\mathbf{x}_1^*) \\ f_2^*(\mathbf{x}_2^*) - f_2^*(\mathbf{x}_2^*) & f_2^*(\mathbf{x}_2^*) - f_2^*(\mathbf{x}_2^*) \\ f_2(\mathbf{x}_1^*) - f_2^*(\mathbf{x}_2^*) & f_2(\mathbf{x}_1^*) - f_2^*(\mathbf{x}_2^*) \end{bmatrix}}{\bar{\Phi}} \quad (27)$$

Substituindo  $\hat{\mathbf{n}} = -\bar{\Phi} \mathbf{e}$  na **Eq. (21)** e igualando o resultado a zero, a expressão  $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \bar{\Phi} \beta_k + t \hat{\mathbf{n}}$ , torna-se:

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) - \bar{\Phi}(\beta - t\mathbf{e}) = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(\mathbf{x}) - \beta_2 + t \\ \bar{f}_2(\mathbf{x}) - \beta_1 + t \end{bmatrix} \quad (28)$$

Igualando a expressão anterior a zero, tem-se que  $-t = \bar{f}_1(\mathbf{x}) - \beta_2$ . Analogamente, também é possível considerar que  $-t = \bar{f}_2(\mathbf{x}) - \beta_1$ . Combinando esses resultados, é possível escrever que:

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) - \bar{\Phi} \beta_k - t \hat{\mathbf{n}} = \bar{f}_1(\mathbf{x}) - \bar{f}_2(\mathbf{x}) + 2\beta_1 - 1 \quad (29)$$

É simples que  $\text{Min}(-t) = \text{Min}_{\mathbf{x} \in \Omega} [\bar{f}_1(\mathbf{x}) - \beta_2]$  e, considerando que  $\beta \in [0,1]$ . Então:

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega} (-t) = \left\{ \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \bar{f}_1(\mathbf{x}) - \frac{\min(\beta_2)}{0} \mid \beta \in [0,1] \right\} = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \bar{f}_1(\mathbf{x}) \mid \beta \in [0,1] \quad (30)$$

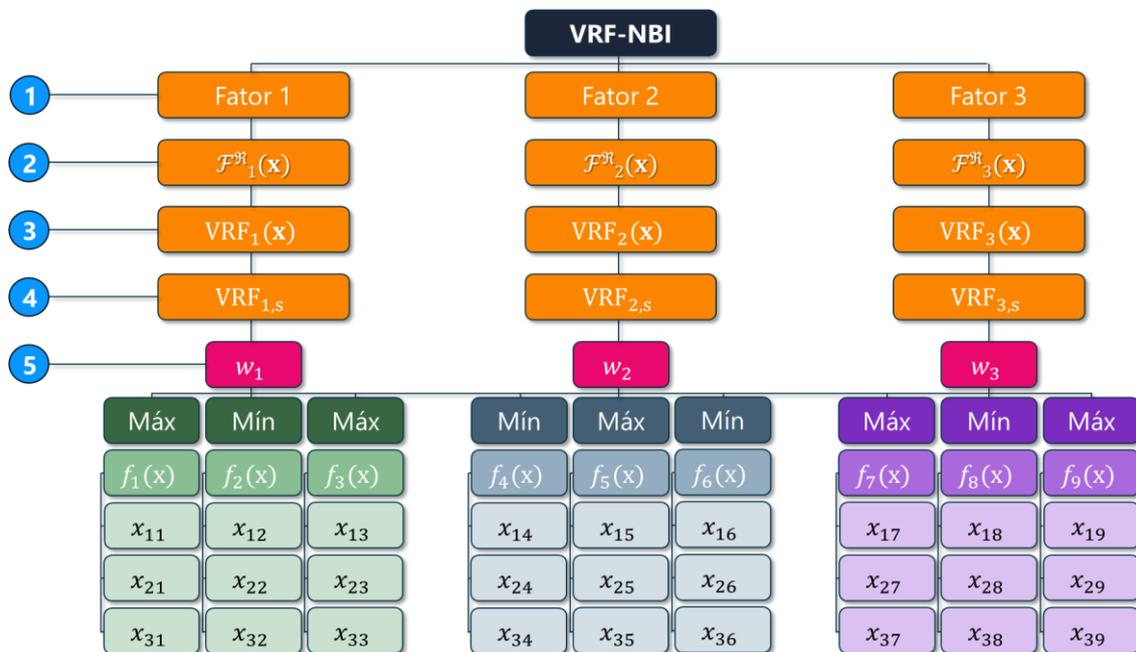
Combinando as **Eq. (28)** e **Eq. (29)**, um esquema NBI bidimensional algébrico pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \min_{(x,t)} -t \\ \text{S. t.: } \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) - \bar{\Phi} \beta_k - t \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ g(\mathbf{x}) \leq 0 \\ h(\mathbf{x}) = 0 \\ \mathbf{x} \in \Omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min_{(\mathbf{x} \in \Omega)} \bar{f}_1(\mathbf{x}) \\ \text{S. t.: } \bar{f}_1(\mathbf{x}) - \bar{f}_2(\mathbf{x}) + 2\beta - 1 = 0 \\ g(\mathbf{x}) \leq 0 \\ h(\mathbf{x}) = 0 \\ \mathbf{x} \in \Omega \end{cases} \quad (31)$$

As funções objetivo ( $f_p(\mathbf{x})$ ) podem representadas por modelos quadráticos completos construídos utilizando uma transformação de escores fatoriais Varimax de respostas medidas e calculadas obtidas por meio de uma estratégia experimental conhecida como CCD. Com base nas fortes correlações observadas em problemas com um grande número de respostas, o escore fatorial Varimax é capaz de agrupar e modelar

as várias respostas em *clusters* independentes, atribuindo funções objetivo latentes que representam o conjunto total de respostas.

Uma abordagem NBI baseada em superfícies de resposta do VRF-NBI é um esforço para gerar funções objetivo linearmente independentes, capazes de reduzir a dimensionalidade do problema de otimização multiobjetivo. Sua eficiência depende intrinsecamente da estrutura de variância-covariância presente nas múltiplas respostas, mas, para inúmeras aplicações de RSM, tal estrutura é geralmente robusta, permitindo quase sempre uma boa adequação para a aplicação. A **Figura 12** apresenta uma visão geral do método VRF-NBI.



**Figura 12** - Estrutura VRF-NBI: Método de otimização multiobjetivo (Fonte: elaborada pelo autor)

A partir de um planejamento de superfície de resposta realizado para medir e coletar dados para múltiplas respostas de interesse, uma análise estatística multivariada é aplicada aos dados das respostas. Esta etapa, que combina uma análise dos autovalores da matriz de correlação, uma análise fatorial para um número predeterminado de PCA e uma rotação ortogonal, fornecerá variáveis latentes (**Passo 1**).

Por exemplo, na **Figura 12** o conjunto de dados de resposta hipotético foi separado em 3 grupos (ou fatores). Para as respostas pertencentes a cada grupo, é atribuído um escore fatorial rotacionado ( $\tilde{\mathbf{F}}_R$ ) que, após a estimativa de seus coeficientes, torna-se um modelo multivariado de segunda ordem ( $\tilde{\mathbf{F}}_1^R(\mathbf{x})$ ), conforme mostrado anteriormente

(**Passo 2**). Juntamente com valores-alvo ( $T_{\tilde{F}_i^{\text{gr}}}(\mathbf{x})$ ) e respectivas variâncias fatoriais ( $\sigma_{\tilde{F}_i^{\text{gr}}}^2(\mathbf{x})$ ), é criada uma função objetivo de erro quadrático médio ( $\text{VRF}_i(\mathbf{x})$ ) da seguinte forma:

$$\text{VRF}_i^U = \begin{cases} \text{Min}_{\mathbf{x} \in \Omega} \text{VRF}_i(\mathbf{x}) = [\tilde{F}_i^{\text{gr}}(\mathbf{x}) - T_{\tilde{F}_i^{\text{gr}}}(\mathbf{x})]^2 + \sigma_{\tilde{F}_i^{\text{gr}}}^2(\mathbf{x}) \\ \text{S. t. : } g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \rho^2 \leq 0 \\ \text{With } \sigma_{\tilde{F}_i^{\text{gr}}}^2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \ell_{ij}^2 \quad \rho = 2^{k/4} \end{cases} \quad (32)$$

Com isso, o **Passo 3** apresenta a otimização individual  $\text{VRF}_i(\mathbf{x})$ , define-se o ponto de utopia para esta função objetivo multivariada. Esta otimização segue o esquema da **Eq. (32)**. Repetindo a execução do algoritmo, mas com a direção oposta de otimização, é possível encontrar o ponto de pseudo-nadir, tal como exibido abaixo:

$$\text{VRF}_i^N = \begin{cases} \text{Max}_{\mathbf{x} \in \Omega} \text{VRF}_i(\mathbf{x}) = [\tilde{F}_i^{\text{gr}}(\mathbf{x}) - T_{\tilde{F}_i^{\text{gr}}}(\mathbf{x})]^2 + \sigma_{\tilde{F}_i^{\text{gr}}}^2(\mathbf{x}) \\ \text{S. t. : } g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \rho^2 \leq 0 \\ \text{With } \sigma_{\tilde{F}_i^{\text{gr}}}^2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \ell_{ij}^2 \quad \rho = 2^{k/4} \end{cases} \quad (33)$$

O valor-alvo para  $\text{VRF}_i(\mathbf{x})$  pode ser encontrado de acordo com a otimização individual da superfície de resposta de cada escore fatorial por Varimax, conforme apresentado a seguir:

$$T_{\tilde{F}_i^{\text{gr}}} = \begin{cases} \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \tilde{F}_i^{\text{gr}}(\mathbf{x}) = \mathbf{z}^T(\mathbf{x})[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})(\mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{F}}_{\text{gr}})] \\ \text{S. t. : } g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \rho^2 \leq 0 \mid \rho = 2^{k/4} \\ \text{With: } \mathbf{z}^T(\mathbf{x}) = [1 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_k \quad x_1^2 \quad x_2^2 \quad \dots \quad x_k^2 \quad x_1 x_2 \quad x_1 x_3 \quad \dots \quad x_{k-1} x_k] \\ \tilde{\mathbf{F}}_{\text{gr}} = \mathbf{Z}\{(\mathbf{L}\mathbf{T})[(\mathbf{L}\mathbf{T})^T(\mathbf{L}\mathbf{T})]^{-1}\} \end{cases} \quad (34)$$

Para um problema NBI tridimensional, conforme mostrado na **Figura 12**,  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ,  $\Phi$  e  $\beta$  são definidos como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \text{VRF}_1(\mathbf{x}) \\ \text{VRF}_2(\mathbf{x}) \\ \text{VRF}_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} \text{VRF}_1^*(\mathbf{x}_1^*) & \text{VRF}_1^*(\mathbf{x}_2^*) & \text{VRF}_1^*(\mathbf{x}_3^*) \\ \text{VRF}_2^*(\mathbf{x}_1^*) & \text{VRF}_2^*(\mathbf{x}_2^*) & \text{VRF}_2^*(\mathbf{x}_3^*) \\ \text{VRF}_3^*(\mathbf{x}_1^*) & \text{VRF}_3^*(\mathbf{x}_2^*) & \text{VRF}_3^*(\mathbf{x}_3^*) \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad (35)$$

As funções  $\text{VRF}_i(\mathbf{x})$  e os escalares podem ser normalizados da seguinte forma:

$$\overline{\text{VRF}}_i(\mathbf{x}_i) = \frac{\text{VRF}_i(\mathbf{x}) - \text{VRF}_i^U(\mathbf{x})}{\text{VRF}_i^N(\mathbf{x}) - \text{VRF}_i^U(\mathbf{x})} \quad (36)$$

O que leva as seguintes expressões para  $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$  e  $\bar{\Phi}$ , respectivamente:

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \overline{\text{VRF}}_1(\mathbf{x}) \\ \overline{\text{VRF}}_2(\mathbf{x}) \\ \overline{\text{VRF}}_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \overline{\text{VRF}}_1^*(\mathbf{x}_1^*) & \overline{\text{VRF}}_1^*(\mathbf{x}_2^*) & \overline{\text{VRF}}_1^*(\mathbf{x}_3^*) \\ \overline{\text{VRF}}_2^*(\mathbf{x}_1^*) & \overline{\text{VRF}}_2^*(\mathbf{x}_2^*) & \overline{\text{VRF}}_2^*(\mathbf{x}_3^*) \\ \overline{\text{VRF}}_3^*(\mathbf{x}_1^*) & \overline{\text{VRF}}_3^*(\mathbf{x}_2^*) & \overline{\text{VRF}}_3^*(\mathbf{x}_3^*) \end{bmatrix} \quad (37)$$

Essa sequência de parametrização integra o **Passo 4** da metodologia proposta. Para executar o VRF-NBI é necessário atribuir um vetor de pesos ( $\beta$ ) para cada iteração de otimização (**Passo 5**).

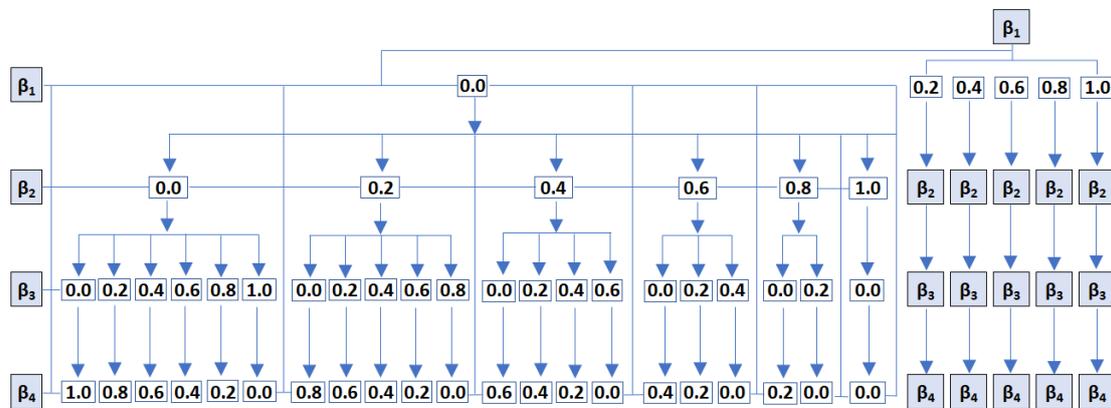
## 2.5. Planejamento de experimentos de mistura

O número de subproblemas ( $N_{Sub}$ ) resolvidos em um problema de NBI é determinado pelo número ( $n$ ) de funções objetivo consideradas na MO, onde o espaço uniforme ( $\delta$ ) é distribuído de acordo com os pesos atribuídos a elas (Das e Dennis, 1998). A determinação do número de subproblemas a serem resolvidos é dada por:

$$N_{Sub} = \binom{n + p - 1}{p} \quad (38)$$

Onde:  $n$  é o número de funções objetivo e  $p$  é o inverso do espaçamento ( $\delta$ ).

Por exemplo, em um NBI com  $p = 4$  funções objetivo e  $\delta = 0,2$ , o número de combinações convexas  $N_{Sub}$  gerado pela **Eq. (38)** podem ser representadas de acordo com a **Figura 13**, que mostra como essa diagramação funciona em relação à distribuição de pesos.



**Figura 13** - Diagrama em árvore da atribuição de pesos para  $p = 4$  e  $\delta = 0,2$  (Fonte: elaborada pelo autor)

Neste ponto, ao examinar a estrutura do MDE, tal como tratado em literatura especializada (Cornell, 2002; Khuri e Cornell, 1996; Myers e Montgomery, 2002), observa-se uma relação notável entre a **Figura 13** e o *design Simplex-lattice*  $\{q,m\}$ ' (Scheffé, 1958) ilustrado na **Figura 14**.

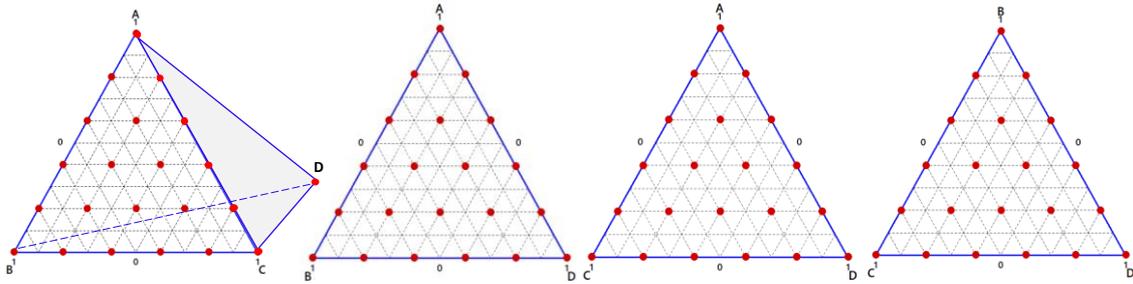


Figura 14 - Design Simplex-lattice {4, 5} (Fonte: elaborada pelo autor)

O *design Simplex-lattice* é predominante para problemas de mistura. Ele consiste em  $p$  componentes e uma ordem que apresenta  $m+1$ , proporções uniformemente espaçadas de zero a um,  $w_i = [0, 1/m, 2/m, 3/m, \dots, (m-1)/m, 1]$ , e todas as misturas possíveis para essas proporções são utilizadas (Cornell, 2002; Montgomery, 2017; Scheffé, 1958). De acordo com Cornell (2002), o número de experimentos em um *Simplex-lattice* é dado por:

$$N_{\text{iterações}} = \frac{(q + m - 1)}{m! (q - 1)!} \quad (39)$$

Onde:  $N_{\text{iterações}}$  é o número de experimentos,  $q$  é o número de componentes e  $m$  é o grau do polinômio canônico que é suportado por  $N$  experimentos.

Comparar o número de subproblemas dado pela NBI (Eq. (38)) com o número de experimentos fornecido pelo *Simplex-lattice* (Eq. (39)) revela uma equivalência (Cornell, 2002; Khuri e Cornell, 1996; Myers e Montgomery, 2002), que é de grande importância neste desenvolvimento. É evidente que  $q = n$ ,  $m = p$  e  $m(1/\delta)$ , onde representa o número de funções objetivo,  $\delta$  é o espalhamento adotado entre dois pesos sucessivos e  $m$  é o grau do polinômio canônico de Scheffé que pode ser ajustado com o MDE disponível. O valor assumido por  $m$  é equivalente ao inverso do tamanho do peso desejado em cada iteração. Resumindo, a quantidade de subproblemas indicada no NBI é equivalente ao número de experimentos em um *design Simplex-lattice* e leva a quantidade de subproblemas do NBI.

A adoção de *design Simplex-lattice* apresenta várias vantagens, principalmente para a fase de P-O de MOP, conforme listado a seguir:

- Consiste em uma grade bem condicionada de sequências iterativas que podem ser inclusive randomizadas;
- Permite entender como os pesos influenciam o comportamento dos resultados Pareto-ótimos e suas respectivas métricas de desempenho MCDM, incluindo direções de melhoria;

- Fornece uma análise de sensibilidade para avaliar o desempenho do algoritmo e a qualidade inerente das respectivas soluções ótimas;
- Disponibiliza uma estratégia consistente para modelar métricas de desempenho do algoritmo de otimização, criando funções confiáveis que representam a relação entre pesos e a proximidade de uma solução ideal;
- Permite uma análise estatística robusta dos modelos de desempenho, principalmente se as funções objetivo originais forem consideradas estocásticas (como resultado do uso de DOE);
- Proporciona a possibilidade de comparar e otimizar diferentes tipos de métricas de desempenho para resultados Pareto-ótimos;
- Disponibiliza o *trade-off* entre várias métricas de desempenho diferentes;
- Oferece um método estatístico robusto para testar se soluções Pareto-ótimas sucessivas são significativamente diferentes ou não (principalmente quando as funções objetivas têm natureza estocástica, como geralmente observado na RSM);
- Estabelece uma forma eficaz de simular e prever as métricas de desempenho para combinações convexas de pesos que não foram contempladas pela grade original;
- Cria a possibilidade de automatizar a fase de P-O;
- Permite a identificação automática da melhor solução Pareto-ótima de acordo com qualquer preferência manifestada durante o processo de tomada de decisão;
- Disponibiliza diferentes grades de distribuição de pesos, como o centroide do *simplex*, o *lattice* do *simplex* ou os vértices extremos;
- Permite a exploração de regiões específicas do espaço de soluções do Simplex ao aplicar técnicas como *designs* ótimos de MDE;
- Controla o número de subproblemas de MOP por meio das propriedades estatísticas do design de MDE;
- Evita as desvantagens associadas à MOP por tentativa e erro.

A **Figura 15** resume os principais passos do método VRF-NBI assistido por MDE. Na sequência, o **Algoritmo 2**, **Algoritmo 3** e **Algoritmo 4** traz a análise de fatores com múltiplas respostas e a estimativa com o OLS para a modelagem preditiva e a implementação do NBI.

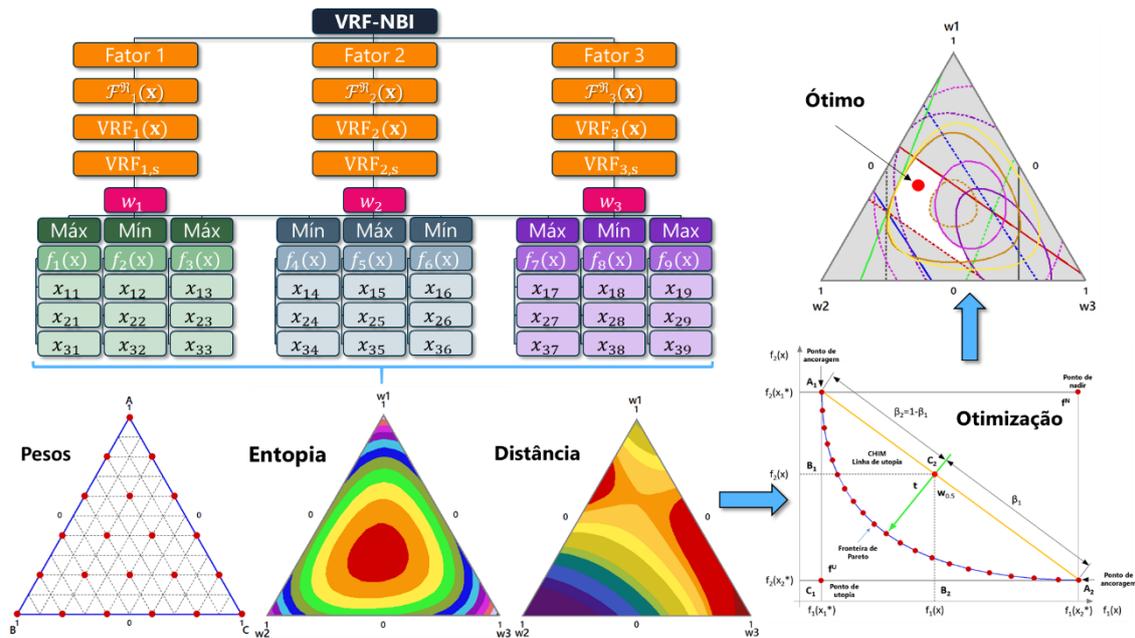


Figura 15 - Método VRF-NBI assistido pela estratégia MDE (Fonte: elaborada pelo autor)

### Algoritmo 2 - Análise de fatores aprimorada para múltiplas respostas

Início do Algoritmo 2

*Input:* Dataset (**D**) com variáveis independentes ( $x$ ), variáveis dependentes ( $Y$ ) e observações ( $n$ )

Passo 1: Padronize o conjunto de dados (**D**) para obter **D<sub>std</sub>**

Passo 2: Calcule a matriz de covariância (**C**) a partir de **D<sub>std</sub>**

Passo 3: Realize a decomposição em autovalores em **C** para obter autovalores (**E**) e autovetores (**V**)

Passo 4: Extraia as cargas fatoriais iniciais (**L**) de **V** com base nos  $k$  maiores **E**, onde  $k < m$

Passo 5: Para cada fator não rotacionado  $f$  in **L**:

- Aplique a rotação Varimax a  $f$  para maximizar a variância das cargas
- Obtenha o fator rotacionado ( $f_r$ ) e adicionar a **F<sub>R</sub>**

Passo 6: Calcule a variância cumulativa contribuída por **F<sub>R</sub>**

Passo 7: Interprete os fatores em **F<sub>R</sub>** no contexto das variáveis

*Output:* Fatores rotacionados (**F<sub>r</sub>**) que contribuem para a variância em **D**

Fim do Algoritmo 2

---

**Algoritmo 3** - Estimativa de mínimos quadrados ordinários para modelagem preditiva

---

Início do Algoritmo 3

*Input:* Variáveis independentes ( $x$ ), variáveis dependentes ( $Y$ ) do conjunto de dados ( $\mathbf{D}$ )

Passo 1: Construa a matriz de *design* ( $\mathbf{X}_D$ ) adicionando uma coluna de “uns” a  $x$  para o intercepto

Passo 2: Calcule a transposta ( $\mathbf{X}^T$ ) de  $\mathbf{X}_D$

Passo 3: Calcule o produto ( $\mathbf{X}_P$ ) de  $\mathbf{X}^T$  e  $\mathbf{X}_D$

Passo 4: Calcule a inversa ( $\mathbf{X}_{inv}$ ) de  $\mathbf{X}_P$

Passo 5: Calcule o produto ( $\mathbf{Y}_P$ ) de  $\mathbf{X}^T$  e  $Y$

Passo 6: Obtenha os coeficientes  $\beta$  multiplicando  $\mathbf{X}_{inv}$  por  $\mathbf{Y}_P$

Passo 7: Avalie o ajuste do modelo usando  $\mathbf{B}$  e calcule as métricas como R-quadrado

*Output:* Vetor de coeficientes ( $\mathbf{B}$ ) representando a relação entre  $x$  e  $Y$

Fim do Algoritmo 3

---

---

**Algoritmo 4** - Interseção normal à fronteira para otimização multiobjetivo

---

Início do Algoritmo 4

*Input:* Conjunto de funções objetivo ( $\mathbf{O}$ ), região viável ( $R$ ) definida por restrições ( $C$ )

Passo 1: Inicialize o conjunto de soluções como vazio:  $\mathbf{S} = \{\}$

Passo 2: Construa a matriz *payoff* ( $\mathbf{P}$ ) usando  $\mathbf{O}$  avaliado sobre  $R$

Passo 3: Defina o *design* de mistura ( $\mathbf{M}$ ) para armazenar combinações de pesos para os objetivos em  $\mathbf{O}$

Passo 4: Para cada combinação de peso  $m$  em  $\mathbf{M}$

- a. Configure o problema de otimização NBI com  $\mathbf{P}$  e  $m$
- b. Resolva o problema de otimização para encontrar a solução ( $s$ )
- c. Adicione  $s$  a  $\mathbf{S}$  após iterar por todas as combinações  $\mathbf{M}$

*Output:* Conjunto  $\mathbf{S}$  de soluções Pareto-ótimas

Fim do Algoritmo 4

---

O *Simplex-lattice* permite entender como os pesos influenciam os resultados Pareto-ótimos, possibilita a criação de grades espaçadas, facilita análises robustas de modelos, fornece a capacidade de avaliar compensações entre as métricas utilizadas, permite transformações autônomas de P-O, possibilita várias explorações de regiões ótimas e viáveis, e oferece inúmeras possibilidades para os tomadores de decisão.

## 2.6. Métricas de desempenho

A GD, baseada na distância de Mahalanobis (MD) (Johnson e Wichern, 1982), é útil para buscar a solução Pareto-ótima em relação ao vetor utópico. Quanto mais próximo dos melhores resultados da MO (Khuri e Conlon, 1981; Khuri e Cornell, 1996), melhor. A GD é ajustada em relação à MD substituindo o vetor  $\mathbf{x}$  por um vetor de múltiplas

superfícies de resposta, juntamente com o uso do vetor médio ( $\boldsymbol{\mu}$ ) e do vetor alvo, ou seja, a utopia ( $\boldsymbol{\phi}$ ), assim como a matriz de variância-covariância ( $\boldsymbol{\Sigma}$ ) de  $\mathbf{x}$  e a matriz de variância-covariância das respostas previstas ( $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ ). A GD é representada por:

$$GD = \left[ \frac{(\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\phi})^T \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\phi})}{\mathbf{z}^T(\mathbf{x}) (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{z}^T(\mathbf{x})} \right]^{1/2} \quad (40)$$

Onde:  $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$  representa o vetor de múltiplas respostas, denota o *design* experimental (por exemplo, um CCD),  $\mathbf{z}(\mathbf{x})$  é o vetor das variáveis explicativas e  $\mathbf{X}$  é a matriz de *design* experimental.

$\mathbf{z}^T(\mathbf{x})$  é definido conforme na Eq. (41). A matriz de variância-covariância das respostas previstas é calculada por:

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{\mathbf{Y}^T [\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T] \mathbf{Y}}{(n - p)} \quad (41)$$

Onde:  $\mathbf{Y}$  é o vetor de múltiplas respostas,  $\mathbf{X}$  é o *design* experimental (CCD, por exemplo),  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade de ordem  $n$ ,  $n$  é o número de experimentos e  $p$  é o número de coeficientes dos modelos preditos para cada superfície de resposta.

No entanto, como a GD é uma métrica global, soluções com pesos zero para as funções objetivas de pior desempenho surgirão quando a GD for minimizada. Obviamente, essa não é uma escolha adequada, pois não inclui algumas das funções objetivas de interesse. Para evitar essa falha, recomenda-se adicionar uma função capaz de evitar pesos nulos para as múltiplas funções objetivas, movendo o vetor de pesos para o interior da região do simplex, o que pode ser facilmente alcançado utilizando o S.

Mais uma vez, o tomador de decisão enfrenta um novo dilema de *trade-off* que pode ser superado utilizando o VRF-NBI. O S (Shannon, 1948) é um critério para avaliar a qualidade das soluções Pareto-ótimas por meio da máxima diversificação de pesos. Essa métrica busca identificar a diversidades das soluções encontradas, examinando se uma maior diversificação permite uma redução da lacuna dentro dos intervalos de confiança mais estreitos ( $1 - \alpha$ ). Ela avalia soluções Pareto-ótimas diversificando o vetor de peso ( $\mathbf{w}$ ) e contribui para redução da variância de superfícies estimadas. S pode ser expresso como:

$$S = - \sum_{i=1}^p w_i \ln(w_i) \quad (42)$$

Onde:  $w_i^*$  são os pesos atribuídos a cada uma das funções objetivo.

## 2.7. Otimização a posteriori

O mesmo *design* de mistura empregado para gerar combinações convexas de pesos durante o NBI também pode ser utilizado para modelar características de desempenho do conjunto Pareto-ótimo obtido considerando superfícies de resposta de alta ordem, como os polinômios canônicos de mistura de Scheffé e conforme detalhado na **Subseção 2.5**.

Prova: Considere que a variância de uma combinação linear convexa de múltiplas funções objetivo:

$$\begin{aligned}
 \text{Var} \left[ \sum_{i=1}^n w_i f_i(\mathbf{x}) \right] &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial w_i f_i(\mathbf{x})}{\partial f_i(\mathbf{x})} \right]^2 \sigma_{f_i}^2 + 2 \sum_i \sum_j \left[ \frac{\partial w_i f_i(\mathbf{x})}{\partial f_i(\mathbf{x})} \right] \left[ \frac{\partial w_j f_j(\mathbf{x})}{\partial f_j(\mathbf{x})} \right] \sigma_{w_i w_j} \\
 &= \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_{f_i(\mathbf{x})}^2 + 2 \sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_{w_i w_j} \\
 &= \sum_{i=1}^n w_i^2 \text{Var}[f_i(\mathbf{x})] + 2 \sum_i \sum_{i \neq j} w_i w_j \sigma_{w_i w_j}
 \end{aligned} \tag{43}$$

Uma vez que a correlação entre qualquer par de pesos ( $w_i, w_j$ ) é sempre negativa, quanto mais diversificado for um par de pesos ( $w_i, w_j$ ), mais negativo será o valor de  $2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1+1}^n w_i w_j \sigma_{ij}$ . Considerando que a variância da superfície de resposta estimada é  $\sigma_\varepsilon^2 \mathbf{z}^T(\mathbf{x})(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \mathbf{z}(\mathbf{x})$ , tem-se:

$$\text{Var} \left[ \sum_{i=1}^n w_i f_i(\mathbf{x}) \right] = \sum_{i=1}^n w_i^2 [\sigma_\varepsilon^2 \mathbf{z}^T(\mathbf{x})(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \mathbf{z}(\mathbf{x})] + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1+1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \tag{44}$$

Diferentemente da primeira fase, na fase de P-O, o VRF-NBI pode ser implementado utilizando  $F_p^R(\mathbf{w})$  como polinômios de Scheffé não lineares quárticos completos. Uma análise estatística cuidadosa anterior, utilizando eliminação retroativa, deve ser realizada para identificar o melhor subconjunto de coeficientes para cada superfície de resposta de mistura. Para uma mistura com  $p$  componentes (três funções objetivo, por exemplo), o modelo quártico completo para  $F_p^R(\mathbf{w})$  pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
F_p^R(\mathbf{w}) = & \sum_{1 \leq i \leq q} \beta_i w_i + \sum_{1 \leq i \leq j \leq q} \beta_{ij} w_i w_j + \sum_{1 \leq i \leq j \leq q} \gamma_{ij} w_i w_j (w_i - w_j) + \\
& + \sum_{1 \leq i \leq j \leq q} \delta_{ij} w_i w_j (w_i - w_j)^2 + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq q} \beta_{iijk} w_i^2 w_j w_k + \\
& + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq q} \beta_{ijjk} w_i w_j^2 w_k + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq q} \beta_{ijkk} w_i w_j w_k^2 + \\
& + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq l \leq q} \beta_{ijkl} w_i w_j w_k w_l
\end{aligned} \tag{45}$$

Um método VRF-NBI bidimensional é então organizado de acordo com o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{w} \in \Theta} F_{NBI}(\mathbf{w}) &= \left[ \frac{VRF_{(\rho)}(\mathbf{w}) - VRF_{(\rho)}^U}{VRF_{(\rho)}^N - VRF_{(\rho)}^U} \right] \\
s. t.: \bar{g}_1(\mathbf{w}) &= \left[ \frac{VRF_{(\rho)}(\mathbf{w}) - VRF_{(\rho)}^U}{VRF_{(\rho)}^N - VRF_{(\rho)}^U} \right] - \left[ \frac{VRF_{(S)}(\mathbf{w}) - VRF_{(S)}^U}{VRF_{(S)}^N - VRF_{(S)}^U} \right] + 2\beta_i - 1 = 0 \\
g_2(\mathbf{w}) &= \left\{ \sum_{i=1}^q \left( \frac{w_i - w_{0i}}{\delta_i} \right)^2 \leq 1 \mid \delta_i = w_{i(maior)} - w_{i(menor)} \right\} \\
g_3(\mathbf{w}) &= \sum_{1 \leq i \leq q} w_i = 1 \mid (0 \leq w_{i(NBI)} \leq 1) \quad i(NBI) = 1, 2, \dots, NBI_{SUB} \quad p = 1, 2, \dots, r
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
VRF_p(\mathbf{w}) = & \sum_{1 \leq i \leq q} \beta_i w_i + \sum_{1 \leq i \leq j \leq q} \beta_{ij} w_i w_j + \sum_{1 \leq i \leq j \leq q} \gamma_{ij} w_i w_j (w_i - w_j) \\
& + \sum_{1 \leq i \leq j \leq q} \delta_{ij} (w_i w_j)^2 + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq q} \beta_{iijk} w_i^2 w_j w_k \\
& + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq q} \beta_{ijjk} w_i w_j^2 w_k + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq q} \beta_{ijkk} w_i w_j w_k^2 \\
& + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq l \leq q} \beta_{ijkl} w_i w_j w_k w_l \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, q
\end{aligned}$$

Na **Eq. (53)**,  $g_2(\mathbf{w})$  é uma restrição elíptica que pertence ao domínio *simplex* (a região dentro do *design Simplex-lattice*), com  $w_{0i}$  sendo o centroide de uma hiperelipsóide,  $\delta_i$  é um parâmetro definido como limites superior e inferior para cada peso ( $w_i$ ). De acordo com Cornell (2002), esse tipo de restrição garante que soluções de vértice nunca serão selecionadas como ótimas, evitando a concentração de pesos em funções objetivas individuais e forçando soluções de compromisso mais adequadas. Completando o sistema, os valores de utopia e nadir de  $VRF_p$  para  $\mathbf{p}(\mathbf{w})$  e  $\mathbf{S}(\mathbf{w})$  são obtidos por meio de

otimização individual, respectivamente. Esses procedimentos são resumidos no **Algoritmo 5**.

---

**Algoritmo 5** - Otimização a posteriori para refinamento de soluções

---

Início do Algoritmo 5

*Input*: Conjunto Pareto-ótimo (**S**), métricas de desempenho (**M**)

Passo 1: Inicialize o conjunto refinado de soluções (**R**) como vazio:  $\mathbf{R} = \{\}$

Passo 2: Para cada solução  $s$  em **S**:

- a. Calcule **M** para **S** (No estudo, distância generalizada e entropia de Shannon)
- b. Armazene métricas em  $\mathbf{M}_s$

Passo 3: Otimize o *trade-off* entre as soluções em **S** com base em  $\mathbf{M}_s$ , com o uso do VRF-NBI

Passo 4: Selecione as melhores soluções de **S** classificado para formar **R** com base no tomador de decisão

*Output*: **R** a partir de **S**

Fim do Algoritmo 5

---

Assim, é possível realizar não apenas a otimização a priori, como normalmente é feita, mas também a P-O, permitindo o refinamento do conjunto de soluções e a escolha da alternativa mais adequada entre elas.

## 2.8. Elipse de confiança

A elipse de confiança é uma representação gráfica que indica a incerteza em torno de uma estimativa de parâmetros em análises estatísticas multivariadas. Ela delimita a região onde um determinado percentual da distribuição de probabilidade está contido, e sua área varia de acordo com o nível de confiança selecionado para a análise.

O uso da elipse de confiança visa proporcionar uma representação visual das relações entre duas variáveis de um conjunto de dados, permitindo a realização de análises comparativas entre grupos ou o tratamento de dados. Além disso, essa ferramenta facilita a visualização e interpretação de padrões entre os grupos de dados. A área da elipse depende não apenas do nível de confiança, mas também da quantidade de dados disponíveis para a análise (Johnson e Wichern, 2007). A relação entre as variâncias e covariâncias de duas variáveis ( $x_1$  e  $x_2$ ) para a construção da elipse é descrita a seguir:

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{1 - \rho_{12}^2} \left[ \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho_{12} \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \quad (47)$$

A matriz de variância-covariância ( $\boldsymbol{\Sigma}$ ) fornece uma medida da variabilidade e das relações entre as variáveis em um conjunto de dados, sendo fundamental para a construção da elipse de confiança. Esta matriz é quadrada e simétrica, contendo as

variâncias ( $\sigma_i^2$ ) das variáveis individuais em sua diagonal principal, enquanto os elementos fora da diagonal representam as covariâncias ( $\sigma_{ij}$ ) entre os pares de variáveis.

A matriz oferece informações sobre as variáveis e as relações presentes no conjunto de dados multivariados. O sinal dos termos de covariância indica a direção da relação entre as variáveis: um valor positivo sugere uma relação direta, onde, à medida que uma variável aumenta, a outra também tende a aumentar. Por outro lado, um valor negativo indica uma relação inversa entre as duas variáveis ( $x_1$  e  $x_2$ ). Ela é representada abaixo:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Os graus de liberdade são descritos por Montgomery e Runger (2010) e são calculados com base no número de observações do modelo ( $p$ ) e nas variáveis ( $a$ ) presentes no conjunto de dados.

$$p = n - a \quad (49)$$

A força e a direção da relação linear entre duas variáveis quantitativas são expressas pelo coeficiente de correlação de Pearson ( $\rho$ ), que varia em um intervalo fechado de -1 a +1. Quanto mais próximo de +1 estiver esse valor, maior será a correlação positiva entre as variáveis; da mesma forma, quanto mais próximo de -1, maior será a correlação negativa.

A correlação pode ser perfeita quando as variâncias das variáveis são iguais, resultando em uma correlação de +1 ou -1, com uma rotação máxima de 45° entre os eixos. Em contraste, uma correlação nula corresponde a uma rotação mínima de 0°.

Adicionalmente, a correlação pode ser interpretada como a covariância padronizada entre duas variáveis, o que significa que a covariância é dividida pelo produto de seus desvios padrão. Essa relação pode ser expressa da seguinte forma:

$$\rho = \frac{\sigma_{x_1 x_2}}{\sqrt{\sigma_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2}} \quad (50)$$

Para a diagonalização da matriz, é necessário utilizar um ângulo de rotação ( $\theta$ ), que representa sua orientação em um espaço bidimensional. Esse ângulo auxilia na compreensão das relações entre as variáveis. Através da aplicação de conceitos trigonométricos, é possível determinar o ângulo de rotação, denotado por  $\theta$ .

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{2\sigma_{x_1 x_2}}{\sigma_{x_1}^2 - \sigma_{x_2}^2} \right) \quad (51)$$

A matriz de rotação (**P**) tem como objetivo transformar vetores em um espaço euclidiano em torno da origem do sistema de coordenadas. Essa matriz é simétrica,

quadrada e ortogonal, e é utilizada para realizar transformações geométricas de rotação no espaço. Os autovalores da matriz são derivados de sua rotação. A matriz é rotacionada em um ângulo  $\theta$  no sentido anti-horário é dada por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (52)$$

Os autovetores e autovalores são informações de grande importância nas análises estatísticas multivariadas, embora nem todas as matrizes possuam essas características. A decomposição espectral de uma matriz de covariância ou correlação resulta em três matrizes: uma matriz de autovetores, uma matriz diagonal de autovalores e a matriz transposta dos autovetores. Os autovetores representam as direções e sentidos em um espaço vetorial, enquanto os autovalores indicam a "intensidade" dessas direções.

Para classificar uma matriz, utilizam-se o determinante e os autovalores, conforme descrito abaixo:

- Matriz positiva definida: Determinante positivo ( $|\mathbf{A}| > 0$ ) e os autovalores também são positivos ( $\lambda_j > 0$ );
- Matriz positiva semidefinida: Determinante positivo ( $|\mathbf{A}| > 0$ ) e os autovalores são maiores ou iguais a 0 ( $\lambda_j \geq 0$ );
- Matriz negativa definida: Determinante negativo ( $|\mathbf{A}| < 0$ ) e os autovalores também são negativos ( $\lambda_j < 0$ );
- Matriz negativa semidefinida: Determinante negativo ( $|\mathbf{A}| < 0$ ) e os autovalores são menores ou iguais a 0 ( $\lambda_j \leq 0$ );
- Matriz indefinida: Autovalores ( $\lambda_j$ ) possuem sinais contrários.

Os autovalores ( $\lambda_j$ ) indicam quanto um autovetor é escalado durante a transformação. O primeiro e o segundo autovalor podem ser representados de forma algébrica nas **Eq. (53)** e **Eq. (54)**, enquanto a representação matricial dos autovalores ( $\mathbf{\Lambda}$ ) é dada pela **Eq. (55)**.

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]^2 - 4(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)} \right] \quad (53)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]^2 - 4(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)} \right] \quad (54)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{P} \quad (55)$$

O vetor de médias ( $\boldsymbol{\mu}$ ) contém as médias de cada uma das variáveis do conjunto e auxilia na descrição da localização central dos dados, ou seja, do seu centroide em um espaço multivariado. Essa informação é útil para a construção da elipse de confiança. Vale ressaltar que a forma da elipse não é alterada, e o vetor de médias é dado por:

$$\boldsymbol{\mu}^T = [\mu_{x_1} \quad \mu_{x_2}] \quad (56)$$

A decomposição de Cholesky é utilizada para decompor uma matriz simétrica positiva definida em um produto matricial, sendo uma das matrizes triangular superior e a outra a transposta conjugada dessa matriz. Esse procedimento auxilia na simplificação de equações lineares e na avaliação de propriedades da matriz. A matriz transposta de Cholesky ( $\mathbf{L}^T$ ) é uma matriz triangular superior resultante da decomposição de uma matriz simétrica e é dada por:

$$\mathbf{L}^T = \mathbf{X}\boldsymbol{\mu}^{-1}\mathbf{Z}^{-1} \quad (57)$$

O qui-quadrado ( $\chi^2$ ) é utilizado para testar hipóteses sobre distribuições de frequências, auxiliando na avaliação da concordância entre os modelos teóricos e os dados observados. Ele estabelece uma relação entre o grau de liberdade e o nível de confiança por meio do inverso da distribuição  $\chi^2$ . O valor do qui-quadrado é obtido pela soma das variáveis normais padronizadas elevadas ao quadrado, conforme descrito a seguir:

$$\sqrt{\chi^2} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1/2}[\boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})] \quad (58)$$

O grau de confiança ( $\alpha$ ) refere-se à probabilidade de que um parâmetro estimado esteja contido dentro da elipse de confiança. Em outras palavras, ele representa a certeza com que se pode afirmar que um determinado valor, baseado em uma amostra, cai dentro da região delimitada pela elipse. À medida que a confiança desejada aumenta, é necessário um tamanho de amostra maior.

A matriz de correlação residual ( $\boldsymbol{\Psi}$ ) desempenha um papel fundamental na avaliação da adequação do modelo e na construção de representações gráficas. Ela auxilia no cálculo dos semieixos da elipse de confiança e é composta pela combinação do valor qui-quadrado e da raiz quadrada da matriz de autovalores, conforme descrito na sequência.

$$\boldsymbol{\Psi} = \sqrt{\chi^2}\boldsymbol{\Lambda} \quad (59)$$

Por fim, consideram-se os raios de uma elipse, que representam as distâncias do centro da elipse até seus pontos mais distantes ao longo dos eixos, sendo associados à diagonal principal da matriz. Os raios interno e externo são dados por:

$$r_i = (\chi^2\boldsymbol{\Lambda})_{11} \quad (60)$$

$$r_e = (\chi^2\boldsymbol{\Lambda})_{22} \quad (61)$$

A construção da elipse de confiança pode ser descrita pelo **Algoritmo 6**.

---

**Algoritmo 6** - Construção da *plotagem* da elipse de confiança

---

Início do Algoritmo 6

*Input:* Dataset D com duas colunas de variáveis

Passo 1: Cálculo da matriz de variância-covariância ( $\Sigma$ )

Passo 2: Cálculo do grau de liberdade ( $p$ )

Passo 3: Cálculo da correlação de Pearson ( $\rho$ )

Passo 4: Cálculo do ângulo de rotação ( $\theta$ )

Passo 5: Cálculo da matriz de rotação ( $\mathbf{P}$ )

Passo 6: Cálculo da matriz de autovalores ( $\mathbf{\Lambda}$ )

Passo 7: Cálculo da matriz de Cholesky transposta ( $\mathbf{L}^T$ )

Passo 8: Cálculo do vetor de medias ( $\boldsymbol{\mu}^T$ )

Passo 9: Cálculo do inverso da distribuição do qui-quadrado ( $\chi^2$ )

Passo 11: Cálculo do raio interno ( $r_i$ ) e externo ( $r_e$ )

Passo 10: Cálculo dos pontos do eixo primário ( $PC_1$ ) e secundário ( $PC_2$ )

*Output:* Plot da elipse de confiança

Fim do Algoritmo 6

---

## 2.9. Aprendizado de máquina

Os modelos utilizados são *Decision Tree* (DT), *Random Forest* (RF), *Extreme Gradient Boosting* (XGB) e *Support Vector Regression* (SVR). A descrição destes modelos pode ser apresentada da seguinte forma:

- DT: Este modelo realiza previsões com base em decisões tomadas a partir de condições simples, sendo visualizado graficamente como uma árvore, onde cada nó representa uma decisão e cada ramo uma possível consequência;
- RF: Trata-se de uma técnica de aprendizado ensemble que combina múltiplas árvores de decisão. Essa abordagem não apenas melhora a precisão das previsões, mas também ajuda a mitigar o problema de *overfitting*, onde um modelo se ajusta excessivamente aos dados de treinamento, resultando em um desempenho inferior em dados não vistos;
- XGB: É uma implementação avançada da técnica de *boosting*, que aprimora o desempenho preditivo ao construir uma sequência de modelos fracos (geralmente árvores de decisão) que são combinados para formar um modelo robusto. Essa metodologia foca na minimização de erros através de ajustes iterativos;
- SVR: Este método utiliza princípios de margem e suportes para prever valores contínuos. Ele busca encontrar um hiperplano que melhor separe os dados, maximizando a margem entre os pontos de dados e o hiperplano.

As métricas de avaliação usadas para medir a performance dos modelos são as seguintes: Coeficiente de determinação ( $R^2$ ), *Mean Absolute Error* (MAE), MSE, *Root Mean Squared Error* (RMSE).

- $R^2$ : Mede a proporção da variância dos dados de saída explicada pelas variáveis de entrada, sendo fundamental para avaliar o ajuste do modelo. O valor de  $R^2$  varia entre 0 e 1, podendo ser negativo quando o modelo é pior do que uma média simples. Um valor de  $R^2$  igual a 1 indica que o modelo explica totalmente a variância, enquanto  $R^2$  igual a 0 indica que o modelo não explica nada além da média dos dados.
- MAE: Métrica mede a média das diferenças absolutas entre as previsões e os valores reais, fornecendo uma visão clara do erro médio do modelo;
- MSE: Calcula a média dos erros ao quadrado, dando maior peso aos erros maiores. Essa métrica é útil para identificar modelos que tendem a cometer erros significativos;
- RMSE: É a raiz quadrada do MSE, o que permite que o erro seja expresso na mesma escala que os dados originais, facilitando assim a interpretação dos resultados;

$R^2$  representa a fração da variância dos dados que é explicada pelo modelo e é calculado por:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{(y_i - \bar{y}_i)^2} \quad (62)$$

O MAE mede o erro absoluto entre os valores reais e previstos, sendo dado por:

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| \quad (63)$$

Onde:  $y_i$  são os valores observados,  $\bar{y}_i$  são os valores preditos pelo modelo,  $\hat{y}_i$  é a média dos valores observados e  $n$  representa o número de observações.

O MSE mede o erro quadrático médio entre os valores previstos e reais. Ele é dado por:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (64)$$

O RMSE é a raiz quadrada do MSE, trazendo o erro para a mesma escala de unidade dos dados, o que facilita a interpretação. Ele é calculado como:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\text{MSE}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (65)$$

Essas métricas são úteis para avaliar a precisão e adequação dos modelos, cada uma trazendo uma perspectiva diferente sobre os erros entre valores reais e previstos.

Além dessas métricas, a *Feature Importance* (FI) permite avaliar e quantificar a contribuição de cada variável de entrada no desempenho do modelo. Para isso, utilizam-se métodos como a impureza de Gini que avalia a importância das variáveis em modelos de árvore de decisão, medindo a redução de impureza nas divisões de nós. A importância da variável  $x_j$  é dada por:

$$\text{Gini}_{x_j} = \sum_{t \in T_j} \Delta \text{Gini}(t) \quad (66)$$

Onde:  $T_j$  é o conjunto de nós onde a variável  $x_j$  é usada para a divisão, e  $\Delta \text{Gini}(t)$  é a redução de Gini no nó  $t$ .

Outro método muito comum é o *Gain*, ele mede o aumento de precisão ou a redução de erro nas divisões que utilizam  $x_j$ , dado por:

$$\text{Gain}_{x_j} = \frac{\sum_{i \in \text{divisões}_{x_j}} \text{Gain}(i)}{\text{Total de divisões}} \quad (67)$$

Esses métodos de FI auxiliaram na seleção e no ajuste de variáveis, permitindo a avaliação de quais variáveis de entrada tem o maior impacto nas variáveis de saída.

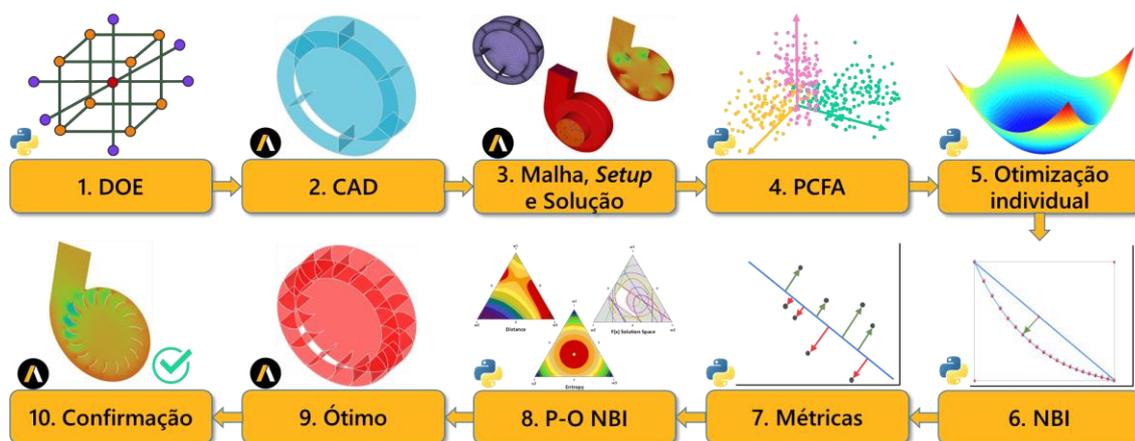
### 3. MÉTODO PROPOSTO

#### 3.1. Considerações iniciais

O método integra diversas técnicas para realizar a MO de um ventilador centrífugo industrial, com o objetivo de encontrar o *design* ideal. O processo começa pela otimização individual e avança com a substituição das variáveis originais por fatores rotacionados. Em seguida, é aplicado o método NBI, complementado por uma otimização a posteriori com o uso de métricas de desempenho. Por fim, os resultados obtidos são comparados com outros métodos existentes e validados por uma nova simulação computacional utilizando CFD.

#### 3.2. Método

A **Figura 16** fornece uma visão geral das metodologias utilizadas e dos principais passos para a aplicação do modelo, detalhando as ações realizadas em cada etapa, incluindo os *softwares* e ferramentas empregados.



**Figura 16** - Esquema detalhado da metodologia (Fonte: elaborada pelo autor)

Inicialmente, as variáveis de entrada e saída (ou resposta) da experimentação são definidas, e recomenda-se que as variáveis de controle para o início do procedimento sejam baseadas em dados de um DOE. Após definir as variáveis dependentes e independentes, o modelo é construído com a ajuda de um *software* de projeto assistido por computador (CAD), e as respostas desejadas são obtidas usando CFD. Neste estudo, foi empregado o *software* Ansys®: Workbench para configuração do projeto, SpaceClaim para *design*, Ansys Fluent para malha, configuração e solução, Discovery para análise rápida de resultados e CFD-Post para obtenção e plotagem de gráficos mais complexos.

É relevante destacar que o Ansys® inclui um módulo chamado “*Design Exploration*”, que lida com a direção da otimização, parâmetros correlacionados, Superfície de Resposta e Otimização da Superfície de Resposta. Essas funcionalidades estão conectadas por meio do Conjunto de Parâmetros. No entanto, apesar da existência desse recurso, ele não é tão explorado quanto poderia ser.

Após a obtenção dos resultados, a PCA é utilizada para determinar o número de fatores a serem extraídos (com base na variância explicada), ou seja, o tamanho da dimensionalidade do fator. Em seguida, a FA com a técnica de rotação Varimax é aplicada para obter os fatores que serão usados na MO, resultando no PCFA.

Em seguida, com a dimensionalidade reduzida, realiza-se a otimização individual das variáveis originais e fatores para obter a matriz *payoff*, a matriz *payoff* escalada e os pontos âncora, referidos como utopia e pseudo-nadir.

O passo subsequente envolve o armazenamento dos coeficientes tanto das funções originais quanto dos fatores rotacionados. Com os fatores em mãos, a distribuição de pesos é realizada usando o MDE do *Simplex-lattice*, onde o espaçamento entre variáveis é definido considerando o número de subproblemas, e a quantidade de variáveis de peso está relacionada ao número de funções objetivo avaliadas.

Subsequentemente, o NBI é realizado para otimizar os fatores, e durante essa otimização, os resultados respectivos para as variáveis originais também são armazenados, facilitando a compreensão de sua variação de acordo com a otimização de cada fator. Respostas ótimas e viáveis são verificadas nesta etapa.

Três tipos de NBI são conduzidos. No primeiro, o vetor de ponto inicial é zerado após cada iteração. No segundo, o ponto inicial anterior é mantido após cada iteração. No terceiro, o vetor de variáveis de entrada é a média dos pontos ótimos encontrados enquanto se executa o NBI com pontos zerados.

Para cada iteração, são usadas métricas para avaliar a qualidade da resposta, nomeadamente GD e S. No entanto, cada métrica tem suas vantagens e desvantagens na classificação das respostas obtidas. Portanto, a combinação delas oferece uma vantagem significativa.

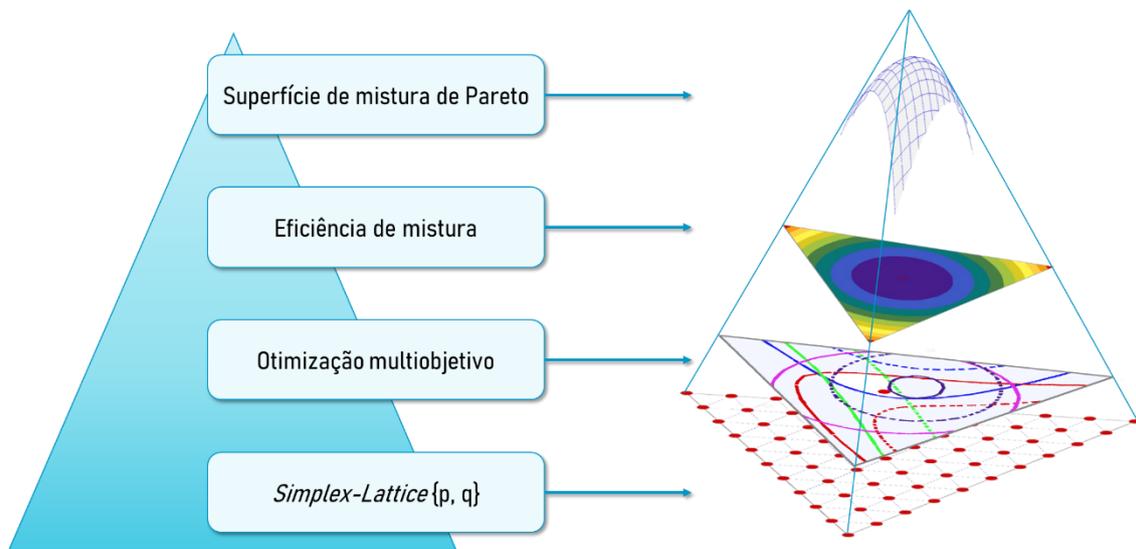
Em seguida, chega-se à fase de P-O. Nesta etapa, todas as iterações resultantes em respostas ótimas e viáveis são utilizadas para gerar novos pesos por meio do MDE, visando unir métricas e definir o peso ideal. Durante esse processo, fatores rotacionados para GD e S também são criados, passando por otimização usando NBI. É possível atribuir pesos a cada um desses fatores, ou seja, determinar quais dimensões têm maior

prioridade para a otimização. Nesta etapa, as fronteiras de Pareto são plotadas para verificar o conjunto de soluções viáveis em relação aos pesos definidos. De acordo com a prioridade de pesos escolhida, os gráficos são examinados em relação tanto às métricas GD e S quanto aos seus fatores rotacionados  $F_1GD$  e  $F_2S$ .

Nesta etapa, uma nova otimização é conduzida para identificar quais variáveis de entrada refletem o peso ideal apropriado. Subsequentemente, essas variáveis são decodificadas para a construção do modelo encontrado.

Finalmente, um novo *design* CAD e simulação CFD são realizados para verificar se os resultados obtidos com o método são confiáveis. Se os resultados anteriores estiverem corretos, dentro do intervalo de confiança, a metodologia proposta é validada para a proposta em questão.

A relação entre a eficiência da superfície de Pareto, soluções ótimas, MO e MDE está ilustrada na **Figura 17**. Cada uma das etapas foi previamente explicada em detalhes, desde o planejamento do experimento até a confirmação dos resultados ideais.



**Figura 17** - Superfície de mistura de Pareto com gráfico de contorno (Fonte: elaborada pelo autor)

Com essa abordagem, a metodologia completa é delineada, desde o planejamento do experimento até a validação dos resultados usando o método. Enfatiza-se que, ao adotar essa metodologia, os tomadores de decisão terão acesso a uma ampla gama de soluções e uma ferramenta apropriada para determinar quais produtos fabricar ou para comparar resultados entre produtos atuais e potenciais ótimos, constituindo um recurso inestimável no ambiente industrial.

Ressalta-se que foi realizada a programação tanto em Python quanto em *Virtual basic for applications* (VBA) com o objetivo de automatizar toda a metodologia de otimização proposta. O **APÊNDICE A** - Códigos utilizados apresenta os códigos utilizados, que estão disponíveis no GitHub, enquanto o **APÊNDICE B** - *Templates* em Python e VBA contém alguns *templates*, tanto para Microsoft Office Excel® (VBA) quanto para Jupyter Notebook (Python).

### 3.3. Caracterização da pesquisa

Este estudo caracteriza-se como uma pesquisa aplicada, pois busca resolver desafios práticos enfrentados por uma organização industrial (Kothari, 2004), com foco em encontrar soluções para questões reais relacionadas ao uso de ventiladores centrífugos. A abordagem adotada é quantitativa, com o objetivo de investigar variáveis mensuráveis, cujos dados podem ser tratados e interpretados através de análises estatísticas (Kothari, 2004). O método empregado é a modelagem, que consiste em representar problemas complexos por meio de modelos matemáticos, visando uma solução estruturada e baseada em técnicas específicas (Kothari, 2004). Destaca-se que tanto a simulação, utilizando os *softwares* Ansys® e Python, quanto a experimentação, com a modificação das variáveis de entrada para obter as respectivas variáveis de saída, são utilizadas neste trabalho.

## 4. APLICAÇÃO DO MÉTODO: OTIMIZAÇÃO MULTI OBJETIVO DE UM VENTILADOR CENTRÍFUGO INDUSTRIAL

Para ilustrar a utilidade e os benefícios do método, será apresentado um estudo de caso de um ventilador centrífugo responsável pela recirculação de ar em um forno industrial. Este ventilador centrífugo opera em altas temperaturas e altas velocidades.

A utilização de técnicas como CFD, ML e MO ilustra a integração dos princípios da Indústria 4.0, fundamentados em quatro pilares principais: digitalização, integração, automação e customização (Pereira *et al.*, 2024a).

A CFD facilita a digitalização do processo de *design* e análise do ventilador, fornecendo uma representação visual precisa do comportamento do fluxo de ar e de outros fatores que impactam diretamente seu desempenho em diversas condições operacionais. Essa abordagem permite integrar dados e informações relacionadas ao produto, resultando em uma tomada de decisão mais informada em todas as etapas do processo.

Por sua vez, o ML possibilita a extração de *insights* valiosos a partir dos dados gerados pela CFD. Com isso, tarefas complexas, como a previsão de desempenho, custos e outras variáveis significativas, podem ser automatizadas, levando em consideração diferentes configurações e condições de trabalho. Além disso, o ML permite a personalização do processo, adaptando o *design* do ventilador às necessidades específicas de cada aplicação ou cliente.

A MO desempenha um papel crucial na automação da configuração do ventilador, explorando de forma eficiente o espaço de soluções em relação às respostas possíveis. Com a aplicação de algoritmos de otimização, é possível encontrar soluções ótimas em um tempo reduzido, facilitando a tomada de decisões.

Dessa forma, a aplicação integrada dessas técnicas reflete um compromisso com os princípios da Indústria 4.0, promovendo a digitalização, integração, automação e customização dos processos industriais, com o intuito de atender às demandas de um mercado cada vez mais dinâmico e competitivo.

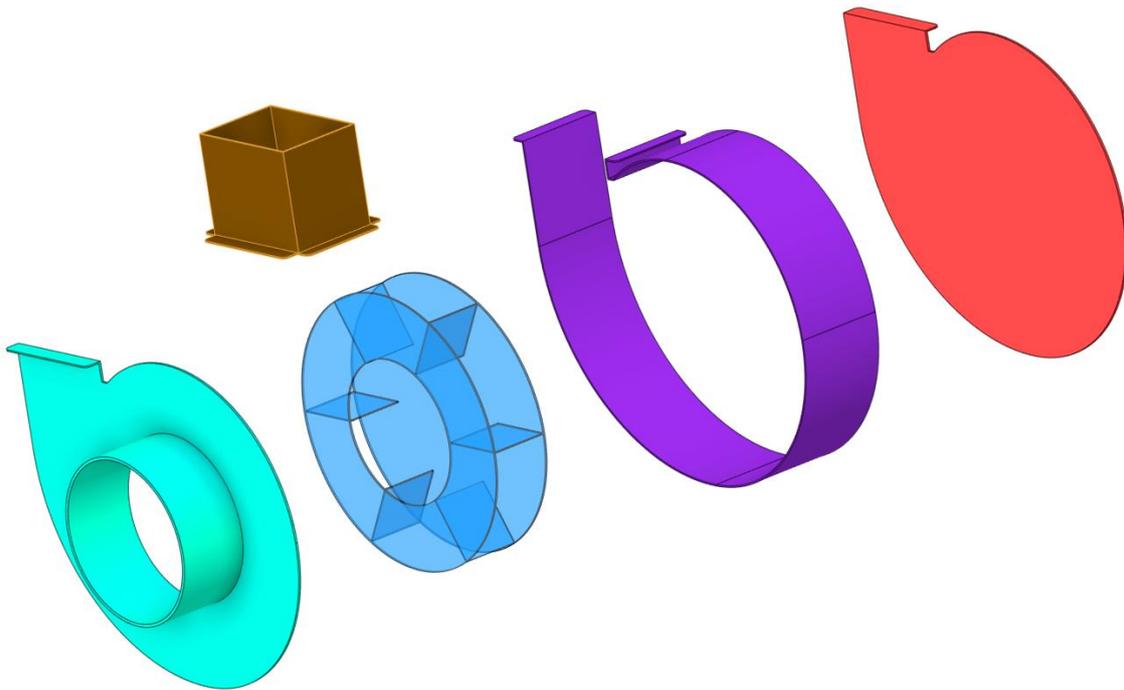
O ventilador centrífugo é utilizado para mover fluidos, neste caso, o ar, em sistemas de ventilação, climatização e processos industriais, como o abordado no estudo de caso. Sua operação baseia-se no princípio da força centrífuga, onde o ar é puxado para o centro do ventilador e, em seguida, expelido para a saída (externamente ao ventilador) por meio do impulso gerado pelas pás do rotor. A configuração do ventilador centrífugo

permite que ele seja eficiente na geração de pressões elevadas e no deslocamento de grandes volumes de ar.

Para comparar a eficácia dos resultados obtidos, o ventilador atual utilizado no forno será usado como referência. Variações no número e na espessura das pás foram previamente testadas em um ambiente industrial. O ventilador tem uma velocidade de rotação de 5500 rpm. O material utilizado é o aço inoxidável AISI 304, que é um aço austenítico composto por ferro, cromo e níquel. O aço tem uma densidade de  $0,010 \text{ g/mm}^3$ , resistência última de  $0,505 \text{ GPa}$ , módulo de elasticidade de  $193,00 \text{ GPa}$ , módulo de cisalhamento de  $75,00 \text{ GPa}$ , razão de Poisson de  $0,27$ , condutividade térmica de  $16,20 \text{ W/m-K}$  e calor específico de  $0,50 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$ . Além do material, a espessura da pá é de  $0,800 \text{ mm}$ , a largura da pá é de  $44,600 \text{ mm}$  e o diâmetro externo do cilindro da voluta é de  $198,000 \text{ mm}$ , que são variáveis fixas. O ventilador centrífugo atual possui seis pás retas sem ângulo, cada uma medindo  $45,000 \text{ mm}$ , e é ilustrado na **Figura 18**, e a vista explodida do ventilador, com as chapas externas é dada pela **Figura 19**.



**Figura 18** - Ventilador objeto de estudo (Fonte: elaborada pelo autor)

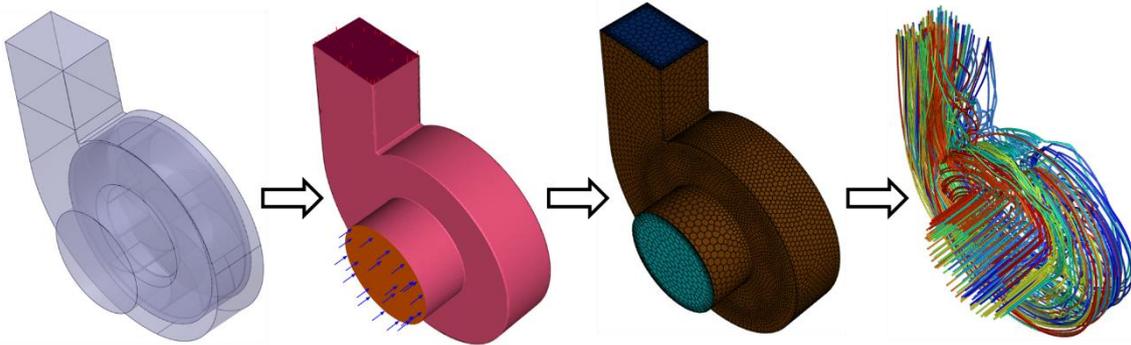


**Figura 19** - Vista explodida do ventilador (Fonte: elaborada pelo autor)

Monitores de resíduos foram criados para verificar a convergência durante as iterações em relação à equação de continuidade, velocidade nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , bem como  $k$  e  $\Omega$ . Os critérios de malha consideraram qualidade ortogonal superior a 0,150 e *skewness* inferior a 0,950.

Utilizando um CCD, 24 configurações diferentes foram testadas, desde a geometria até a obtenção dos resultados. O experimento tem 4 fatores de entrada, 7 pontos axiais e 1 ponto central no cubo. As variáveis controláveis são o número de pás (NB ou  $x_1$ ), ângulo de entrada das pás (BEA ou  $x_2$ ), ângulo de abertura das pás (BOA ou  $x_3$ ) e comprimento das pás (BL ou  $x_4$ ). As variáveis dependentes são a massa da pá (BM ou  $Y_1$ ), vazão mássica (MFR ou  $Y_2$ ), torque (T ou  $Y_3$ ), índice de desempenho (PI ou  $Y_4$ ), custo do material (MC ou  $Y_5$ ), pressão total máxima (MTP ou  $Y_6$ ), magnitude da velocidade máxima (MMV ou  $Y_7$ ) e turbulência média  $\varepsilon$  (ATE ou  $Y_8$ ).

Com o uso do *software* Ansys®, tornou-se possível configurar cada um dos experimentos de acordo com suas variáveis de entrada no SpaceClaim. Em seguida, com o Fluent e a CFD-Post, foram armazenadas as variáveis de resposta avaliadas descritas no estudo. A **Figura 20** apresenta graficamente as etapas de construção do ventilador, abrangendo a modelagem da geometria, definição das condições de entrada e saída do fluido, geração das malhas e verificação dos fluxos.



**Figura 20** - Etapas para a simulação de cada ventilador (Fonte: elaborada pelo autor)

As variáveis de resposta são descritas em mais detalhes abaixo:

- **Massa da pá (BM):** Refere-se à massa de uma única pá do ventilador, medida em gramas;
- **Vazão mássica (MFR):** É a taxa de fluxo de massa do fluido que passa pela seção transversal em um período de tempo unitário, ou seja, o ar sendo movido pelo ventilador, medida em kg/s. Pode ser calculada como:

$$MFR = \int \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \rho_i \mathbf{v}_i A_i \quad (68)$$

Onde:  $\rho$  é a densidade do fluido,  $\mathbf{v}$  é a velocidade do fluido e  $d\mathbf{A}$  é o elemento de área.

- **Torque (T):** A quantidade de força rotacional necessária para girar as pás do ventilador, expressa em Nm e calculada como:

$$T = \mathbf{r}_{AB} \mathbf{F}_P + \mathbf{r}_{AB} \mathbf{F}_V \quad (69)$$

Onde:  $\mathbf{A}$  é o centro de momento específico,  $\mathbf{B}$  é a origem da força,  $\mathbf{r}_{AB}$  é o vetor de torque,  $\mathbf{F}_P$  é o vetor da força de pressão e  $\mathbf{F}_V$  é o vetor da força viscosa.

- **Índice de desempenho (PI):** Uma medida adimensional que avalia o desempenho geral do ventilador com base nos parâmetros da massa do ventilador (FM), a MFR e o T. Calculado como:

$$PI = 1200MFR + \frac{1100}{BM} + \frac{100}{T} \quad (70)$$

- **Custo do Material (MC):** O custo associado ao material (AISI 304) para a fabricação do ventilador, expresso em dólares americanos (US\$).
- **Pressão Total Máxima (MTP):** A pressão total máxima alcançada pelo fluxo de ar no ventilador, medida em Pa. Esse valor pode ser calculado usando o máximo facetado ( $f_{\max}$ ), que representa o valor máximo da variável facetada na superfície.

- **Magnitude da Velocidade Máxima (MMV):** A maior velocidade atingida pelo fluxo de ar no ventilador centrífugo, medida em m/s e calculada usando  $f_{\max}$ .
- **Turbulência Média  $\epsilon$  (AT $\epsilon$ ):** A turbulência média do fluxo de ar dentro do ventilador, medida em  $m^2/s^3$  e expressa como média facetada ( $f_{\text{avg}}$ ), obtida dividindo o valor calculado pela soma dos valores facetados da variável pelo número total de facetas, dado por:

$$f_{\text{avg}} = \sum_{i=1}^n \phi_i \quad (71)$$

Ao longo desta seção, será explicado desde os dados experimentais até os resultados obtidos com a P-O e sua comparação com o ventilador atual.

#### 4.1. Abordagem anterior ao projeto

Antes de aplicar o método proposto, diversos *designs* e experimentos foram realizados com o objetivo de construir um ventilador que apresentasse características ótimas. No entanto, nenhuma abordagem, como as mencionadas anteriormente, foi utilizada, e o processo de construção do ventilador baseou-se predominantemente em tentativa e erro, embora com a expertise do projetista, que já conhecia bem o produto em questão. Como resultado, a performance foi significativamente inferior em comparação com as abordagens seguintes.

Os dados referentes a esse primeiro estudo podem ser encontrados em Pereira *et al.* (2023b; 2024b), no qual foram realizadas 15 simulações. Nesse estudo inicial, foram registradas apenas as respostas relacionadas à vazão mássica (MFR), expressa em kg/s, ao torque (T), medido em N, à massa total do ventilador, dada em g, e ao índice de desempenho (ID), uma medida adimensional. Assim, a **Tabela 2** apresenta apenas as variáveis de saída que também foram estudadas nesta proposta.

**Tabela 2** - Respostas em relação a abordagem anterior ao método proposto

<b>MFR</b>	<b>T</b>	<b>PI</b>
1,947	26,800	29,182
1,946	15,014	32,107
1,836	11,632	32,289
1,858	8,900	35,096
1,964	10,477	34,729
1,998	10,327	35,477
2,623	33,228	36,341
2,202	22,306	32,397
3,050	39,231	40,923
3,123	40,365	41,785
2,971	38,192	40,013
2,880	36,596	39,002
3,147	40,690	42,087
3,014	38,456	40,690
2,823	34,730	38,745

#### 4.2. Processo no Ansys

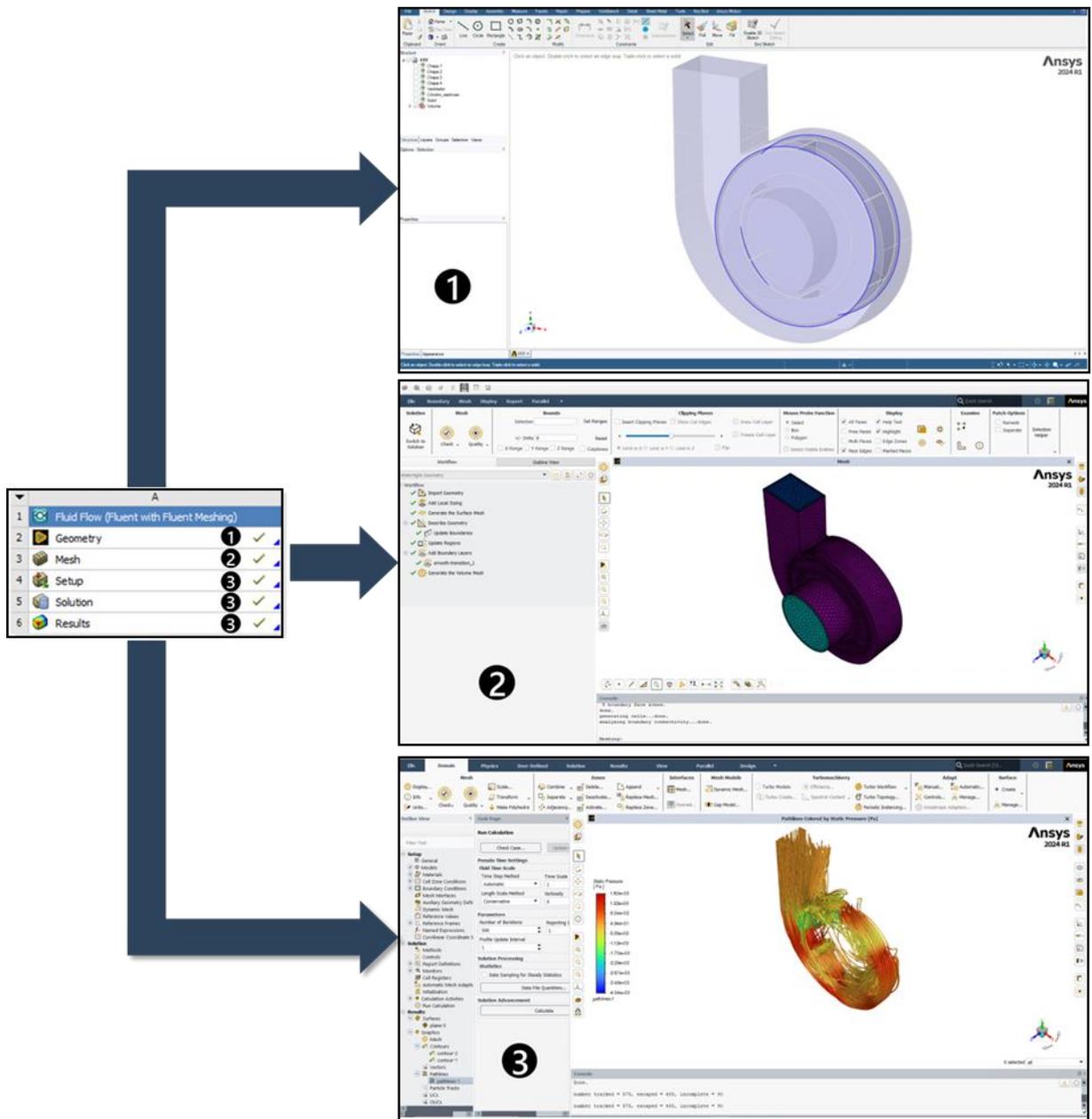
O processo no *software* Ansys® foi realizado no *Fluid Flow (Fluent with Fluent Meshing)*, que combina os recursos do Fluent, especializado em dinâmica de fluidos, com o módulo de geração de malhas Fluent Meshing. O Fluent é capaz de lidar com problemas complexos relacionados a fenômenos de fluidos, enquanto o Meshing transforma a geometria em malhas adequadas antes da execução da simulação.

Todo o projeto é desenvolvido utilizando o Workbench, que permite a organização e integração de diferentes análises em um ambiente colaborativo. Com o Workbench, é possível criar diversos modelos e integrar diferentes tipos de simulações, como mecânica, térmica e de fluidos, de forma simples e prática. O Workbench é utilizado para integrar as etapas 1, 2 e 3 do processo.

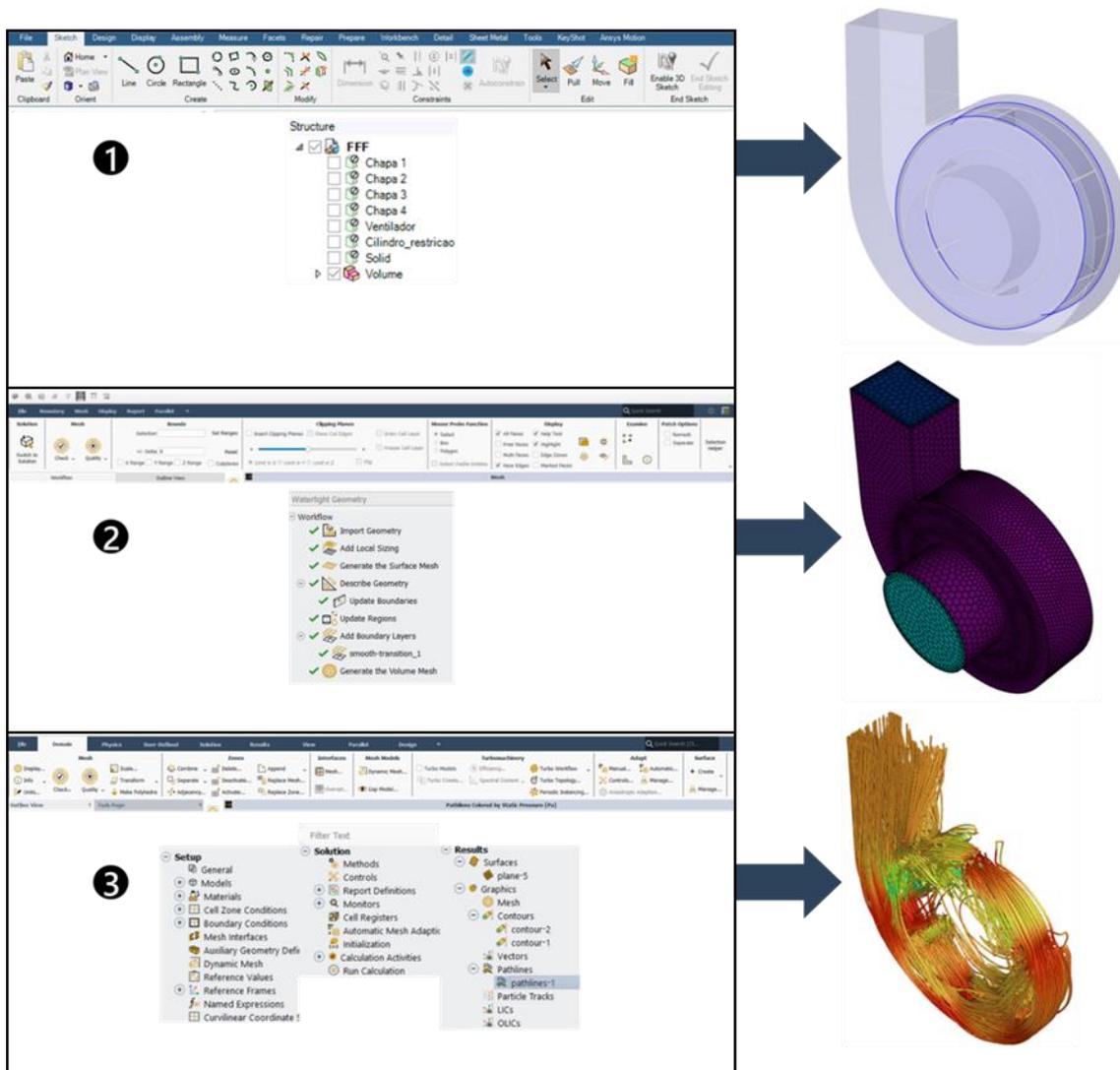
A etapa 1 envolve o uso do SpaceClaim (ou, alternativamente, o Discovery) é utilizado neste trabalho para a criação e modelagem do ventilador. Este *software* permite a construção de geometrias de maneira rápida e intuitiva, preparando o modelo para a simulação.

A próxima etapa (etapa 2) é a criação das malhas, realizada com o Meshing, que divide a geometria em elementos discretos. O objetivo é gerar malhas de alta qualidade, adaptadas ao tipo de análise, buscando sempre uma alta precisão de acordo com critérios pré-definidos.

Após essa fase, chega-se à etapa 3, na qual é realizado o *setup* da simulação, resultando na obtenção da solução CFD. Com isso, é possível analisar o escoamento dos fluidos de maneira visual, além de obter resultados numéricos baseados nas simulações. A **Figura 21** e a **Figura 22** ilustram todo esse processo dentro do *software* Ansys®.



**Figura 21** - Passo a passo no Ansys® (Fonte: elaborada pelo autor)



**Figura 22** - Detalhamento do passo a passo no Ansys® (Fonte: elaborada pelo autor)

É importante destacar que, embora o foco deste trabalho não seja especificamente a criação de malhas, foi seguida uma metodologia criteriosa em todas as etapas, incluindo a verificação e validação dos resultados. Essa abordagem assegurou que os resultados obtidos fossem válidos e que não houvesse problemas relacionados à simulação realizada.

### 4.3. Dados experimentais

Com base nas explicações detalhadas das variáveis fornecidas anteriormente, a **Tabela 3** exhibe as variáveis originais juntamente com suas unidades de medida, abreviatura e níveis experimentais relevantes conforme definido no DOE para a realização dos experimentos. Ao longo da descrição do estudo, algumas variáveis serão apresentadas em potências de 10 para facilitar a visualização, como: MFR ( $10^{-1}$ ), T ( $10^{-1}$ ), PI ( $10^1$ ), MTP ( $10^3$ ), MMV ( $10^1$ ) e  $AT\varepsilon$  ( $10^4$ ). A **Tabela 4** complementa essas

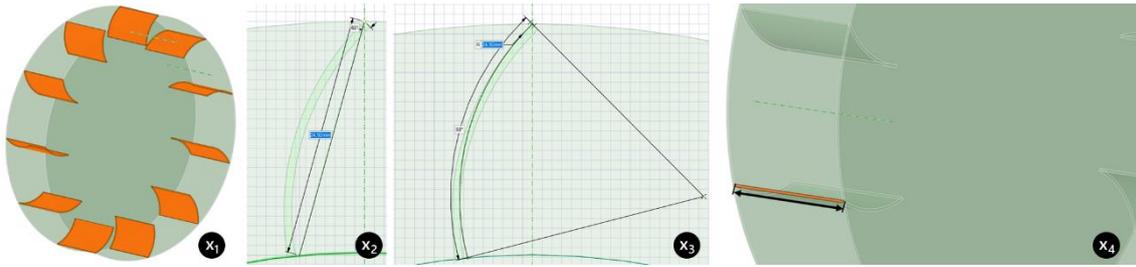
informações, apresentando todas as linhas dos experimentos e exibindo as variáveis de entrada. Além disso, a **Figura 23**, que ilustra como as medições das variáveis de controle são realizadas no Ansys SpaceClaim.

**Tabela 3** - Variáveis de controle e níveis experimentais correspondentes

$x_n$	Variável	Unidade	Abreviatura	-2	-1	0	+1	+2
$x_1$	Número de pás	Quantidade	NB	-	6	10	14	18
$x_2$	Ângulo de entrada das pás	Graus	BEA	-15,0	0,0	15,0	30,0	45,0
$x_3$	Ângulo de abertura das pás	Graus	BOA	-45,0	0,0	45,0	90,0	135,0
$x_4$	Comprimento das pás	Milímetros	BL	19,0	26,0	33,0	40,0	47,0

**Tabela 4** - Variáveis de entrada do experimento com o planejamento composto central

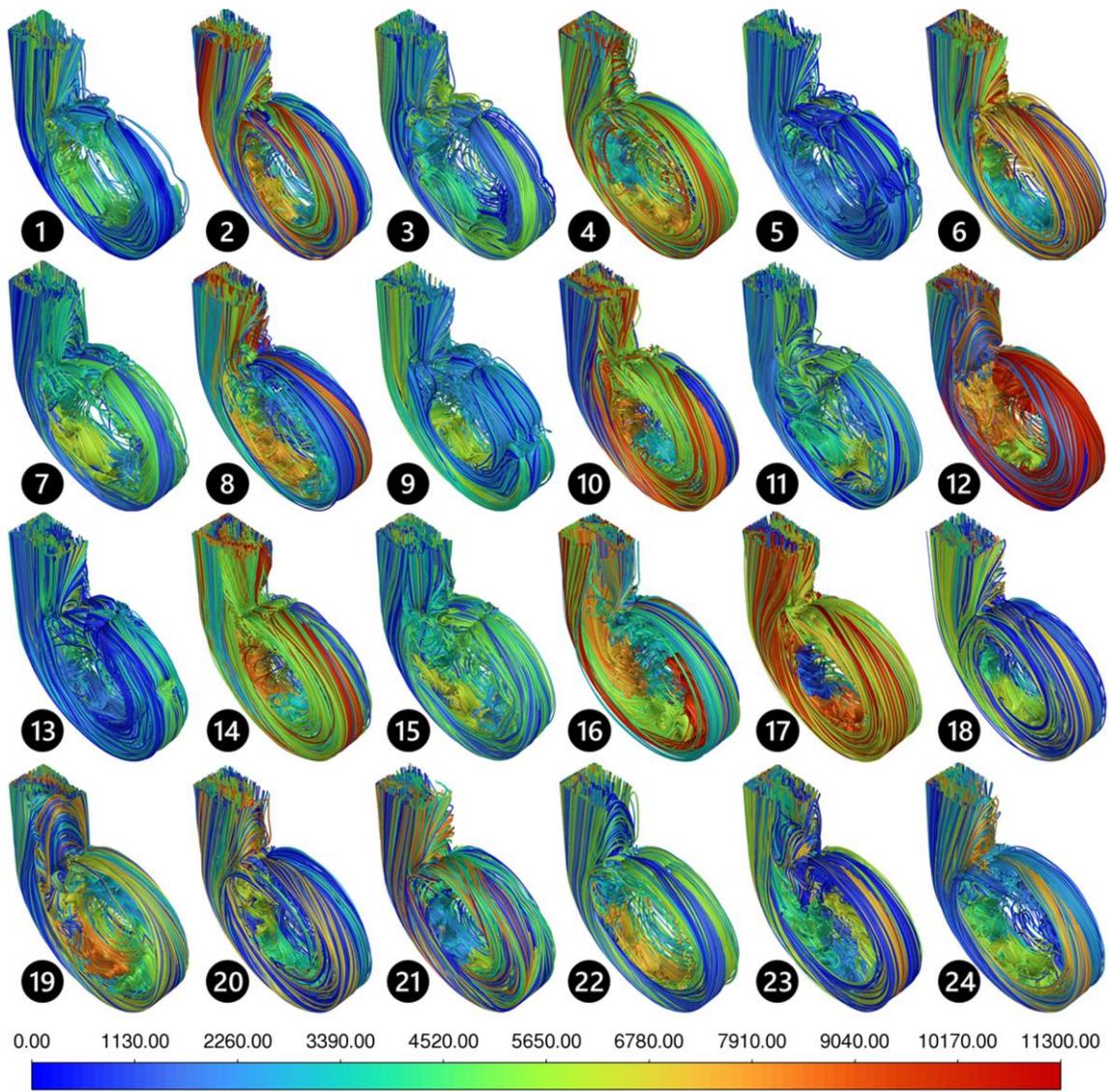
Experimento	NB	BEA	BOA	BL
1	6	0,0	0,0	26,0
2	14	0,0	0,0	26,0
3	6	30,0	0,0	26,0
4	14	30,0	0,0	26,0
5	6	0,0	90,0	26,0
6	14	0,0	90,0	26,0
7	6	30,0	90,0	26,0
8	14	30,0	90,0	26,0
9	6	0,0	0,0	40,0
10	14	0,0	0,0	40,0
11	6	30,0	0,0	40,0
12	14	30,0	0,0	40,0
13	6	0,0	90,0	40,0
14	14	0,0	90,0	40,0
15	6	30,0	90,0	40,0
16	14	30,0	90,0	40,0
17	18	15,0	45,0	33,0
18	10	-15,0	45,0	33,0
19	10	45,0	45,0	33,0
20	10	15,0	-45,0	33,0
21	10	15,0	135,0	33,0
22	10	15,0	45,0	19,0
23	10	15,0	45,0	47,0
24	10	15,0	45,0	33,0



**Figura 23** - Medições das variáveis de controle (Fonte: elaborada pelo autor)

A **Figura 24** apresenta as linhas de fluxo de um ventilador centrífugo, que representam as trajetórias das partículas em relação ao fluxo do fluido. Para melhor visualização, um plano central foi criado na área de operação do ventilador, permitindo observar o deslocamento do fluxo em cada um dos 24 experimentos realizados. As linhas de fluxo ajudam a entender como o fluido é direcionado dentro do ventilador e como as variáveis impactam o comportamento do fluxo.

Para garantir uma comparação consistente entre os experimentos, a barra de cores foi mantida com a mesma escala para todos os casos. Isso facilita a análise visual e permite observar variações no padrão de fluxo, mantendo a uniformidade na interpretação dos resultados. A **Tabela 5** apresenta as respostas originais e os fatores correspondentes para cada um dos 24 experimentos.



**Figura 24** - Linhas de fluxo com cilindro médio de acordo com a trajetória das partículas (Fonte: elaborada pelo autor)

**Tabela 5 - Respostas originais e Fatores**

BM	MFR	T	PI	MC	MTP	MMV	AT $\epsilon$	VRF <sub>1</sub>	VRF <sub>2</sub>	VRF <sub>3</sub>
7,621	21,437	14,992	35,924	9,712	3,665	8,039	7,417	-1,175	0,275	1,097
7,621	26,635	23,532	39,176	11,563	4,108	9,161	9,539	-1,081	-0,608	0,673
9,280	21,907	21,555	34,340	10,045	6,247	10,616	11,104	0,254	0,820	1,016
9,280	25,849	35,093	36,647	12,338	6,981	12,295	16,762	0,893	0,219	0,489
8,317	22,291	16,806	36,174	9,866	6,970	10,674	7,922	0,035	0,574	1,306
8,317	31,270	33,082	43,422	11,921	8,692	13,032	13,394	0,732	-0,869	0,995
10,307	23,194	24,120	35,327	10,235	8,265	11,112	10,310	0,644	0,759	0,989
10,307	33,933	51,796	45,332	12,782	10,967	14,427	19,859	1,997	-1,037	0,658
11,827	24,497	18,498	37,770	11,548	4,024	8,231	6,264	-1,513	-0,188	-0,018
11,827	27,894	24,080	40,007	14,394	4,292	8,864	9,231	-1,536	-0,854	-0,764
15,708	24,558	28,727	35,732	12,324	6,726	11,798	14,906	0,565	0,709	-0,540
15,708	21,336	23,891	31,904	16,205	5,952	10,873	11,760	-0,337	0,878	-1,753
12,795	26,320	22,492	38,939	11,784	7,482	11,441	7,772	-0,126	-0,012	0,165
12,795	32,019	34,157	43,644	14,945	7,775	12,530	12,167	-0,065	-1,161	-0,636
17,448	26,343	31,583	37,488	12,646	9,358	12,497	14,058	1,063	0,604	-0,652
17,448	38,677	57,927	50,160	16,957	10,072	14,770	17,855	0,911	-2,174	-1,632
10,299	35,429	47,153	46,987	14,574	7,408	13,247	19,683	0,622	-1,760	-0,146
10,299	25,542	19,609	38,594	12,052	4,098	8,864	6,541	-1,461	-0,448	0,114
19,989	18,131	24,282	28,141	15,128	7,663	12,082	19,196	1,262	2,323	-1,990
10,297	22,605	21,695	34,567	12,108	4,784	8,294	10,427	-0,822	0,364	0,077
12,513	17,589	12,787	31,620	12,730	3,119	7,253	7,859	-1,534	0,987	-0,625
5,827	21,035	21,752	33,457	9,473	6,360	10,344	11,605	0,414	0,881	1,700
14,977	26,989	30,921	37,993	14,449	6,709	11,772	10,536	-0,212	-0,160	-0,995
10,298	27,006	33,577	38,222	12,082	7,438	12,378	11,592	0,470	-0,120	0,473

Os coeficientes são os valores que determinam a contribuição de cada termo para o valor total da função objetivo. Os coeficientes das variáveis originais, dos fatores rotacionados e a direção de otimização de cada um são representados na **Tabela 6**. Enquanto isso, na **Tabela 7**, é apresentado um resumo estatístico referente à dispersão e variabilidade das variáveis. O erro padrão da regressão ( $S_r$ ) indica a dispersão dos resíduos em torno da reta ajusta, enquanto o  $R^2$  indica a capacidade preditiva do modelo. Quanto mais próximo o valor de  $R^2$  estiver de 1, melhor as variações na variável de entrada são representadas pelas variáveis de saída.

**Tabela 6 - Coeficientes das variáveis de resposta e fatores**

BM	MFR	T	PI	MC	MTP	MMV	AT $\epsilon$	VRF <sub>1</sub>	VRF <sub>2</sub>	VRF <sub>3</sub>
10,298	27,006	33,577	38,222	12,082	7,438	12,378	11,592	0,470	-0,120	0,473
0,020	2,557	6,016	2,041	1,429	0,219	0,589	1,970	0,074	-0,509	-0,356
1,823	-0,474	4,017	-1,210	0,581	1,029	0,952	2,842	0,674	0,382	-0,352
0,554	1,246	2,658	1,379	0,177	1,011	0,772	0,467	0,321	-0,138	-0,017
2,617	1,126	1,613	0,766	1,345	0,020	0,188	-0,185	-0,191	-0,184	-0,768
-0,050	1,597	1,453	1,914	-0,082	0,209	0,188	0,949	0,074	-0,280	0,069
1,192	-0,907	-2,374	-0,842	0,382	-0,227	-0,343	0,275	-0,106	0,202	-0,330
0,257	-1,342	-3,550	-0,911	0,089	-0,709	-1,018	-0,657	-0,376	0,137	-0,164
0,006	-0,364	-1,277	-0,253	-0,025	-0,063	-0,197	-0,175	-0,056	0,058	-0,007
0,000	0,032	1,291	0,232	0,195	0,041	0,071	0,056	0,007	-0,054	-0,048
0,000	1,777	3,696	1,916	0,075	0,297	0,408	0,976	0,135	-0,324	0,030
0,000	-0,666	-1,705	-0,439	0,341	-0,319	-0,338	-0,924	-0,237	0,019	-0,134
0,138	1,066	1,920	1,274	0,026	-0,130	-0,385	-0,078	-0,165	-0,274	-0,043
0,610	-0,192	-0,078	-0,127	0,195	-0,031	0,083	0,211	0,010	0,053	-0,150
0,123	0,638	1,271	0,666	0,045	-0,012	0,146	0,189	0,006	-0,126	-0,022
Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.

**Tabela 7 - Resumo estatístico**

Métrica	BM	MFR	T	PI	MC	MTP	MMV	AT $\epsilon$	VRF <sub>1</sub>	VRF <sub>2</sub>	VRF <sub>3</sub>
S <sub>r</sub>	0,800	0,430	0,802	0,406	0,272	0,189	0,145	0,194	0,644	0,699	0,321
R <sup>2</sup>	98,05	73,82	80,12	75,05	99,31	67,97	80,40	91,59	83,78	80,88	95,96

Nota: Na métrica S, o PI e o MMV são dados como  $10^{-2}$ , o MTP é dado como  $10^{-4}$  e o AT  $\epsilon$  é dado como  $10^{-5}$ .

A **Figura 25** apresenta um gráfico de correlação que exhibe os valores de correlação entre as variáveis originais e os fatores. O gráfico é representado em um formato circular, no qual círculos maiores indicam correlações mais fortes, independentemente de serem positivas ou negativas. Quanto mais próxima a correlação estiver de +1 (correlação positiva perfeita), mais intenso será o tom azul; à medida que se aproxima de -1 (correlação negativa perfeita), o tom vermelho se intensifica. Já correlações próximas de zero, indicando independência entre as variáveis, são representadas em tons de cinza.

Destaca-se que a utilização de fatores elimina a possibilidade de multicolinearidade, uma vez que eles são, por definição, independentes, apresentando correlação nula entre si.

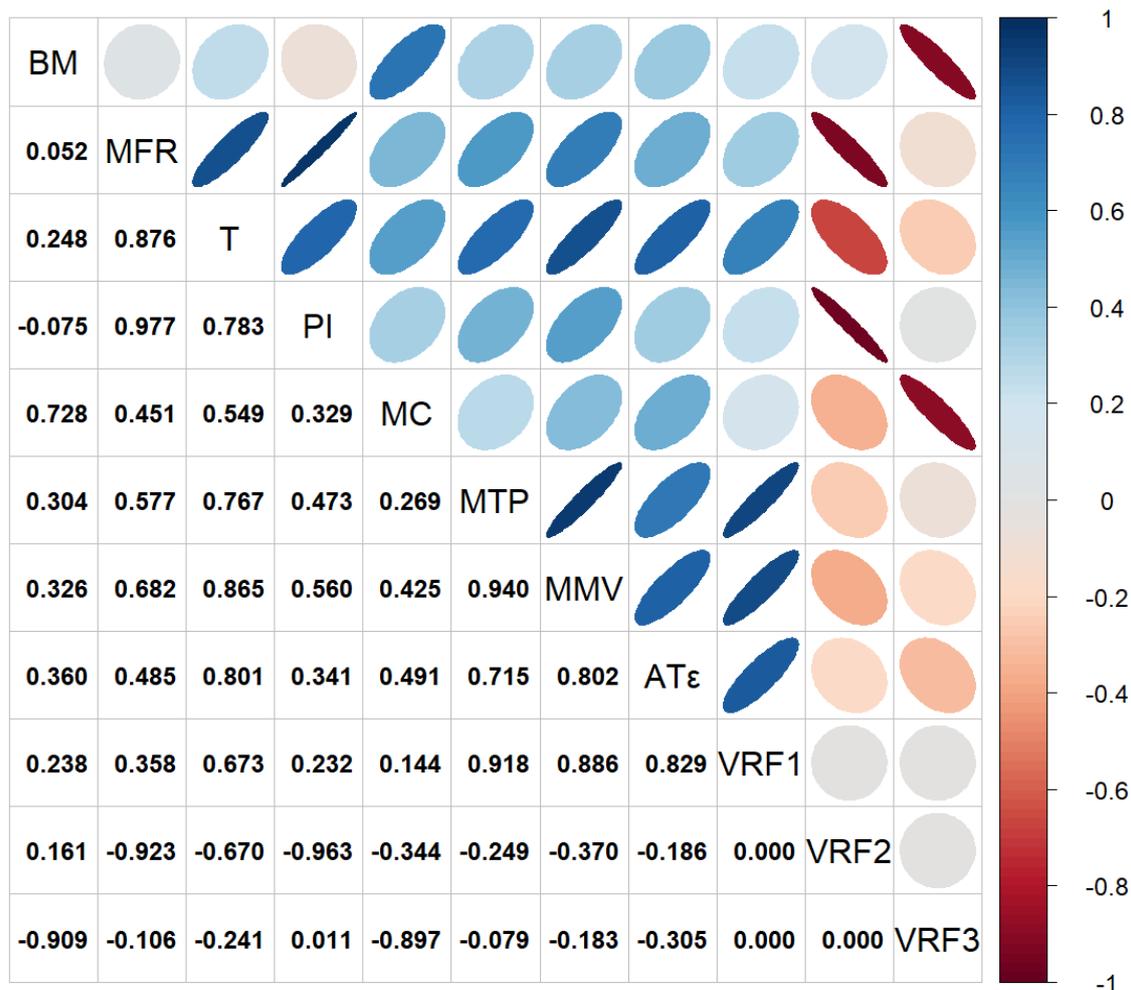
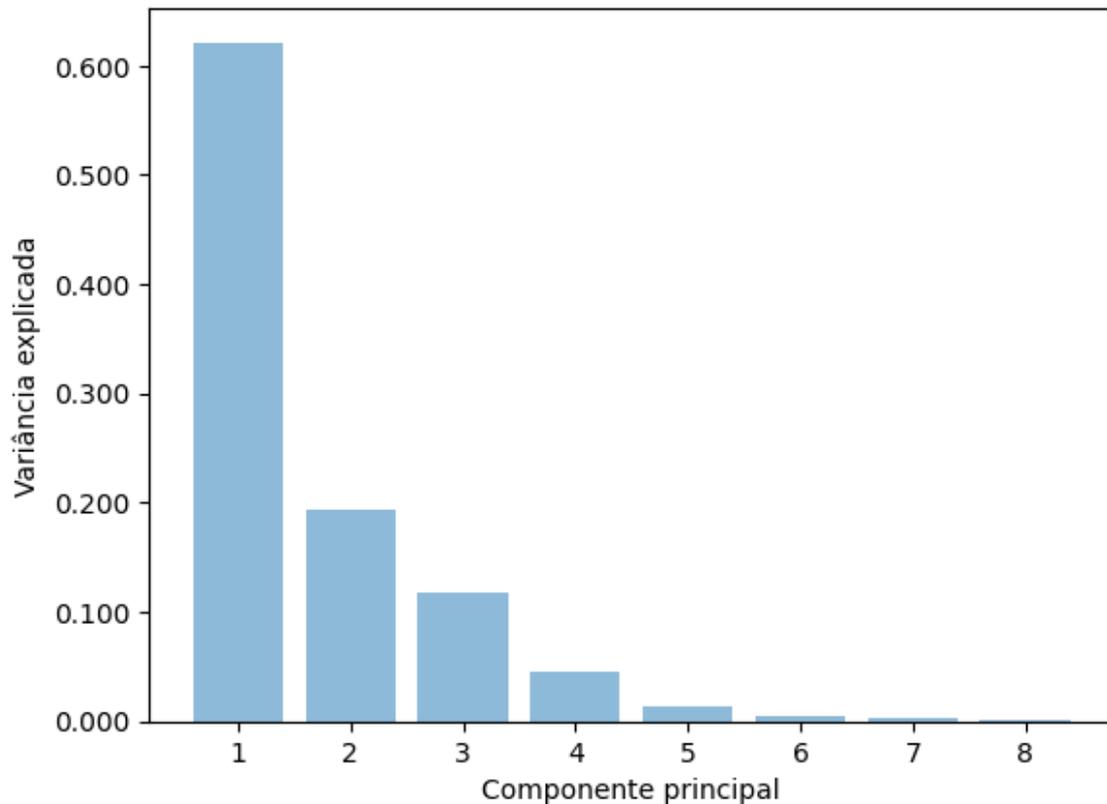


Figura 25 - Mapa de correlação (Fonte: elaborada pelo autor)

Para determinar a quantidade de dimensões a serem utilizadas antes de realizar a FA, aplica-se a PCA. Isso permite examinar os autovalores, a proporção da variância explicada e o acumulado da variância explicada para cada um dos fatores potenciais, conforme demonstrado na **Tabela 8**, sendo complementada pela **Figura 26** que exibe a variância explicada por componente principal.

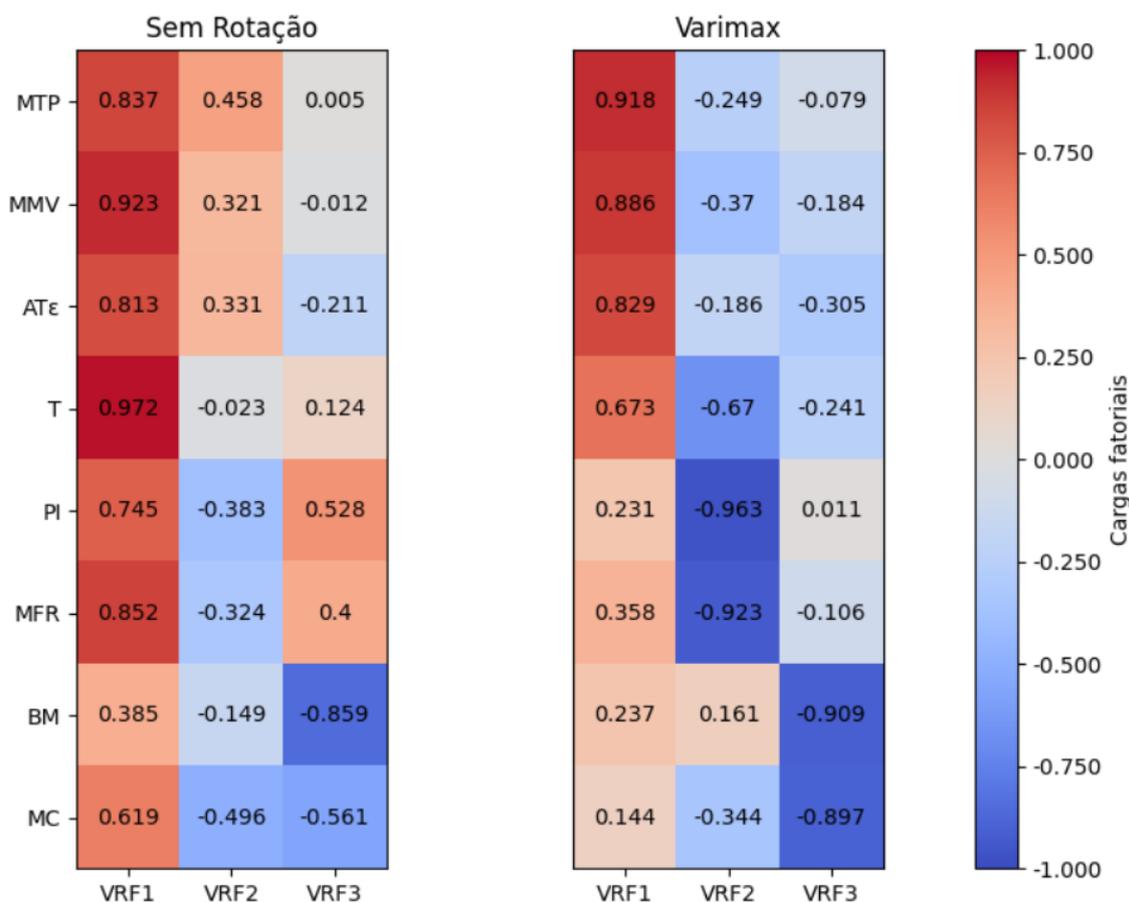
Tabela 8 - Análise de componentes principais

Métrica	PC <sub>1</sub>	PC <sub>2</sub>	PC <sub>3</sub>	PC <sub>4</sub>	PC <sub>5</sub>	PC <sub>6</sub>	PC <sub>7</sub>	PC <sub>8</sub>
Autovalor	4,971	1,552	0,942	0,359	0,106	0,036	0,030	0,005
Proporção	0,621	0,194	0,118	0,045	0,013	0,004	0,004	0,001
Cumulativo	0,621	0,815	0,933	0,978	0,991	0,996	0,999	1,000



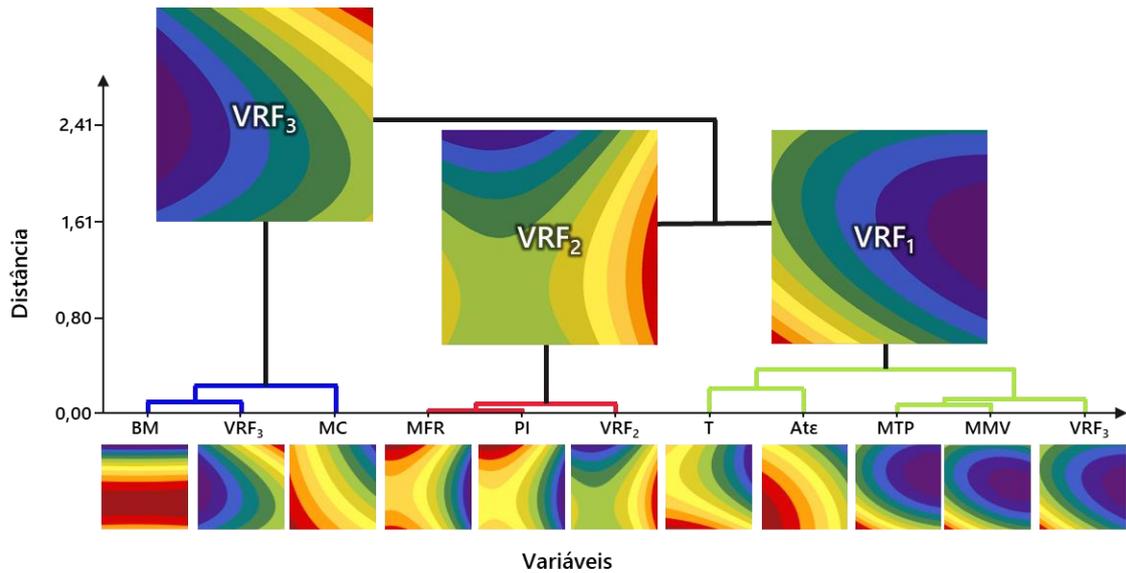
**Figura 26** - Variância explicada por componente principal (Fonte: elaborada pelo autor)

Utilizando a FA, é possível reduzir a dimensionalidade dos dados, identificar padrões que podem não ser imediatamente evidentes e simplificar a interpretação dos dados. Portanto, a rotação de fatores também é utilizada para ajudar na interpretação dos dados. O método Varimax, que busca minimizar o número de variáveis com altas cargas em cada fator, ao mesmo tempo em que maximiza a variância total explicada, é comumente empregado. As cargas dos fatores são exibidas na **Figura 27**, que mostra o agrupamento de cada um dos fatores rotacionados e ordenados. O **VRF<sub>1</sub>** compreende 4 variáveis: MTP, MMV, AT $\epsilon$  e T, O **VRF<sub>2</sub>** consiste em 2 variáveis: PI e MFR, enquanto o **VRF<sub>3</sub>** abrange 3 variáveis: BM e MC. Além disso, é possível observar a comunalidade entre elas. Ademais, vale ressaltar que variáveis com objetivos conflitantes costumam ser agrupadas no mesmo fator.

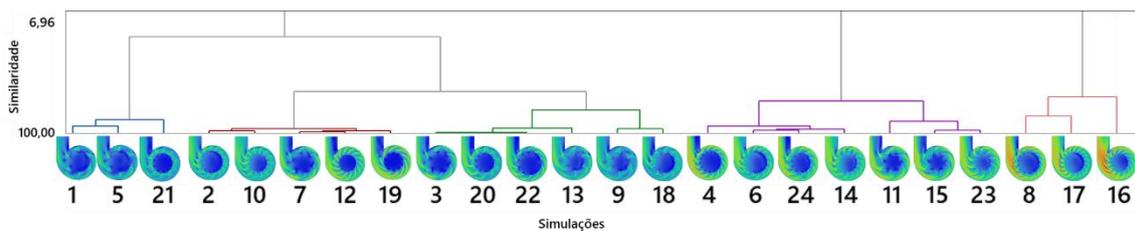


**Figura 27** - Cargas dos fatores sem rotação e com rotação Varimax (Fonte: elaborada pelo autor)

A **Figura 28** tem como objetivo resumir as informações em um único gráfico. Inicialmente, são apresentados os *clusters* gerados utilizando o método de ligação de Ward, com uma extração baseada nas características de PCA e correlação absoluta entre as variáveis. O agrupamento das variáveis originais com os fatores é notável. Subsequentemente, a distância é medida ao longo do eixo y. Além disso, são mostrados os gráficos de contorno das superfícies de resposta, primeiro em relação aos três fatores rotacionados e com as oito variáveis originais agrupadas com seus respectivos fatores. Enquanto a **Figura 29** ilustra o dendrograma de *clusters* de observações, em que exibe a organização dos experimentos de acordo com o CCD.



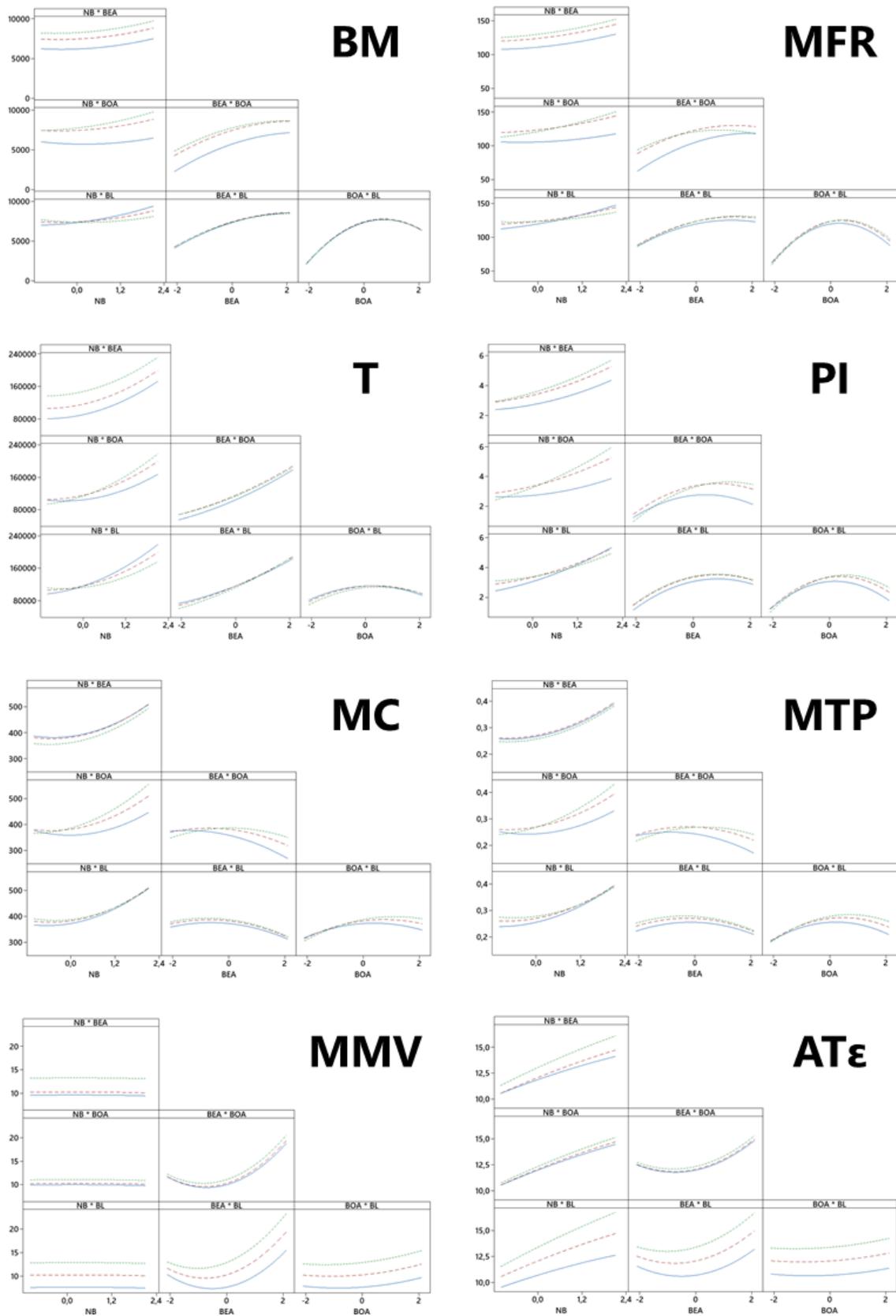
**Figura 28** - Dendrograma dos *clusters* de variáveis e fatores combinado com gráficos de contorno (Fonte: elaborada pelo autor)



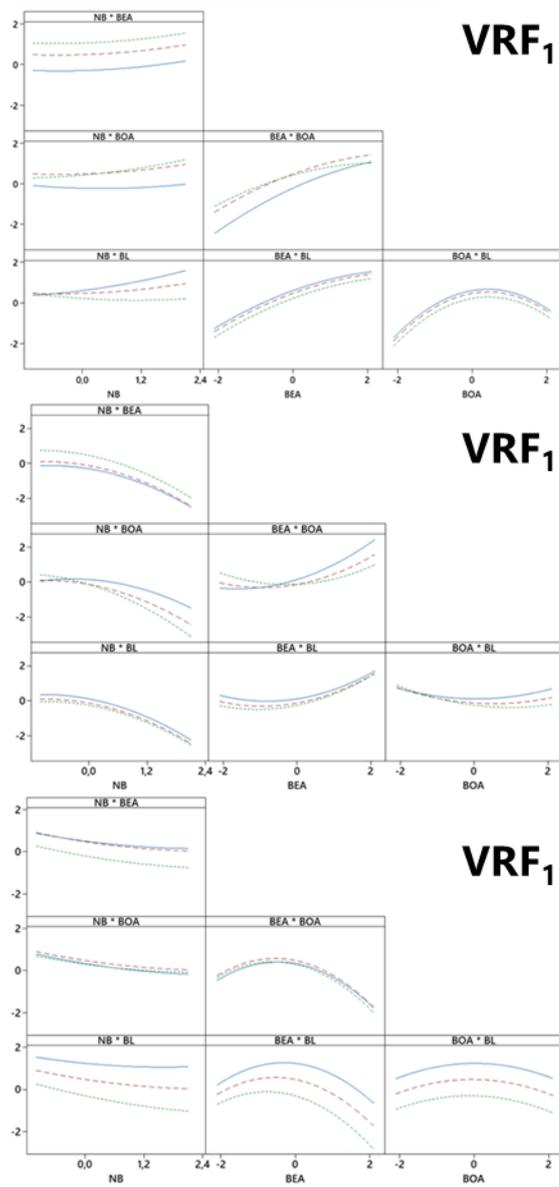
**Figura 29** - Dendrograma dos *clusters* de observações em relação ao planejamento de composto central (Fonte: elaborada pelo autor)

É notável que o agrupamento dos *clusters* foi exatamente o mesmo que o dado pela FA. Adicionalmente, os gráficos de contorno são utilizados para visualizar o comportamento de cada uma das funções objetivas em relação às variáveis originais e aos fatores rotacionados.

A análise das interações variáveis de entrada (NB, BEA, BOA e BL) pode ser verificada com os gráficos de interação apresentadas na **Figura 30** que está relacionando as variáveis originais e na **Figura 31** que relaciona os fatores rotacionados. Ela foi organizada de modo a associar cada  $VRF_1$  à respectiva variável original. Fica evidente que a maximização de  $VRF_1$  e  $VRF_3$ , e a minimização de  $VRF_2$  leva, respectivamente, à minimização de BM, T, MC, MTP e  $AT\epsilon$ , enquanto leva à maximização de MFR, PI e MMV.



**Figura 30** - Impacto das variáveis de entrada nas variáveis de saída (Variáveis originais) (Fonte: elaborada pelo autor)



**Figura 31** - Impacto das variáveis de entrada nas variáveis de saída (Fatores rotacionados) (Fonte: elaborada pelo autor)

Com a avaliação dos níveis das variáveis de entrada, torna-se possível realizar a avaliação de NB, BEA, BOA e BL para obter ponto ótimo dos três fatores rotacionados que agrupam as oito variáveis originais.

#### 4.4. Otimização individual

A otimização individual de cada uma das variáveis originais e dos fatores de cada uma das funções objetivas é representada na **Tabela 9**, que apresenta a Matriz *payoff* ( $\Phi$ ) e **Tabela 10** traz dados referentes a matriz *payoff* dos fatores. A diagonal principal exhibe as utopias de cada variável de saída, e ao longo da mesma linha que o utopia da variável

otimizada, pode-se observar o comportamento das outras variáveis quando aquela variável específica é otimizada. Em muitos casos, surgem conflitos de interesse, onde otimizar uma variável pode levar outra a se aproximar do nadir em vez da utopia, apresentando desafios ao avaliar problemas multiobjetivos individualmente. A otimização de cada um dos fatores tende a melhorar os resultados dos fatores agrupados por ele.

**Tabela 9 - Matriz *payoff***

	<b>BM</b>	<b>MFR</b>	<b>T</b>	<b>PI</b>	<b>MC</b>	<b>MTP</b>	<b>MMV</b>	<b>AT<math>\epsilon</math></b>	<b>VRF<sub>1</sub></b>	<b>VRF<sub>2</sub></b>	<b>VRF<sub>3</sub></b>
<b>BM</b>	<b>5,015</b>	23,259	24,379	35,793	9,263	6,761	10,953	10,785	0,447	0,420	1,963
<b>MFR</b>	10,757	<b>40,005</b>	55,092	51,783	14,848	9,316	14,760	19,978	1,083	-2,521	-0,047
<b>T</b>	9,236	19,444	<b>10,610</b>	33,259	10,486	5,793	9,572	5,974	-0,550	0,971	0,837
<b>PI</b>	10,851	39,976	54,946	<b>51,812</b>	14,876	9,300	14,712	19,827	1,052	-2,527	-0,072
<b>MC</b>	7,421	24,658	21,521	38,615	<b>8,578</b>	7,004	10,911	9,323	0,262	0,193	1,834
<b>MTP</b>	9,629	21,523	14,718	34,748	12,020	<b>2,019</b>	5,998	6,385	-2,239	0,027	-0,081
<b>MMV</b>	11,162	38,577	56,669	50,015	14,728	9,777	<b>15,063</b>	21,527	1,511	-2,102	-0,052
<b>AT<math>\epsilon</math></b>	10,781	23,733	16,502	36,891	12,450	2,618	6,555	<b>5,781</b>	-2,238	-0,337	-0,291
<b>VRF<sub>1</sub></b>	10,316	32,946	49,839	43,928	13,232	9,709	14,412	20,835	<b>1,811</b>	-0,883	0,418
<b>VRF<sub>2</sub></b>	11,025	39,863	53,757	51,691	15,074	9,070	14,552	19,190	0,887	<b>-2,547</b>	-0,177
<b>VRF<sub>3</sub></b>	5,184	22,018	21,550	34,883	9,004	6,805	10,723	9,703	0,387	0,639	<b>2,001</b>

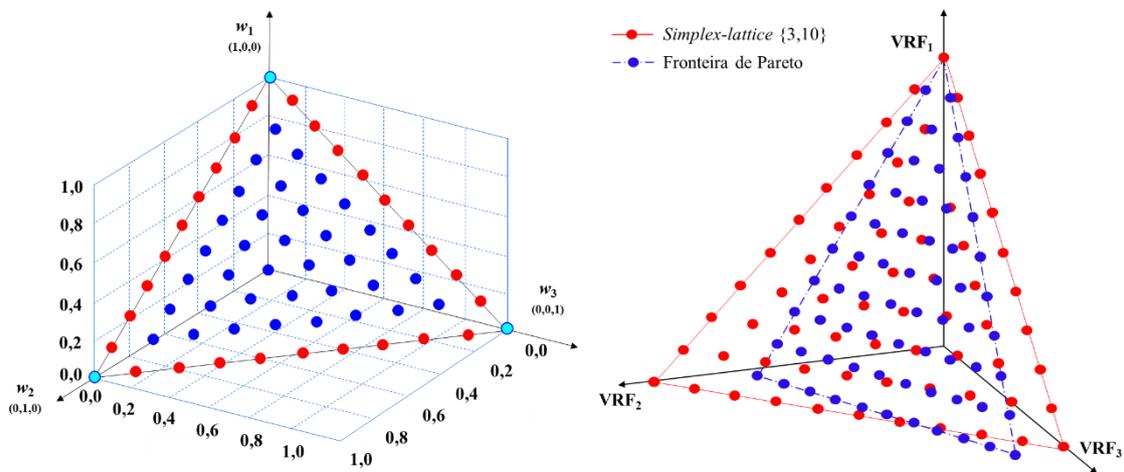
**Tabela 10 - Matriz *payoff* (Fatores), utopia e pseudo-nadir e matriz *payoff* escalonada (fatores)**

<b>Matriz <i>payoff</i></b>			<b>VRF<sup>U</sup></b>	<b>VRF<sup>N</sup></b>	<b>Matriz <i>payoff</i> escalonada</b>		
1,811	0,887	0,387	1,811	0,387	0,000	0,649	1,000
-0,883	-2,547	0,639	-2,547	0,639	0,522	0,000	1,000
0,418	-0,177	2,001	2,001	-0,177	0,727	1,000	0,000

O VRF-NBI opera com base em dois algoritmos principais (embora possa ser configurado com outros métodos): o Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) e a Programação Sequencial de Mínimos Quadrados (SLSQP). O GRG é utilizado para resolver problemas de otimização não linear com restrições, ajustando iterativamente as variáveis enquanto garante que as restrições sejam atendidas. Esse método é eficaz na busca por soluções ótimas, mesmo em cenários complexos. Já o SLSQP é utilizado para resolver problemas de otimização com restrições de igualdade e desigualdade, aplicando uma abordagem iterativa baseada em gradientes para ajustar as variáveis e alcançar a solução ótima, combinando precisão e eficiência.

Foram adotados diferentes métodos de inicialização devido à sensibilidade dos algoritmos baseados em gradiente aos pontos iniciais. Essa estratégia foi essencial para garantir que os resultados apresentassem variações e para evitar que os algoritmos não convergissem para uma solução. Esse procedimento pode ser comparado à aleatorização ou a outras técnicas utilizadas em redes neurais, onde a escolha dos pontos iniciais influencia diretamente os resultados finais.

A **Figura 32** traz  $p = 3$  e  $\delta = 0,1$ , resultando em  $N_{sub} = 66$  combinações convexas de pesos.



**Figura 32** - Simplex-lattice {3,10} e fronteira normalizada escalonada de Pareto em 3D (Fonte: elaborada pelo autor)

Com a otimização individual, além da utopia, o pseudo-nadir de cada fator é obtido, o que facilita a verificação dos resultados obtidos em cada etapa da otimização gerada com o NBI.

#### 4.5. Aplicação do método interseção normal à fronteira

Para aumentar a eficiência na MO, visando gerar soluções Pareto-ótimas e compreender a influência de variáveis conflitantes, o método de NBI é empregado. Ele permite que o tomador de decisão tenha múltiplas opções a um baixo custo computacional e auxilia na interpretação dos resultados otimizados. O trabalho de Pereira et al. (2024c; 2024d) apresenta uma aplicação similar, exibindo a eficácia do NBI em contexto com múltiplos objetivos conflitantes.

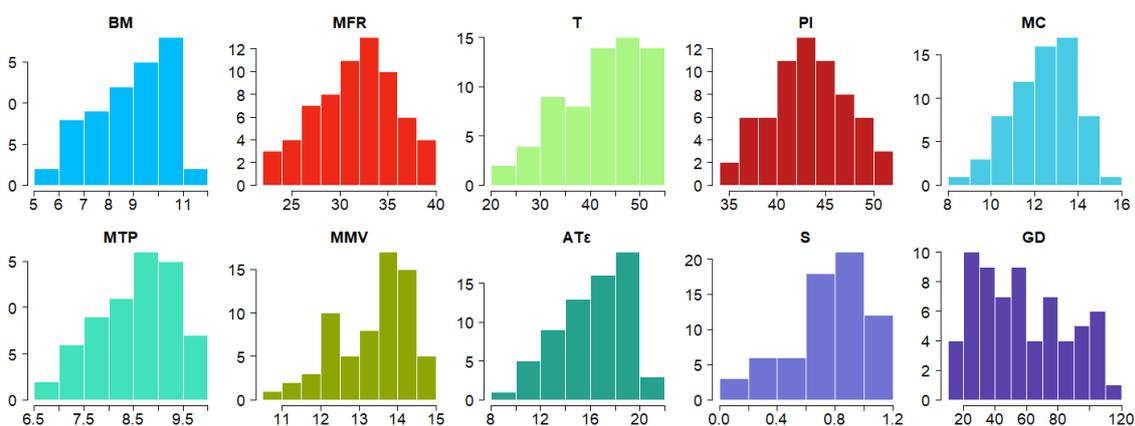
O NBI foi implementado com incrementos de 10,0% na distribuição de pesos ( $w$ ), que estão relacionados à quantidade de respostas avaliadas, especificamente nos três

fatores. Isso resultou em 66 pontos ótimos e viáveis. No entanto, para avaliar a qualidade desses ótimos, é necessário utilizar métricas que avaliem sua eficiência, auxiliando a tomada de decisão de acordo com objetivos específicos.

A aplicação do NBI começa com a obtenção do conjunto de dados, seguida do cálculo das matrizes de correlação e covariância. A decomposição espectral é então empregada para obter autovalores e autovetores, seguida da extração de cargas fatoriais e da transformação de rotação.

A segunda fase envolve o conjunto de funções objetivas, a região viável e o conjunto de restrições. Usando o método *Simplex-lattice*, três pesos são combinados para cada objetivo, resultando na identificação de soluções Pareto-ótimas para cada combinação.

Com os 66 pontos ótimos gerados, o histograma na **Figura 33** permite observar a faixa de ótimos para cada uma das variáveis originais e para as métricas de desempenho. Isso demonstra a influência de cada peso em cada iteração realizada no NBI.

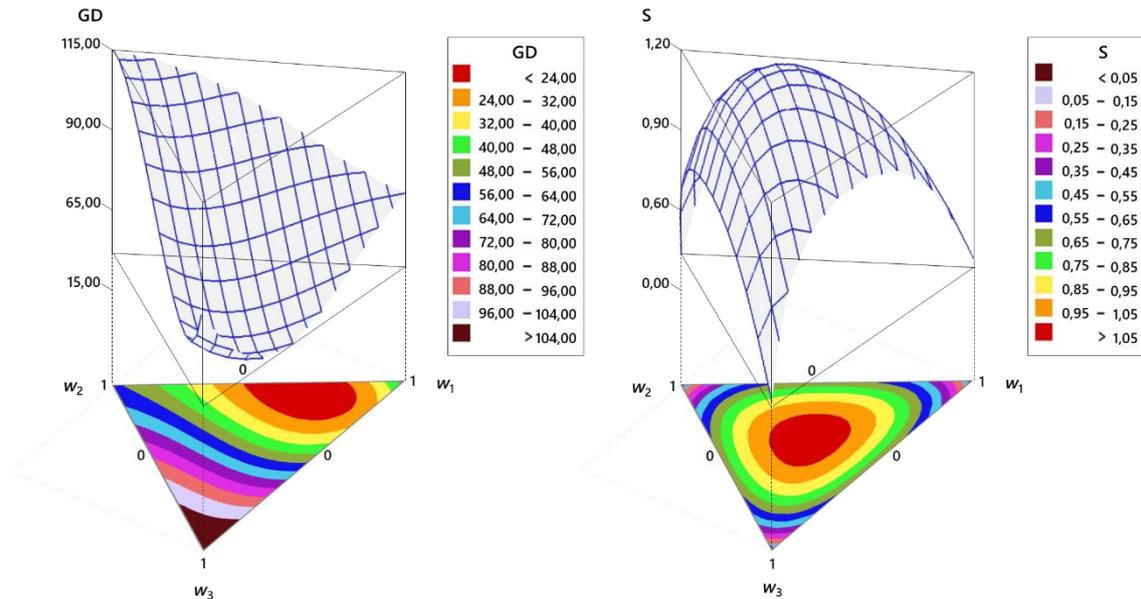


**Figura 33** - Resultados do *Simplex-lattice* com os valores obtidos do NBI em relação às variáveis de resposta e métricas de resposta (Fonte: elaborada pelo autor)

Os resultados de 66 pontos de interpolação de um *design* de *Simplex-lattice* {3,10}, utilizado nos subproblemas do VRF-NBI para as respostas e métricas de desempenho estão ilustrados na **Figura 33**. Os histogramas mostram uma ampla gama de ótimos como resultado da influência dos pesos em cada iteração do VRF-NBI.

As métricas de desempenho, GD e S, são de suma importância para selecionar o ponto ótimo mais atraente, de acordo com os objetivos em questão. Portanto, a **Figura 34** exhibe o gráfico de contorno bidimensional na base e o gráfico de superfície tridimensional acima dele. Esses gráficos permitem observar como as funções se comportam e a faixa

de cores em relação a cada uma das variáveis ótimas potenciais, auxiliando a tomada de decisão ao avaliar tendências. Os gráficos estão correlacionados com os pesos, mostrando assim o movimento de cada um em relação a  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$ .



**Figura 34** - Gráfico de Contorno e Gráfico de Superfície das métricas (Fonte: elaborada pelo autor)

É crucial escolher a métrica ideal a ser utilizada, pois algumas soluções podem anular os pesos ( $w_i$ ) ou algumas das variáveis de entrada ( $x_i$ ). Conseqüentemente, algumas métricas carecem de precisão na identificação do ponto mais viável e podem resultar em um desses resultados que anulam tanto  $w_i$  quanto  $x_i$ , o que não é desejável para o MO dado.

Ao avaliar ambas as métricas utilizadas no estudo, elas não produzem os mesmos melhores pontos entre as 66 soluções. As primeiras 3 linhas da **Tabela 11** exibem as melhores soluções em relação ao GD, que precisa ser minimizado.

**Tabela 11** - Principais resultados em relação a GD e S

$w_1$	$w_2$	$w_3$	BM	MFR	T	PI	MC	MTP	MMV	AT $\epsilon$	S	GD
0,400	0,000	0,600	7,206	26,492	33,668	38,042	10,738	7,977	12,441	13,428	0,673	15,178
0,300	0,100	0,600	7,300	27,185	34,060	38,823	10,913	7,916	12,474	13,210	0,898	16,506
0,200	0,100	0,700	6,756	26,093	31,212	37,934	10,487	7,568	12,081	12,290	0,802	17,971
0,300	0,300	0,400	8,499	30,754	40,568	42,189	12,112	8,370	13,244	15,068	1,089	39,214
0,400	0,300	0,300	9,018	31,805	43,494	43,118	12,532	8,674	13,591	16,180	1,089	48,595
0,300	0,400	0,300	9,079	32,521	43,806	43,892	12,716	8,585	13,609	16,081	1,089	56,054

Nota: Os primeiros três são os melhores pontos em termos de GD, e os últimos três em termos de S.

Neste ponto, observa-se que os valores de  $S$  não são tão altos. No entanto, as últimas três linhas mostram a maior entropia entre as variáveis, indicando a maximização de  $S$ . Também é perceptível que não há muitos pontos favoráveis em relação ao GD. Contudo, essas soluções representam as melhores respostas de acordo com cada métrica. Dependendo do objetivo estabelecido, elas podem ser muito eficientes e cumprir o papel esperado, mesmo que não otimizem todos os critérios de forma simultânea.

Ao trabalhar com MOP, é fundamental garantir que os pontos encontrados sejam ótimos globais e não apenas locais, embora esse processo seja desafiador. Uma das etapas cruciais para essa verificação é analisar a convexidade das funções. Além disso, a escolha dos pontos iniciais também deve ser considerada, como já mencionado. O algoritmo é executado a partir de diversos pontos, mas é importante destacar que isso pode influenciar os problemas de otimização baseados em gradiente. Para aumentar a confiabilidade dos resultados, este trabalho também realiza uma análise de sensibilidade, que contribui para garantir que os pontos encontrados correspondam a soluções globais, e não locais. Além disso, foi realizada uma verificação abrangente dos espaços de busca, utilizando mais de um solver, o que reforça a certeza de que os pontos encontrados são, de fato, ótimos globais.

É importante ressaltar que, no contexto do VRF-NBI, os resultados obtidos, mesmo sem a seleção dos melhores pontos com base em GD e  $S$ , superaram significativamente a abordagem anterior. Isso reforça a importância de adotar uma metodologia robusta, capaz de gerar resultados superiores, independentemente de uma otimização completa de todas as métricas simultaneamente.

#### 4.6. Otimização a posteriori

Reconhecendo que cada métrica possui diferentes objetivos e resultados, e que muitas vezes o melhor resultado de uma métrica pode ser ruim em relação a outra, surge a possibilidade de combinar mais de uma métrica. Além disso, com um grande número de soluções Pareto-ótimas, há uma necessidade de escolher o melhor ponto entre os viáveis; nesse impasse, a P-O se torna uma solução apropriada para refinar os resultados obtidos. O GD lida com a diferença ou semelhança entre distribuições de probabilidade, enquanto o  $S$ , também calculado com base em probabilidades, busca maior diversificação. Assim, a combinação das duas métricas é uma maneira eficaz de aproveitar as vantagens de cada uma e buscar “compensar” as desvantagens.

Todas as soluções encontradas são ótimas e viáveis, mas algumas podem ser mais adequadas ao tomador de decisão que as outras. Com o uso da P-O, torna-se possível encontrar melhores soluções possíveis dentro do espaço formado pelos pontos de interpolação da grade. As métricas GD e S são úteis para verificar o desempenho das soluções encontradas.

Como uma distância multivariada ao ponto de utopia, GD é uma função objetivo que deve ser minimizada, enquanto S deve ser maximizada. Maximizar S aumenta a diversidade nos dados, levando soluções com pesos mais equilibrados, enquanto minimizar GD busca a proximidade da utopia. A utopia serve como mecanismo para evitar a concentração de pesos em soluções com GD mínima, nas quais alguns pesos podem ser zero para quaisquer funções objetivo considerada. S é crucial na otimização de portfólio multiobjetivo, pois ajuda a evitar a concentração de pesos em uma única solução.

Ao contrário da MD, que usa valores de dados observados, a GD utiliza valores de modelo preditivo de  $f(\mathbf{x})$ , identificando, assim, incertezas que não são observáveis com a MD, sendo especialmente adequada quando os dados possuem correlação. Para definir GD, foram consideradas a matriz de *design*  $\mathbf{X}$  (**Tabela 12**) e de variância-covariância das superfícies de resposta preditivas (**Tabela 13**), conforme sugerido anteriormente.

De acordo com Myers, Montgomery e Anderson-Cook (2016), a matriz de projeto baseia-se no arranjo CCD com uma coluna específica associada a cada coeficiente desejado no modelo polinomial escolhido. A primeira coluna é um vetor unitário, pois  $\beta_0$  é uma constante, as três colunas seguintes referem-se às variáveis de entrada  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ ; a partir da quarta coluna, os termos seguem os termos polinomiais. Essas escolhas levam a um  $\mathbf{z}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_1^2 \ x_2^2 \ x_3^2 \ x_1x_2 \ x_1x_3 \ x_2x_3]$  em que  $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ x_3]$ . Os valores de  $\mathbf{x}^T$  são provenientes dos 66 subproblemas do VRF-NBI.



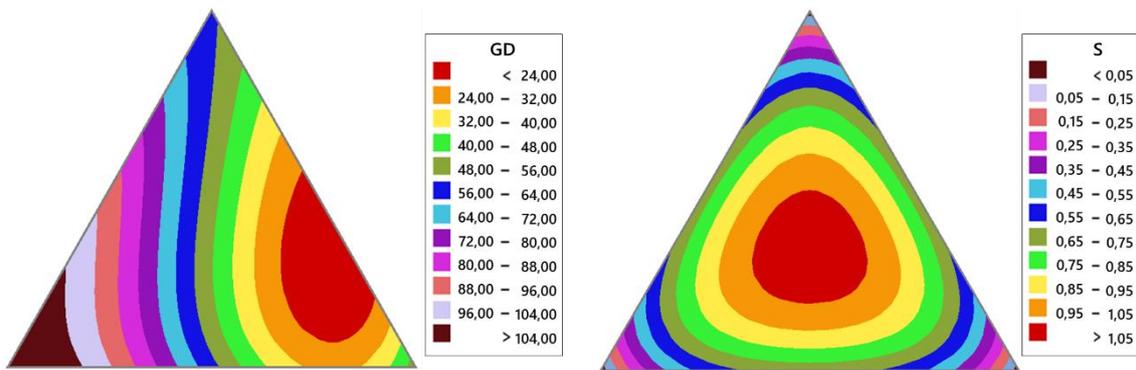
representados na **Tabela 14**. Assim, a implementação da NBI permite a obtenção de 21 novas soluções em relação à combinação de métricas e seus respectivos pesos. Nesse refinamento, a ideia é encontrar o melhor peso entre os possíveis, considerando que na **Subseção 4.5** não foi possível encontrar pesos com um espaçamento menor que 10,0%, por exemplo, nesta etapa, isso é viável. Em relação às métricas do modelo, os valores de  $R^2$  para  $F_1GD$ ,  $F_2S$ ,  $GD$  e  $S$  foram 99,63%, 99,73%, 99,65% e 99,81%, respectivamente.

**Tabela 14** - Polinômio quártico completo em relação às métricas  $GD$  e  $S$  e seus respectivos fatores

Termo	$F_1GD$	$F_2S$	$GD$	$S$	$z(\mathbf{w})$
$w_1$	-0,322	-2,726	57,207	-0,007	<b>0,330</b>
$w_2$	1,624	-2,510	111,473	-0,007	<b>0,340</b>
$w_3$	-0,462	-2,742	53,300	-0,007	<b>0,330</b>
$w_1w_2$	2,259	10,401	31,120	2,768	0,112
$w_1w_3$	-3,793	9,728	-137,577	2,768	0,109
$w_2w_3$	-2,214	9,904	-93,552	2,768	0,112
$w_1w_2(w_1-w_2)$	-1,026	-0,114	-28,600	0,000	-0,001
$w_1w_3(w_1-w_3)$	3,369	0,374	93,902	0,000	0,000
$w_2w_3(w_2-w_3)$	7,033	0,782	196,065	0,000	0,001
$w_1^2w_2w_3$	5,610	20,684	93,452	5,470	0,012
$w_1w_2^2w_3$	-2,816	19,748	-141,436	5,470	0,013
$w_1w_2w_3^2$	-4,790	19,529	-196,459	5,470	0,012
$w_1w_2(w_1-w_2)^2$	-0,100	5,303	-19,452	1,449	0,000
$w_1w_3(w_1-w_3)^2$	1,064	5,433	13,000	1,449	0,000
$w_2w_3(w_2-w_3)^2$	-0,090	5,304	-19,184	1,449	0,000

Nota: Cada um dos pesos ( $w_n$ ) está representado em negrito.

A coluna nomeada como  $z(\mathbf{w})$  é um vetor que segue as expressões polinomiais listadas na coluna “termos” e reflete o tipo de polinômio de quarta ordem de Scheffé que pode ser ajustado com os dados de resposta disponíveis. Esse vetor é importante para definir  $f(\mathbf{w}) = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{z}(\mathbf{w})$ , onde  $\mathbf{w}$  é o vetor de pesos do NBI. A **Figura 35** mostra os gráficos de contorno de mistura para  $GD$  e  $S$ , de acordo com os modelos estabelecidos na **Tabela 14**.



**Figura 35** - Gráfico de contorno de mistura para distância generalizada e entropia de Shannon (Fonte: elaborada pelo autor)

A **Tabela 15** exibe todos os 21 pontos da P-O, enfatizando que é possível alterar a importância de cada um dos pesos. Isso significa que, ao aumentar um deles, isso resultará em uma maior importância naquele fator, o que representa que as variáveis presentes nele terão uma maior representatividade no momento da otimização. Assim, ao aumentar a importância de um certo peso, um novo conjunto de soluções é criado. O  $\beta$  varia de 1 a 0, onde quanto mais próximo de 1, o GD é priorizado, sendo o menor possível, e quanto mais o  $\beta$  se aproxima de 0, o S, que é maximizado, melhora. Portanto, para dar igual importância a ambos os itens,  $\beta$  é fixado em 50,0%, assim mesclando a relevância de ambas as métricas.

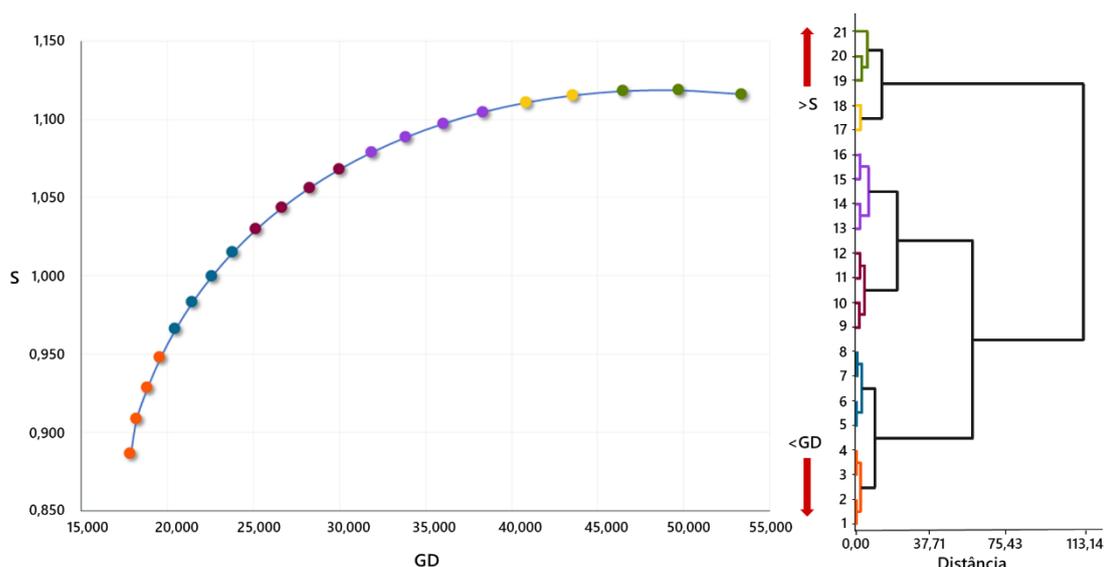
**Tabela 15 - Soluções de P-O em relação às métricas e pesos**

$\beta$	F <sub>1</sub> GD	F <sub>2</sub> S	GD	S	w <sub>1</sub>	w <sub>2</sub>	w <sub>3</sub>
1,000	-1,364	0,433	17,887	0,886	0,313	0,096	0,591
0,950	-1,343	0,517	18,218	0,908	0,278	0,120	0,603
0,900	-1,312	0,594	18,852	0,928	0,278	0,131	0,591
0,850	-1,277	0,668	19,606	0,948	0,279	0,142	0,579
0,800	-1,238	0,739	20,479	0,966	0,281	0,153	0,566
0,750	-1,196	0,807	21,473	0,983	0,284	0,163	0,553
0,700	-1,149	0,873	22,588	1,000	0,287	0,174	0,539
0,650	-1,098	0,935	23,824	1,015	0,290	0,185	0,525
0,600	-1,043	0,995	25,183	1,030	0,294	0,195	0,510
0,550	-0,984	1,052	26,664	1,043	0,298	0,206	0,496
<b>0,500</b>	<b>-0,922</b>	<b>1,105</b>	<b>28,271</b>	<b>1,056</b>	<b>0,302</b>	<b>0,217</b>	<b>0,481</b>
0,450	-0,854	1,156	30,006	1,068	0,307	0,228	0,465
0,400	-0,783	1,203	31,873	1,079	0,311	0,239	0,450
0,350	-0,707	1,248	33,880	1,088	0,315	0,251	0,434
0,300	-0,626	1,288	36,036	1,097	0,319	0,263	0,417
0,250	-0,540	1,325	38,353	1,104	0,323	0,276	0,400
0,200	-0,448	1,357	40,850	1,111	0,327	0,290	0,383
0,150	-0,349	1,385	43,552	1,115	0,330	0,305	0,365
0,100	-0,242	1,407	46,495	1,118	0,332	0,321	0,347
0,050	-0,126	1,422	49,734	1,118	0,334	0,339	0,328
0,000	0,003	1,427	53,357	1,116	0,334	0,359	0,307

Nota: A combinação com 50,0% de peso para GD e 50,0% para S está representada em negrito.

Como esperado, a GD mínima ocorre em uma região onde um dos pesos está próxima de zero. Por outro lado, o valor máximo para a entropia está no centroide da região do *lattice* do *Simplex*, em uma posição onde se tem aproximadamente  $w_1 = w_2 = w_3 = 0.33$ .

A **Figura 36** ilustra a Fronteira de Pareto em relação ao GD e ao S, representando as soluções ideais para este MOP e exibindo as 21 possíveis soluções de acordo com as métricas de desempenho. Para completar a figura, um dendrograma de observações agrupadas é utilizado, mostrando que quanto mais próxima uma solução está de 1, mais próxima está da utopia do GD, enquanto quanto mais próxima estiver de 21, mais próxima está da utopia do S. Isso também revela o agrupamento de cada solução possível. Vale ressaltar que não é possível melhorar um objetivo sem piorar o outro, destacando a importância dos *trade-offs* nessas relações. O ponto central representa o  $\beta$  de 50,0%, resultando em um GD de 28,271 e um S de 1,056.



**Figura 36** - Fronteira de Pareto e observações de *clusters* para GD e S (Fonte: elaborada pelo autor)

Após realizar a NBI para P-O, uma nova otimização é realizada usando os pesos encontrados anteriormente como referência. Portanto, com o vetor de peso escolhido ( $w$ ), neste caso, 50,0% de preferência foi combinado para cada uma das métricas, resultando em um novo resultado ótimo. Com isso, torna-se possível fazer comparações em relação às respostas obtidas anteriormente e os pontos de utopia e nadir de cada uma das variáveis originais.

Para fins comparativos, na **Tabela 16** é possível verificar os melhores resultados da aplicação do método NBI juntamente com o resultado da P-O, que combina GD e S, dada uma importância igual de 50,0% para cada. A primeira linha corresponde ao melhor resultado de GD, a segunda linha ao melhor resultado de S, enquanto a terceira linha apresenta as variáveis com o melhor resultado em relação à P-O. Para avaliar a proximidade à utopia de cada um dos resultados, a última linha representa a otimização individual de cada uma das respostas originais. A **Tabela 16** facilita a compreensão dos melhores resultados obtidos, pois a Fronteira de Pareto, ilustrada anteriormente, considera apenas S e GD. Com ela, não é possível identificar os resultados das respostas originais, o que é essencial para o tomador de decisões. Pois, busca-se entender como as respostas variam em relação a cada ponto específico, o que proporciona uma visão mais clara das escolhas possíveis.

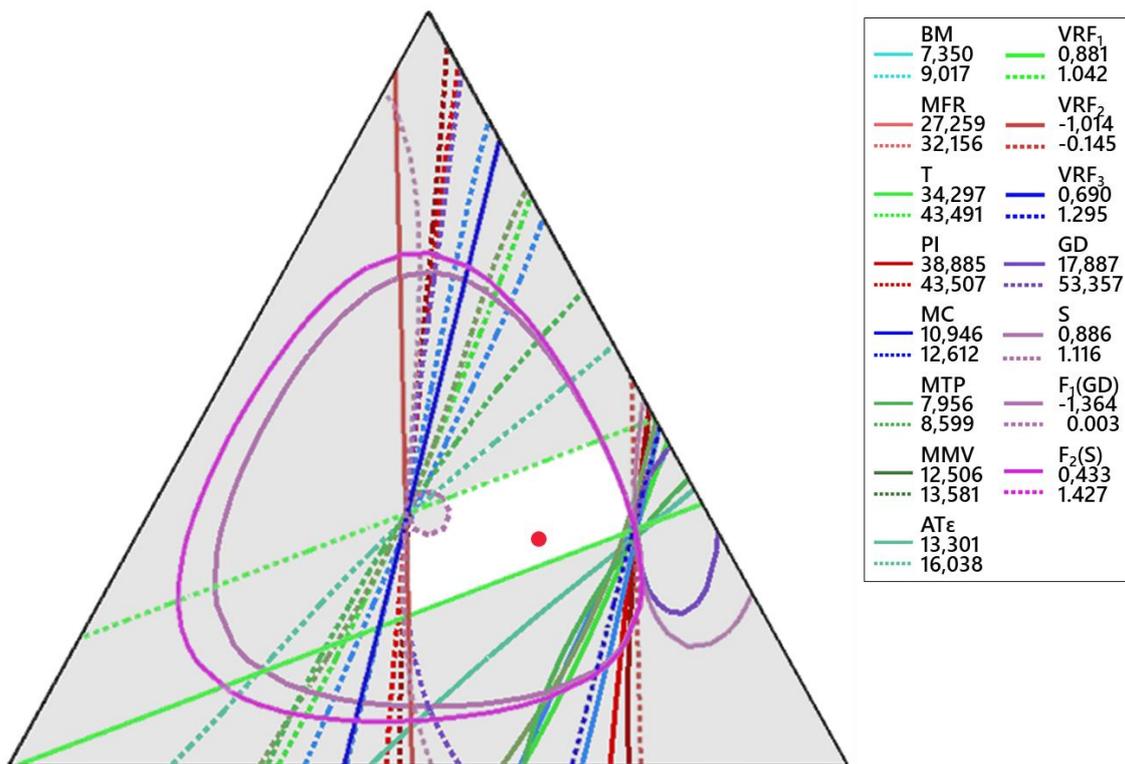
**Tabela 16** - Comparação entre os melhores pontos em termos de métricas (NBI) e a P-O

NB	BEA	BOA	BL	BM	MFR	T	PI	MC	MTP	MMV	AT $\epsilon$
11	17,9	55,0	23,8	7,206	26,492	33,668	38,042	10,738	7,977	12,441	13,428
14	14,3	66,8	27,7	8,499	30,754	40,568	42,189	12,112	8,370	13,244	15,068
13	14,1	66,2	26,4	8,025	29,301	37,907	40,821	11,623	8,204	12,963	14,287
				<b>5,015</b>	<b>40,005</b>	<b>10,610</b>	<b>51,812</b>	<b>8,578</b>	<b>2,019</b>	<b>15,063</b>	<b>5,781</b>

A **Tabela 16** apresenta os melhores resultados encontrados com o método, com os valores das variáveis de entrada de forma decodificada e as respostas originais avaliadas, com isso, também é possível fazer uma verificação de acordo com a utopia de cada uma das variáveis de resposta. As soluções buscam representar uma combinação ideal entre os fatores, mantendo o ventilador com condições ideais para trabalho, levando em consideração inúmeras variáveis. Esse equilíbrio entre as respostas torna a solução uma escolha robusta para operações otimizadas envolvendo problemas de CFD.

Esse método fornece resultados altamente eficientes, além de possibilitar a criação de novas variedades de pontos ótimos e viáveis. Após obter os resultados, a porcentagem dos resultados das variáveis originais em relação à utopia é comparada. Também se enfatiza que quanto mais próximo o carregamento da variável original do fator se aproxima de 1, mais aquele fator a representará, significando que isso influencia o processo de otimização.

Métricas de desempenho, como S e GD, utilizadas neste estudo, são de grande importância para verificar os resultados obtidos. Muitas vezes, escolher um ponto ótimo dentro de um grande número de pontos viáveis é desafiador, e tomar decisões sem uma base sólida não é a melhor opção. Destaca-se que pontos mais próximos da utopia têm baixa entropia, e resultados com alta entropia nem sempre garantem baixas distâncias em relação aos alvos. Portanto, destaca-se a importância de garantir um compromisso entre as métricas utilizadas. Os gráficos de contornos sobrepostos revelam a complexidade do MOP abordado nesta pesquisa, destacando uma região viável muito estreita. A **Figura 37** apresenta o gráfico de contorno sobreposto em relação às variáveis originais, aos fatores e às métricas.



**Figura 37** - Gráfico de contorno sobreposto para variáveis de resposta, fatores e métricas (Fonte: elaborada pelo autor)

Neste trabalho, também foi avaliada a GD conforme sugerido no método TOPSIS, calculando-se as métricas de GD+ e GD-. Enquanto GD+ foi calculado considerando o ponto de utopia, GD- foi realizado considerando o ponto de pseudo-nadir. A expectativa era criar uma soma de classificações das melhores soluções; no entanto, as métricas GD+ e GD- apresentaram uma correlação extremamente positiva entre si, sugerindo que o TOPSIS também pode ser adaptado para ser aplicado com as superfícies de resposta correlacionadas.

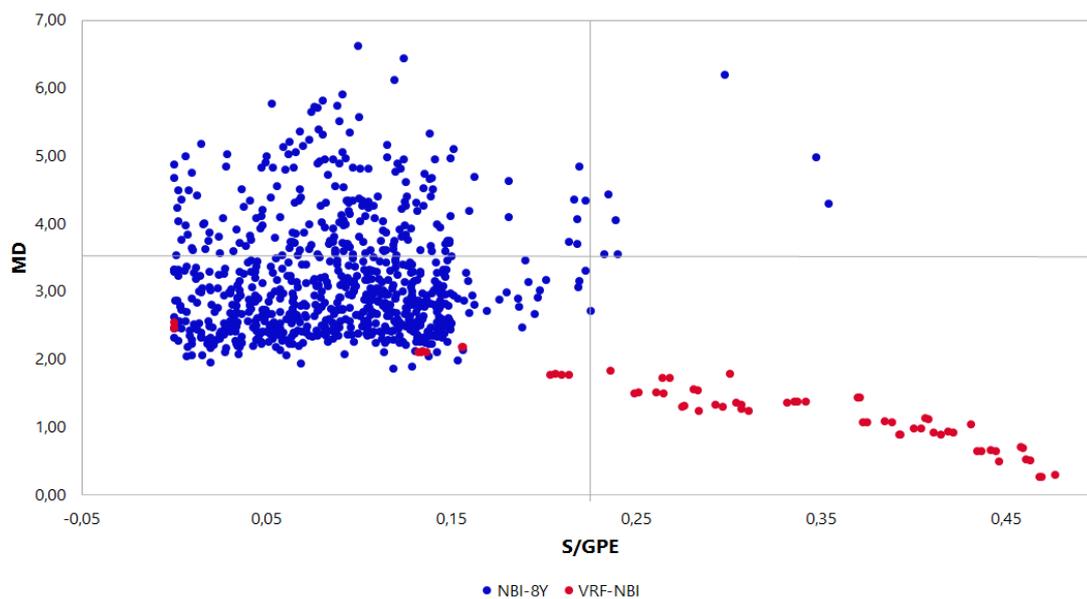
É crucial entender a figura que exibe a dificuldade em trabalhar com múltiplos objetivos, em que é necessário utilizar *trade-off* para a definição da importância das variáveis. Na **Figura 37** os resultados ótimos e viáveis estão dentro dessa área branca, enquanto o ponto ótimo ideal escolhido com base em decisões anteriores é mostrado em vermelho. O ponto ótimo decodificado em questão é  $\mathbf{x}^{\text{T}^*} = [13 \quad 14.1 \quad 66.2 \quad 26.4]$  com peso  $\mathbf{w}^{\text{T}^*} = [0.302 \quad 0.217 \quad 0.481]$ .

Para assegurar que o resultado obtido corresponde a um ótimo global, e não apenas a um ótimo local, foram adotadas múltiplas estratégias de verificação. Primeiramente, analisou-se a convexidade das funções. Além disso, o problema foi resolvido a partir de

diferentes pontos iniciais para avaliar a convergência da solução. Por fim, os resultados foram comparados com aqueles obtidos por métodos de otimização global, garantindo maior confiabilidade na solução encontrada.

#### 4.7. Comparações entre as abordagens do NBI

Para avaliar a extensão dos resultados mencionados, uma versão completa do método NBI com o mesmo conjunto de oito funções objetivo foi executada para a comparação com a proposta VRF-NBI. O método foi aplicado com  $p = 8$   $\delta = 0,2$ , resultando em  $N_{sub} = 792$  combinações de pesos convexas (12 vezes maior que o VRF-NBI com 3 fatores), o que gera um maior tempo e custo computacional. O comparativo entre os métodos, utilizando outras métricas, como S/GPE e MD é ilustrado na **Figura 38**.

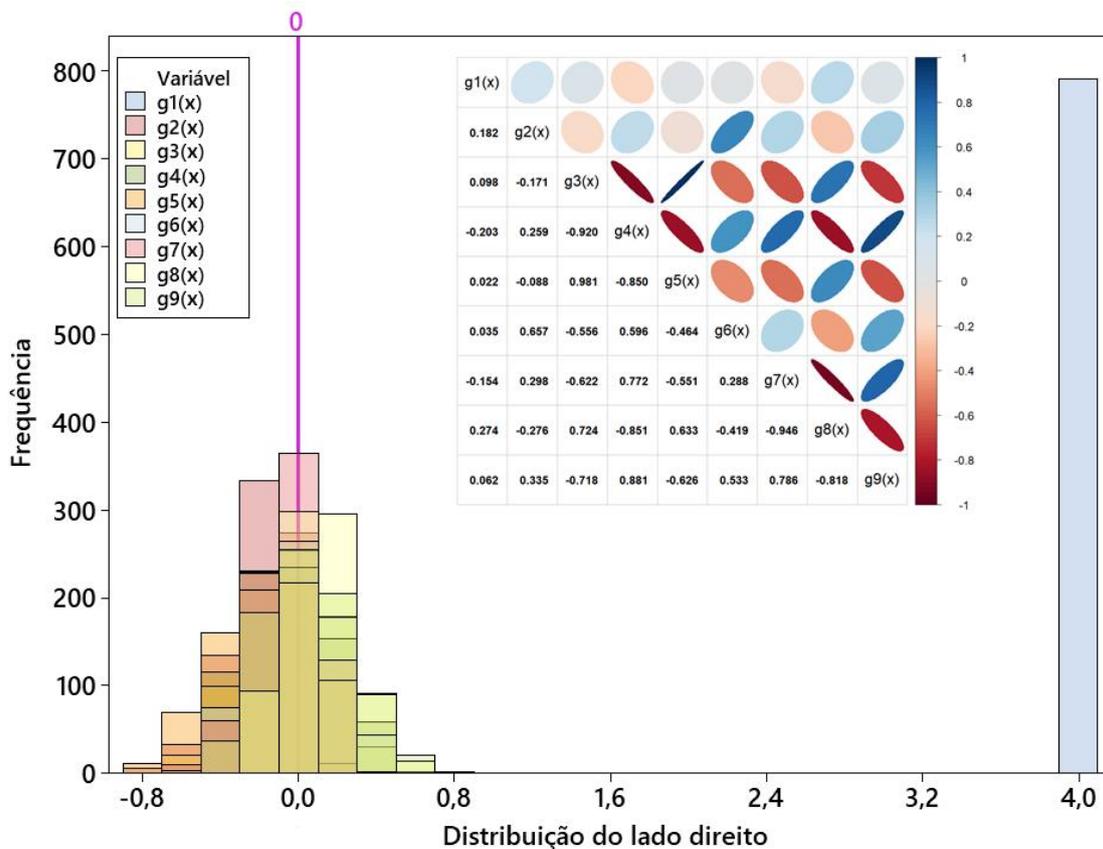


**Figura 38** - Gráficos de dispersão sobrepostos para NBI e VRF-NBI em termos de S/GPE x MD (Fonte: elaborada pelo autor)

Para ambas as propostas de otimização, compara-se GD com S, as métricas de desempenho utilizadas durante o estudo. Ao examinar a proximidade das soluções Pareto-ótimas ao ponto de utopia de ambas as propostas, verifica-se que o VRF-NBI atinge os menores valores de GD com os maiores valores de S indicando que a abordagem multivariada é mais eficaz do que o NBI tradicional.

Outro achado significativo está relacionado às restrições do NBI. Com os 792 subproblemas do NBI tradicional, foi possível verificar correlações significativas e elevadas para todos os pares de restrições do NBI, conforme mostrado na **Figura 39**. Isso demonstra numericamente que, quando as múltiplas funções objetivo estão correlacionadas, as restrições do NBI permanecem linearmente dependentes, o que contribui substancialmente para muitos resultados que violam os requisitos de restrição.

A **Figura 39** também mostra a distribuição estocástica do lado direito das restrições (RHS). Conforme apresentado na **Eq. (1)**, a MO desenvolvido por Das e Dennis (1998) requer que todas as restrições sejam iguais a zero. A partir dos resultados mostrados na **Figura 39**, observa-se que a distribuição dos RHS do NBI com  $8Y$  apresenta uma ampla faixa de valores para esse parâmetro e que apenas uma pequena fração das restrições entre as 6.336 apresentaram valores iguais a zero, e nenhum dos 792 conjuntos de restrições mostrou total conformidade com as 8 restrições de igualdade do NBI. Surpreendentemente, valores negativos foram encontrados entre os resultados de otimização.



**Figura 39** - Distribuição do lado direito e correlação entre pares de restrições do NBI (Fonte: elaborada pelo autor)

Diante desses achados, acredita-se fortemente que isso ocorreu porque superfícies de resposta correlacionadas não conseguem manter a independência linear, resultando em inconformidades como redundância de restrições e falta de ortogonalidade. Parece razoável que abordagens multivariadas sejam realmente adequadas e necessárias para superar tais desvantagens.

#### 4.8. Análise de sensibilidade com simulação multivariada de coeficientes

Para examinar o comportamento das variáveis por meio de simulação, foi empregada uma análise de sensibilidade para avaliar o comportamento dos fatores, avaliar a robustez dos modelos identificados, verificar a qualidade do desenho experimental utilizado e validar o modelo.

Simulações das Fronteiras de Pareto foram realizadas para comparar o GD com o S. As simulações assumiram que os coeficientes do modelo de superfície de resposta seguem uma distribuição normal e independente. Novos coeficientes independentes foram criados com o vetor médio ( $\beta$ ) e o erro padrão dos coeficientes (SE COEF) utilizados como métricas de SD. Cada valor original do coeficiente, denotado por  $\beta_j$  juntamente com seu respectivo SE COEF, foi considerado como a média e o SD para cada fator, utilizando também a rotação Varimax. Esse processo gerou inúmeras novas funções com base nas originais, com simulações dos fatores **VRF<sub>1</sub>**, **VRF<sub>2</sub>** e **VRF<sub>3</sub>**.

Para realizar essa simulação, 50 conjuntos de coeficientes foram simulados de acordo com os fatores originais. Após isso, 66 combinações convexas de pesos foram criadas, obtidas segundo o MDE para cada um dos 50 conjuntos gerados em relação às três superfícies de resposta dos fatores. As métricas (GD e S) foram calculadas e armazenadas para cada experimento. A FA foi realizada sobre os experimentos.

Um polinômio canônico de quarta ordem foi construído para as métricas e as métricas dos fatores ( $F_1$ GD e  $F_2$ S) com armazenamento de coeficientes. Por fim, a Fronteira de Pareto para esse problema foi construída utilizando pesos equidistantes de 5%, resultando em 21 subproblemas, cada um representando um ponto na fronteira. Esse processo foi repetido até que o número desejado de simulações fosse alcançado. Os resultados simulados foram então plotados junto aos resultados originais. Também foi importante calcular o intervalo de predição multivariado, dado por  $1-\alpha$ , para cada uma das 21 soluções Pareto-ótimas dos modelos. O **Algoritmo 7** resume o passo a passo do método de simulação.

---

**Algoritmo 7** - Simulações baseadas no erro padrão dos coeficientes

---

Início do Algoritmo 7

*Input:* Conjunto original dos fatores

Passo 1: Simule  $n$  conjuntos de coeficientes ( $\mathbf{VRF}_1$ ,  $\mathbf{VRF}_2$  e  $\mathbf{VRF}_3$ )

Passo 2: Repita as 66 combinações de pesos fornecidas pelo MDE para cada um dos  $n$  conjuntos

Passo 3: Calcule e armazene os valores de  $\mathbf{GD}$  e  $\mathbf{S}$  para cada uma das 66 iterações para cada simulação

Passo 4: Realize uma FA para  $\mathbf{GD}$  e  $\mathbf{S}$  em cada uma das simulações

Passo 5: Construa um polinômio canônico de quarta ordem para  $\mathbf{GD}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{F}_1\mathbf{GD}$  e  $\mathbf{F}_2\mathbf{S}$

Passo 6: Construa uma fronteira de Pareto do problema formado por  $\mathbf{GD}$  x  $\mathbf{S}$

Passo 7: Repita os passos anteriores de acordo com a quantidade de  $n$

Passo 8: Plote as fronteiras de Pareto simuladas e a original

Passo 9: Calcule o intervalo de previsão multivariado para cada solução ótima do modelo original

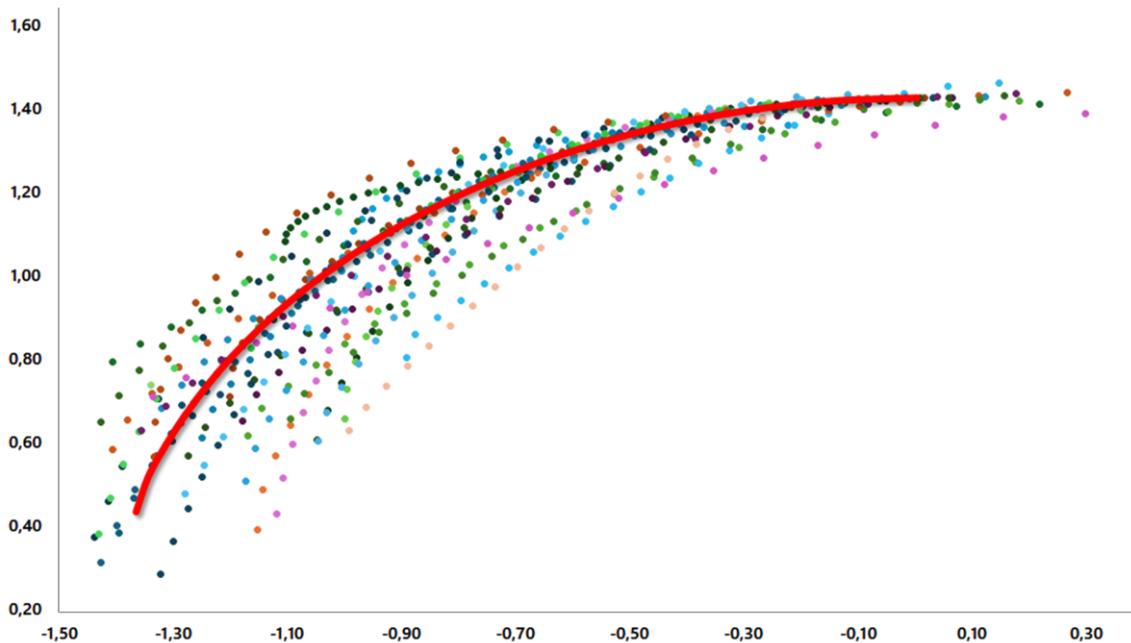
*Output:* Resultados numéricos e fronteiras das simulações

Fim do Algoritmo 7

---

As fronteiras com simulações estão ilustradas na **Figura 40**, mostrando cada simulação realizada junto aos valores dos fatores originais para comparação. A linha vermelha representa a fronteira real, enquanto os outros pontos, diferenciados por cores, correspondem às simulações realizadas. A Fronteira de Pareto do  $\mathbf{GD}$  com o  $\mathbf{S}$  original, contendo 21 pontos da P-O e 50 simulações adicionais, é apresentada.

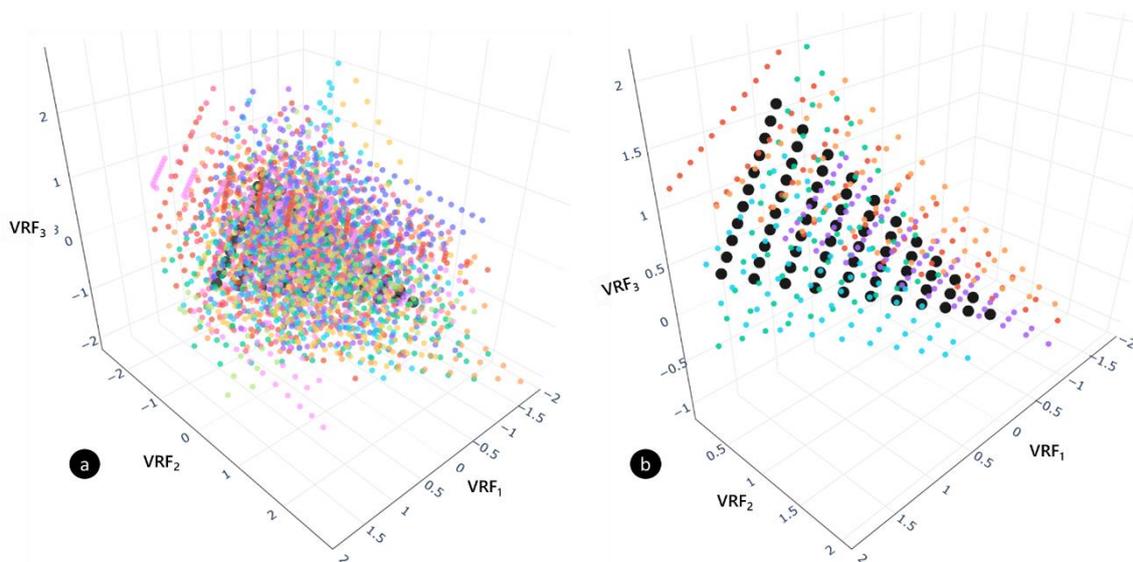
A análise de sensibilidade permite identificar quais variáveis de entrada têm maior impacto sobre as variáveis de saída. Além disso, ela é útil para verificar a estabilidade das soluções e detectar possíveis inconsistências nos modelos.



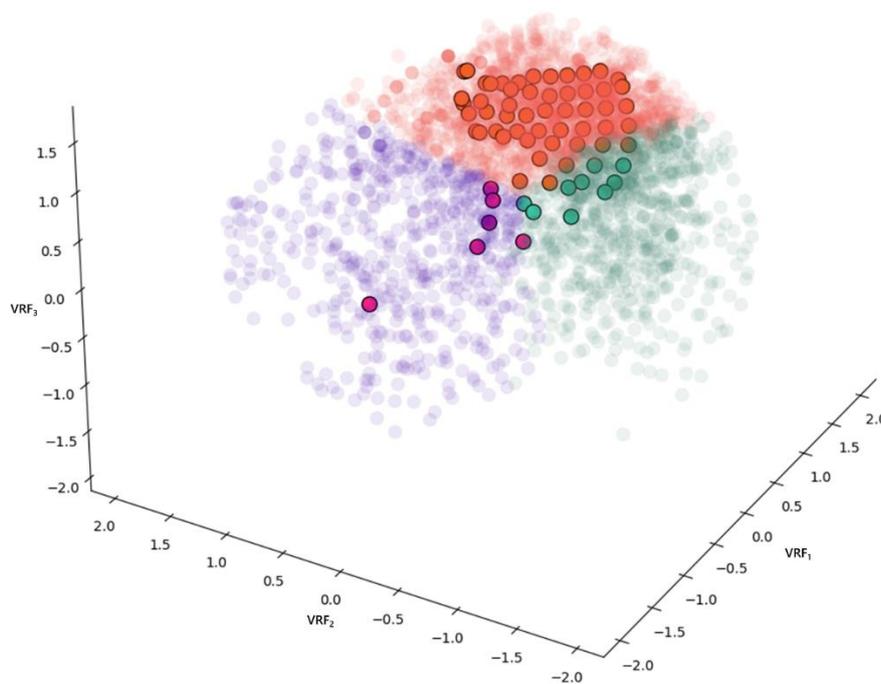
**Figura 40** - Fronteiras de Pareto com real (COEF) e simulado (SE COEF) (Fonte: elaborada pelo autor)

Na **Figura 41** é apresentado um comparativo dos fatores rotacionados gerados pelo *Simplex-lattice*, permitindo uma observação inicial de todos os pontos em relação aos valores reais. Na **Figura 41**, uma amostra selecionada é destacada, proporcionando uma visão mais clara das diferentes fatias.

A análise de *clusters* com o *K-Means* foi conduzida para segmentar os fatores rotacionados e examinar o agrupamento dos resultados com base no comportamento dos pontos simulados em relação aos resultados reais, conforme ilustrado na **Figura 42**. Ressalta-se que esse resultado não teve o objetivo de comparar métodos, mas sim de demonstrar a separação entre as soluções reais e simuladas.



**Figura 41** - Comparativo do *Simplex-lattice* real e simulado (Fonte: elaborada pelo autor)



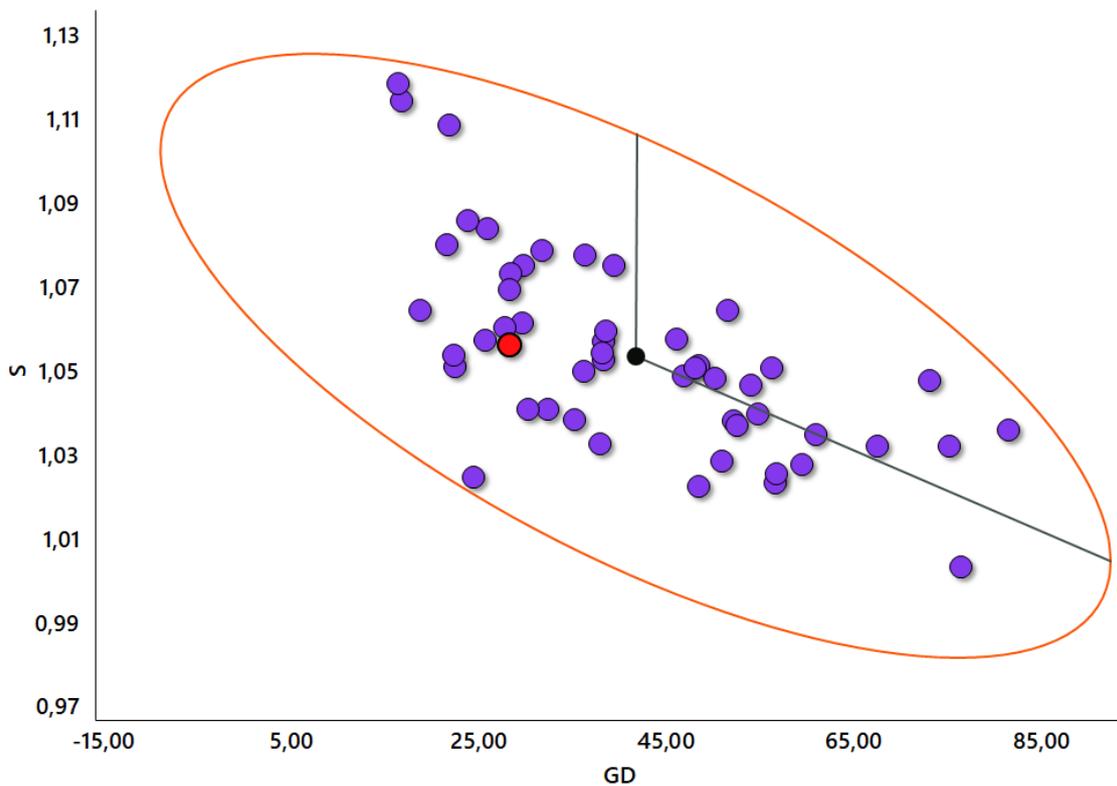
**Figura 42** - Agrupamento de fatores reais e simulados com *K-Means* (Fonte: elaborada pelo autor)

Para complementar a análise, uma elipse de confiança de 95% foi plotada na **Figura 43** (sua construção baseia-se no código da elipse disponibilizado no GitHub e presente no **APÊNDICE A** - Códigos utilizados) para identificar o ponto ótimo (marcado em vermelho), que é o resultado obtido com os fatores originais, juntamente com as respostas obtidas a partir das simulações. A **Tabela 17** mostra os dados utilizados para a construção da elipse de confiança. A elipse de confiança também pode ser utilizada como

apoio no momento de comparação dos experimentos ou dos resultados ótimos, como visto em (Mendes *et al.*, 2023; Pereira *et al.*, 2023a; Pereira *et al.*, 2024f).

**Tabela 17** - Dados para a confecção da elipse de confiança

$\Sigma$	278,310	-0,269	<b>P</b>	1,000	0,001	$\mu_1^T$	$\mu_2^T$	<b>Pontos</b>	<b>x</b>	<b>y</b>
	-0,269	0,001		-0,001	1,000					
<b>p</b>	2,000		<b><math>\Lambda</math></b>	278,311	0,000	$\chi^2$	5,991	PC <sub>1</sub> + $\mu$	92,358	1,005
	<b><math>\rho</math></b>	-0,679		0,000	0,000			PC <sub>2</sub>	41,729	1,054
<b><math>\theta</math></b>	-0,001		<b>L<sup>T</sup></b>	16,683	-0,016	<b>Raios</b>		$(\chi^2\Lambda)^{1/2}$	50,629	0,00
<b>x</b>	5,000%			0,000	0,017	<b>Externo</b>	50,629			
						<b>Interno</b>	0,053			



**Figura 43** - Elipse de Confiança 95% para fatores reais e simulados (Fonte: elaborada pelo autor)

Diante disso, torna-se possível avaliar como as variações em parâmetros de entrada de um modelo pode impactar diretamente as suas saídas, auxiliando a verificar a incerteza presente, o comparativo dos resultados e a validação do modelo com base nos resultados obtidos pela simulação multivariada.

#### 4.9. Comparação com outros métodos e métricas

Ao tentar a MO usando os escores de PCA, o agrupamento não seria feito da forma ideal, pois, dividindo as variáveis originais em fatores rotacionados, alguns itens seriam priorizados, tal como os que ficarem no primeiro fator, enquanto os que ficarem no terceiro não teriam tanta importância, o que não resulta em resultados satisfatórios.

O uso de FA sem rotação revela problemas de agrupamento, ele não permitiria a otimização sem comprometer alguns fatores, ou seja, dividir as variáveis originais em três componentes principais não funcionaria bem, visto que no primeiro componente ficariam 7 variáveis (T, MMV, MFR MTP, AT $\epsilon$ , PI e MC), enquanto no segundo componente apenas 1 variável (BM) e o terceiro componente não iria representar nenhuma, isso já é um grande problema, visto que as variáveis presentes no primeiro componente possuem sentidos de otimização opostos e também um dos componentes não teria utilizada alguma no MOP.

Comparando com o MMSE, em que tudo é tratado como minimização, cada um dos MMSE<sub>i</sub> irá conter uma dimensão, tal como feito nos outros métodos, e o resultado foi semelhante ao método VRF-NBI proposto.

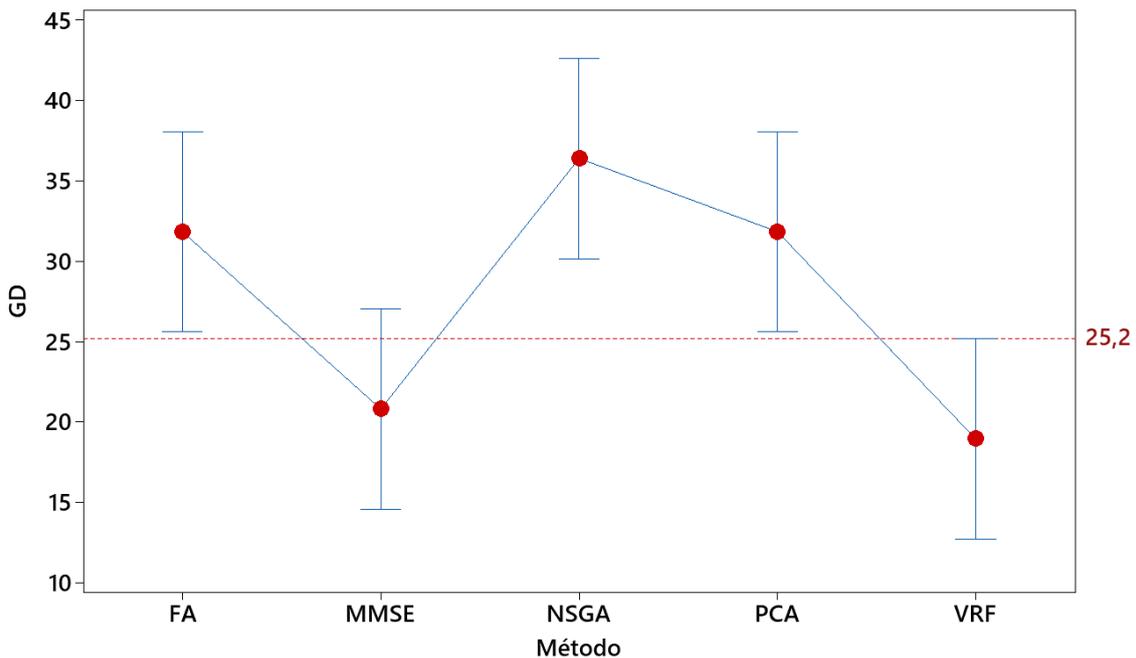
Dada a ampla utilização e eficácia do NSGA-II, também foi realizada uma comparação entre os resultados obtidos com o VRF-NBI e o NSGA-II, em que também foi realizada em Pereira *et al.* (2024d).

Ao comparar os melhores resultados com outras métricas de desempenho, fica evidente que algumas métricas não conseguem avaliar bem o problema em um contexto multidimensional. Usando a distância Euclidiana normalizada (NED), os melhores resultados tendem a eliminar pelo menos um peso, reduzindo o problema de três objetivos para dois. O GPE enfrenta uma questão semelhante ao NED. Usar S/GPE resolve isso em certa medida, mas devido à inclusão de S tende a diversificar os pesos sem reduzir a distância do ponto utópico.

Os três melhores resultados de NED são bem distintos dos resultados obtidos com o uso de S e GD no VRF-NBI, no método NBI-FA, NBI-PCA e NBI-MMSE os três melhores resultados de NED eliminam pelo menos um peso nessas soluções. O GPE apresenta questões semelhantes, todavia, neste caso, a métrica dá estes melhores resultados zerando um dos pesos até no método VRF-NBI, inclusive, no seu melhor resultado, dois pesos são zerados, transformando o problema em uma otimização com apenas um único objetivo.

Comparando com as métricas de desempenho propostas no estudo (GD e S) e outros métodos existentes, os melhores valores de GD para o VRF-NBI foram de 12,900, 16,910 e 18,362, no VRF a posteriori de 19,452, 20,394 e 21,550 (entretanto com S mais alto do que no VRF-NBI), enquanto par NBI 8Y foram de 16,632, 19,113 e 21,194, para NBI-PCA e NBI-FA foram de 11,072, 29,734 e 32,925, para NBI-MMSE de 13,570, 13,734 e 16,832 e para o NSGA-II de 25,925, 28,016 e 32,806. Os resultados de S foram iguais, visto que a entropia depende apenas dos pesos. Por fim, comparando os métodos com o TOPSIS, os três melhores resultados obtidos com o VRF-NBI foram de.

Para apoiar a alegação de resultados superiores do VRF-NBI em comparação com outros métodos, foi realizada uma análise de variância (ANOVA) para GD e S para seis tipos de alternativas de MOP. A partir disso, foram selecionadas as combinações com os menores valores de GD, restringindo a valores de S acima de 1,000 e atendendo às restrições não lineares do NBI (se o método for utilizado). A **Figura 44** exibe o gráfico de intervalo, enquanto a **Tabela 18** mostram a ANOVA relativa ao MOP.



**Figura 44** - Gráfico de intervalo de análise de variância dos métodos de otimização em relação a distância generalizada (Fonte: elaborada pelo autor)

**Tabela 18** - Análise de variância dos métodos de otimização em relação à distância generalizada com a restrição da entropia de Shannon

Fonte	Graus de liberdade	Soma dos quadrados ajustada	Média dos quadrados ajustada	F-Value	P-Value
Método	4	2002	517,33	0,78	0,000
Erro	30	1996	66,53		
Total	34	4065			

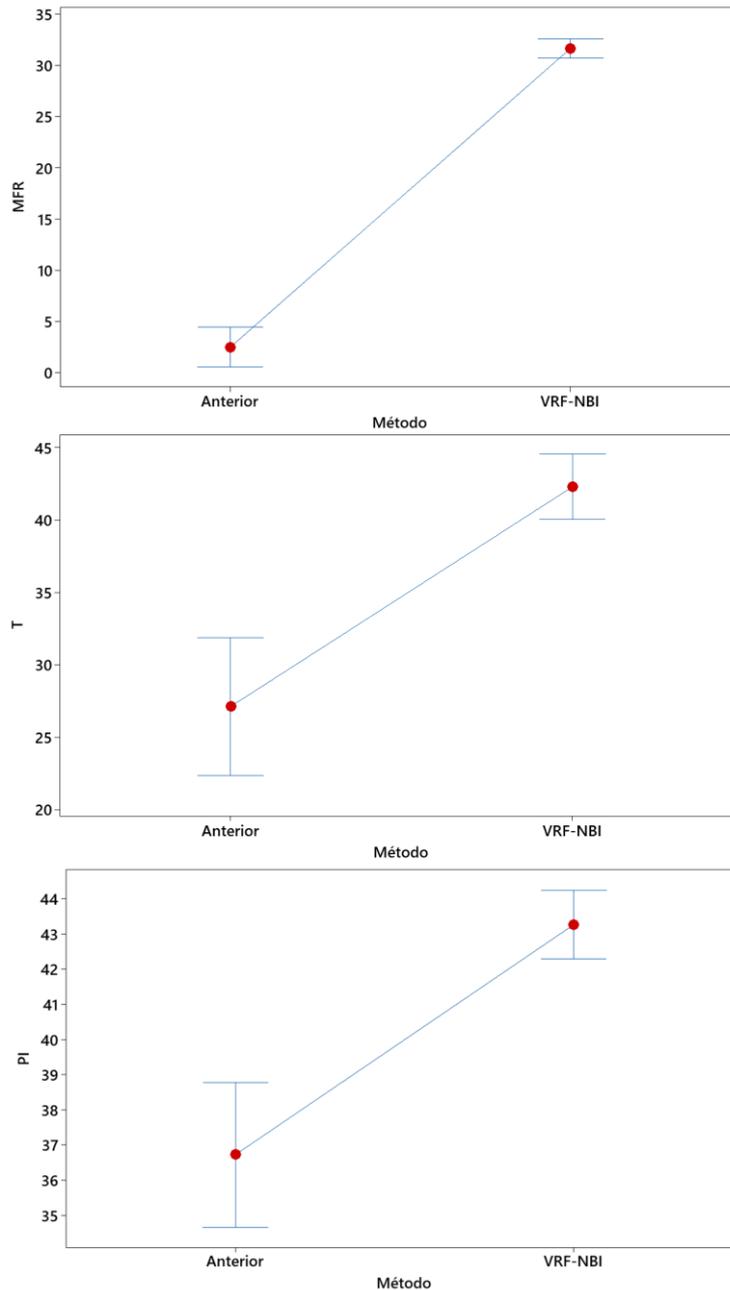
  

S	R <sup>2</sup>	R <sup>2</sup> ajustado	R <sup>2</sup> previsto
8,157	50,90%	44,36%	33,17%

Método	N	Média	S	95% (Intervalo de confiança)
FA	7	31,86	9,85	(26,11; 37,60)
MMSE	7	17,22	2,98	(11,47; 22,97)
NSGA	7	36,41	10,49	(30,67; 42,16)
PCA	7	31,86	9,85	(26,11; 37,60)
VRF-NBI	7	18,97	4,42	(13,22; 24,72)

A **Figura 45** apresenta uma comparação de MFR, T e PI entre a primeira abordagem, descrita na **Subseção 4.1**, e o método VRF-NBI. Observa-se que, com o uso do VRF-NBI, o intervalo de confiança é significativamente mais estreito para as três variáveis de resposta, resultado obtido com base em um CCD. Além disso, a diferença nos resultados, especialmente para MFR e PI, demonstra um desempenho superior em relação à abordagem inicial, evidenciando as vantagens do método proposto.



**Figura 45** - Gráfico de intervalo de análise de variância do método proposto e da abordagem anterior ao método (Fonte: elaborada pelo autor)

As simulações realizadas no Fluent apresentaram um tempo de aproximadamente 50 minutos, com cerca de 500 iterações, utilizando uma máquina equipada com um processador AMD Ryzen 7 5700X de 8 núcleos (sendo que apenas 4 núcleos foram efetivamente utilizados), uma placa de vídeo NVIDIA GeForce RTX 3060 Ti e dois módulos de memória de acesso aleatório (RAM) de 16 Gigabytes (GB) cada, operando a 3600 Megahertz (MHz).

Nos experimentos realizados antes do projeto, foram conduzidos 15 *designs* distintos, totalizando cerca de 750 minutos de simulação. Esse tempo não inclui as etapas de construção da geometria, configuração do *setup* e da solução, nem a análise dos resultados, os quais revelaram desempenhos insatisfatórios e distantes do ideal. A redução dos custos computacionais e do tempo necessário para as simulações é uma das principais vantagens apresentadas neste trabalho.

As otimizações implementadas não apenas melhoram a eficiência das simulações, mas também representam um avanço significativo em relação à ausência de um método bem definido e aos métodos anteriores. Este trabalho contribui não apenas para a melhoria do processo de *design* e análise, mas também para a integração entre simulação e otimização. Dessa forma, não só economiza tempo e recursos, mas também possibilita que o projetista alcance resultados mais satisfatórios e próximos do ideal.

#### 4.10. Aprendizado de máquina

Inicialmente, foram empregados quatro modelos de regressão de ML, semelhante ao procedimento adotado por Pereira *et al.* (2024e), , utilizando variáveis de entrada para prever os resultados das variáveis de saída. Os modelos utilizados foram: DT, RF, XGB e SVR. As métricas de avaliação adotadas para quantificar o desempenho dos modelos foram:  $R^2$ , MAE, MSE e RMSE.

Para garantir uma avaliação robusta, foi realizada uma validação cruzada *K-Fold* com 6 divisões (*folds*). Nesse processo, os dados foram aleatoriamente divididos em seis partes. Para cada variável de saída, os conjuntos de treinamento e teste foram definidos, utilizando 80% dos dados para treino e 20% para teste. As métricas de desempenho foram calculadas com base nas previsões realizadas sobre os conjuntos de teste.

A comparação dos resultados foi baseada no  $R^2$  obtido pela validação cruzada, permitindo uma avaliação consistente do desempenho dos modelos ao longo das diferentes divisões do conjunto de dados. A **Tabela 19** apresenta o  $R^2$  das variáveis originais, enquanto a **Tabela 20** exibe os valores obtidos para os fatores rotacionados.

O piores resultados foram observados no modelo DT, que foi o único a apresentar um desempenho inferior a 0,90, enquanto os demais modelos alcançaram valores superiores a 0,94. Destaca-se que os modelos de ML não foram treinados com um grande volume de dados, o que pode ter impactado os resultados obtidos. Além disso, não foi

realizada a otimização de hiperparâmetros, o que poderia melhorar o desempenho dos modelos.

**Tabela 19** - Coeficientes de determinação provenientes dos modelos de aprendizado de máquina (variáveis originais)

Modelo	BM	MFR	T	PI	MC	MTP	MMV	AT $\epsilon$
DT	0,8698	0,9668	0,8909	0,9677	0,9508	0,8076	0,8656	0,7049
RF	0,9294	0,9842	0,9314	0,9843	0,9689	0,8803	0,9278	0,9010
XGB	0,9378	0,9774	0,9243	0,9787	0,966	0,8527	0,9328	0,9013
SVR	0,9784	0,9347	0,8906	0,9417	0,9553	0,9695	0,959	0,9502

**Tabela 20** - Coeficientes de determinação provenientes dos modelos de aprendizado de máquina (fatores rotacionados)

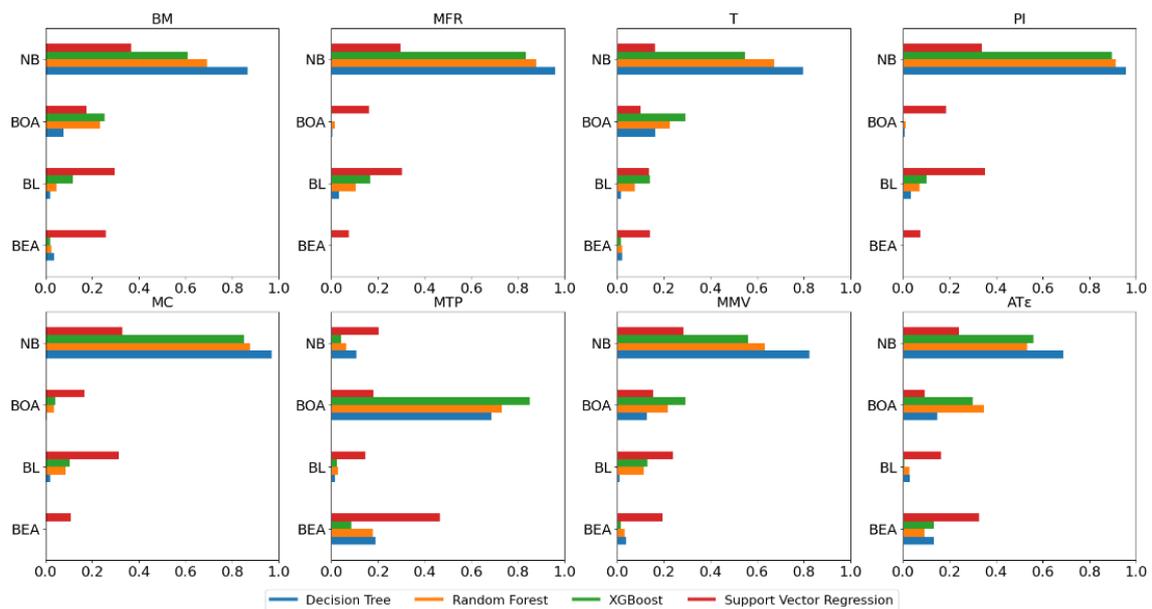
Modelo	VRF <sub>1</sub>	VRF <sub>2</sub>	VRF <sub>3</sub>
DT	0,8750	0,9481	0,9365
RF	0,9091	0,9805	0,9679
XGB	0,9262	0,9711	0,9726
SVR	0,9539	0,9646	0,9604

A FI desempenha um papel fundamental no desenvolvimento de modelos de ML, pois permite compreender como as características de entrada influenciam as previsões do modelo. Além disso, a FI auxilia na identificação das variáveis mais significativas, contribuindo para a simplificação do modelo ao eliminar características irrelevantes ou redundantes. Essa abordagem não apenas resulta em um modelo mais eficiente, mas também reduz o tempo de treinamento e melhora a interpretabilidade dos resultados.

A FI também é valiosa na tomada de decisões, pois possibilita a verificação dos fatores que possuem maior impacto nas previsões, orientando assim decisões estratégicas e operacionais de maneira mais informada.

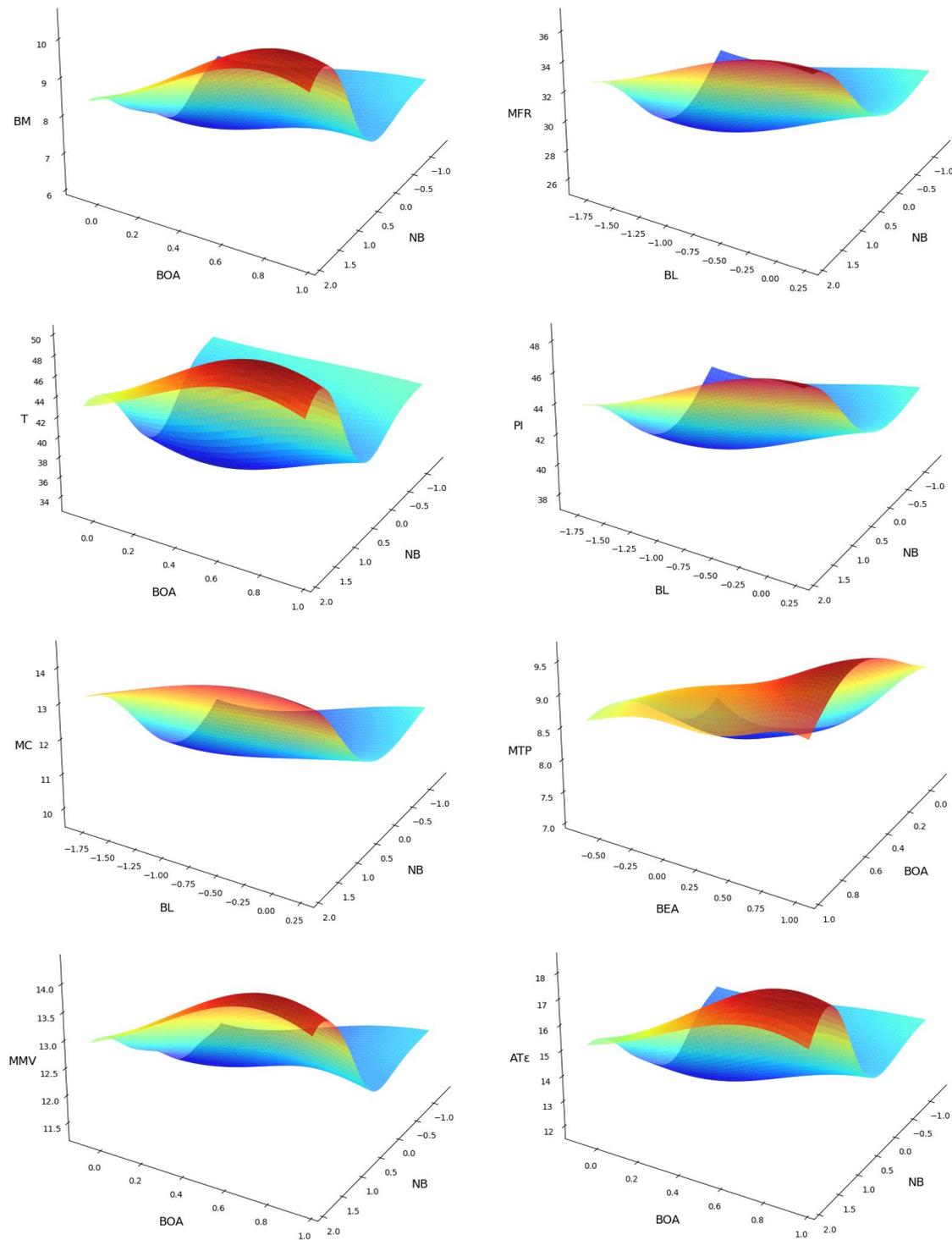
Com base nos algoritmos de ML utilizados, foram definidos métodos de FI para verificar a importância das variáveis de entrada nas variáveis de saída. Para o DT, foi utilizada a função baseada no critério de Gini, que calcula a importância das características com base em como cada uma contribui para a redução da impureza em todos os nós onde a característica é utilizada. De maneira semelhante, no RF, também foi aplicado o FI baseado no Gini, que calcula a importância das características somando a melhoria na impureza em todas as árvores da floresta.

No caso do XGB, foi utilizado o método *Gain*, que reflete o quanto a utilização de uma característica melhora a predição do modelo. Por fim, para o SVR, a análise de importância foi realizada por meio de permutação, uma vez que o SVR não possui um método direto para calcular a importância das características. Nesse processo, a performance do modelo é medida antes e depois de permutar os valores de uma característica, permitindo observar a influência dessa variável na capacidade preditiva do modelo. A **Figura 46** ilustra todo esse processo de FI.



**Figura 46** - *Feature Importance* em relação aos modelos de aprendizado de máquina (Fonte: elaborada pelo autor)

Com o uso do FI, é possível avaliar a importância das variáveis de entrada em relação às variáveis de saída. Na **Figura 46**, essa análise é realizada utilizando métodos de FI aplicados aos quatro modelos de ML. Com base nesses resultados, foram gerados gráficos de contorno para as oito respostas, destacando as variáveis de entrada mais relevantes para cada uma, conforme ilustrado na **Figura 47**.



**Figura 47** - Gráficos de contorno referente as variáveis de entrada mais importantes (Fonte: elaborada pelo autor)

Em abordagens futuras, o uso do FI será aplicado previamente, permitindo uma avaliação mais abrangente sobre a influência de um maior número de variáveis de entrada antes da implementação completa do modelo. Essa prática tem sido amplamente discutida

recentemente na área de IA, especialmente no contexto de ML, visando melhorar a compreensão e a eficiência dos modelos.

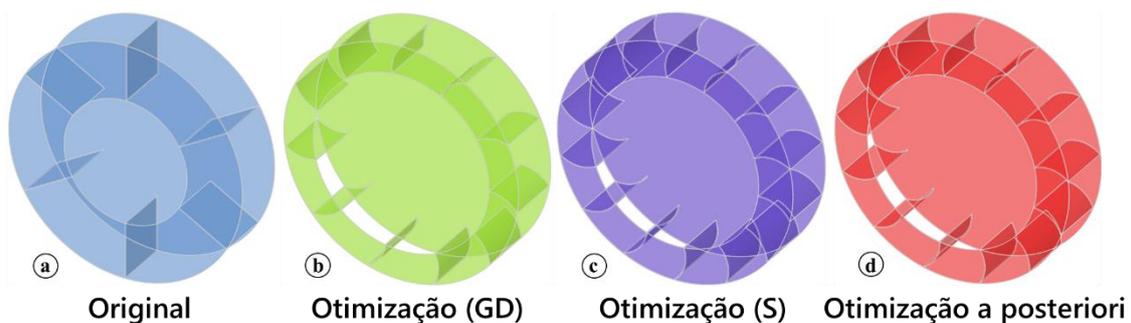
#### 4.11. Resultados com a fluidodinâmica computacional

pós a conclusão do processo de otimização, os resultados são analisados no *software* Ansys®. Em seguida, compara-se o ventilador atualmente utilizado em fornos industriais com os modelos otimizados.

A **Tabela 21** apresenta a variação das variáveis de entrada em relação ao ventilador original e aos modelos desenvolvidos a partir da otimização. Complementando essa análise, a **Figura 48** exibe a geometria de cada ventilador, ilustrando o ventilador original, o com o menor GD, o com o maior S e o resultado da P-O que combina ambas as métricas. Isso permite uma inspeção visual dos diferentes aspectos modificados em cada ventilador.

**Tabela 21** - Variáveis de entrada em relação a cada um dos modelos

Modelo	NB	BEA	BOA	BL
Original	6	0	0	45
Otimização (GD)	11	17,9	55,0	23,8
Otimização (S)	14	14,3	66,8	27,7
Otimização a posteriori	13	14,1	66,2	26,4



**Figura 48** - Comparativo entre a geometria do ventilador original e dos ventiladores propostos (Fonte: elaborada pelo autor)

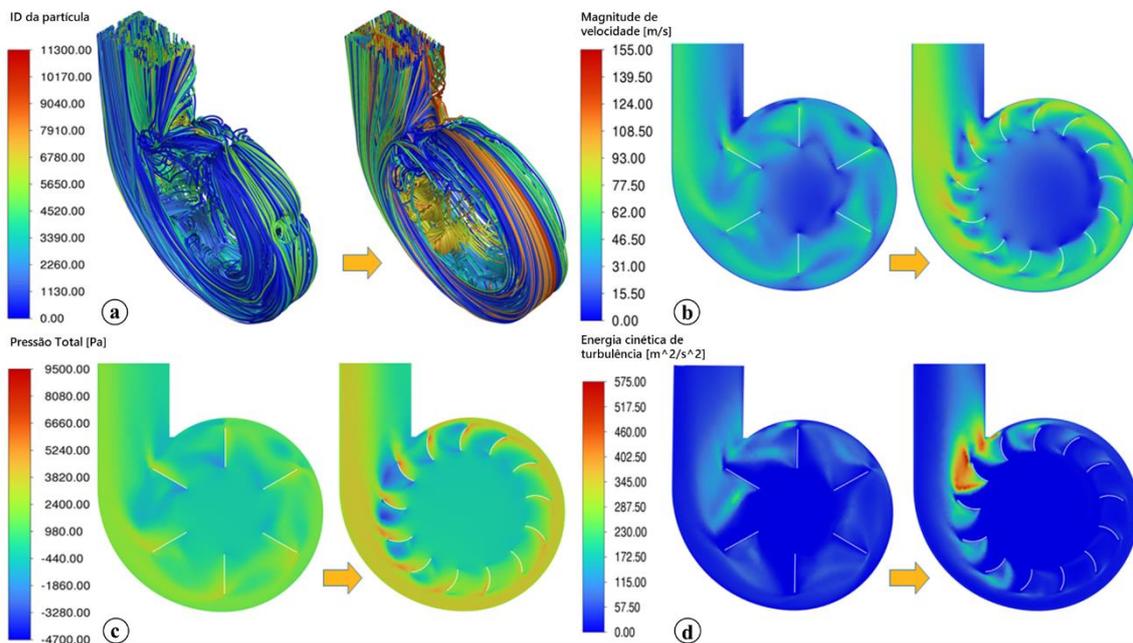
A **Figura 49** apresenta a comparação entre os resultados obtidos para os diferentes designs, incluindo o ventilador original e os modelos otimizados com melhor desempenho. Para facilitar a interpretação, as cores indicam a qualidade dos resultados em relação às métricas avaliadas: verde (1) representa o melhor desempenho entre os

quatro modelos, azul (2) indica um resultado muito bom, amarelo (3) corresponde a um desempenho intermediário e vermelho (4) destaca o pior resultado dentro do comparativo.

Modelo/Resposta	BM	MFR	T	PI	MC	MTP	MMV	ATε
Original	4	4	1	4	4	1	4	1
Otimização (GD)	1	3	2	3	1	2	3	2
Otimização (S)	3	1	3	1	3	4	1	4
Otimização a posteriori	2	2	4	2	2	3	2	3

**Figura 49** - Comparação dos resultados entre o ventilador original e os modelos otimizados (Fonte: elaborada pelo autor)

A **Figura 50** mostra uma comparação entre o ventilador original e o otimizado usando P-O. Os resultados foram obtidos de um plano plotado no centro da área de trabalho do ventilador. Todas as figuras utilizam a mesma escala gráfica e padrões de linha de contorno para facilitar a comparação.



**Figura 50** - Linhas de corrente e de contorno do ventilador original e do obtido com a P-O (Fonte: elaborada pelo autor)

A primeira verificação visual envolve as linhas de trajetória com a “identidade” (ID) de partícula, que representam as trajetórias das partículas do fluido, mostrando como o fluido se move dentro do domínio. Observa-se que há mais partículas e um melhor fluxo

no ventilador otimizado. Isso permite a identificação de zonas de recirculação e padrões de fluxo, bem como a avaliação visual da “eficácia” do *design*. Da segunda à quarta representação visual, as linhas de trajetória são substituídas por gráficos de contorno que mostram variáveis em relação a um plano de domínio, neste caso, o plano central.

A segunda verificação visual diz respeito à Magnitude da Velocidade. É evidente que as maiores velocidades ocorrem no ventilador otimizado. O ventilador original tem uma velocidade média de 37,539 m/s e uma velocidade máxima de 98,763 m/s, o que significa que a velocidade máxima não atinge a escala laranja no gráfico. Enquanto isso, o ventilador otimizado apresenta uma velocidade média de 48,799 m/s e uma velocidade máxima de 138,209 m/s, enfatizando um aumento notável.

Em relação à Pressão Total, também há um aumento. A pressão média sobe de 1.046,845 Pa para 1.591,830 Pa, enquanto a pressão máxima aumenta de 4.577,611 Pa para 9.341,836 Pa.

Por fim, a energia cinética de turbulência ( $k$ ) é exibida, mostrando a energia cinética média por unidade de massa associada aos vórtices de fluxo turbulento. Neste estágio, a média aumenta de 33,746 m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup> para 45,965 m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>, enquanto o máximo sobe de 317,630 m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup> para 570,566 m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>.

Entretanto, como mencionado em etapas anteriores, muitas variáveis têm otimizações opostas e algumas possuem dependências naturais, o que significa que melhorar uma pode prejudicar outra. Portanto, é crucial definir claramente os objetivos de *design* do produto para auxiliar na otimização e no processo de tomada de decisão.

A configuração ideal do ventilador, considerando a otimização a posteriori, corresponde a 13 pás, com uma angulação de entrada de 14,1°, uma angulação de abertura de 66,2° e um comprimento das pás de 26,4 mm.

Ao comparar as respostas originais, onde o decisor visa melhorar o desempenho e reduzir custos, as melhorias mais significativas após todo o processo são evidentes. A BM, que deveria ser minimizada, foi reduzida em 65,8%, a MMV, que deveria ser maximizada, aumentou em 23,7%, e a MFR, também a ser maximizada, aumentou em 19,9%. O PI teve um aumento significativo de 10,0%, e o MC foi reduzido em 4,5%.

Assim, observa-se que cinco das oito variáveis originais mostraram melhorias substanciais, considerando que o foco principal na tomada de decisão estava em melhorar o desempenho do ventilador sem aumentar os custos. No entanto, o ventilador exibiu um desempenho melhorado juntamente com a redução de custos. Algumas outras variáveis pioraram, como T, MTP e ATe. Se o decisor tivesse colocado maior ênfase nas variáveis

que não melhoraram ou tiveram melhorias menores, o resultado da P-O seria diferente. Isso ilustra a ampla gama de opções disponíveis, dependendo dos objetivos específicos buscados.

Além das variáveis estudadas neste trabalho, outras 36 respostas foram armazenadas e podem ser utilizadas em pesquisas futuras. Isso aumenta ainda mais a dimensionalidade dos dados e potencializa a eficácia da metodologia apresentada. Essas respostas estão presentes no **APÊNDICE C** - Outras respostas obtidas.

## 5. CONCLUSÕES

### 5.1. Conclusões gerais

Este estudo apresenta uma estrutura para enfrentar os desafios encontrados em MOP como lidar com um alto número de funções objetivo, o que pode acarretar problemas de otimização, incluindo dificuldades de convergência, altos custos computacionais e dispersão do espaço de soluções. O estudo se concentra na seleção do ponto ótimo mais adequado dentro do conjunto de soluções ótimas e viáveis. Além disso, ele apresenta uma metodologia que auxilia os tomadores de decisão na seleção entre as melhores alternativas possíveis, visando otimizar o que se considera mais importante na saída do processo. Esses problemas foram pouco explorados na literatura, e o objetivo é preencher essas lacunas com contribuições significativas. A estrutura e os benefícios incluem:

- Redução do tempo e custo computacional na CFD, evitando a replicação desnecessária de simulações e garantindo que as realizadas sigam uma metodologia estruturada;
- Uso de técnicas como PCA e FA para representar variáveis semelhantes e correlacionadas em dimensões reduzidas, permitindo uma análise antecipada de variáveis conflitantes e de alta dimensionalidade.
- Minimização do erro quadrático médio da função de resposta em relação ao ponto utópico para aumentar a precisão das soluções.
- Utilização de DOE para eliminar simulações desnecessárias ou realizadas por tentativa e erro.
- Aplicação do método VRF-NBI, que oferece um conjunto de soluções Pareto-ótimas e flexibilidade na seleção e ponderação de objetivos, mostrando-se superior ao método NBI tradicional.
- Reconhecimento de que a otimização de algumas variáveis pode desviar outras em direção ao nadir, em vez do utópico, levando ao uso de MCDM para gerenciar a complexidade de múltiplas funções objetivo.
- Uso das métricas S e GD para avaliar a qualidade dos resultados obtidos entre diversas possibilidades, combinando as métricas para aproveitar os pontos fortes de cada uma.

- Implementação do *Simplex-lattice* na fase de P-O para expandir a grade de opções, avaliar modelos de forma robusta e combinar métricas de desempenho para obter os melhores resultados.
- Simulação de coeficientes para verificar a robustez da superfície de resposta original.
- Comparação dos resultados obtidos com o método VRF-NBI com o método NBI clássico, NBI com PCA, NBI com FA sem rotação, NBI com MMSE e NSGA-II.
- Comparação dos resultados com modelos com algoritmos de ML;
- Replicação de simulações CFD com os resultados otimizados selecionados pelos tomadores de decisão;
- Uso do ML para gerar modelos de regressões e analisar a importância das variáveis de entrada nas variáveis de saída;
- Comparação dos resultados previstos pelo método com aqueles obtidos a partir das simulações CFD.

O estudo de caso aborda o processo de avaliação de um ventilador centrífugo, ele envolve 4 variáveis de entrada e 8 variáveis de saída, com objetivos de otimização conflitantes. Os resultados não apenas melhoraram o desempenho, mas também reduziram os custos de fabricação. É importante destacar que, devido à realização de um trabalho prévio em ambiente industrial e à comparação com os resultados obtidos após o desenvolvimento da metodologia proposta, foi possível observar ganhos significativos, comprovando a contribuição satisfatória desta abordagem.

As melhorias alcançadas vão além da redução de tempo e custo computacional, ou do próprio desenvolvimento do *design*. Este método oferece uma ferramenta valiosa para projetistas e engenheiros, facilitando a modelagem, desenvolvimento e otimização de produtos de maneira mais eficiente e assertiva. Além disso, a metodologia não se restringe ao aprimoramento do ventilador em questão, mas pode ser aplicada a outros problemas envolvendo CFD e ao desenvolvimento de produtos em diversas áreas, representando um avanço significativo para a indústria.

## 5.2. Contribuições do trabalho

As principais contribuições metodológicas observadas no método VRF-NBI proposto pelo estudo são:

- Fornecimento de uma mistura de funções objetivas independentes, o que é raro de encontrar. O uso de uma mistura de funções não correlacionadas permite uma aplicação eficaz, pois estão desacopladas, tornando a mistura mais adequada, já que os componentes são independentes;
- Análise polinomial canônica gerada pela disposição da mistura, que permite a descoberta de pesos mais apropriados do que aqueles evidenciados pela grade. Isso significa que é possível encontrar pesos entre cada espaçamento, não apenas aqueles definidos pelo passo. Das e Dennis (1998) sugerem que apenas os pesos da grade estão disponíveis, sem a possibilidade de encontrar pesos intermediários;
- Restrição elíptica para controlar pontos âncora e redimensionar a matriz *payoff*, evitando que soluções tendenciosas dominem o espaço da fronteira;
- Distância generalizada substituindo a distância de Mahalanobis, utilizando valores de modelo previstos em vez de dados existentes, avaliando assim a incerteza de previsão, o que não é alcançável apenas com a distância de Mahalanobis;
- Combinação de duas métricas de avaliação, distância generalizada e entropia de Shannon, visando extrair o melhor de cada métrica ao fundi-las;
- Para algoritmos baseados em gradiente, a estratégia de inicialização é crucial. Portanto, o estudo adotou vários pontos de inicialização;
- Uso de fatores em vez de variáveis originais, que não apenas reduz a dimensionalidade, mas também fornece uma representação com menos variáveis enquanto mantém a representatividade, gerando funções independentes;
- Simulação dos coeficientes para realizar a comparação e avaliar os resultados em relação à superfície de resposta original;
- Uso de algoritmos de aprendizado de máquina para verificar a importância das variáveis de entrada e verificar a capacidade de previsão do modelo;
- Criação de uma grade de pontos ótimos, permitindo a compreensão de inúmeras possibilidades de escolha;
- Aplicação do algoritmo no contexto industrial, auxiliando o tomador de decisão a selecionar a opção mais adequada, considerando o problema e o contexto específicos;
- Automatização do processo, desde o planejamento do *design* até a obtenção dos pontos ótimos, reduzindo o tempo e facilitando o desenvolvimento.

O estudo de caso aborda a avaliação de um ventilador centrífugo fabricado em aço AISI 304, destinado ao uso em fornos industriais e submetido a altas velocidades e temperaturas. As variáveis de entrada ajustadas referem-se às características das pás, sendo ao todo quatro variáveis de entrada e oito variáveis de saída, com objetivos de otimização conflitantes. As respostas avaliadas foram categorizadas em dimensões, denominadas escores de fatores rotacionados com Varimax, dadas por:

- Fator 1 ( $VRF_1$ ): Pressão total máxima (MTP), magnitude de velocidade máxima (MMV), turbulência média  $\epsilon$  ( $AT\epsilon$ ) e torque (T);
- Fator 2 ( $VRF_2$ ): Índice de desempenho (PI) e vazão mássica (MFR);
- Fator 3 ( $VRF_3$ ): Massa da pá (BM) e custo do material (MC).

Os melhores resultados obtidos com o método VRF-NBI, com base na minimização de GD e maximização de S foram os seguintes:

- Pesos:  $w_1 = 0,302$ ,  $w_2 = 0,217$  e  $w_3 = 0,481$ ;
- Variáveis de entrada: NB = 13, BEA = 14,1, BOA = 66,2 e BL = 26,4;
- Respostas originais: BM = 8,025, MFR = 29,301, T = 37,907, PI = 40,821, MC = 11,623, MTP = 8,204, MMV = 12,936,  $AT\epsilon = 14,287$ ;
- Fatores:  $VRF_1 = 0,926$ ,  $VRF_2 = -0,513$  e  $VRF_3 = 1,049$ .

As soluções otimizadas alcançadas pelo estudo não apenas aprimoram o desempenho geral do ventilador, mas também proporcionam reduções significativas nos custos de fabricação.

### 5.3. Sugestões para estudos futuros

Para aplicações futuras, poderia ser considerado o uso de ML para a avaliação de respostas com um número maior de experimentos, ampliando o conjunto de dados e aumentando a quantidade de simulações realizadas. Além disso, seria interessante avaliar a influência dos parâmetros de malha e do tempo de simulação no design. O processo de otimização poderia ser conduzido durante as fases de geração de malhas e configuração. Além disso, seria possível utilizar todas as respostas obtidas (**APÊNDICE C** - Outras respostas obtidas), sem se restringir apenas às que foram analisadas neste trabalho.

Adicionalmente, o uso de outras técnicas de MO, principalmente algoritmos baseados em metaheurísticas, como o enxame de partículas multiobjetivo, comprimento de arco de homotopia, restrição normal normalizada e o algoritmo de Lichtenberg, poderia representar abordagens promissoras. Cada uma dessas técnicas oferece

perspectivas e estratégias únicas, com vantagens e limitações próprias, enriquecendo as comparações metodológicas. Outras estratégias de inicialização e o uso de vértices externos, onde os pontos âncora não formam necessariamente uma matriz de recompensas escalada de identidade, também poderiam ser investigadas. Essas análises comparativas permitiriam validar os resultados obtidos até o momento e forneceriam percepções valiosas para futuras aplicações.

Além disso, poderia ser implementado o modelo de simulação diretamente como uma função objetivo no Ansys®, ao contrário da abordagem separada utilizada no presente estudo. Esse aprimoramento visaria simplificar e agilizar o processo de simulação e otimização.

Em complemento ao item anterior, seria muito útil implementar a modelagem utilizando o *Compute Unified Device Architecture* (CUDA), uma plataforma de computação paralela que permite o uso de unidades de processamento gráfico (GPUs). A adoção de CUDA poderia acelerar significativamente as simulações complexas em comparação com o uso de unidades centrais de processamento (CPUs), permitindo uma resolução mais rápida e eficiente.

Por fim, para validar os resultados em um ambiente industrial, sugere-se que futuramente seja realizada a construção de protótipos, seguidos por testes do produto em condições reais, visto que não houve tempo hábil e esse não foi o objetivo do presente trabalho.

## REFERÊNCIAS

ABDOLLAHI, S. A. *et al.* A novel insight into the design of perforated-finned heat sinks based on a hybrid procedure: Computational fluid dynamics, machine learning, multi-objective optimization, and multi-criteria decision-making. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 155, p. 107535, jun. 2024.

AHMADI, E.; NASCIMENTO, M. A. **A Mixed Breadth-Depth First Search Strategy for Sequenced Group Trip Planning Queries** 2015 16th IEEE International Conference on Mobile Data Management. IEEE, jun. 2015

ALMEIDA, F. A. DE *et al.* A new multivariate approach based on weighted factor scores and confidence ellipses to precision evaluation of textured fiber bobbins measurement system. **Precision Engineering**, v. 60, p. 520–534, nov. 2019.

ALMEIDA, F. A. DE *et al.* Multivariate Taguchi loss function optimization based on principal components analysis and normal boundary intersection. **Engineering with Computers**, v. 38, n. 2, p. 1627–1643, 29 abr. 2022.

AMORIM, L. F. *et al.* Multi-objective optimization algorithm for analysis of hardened steel turning manufacturing process. **Applied Mathematical Modelling**, v. 106, p. 822–843, jun. 2022.

ANGELOPOULOS, P.; EVANGELARAS, H.; KOUKOUVINOS, C. Small, balanced, efficient and near rotatable central composite designs. **Journal of Statistical Planning and Inference**, v. 139, n. 6, p. 2010–2013, jun. 2009.

AQUILA, G. *et al.* Proposed method for contracting of wind-photovoltaic projects connected to the Brazilian electric system using multiobjective programming. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 97, p. 377–389, dez. 2018.

AQUILA, G. *et al.* Economic planning of wind farms from a NBI-RSM-DEA multiobjective programming. **Renewable Energy**, v. 158, p. 628–641, out. 2020.

ARCOS, J. I. L. *et al.* Design of Experiments and computational fluid dynamics approach to improve the product design process. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 8, p. 57096–57106, 2020.

ARRUDA, É. M. *et al.* Robust optimisation of surface roughness of AISI H13 hardened steel in the finishing milling using ball nose end mills. **Precision Engineering**, v. 60, p. 194–214, nov. 2019.

AUDET, C. *et al.* Performance indicators in multiobjective optimization. **European Journal of Operational Research**, v. 292, n. 2, p. 397–422, jul. 2021.

AZADANI, L. N.; GHAROUNI, N. Multi objective optimization of cylindrical shape roughness parameters in a solar air heater. **Renewable Energy**, v. 179, p. 1156–1168, dez. 2021.

BACCI, L. A. *et al.* Optimization of combined time series methods to forecast the demand for coffee in Brazil: A new approach using Normal Boundary Intersection coupled with mixture designs of experiments and rotated factor scores. **International Journal of Production Economics**, v. 212, p. 186–211, jun. 2019.

BANU, F. M. *et al.* Evaluation of Artificial Intelligence-Based Solid Waste Segregation Technologies through Multi-Criteria Decision-Making and complex q-rung picture fuzzy Frank aggregation operators. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 133, p. 108154, jul. 2024.

BELINATO, G. *et al.* A multivariate normal boundary intersection PCA-based approach to reduce dimensionality in optimization problems for LBM process. **Engineering with Computers**, v. 35, n. 4, p. 1533–1544, 12 out. 2019.

BELLARY, S. A. I. *et al.* Application of computational fluid dynamics and surrogate-coupled evolutionary computing to enhance centrifugal-pump performance. **Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics**, v. 10, n. 1, p. 171–181, 20 jan. 2016.

BEZERRA, M. A. *et al.* Response surface methodology (RSM) as a tool for optimization in analytical chemistry. **Talanta**, v. 76, n. 5, p. 965–977, 15 set. 2008.

BHATTACHARJEE, K. S.; SINGH, H. K.; RAY, T. Multiple Surrogate-Assisted Many-Objective Optimization for Computationally Expensive Engineering Design. **Journal of Mechanical Design**, v. 140, n. 5, 1 maio 2018.

CASAS, C. Q. *et al.* A Reduced Order Deep Data Assimilation model. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 412, p. 132615, 1 nov. 2020.

CHEN, H. *et al.* Multi-Objective Multidisciplinary Design Optimization of a Robotic Fish System. **Journal of Marine Science and Engineering**, v. 9, n. 5, p. 478, 29 abr. 2021.

CHEN, S. *et al.* A comprehensive analysis and optimization process for an integrated liquid cooling plate for a prismatic lithium-ion battery module. **Applied Thermal Engineering**, v. 156, p. 324–339, jun. 2019.

CHEN, W. *et al.* Condition monitoring of wind turbine using novel deep learning method and dynamic kernel principal components Mahalanobis distance. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 125, p. 106757, out. 2023.

CORNELL, J. **Experiments with Mixtures: Designs, Models, and the Analysis of Mixture Data**. 3. ed. [s.l.: s.n.].

COSTA, D. M. D.; PAULA, T. I.; *et al.* Normal boundary intersection method based on principal components and Taguchi's signal-to-noise ratio applied to the multiobjective optimization of 12L14 free machining steel turning process. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 87, n. 1–4, p. 825–834, 1 out. 2016.

COSTA, D. M. D.; BRITO, T. G.; *et al.* A normal boundary intersection with multivariate mean square error approach for dry end milling process optimization of the AISI 1045 steel. **Journal of Cleaner Production**, v. 135, p. 1658–1672, nov. 2016.

CUI, J. *et al.* Improved normal-boundary intersection algorithm: A method for energy optimization strategy in smart buildings. **Building and Environment**, v. 212, p. 108846, mar. 2022.

DAS, I.; DENNIS, J. E. Normal-Boundary Intersection: A New Method for Generating the Pareto Surface in Nonlinear Multicriteria Optimization Problems. **SIAM Journal on Optimization**, v. 8, n. 3, p. 631–657, ago. 1998.

DEMIR, A. T.; MOSLEM, S. A novel fuzzy multi-criteria decision-making for enhancing the management of medical waste generated during the coronavirus pandemic. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 133, p. 108465, jul. 2024.

DERRINGER, G.; SUICH, R. Simultaneous Optimization of Several Response Variables. **Journal of Quality Technology**, v. 12, n. 4, p. 214–219, 22 out. 1980.

DIEZ, M.; CAMPANA, E. F.; STERN, F. Stochastic optimization methods for ship resistance and operational efficiency via CFD. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 57, n. 2, p. 735–758, 14 fev. 2018.

DONG, X.; LIU, X. Multi-objective optimization of heat transfer in microchannel for non-Newtonian fluid. **Chemical Engineering Journal**, v. 412, p. 128594, maio 2021.

DONG, Z. *et al.* A multi-objective optimization of laser cladding processing parameters of AlCoCrFeNi<sub>2.1</sub> eutectic high-entropy alloy coating. **Optics & Laser Technology**, v. 170, p. 110302, mar. 2024.

DU, Y.; MAK, C. M.; LI, Y. A multi-stage optimization of pedestrian level wind environment and thermal comfort with lift-up design in ideal urban canyons. **Sustainable Cities and Society**, v. 46, p. 101424, abr. 2019.

ENTEZARI, A. *et al.* Nondeterministic multiobjective optimization of 3D printed ceramic tissue scaffolds. **Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical**

**Materials**, v. 138, p. 105580, fev. 2023.

EZZATNESHAN, E. Comparative study of the lattice Boltzmann collision models for simulation of incompressible fluid flows. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 156, p. 158–177, fev. 2019.

FONSECA, M. N. *et al.* Multi-objective optimization applied for designing hybrid power generation systems in isolated networks. **Solar Energy**, v. 161, p. 207–219, fev. 2018.

FUENTE, D. DE LA; VEGA-RODRÍGUEZ, M. A.; PÉREZ, C. J. Automatic selection of a single solution from the Pareto front to identify key players in social networks. **Knowledge-Based Systems**, v. 160, p. 228–236, nov. 2018.

GAO, S.; REN, X.; ZHANG, Y. Improvement of multi-objective evolutionary algorithm and optimization of mechanical bearing. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 120, p. 105889, abr. 2023.

GAUDÊNCIO, J. H. D. *et al.* Hybrid multiobjective optimization algorithm based on multivariate mean square error and fuzzy decision maker. **Applied Soft Computing**, v. 82, p. 105586, set. 2019.

GOMES, J. H. F. *et al.* Weighted Multivariate Mean Square Error for processes optimization: A case study on flux-cored arc welding for stainless steel claddings. **European Journal of Operational Research**, v. 226, n. 3, p. 522–535, maio 2013.

HABIB, A.; SINGH, H. K.; RAY, T. A multiple surrogate assisted multi/many-objective multi-fidelity evolutionary algorithm. **Information Sciences**, v. 502, p. 537–557, out. 2019.

HAN, Z. *et al.* Efficient aerodynamic shape optimization using variable-fidelity surrogate models and multilevel computational grids. **Chinese Journal of Aeronautics**, v. 33, n. 1, p. 31–47, jan. 2020.

HE, Z. *et al.* Multi-objective optimizations on thermal and hydraulic performance of symmetric and asymmetric bionic Y-shaped fractal networks by genetic algorithm coupled with CFD simulation. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 124, p. 105261, maio 2021.

HOSEINI, S. S. *et al.* Impeller shape-optimization of stirred-tank reactor: CFD and fluid structure interaction analyses. **Chemical Engineering Journal**, v. 413, p. 127497, jun. 2021.

HOSEINZADE, D.; LAKZIAN, E.; HASHEMIAN, A. A blackbox optimization of volumetric heating rate for reducing the wetness of the steam flow through turbine

blades. **Energy**, v. 220, p. 119751, abr. 2021.

HUANG, Z. *et al.* An improved TOPSIS-based multi-criteria decision-making approach for evaluating the working condition of the aluminum reduction cell. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 117, p. 105599, jan. 2023.

JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. 6. ed. New Jersey: [s.n.].

JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. **Applied multivariate statistical analysis**. [s.l: s.n.].

KAISER, H. F. The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis. **Psychometrika**, v. 23, n. 3, p. 187–200, set. 1958.

KHATIR, Z. *et al.* Multi-objective Computational Fluid Dynamics (CFD) design optimisation in commercial bread-baking. **Applied Thermal Engineering**, v. 60, n. 1–2, p. 480–486, out. 2013.

KHURI, A. I.; CONLON, M. Simultaneous Optimization of Multiple Responses Represented by Polynomial Regression Functions. **Technometrics**, v. 23, n. 4, p. 363, nov. 1981.

KHURI, A. I.; CORNELL, J. A. **Response Surfaces**. 2. ed. New York: Dekker: [s.n.].

KOTHARI, C. R. **Research Methodology: Methods and Techniques**. 2. ed. [s.l.] New Age International Publishers, 2004.

LEE, J. S. *et al.* A topology optimization based design of a liquid-cooled heat sink with cylindrical pin fins having varying pitch. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 172, p. 121172, 1 jun. 2021.

LEITE, R. R. **Método de intersecção normal à fronteira para modelos quadráticos de escores fatoriais rotacionados**. Itajubá: Universidade Federal de Itajubá, fev. 2019.

LI, G. *et al.* Prediction of 3D Cardiovascular hemodynamics before and after coronary artery bypass surgery via deep learning. **Communications Biology**, v. 4, n. 1, p. 99, 1 dez. 2021.

LI, W. *et al.* A surrogate thermal modeling and parametric optimization of battery pack with air cooling for EVs. **Applied Thermal Engineering**, v. 147, p. 90–100, 25 jan. 2019.

LI, Y. *et al.* Multi-objective optimization of surface morphology using fractal and multi-fractal analysis for dry milling of AISI 4340. **Measurement**, v. 222, p. 113574,

nov. 2023.

LIAO, Y.; PENG, X. Pythagorean fuzzy information measure with applications in multi-criteria decision-making and medical diagnosis. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 136, p. 108927, out. 2024.

LIU, C. *et al.* Optimization and Mechanism of the Wicket Gate Closing Law for High-Head Pumped Storage Power Stations. **IEEE Access**, v. 9, p. 11734–11749, 2021.

LIU, C.; BU, W.; XU, D. Multi-objective shape optimization of a plate-fin heat exchanger using CFD and multi-objective genetic algorithm. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 111, p. 65–82, 1 jan. 2017.

LIU, H.; CHANG, Z. Multi-objective optimization of temperature uniformity in the immersion liquid cooling cabinet with Taguchi-based grey relational analysis. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 154, p. 107395, maio 2024.

LIU, Y. *et al.* A CNN-based shock detection method in flow visualization. **Computers and Fluids**, v. 184, p. 1–9, 30 abr. 2019.

LOPES, L. G. D. *et al.* A multivariate surface roughness modeling and optimization under conditions of uncertainty. **Measurement**, v. 46, n. 8, p. 2555–2568, out. 2013.

LOPES, L. G. D. *et al.* Robust parameter optimization based on multivariate normal boundary intersection. **Computers & Industrial Engineering**, v. 93, p. 55–66, mar. 2016.

LUZ, E. R.; ROMÃO, E. L.; STREITENBERGER, S. C.; GOMES, J. H. F.; *et al.* A new multiobjective optimization with elliptical constraints approach for nonlinear models implemented in a stainless steel cladding process. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 113, n. 5–6, p. 1469–1484, 6 mar. 2021.

LUZ, E. R.; ROMÃO, E. L.; STREITENBERGER, S. C.; MANCILHA, L. R.; *et al.* A multiobjective optimization of the welding process in aluminum alloy (AA) 6063 T4 tubes used in corona rings through normal boundary intersection and multivariate techniques. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 117, n. 5–6, p. 1517–1534, 9 nov. 2021.

MÄKELÄ, M. Experimental design and response surface methodology in energy applications: A tutorial review. **Energy Conversion and Management**, v. 151, p. 630–640, nov. 2017.

MELO, S. A. DE *et al.* Multi-objective evolutionary optimization of unsupervised

latent variables of turning process. **Applied Soft Computing**, v. 120, p. 108713, maio 2022.

MENDES, R. R. A. *et al.* Multiobjective portfolio optimization of ARMA–GARCH time series based on experimental designs. **Computers & Operations Research**, v. 66, p. 434–444, fev. 2016.

MENDES, R. R. A. *et al.* **Aplicação da Elipse de Confiança como apoio à análise de precisão na medição de concentração de emulsões de água em óleo (W/O)**. XLIII Encontro Nacional De Engenharia De Produção. 27 out. 2023

MI, S. *et al.* Multi-objective optimization of heat transfer of ice slurry in corrugated tubes using response surface methodology method and genetic algorithm. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 220, p. 124984, 1 mar. 2024.

MONTGOMERY, D. C. **Design and Analysis of Experiments**. 9. ed. [s.l.] John Wiley & Sons, 2017.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Applied statistics and probability for engineers**. [s.l.: s.n.].

MYERS, R. H.; MONTGOMERY, D. C. **Response Surface Methodology: Product and Process Optimization Using Designed Experiments**. 2. ed. New York: [s.n.].

MYERS, R. H.; MONTGOMERY, D. C.; ANDERSON-COOK, C. M. **Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments**. 4. ed. [s.l.: s.n.].

NAVES, F. L. *et al.* Multivariate Normal Boundary Intersection based on rotated factor scores: A multiobjective optimization method for methyl orange treatment. **Journal of Cleaner Production**, v. 143, p. 413–439, fev. 2017.

OLIVEIRA, L. G. DE *et al.* Nonlinear optimization strategy based on multivariate prediction capability ratios: Analytical schemes and model validation for duplex stainless steel end milling. **Precision Engineering**, v. 66, p. 229–254, nov. 2020.

PAIVA, A. P. *et al.* A multivariate mean square error optimization of AISI 52100 hardened steel turning. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 43, n. 7–8, p. 631–643, 20 ago. 2009.

PAIVA, A. P. *et al.* Multi-objective optimization of pulsed gas metal arc welding process based on weighted principal component scores. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 50, n. 1–4, p. 113–125, 2 set. 2010.

PEREIRA, M. C. *et al.* **Integração de Elipses de Confiança na Avaliação e no**

**Desenvolvimento de Ventiladores Centrífugos.** XLIII Encontro Nacional de Engenharia de Produção. Fortaleza: ABEPRO, 27 out. 2023a.

PEREIRA, M.C. *et al.* **Otimização de processos fluidodinâmicos: Integração do Computational Fluid Dynamics com Machine Learning e Meta-heurística.** LVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. 2024a.

PEREIRA, M.C. *et al.* Modelagem e análise fluidodinâmica de um ventilador centrífugo para fornos combinados: Estudo de caso Prática Klimaquip. **Journal of Open Research**, v. 5, p. 1–17, 2024b.

PEREIRA, M. C.; PAIVA, A. P. DE; FRANCISCO, M. B.; AZEVEDO, T. M. DE. **Strategies in Decision Making in a Multiobjective Context: Integration of DOE, NBI, and CFD in the Optimization of a Centrifugal Fan.** XLV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. Maceió: ABMEC, 2024c.

PEREIRA, M.C. *et al.* **Otimização multiobjetivo de ventiladores centrífugos com CFD e NSGA-II integrando a análise fatorial.** XVI Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica. Concepción, Chile: 2024d.

PEREIRA, M.C. *et al.* **Aplicação de Machine Learning na otimização multiobjetivo de ventiladores centrífugos.** XVI Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica. Concepción, Chile: 2024e.

PEREIRA, M. C.; PAIVA, A. P. DE; AZEVEDO, T. M. DE; *et al.* **O uso da Elipse de Confiança combinada a Fluidodinâmica Computacional em um Ventilador Centrífugo.** Encontro Nacional de Engenharia de Produção. XLIV Porto Alegre: ABEPRO, 7 nov. 2024f.

PEREIRA, M. C.; JUDICE, G. H. **Análise de desempenho e avaliação de parâmetros de um ventilador centrífugo por simulação CFD.** II Jornada Científica e Tecnológica da UNA Pouso Alegre. Pouso Alegre: 2023b.

PEREIRA, M. C.; PAIVA, A. P. DE. **Otimização não-linear multiobjetivo das condições de eficiência de um ventilador centrífugo para fornos.** IEPG Summit'23. Itajubá: 2024g.

PEREIRA, R. B. D. *et al.* Multi-objective robust design of helical milling hole quality on AISI H13 hardened steel by normalized normal constraint coupled with robust parameter design. **Applied Soft Computing**, v. 75, p. 652–685, fev. 2019.

PIRES, A. L. G. *et al.* Environmental and financial multi-objective optimization: Hybrid wind-photovoltaic generation with battery energy storage systems. **Journal of Energy Storage**, v. 66, p. 107425, ago. 2023.

POLAT, M. E.; CADIRCI, S. Artificial neural network model and multi-objective optimization of microchannel heat sinks with diamond-shaped pin fins. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 194, p. 123015, 15 set. 2022.

PRATIWI, B. C. *et al.* Predictive performance of psychological tests: Is it better to use items than subscales? **Computational Statistics & Data Analysis**, v. 185, p. 107767, set. 2023.

RAMAN, V.; HASSANALY, M. Emerging trends in numerical simulations of combustion systems. **Proceedings of the Combustion Institute**, v. 37, n. 2, p. 2073–2089, 1 jan. 2019.

RIO-CHANONA, E. A. DEL *et al.* Deep learning-based surrogate modeling and optimization for microalgal biofuel production and photobioreactor design. **AIChE Journal**, v. 65, n. 3, p. 915–923, 13 mar. 2019.

ROCHA, L. C. S. *et al.* Robust weighting applied to optimization of AISI H13 hardened-steel turning process with ceramic wiper tool: A diversity-based approach. **Precision Engineering**, v. 50, p. 235–247, out. 2017.

ROCHA, L. C. S. *et al.* Toward a robust optimal point selection: a multiple-criteria decision-making process applied to multi-objective optimization using response surface methodology. **Engineering with Computers**, v. 37, n. 4, p. 2735–2761, 13 out. 2021.

ROCHA, L. C. S. *et al.* Multiobjective optimization of hybrid wind-photovoltaic plants with battery energy storage system: Current situation and possible regulatory changes. **Journal of Energy Storage**, v. 51, p. 104467, jul. 2022.

SCHEFFÉ, H. Experiments with Mixtures. **Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology**, v. 20, n. 2, p. 344–360, 1 jul. 1958.

SCHITTKOWSKI, K. Parameter identification and model verification in systems of partial differential equations applied to transdermal drug delivery. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 79, n. 3, p. 521–538, dez. 2008.

SHANNON, C. E. A Mathematical Theory of Communication. **The Bell System Technical Journal**, v. 27, p. 379–423, 1948.

SHARMA, R.; MISHRA, D. P.; BRAR, L. S. Performance enhancement of a fin and tube heat exchanger with the novel arrangement of curved winglets using a multi-objective optimization approach. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 157, p. 107804, set. 2024.

SHI, Y. *et al.* Combustion optimization of ultra supercritical boiler based on artificial intelligence. **Energy**, v. 170, p. 804–817, mar. 2019.

SOBIESKI, W. Numerical investigations of tortuosity in randomly generated pore structures. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 166, p. 1–20, dez. 2019.

SOUZA, L. G. P. *et al.* Evaluation of trade-off between cutting time and surface roughness robustness regarding tool wear in hard turning finishing. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 123, n. 9–10, p. 3047–3078, 8 dez. 2022.

SRIVASTAV, V. K.; PAUL, A. R.; JAIN, A. Capturing the wall turbulence in CFD simulation of human respiratory tract. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 160, p. 23–38, jun. 2019.

STREITENBERGER, S. C. *et al.* Normal Boundary Intersection with factor analysis approach for multiobjective stochastic optimization of a cladding process focusing on reduction of energy consumption and rework. **Journal of Cleaner Production**, v. 333, p. 129915, jan. 2022.

SUBASI, A. *et al.* An experimental study on optimization of SiO<sub>2</sub>/water nanofluid flows in circular minichannels. **Journal of Thermal Analysis and Calorimetry**, v. 145, n. 5, p. 2451–2465, 20 set. 2021.

SUN, C. *et al.* Modeling and optimizing perforated twisted tape for heat transfer enhancement. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 237, p. 107802, jan. 2023.

SUN, W. *et al.* Genetic optimization of longitudinal ribs on comprehensive heat transfer performance in hollow rotor within axial through flow. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 144, p. 106782, maio 2023.

TOLEDO, J. V. R. DE *et al.* A multi-objective robust evolutionary optimization approach applied to the multivariate helical milling process of super duplex steel. **Applied Soft Computing**, v. 147, p. 110811, nov. 2023.

VINING, G. G.; MYERS, R. H. Combining Taguchi and Response Surface Philosophies: A Dual Response Approach. **Journal of Quality Technology**, v. 22, n. 1, p. 38–45, 21 jan. 1990.

YIN, L.; CAI, Z. Multimodal hierarchical distributed multi-objective moth intelligence algorithm for economic dispatch of power systems. **Journal of Cleaner Production**, v. 434, p. 140130, jan. 2024.

YUAN, J. *et al.* A new hybrid multi-criteria decision-making approach for developing integrated energy systems in industrial parks. **Journal of Cleaner Production**, v. 270, p. 122119, out. 2020.

ZAKARIA, M. S. *et al.* A Cartesian non-boundary fitted grid method on complex geometries and its application to the blood flow in the aorta using OpenFOAM. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 159, p. 220–250, maio 2019.

ZHANG, J. *et al.* The optimum conditions for preparing briquette made from millet bran using Generalized Distance Function. **Renewable Energy**, v. 140, p. 692–703, set. 2019.

ZHOU, S. *et al.* Research on blade design method of multi-blade centrifugal fan for building efficient ventilation based on Hicks-Henne function. **Sustainable Energy Technologies and Assessments**, v. 43, p. 100971, fev. 2021.

## APÊNDICE A - Códigos utilizados

Os códigos utilizados neste trabalho para a execução do método VRF-NBI e para a criação da elipse de confiança foram disponibilizados no GitHub. Esses códigos foram desenvolvidos com VBA (Microsoft Office Excel®) e com Python, conforme detalhado abaixo:

- Código da elipse de confiança em Python: [Matheusc98/Confidence\\_Ellipse](#);
- Código do VRF-NBI em Python: [Matheusc98/VRF\\_NBI](#);
- Código do VRF-NBI em VBA [Matheusc98/Normal\\_Boundary\\_Intersection](#).

# APÊNDICE B - Templates em Python e VBA

NBI-VRF 3x3Y
NBI-VRF Post
NBI-VRF RSM
NBI-VRF 3x8Y

Variables
Individual Optimization
Optimization Table
Zeroed NBI
Previous NBI
Optimal NBI
Search Points
Clear
Enable Full Screen
Disable Full Screen
Save
Save Point
Clear Points
Home

Post Optimization
Zeroed Post-NBI
Previous Post-NBI
Clear
Enable Full Screen
Disable Full Screen
Save

NBI Post-RSM
Clear
Enable Full Screen
Disable Full Screen
Save

APOIO:
4x3Y (Vent)
Otimização Individual
Otimização (Tabela)
NBI Zerados
NBI Anteriores
NBI Ótimos
Pesquisar Pontos

BM	MFR	T	PI	MC	MTP	MMV	ATe	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	z(x)
10.298	27.006	33.577	38.222	12.082	7.438	12.378	11.592	0.470	-0.120	0.473	1.000
0.020	2.507	6.016	2.041	1.429	0.219	0.589	1.970	0.074	-0.509	-0.356	-0.017
1.823	-0.474	4.017	-1.210	0.381	1.029	0.952	2.842	0.674	0.382	-0.352	-0.017
0.554	-1.246	2.658	1.379	0.177	1.011	0.772	0.467	0.321	-0.138	-0.017	-0.017
2.617	1.126	1.613	0.766	1.345	0.020	0.183	0.183	-0.191	-0.184	-0.768	-0.768
-0.050	1.597	1.453	1.914	-0.082	0.209	0.188	0.940	0.074	-0.280	0.069	0.000
1.192	-0.907	-2.374	-0.842	0.382	-0.227	-0.343	0.275	-0.106	0.202	-0.330	0.000
0.257	-1.342	-3.550	-0.911	0.089	-0.709	-1.018	-0.657	-0.376	0.137	-0.164	0.000
0.006	-0.364	-1.277	-0.253	-0.025	-0.063	-0.197	-0.175	-0.056	0.058	-0.007	0.000
0.000	0.032	1.291	0.232	0.195	0.041	0.071	0.056	0.007	-0.054	-0.048	0.000
0.000	1.777	3.696	1.916	0.075	0.297	0.408	0.976	0.135	-0.324	0.030	0.000
0.000	-0.666	-1.705	-0.439	0.341	-0.319	-0.338	-0.924	-0.237	0.019	-0.134	0.000
0.138	1.066	1.920	1.274	0.026	-0.130	-0.385	-0.078	-0.165	-0.274	-0.043	0.000
0.610	-0.192	-0.078	-0.127	0.195	-0.031	0.083	0.211	0.010	0.053	-0.150	0.000
0.123	0.638	1.271	0.666	0.045	-0.012	0.146	0.189	0.006	-0.126	-0.022	0.000
10.298	27.006	33.577	38.222	12.082	7.438	12.378	11.592	0.470	-0.120	0.473	1.000

Payoff	g <sub>1</sub> (x)	g <sub>2</sub> (x)	g <sub>3</sub> (x)
1.811	0.887	0.387	
-0.883	-2.547	0.639	
0.418	-0.177	2.001	

Payoff Escalonado	β	ε = t
0.000	0.649	1.000
0.522	0.000	1.000
0.727	1.000	0.000
1.000	0.000	0.000

Φβ	t̄ = t + εΦ	F(x)
0.000	0.000	0.942
0.522	0.000	0.762
0.727	0.000	0.701

Restrições	Zerados	Anteriores	Ótimos
g <sub>1</sub> (x)	0	0	0
g <sub>2</sub> (x)	0	0	0
g <sub>3</sub> (x)	0	0	0
g <sub>4</sub> (x)	0	0	0
Total	0	0	0

**Erros no Solver**  
 Restrições: Zerados, Anteriores, Ótimos

n	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	BM	MFR	T	PI	MC	MTP	MMV	ATe	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>
1	0.000	0.000	0.000	0.000	10.298	27.006	33.577	38.222	12.082	7.438	12.378	11.592	0.470	-0.120	0.473

BM	MFR	T	PI	MC	MTP	MMV	ATe	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	
BM	5,015	23,259	24,379	35,793	9,263	6,761	10,953	10,785	0,447	0,420	1,963
MFR	10,757	40,005	55,092	51,783	14,848	9,316	14,760	19,978	1,083	-2,521	-0,047
T	9,236	19,444	10,610	33,259	10,486	5,793	9,572	5,974	-0,550	0,971	0,837
PI	10,851	39,976	54,946	51,812	14,876	9,300	14,712	19,827	1,052	-2,527	-0,072
MC	7,421	24,655	21,521	38,615	6,579	7,004	10,911	9,223	0,262	0,193	1,824
MTP	9,629	21,324	14,718	34,749	12,029	2,019	5,909	6,385	2,329	0,027	-0,081
MMV	11,722	38,577	56,669	50,015	14,728	9,777	15,063	21,527	1,511	-1,102	-0,052
ATe	10,781	23,733	16,502	36,891	12,450	2,618	6,555	5,781	-2,238	-0,337	-0,291

Métrica	Zerados	Anteriores	Ótimos
NED	0,961	0,975	0,975
GPE	2,430	1,444	1,444
S	1,089	1,089	1,089
S/GPE	0,368	0,653	0,653
GD	15,178	26,953	15,177
MD	10,168	20,911	10,085

Limpar	Ligar Tela Cheia	Desligar Tela Cheia	Solver
1	1.000	0.000	0.000
2	0.900	0.100	0.000
3	0.800	0.200	0.000
4	0.700	0.300	0.000
5	0.600	0.400	0.000
6	0.500	0.500	0.000
7	0.400	0.600	0.000
8	0.300	0.700	0.000
9	0.200	0.800	0.000
10	0.100	0.900	0.000
11	0.000	1.000	0.000

n	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	BM	MFR	T	PI	MC	MTP	MMV	ATe	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	NED	GPE	S	S/GPE	GD	MD	Φ	g <sub>1</sub> (x)	g <sub>2</sub> (x)	g <sub>3</sub> (x)	g <sub>4</sub> (x)
1	1.000	0.000	0.000	0.000	1.983	1.016	0.289	-0.986	10.036	32.948	49.839	43.923	12.322	9.709	14.412	20.853	1.811	-0.883	0.418	0.000	0.000	0.000	1.811	0.887	0.387	
2	0.900	0.100	0.000	0.000	1.910	0.985	0.689	-0.899	10.613	33.564	50.704	48.889	13.913	9.810	14.220	20.512	1.718	-1.020	0.358	0.000	0.000	0.000	-2.547	0.639		
3	0.800	0.200	0.000	0.000	1.837	0.954	1.050	-0.844	9.986	31.654	47.384	42.993	12.779	9.512	14.004	19.623	1.668	-0.712	0.276	0.000	0.000	0.000	-2.547	0.639		
4	0.700	0.300	0.000	0.000	1.764	0.923	1.411	-0.793	9.069	29.785	44.729	41.243	11.643	9.208	13.787	18.894	1.526	-0.579	0.204	0.000	0.000	0.000	-2.547	0.639		
5	0.600	0.400	0.000	0.000	1.691	0.892	1.766	-0.742	8.152	27.926	42.088	40.502	10.482	8.902	13.570	18.006	1.384	-0.440	0.132	0.000	0.000	0.000	-2.547	0.639		
6	0.500	0.500	0.000	0.000	1.618	0.861	2.121	-0.691	7.235	26.127	40.793	39.711	9.321	8.196	13.353	17.118	1.242	-0.302	0.060	0.000	0.000	0.000	-2.547	0.639		
7	0.400	0.600	0.000	0.000	1.545	0.830	2.476	-0.640	6.314	24.368	40.502	38.920	8.150	7.390	13.126	16.240	1.100	-0.164	0.000	0.000	0.000	0.000	-2.547	0.639		
8	0.300	0.700	0.000	0.000	1.472	0.800	2.831	-0.589	5.393	22.619	40.211	37.999	7.104	6.584	12.879	15.362	0.958	-0.026	0.000	0.000	0.000	0.000	-2.547	0.639		
9	0.200	0.800	0.000	0.000	1.399	0.769	3.186	-0.538	4.472	20.920	40.211	36.998	5.858	5.868	12.611	14.504	0.816	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-2.547	0.639		
10	0.100	0.900	0.000	0.000	1.326	0.738	3.541	-0.487	3.551	19.221	40.211	36.097	4.512	5.152	12.362	13.646	0.674	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-2.547	0.639		
11	0.000	1.000	0.000	0.000	1.253	0.707	3.896	-0.436	2.630	17.522	40.211	35.196	3.260	4.500	12.113	12.688	0.532	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-2.547	0.639		

Save Point

Clear Points

Home

NBI Type	n	w <sub>1</sub>	w <sub>2</sub>	w <sub>3</sub>	w <sub>4</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	T	MTTF	w <sub>1</sub>	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>	K <sub>p</sub>	ROI	OEE	VRF <sub>1</sub>	VRF <sub>2</sub>	VRF <sub>3</sub>	VRF <sub>4</sub>	NED	GPE	S	SGPE	MD	g <sub>1</sub> (x)	g <sub>2</sub> (x)	g <sub>3</sub> (x)	g <sub>4</sub> (x)
NBI Type	n	w <sub>1</sub>	w <sub>2</sub>	w <sub>3</sub>	w <sub>4</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	T	MTTF	w <sub>1</sub>	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>	K <sub>p</sub>	ROI	OEE	VRF <sub>1</sub>	VRF <sub>2</sub>	VRF <sub>3</sub>	VRF <sub>4</sub>	NED	GPE	S	SGPE	MD	g <sub>1</sub> (x)	g <sub>2</sub> (x)	g <sub>3</sub> (x)	g <sub>4</sub> (x)

APOIO: **NBI Post** Optimização Individual NBI Anteriores NBI Zerados Limpar Ligar Tela Cheia Desligar Tela Cheia Salvar

Term	F1 (GD)	F2 (S)	GD	S	x(w)
w1	-0,322	-2,726	57,207	-0,007	
w2	1,624	-2,510	111,473	-0,007	
w3	-0,462	-2,742	53,900	-0,007	
w1w2	2,259	10,401	31,120	2,768	0,000
w1w3	-3,793	9,728	-137,577	2,768	0,000
w2w3	-2,214	9,964	-93,552	2,768	0,000
w1w2(w1-w2)	-1,026	-0,114	-28,600	0,000	0,000
w2w3(w1-w2)	3,369	0,374	93,902	0,000	0,000
w1w2(w2-w3)	7,053	0,782	196,065	0,000	0,000
w1w3(w2-w3)	5,610	20,684	93,432	5,470	0,000
w2w3(w2-w3)	-2,816	19,748	-141,436	5,470	0,000
w1w2w3	-4,790	19,529	-196,459	5,470	0,000
w1w2(w1-w2) <sup>2</sup>	-0,100	5,303	-19,452	1,449	0,000
w1w3(w1-w2) <sup>2</sup>	1,064	5,433	13,000	1,449	0,000
w2w3(w1-w2) <sup>2</sup>	-0,090	5,304	-19,184	1,449	0,000
<b>g(x)</b>	<b>3,000</b>	<b>g'(x)</b>	<b>0,000</b>		

w1	w2	w3
0,300	0,350	0,350
0,300	0,350	0,350
0,000	0,000	0,000

F1 (GD) Escalad	βs	1,000	gmax(x):	0,563				
F2 (S) Escalad	βca	0,000	RHS:	0,000				
n	β	F1 (GD)	F2 (S)	GD	S	w1	w2	w3
1	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
n	1							

n	β	F1 (GD)	F2 (S)	GD	S	w1	w2	w3	g(x)	g'(x)
1	1,000	-1,364	0,433	17,887	0,886	0,313	0,096	0,591	1,000	1,000
2	0,930	-1,343	0,517	18,218	0,908	0,278	0,120	0,603	0,961	1,000
3	0,900	-1,312	0,594	18,852	0,928	0,278	0,131	0,591	0,873	1,000
4	0,850	-1,277	0,668	19,606	0,948	0,279	0,142	0,579	0,787	1,000
5	0,800	-1,238	0,739	20,479	0,966	0,281	0,153	0,566	0,704	1,000
6	0,750	-1,196	0,807	21,473	0,983	0,284	0,163	0,553	0,623	1,000
7	0,700	-1,149	0,873	22,588	1,000	0,287	0,174	0,539	0,547	1,000
8	0,650	-1,098	0,933	23,824	1,013	0,290	0,183	0,523	0,474	1,000
9	0,600	-1,043	0,993	25,183	1,030	0,294	0,193	0,510	0,406	1,000
10	0,550	-0,984	1,052	26,664	1,043	0,298	0,206	0,496	0,342	1,000
11	0,500	-0,922	1,108	28,271	1,056	0,302	0,217	0,481	0,284	1,000
12	0,450	-0,854	1,156	30,006	1,068	0,307	0,228	0,465	0,230	1,000
13	0,400	-0,783	1,203	31,873	1,079	0,311	0,239	0,450	0,182	1,000
14	0,350	-0,707	1,248	33,880	1,088	0,315	0,251	0,434	0,139	1,000
15	0,300	-0,626	1,288	36,036	1,097	0,319	0,263	0,417	0,102	1,000
16	0,250	-0,540	1,325	38,353	1,104	0,323	0,276	0,400	0,071	1,000
17	0,200	-0,448	1,357	40,830	1,111	0,327	0,290	0,383	0,046	1,000
18	0,150	-0,349	1,385	43,552	1,115	0,330	0,305	0,365	0,028	1,000
19	0,100	-0,242	1,407	46,495	1,118	0,332	0,321	0,347	0,019	1,000
20	0,050	-0,126	1,422	49,734	1,118	0,334	0,339	0,328	0,018	1,000
21	0,000	0,003	1,427	53,357	1,116	0,334	0,359	0,307	0,029	1,000

APOIO: **NBI Post RSM** NBI RSM Limpar Ligar Tela Cheia Desligar Tela Cheia Salvar

BM	MFR	T	PI	MC	MTP	MMV	ATe	F1	F2	F3	g(x)
10,298	27,006	33,577	38,222	12,082	7,458	12,378	11,592	0,470	-0,120	0,473	1,000
0,020	2,557	6,016	2,041	1,439	0,219	0,589	1,970	0,074	-0,509	-0,356	0,714
1,833	-0,474	4,017	-1,210	0,581	1,039	0,952	2,842	0,674	0,382	-0,352	-0,058
0,554	1,246	2,658	1,379	0,177	1,011	0,772	0,467	0,321	-0,138	-0,017	0,471
2,617	1,126	1,613	0,766	1,345	0,020	0,188	-0,185	-0,191	-0,184	-0,768	-0,939
-0,050	1,597	1,453	1,914	-0,082	0,209	0,188	0,949	0,074	-0,280	0,069	0,510
1,192	-0,907	-2,374	-0,842	0,382	-0,227	-0,343	0,275	-0,106	0,202	-0,330	0,003
0,257	-1,342	-3,550	-0,911	0,089	-0,709	-1,018	-0,657	-0,376	0,137	-0,164	0,222
0,006	-0,364	-1,277	-0,253	-0,025	-0,063	-0,197	-0,175	-0,056	0,058	-0,007	0,882
0,000	0,032	1,291	0,232	0,195	0,041	0,071	0,056	0,007	-0,054	-0,048	-0,042
0,000	1,777	3,896	1,916	0,075	0,397	0,408	0,976	0,135	-0,324	0,010	0,336
0,000	-0,666	-1,705	-0,439	0,341	-0,519	-0,338	-0,924	-0,237	0,019	-0,134	-0,671
0,138	1,066	1,920	1,274	0,026	-0,130	-0,383	-0,078	-0,165	-0,274	-0,043	-0,027
0,610	-0,192	-0,078	-0,127	0,195	-0,031	0,083	0,211	0,010	0,053	-0,150	0,055
0,123	0,638	1,271	0,666	0,045	-0,012	0,146	0,189	0,006	-0,126	-0,022	-0,443
<b>8,025</b>	<b>29,301</b>	<b>37,907</b>	<b>40,821</b>	<b>11,623</b>	<b>8,204</b>	<b>12,936</b>	<b>14,287</b>	<b>0,926</b>	<b>-0,513</b>	<b>1,049</b>	

g(x)	1,617	g'(x)	0,000	4,000	RHS
Slack(x)	0,000	g(x)	0,000	4,000	
T	0,000	g(x)	0,000		

β1	β2	β3	β4	BM	MFR	T	PI	MC	MTP	MMV	ATe	F1	F2	F3
0,714	-0,058	0,471	-0,939	8,025	29,301	37,907	40,821	11,623	8,204	14,287	0,926	-0,513	1,049	

BM	MFR	T	PI	MC	MTP	MMV	ATe	F1	F2	F3
5,015	23,259	24,379	35,799	9,263	6,761	10,953	10,785	0,447	0,420	1,063
10,757	40,005	55,092	61,783	14,848	9,316	14,760	19,978	1,083	-2,521	-0,047
9,236	19,444	10,610	33,259	10,486	5,793	9,572	5,974	-0,650	0,971	0,837
10,831	39,976	54,946	61,812	14,876	9,300	14,712	19,827	1,052	-2,527	-0,072
7,421	24,638	21,521	38,615	8,578	7,004	10,911	9,323	0,262	0,193	1,834
9,629	21,225	14,718	34,748	12,020	2,019	5,998	6,388	-2,539	0,027	-0,081
11,162	38,577	56,869	60,016	14,728	9,777	15,063	21,527	1,511	-2,102	-0,052
10,781	23,733	16,502	36,891	12,450	2,618	6,355	5,781	-2,238	-0,337	-0,291
10,316	32,946	49,839	43,928	13,232	9,709	14,412	20,835	1,811	-0,883	0,418
11,025	39,863	53,757	61,491	15,074	9,070	14,652	19,190	0,887	-2,547	-0,177
5,184	22,018	21,550	34,883	9,004	6,805	10,723	9,703	0,387	0,639	2,001

β1	β2	β3	β4	BM	MFR	T	PI	MC	MTP	MMV	ATe	F1	F2	F3
5,015	40,005	10,610	51,812	8,578	2,019	15,063	5,781							
<b>8,025</b>	<b>29,301</b>	<b>37,907</b>	<b>40,821</b>	<b>11,623</b>	<b>8,204</b>	<b>12,936</b>	<b>14,287</b>	<b>0,926</b>	<b>-0,513</b>	<b>1,049</b>				
62,49%	73,24%	27,99%	78,79%	73,80%	24,61%	85,88%	40,47%							
<b>58,41%</b>														

Fator	Sigla	(-)	(+)	X' Codad	X' Uncodad
β1	NB	6	14	0,714	13
β2	BEA	0,0	30,0	-0,058	14,1
β3	BOA	0,0	90,0	0,471	66,2
β4	BL	26,0	40,0	-0,939	26,4

Minimização Maximização Minimização Maximização Minimização Maximização Minimização Maximização Minimização

```

[General]
End Sub

Sub Variables()
    Application.ScreenUpdating = False
    Variables.Show
    Application.ScreenUpdating = True
End Sub

Sub IndOpti()
    'Reset all Solver settings
    SolverReset

    ' Check if the cells contain minimization or maximization and run the solver for individual optimization for the first variable
    If Range("C27").Value = "Maximization" Then
        ' Run the Solver
        SolverOk SetCell:="$D215", MaxMinVal:=1, ValueOf:=0, ByChange:="$M4:$M6", Engine:=1, EngineDesc:="GRG Nonlinear"
        SolverOptions MaxTime:=100, Iterations:=100, Precision:=0.00001, Convergence:= _
        0.001, StepTru:=False, Scaling:=False, AssumeNonNeg:=False, Derivatives:= _
        0.001, StepTru:=False, Scaling:=False, AssumeNonNeg:=False, Derivatives:= _
        0.001, RequireBounds:=True, MaxSubproblems:=0, MaxIntegerSols:=0, _
        Infeasible:=0.5, SolveWithout:=True, MaxTimeLim:=0
        SolverAdd CellRef:="$C215", Relation:="<=", FormulaText:="$D215"
        SolverOptions AssumeNonNeg:=False
        SolverSolve True
        Range("C27").Select
    ElseIf Range("C27").Value = "Minimization" Then
        ' Run the Solver
        SolverOk SetCell:="$D215", MaxMinVal:=2, ValueOf:=0, ByChange:="$M4:$M6", Engine:=1, EngineDesc:="GRG Nonlinear"
        SolverOptions MaxTime:=100, Iterations:=100, Precision:=0.00001, Convergence:= _
        0.001, StepTru:=False, Scaling:=False, AssumeNonNeg:=False, Derivatives:= _
        0.001, StepTru:=False, Scaling:=False, AssumeNonNeg:=False, Derivatives:= _
        0.001, PopulationSize:=100, RandomSeed:=0, MutationRate:=0.075, MultiStart _
        0.001, RequireBounds:=True, MaxSubproblems:=0, MaxIntegerSols:=0, _
        Infeasible:=0.5, SolveWithout:=True, MaxTimeLim:=0
        SolverAdd CellRef:="$C215", Relation:="<=", FormulaText:="$D215"
        SolverOptions AssumeNonNeg:=False
        SolverSolve True
        Range("C27").Select
    Else
        MsgBox "The cell must contain 'Maximization' or 'Minimization'"
        Exit Sub
    End If

    ' Copy and paste into the Payoff Matrix for the first variable
    Range("B11:B17").Copy
    Range("O3:O5").PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks:=False, Transpose:=True

```

Jupyter NBI\_Vent Last Checkpoint: 2 months ago

```

# Armazenando os resultados da iteração atual
iteracao_df = pd.DataFrame({
    'n': [n + 1], # Adiciona n, incrementado em 1 para começar de 1
    **{f'w{i+1}': [weight_df.iloc[n, i]] for i in range(len(weight_df.columns))},
    **{f'x{i+1}': [val] for i, val in enumerate(resultado.x)},
    **{coef_df.columns[i]: [val] for i, val in enumerate(resultado.somarproduto)},
    'g1(x)': [restricao_1],
    **{f'g{i+2}(x)': [val] for i, val in enumerate(restricao_n)}
})

# Adicionando a iteração ao DataFrame acumulado
resultados_acumulados = pd.concat([resultados_acumulados, iteracao_df], ignore_index=True)

# Ajustando o índice para começar em 1
resultados_acumulados.index += 1

# Imprimindo os resultados
round(resultados_acumulados, 3)

# Armazenando resultados no Excel
resultados_acumulados.to_excel("resultados_acumulados.xlsx", index=False)

```

[15]:	n	w1	w2	w3	x1	x2	x3	x4	COEF(BM)	COEF(MFR)	...	COEF(MTP)	COEF(MMV)	COEF(ATz)	COEF(F1)	COEF(F2)	COEF(F3)	g1(x)	g2(x)	g3(x)
1	1	1.0	0.0	0.0	0.177	-1.101	-1.639	0.265	10.230	22.705	...	2.187	6.128	5.960	-2.379	0.252	0.199	-0.000	0.0	0.0
2	2	0.9	0.1	0.0	0.052	-0.914	-1.650	0.065	9.743	22.577	...	2.504	6.577	6.516	-2.102	0.022	0.114	0.436	0.0	-0.0
3	3	0.9	0.0	0.1	0.265	-1.473	-1.154	0.293	10.598	24.670	...	3.060	7.273	6.427	-2.051	0.245	0.439	0.344	-0.0	-0.0
4	4	0.8	0.2	0.0	-0.630	-0.559	-1.808	0.152	9.908	22.554	...	2.854	6.829	7.271	-1.824	-0.207	0.029	-0.000	-0.0	0.0
5	5	0.8	0.1	0.1	-0.625	-0.996	-1.427	0.762	10.961	24.629	...	3.521	7.447	6.795	-1.773	0.015	0.354	-0.000	0.0	-0.0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
62	62	0.0	0.4	0.6	1.344	-0.353	-0.031	-0.528	8.461	33.018	...	7.845	13.155	15.650	0.702	-0.709	1.300	1.789	0.0	0.0
63	63	0.0	0.3	0.7	1.533	-0.294	0.040	-0.311	9.041	34.774	...	8.119	13.529	16.580	0.753	-0.486	1.626	1.466	0.0	0.0
64	64	0.0	0.2	0.8	1.708	-0.218	0.114	-0.114	9.625	36.507	...	8.397	13.889	17.535	0.804	-0.264	1.951	1.011	0.0	-0.0
65	65	0.0	0.1	0.9	1.871	-0.128	0.192	0.062	10.217	38.220	...	8.674	14.232	18.524	0.855	-0.041	2.277	0.442	0.0	-0.0
66	66	0.0	0.0	1.0	1.885	-0.090	0.623	0.220	11.024	39.863	...	9.070	14.553	19.191	0.906	0.181	2.602	-0.000	0.0	-0.0

66 rows x 23 columns

	n	w1	w2	w3	x1	x2	x3	x4	COEF(BM)	COEF(MFR)	...	COEF(F3)	g1(x)	g2(x)	g3(x)	g4(x)	NED	GPE	S	S/GPE	MD	
<b>1</b>	1	1.0	0.0	0.0	0.177	-1.101	-1.639	0.265	10.230	22.705	...	0.199	-0.000	-0.0	0.0	0.0	1.454	2.047	-0.000	-0.000	2.551	
<b>2</b>	2	0.9	0.1	0.0	0.052	-0.914	-1.650	0.065	9.743	22.577	...	0.114	0.436	0.0	-0.0	-0.0	1.396	2.084	0.325	0.156	2.181	
<b>3</b>	3	0.9	0.0	0.1	0.265	-1.473	-1.154	0.293	10.598	24.670	...	0.439	0.344	-0.0	-0.0	-0.0	1.401	2.089	0.325	0.156	2.187	
<b>4</b>	4	0.8	0.2	0.0	-0.630	-0.559	-1.808	0.152	9.908	22.554	...	0.029	-0.000	-0.0	0.0	0.0	1.356	2.121	0.500	0.236	1.840	
<b>5</b>	5	0.8	0.1	0.1	-0.625	-0.996	-1.427	0.762	10.961	24.629	...	0.354	-0.000	0.0	-0.0	-0.0	1.351	2.126	0.639	0.301	1.796	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
<b>62</b>	62	0.0	0.4	0.6	1.344	-0.353	-0.031	-0.528	8.461	33.018	...	1.300	1.789	0.0	0.0	-0.0	1.534	2.448	0.673	0.275	1.308	
<b>63</b>	63	0.0	0.3	0.7	1.533	-0.294	0.040	-0.311	9.041	34.774	...	1.626	1.466	0.0	0.0	-0.0	1.567	2.454	0.611	0.249	1.501	
<b>64</b>	64	0.0	0.2	0.8	1.708	-0.218	0.114	-0.114	9.625	36.507	...	1.951	1.011	0.0	-0.0	-0.0	1.616	2.459	0.500	0.204	1.777	
<b>65</b>	65	0.0	0.1	0.9	1.871	-0.128	0.192	0.062	10.217	38.220	...	2.277	0.442	0.0	-0.0	-0.0	1.680	2.464	0.325	0.132	2.104	
<b>66</b>	66	0.0	0.0	1.0	1.885	-0.090	0.623	0.220	11.024	39.863	...	2.602	-0.000	0.0	-0.0	-0.0	1.758	2.469	-0.000	-0.000	2.462	

66 rows × 28 columns

## APÊNDICE C - Outras respostas obtidas

Esta seção apresenta os resultados relacionados aos valores mínimos (Min), médios (Med) e máximos (Max), além de informações sobre pressão, incluindo pressão estática (SP), dinâmica (DP) e total (TP). Também são abordadas as velocidades, que incluem magnitude (MV), axial (AV), radial (RV) e tangencial (TV), bem como os parâmetros de turbulência, representados por  $k$  (TBk),  $\varepsilon$  (TB $\varepsilon$ ) e  $\Omega$  (TB $\Omega$ ). Além disso, são apresentados o número de Reynolds (Re) e os resultados da simulação de grandes vórtices (LES). Os resultados são baseados no ventilador inicial estudado, no CCD e nas otimizações realizadas, com a unidade de cada variável devidamente indicada.

Exp	SP (Min)	SP (Med)	SP (Max)	DP (Min)	DP (Med)	DP (Max)	TP (Min)	TP (Med)	TP (Max)
Original	-3.101,07	54,86	1.830,87	0,41	991,99	5.974,39	-2.577,93	1.046,85	4.577,61
1	-2.667,58	35,42	1.679,18	3,45	930,65	4.711,32	-1.825,07	966,07	3.665,36
2	-3.744,86	50,80	1.904,69	6,64	1.162,91	5.143,23	-3.029,40	1.213,71	4.108,21
3	-3.952,85	-244,05	1.927,81	2,52	1.150,97	6.937,05	-2.054,68	906,91	6.246,73
4	-5.794,26	-420,28	1.856,54	2,71	1.842,95	9.269,55	-3.289,39	1.422,66	6.980,99
5	-3.567,08	60,64	1.997,90	6,47	981,04	7.009,87	-1.952,54	1.041,67	6.969,88
6	-7.144,08	-69,20	2.165,65	6,87	1.463,40	10.490,13	-4.224,34	1.394,20	8.691,86
7	-4.289,01	-135,38	2.184,20	3,59	1.179,40	8.071,16	-2.670,90	1.044,01	8.265,36
8	-6.118,83	-382,88	4.791,98	17,07	2.279,15	12.890,57	-4.891,08	1.896,26	10.967,29
9	-3.013,91	46,23	1.845,23	3,62	943,41	4.782,82	-2.410,33	989,63	4.023,52
10	-3.696,45	-76,91	1.985,57	2,26	1.207,25	4.812,82	-3.249,67	1.130,33	4.291,92
11	-5.349,83	-586,58	2.409,14	5,54	1.502,91	8.546,31	-2.330,14	934,33	6.726,09
12	-3.478,63	-424,25	1.627,58	2,62	1.647,11	7.241,05	-2.266,32	1.222,85	5.952,12
13	-4.778,48	97,45	1.868,77	5,48	1.118,70	8.058,59	-2.002,15	1.216,16	7.481,79
14	-5.627,82	-112,22	2.681,04	14,35	1.656,60	9.661,77	-3.651,64	1.544,37	7.775,29
15	-5.434,29	-334,77	2.087,72	4,55	1.504,42	9.755,41	-2.309,78	1.169,65	9.358,29
16	-7.578,24	-716,04	1.991,15	24,75	2.686,47	13.362,30	-6.748,46	1.970,42	10.071,77
17	-6.494,48	-439,37	3.739,29	5,46	1.894,58	10.754,52	-4.193,29	1.455,21	7.408,41
18	-3.518,12	265,56	1.848,24	2,07	1.002,76	4.822,13	-2.720,35	1.268,32	4.098,18
19	-3.597,61	-572,82	1.619,66	5,21	1.871,04	8.942,37	-2.647,62	1.298,19	7.662,56
20	-3.511,13	-39,30	2.028,93	2,14	1.168,07	4.215,45	-2.093,86	1.128,76	4.783,99
21	-2.649,49	-28,65	1.580,33	0,70	878,08	3.542,60	-1.974,26	849,42	3.119,36
22	-3.569,99	35,76	1.937,64	5,23	1.264,67	6.608,65	-1.669,40	1.300,42	6.359,53
23	-4.862,19	-272,21	2.200,02	10,80	1.748,64	8.511,18	-2.882,83	1.476,42	6.709,39
24	-6.415,91	-61,43	2.893,08	5,26	1.592,95	9.441,55	-3.542,33	1.531,50	7.438,08
GD	-6.769,26	-51,31	2.696,85	0,76	1.671,72	13.604,79	-3.581,08	1.620,41	9.996,28
S	-10.076,58	-245,11	2.779,57	2,45	1.856,03	12.731,94	-5.172,80	1.610,92	9.697,16
P-O	-8.785,62	-171,65	2.532,69	3,76	1.763,48	11.699,85	-4.672,68	1.591,83	9.341,84
Unidade	Pa								

<b>Exp</b>	<b>MV (Min)</b>	<b>MV (Med)</b>	<b>MV (Max)</b>	<b>AV (Min)</b>	<b>AV (Med)</b>	<b>AV (Max)</b>	<b>RV (Min)</b>	<b>RV (Med)</b>	<b>RV (Max)</b>
Original	0,00	37,54	98,76	-28,75	-0,16	24,36	-45,80	9,05	66,94
1	0,00	34,99	80,39	-17,25	0,31	22,72	-44,26	6,44	61,95
2	0,00	39,45	91,61	-21,12	-0,67	19,09	-41,10	10,02	79,59
3	0,00	37,56	106,16	-17,60	0,01	12,63	-65,39	5,30	73,65
4	0,00	47,03	122,95	-34,44	-0,91	16,22	-53,32	8,66	83,19
5	0,00	35,66	106,74	-17,65	0,22	24,52	-43,57	7,10	62,86
6	0,00	44,13	130,32	-44,93	0,49	31,70	-67,30	11,35	84,19
7	0,00	38,32	111,12	-15,82	0,11	15,95	-59,50	4,56	71,52
8	0,00	53,10	144,27	-32,37	-0,23	36,11	-62,45	10,22	71,53
9	0,00	35,86	82,31	-21,97	-0,76	19,25	-45,48	7,32	65,83
10	0,00	40,70	88,64	-25,26	-2,78	20,83	-32,57	12,27	75,62
11	0,00	42,34	117,98	-37,28	-0,78	32,98	-61,51	7,27	82,50
12	0,00	44,39	108,73	-28,17	-2,67	16,93	-36,89	8,40	67,72
13	0,00	38,46	114,41	-22,69	-0,33	22,01	-54,17	7,89	69,95
14	0,00	47,32	125,30	-47,68	-2,50	38,46	-50,61	12,82	77,82
15	0,00	43,34	124,97	-25,60	-0,63	22,80	-52,60	6,41	72,77
16	0,00	57,63	147,70	-53,84	-3,01	41,49	-55,25	11,74	79,32
17	0,00	49,39	132,47	-23,23	-1,80	25,21	-51,02	12,67	90,24
18	0,00	36,69	88,64	-33,98	-1,05	20,08	-28,92	9,62	70,44
19	0,00	45,80	120,82	-27,73	-1,67	21,31	-29,95	4,88	56,52
20	0,00	38,92	82,94	-16,40	-1,47	12,84	-42,73	7,84	70,90
21	0,00	33,95	72,53	-18,15	-1,49	26,49	-27,44	6,14	60,63
22	0,00	39,82	103,44	-11,92	0,63	17,19	-60,23	7,55	66,24
23	0,00	47,87	117,72	-29,59	-1,13	25,04	-45,37	11,26	73,70
24	0,00	44,74	123,78	-22,43	-0,72	17,58	-71,21	8,97	84,46
GD	0,00	47,10	149,04	-23,01	1,42	30,74	-70,43	8,16	90,24
S	0,00	50,11	144,18	-28,48	0,89	24,83	-77,99	10,96	104,96
P-O	0,00	48,80	138,21	-21,50	0,96	25,69	-74,89	10,38	98,94
Unidade	m/s								

<b>Exp</b>	<b>TV (Min)</b>	<b>TV (Med)</b>	<b>TV (Max)</b>	<b>TBk (Min)</b>	<b>TBk (Med)</b>	<b>TBk (Max)</b>	<b>TBε (Min)</b>	<b>TBε (Med)</b>	<b>TBε (Max)</b>
Original	-98,43	-28,94	48,74	0,08	33,75	317,63	59,42	64.145,94	7.006.924,00
1	-76,39	-28,55	45,88	0,29	38,09	283,71	48,14	74.170,64	6.599.563,00
2	-79,60	-32,21	45,25	0,08	39,47	501,25	60,54	95.386,91	8.397.280,00
3	-80,55	-29,39	56,57	0,28	42,26	312,10	45,21	111.039,70	6.766.697,00
4	-105,24	-39,79	45,73	0,05	45,13	481,33	61,83	167.617,20	10.354.490,00
5	-88,00	-28,59	49,66	0,32	38,14	321,83	58,67	79.217,45	9.113.063,00
6	-101,19	-34,96	59,86	0,27	41,51	479,74	81,61	133.935,90	14.769.870,00
7	-103,81	-29,67	63,96	0,30	41,23	317,93	52,95	103.095,70	6.141.797,00
8	-134,36	-45,04	40,28	0,41	48,14	529,63	103,84	198.593,00	20.750.860,00
9	-74,41	-28,37	45,61	0,17	35,50	257,44	63,33	62.636,87	5.477.076,00
10	-70,70	-31,48	49,33	0,07	38,61	370,50	75,79	92.309,39	7.553.817,00
11	-86,17	-32,90	55,18	0,32	50,53	461,09	59,13	149.058,60	8.769.398,00
12	-92,72	-38,56	36,80	0,27	33,64	289,45	42,99	117.595,90	7.639.021,00
13	-93,27	-30,05	50,70	0,34	34,70	281,62	70,03	77.722,77	8.982.954,00
14	-102,76	-36,35	52,79	0,29	37,08	473,33	82,51	121.665,30	10.512.860,00
15	-117,87	-35,88	60,60	0,34	57,08	393,05	69,18	140.584,60	11.320.400,00
16	-141,51	-48,97	42,57	0,04	40,45	509,61	130,99	178.549,80	20.655.800,00
17	-105,83	-40,28	42,32	0,07	51,90	640,48	98,74	196.827,90	14.864.160,00
18	-73,68	-29,08	70,44	0,12	30,35	413,40	59,55	65.411,64	4.134.001,00
19	-113,79	-40,40	52,36	0,22	53,98	394,70	27,83	191.964,40	35.516.900,00
20	-74,83	-32,27	43,25	0,06	46,43	454,46	46,91	104.268,20	7.935.367,00
21	-63,65	-28,20	25,98	0,23	35,97	302,65	29,07	78.591,69	5.796.031,00
22	-81,82	-33,54	44,84	0,07	42,12	442,41	42,18	116.047,30	8.599.250,00
23	-92,26	-38,75	47,29	0,37	37,85	307,22	86,21	105.360,70	8.612.902,00
24	-94,00	-36,92	56,50	0,16	38,65	551,75	67,31	115.915,70	9.324.601,00
GD	-134,37	-39,86	77,30	0,21	39,38	577,03	59,76	150.891,30	39.047.560,00
S	-130,05	-40,92	69,60	0,13	42,59	553,00	98,84	180.512,10	32.300.160,00
P-O	-114,06	-40,51	64,09	0,16	45,97	570,57	87,39	177.296,10	23.241.210,00
Unidade	m/s	m/s	m/s	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>	m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>	m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>

<b>Exp</b>	<b>TBO (Min)</b>	<b>TBO (Med)</b>	<b>TBO (Max)</b>	<b>Re (Min)</b>	<b>Re (Med)</b>	<b>Re (Max)</b>	<b>LES (Min)</b>	<b>LES (Med)</b>	<b>LES (Max)</b>
Original	2.099,63	26.804,35	1.420.086,00	1,23	3.208,55	26.100,51	0,03	1,45	7,17
1	1.794,45	32.485,44	3.037.953,00	3,43	3.545,38	22.276,06	0,04	1,78	6,80
2	2.046,27	41.013,85	2.956.677,00	1,11	2.627,64	27.629,27	0,03	1,57	5,73
3	1.788,85	37.535,55	2.958.597,00	4,47	3.479,69	25.740,82	0,06	1,39	5,88
4	318,20	51.205,75	3.259.544,00	1,55	2.581,31	29.827,65	0,03	1,22	5,84
5	1.988,33	32.880,31	3.262.088,00	3,03	3.556,15	22.027,33	0,04	1,62	5,84
6	2.415,61	46.250,06	3.523.946,00	1,81	2.554,78	25.790,16	0,03	1,39	4,84
7	1.965,17	38.107,64	2.961.045,00	5,95	3.451,86	24.843,41	0,06	1,42	5,69
8	2.798,64	52.456,55	3.576.837,00	3,77	2.329,97	27.831,93	0,04	1,23	7,02
9	2.075,36	32.268,89	2.868.833,00	2,15	3.506,17	21.740,14	0,03	1,58	6,26
10	2.019,66	42.095,26	3.031.582,00	0,87	2.592,94	25.133,81	0,28	1,40	5,45
11	2.066,78	41.536,15	3.155.908,00	4,46	3.690,66	33.358,54	0,05	1,41	7,04
12	1.738,72	50.456,45	3.103.521,00	1,99	2.138,34	22.375,65	0,03	1,29	5,47
13	2.183,83	33.053,57	3.307.446,00	4,11	3.211,32	22.698,44	0,04	1,40	6,60
14	1.732,39	46.983,50	3.348.911,00	2,59	2.294,00	28.549,20	0,31	1,24	4,83
15	2.259,15	40.741,25	3.399.237,00	5,77	3.983,64	29.548,85	0,06	1,45	6,33
16	2.336,32	54.986,01	3.928.653,00	1,00	1.870,94	25.948,45	0,04	1,12	4,90
17	1.876,93	50.731,61	3.599.878,00	1,43	2.392,81	29.237,11	0,03	1,26	5,45
18	1.953,29	34.782,70	3.144.312,00	1,22	2.567,84	30.408,31	0,03	1,50	5,43
19	1.396,93	50.084,24	4.322.623,00	5,40	2.730,20	29.957,34	0,05	1,49	6,87
20	1.790,03	38.706,01	3.292.477,00	1,08	3.356,33	32.284,76	0,03	1,66	7,99
21	1.366,31	37.655,31	2.760.204,00	2,56	2.783,31	24.856,45	0,03	1,87	8,58
22	985,48	45.087,67	3.291.688,00	1,38	3.047,33	30.701,33	0,05	1,50	5,28
23	1.791,18	42.854,63	3.041.138,00	2,88	2.823,33	27.531,61	0,03	1,20	4,39
24	2.094,30	43.079,98	3.248.260,00	1,67	2.808,28	35.157,15	0,03	1,31	5,72
GD	2.035,91	41.551,44	2.346.604,00	2,15	2.547,91	35.258,43	0,04	1,25	6,59
S	1.832,50	43.002,09	2.174.187,00	2,06	2.259,31	36.134,07	0,04	1,19	6,25
P-O	1.981,29	41.950,72	2.046.067,00	1,30	2.452,15	33.196,59	0,03	1,24	6,08
Unidade	s <sup>-1</sup>	s <sup>-2</sup>	s <sup>-3</sup>	adm	adm	adm	adm	adm	adm