

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Equações de Reação-Difusão com Expoentes Variáveis e
Problema Limite Semilinear**

David Estiven Carvajal Mazo

Orientador: Prof. Dra. Mariza Stefanello Simsen

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 26 DE FEVEREIRO DE 2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Equações de Reação-Difusão com Expoentes Variáveis e Problema Limite Semilinear

David Estiven Carvajal Mazo

Orientador: Prof. Dra. Mariza Stefanello Simsen

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Equações Diferenciais Parciais

ITAJUBÁ – MG
26 DE FEVEREIRO DE 2025

*Aos meus pais Silvia Mazo e Edilberto Carvajal, à minha irmã Daniela Carvajal e ao meu tio
Oscar Carvajal. Esta conquista é de vocês.*

Agradecimentos

Sempre achei na matemática um refúgio, um lugar aonde nunca ia ficar sozinho, um lugar aonde nunca poderia de parar de aprender, uma fonte inesgotável de conhecimentos. Esse amor me mantém ainda na busca de aprender mais e mais. Esta tarefa não pode ser feita sem a companhia de pessoas que te apoiam, te protegem, te dão valor de continuar a jornada. Primeiramente quero agradecer aos meus pais Silvia Mazo e Edilberto Carvajal por sempre confiar em minhas capacidades, por me defender, por compartilhar este sonho comigo. À minha irmã Daniela Carvajal por me ajudar a manter o foco no objetivo e ao meu tio Oscar Carvajal por seu trabalho árduo para me ajudar.

Quero agradecer em especial à Natalia Sepúlveda por sua companhia, seu apoio e sua confiança em mim; também, quero expressar meu mais sincero agradecimento à meu amigo e colega Alejandro Vanegas, seus conselhos e ajuda foi chave para fazer este trabalho.

Desejo agradecer a minha orientadora Prof^a. Dr^a. Mariza Stefanello Simsen por sua disposição, por sua paciência e pelos conhecimentos que me aportou neste trabalho. Também quero estender estes agradecimentos aos membros do corpo docente, em especial ao Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello por sua imensa ajuda durante o mestrado e pelas contribuições ao programa de pós-graduação.

Aos meus amigos Lizzeth Ibañez e Jesús Humanez pelo companherismo e acima de tudo pelos momentos de alegria compartilhados. Muitíssimo obrigado a todas as pessoas que me acompanharam neste processo.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

David Estiven Carvajal Mazo.

Resumo

Estudaremos problemas de reação-difusão não lineares envolvendo o operador $p(x)$ -Laplaciano. Nosso estudo envolve as questões de existência de solução de atratores globais para as equações com foco principal na questão da estabilidade das equações diferenciais parciais com respeito às condições iniciais e aos expoentes variáveis. Estudaremos a continuidade do fluxo e a semicontinuidade superior dos atratores da família de atratores globais das equações de reação-difusão com expoentes variáveis quando os expoentes convergem para 2 no espaço das funções essencialmente limitadas. Nessa situação, o problema limite é semilinear, com o operador $p(x)$ -Laplaciano convergindo para o operador Laplaciano.

Palavras-chave: Existência, continuidade do fluxo, semicontinuidade superior, equações de reação-difusão, $p(x)$ -Laplaciano.

Abstract

We will study nonlinear reaction-diffusion problems involving the $p(x)$ -Laplacian operator. Our study addresses the issues of existence of solution and global attractors for the equations focusing primarily on the stability of partial differential equations with respect to initial conditions and variable exponents. We will examine the continuity of the flow and the upper semicontinuity of the attractors in the family of global attractors of the reaction-diffusion equations with variable exponents, when the exponents converge to 2 in the space of essentially bounded functions. In this scenario, the limiting problem is semilinear, with the $p(x)$ -Laplacian operator converging to the Laplacian operator.

Keywords: Existence, flow continuity, upper semicontinuity, reaction-diffusion equations, $p(x)$ -Laplacian.

Os encantos dessa sublime ciência se revelam apenas àqueles que tem coragem de ir a fundo nela.

Carl Friedrich Gauss

Conteúdo

Introdução	9
1 Preliminares	12
1.1 Definições e Conceitos Básicos	12
1.2 Espaços Normados e Espaços de Medida	14
1.3 Espaço de Hilbert	17
1.4 Teorema Representação de Riesz e Convergências Fraca e Fraca *	18
1.5 Operadores Adjuntos e Auto-Adjuntos	21
2 Propriedades do operador $p(x)$-Laplaciano	23
2.1 Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados	23
2.2 Definições e Resultados	27
2.3 Propriedades do Operador $p(x)$ -Laplaciano	29
2.4 A Realização A_H de A em $H = L^2(\Omega)$	36
3 Existência de Atratores Globais	41
3.1 Conceitos Preliminares	41
3.2 O Problema de Cauchy Abstrato	50
3.3 Semigrupo das Soluções Globais	52
3.4 Construção do Atrator Global	55
4 Convergência de Equações Parabólicas Quasilineares	59
4.1 Introdução	59
4.2 Estimativas Uniformes das Soluções	61
4.3 Continuidade do Fluxo e Semicontinuidade Superior dos Atratores	72
Bibliografia	84

Introdução

Neste trabalho vamos apresentar os resultados que estudamos nos artigos [5] e [4]. Cada capítulo dá uma parte dos conceitos requeridos para entender esses artigos.

Inicialmente no Capítulo 1 apresentaremos conceitos básicos e definições importantes da teoria de Análise Funcional e teoria da Medida e Integração. No Capítulo 2 vamos definir o Espaço de Lebesgue Generalizado e o Espaço de Sobolev Generalizado com algumas propriedades básicas. Apresentaremos o operador $p(x)$ -Laplaciano num espaço de Hilbert H . Neste capítulo, fazemos um apanhado sobre os espaços de Lebesgue Generalizados $L^{p(x)}(\Omega)$ e os espaços de Sobolev Generalizados $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Posteriormente, mostraremos que o operador $A : V \longrightarrow V^*$ em que $V = W^{1,p(x)}(\Omega)$ dado por

$$A(u)(v) = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u \cdot v dx,$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $p(x) \in C(\overline{\Omega})$ com $p(x) > 2$ para q.t $x \in \Omega$, é monótono, coercivo e hemicontínuo. Mostramos também que a sua realização no espaço de Hilbert $H = L^2(\Omega)$ é a subdiferencial da função convexa, semicontínua inferiormente e própria

$$\varphi_{p(x)}(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |u|^{p(x)} dx & \text{se } u \in V \\ +\infty, & \text{se } u \in H - V. \end{cases}$$

No Capítulo 3 vamos provar a existência de atratores globais. Nosso objetivo é entender o problema de Cauchy abstrato com um operador setorial, vamos dar as condições para provar a existência de soluções e as condições que garantem a existência de um semigrupo global de soluções.

O Capítulo 4 é o foco deste trabalho. Este capítulo é baseado nos artigos [5] e [4]. Vamos apresentar a semicontinuidade superior do atrator global para o problema (2) quando $j \longrightarrow +\infty$. Isso quer dizer que considerando a equação semilinear

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u = b(u), & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (1)$$

Em que Ω é um domínio limitado de fronteira suficientemente suave de $\mathbb{R}^N$, $N > 0$ e $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável e globalmente Lipschitz e considerando seu operador de Nemytskií associado $B : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, isto é, para qualquer $u : [0, \infty) \rightarrow L^2(\Omega)$ e $x \in \Omega$, $B(u(t))(x) := b(u(x, t))$. O problema (1) pode ser visto como o problema limite das equações

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_{p_j(x)} u + |u|^{p_j(x)-2} u = b(u), & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (2)$$

quando $p_j \rightarrow 2$ em $L^\infty(\Omega)$ quando $j \rightarrow \infty$. Em que $\{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções contínuas $p_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p_j^- := \inf p_j \geq 2$ e $\{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge para 2 em $L^\infty(\Omega)$ quando $j \rightarrow +\infty$. Denotamos por $p_j^+ := \sup p_j$. Estamos supondo que $2 \leq p_j(x) \leq p_1(x) \leq p_0$ para todo $x \in \Omega$.

O operador $A_{j,1} : W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega) \rightarrow [W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)]^*$ dado por

$$A_{j,1} = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p_j(x)-2} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p_j(x)-2} u(x) v(x) dx,$$

para qualquer $u \in W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)$ e $v \in W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)$. Pelo que foi testado no Capítulo 2 $A_{j,1}$ é um operador maximal monótono e conseqüentemente o operador A_j , a realização de $A_{j,1}$ em $L^2(\Omega)$, é maximal monótono em $L^2(\Omega)$, onde

$$A_j u = -\Delta_{p_j(x)} u + |u|^{p_j(x)-2} u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_j(x)-2} \nabla u) + |u|^{p_j(x)-2} u,$$

para qualquer $j \in \mathbb{N}$. No Capítulo 2 provamos que o operador A_j é a subdiferencial $\partial \varphi_j$ de uma aplicação convexa, própria e s.c.i $\varphi_j : L^2(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$\varphi_j(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} \frac{1}{p_j(x)} |\nabla u_j(t, x)|^{p_j(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p_j(x)} |u_j(t, x)|^{p_j(x)} dx & \text{se } u \in W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega) \\ +\infty & \text{Caso contrário.} \end{cases}$$

O problema (2) pode ser escrito de maneira abstrata como

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + A_j u = B(u), & t > 0 \\ u(0) = u_0 \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (3)$$

com $B : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ globalmente Lipschitz. Pelo Capítulo 3 sabemos que o problema (3) tem uma solução global forte u_j e tem um atrator global em $L^2(\Omega)$, o qual vai ser denotado por $\mathcal{A}_j$.

Defina o operador $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ por

$$D(A) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ em } \partial\Omega \right\},$$

e

$$Au := -\Delta u + u$$

para todo $u \in D(A)$.

Temos que o operador A é um operador auto-adjunto positivo em $L^2(\Omega)$ com resolvente compacto e além disso $-A$ gera um semigrupo compacto analítico em $L^2(\Omega)$ (isto é, A é um operador setorial no sentido de Henry [22]). Se A é como acima, consideremos no espaço $L^2(\Omega)$ o seguinte problema parabólico autônomo semilinear

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = B(u) & \text{se } t > 0 \\ u(0) = u_0 \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (4)$$

No Teorema 4.1 garantimos a existência de um atrator global para (4) denotado por $\mathcal{A}_\infty$. Apresentaremos a prova de que o problema limite (3) quando $j \longrightarrow \infty$ é descrito pela equação parabólica semilinear em (4) e vamos provar também a continuidade do fluxo. Finalmente vamos provar a semicontinuidade superior da família de atratores globais quando $j \longrightarrow \infty$ para o problema (2) com respeito aos parâmetros p_j . Isso quer dizer, vamos provar que

$$\text{dist}(\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_\infty) \longrightarrow 0 \text{ quando } j \longrightarrow +\infty.$$

Em que $\{\mathcal{A}_j : j \in \mathbb{N}\}$ é uma família de atratores globais de (3).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos dar algumas definições e conceito básicos. Também uma pequena coleta de resultados da teoria da medida e de análise funcional.

1.1 Definições e Conceitos Básicos

Nesta seção vamos dar algumas definições básicas de espaço topológico, espaço métrico, conceito de convergência, entre outras coisas. Estes conceitos são de importância vital em nosso estudo. Estas definições e resultados podem ser encontradas em [20],[18].

Definição 1.1. Um **espaço topológico** é um par (X, τ) , onde X é um conjunto e τ é uma coleção de conjuntos de $\mathcal{P}(X)$ que satisfaz;

1. X e $\emptyset$ estão em τ ;
2. Se $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma coleção arbitrária de conjuntos de τ , então $\bigcup_{i \in I} U_i$ está em τ ;
3. Se $\{U_i\}_{i=1}^m$ uma coleção finita de conjuntos de τ , então $\bigcap_{i=1}^m U_i$ está em τ .

Os elementos de τ são chamados como **abertos**.

Definição 1.2. Um **espaço métrico** é um par (X, d) , onde X é um conjunto não vazio e d uma **métrica** em X , isto é., d é uma função definida em $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que para todos $x, y, z \in X$ temos que:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 1.3. Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (X, d) é dita **convergente** se existe $x \in X$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$. Neste caso, $x \in X$ é chamado o **limite** de (x_n) e escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, ou simplesmente $x_n \rightarrow x$.

Observação 1.1. Se (X, d) é um espaço métrico, então

1. Uma sequência convergente em X é limitada $\left(\sup_{m, n \in \mathbb{N}} d(x_n, x_m) < \infty \right)$ e seu limite é único.
2. Se $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ em X então $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$;
3. Um espaço métrico (X, d) é um espaço topológico, em que seus abertos são as bolas definidas por; $B(x; \epsilon) := \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$ para $\epsilon > 0$.

Definição 1.4. Sejam $x_0 \in X$ e $A \subset X$, definimos a **distância** de um ponto x_0 a um conjunto A , por

$$d(x_0, A) := \inf_{y \in A} d(x_0, y).$$

Definição 1.5. Um subconjunto F de um espaço topológico (X, τ) é dito **fechado**, se F^c é um conjunto aberto de X .

Definição 1.6. Um subconjunto $A \in X$ chama-se **limitado** se, existe $C > 0$ tal que $d(x, y) \leq C$ para quaisquer $x, y \in A$.

Definição 1.7. O **diâmetro** de um conjunto limitado A de um espaço métrico X , é definido

$$\text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y).$$

Definição 1.8. Seja (X, τ) um espaço topológico. Seja $A \subset X$, uma **cobertura aberta** de A , é uma coleção de conjuntos $\{C_\lambda\}_{\lambda \in I}$ em τ tal que $A \subset \bigcup_{\lambda \in I} C_\lambda$. Falamos de uma **subcobertura aberta finita** de A , se existir um conjunto $F \subset I$ finito, tal que $A \subset \bigcup_{\lambda \in F} C_\lambda$.

Definição 1.9. Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é dito conjunto **compacto**, se para qualquer cobertura aberta de A , sempre existe uma subcobertura finita para A .

Definição 1.10. Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (X, d) é dita de **Cauchy** se para cada $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$, $\forall m, n \geq N$.

Definição 1.11. Um espaço métrico (X, d) é dito **completo** se cada sequência de Cauchy em X é convergente em X . Isto é, existe limite da sequência e o limite é um elemento de X .

Teorema 1.1. *Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto, é um conjunto compacto.*

Observação 1.2. 1. *Cada sequência convergente num espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*

2. *Um subespaço M de um espaço métrico completo X é ele mesmo completo se, e somente se, ele é fechado em X .*

3. *Uma aplicação $T : X \rightarrow Y$ de um espaço métrico (X, d) em outro espaço métrico $(Y, \tilde{d})$ é dita **contínua** em um ponto $x_0 \in X$ se, somente se, para toda sequência $\{x_n\}$ tal que $x_n \rightarrow x_0$ tivermos que $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$.*

1.2 Espaços Normados e Espaços de Medida

Nesta seção vamos dar as definições de espaços normados e de medida, vamos definir também o espaço de Lebesgue clássico e resultados importantes da Teoria da Medida, como o Lema de Fatou e o Teorema de Convergência Dominada, estes resultados são indispensáveis em nosso estudo futuro. Estes resultados e as definições dos conceitos de Análise Funcional podem ser encontrados em [12], a parte de teoria da medida pode ser encontrada em [19]. Por último, a definição de modular pode ser encontrada em [13].

Definição 1.12. *Uma **norma** em um espaço vetorial X sobre um corpo $\mathbb{F}$ (real ou complexo) é uma aplicação $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz*

1. $\|\xi\| \geq 0$, para todo $\xi \in X$ e $\|\xi\| = 0$ se, e somente se, $\xi = 0$;
2. $\|\alpha\xi\| = |\alpha| \|\xi\|$, para todo $\xi \in X$ e todo $\alpha \in \mathbb{F}$;
3. $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$, para quaisquer $\xi, \eta \in X$.

*O espaço $(X, \|\cdot\|)$ é dito **espaço normado**.*

Proposição 1.1. *Um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ define uma métrica; $d(\xi, \eta) := \|\xi - \eta\|$ para quaisquer, $\xi, \eta \in X$, e a métrica definida é denominada métrica induzida pela norma.*

Definição 1.13. *Duas norma $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ num espaço vetorial X são **equivalentes** se existirem $A, B > 0$ de forma que*

$$A \|\xi\|_1 \leq \|\xi\|_2 \leq B \|\xi\|_1, \quad \forall \xi \in X$$

Definição 1.14. *Um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de **Banach** se toda sequência de Cauchy em $(X, \|\cdot\|)$ é convergente em X .*

Definição 1.15. Um espaço métrico é dito **separável** se existir um subconjunto contável e denso nesse espaço.

Definição 1.16. Um **operador linear** entre os espaços vetoriais X e Y é uma aplicação $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$, em que seu domínio $D(T)$ é um subespaço vetorial de X e

$$T(\xi + \alpha\eta) = T(\xi) + \alpha T(\eta).$$

Para todo $\xi, \eta \in D(T)$ e todo escalar $\alpha \in \mathbb{F}$. Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ então é chamado de **funcional linear**.

Definição 1.17. Uma coleção $\mathcal{M}$ de subconjuntos de um conjunto X é dita uma **σ -álgebra** em X se:

1. $X \in \mathcal{M}$,
2. Se $A \in \mathcal{M}$ então $A^c = X \setminus A \in \mathcal{M}$,
3. Se $A_j \in \mathcal{M}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, então $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) \in \mathcal{M}$.

$(X, \mathcal{M})$ é chamado de **espaço mensurável** e cada $A \in \mathcal{M}$ de **conjunto mensurável**.

Definição 1.18. 1. Se $(X, \mathcal{M}_1)$ e $(Y, \mathcal{M}_2)$ são espaços mensuráveis, então $f : X \longrightarrow Y$ é **mensurável** se $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}_1$, para todo $A \in \mathcal{M}_2$.

2. Se $(X, \mathcal{M})$ é um espaço mensurável e (Y, τ) é um espaço topológico, então $f : X \longrightarrow Y$ é **mensurável** se $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$, para todo $A \in \tau$.

Definição 1.19. Dada uma σ -álgebra $\mathcal{M}$ em X , uma **medida (positiva)** em $\mathcal{M}$ é uma função $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$ σ -aditiva (contavelmente aditiva), ou seja, se $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência de conjuntos mensuráveis, dois a dois disjuntos, então $\mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

A trinca $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é chamada de **espaço de medida**.

Definição 1.20. Se $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow [0, +\infty]$ é mensurável e $E \in \mathcal{M}$, define-se a **integral de Lebesgue**

$$\int_E f(x) d\mu(x) := \sup_{0 \leq s \leq f} \int_E s d\mu,$$

em que $s = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}$ é uma função simples, tal que

$$\int_E s d\mu := \sum_{j=1}^n a_j \mu(A_j \cap E).$$

Definição 1.21. Para $1 \leq p \leq \infty$, denotamos $L_\mu^p(X)$ o conjunto das classes de equivalência $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mensuráveis com $\|f\|_p < \infty$, em que

$$f \sim g \iff \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

e

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty.$$

Chamamos o **espaço de Lebesgue** ao conjunto.

$$L^p(X) = \left\{ u : X \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ mensurável}, \int_X |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

e definimos também

$$\|f\|_\infty = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \mu(|f|^{-1}((\alpha, \infty))) = 0 \}.$$

e vamos denotar por $L^\infty(X)$ ao conjunto de funções, denominadas **essencialmente limitadas**

$$L^\infty(X) = \{ u : X \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ mensurável}, \|u\|_\infty < \infty \}.$$

Teorema 1.2. (Lema de Fatou) Seja $\{f_n\}_n$ uma sequência de funções mensuráveis não negativas em um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Então

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Teorema 1.3. (Teorema da Convergência Dominada) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e considere $\{f_n\}_n$ uma sequência de funções mensuráveis em X tal que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

existir para cada $x \in X$. Suponha também que existe $g \in L^1(X)$ satisfazendo

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Então $f \in L^1(X)$ e satisfaz

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Definição 1.22. Uma função ρ , definida num espaço vetorial X sobre o corpo $\mathbb{R}$, é dita **contínua à esquerda** se, a função $\lambda \longrightarrow \rho(\lambda x)$ é **contínua à esquerda** em $[0, \infty)$ para todo $x \in X$, isto é

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \rho(\lambda x) = \rho(x).$$

Definição 1.23. Seja X um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ uma função $\rho : X \longrightarrow [0, \infty]$ é chamada **semimodular** se satisfaz as seguintes propriedades

1. $\rho(0) = 0$;
2. $\rho(\lambda x) = \rho(x)$, para todo $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ com $|\lambda| = 1$;
3. ρ é convexa;
4. ρ é contínua à esquerda;
5. se $\rho(\lambda x) = 0$, para todo $\lambda > 0$, então $x = 0$;
uma semimodular ρ é chamada uma **modular** se
6. $\rho(x) = 0$, então $x = 0$.

1.3 Espaço de Hilbert

Nesta seção vamos falar do conceito de produto interno e dos espaços de Hilbert. Vamos dar alguns exemplos de espaços de Hilbert clássicos e de uma desigualdade famosa, dita comumente como a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Estas definições e resultados podem ser encontrados em [12].

Definição 1.24. Seja X um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Um **produto interno** em X (ou sobre X) é uma função $\langle \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{F}$ tal que para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $x, y, z \in X$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;
2. $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle$;
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$;
4. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
5. $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$. Em particular, $\langle 0, 0 \rangle = 0$;
6. $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$.

Teorema 1.4. (Desigualdade de Cauchy-Bunyakowsky-Schwarz (C.B.S)) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em X , então

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in X,$$

em que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, existirem escalares α e β , ambos não nulos, tais que $\langle \beta x + \alpha y, \beta x + \alpha y \rangle = 0$.

Definição 1.25. Um **espaço de Hilbert** é um espaço vetorial H sobre um corpo $\mathbb{F}$ munido com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o qual com a métrica induzida por esse produto interno define uma métrica

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

e H é um espaço métrico completo.

Exemplo 1.1. 1. $\mathbb{F}^d$ é um espaço de Hilbert, sendo $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^d x_n \bar{y}_n$;

2. $L^2_\mu(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, sendo seu produto interno;

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu; \quad \|f\| = \left[\int_{\Omega} |f|^2 d\mu \right]^{1/2}$$

3. $\ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ \xi \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}$ é um espaço de Hilbert, sendo

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\eta}_j.$$

1.4 Teorema Representação de Riesz e Convergências Fraca e Fraca *

Nosso foco nesta seção é falar de conceitos centrais do análise funcional. Precisamos de conhecer como é o espaço dos operadores lineares, neste espaço só precisamos de que os operadores sejam limitados para que eles sejam contínuos. Conhecer os espaços dual e bidual, para poder definir espaços reflexivos que daqui para frente será uma ideia central. Também vamos definir vários tipos de convergências e alguns resultados importantes que envolvem estas convergências. Estas definições e resultados podem ser encontrados em [12],[11].

Teorema 1.5. *Seja H um espaço de Hilbert sobre um corpo $\mathbb{F}$ e $L : H \longrightarrow \mathbb{F}$ um funcional linear, então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *Existe o $\sup\{|L(\xi)| : \xi \in H, \|\xi\| \leq 1\}$, ou seja, a imagem da bola fechada unitária é limitada;*
2. *$\exists C > 0$ de modo que $|L(\xi)| \leq C\|\xi\|$, $\forall \xi \in H$;*
3. *L é uniformemente contínuo;*
4. *L é contínuo;*
5. *L é contínuo no elemento nulo de H .*

Definição 1.26. *Um funcional linear **limitado** L sobre H é um funcional linear para o qual existe uma constante $C > 0$ tal que $|L(h)| \leq C\|h\|$, para todo $h \in H$.*

Observação 1.3. *Usando o Teorema 1.5, podemos dizer em outras palavras que um funcional linear é limitado se, e somente se, ele é contínuo.*

Definição 1.27. *O conjunto dos operadores lineares limitados entre dois espaços normados X e Y sobre o mesmo corpo de escalares será denotado por $B(X, Y)$. Para $T \in B(X, Y)$ definimos a norma desse operador assim*

$$\|T\|_{B(X, Y)} := \sup\{\|T\xi\|_Y : \xi \in X, \|\xi\|_X \leq 1\}.$$

Definição 1.28. *O conjunto dos funcionais lineares $X^* := B(X, \mathbb{F})$ é conhecido como **espaço dual** de X e definimos a norma nesse espaço assim*

$$\|L\|_{X^*} := \sup\{|L(h)| : \|h\| \leq 1\}$$

*e chamaremos de **norma** de $L \in X^*$.*

Teorema 1.6. *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, então para $1 < p < +\infty$ considerando o expoente conjugado q de p , isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, o espaço dual de $L^p(X)^* = L^q(X)$. Vale também para $p = 1$ mas o espaço deve ser σ -finito, isto é, $L^1(X)^* = L^\infty(X)$.*

Definição 1.29. *O **espaço bidual**, $X^{**} := (X^*)^*$ é definido como o espaço dual de X^* . A norma em X^{**} será definida por*

$$\|f\|_{X^{**}} := \sup\{f(g) : g \in X^*, \|g\|_{X^*} \leq 1\}.$$

Observação 1.4. *Como X^* é um espaço de Banach, está definido $X^{**} := (X^*)^*$. Há uma forma natural de identificar os elementos de X com os elementos de seu bidual; isto é, a cada $\xi \in X$ associa-se $\hat{\xi} \in X^{**}$ por*

$$\hat{\xi}(f) := f(\xi), \text{ para } f \in X^*.$$

Definição 1.30. Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços normados sobre o mesmo corpo $\mathbb{F}$. A aplicação $T : X \longrightarrow Y$ é dita ser uma **imersão isométrica** se T preserva distâncias, isto é., se $\forall x, y \in X$

$$\|T(x) - T(y)\|_Y = \|x - y\|_X.$$

Dizemos que o espaço X é isométrico ao espaço Y se existir uma bijeção isométrica (isometria bijetora) de X sobre Y . Neste caso X e Y são chamados **espaços isométricos**.

Observação 1.5. A aplicação $\hat{\cdot} : X \longrightarrow X^{**}$ mencionada na observação 1.4, é uma imersão isométrica linear e conseqüentemente injetora.

Definição 1.31. Se a aplicação $\hat{\cdot} : X \longrightarrow X^{**}$ é sobrejetora, então o espaço normado X é chamado **reflexivo**. Em outras palavras, X é reflexivo se ele é isomorfo a X^{**} e o isomorfismo sendo dado por essa aplicação.

Proposição 1.2. Fixe um $h_0 \in H$ e defina $L : H \longrightarrow \mathbb{F}$ por $L(h) = \langle h, h_0 \rangle$. Temos que L é um operador linear limitado com $\|L\| = \|h_0\|$.

Teorema 1.7. (Teorema de Representação de Riesz) Se $L : H \longrightarrow \mathbb{F}$ é um funcional linear limitado, então existe um único vetor $h_0 \in H$ tal que $L(h) = \langle h, h_0 \rangle$ para cada $h \in H$. Além disso, $\|L\| = \|h_0\|$.

Definição 1.32. Sejam X e Y espaços normados. Dizemos que $X \subset Y$ com imersão contínua se existe $C > 0$ tal que

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X$$

e a inclusão $X \subset Y$ é densa, isto é $\overline{X}^Y = Y$.

Lema 1.1. (Desigualdade de Young) Sejam $\theta, \theta' > 1$ expoentes conjugados, ou seja $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$. Então para quaisquer números reais positivos a, b temos que

$$ab \leq \frac{1}{\theta}a^\theta + \frac{1}{\theta'}b^{\theta'}.$$

.

Definição 1.33. Uma função $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é dita **absolutamente contínua** se para cada $\epsilon > 0$ existir algum $\delta > 0$, tal que se $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ é uma família de intervalos disjuntos contidos em $[a, b]$ com $\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta$, então $\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| < \epsilon$.

Definição 1.34. Uma sequência $\{\xi_n\}_n \subset (X, \|\cdot\|_X)$ **converge fortemente** a $\xi \in X$ se $\|\xi_n - \xi\|_X \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Vamos denotar essa convergência por $\xi_n \rightarrow \xi$.

Definição 1.35. Seja X um espaço normado. Dizemos que uma sequência $\{\xi_n\}_n \subset X$ **converge fracamente** a $\xi \in X$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) = f(\xi)$$

para todo $f \in X^*$. Vamos denotar essa convergência por $\xi_n \rightharpoonup \xi$.

Definição 1.36. Dado um espaço normado $(X, \|\cdot\|_X)$, diz-se que uma sequência $\{f_n\}_n \subset X^*$ **converge fraco *** para $f \in X^*$ se ocorrer $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\xi}(f_n) = \hat{\xi}(f)$, para todo $\hat{\xi} \in \hat{X}$. Vamos denotar esta convergência assim $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

Nota: Se o espaço é reflexivo, a convergência fraca e a convergência fraca * coincidem em X^* .

Teorema 1.8. Sejam X um espaço de Banach reflexivo e $\{x_n\}_n$ uma sequência limitada em X . Então existe uma subsequência $\{x_{n_j}\}_j$ de $\{x_n\}_n$ que converge fracamente a um elemento de X .

Teorema 1.9. Sejam X um espaço de Banach, $\{x_n\}_n$ uma sequência em X e $x \in X$. Então

1. $x_n \rightharpoonup x$ se, somente se, $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall f \in X^*$;
2. Se $x_n \rightarrow x$, então $x_n \rightharpoonup x$;
3. Se $x_n \rightharpoonup x$, então $\|x_n\|$ é limitada e $\|x_n\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|$;
4. Se $x_n \rightharpoonup x$ e $f_n \rightarrow f$ fortemente em X^* , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

1.5 Operadores Adjuntos e Auto-Adjuntos

Nesta seção vamos definir o operador adjunto de um operador dado e operadores auto-adjuntos. Vamos provar um resultado clássico que mostra a existência dos operadores adjuntos usando o Teorema de Representação de Riesz. Estas definições e resultados podem ser encontrados em [11].

Definição 1.37. Sejam H e F espaços de Hilbert sobre o mesmo corpo $\mathbb{F}$, uma função $u : H \times F \rightarrow \mathbb{F}$ é dita **forma sesquilinear** se para $h, g \in H$ e $k, f \in F$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ela satisfaz

$$1. u(\alpha h + \beta g, k) = \alpha u(h, k) + \beta u(g, k);$$

$$2. u(h, \alpha k + \beta f) = \overline{\alpha} u(h, k) + \overline{\beta} u(h, f).$$

Definição 1.38. Dizemos que uma forma sesquilinear é limitada se existir uma constante M tal que $|u(h, k)| \leq M \|h\| \|k\|$ para quaisquer $h \in H$ e $k \in F$.

Teorema 1.10. Se $u : H \times F \longrightarrow \mathbb{F}$ é uma forma sesquilinear limitada por M , então existem únicos operadores $A \in B(H, F)$ e $B \in B(F, H)$ tais que

$$u(h, k) = \langle Ah, k \rangle = \langle h, Bk \rangle \quad (1.1)$$

para todos $h \in H$ e $k \in F$ e $\|A\|, \|B\| \leq M$.

Demonstração. Só vamos a provar a existência do operador $A \in B(H, F)$ (a outra é análoga). Para cada $h \in H$ definimos $L_h : K \longrightarrow \mathbb{F}$ por $L_h(k) := \overline{u(h, k)}$, então L_h é linear e $|L_h(k)| \leq M \|h\| \|k\|$. Pelo Teorema de Representação de Riesz existe um único $f \in F$ tal que $\langle k, f \rangle = L_h(k) = \overline{u(h, k)}$ e $\|f\| \leq M \|h\|$. Seja $Ah = f$ (pela unicidade do Teorema de Representação de Riesz) A é lineal e também $\langle Ah, k \rangle = \overline{\langle k, Ah \rangle} = \overline{\langle k, f \rangle} = \langle f, k \rangle = u(h, k)$.

Vamos provar a unicidade, seja $A_1 \in B(H, K)$ logo $u(h, k) = \langle A_1 h, k \rangle$, portanto $\langle Ah - A_1 h, k \rangle = 0$ para todo $k \in K$, então $Ah - A_1 h = 0$ para todo $h \in H$, A é único. $\square$

Definição 1.39. Se $A \in B(H, K)$, então o único operador $B \in B(K, H)$ que satisfaz (1.1) é dito de **adjunto** de A e vai ser denotado por $A^* = B$.

Proposição 1.3. Se $U \in B(H, K)$, então U é um isomorfismo se, e somente se, U é invertível e $U^{-1} = U^*$.

Definição 1.40. Se $A \in B(H)$, então

1. A é dito de **hermitiano** ou **auto-adjunto** se $A^* = A$;

2. A é dito **normal** se $AA^* = A^*A$.

Capítulo 2

Propriedades do operador $p(x)$ -Laplaciano

Neste capítulo vamos apresentar algumas propriedades do operador $p(x)$ -Laplaciano. Vamos definir o espaço de Lebesgue Generalizado e um dos espaços de Sobolev Generalizados e obter as relações entre eles. A parte mais importante deste capítulo será o estudo dos conceitos de monotonicidade, hemicontinuidade, coercividade e operadores subdiferenciais. Vamos definir o operador $p(x)$ -Laplaciano e provar algumas de suas principais propriedades. Nosso foco central é provar que a realização deste operador é um operador de tipo subdiferencial de certa função. Estes resultados e conceitos podem ser encontrados em [15],[14],[13],[7],[2] e [3].

2.1 Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados

Nesta seção vamos apresentar as definições de Espaço de Lebesgue Generalizados, sua norma e algumas de suas propriedades, também vamos estudar de um dos Espaços de Sobolev Generalizados e algumas relações entre estes espaços. Os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em [15],[14] e [13].

Vamos começar pelo espaço de **Espaço de Lebesgue Generalizado** e apresentar algumas de suas propriedades. Considere o seguinte conjunto

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\},$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N > 0$, é um conjunto mensurável e $p \in L_+^\infty$, em que

$$L_+^\infty(\Omega) = \{ u \in L^\infty(\Omega) : \inf \text{ess } u \geq 1 \},$$

em que

$$\sup \text{ess } u := \inf \{t \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in \Omega : u(x) > t\}) = 0\}$$

e

$$\inf \text{ess } u := \sup \{t \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in \Omega : u(x) < t\}) = 0\}$$

Para $u \in L^{p(x)}$ e $p \in L_+^\infty$ vamos definir a seguinte função ρ assim:

$$\rho(u) := \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx.$$

E definimos também

$$p^- = \inf \text{ess } p \quad \text{e} \quad p^+ = \sup \text{ess } p.$$

Observação 2.1. A função ρ satisfaz as condições de módulo. Além disso, o espaço $L^{p(x)}(\Omega)$ é um espaço vetorial. Estamos tentando generalizar a ideia de Espaço de Lebesgue clássico, então vamos precisar de uma norma. Para $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ definimos o seguinte conjunto

$$I_u := \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\} \subset (0, \infty)$$

Proposição 2.1. [13] $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} := \inf I_u$ é uma norma para o espaço $L^{p(x)}(\Omega)$.

Observação 2.2. Se a função $p(x) = p$ é constante, então

$$\|\cdot\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \|\cdot\|_{L^p(\Omega)},$$

em que $\|\cdot\|_{L^p}$ é a norma usual do Espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$ clássico, para $1 \leq p < \infty$.

Teorema 2.1. [15],[13] Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Então

1. $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < 1$ ($= 1$; > 1) se, e somente se, $\rho(u) < 1$ ($= 1$; > 1);
2. Se $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} > 1$, então $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+}$;
3. Se $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < 1$, então $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-}$.

Teorema 2.2. [13] O espaço $(L^{p(x)}(\Omega), \|\cdot\|_{L^{p(x)}(\Omega)})$ é um espaço de Banach.

Teorema 2.3. [13] Seja $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Então, o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^{p(x)}(\Omega)$.

Teorema 2.4. (Desigualdade de Hölder para Espaços Lebesgue Generalizados)

Seja $p^- > 1$ e seja $q \in L_+^\infty(\Omega)$ tais que

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Se $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $v \in L^{q(x)}(\Omega)$, então

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-} \right) \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \|v\|_{L^{q(x)}(\Omega)}.$$

Demonstração. Sejam $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = a$ e $\|v\|_{L^{q(x)}(\Omega)} = b$. Usando a Desigualdade de Young, com a relação $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \frac{u(x)}{a} \cdot \frac{v(x)}{b} dx \right| &\leq \int_{\Omega} \frac{|u(x)|}{a} \cdot \frac{|v(x)|}{b} dx \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} \left| \frac{u(x)}{a} \right|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} \left| \frac{v(x)}{b} \right|^{q(x)} dx \\ &\leq \frac{1}{p^-} \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{a} \right|^{p(x)} dx + \frac{1}{q^-} \int_{\Omega} \left| \frac{v(x)}{b} \right|^{q(x)} dx \\ &\leq \frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}. \end{aligned}$$

□

Nosso objeto de estudo envolve também o seguinte **espaço de Sobolev generalizado** $W^{1,p(x)}(\Omega)$, ou seja, o seguinte espaço:

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\},$$

em que

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right),$$

e cuja norma é definida por

$$\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}.$$

Teorema 2.5. [13] O espaço $(W^{1,p(x)}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)})$ é um espaço de Banach.

Definição 2.1. $W_0^{1,p(x)}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{1,p(x)}(\Omega)}$.

Teorema 2.6. [15],[14],[13]

1. O espaço $(L^{p(x)}(\Omega), \|\cdot\|_{L^{p(x)}(\Omega)})$ é separável.
2. Se $p^- > 1$, então $L^{p(x)}(\Omega)$ é reflexivo

3. Se $p^- > 1$, então $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é separável e reflexivo.

Note que da definição de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e das propriedades de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ segue-se imediatamente que $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach, reflexivo e separável sempre que $p^- > 1$.

Nosso objetivo agora vai ser estudar a relação entre os Espaços de Lebesgue Generalizados e os Espaços de Sovolev Generalizados, esse tipo de relação é conhecida como imersão.

Teorema 2.7. [15],[14],[13]

Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e $p, q \in L_+^\infty(\Omega)$. Então

$$L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$$

se, e somente se, $q(x) \leq p(x)$ para quase todo $x \in \Omega$, e neste caso a imersão é contínua.

Teorema 2.8. [15] Sejam $p, q \in L_+^\infty(\Omega)$ tais que $q(x) \leq p(x)$ para quase todo $x \in \Omega$. Então

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset W^{1,q(x)}(\Omega),$$

sendo tal imersão é contínua.

Teorema 2.9. [14],[13] Sejam Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e $p, q \in C(\bar{\Omega})$ tais que $p^-, q^- \geq 1$. Se $q(x) < p^*(x)$ para todo $x \in \bar{\Omega}$, em que

$$p^*(x) := \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-p(x)} & \text{se } p(x) < N \\ \infty & \text{se } p(x) \geq N, \end{cases}$$

então

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$$

e tal imersão é contínua e compacta.

Teorema 2.10. [15] (Desigualdade de Poincaré) Seja $p \in C(\bar{\Omega})$ tal que $p^- > 1$. Então, existe $C > 0$, dependendo de Ω e $p(x)$, tal que

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)},$$

para todo $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ que é equivalente à norma $\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)}$.

2.2 Definições e Resultados

Nesta seção nosso objetivo é apresentar algumas definições importantes de um operador em nosso estudo tais como a subdiferencial, monotocidade, hemicontinuidade e coercividade. Também vamos dar alguns resultados que relacionam estes conceitos.

Definição 2.2. *Seja V um espaço de Banach com dual V^* . Uma função $\varphi : V \rightarrow (-\infty, \infty]$ é chamada de **própria** em V se existe $u_0 \in V$ com $\varphi(u_0) < \infty$. Uma função $\varphi : V \rightarrow (-\infty, \infty]$ é dita **convexa** se satisfaz a desigualdade*

$$\varphi((1-t)u + tv) \leq (1-t)\varphi(u) + t\varphi(v),$$

para todos $u, v \in V$ e $t \in [0, 1]$.

Definição 2.3. *A função $\varphi : V \rightarrow (-\infty, \infty]$ é chamada de **semicontínua inferiormente (s.c.i)** se*

$$\varphi(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n)$$

para toda sequência $\{u_n\}_n$ com $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_V} u$ quando $n \rightarrow \infty$

Dada uma função $\varphi : V \rightarrow (-\infty, \infty]$ convexa, própria e s.c.i denotamos por $D(\varphi)$, o domínio de φ , o conjunto

$$D(\varphi) = \{u \in V : \varphi(u) < \infty\}.$$

Agora vamos ver algumas propriedades elementares das funções s.c.i, próprias e convexas.

Proposição 2.2. [2] *Seja $\varphi : V \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função convexa, própria e s.c.i. Então existem $f \in V^*$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi(u) \geq \langle f, u \rangle_{V^*, V} + \beta,$$

para todo $u \in V$.

Definição 2.4. *Dada uma função $\varphi : V \rightarrow (-\infty, \infty]$ própria, convexa e s.c.i, a aplicação $\partial\varphi : V \rightarrow V^*$ dada por*

$$\partial\varphi(u) = \{f \in V^* : \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v - u \rangle_{V^*, V}; \forall v \in D(\varphi)\} \subset V^*,$$

é chamada a **subdiferencial** de φ . Denotamos $D(\partial\varphi) = \{u \in V : \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}$. Em geral, $\partial\varphi$ é um operador multívoco de V em V^* .

Proposição 2.3. [2] Seja $\varphi : V \longrightarrow (-\infty, \infty]$ uma função convexa, própria e s.c.i. Então $D(\partial\varphi)$ é um subconjunto denso de $D(\varphi)$.

Definição 2.5. Seja V um espaço de Banach real, um operador $A : V \longrightarrow V^*$ é dito ser **monótono** se para todo $u, v \in D(A)$

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_{V^*, V} \geq 0.$$

Um operador monótono $A : V \longrightarrow V^*$ é dito ser **maximal monótono** se ele não está propriamente contido em qualquer outro operador monótono de V em V^* .

Teorema 2.11. [2] Seja V um espaço de Banach real e $\varphi : V \longrightarrow (-\infty, \infty]$ uma função convexa, própria e s.c.i, então $\partial\varphi : V \longrightarrow V^*$ é um operador maximal monótono.

Lema 2.1. Seja $u \in W^{1,2}([0, T]; H)$, H espaço del Hilbert e $g \in L^2([0, T]; H)$ tal que $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ para quase todo $t \in (0, T)$. então a função $t \longrightarrow \varphi(u(t))$ é absolutamente contínua em $[0, T]$ e

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = \left\langle g(t), \frac{du}{dt}(t) \right\rangle, \text{ para quase todo } t \in (0, T).$$

Demonstração. Ver a prova do Lema 2.1 em ([2], p.158). □

Definição 2.6. Seja V um espaço de Banach. Dizemos que um operador $A : V \longrightarrow V^*$ é **hemicontínuo** se para todo $u, v \in V$

$$A(u + \lambda v) \rightharpoonup Au,$$

quando $\lambda \longrightarrow 0$.

Definição 2.7. Seja V um espaço de Banach. Dizemos que um operador $A : V \longrightarrow V^*$ é **coercivo** se

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\langle Au_j, u_j \rangle_{V^*, V}}{\|u_j\|_V} = \infty$$

para qualquer que seja $\{u_j\} \subset V$ com $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_V = \infty$.

Teorema 2.12. Sejam V um espaço Banach reflexivo e $A : V \longrightarrow V^*$ um operador monótono e hemicontínuo, então A é maximal monótono.

Demonstração. Suponha que A não é maximal monótono, então existe $(x_0, y_0) \in V \times V^*$ tal que $y_0 \neq Ax_0$ e

$$\langle x_0 - u, y_0 - Au \rangle_{V^*, V} \geq 0, \quad \forall u \in V.$$

Para qualquer $x \in V$, definimos $x_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)x_0$ e $\lambda \in [0, 1]$ e tomando $x_\lambda = u$ na equação anterior, obtemos o seguinte

$$\langle x_0 - x_\lambda, y_0 - Ax_\lambda \rangle_{V^*, V} \geq 0, \quad \forall \lambda \in [0, 1], u \in V.$$

Fazendo $\lambda \rightarrow 1$, obtemos

$$\langle x_0 - x, y_0 - Ax \rangle_{V^*, V} \geq 0, \quad \forall x \in V.$$

Portanto $y_0 = Ax_0$, o que contradiz a hipótese provando o desejado. $\square$

Teorema 2.13. [17],[8] *Seja V um espaço de Banach reflexivo e V^* seu dual, e H um espaço de Hilbert com $V \subset H \subset V^*$ com imersões contínuas e densas. Seja $A : V \rightarrow V^*$ um operador monótono, unívoco definido em todo V , coercivo e hemicontínuo, então o operador A_H restrição de A à H , definido por*

$$D(A_H) = \{v \in V : Av \in H\}, \quad A_H(u) = A(u), \quad \text{para } u \in D(A_H),$$

é maximal monótono em H .

2.3 Propriedades do Operador $p(x)$ -Laplaciano

Nesta seção vamos provar algumas propriedades do operador $p(x)$ -Laplaciano tais como monotonicidade, coercividade e hemicontinuidade.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e denotemos $V = W^{1,p(x)}(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $p(x) \in C(\overline{\Omega})$ com $p(x) > 2$ para quase todo $x \in \Omega$.

Sabemos que o espaço dual de $L^2(\Omega)$ é o próprio $L^2(\Omega)$, usando os teoremas anteriores das imersões contínuas temos que $V \subset H \subset V^*$. Portanto, são imersões contínuas e densas. Consideremos o seguinte operador $A : V \rightarrow V^*$ definido por

$$A(u)(v) = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u v dx,$$

para $v \in V$.

Lema 2.2. *Sejam a e b números reais positivos e $q > 1$. Então $(a + b)^q \leq 2^{q-1} (a^q + b^q)$*

Demonstração. Note que a função $f(x) = x^q$ a função f satisfaz a condição de convexidade definida anteriormente, então tomando $\lambda = \frac{1}{2}$ obtemos

$$\left(\frac{a + b}{2} \right)^q \leq \frac{a^q}{2} + \frac{b^q}{2}.$$

Daí temos

$$(a + b)^q \leq \frac{2^q}{2} (a^q + b^q).$$

□

Lema 2.3. [14] Sejam $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ e $p \geq 2$ uma constante. Então vale a desigualdade

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p |\xi - \eta|^p \leq (\xi - \eta) \cdot (|\xi|^{p-2} \xi - |\eta|^{p-2} \eta).$$

Lema 2.4. Se $\|u\|_V \leq 1$, então $\langle Au, u \rangle_{V^*, V} \geq \frac{1}{2^{p^+-1}} \|u\|_V^{p^+}$

Demonstração. Note que $\|u\|_V \leq 1$, isto implica que

$$\|u\|_{L^{p(x)}} \leq 1 \quad \text{e} \quad \|\nabla u\|_{L^{p(x)}} \leq 1.$$

Logo, pelo Teorema 2.1 e o Lema 2.2 tem-se

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle_{V^*, V} &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla u \, dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u \cdot u \, dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} \, dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)} \, dx \\ &= \rho(\nabla u) + \rho(u) \\ &\geq \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+} + \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+} \\ &\geq \frac{1}{2^{p^+-1}} \left(\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \right)^{p^+} \\ &= \frac{1}{2^{p^+-1}} \|u\|_V^{p^+}. \end{aligned}$$

□

Lema 2.5. Se $\|u\|_V \geq 1$, então

$$\langle Au, u \rangle_{V^*, V} \geq \begin{cases} \frac{1}{2^{p^--1}} \|u\|_V^{p^-} & \text{se } \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1 \quad \text{e} \quad \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1 \\ \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-} + \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+} & \text{se } \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq 1 \quad \text{e} \quad \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1 \\ \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+} + \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-} & \text{se } \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1 \quad \text{e} \quad \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq 1 \end{cases}$$

Demonstração. Consideremos inicialmente que $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1$ e $\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1$.

Usando o Teorema 2.1 e o Lema 2.2 obtemos

$$\begin{aligned}
\langle Au, u \rangle_{V^*, V} &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla u \, dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u \cdot u \, dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} \, dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)} \, dx \\
&= \rho(\nabla u) + \rho(u) \\
&\geq \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-} + \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-} \\
&\geq \frac{1}{2^{p^- - 1}} \left(\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \right)^{p^-} \\
&= \frac{1}{2^{p^- - 1}} \|u\|_V^{p^-}.
\end{aligned}$$

Agora note que

$$\langle Au, u \rangle_{V^*, V} = \rho(\nabla u) + \rho(u).$$

Se $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1$ e $\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq 1$ então

$$\begin{aligned}
\langle Au, u \rangle_{V^*, V} &= \rho(\nabla u) + \rho(u) \\
&\geq \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-} + \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+}.
\end{aligned}$$

Se $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq 1$ e $\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1$ então

$$\begin{aligned}
\langle Au, u \rangle_{V^*, V} &= \rho(\nabla u) + \rho(u) \\
&\geq \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+} + \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-}.
\end{aligned}$$

Isso conclui a prova. □

Proposição 2.4. *O operador $A : V \longrightarrow V^*$ é monótono.*

Demonstração. Sejam $u, v \in V$. Usando o Lema 2.3 para cada $x \in \Omega$ fixo, vamos ter

$$\begin{aligned}
\langle Au - Av, u - v \rangle_{V^*, V} &= \langle Au, u - v \rangle_{V^*, V} + \langle Av, u - v \rangle_{V^*, V} \\
&= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla(u - v) dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u \cdot (u - v) dx \\
&\quad - \int_{\Omega} |\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v \cdot \nabla(u - v) dx - \int_{\Omega} |v|^{p(x)-2} v \cdot (u - v) dx \\
&= \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v \right) \cdot (\nabla u - \nabla v) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \left(|u|^{p(x)-2} u - |v|^{p(x)-2} v \right) \cdot (u - v) dx \\
&\geq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \right)^{p(x)} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \right)^{p(x)} |u - v|^{p(x)} dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} \right)^{p^+} \left(\int_{\Omega} \underbrace{|\nabla u - \nabla v|^{p(x)}}_{\geq 0} dx + \int_{\Omega} \underbrace{|u - v|^{p(x)}}_{\geq 0} dx \right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Logo, nosso operador A é monótono. $\square$

Proposição 2.5. *O operador $A : V \longrightarrow V^*$ é coercivo.*

Demonstração. Seja $u \in V := W^{1,p(x)}(\Omega)$ com $\|u\|_V \geq 1$. Pela definição da norma em V temos que $\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1$ ou $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1$ e usando o Lema 2.5, obtemos as seguintes estimativas.

Se $\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1$ e $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1$, então

$$\frac{\langle Au, u \rangle_{V^*, V}}{\|u\|_V} \geq \frac{1}{2^{p^- - 1}} \frac{\|u\|_V^{p^-}}{\|u\|_V} = \frac{1}{2^{p^- - 1}} \|u\|_V^{p^- - 1} \quad (2.1)$$

Se $\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1$ e $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq 1$, usando de novo o Lema 2.5 e a definição de norma em V vamos ter

$$\begin{aligned}
\frac{\langle Au, u \rangle_{V^*, V}}{\|u\|_V} &\geq \frac{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-} + \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+}}{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}} \\
&\geq \frac{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-}}{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + 1} \\
&\geq \frac{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-}}{2 \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}} \\
&= \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^- - 1} \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Se $\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq 1$ e $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1$, usando de novo o Lema 2.5 e a definição de norma em V obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\langle Au, u \rangle_{V^*, V}}{\|u\|_V} &\geq \frac{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+} + \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-}}{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}} \\
&\geq \frac{\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-}}{\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + 1} \\
&\geq \frac{\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-}}{2\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}} \\
&= \frac{1}{2} \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^- - 1}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Logo, seja uma sequência $\{u_j\} \subset V$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_V = \infty$, como

$$\|u\|_V = \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$$

teremos vários casos:

Caso 1) Onde $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \infty$ e $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\nabla u_j\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \infty$. Para este caso, temos que existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_j\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1$ e $\|\nabla u_j\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1$ para $j \geq j_0$ usando a anterior desigualdade 2.1 vamos ter

$$\frac{\langle Au_j, u_j \rangle_{V^*, V}}{\|u_j\|_V} \geq \frac{1}{2^{p^- - 1}} \|u_j\|_V^{p^- - 1}, \quad \text{para todo } j \geq j_0.$$

Pela hipótese sabemos que $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_V = \infty$, então

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\langle Au_j, u_j \rangle_{V^*, V}}{\|u_j\|_V} = \infty.$$

Caso 2) Onde $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\nabla u_j\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \infty$. Logo, existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\nabla u_j\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1$ se $j \geq j_1$. Sejam $N_1 := \{j \geq j_1 : \|u_j\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1\}$ e $N_2 := \{j \geq j_1 : \|u_j\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq 1\}$. Se N_1 é finito, basta só analisar para $j \geq j_1$ tal que $j \in N_2$. Nesse caso caímos no caso 1), em que já sabemos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\langle Au_j, u_j \rangle_{V^*, V}}{\|u_j\|_V} = \infty.$$

Se N_2 é finito basta só analisar para $j \geq j_1$ tal que $j \in N_1$. Nesse caso, usando a desigualdade 2.2 temos

$$\frac{\langle Au_j, u_j \rangle_{V^*, V}}{\|u_j\|_V} \geq \frac{1}{2} \|\nabla u_j\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^- - 1}, \quad \text{para todo } j \geq j_1,$$

como neste caso $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\nabla u_j\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \infty$. Então, tomando limite na desigualdade anterior temos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\langle Au_j, u_j \rangle_{V^*, V}}{\|u_j\|_V} = \infty$$

Agora, se N_1 e N_2 são infinitos não tem problema, segue-se trivialmente o resultado utilizando os argumentos usados anteriormente.

Caso 3) Onde $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \infty$. Note que o caso 3), é totalmente análogo ao caso 2, só basta trocar ∇u_j por u_j nas contas do caso 2) e obtemos o mesmo resultado.

Logo, em qualquer caso, temos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\langle Au_j, u_j \rangle_{V^*, V}}{\|u_j\|_V} = \infty.$$

Logo, A é um operador coercivo. □

Proposição 2.6. *O operador $A : V \longrightarrow V^*$ é hemicontínuo.*

Demonstração. Para provar que A é hemicontínuo temos que provar que dados $u, v \in V$ então

$$A(u + \lambda v) \rightharpoonup Au \quad \text{quando} \quad \lambda \longrightarrow 0.$$

Sejam $u, v \in V = W^{1,p(x)}(\Omega)$. Lembremos o seguinte, do início deste capítulo, $p^- := \inf \text{ess } p$, onde $p \in L_+^\infty(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega) : \inf \text{ess } u \geq 1\}$. Portanto $p^- > 1$, então usando o Teorema 2.6 temos que V é reflexivo. Então vamos provar que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle A(u + \lambda v), \phi \rangle_{V^*, V} = \langle Au, \phi \rangle_{V^*, V}, \quad \text{para toda } \phi \in V.$$

Sejam $u, v, \phi \in V$ e $\lambda \in (-1, 1)$. Vamos denotar por

$$f_\lambda(x) = |\nabla(u + \lambda v)|^{p(x)-2} \nabla(u + \lambda v) \cdot \nabla \phi + |u + \lambda v|^{p(x)-2} (u + \lambda v) \cdot \phi,$$

e

$$f(x) = |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \phi + |u|^{p(x)-2} u \cdot \phi.$$

Então

$$\left| \langle A(u + \lambda v), \phi \rangle_{V^*, V} - \langle Au, \phi \rangle_{V^*, V} \right| = \left| \int_\Omega f_\lambda(x) dx - \int_\Omega f(x) dx \right|.$$

Tomando limite $\lambda \rightarrow 0$ e a função $|\cdot|$ é contínua, temos

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \rightarrow 0} f_\lambda(x) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} |\nabla(u + \lambda v)|^{p(x)-2} \nabla(u + \lambda v) \cdot \nabla \phi + |u + \lambda v|^{p(x)-2} (u + \lambda v) \cdot \phi \\ &= |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \phi + |u|^{p(x)-2} u \cdot \phi \\ &= f(x).\end{aligned}$$

Note que para todo $x \in \Omega$ e usando as propriedades do valor absoluto, tem-se

$$\begin{aligned}|f_\lambda(x)| &= \left| |\nabla(u + \lambda v)|^{p(x)-2} \nabla(u + \lambda v) \cdot \nabla \phi + |u + \lambda v|^{p(x)-2} (u + \lambda v) \cdot \phi \right| \\ &\leq \left| |\nabla(u + \lambda v)|^{p(x)-2} \nabla(u + \lambda v) \cdot \nabla \phi \right| + \left| |u + \lambda v|^{p(x)-2} (u + \lambda v) \cdot \phi \right| \\ &= |\nabla(u + \lambda v)|^{p(x)-1} |\nabla \phi| + |u + \lambda v|^{p(x)-1} |\phi| \\ &\leq (|\nabla u| + |\lambda| |\nabla v|)^{p(x)-1} |\nabla \phi| + (|u| + |\lambda| |v|)^{p(x)-1} |\phi| \\ &\leq 2^{p(x)-2} \left(|\nabla u|^{p(x)-1} + |\nabla v|^{p(x)-1} \right) |\nabla \phi| + 2^{p(x)-2} \left(|u|^{p(x)-1} + |v|^{p(x)-1} \right) |\phi| \\ &= 2^{p(x)-2} \left[\left(|\nabla u|^{p(x)-1} + |\nabla v|^{p(x)-1} \right) |\nabla \phi| + \left(|u|^{p(x)-1} + |v|^{p(x)-1} \right) |\phi| \right].\end{aligned}$$

Como $u, v, \phi \in V$, $p(x) \in L^\infty(\Omega)$ e $p(x) \geq 2$. Logo, $p(x) - 1 \geq 1$, então, pelo Teorema 2.7, temos $L^{p(x)-1}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, integrando a desigualdade anterior tem-se

$$\int_{\Omega} |2^{p(x)-2}| \left[\left(|\nabla u|^{p(x)-1} + |\nabla v|^{p(x)-1} \right) |\nabla \phi| + \left(|u|^{p(x)-1} + |v|^{p(x)-1} \right) |\phi| \right] dx < \infty.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\begin{aligned}0 &\leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left| \langle A(u + \lambda v), \phi \rangle_{V^*, V} - \langle Au, \phi \rangle_{V^*, V} \right| \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} [f_\lambda(x) - f(x)] dx \right| \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\Omega} |f_\lambda(x) - f(x)| dx = 0.\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle A(u + \lambda v), \phi \rangle_{V^*, V} = \langle Au, \phi \rangle_{V^*, V}.$$

Mostrando que A é hemicontínuo. □

2.4 A Realização A_H de A em $H = L^2(\Omega)$.

Nesta seção vamos provar que a realização A_H de A em H é um subdiferencial de uma função própria, convexa e s.c.i que denotaremos $\varphi_{p(x)}$.

Observação 2.3. Na seção anterior provamos que o operador $A : V \longrightarrow V^*$, $V = W^{1,p(x)}(\Omega)$, dado por

$$A(u)(v) = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u \cdot v dx$$

é monótono, coercivo e hemicontínuo para cada $u, v \in V = W^{1,p(x)}(\Omega)$ e, portanto, A é maximal monótono (veja [3]). Seja A_H a realização de A em $H = L^2(\Omega)$ dada por

$$\begin{cases} D(A_H) := \{u \in V : A(u) \in H\} \\ A_H(u) = A(u), \quad \text{se } u \in D(A_H). \end{cases}$$

Representamos $\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u \cdot v dx$ por $\Delta_{p(x)}$. Vamos provar que A_H é a subdiferencial de uma função convexa, própria e s.c.i. Considere

$$\varphi_{p(x)}(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |u|^{p(x)} dx & \text{se } u \in V \\ +\infty, & \text{se } u \in H - V. \end{cases}$$

Proposição 2.7. A função $\varphi_{p(x)}$ é convexa e própria.

Demonstração. Seja $u \in V = W^{1,p(x)}(\Omega)$. Pela definição de V , isto é, $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $\nabla u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e como $p(x) \geq 2$. Logo, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |u|^{p(x)} dx &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx \right] \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Logo $\varphi_{p(x)}$ é própria. Agora, como a função $\lambda^{p(x)}$ é convexa para $\lambda > 0$, então para $u, v \in V$ e $t \in [0, 1]$ temos

$$\begin{aligned}
\varphi_{p(x)}(tu + (1-t)v) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla(tu + (1-t)v)|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |tu + (1-t)v|^{p(x)} dx \\
&\leq \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} (t|\nabla u| + (1-t)|\nabla v|)^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} (t|u| + (1-t)|v|)^{p(x)} dx \\
&\leq \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} (t|\nabla u|^{p(x)} + (1-t)|\nabla v|^{p(x)}) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} (t|u|^{p(x)} + (1-t)|v|^{p(x)}) dx \\
&\leq t \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + t \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |u|^{p(x)} dx \\
&\quad + (1-t) \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla v|^{p(x)} dx + (1-t) \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |v|^{p(x)} dx \\
&= t\varphi_{p(x)}(u) + (1-t)\varphi_{p(x)}(v).
\end{aligned}$$

Concluimos que $\varphi_{p(x)}$ é convexa e própria. □

Proposição 2.8. *A função $\varphi_{p(x)}$ é semicontínua inferiormente.*

Demonstração. Devemos provar que $\varphi_{p(x)}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi_{p(x)}(u_n)$ se $u_n \rightarrow u$ em H . Seja $\{u_n\} \in H$. Vamos separar a prova em dois casos.

Caso 1) Se $\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi_{p(x)}(u_n) = +\infty$ então, trivialmente satisfaz-se

$$\varphi_{p(x)}(u) \leq +\infty = \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi_{p(x)}(u_n).$$

Caso 2) Se $\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi_{p(x)}(u_n) = \alpha < +\infty$ então, existe uma subsequência $\{u_{n_j}\} \subset V$ de $\{u_n\}$ tal que

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \varphi_{p(x)}(u_{n_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_{n_j}|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |u_{n_j}|^{p(x)} dx \right) = \alpha.$$

Como $\varphi_{p(x)}(u_{n_j}) \rightarrow \alpha$ quando $j \rightarrow \infty$, temos que $\varphi_{p(x)}(u_{n_j})$ é limitada (pois é uma sequência convergente). Logo, existe $K > 0$ tal que

$$|\varphi_{p(x)}(u_{n_j})| \leq K, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Pelo Teorema 2.1; obtemos

$$\|u_{n_j}\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \begin{cases} (p^+ K)^{\frac{1}{p^-}}, & \text{Se } \|u_{n_j}\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1 \\ (p^+ K)^{\frac{1}{p^+}}, & \text{Se } \|u_{n_j}\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < 1 \end{cases}$$

e

$$\|\nabla u_{n_j}\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \begin{cases} (p^+ K)^{\frac{1}{p^-}}, & \text{Se } \|\nabla u_{n_j}\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1 \\ (p^+ K)^{\frac{1}{p^+}}, & \text{Se } \|\nabla u_{n_j}\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < 1. \end{cases}$$

Das desigualdades anteriores, podemos concluir que $\|u_{n_j}\|_V$ é uma sequência limitada no espaço de Banach $V = W^{1,p(x)}(\Omega)$. Pelo Teorema 2.6, V é reflexivo. Pelo Teorema 1.8 a sequência $\{u_{n_j}\}$ possui uma subsequência (vamos utilizar a mesma notação) $\{u_{n_j}\}$ que converge fracamente, isto é, $u_{n_j} \rightharpoonup v$ em V , para algum $v \in V$. Como $H^* \subset V^*$, então $u_{n_j} \rightharpoonup v$ em H e pela unicidade do limite na convergência fraca, concluímos que $u = v \in V$.

Consideremos agora a subdiferencial $\partial\varphi_{p(x)}$ de $\varphi_{p(x)}$, e pela definição de subdiferencial obtemos

$$\langle \partial\varphi_{p(x)}(u), u_{n_j} - u \rangle_{V^*,V} \leq \varphi_{p(x)}(u_{n_j}) - \varphi_{p(x)}(u),$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Então

$$\langle \partial\varphi_{p(x)}(u), u_{n_j} - u \rangle_{V^*,V} + \varphi_{p(x)}(u) \leq \varphi_{p(x)}(u_{n_j}),$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $u_{n_j} \rightharpoonup u$ em V e $\varphi_{p(x)}(u) \in V^*$ segue que

$$\langle \partial\varphi_{p(x)}(u), u_{n_j} - u \rangle_{V^*,V} \longrightarrow 0,$$

quando $j \longrightarrow \infty$. Logo,

$$\varphi_{p(x)}(u) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{p(x)}(u_{n_j}) = \alpha = \lim_{j \rightarrow \infty} \inf \varphi_{p(x)}(u_{n_j}).$$

Mostrando que, $\varphi_{p(x)}$ é semicontínua inferiormente. □

Teorema 2.14. A_H é a subdiferencial $\partial\varphi_{p(x)}$ de $\varphi_{p(x)}$.

Demonstração. Sabemos pelo Teorema 2.11 que a subdiferencial que $\partial\varphi_{p(x)}$ é maximal monótono e pela Observação 2.3 A_H , que é a realização de A em H , é maximal monótono também. Logo, é suficiente provar que

$$A_H(u) \subset \partial\varphi_{p(x)}(u), \quad \text{para qualquer } u \in H.$$

Seja $u \in D(A_H) := \{u \in V : A(u) \in H\}$ e seja $v \in A_H(u) = A(u)$. Então, para todo $\zeta \in V$ obtemos

$$\begin{aligned} \langle v, \zeta - u \rangle_{V^*,V} &= \langle A_H(u), \zeta - u \rangle_{V^*,V} \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot (\nabla \zeta - \nabla u) \, dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u \cdot (\zeta - u) \, dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \zeta \, dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} \, dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u \cdot \zeta \, dx - \int_{\Omega} |u|^{p(x)} \, dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \zeta \, dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u \cdot \zeta \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} \, dx - \int_{\Omega} |u|^{p(x)} \, dx. \end{aligned}$$

Considerando o expoente conjugado para $p(x)$, isto é, um $q(x) > 0$ tal que $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$. Usando a Desigualdade de Young e por propriedades da integral, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle v, \zeta - u \rangle_{V^*, V} &+ \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \zeta dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u \cdot \zeta dx \\
&\leq \int_{\Omega} \underbrace{|\nabla u|^{p(x)-1}}_{\geq 0} \underbrace{|\nabla \zeta|}_{\geq 0} dx + \int_{\Omega} \underbrace{|u|^{p(x)-1}}_{\geq 0} \underbrace{|\zeta|}_{\geq 0} dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{q(x)} |\nabla u|^{(p(x)-1)q(x)} + \frac{1}{p(x)} |\nabla \zeta|^{p(x)} \right) dx \\
&+ \int_{\Omega} \left(\frac{1}{q(x)} |u|^{(p(x)-1)q(x)} + \frac{1}{p(x)} |\zeta|^{p(x)} \right) dx \\
&= \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla \zeta|^{p(x)} dx \\
&+ \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\zeta|^{p(x)} dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle v, \zeta - u \rangle_{V^*, V} &+ \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx \\
&\leq \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla \zeta|^{p(x)} dx \\
&+ \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\zeta|^{p(x)} dx.
\end{aligned}$$

Como cada uma das parcelas da desigualdade acima são finitas, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle v, \zeta - u \rangle_{V^*, V} &+ \underbrace{\int_{\Omega} \left(1 - \frac{1}{q(x)} \right) |\nabla u|^{p(x)} dx}_{p(x)} + \underbrace{\int_{\Omega} \left(1 - \frac{1}{q(x)} \right) |u|^{p(x)} dx}_{p(x)} \leq \\
&\int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla \zeta|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\zeta|^{p(x)} dx.
\end{aligned}$$

Então, concluímos que

$$\langle v, \zeta - u \rangle_{V^*, V} + \varphi_{p(x)}(u) \leq \varphi_{p(x)}(\zeta).$$

Do anterior, temos

$$\langle v, \zeta - u \rangle_{V^*, V} \leq \varphi_{p(x)}(\zeta) - \varphi_{p(x)}(u).$$

Para todo $\zeta \in V$. Note que se $\zeta \in H - V$ então $\varphi_{p(x)}(\zeta) = \infty$, portanto o anterior continua valendo. Logo, $A_H(u) = v \in \partial\varphi_{p(x)}(u)$.

Agora, usando o corolário 2.1 em [2] temos que o domínio de A_H é um subconjunto denso de $D(\varphi_{p(x)})$, em que $D(\varphi_{p(x)}) = \{u \in H : \varphi_{p(x)}(u) < \infty\} = V$. Pelos teoremas das imersões, como $V \subset H$ e as imersões são contínuas e compactas, temos que $V \subset \overline{D(A_H)}^H$. Logo, $\overline{D(A_H)}^H = H$. Daí, obtemos que A_H é um subdiferencial de $\varphi_{p(x)}$. $\square$

Capítulo 3

Existência de Atratores Globais

Neste capítulo vamos provar a existência de atratores globais para o problema de Cauchy abstrato 3.14, estaremos nos baseando essencialmente em [10]. Na seção 3.1, vamos dar as principais definições; tais como de subgrupo, atrator local, atrator global, operador setorial e vamos provar o Teorema 3.1, o conceito de resolvente compacto entre outras coisas. Na seção 3.2, correspondente ao capítulo 2 de [10], vamos entender o problema de Cauchy abstrato com um operador setorial, vamos dar as condições para provar a existência de soluções que é o Lema 3.3 e no Teorema 3.4. Na seção 3.3, o que é feito no capítulo 3 de [10], vamos continuar com o estudo do problema de Cauchy. Vamos encontrar as condições que garantem a existência de um semigrupo global de soluções. Na seção 3.4, correspondente ao capítulo 4 de [10], vamos provar a existência do atrator global para o problema de Cauchy governado por um operador setorial.

3.1 Conceitos Preliminares

Nesta seção vamos dar algumas definições e resultados importantes que podem ser encontrados no capítulo 1 do livro [10].

Definição 3.1. *Seja V um espaço métrico. Uma família $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de funções $T(t) : V \longrightarrow V$, é dito um C^0 -**semigrupo** se*

1. $T(0) = Id$ denota a função identidade, ($Id : V \longrightarrow V$);
2. $T(t + s) = T(t)T(s)$ para todos $t, s \geq 0$;
3. A função

$$[0, +\infty) \times V \ni (t, x) \longrightarrow T(t)x \in V$$

é contínua em cada ponto de $(t, x) \in [0, +\infty) \times V$.

Observação 3.1. É bem conhecido que para semigrupos de operadores lineares limitados definidos em um espaço de Banach a condição (3) se mantém se, e somente se, para quaisquer $x \in X$

$$T(t)x \longrightarrow x, \quad \text{quando } t \longrightarrow 0^+.$$

Isto é uma consequência do Princípio da Limitação Uniforme.

Definição 3.2. O semigrupo $\{T(t)\}$ é chamado **compacto** se $T(t) : V \longrightarrow V$ é uma função compacta para cada $t \geq 0$, isto é, cada $T(t)$ leva conjuntos limitados em conjuntos precompactos.

Definição 3.3. O semigrupo $\{T(t)\}$ é chamado **completamente contínuo** se este é compacto e se cada conjunto limitado $B \subset V$ para todo $t \geq 0$ a união $\bigcup_{s \in [0, t]} T(s)B$ é limitada em V . Em que, a imagem de B por $\{T(t)\}$ é definida por

$$T(t)B := \{T(t)x : x \in B\}.$$

Definição 3.4. Sejam W_1 e W_2 dois subconjuntos de V . Dizemos que W_2 é $\{T(t)\}$ -**atraído** por W_1 se

$$d(T(t)W_2, W_1) \longrightarrow 0 \quad \text{quando } t \longrightarrow +\infty,$$

em que, para cada $t \geq 0$ definimos

$$d(T(t)W_2, W_1) := \sup_{W_2 \in T(t)W_2} \inf_{w_1 \in W_1} \text{dist}_V(w_2, w_1).$$

Definição 3.5. Dados dois subconjuntos $W_1, W_2 \subset V$. Dizemos que W_1 **absorve** W_2 por $\{T(t)\}$ se existe um número $t_0 \geq 0$ tal que $T(t)W_2 \subset W_1$ para todo $t \geq t_0$.

Observação 3.2. Note que W_1 atrai W_2 se, e somente se, cada vizinhança aberta N_{W_1} de W_1 absorve W_2 .

Definição 3.6. Um elemento $v \in V$ é chamado um **ponto de equilíbrio** de $\{T(t)\}$ se $T(t)v = v$ para todo $t \geq 0$. Estendendo esta noção, dizemos que um conjunto $A \subset V$ é $T(t)$ -**invariante** se $T(t)A = A$ para todo $t \geq 0$. Também, chamaremos $A \subset V$ **positivamente $T(t)$ -invariante** se $T(t)A \subset A$ para todo $t \geq 0$.

Definição 3.7. Para qualquer conjunto $B \subset V$ os conjuntos $\gamma^+(B)$ e $\omega^+(B)$ são definidos por

$$\gamma^+(B) := \bigcup_{t \geq 0} T(t)B$$

$$\omega(B) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}^V$$

são chamados respectivamente como **órbita positiva** e ω -**limite** de B . Então $\omega(B)$ são todos os pontos $v \in V$ para os quais existe uma sequência de números positivos $\{t_n\}$ com $t_n \rightarrow +\infty$, e pontos $v_n \in B$ tais que $T(t_n)v_n \rightarrow v$.

Definição 3.8. Para qualquer ponto $v \in V$, denotaremos por S_v^- o conjunto de todas as funções $\phi : (-\infty, 0] \rightarrow V$ tais que $\phi(0) = v$ e tais que $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$ sempre que $-\infty < s \leq -t \leq 0$. Vamos permitir a possibilidade que S_v^- seja vazio, que S_v^- seja exatamente um elemento ϕ , ou que S_v^- consiste de mais de um elemento ϕ . Para uma **órbita negativa** através de um ponto $v \in V$, nos referimos ao conjunto

$$\gamma_\phi^- := \bigcup_{t \geq 0} \{\phi(-t)\}$$

em que $\phi \in S_v^-$.

Definição 3.9. Para cada $v \in V$, uma **órbita completa** através de v é o conjunto

$$\gamma_0(v) := \gamma^+(v) \cup \gamma_\phi^-,$$

em que $\phi \in S_v^-$.

Definição 3.10. Seja $\mathcal{A} \subset V$ um conjunto não vazio e $\{T(t)\}$ -invariante. Dizemos que

1. $\mathcal{A}$ é **estável** se, e somente se, para cada vizinhança aberta U de $\mathcal{A}$ existe uma vizinhança aberta W de $\mathcal{A}$ tal que $T(t)W \subset U$, para todo $t \geq 0$.
2. $\mathcal{A}$ é **assintoticamente estável** se, e somente se, $\mathcal{A}$ é estável e atrai cada ponto que se encontra em alguma vizinhança aberta de $\mathcal{A}$.
3. $\mathcal{A}$ é **estável assintoticamente uniforme** se, e somente se, $\mathcal{A}$ é estável e atrai alguma vizinhança aberta de si mesmo.

Observação 3.3. Seja $\{T(t)\}$ um C^0 -semigrupo em um espaço métrico V . Se $\mathcal{A}$ é compacto e $\{T(t)\}$ -invariante se $\mathcal{A}$ atrai ao menos uma de suas próprias vizinhanças abertas, então $\mathcal{A}$ é estável.

Definição 3.11. Um conjunto $\mathcal{A} \subset V$ é dito de **atrator local** para um semigrupo $\{T(t)\}$ em V se, e somente se,

1. $\mathcal{A}$ é não vazio, compacto e invariante com respeito a $\{T(t)\}$;
2. $\mathcal{A}$ atrai alguma vizinhança aberta $N_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$.

Definição 3.12. Um **atrator global** para $\{T(t)\}$ nos referimos a um conjunto $\mathcal{A} \subset V$ não vazio, compacto, $\{T(t)\}$ -invariante o qual atrai cada subconjunto limitado de V .

Observação 3.4. O atrator global se existe é único e também maximal na classe dos subconjuntos invariantes de V .

Observação 3.5. O atrator global $\mathcal{A}$ é minimal na classe de todos os subconjuntos $B \subset V$ fechados e limitados que atrai conjuntos limitados.

Observação 3.6. O atrator global $\mathcal{A}$ é conexo se, e somente se, existe um subconjunto conexo limitado $B \subset V$ tal que $\mathcal{A} \subset B$.

Definição 3.13. O semigrupo $\{T(t)\}$ é dito ser **ponto dissipativo** se, e somente se, existe um subconjunto $B \subset V$ não vazio e limitado que atrai todo ponto em V . O semigrupo $\{T(t)\}$ é dito ser **dissipativo limitado** se, e somente se, existe um subconjunto $B \subset V$ não vazio, limitado o qual atrai todo subconjunto subconjunto limitado de V .

Definição 3.14. O semigrupo $\{T(t)\}$ é dito de **assintoticamente suave** se, e somente se, cada subconjunto $W \subset V$, não vazio, fechado, limitado, positivamente invariante contém um subconjunto compacto, não vazio C que atrai W .

Observação 3.7. Se $\{T(t)\}$ é um C^0 -semigrupo num espaço métrico V e se $\{T(t)\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$, então $\{T(t)\}$ é dissipativo limitado e assintoticamente suave.

Proposição 3.1. Seja $\{T(t)\}$ um C^0 -semigrupo atuando num espaço métrico V , se $B \subset V$ é não vazio, e se para algum número $t_B \geq 0$, o conjunto

$$\bigcup_{s \geq t_B} T(s)B$$

é um conjunto limitado, então $\omega(B)$ é não vazio, compacto e invariante. Além disso $\omega(B)$ atrai B .

Corolário 3.1. Seja $\{T(t)\}$ um C^0 -semigrupo num espaço métrico e suponha que $\{T(t)\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$, então

1. $\mathcal{A}$ é a união dos conjuntos ω -limite de todos os subconjuntos limitados de V ;
2. $\mathcal{A}$ é a união dos conjuntos ω -limite de todos os subconjuntos compactos de V ;
3. $\mathcal{A}$ é a união de todas as órbitas completas de $v \in V$ invariantes e limitadas;
4. $\mathcal{A}$ é a união de todas as órbitas completas de $v \in V$ invariantes e precompactos.

Observação 3.8. *Seja $\{T(t)\}$ um C^0 -semigrupo num espaço métrico V e seja $\mathcal{A}$ um subconjunto não vazio, compacto e invariante. Se $\{T(t)\}$ é assintoticamente suave, então as seguintes condições são equivalentes*

1. $\mathcal{A}$ é estável assintoticamente;
2. $\mathcal{A}$ é estável assintoticamente uniforme.

Teorema 3.1. *Se $\{T(t)\}$ é um C^0 -semigrupo num espaço métrico V . Se $\{T(t)\}$ é ponto dissipativo, assintoticamente suave e as órbitas de conjuntos limitados continuam sendo limitadas, então $\{T(t)\}$ tem um atrator global.*

Demonstração. A prova vai consistir de dois passos:

Passo 1) Primeiro vamos provar a existência de um conjunto $\mathcal{O} \subset V$ tal que cada conjunto compacto $C \subset V$ tem uma vizinhança aberta $\mathcal{N}_C$ que é absorvido por $\mathcal{O}$. Pela hipótese existe um subconjunto $W_0 \subset V$ não vazio limitado que atrai pontos de V . Seja $\mathcal{N}_{W_0}$ uma vizinhança arbitrária de W_0 . Usando a continuidade de $\{T(t)\}$ e o fato de que $\mathcal{N}_{W_0}$ absorve pontos de V , concluímos que, para todo $v \in V$ existem $\tau_v \geq 0$ e uma bola $B_V(v; \epsilon_v) \subset V$ tal que

$$T(\tau_v)B_V(v; \epsilon_v) \subset \mathcal{N}_{W_0}. \quad (3.1)$$

Agora, vamos escolher $t_{\mathcal{N}_{W_0}} \geq 0$ tal que

$$\mathcal{O} := \bigcup_{t \geq t_{\mathcal{N}_{W_0}}} T(t)\mathcal{N}_{W_0}$$

é limitado. De (3.1) observamos que, para qualquer $v \in V$ existem $t_v := \tau_v + t_{\mathcal{N}_{W_0}}$ e uma bola $B_V(v; \epsilon_v)$ tal que

$$T(t)B_V(v; \epsilon_v) \subset \mathcal{O}, \quad \text{para todo } t \geq t_v. \quad (3.2)$$

Consideremos agora, um subconjunto compacto $C \subset V$ arbitrário. Note que $\{B_V(v; \epsilon_v)\}_{v \in C}$ é um cubrimento aberto para C , como C é compacto, então existem $v_1, v_2, \dots, v_n$ pontos de C tal que

$$C \subset \bigcup_{k=1}^n B_V(v_k; \epsilon_{v_k}) := \mathcal{N}_C \quad (3.3)$$

de (3.1) e (3.2) obtemos

$$T(t)C \subset T(t)\mathcal{N}_C = \bigcup_{k=1}^n T(t)B_V(v_k; \epsilon_{v_k}) \subset \mathcal{O}$$

para todo $t \geq \max\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$.

Passo 2) Agora, vamos construir um conjunto compacto e invariante $\mathcal{A}$ que atrai subconjuntos limitados de V . Seja $B \subset V$ limitado. A hipótese da Proposição 3.1 garante-nos que $\omega(B)$ é compacto e atrai B , isto é, para qualquer vizinhança aberta $\mathcal{N}_{\omega(B)}$ de $\omega(B)$ existe $t_B \geq 0$ tal que

$$T(t)B \subset \mathcal{N}_{\omega(B)}, \quad \text{para todo } t \geq t_B. \quad (3.4)$$

Pelo resultado obtido no passo 1), existe alguma vizinhança $\mathcal{N}_{\omega(B)}$ de $\omega(B)$ absorvido por $\mathcal{O}$. De (3.4) obtemos, para todo $B \subset V$ limitado, existe $t_B \geq 0$ tal que

$$T(t)B \subset \mathcal{O} \quad \text{para todo } t \geq t_B. \quad (3.5)$$

Seja $\mathcal{A} := \omega(\mathcal{O})$. Usando de novo a Proposição 3.1 $\mathcal{A}$ é compacto, invariante e atrai $\mathcal{O}$, também por (3.5) $\mathcal{A}$ atrai conjuntos limitados de V . Logo, $\mathcal{A}$ é um atrator global em V . $\square$

Observação 3.9. *Pelo Teorema 3.1 e da Observação 3.7, concluímos que se $\{T(t)\}$ é um C^0 -semigrupo num espaço métrico V e se pela ação de $\{T(t)\}$, as órbitas de conjuntos limitados são limitadas, então $\{T(t)\}$ tem um atrator global em V se, e somente se, $\{T(t)\}$ é ponto dissipativo e assintoticamente suave.*

Observação 3.10. *Note que da prova do Teorema 3.1 obtemos a seguinte propriedade*

$$\forall B \subset V \text{ limitado} \quad \exists t_B \geq 0 \text{ tal que } \bigcup_{t \geq t_B} T(t)B \text{ é limitado em } V. \quad (3.6)$$

Definição 3.15. *Seja $\{T(t)\}$ é um C^0 -semigrupo num espaço métrico V . O funcional $\mathcal{L} : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada de **função de Lyapunov** para $\{T(t)\}$ se*

1. $\mathcal{L}$ é contínua em V e limitada;
2. Para cada $v \in V$ a função $(0, +\infty) \ni t \longrightarrow \mathcal{L}(T(t)v) \in \mathbb{R}$ é não crescente;
3. Para cada $v \in V$ temos $\mathcal{L}(T(t)v) = \text{const}$ para todo $t \geq 0$ implica que $T(t)v = v$ para todo $t \geq 0$.

Corolário 3.2. *Seja $\{T(t)\}$ é um C^0 -semigrupo assintoticamente suave num espaço métrico V e suponha que $\{T(t)\}$ satisfaz a Observação 3.10. Além disso, suponha que todos os pontos de equilíbrio de $\{T(t)\}$ estão em um subconjunto limitado de V . Se $\{T(t)\}$ tem uma função de Lyapunov, então $\{T(t)\}$ tem um atrator global.*

Lema 3.1. *Se $\{T(t)\}$ é um C^0 -semigrupo compacto num espaço métrico V , então $\{T(t)\}$ é assintoticamente suave.*

Lema 3.2. Se $\{T(t)\}$ é um C^0 -semigrupo compacto num espaço métrico V , então; para cada $B \subset V$ limitado e para cada $\tau_2 > \tau_1 > 0$ tem-se

$$\bigcup_{t \in [\tau_2, \tau_1]} T(t)B \text{ é limitado em } V. \quad (3.7)$$

Corolário 3.3. Seja $\{T(t)\}$ um C^0 -semigrupo num espaço métrico V . Se $\{T(t)\}$ é compacto e ponto dissipativo, então $\{T(t)\}$ tem um atrator global em V .

Corolário 3.4. Seja $\{T(t)\}$ é um C^0 -semigrupo num espaço métrico V . Além disso, suponha que todos os ponto de equilíbrio de $\{T(t)\}$ estão num subconjunto limitado de V . Se existe uma função de Lyapunov $\mathcal{L}$ para $\{T(t)\}$, então $\{T(t)\}$ tem um atrator global.

Vamos agora falar do conceito de espectro, resolvente e resolvente compacto (ver [12]).

Definição 3.16. Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear no espaço de Banach X . O conjunto **resolvente** de A , denotado por $\rho(A)$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o **operador resolvente** de A em λ

$$R_\lambda(A) : X \longrightarrow D(A), \quad R_\lambda(A) := (\lambda Id - A)^{-1}$$

existe e é limitado.

Definição 3.17. O espectro de A é o conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$.

Definição 3.18. Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear em X . Dizemos que A tem **resolvente compacto** se $(\lambda Id - A)^{-1} : X \longrightarrow D(A) \subset X$ é uma função compacta para cada $\lambda \in \rho(A)$.

A noção de operador setorial tem grande importância no estudo das equações diferenciais. Consideremos $a \in \mathbb{R}$ e $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, um setor do plano complexo é dado pela relação

$$S_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \quad \lambda \neq a\}. \quad (3.8)$$

Definição 3.19. Considere o operador linear, fechado e definido densamente $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ num espaço de Banach X , então A é um **operador setorial** em X se, e somente se, existem $a \in \mathbb{R}$, $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e $M > 0$ tal que

1. O conjunto resolvente $\rho(A)$ contém o setor $S_{a,\phi}$;
2. $\|(\lambda Id - A)^{-1}\|_{B(X,X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}$, para cada $\lambda \in S_{a,\phi}$.

Definição 3.20. *Seja X um espaço de Banach e $\{T(t)\}$ um C^0 -semigrupo em X . Dizemos que $\{T(t)\}$ é um **semigrupo analítico**, se existe um setor do plano complexo*

$$S = \{z \in \mathbb{C} : \phi_1 < \arg(z) < \phi_2\}, \quad \text{com} \quad (\phi_1 < 0 < \phi_2)$$

e uma família de operadores lineares limitados $T(z) : X \longrightarrow X$, $z \in S$, coincidindo com $T(t)$ para $t \geq 0$ e tais que

1. $z \longrightarrow T(z)$ é analítica em S ;
2. Para $z \in S$ $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$, para todo $x \in X$;
3. $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, para $z_1, z_2 \in S$.

Teorema 3.2. *Seja X um espaço de Banach. Então um operador linear definido densamente A é um gerador negativo de um semigrupo analítico $\{T(t)\}$ de operadores limitados $T(t) : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$, se, e somente se, A é um operador setorial.*

De agora para frente a notação $\{e^{-At}\}$ será usada para o semigrupo analítico correspondente ao gerador infinitesimal $-A$.

No caso onde $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, isto é, quando os elementos do espectro tenham parte real positiva. Então as estimativas da norma $\|\cdot\|_{B(X,X)}$ de um semigrupo de operadores mostra que o processo decai ao longo do tempo quando $t \longrightarrow +\infty$.

Teorema 3.3. *Seja A um operador setorial num espaço de Banach tal que $\operatorname{Re}\sigma(A) > a > 0$. Então, para algumas constantes positivas C_0, C_1 .*

$$\|e^{-At}\|_{B(X,X)} \leq C_0 e^{-at}, \quad t \geq 0 \tag{3.9}$$

e

$$\|Ae^{-At}\|_{B(X,X)} \leq C_1 e^{-at}, \quad t > 0 \tag{3.10}$$

Proposição 3.2. *Seja $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ um operador linear, autoadjunto, densamente definido num espaço de Hilbert, se adicionalmente, A é limitado em H , isto é, existe $m \in \mathbb{R}$ para todo $x \in D(A)$ tal que*

$$\langle Ax, x \rangle_H \geq m \|x\|_H^2. \tag{3.11}$$

Então A é um operador setorial em H . (Dizemos que A é definido positivo se m é positiva.)

Agora, suponha que X é um espaço de Banach e A é um operador setorial em X com $\operatorname{Re}(\sigma(A)) > 0$. Tal operador A será chamado **operador setorial positivo**. Em particular, define um operador autoadjunto, positivo num espaço de Hilbert que satisfaz (2) na Definição 3.19. O Teorema 3.3, permite-nos definir, para cada $\alpha \in (0, \infty)$, o operador $A^{-\alpha} : X \rightarrow X$ definido pela integral

$$A^{-\alpha}v := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} v dt. \quad (3.12)$$

Proposição 3.3. *Suponha que A é um operador setorial num espaço de Banach X com $\operatorname{Re}(\sigma(A)) > 0$. $A^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, +\infty)$ define um operador linear limitado em X dando uma correspondência um a um entre X e a imagem $R(A^{-\alpha})$. Também $A^{-1} : D(A) \rightarrow X$ coincide com a inversa de A e*

$$A^{-\alpha} A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}, \quad \text{para } \alpha, \beta > 0.$$

Como vimos acima, cada $A^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ é invertível. Vamos denotar o operador inverso por A^α e usaremos o símbolo X^α para o domínio da função A^α ; isto é, $X^\alpha := R(A^{-\alpha})$. Também estendemos a noção de operador potência no caso onde $\alpha = 0$, tomando $A^0 = I$ em $X^0 = X$.

Proposição 3.4. *Seja A é um operador setorial num espaço de Banach X com $\operatorname{Re}(\sigma(A)) > 0$. Então X^α com $\alpha \in [0, +\infty)$ cuja norma $\|v\|_{X^\alpha} := \|A^\alpha v\|_X$ enquanto que $A^\alpha : X^\alpha \rightarrow X$ é um operador linear, fechado, definido densamente em X satisfazendo*

$$A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \geq 0.$$

Além disso, X^α é um subconjunto denso de X^β para $\alpha \geq \beta \geq 0$, as inclusões

$$X^\alpha \subset X^\beta, \quad \alpha \geq \beta \geq 0$$

são densas e contínuas. Também elas vão ser compactos pois A tem resolvente compacto.

Proposição 3.5. *Seja A é um operador setorial num espaço de Banach X com $\operatorname{Re}(\sigma(A)) > 0$. Para $\alpha \geq 0$, $t \geq 0$, $A^\alpha e^{-At}$ é um operador linear limitado em X tal que*

$$\|A^\alpha e^{-At}\|_{B(X,X)} \leq C_\alpha \frac{e^{-\alpha t}}{t^\alpha}, \quad t > 0, \quad (3.13)$$

e

$$A^\alpha e^{-At} = e^{-At} A^\alpha \quad \text{em } X^\alpha, t \geq 0.$$

com $\alpha > 0$ e tal que $\operatorname{Re}(\sigma(A)) > \alpha$,

Proposição 3.6. *Se A satisfaz a condição da Definição 3.19 com algum $a \in \mathbb{R}$ e $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, seja também $\operatorname{Re}(\sigma(A)) > 0$. Então*

$$(A^\beta)^\alpha = A^{\alpha\beta},$$

para $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{\phi}\right)$ arbitrário e $\alpha > 0$.

3.2 O Problema de Cauchy Abstrato

Nesta seção vamos estudar o Capítulo 2, de [10] no que diz respeito ao problema de Cauchy com um operador setorial. Vamos dar as condições para provar a existência da solução desse problema. Vamos introduzir a Fórmula Integral de Cauchy.

Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = F(u), & t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (3.14)$$

em que A é um operador setorial num espaço de Banach X . Sem perda de generalidade, vamos assumir que A é um operador setorial positivo (isto é, $\operatorname{Re}(\sigma(A)) > 0$). Já que o conjunto resolvente de um operador linear fechado é bem conhecido que é um conjunto aberto do plano complexo, temos que

$$\operatorname{Re}(\sigma(A)) > a, \quad \text{para algum } a \text{ positivo.}$$

Portanto, o espaço potência X^α , com $\alpha > 0$ é definido como a imagem do operador $A^{-\alpha}$. Nesta situação, vamos sempre tomar $\alpha \in [0, 1)$ fixo. O termo não linear F em (3.14) é Lipchitz contínua em conjuntos limitado de X^α . Isto é, existe uma função não decrescente $L : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que

$$\|F(v) - F(w)\|_X \leq L(r) \|v - w\|_{X^\alpha}$$

para $v, w \in B_{X^\alpha}(r)$, que denota a bola de raio $r > 0$, centrada em 0 no espaço X^α .

Para obter os resultados desta seção, considera-se

Hipótese 3.1. *Seja X um espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial positivo em X e seja $F : X^\alpha \rightarrow X$ Lipschitz contínua num conjunto limitado de X^α para algum $\alpha \in [0, 1)$.*

Definição 3.21. Seja X um espaço de Banach, $\alpha \in [0, 1)$ e u_0 um elemento de X^α . Se para algum número real $\tau > 0$ a função $u \in C([0, \tau), X^\alpha)$ satisfaz

1. $u_0 = u(0)$;
2. $u \in C^1([0, \tau), X^\alpha)$;
3. $u(t)$ está em $D(A)$ para todo $t \in (0, \tau)$, e satisfaz a primeira equação em (3.14) em X para todo $t \in (0, \tau)$.

Então, ela é chamada de **solução local** X^α de (3.14).

O seguinte teorema é muito importante em nosso estudo, porque ele prova a existência da solução para o problema (3.14) em um intervalo maximal de solução.

Teorema 3.4. Sob a Hipótese 3.1, para cada $u_0 \in X^\alpha$, existe uma única solução $u = u(t, u_0)$ de (3.14) definida no seu intervalo maximal de existência $[0, \tau_{u_0})$ isso quer dizer que ou $\tau_{u_0} = +\infty$ ou se $\tau_{u_0} < +\infty$ então

$$\lim_{t \rightarrow \tau_{u_0}^-} \sup \|u(t, u_0)\|_{X^\alpha} = +\infty.$$

Corolário 3.5. Sob a Hipótese 3.1, para cada $\beta \in [\alpha, 1)$ $u_0 \in X^\beta$, existe uma única solução $u = u(t, u_0)$ de (3.14) definida em seu máximo intervalo de existência $[0, \tau_{u_0})$.

Lema 3.3. (Fórmula Integral de Cauchy.) Sob a Hipótese 3.1 e $u \in C([0, \tau), X^\alpha)$. Então u é uma X^α solução local de (3.14) se, e somente se, u satisfaz a equação integral

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}F(u(s))ds, \quad t \in [0, \tau). \quad (3.15)$$

Considerando o Lema 3.3 temos algumas propriedades interessantes.

Corolário 3.6. Considerando a Hipótese 3.1 e $u \in C([0, \tau), X^\alpha)$, se u satisfaz em X a equação integral (3.15), então

$$u \in C((0, \tau), X^1)$$

e

$$\dot{u} \in C((0, \tau), X^\gamma), \quad \gamma \in [0, 1).$$

Proposição 3.7. Sob a Hipótese 3.1, para qualquer conjunto limitado $B \subset X^\alpha$ existe um tempo $t_B > 0$ tal que a solução $u(t, u_0)$ de (3.14) com $u_0 \in B$ existe e está limitada uniformemente em X^α para todo $t \in [0, t_B]$ e $u_0 \in B$.

Proposição 3.8. *Suponha que a Hipótese 3.1 é satisfeita, e uma sequência $\{u_n\}_n \subset X^\alpha$ e $u_n \rightarrow u_0$ em X^α . Então $T_0 = \inf \{\tau_{u_n} : n \in \mathbb{N}\}$ é positivo, $\tau_{u_0} > T_0$ (sendo τ_{u_n} o extremo do intervalo maximal de solução de $u(t, u_n)$) e para todo $T \in (0, T_0)$ temos que*

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t, u_n) - u(t, u_0)\|_{X^\alpha} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

3.3 Semigrupo das Soluções Globais

Nesta seção vamos continuar com o estudo do problema abstrato de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = F(u), & t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

sob a Hipótese 3.1. Nosso trabalho aqui será obter as soluções globais para (3.14).

Definição 3.22. *A função $u = u(t)$ é dita a **solução** X^α **global** de (3.14) se satisfaz os requerimentos da Definição 3.21 com $\tau = +\infty$.*

De acordo com o Teorema 3.4 da existência da solução de (3.14), para a prova da solução global de (3.14) é suficiente mostrar que a norma $\|u(t, u_0)\|_{X^\alpha}$ não explode num tempo finito T , isto é, para cada $T > 0$

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \sup \|u(t)\|_{X^\alpha} < +\infty.$$

A geração de semigrupos não lineares é dada da seguinte maneira: Se para qualquer condição inicial $u_0 \in X^\alpha$ corresponde uma solução global $u(t, u_0)$ de (3.14), então um C^0 -semigrupo $\{T(t)\}$ correspondente a (3.14) pode ser definido em X^α via a relação

$$T(t)u_0 = u(t, u_0), \quad t \geq 0. \quad (3.16)$$

Observação 3.11. *Note que da definição C^0 -semigrupo e considerando a relação definida em (3.16), tem-se que $T(0)u_0 = u(0, u_0) = u_0$, pois (3.14) é autônomo, também temos que*

$$T(t_1)T(t_2)u_0 = T(t_1 + t_2)u_0, \quad t_1, t_2 \geq 0,$$

é uma consequência da unicidade das soluções. Finalmente a continuidade da função

$$[0, +\infty) \times X^\alpha \ni (t, u_0) \rightarrow T(t)u_0 \in X^\alpha,$$

segue da Proposição 3.2 e do fato que $u(\cdot, u_0) \in C([0, +\infty), X^\alpha)$.

Vamos dar algumas condições para garantir a existência de solução global de (3.14). Considere as seguintes condições:

Condição 3.1. *A relação em (3.16) define em X^α , correspondendo a (3.14), um C^0 -semigrupo $\{T(t)\}$ de soluções globais em X^α , cujas órbitas de conjuntos limitados são limitadas.*

Condição 3.2. *É possível escolher,*

- i. um espaço de Banach Y , com $D(A) \subset Y$;*
- ii. uma função localmente limitada $c : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$;*
- iii. uma função não decrescente $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$;*
- iv. certo número $\theta \in [0, 1)$ tal que para cada $u_0 \in X^\alpha$ as seguintes equações são satisfeitas*

$$\|u(t, u_0)\|_Y \leq c(\|u_0\|_{X^\alpha}), \quad t \in (0, \tau_{u_0}) \quad (3.17)$$

e

$$\|F(u(t, u_0))\|_X \leq g(\|u(t, u_0)\|_Y)(1 + \|u(t, u_0)\|_{X^\alpha}^\theta), \quad t \in (0, \tau_{u_0}). \quad (3.18)$$

Teorema 3.5. *Sob a Hipótese 3.1, as Condições 3.1 e 3.2 são equivalentes.*

Observação 3.12. *Se a Hipótese 3.1 é satisfeita e $u_0 \in X^\alpha$. Então $u(t, u_0)$ é definida e uniformemente limitada para $t \geq 0$ se, e somente se, existe um espaço de Banach $D(A) \subset Y$ e uma função não-decrescente $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ tal que*

$$\forall C > 0 \quad \forall t \in (0, \tau_{\max(u_0)}) \quad \text{tal que} \quad \|u(t, u_0)\|_Y \leq C, \quad (3.19)$$

além disso, existe $\theta \in [0, 1)$ tal que para todo $t \in (0, \tau_{\max(u_0)})$ tem-se

$$\|F(u(t, u_0))\|_X \leq g(\|u(t, u_0)\|_Y) \left(1 + \|u(t, u_0)\|_{X^\alpha}^\theta\right). \quad (3.20)$$

Observação 3.13. *Assuma que a Hipótese 3.1 é satisfeita e $V \subset X^\alpha$. Então $u(t, u_0)$ existe globalmente no tempo para cada $u_0 \in V$ se, e somente se, há um espaço de Banach $D(A) \subset Y$ e uma função não decrescente $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ tal que, para todo $u_0 \in V$ existe $C_{u_0} > 0$ tal que para cada $t \in (0, \tau_{\max(u_0)})$ temos*

$$\|u(t, u_0)\|_Y \leq C_{u_0}, \quad (3.21)$$

também, existe $\theta \in [0, 1)$ para todo $u_0 \in V$ e para todo $t \in (0, \tau_{\max(u_0)})$

$$\|F(u(t, u_0))\|_X \leq g(\|u(t, u_0)\|_Y) \left(1 + \|u(t, u_0)\|_{X^\alpha}^\theta\right). \quad (3.22)$$

Observação 3.14. *Assuma que a Hipótese 3.1 é satisfeita e $V \subset X^\alpha$. As seguintes condições são equivalentes.*

Condição 3.3. *$u(t, u_0)$ não explode para $u_0 \in V$ e para cada subconjunto limitado $B \subset X^\alpha$ o conjunto $\{u(t, u_0) : u_0 \in B \cap V, t \geq 0\}$ é limitado em X^α .*

Condição 3.4. *Há um espaço de Banach $D(A) \subset Y$ e uma função não decrescente $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ em que (4.1) e (3.22) são satisfeitas e a função $c : V \rightarrow [0, +\infty)$ em (4.1) leva conjuntos limitados de V em subconjuntos limitados de $[0, +\infty)$.*

Corolário 3.7. *Assuma que a Hipótese 3.1 seja satisfeita e $V \subset X^\alpha$ arbitrário. Se os requerimentos da Condição 3.2 são satisfeitos para $u_0 \in V$, isto é, é possível escolher um espaço de Banach Y com $D(A) \subset Y$, uma função localmente limitada $c : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, uma função não decrescente $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ e certo número $\theta \in [0, 1)$ tal que para $u_0 \in V$ se satisfaz ambas desigualdades (3.17) e (3.18). Então a solução local correspondente a $u_0 \in V$ existe para todo $t \geq 0$. Adicionalmente, se $u_0 \in V$ implica que $u(t, u_0) \in V$ enquanto existir então a relação (3.16) definida em V correspondente a (3.14), um C^0 semigrupo $\{T(t)\}$ da solução global tendo órbitas de conjuntos limitados limitadas.*

Agora, note que assumindo a Hipótese 3.1 e denotando por $T(t)u_0$ uma solução local de (3.14) originada para um $u_0 \in X^\alpha$, pela Proposição 3.7 para qualquer $t \in (0, \tau_B)$ a imagem $T(t)B$ de um conjunto limitado $B \subset X^\alpha$ está bem definido.

Proposição 3.9. *Sob a Hipótese 3.1, seja $T(t)u_0$ denotada a solução local de (3.14) originada em $u_0 \in X^\alpha$, então para qualquer subconjunto limitado $B \subset X^\alpha$ e todo $t \in (0, \tau_B)$ vamos ter que $T(t)B$ é limitado em $X^{\alpha+\epsilon}$ para cada $\alpha + \epsilon < 1$.*

Lema 3.4. *Sob as hipóteses da Proposição 3.9 temos que para cada $B \subset X^\alpha$ limitado e cada $t \in (0, \tau_B)$ tem-se $T(t)B$ é limitado em X^1 .*

Teorema 3.6. *Assuma que a Hipótese 3.1 é satisfeita e (3.16) define um C^0 semigrupo $T(t) : X^\alpha \rightarrow X^\alpha$, $t > 0$ de uma solução global de (3.14). Então, para cada $t > 0$, $T(t)$ leva conjuntos limitados de X^α e precompactos em X em conjuntos precompactos de X^α .*

Vamos dar outra condição como uma contrapartida da Condição 3.2.

Condição 3.5. *É possível escolher,*

- i. um espaço de Banach com $D(A) \subset Y$;*
- ii. uma função $c : [0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ em que $c(\cdot, s)$ é localmente limitada para $s > 0$ fixo;*

iii. uma função não-decrescente $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$;

iv. um número $\theta \in [0, 1)$, tal que para cada $u_0 \in X^\alpha$ satisfaz as seguintes equações

$$\|u(t, u_0)\|_Y \leq c(\|u_0\|_{X^\alpha}, s), \quad 0 < s \leq t < \tau_{u_0} \quad (3.23)$$

e

$$\|F(u(t, u_0))\|_X \leq g(\|u(t, u_0)\|_Y) \left(1 + \|u(t, u_0)\|_{X^\alpha}^\theta\right), \quad t \in (0, \tau_{u_0}). \quad (3.24)$$

Teorema 3.7. *Sob a suposição 3.1, as Condições 3.2 e 3.5 são equivalentes.*

Teorema 3.8. *Assuma que a Hipótese 3.1 é satisfeita e o conjunto resolvente de A seja compacto e a relação (3.16) define um C^0 -semigrupo $T(t) : X^\alpha \rightarrow X^\alpha$, $t > 0$ de uma solução global para (3.14). Então, para cada $t > 0$, $T(t)$ é uma função compacta em X^α .*

Demonstração. Sejam $t > 0$ fixado e $B \subset X^\alpha$ limitado, pela Proposição 3.9 podemos escolher τ_B e tomar $t_1 \in (0, \min(t, \tau_B))$, logo; $T(t_1)B$ é limitada em $X^{\alpha+\epsilon}$ para $\alpha + \epsilon < 1$, como a resolvente de A é compacto, então a inclusão $X^{\alpha+\epsilon} \subset X^\alpha$ é compacto. Portanto $T(t_1)B$ é um subconjunto precompacto em X^α . Pela continuidade da função $T(t - t_1)$ em X^α garante que a imagem $T(t)B = T(t - t_1)T(t_1)B$ será um subconjunto precompacto de X^α , isso conclui a prova. $\square$

Corolário 3.8. *Sob as hipótese do Teorema 3.8, o semigrupo $\{T(t)\}$ gerado por (3.14) é completamente contínuo, mais exatamente; para cada subconjunto limitado $B \subset X^\alpha$ e cada $T \geq 0$. As seguintes condições serão satisfeitas*

$$\bigcup_{0 \leq t \leq T} T(t)B \quad \text{é limitado em } X^\alpha$$

e

$$\bigcup_{t_1 \leq t \leq T} T(t)B \quad \text{é um conjunto precompacto em } X^\alpha \text{ para cada } t_0 > 0.$$

3.4 Construção do Atrator Global

Na seção anterior formulamos as condições necessárias e suficientes para que problema o (3.14)

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = F(u), & t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

gere uma C^0 -solução $\{T(t)\}$ de uma solução global X^α com órbitas de conjuntos limitados limitadas. Também discutimos se o semigrupo é compacto. Nas considerações a seguir,

vamos estabelecer a dissipatividade pontual de $\{T(t)\}$ que é uma parte crucial para provar a existência do atrator global.

Teorema 3.9. *Assumindo a Hipótese 3.1 e $V \subset X^\alpha$ tal que todos os requerimentos da Condição 3.2 são satisfeitos para $u_0 \in V$. Se a desigualdade (3.17) da Condição 3.2 tem a propriedade adicional que*

$$\exists C > 0 \quad \forall u_0 \in V \quad \text{tal que} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, u_0)\|_Y < C, \quad (3.25)$$

então a solução de (3.14) satisfaz a desigualdade

$$\exists C' > 0 \quad \forall u_0 \in V \quad \text{tal que} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \|u(t, u_0)\|_{X^\alpha} < C'. \quad (3.26)$$

Corolário 3.9. *Se a função g que aparece na Condição 3.2 é contínua e satisfaz $g(0) = 0$, então para cada $u_0 \in X^\alpha$ se*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \|u(t, u_0)\|_Y = 0$$

então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \|u(t, u_0)\|_{X^\alpha} = 0$$

Corolário 3.10. *Se em vez de (3.25) vale a seguinte condição mais forte*

$$\exists C > 0 \quad \forall r > 0 \quad \text{tem-se} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \sup_{u_0 \in B_{X^\alpha}(r)} \|u(t, u_0)\|_Y \leq C, \quad (3.27)$$

então o semigrupo $\{T(t)\}$ é dissipativo limitado em X^α .

Corolário 3.11. *Sob a Hipótese 3.1, as seguintes sentenças são equivalentes.*

1. *A relação (3.16) define em X^α um C^0 semigrupo $\{T(t)\}$ de uma solução global de (3.14) que têm órbitas limitadas de conjuntos limitados e é ponto dissipativo (ou dissipativo limitado) em X^α .*
2. *Os requerimentos da Condição 3.2 são satisfeitos junto com a desigualdade (3.17), adicionalmente satisfazendo a desigualdade (3.25).*

No caso em que o conjunto resolvente seja compacto (ver Teorema 3.8) temos que o semigrupo é compacto e pelo Corolário 3.3 só precisamos provar que $\{T(t)\}$ é ponto dissipativo.

Teorema 3.10. *Assumindo a Hipótese 3.1 é satisfeita, o conjunto resolvente de A compacto e qualquer subconjunto $V \subset X^\alpha$ tal que*

1. V é fechado na topologia de X^α ;
2. todos os requerimentos para a Condição 3.2 (ou da Condição 3.5) para $u_0 \in V$;
3. $T(t)V \subset V$ para cada $t \geq 0$;
4. a desigualdade (3.17) da Condição 3.2 (ou respectivamente (3.23) na Condição 3.5) é assintoticamente independente de $u_0 \in V$.

Então o semigrupo $\{T(t)\}$ restrito a um espaço completo V tem um atrator global.

Demonstração. Para provar o teorema é suficiente usar o Corolário 3.3, isso junto com uma consequência do Corolário 3.7 o semigrupo correspondente a (3.14) em V os conjuntos limitados têm órbitas limitadas. Pela hipótese 4) e pelo Teorema 3.9, é ponto dissipativo em V , enquanto que como resultado do Teorema 3.8, $T(t) : V \rightarrow V$ é compacta para cada $t > 0$. Logo, $\{T(t)\}$ é um C^0 -semigrupo ponto dissipativo e compacto em V . Portanto, a existência do atrator global para $\{T(t)\}$ se segue do Corolário 3.3. $\square$

Corolário 3.12. *Assumindo que a Hipótese 3.1 é satisfeita e A tem resolvente compacto, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) A relação (3.16) define em X^α , um C^0 subgrupo $\{T(t)\}$ de uma solução global do problema (3.14) que tem um atrator global em X^α .
- ii) A Condição 3.2 (ou respectivamente a Condição 3.5) se sustenta com a estimativa (3.17) assintoticamente independente de $u_0 \in X^\alpha$.

Demonstração. ii) $\implies$ i) Se segue do teorema anterior.

i) $\implies$ ii) Note que o conjunto resolvente de A é compacto, se o atrator global existe as órbitas de conjuntos limitados devem ser limitadas (ver Corolário 3.8). Também pelo Corolário 3.11 o semigrupo é ponto dissipativo. $\square$

Considerando o caso especial, quando (3.14) fornece a existência da função de Lyapunov $\mathcal{L}$ de $\{T(t)\}$ no contexto de 3.14. Neste caso a existência do atrator global é dado pelos Corolários 3.7 e 3.2

Teorema 3.11. *Suponha que a resolvente de A é um conjunto compacto e que a Hipótese 3.1 é satisfeita. Seja $V \in X^\alpha$ um subconjunto tal que*

1. todos os requisitos da Condição 3.2 (ou a Condição 3.5) são satisfeitas para $u_0 \in V$;
2. V é fechado na topologia de X^α ;
3. $T(t)V \subset V$ para cada $t \geq 0$;

4. o conjunto $\{v \in V : T(t)v = v, \text{ para todo } t \geq 0\}$ é limitado em V .

Se há uma função de Lyapunov $\mathcal{L}$ então $\{T(t)\}$ restrito a um espaço completo V tem um atrator global.

Nota: Veja [4] para mais detalhes. Conclusão para o problema abordado no seguinte capítulo.

Capítulo 4

Convergência de Equações Parabólicas Quasilineares a uma Equação Semilinear

4.1 Introdução

Neste capítulo vamos apresentar os resultados estudados nos artigos [5] e [4]. Apresentaremos a semicontinuidade superior dos atratores globais para o problema (4.2) quando $j \rightarrow +\infty$. Vamos considerar a seguinte equação semilinear

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u = b(u), & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (4.1)$$

em que Ω é um domínio limitado de fronteira suficientemente suave de $\mathbb{R}^N$, $N > 0$ e $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável e globalmente Lipschitz e considerando seu operador de Nemytskií associado $B : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, isto é; para qualquer $u : [0, \infty) \rightarrow L^2(\Omega)$ e $x \in \Omega$, $B(u(t))(x) := b(u(x, t))$. Note que B é globalmente Lipschitz com a mesma constante Lipschitz de b . O problema (4.1) pode ser visto como o problema limite das equações

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_{p_j(x)} u + |u|^{p_j(x)-2} u = b(u), & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (4.2)$$

quando $p_j \rightarrow 2$ em $L^\infty(\Omega)$ quando $j \rightarrow +\infty$.

Suponha $\{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções contínuas $p_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p_j^- := \inf p_j \geq 2$ e $\{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge para 2 em $L^\infty(\Omega)$ quando $j \longrightarrow +\infty$. Denotamos por $p_j^+ := \sup p_j$. Estamos supondo que $2 \leq p_j(x) \leq p_1(x) \leq p_0$ para todo $x \in \Omega$.

O operador $A_{j,1} : W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega) \longrightarrow [W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)]^*$ dado por

$$A_{j,1} = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p_j(x)-2} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p_j(x)-2} u(x) v(x) dx,$$

para qualquer $u \in W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)$ e $v \in W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)$ é um operador maximal monótono e consequentemente o operador A_j , a realização de $A_{j,1}$ em $L^2(\Omega)$, é maximal monótono em $L^2(\Omega)$. Denotamos

$$A_j u = -\Delta_{p_j(x)} u + |u|^{p_j(x)-2} u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_j(x)-2} \nabla u) + |u|^{p_j(x)-2} u,$$

para qualquer $j \in \mathbb{N}$. Além disso, o operador A_j é a subdiferencial $\partial \varphi_j$ de uma aplicação convexa, própria e s.c.i $\varphi_j : L^2(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$\varphi_j(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} \frac{1}{p_j(x)} |\nabla u_j(t, x)|^{p_j(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p_j(x)} |u_j(t, x)|^{p_j(x)} dx & \text{se } u \in W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega) \\ +\infty & \text{Caso contrário.} \end{cases}$$

O problema (4.2) pode ser escrito de maneira abstrata como

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + A_j u = B(u), & t > 0 \\ u(0) = u_0 \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (4.3)$$

com $B : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ globalmente Lipschitz. Sabemos que o problema (4.3) tem uma solução global forte u_j e tem um atrator global em $L^2(\Omega)$, Usando a teoria de semigrupos não lineares e a teoria de operadores máximos monótonos garantimos a existência de um atrator global para (4.3) o qual vai ser denotado por $\mathcal{A}_j$. (Ver [22][24] para mais detalhes).

Defina o operador $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ por

$$D(A) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ em } \partial\Omega \right\}$$

e

$$Au := -\Delta u + u$$

para todo $u \in D(A)$.

Sabemos que operador A é um operador auto-adjunto positivo em $L^2(\Omega)$ com resolvente compacto e, além disso o operador $-A$ gera um semigrupo compacto analítico em

$L^2(\Omega)$ (isto é; A é um operador setorial no sentido de Henry [16]). Se A é como acima, consideremos no espaço $L^2(\Omega)$ o seguinte problema parabólico autônomo semilinear

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = B(u) & \text{se } t > 0 \\ u(0) = u_0 \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (4.4)$$

Seja $\{S(t)u_0 := u(t, u_0)\}_{t \geq 0}$ a solução suave e única de (4.4).

Teorema 4.1. *O problema limite (4.4) tem um atrator global em $L^2(\Omega)$, denotado por $\mathcal{A}_\infty$.*

Demonstração. Pela Hipótese 3.1 junto com a condição de crescimento sublinear

$$\|B(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq (1 + \|u\|_{D(A^\alpha)}), \quad \text{para toda } u \in D(A^\alpha).$$

Segue-se o resultado. □

4.2 Estimativas Uniformes das Soluções

Nesta seção vamos fazer algumas estimativas necessárias para obter os resultados de convergência das soluções e também de existência de atrator para o problema (4.2).

Proposição 4.1. *Consideremos b e B de constante de Lipschitz $L < \frac{1}{2^{p_1^+}(|\Omega| + 1)^2}$ e sejam $p_j^-, p_j^+ \in [2, p_0]$, $p_0 > 2$ para qualquer j . Então existe uma bola M_0 de raio R_0 a qual não depende de j , tal que para qualquer conjunto limitado D em $L^2(\Omega)$ existe um tempo $T = T(D)$ tal que $u_j \in M_0$ se $t \geq T$ para qualquer $j \in \mathbb{N}$ e $u_j(0) = u_{0j} \in D$. Também, para qualquer conjunto limitado D existe uma constante $R = R(D)$ tal que $\|u_j(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq R$, para todo $t \geq 0$, $j \in \mathbb{N}$ e $u_j(0) = u_{0j} \in D$.*

Demonstração. Seja $\tau > 0$ multiplicando $u_j(\tau)$ na equação (4.3) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \frac{d}{d\tau} \langle u(\tau), u(\tau) \rangle \\ &= \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} u(\tau) u(\tau) dt \\ &= \int_{\Omega} \frac{du_j(\tau)}{d\tau} u(\tau) dt + \int_{\Omega} u(\tau) \frac{du_j(\tau)}{d\tau} dt \\ &= 2 \left\langle \frac{du_j(\tau)}{d\tau}, u(\tau) \right\rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle Au_j(\tau), u_j(\tau) \rangle &= \int_{\Omega} |\nabla u_j(\tau)|^{p_j(x)-2} \nabla u_j(\tau) \cdot \nabla u_j(\tau) dx + \int_{\Omega} |u_j(\tau)|^{p_j(x)-2} u_j(\tau) \cdot u_j(\tau) dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_j(\tau)|^{p_j(x)} dx + \int_{\Omega} |u_j(\tau)|^{p_j(x)} dx.\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle B_j(\tau), u_j(\tau) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} |\nabla u_j(\tau)|^{p_j(x)} dx + \int_{\Omega} |u_j(\tau)|^{p_j(x)} dx. \quad (4.5)$$

Como B é Lipschitz e usando a Desigualdade de Cauchy-Bunyakowsky-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}\langle B(u_j(\tau), u_j(\tau)) \rangle &= \langle B(u_j(\tau)) - B(0) + B(0), u_j(\tau) \rangle \\ &= \langle B(u_j(\tau)) - B(0), u_j(\tau) \rangle + \langle B(0), u_j(\tau) \rangle \\ &\leq \|B(u_j(\tau)) - B(0)\|_{L^2(\Omega)} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)} + \|B(0)\|_{L^2(\Omega)} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq L \|u_j(\tau) - 0\|_{L^2(\Omega)} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)} + \|B(0)\|_{L^2(\Omega)} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq L \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|B(0)\|_{L^2(\Omega)} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\langle B_j(\tau), u_j(\tau) \rangle &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} |\nabla u_j(\tau)|^{p_j(x)} dx + \int_{\Omega} |u_j(\tau)|^{p_j(x)} dx \\ &\leq L \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|B(0)\|_{L^2(\Omega)} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \quad (4.6)$$

Vamos usar agora o seguinte lema.

Lema 4.1. *Para todo $v \in W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)$ tem-se*

$$\langle A_j v, v \rangle_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)^*, W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)} \geq \frac{1}{2^{p^+}} \begin{cases} \|v\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)}^{p^+} & \text{se } \|v\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)} < 1 \\ \|v\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)}^{p^-} & \text{se } \|v\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)} \geq 1. \end{cases}$$

Veja capítulo 2.

Continuando a prova. Vamos assumir agora que $\|u_j(\tau)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)} \geq 1$, e usando o Lema 4.1 temos

$$\langle B(u_j(\tau)), u_j(\tau) \rangle \geq \frac{1}{2^{p^+}} \|u_j(\tau)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)}^{p^-},$$

em particular, da desigualdade (4.6)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq L \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_0 \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Em que $C_0 := \|B(0)\|_{L^2(\Omega)} \geq 0$. Portanto,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq -\frac{1}{2^{p^+}} \|u_j(\tau)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)}^{p_j^-} + L \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_0 \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.7)$$

Lembremos que $p_j^- := \inf \{p_j : j \in \mathbb{N}\} \geq 2$, $p_j^+ := \sup \{p_j : j \in \mathbb{N}\}$ e $2 \leq p_j(x) \leq p_1(x) \leq p_0$ para todo $x \in \Omega$. Portanto,

$$\|u_j(\tau)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)}^2 \leq \|u_j(\tau)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)}^{p_j^-}$$

então, $-\|u_j(\tau)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)}^2 \geq -\|u_j(\tau)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)}^{p_j^-}$ pois $\|u_j(\tau)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)} \geq 1$. Além disso, como $2 \leq p_j(x) \leq p_1(x) \leq p_0$, então $2^{p_j^+} \leq 2^{p_1^+}$. Pois, $\frac{1}{2^{p_1^+}} \leq \frac{1}{2^{p_j^+}}$, portanto,

$$-\frac{1}{2^{p_1^+}} \|u_j(\tau)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)}^2 \leq -\frac{1}{2^{p_j^+}} \|u_j(\tau)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)}^{p_j^-}.$$

Da desigualdade anterior combinado com (4.7) segue-se,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq -\frac{1}{2^{p_1^+}} \|u_j(\tau)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)}^2 + L \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_0 \frac{\epsilon}{\epsilon} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Note que, $|\Omega| + 1 \geq 1$ então $(|\Omega| + 1)^2 \geq 1$, portanto,

$$-\frac{1}{2^{p_1^+} (|\Omega| + 1)^2} \|u_j(\tau)\|_{W^{1,p_1(\cdot)}(\Omega)}^2 \leq -\frac{1}{2^{p_1^+}} \|u_j(\tau)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)}^2.$$

Logo, o anterior combinado com (4.7) obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq -\frac{1}{2^{p_1^+} (|\Omega| + 1)^2} \|u_j(\tau)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)}^2 \\ &\quad + L \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_0 \frac{\epsilon}{\epsilon} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Agora, pela Desigualdade de Young, como $\|C_0\|_{L^2(\Omega)} \geq 0$ e $\|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \geq 0$ tem-se para $\epsilon > 0$ que

$$C_0 \frac{\epsilon}{\epsilon} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{C_0}{\epsilon} \right)^2 + \frac{1}{2} \epsilon^2 \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Então juntando a desigualdade anterior com a desigualdade (4.8) tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq -\frac{1}{2^{p_1^+}(|\Omega|+1)^2} \|u_j(\tau)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)}^2 + L \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{C_0}{\epsilon}\right)^2 + \frac{1}{2} \epsilon^2 \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \left(-\frac{1}{2^{p_1^+}(|\Omega|+1)^2} + L + \frac{1}{2} \epsilon^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{C_0}{\epsilon}\right)^2.
\end{aligned}$$

Agora, tomando $\epsilon := \epsilon_0 > 0$ o suficientemente pequeno e tomando

$$\alpha := \frac{1}{2^{(p_1^++1)}(|\Omega|+1)^2} - \frac{1}{2}L > 0,$$

temos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq -\alpha \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1,$$

em que $C_1 := \frac{1}{2} \left(\frac{C_0}{\epsilon_1}\right)^2$. Como a função exponencial é crescente para números positivos vale o seguinte

$$\frac{d}{d\tau} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{2\alpha\tau} \leq -2\alpha \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{2\alpha\tau} + 2C_1 e^{2\alpha\tau},$$

então

$$\frac{d}{d\tau} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{2\alpha\tau} + 2\alpha \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{2\alpha\tau} \leq 2C_1 e^{2\alpha\tau}.$$

Vamos estudar agora o caso onde $\|u_j(\tau)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)} < 1$, Como $|\Omega| + 1 \geq 1$ temos que $\|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \leq (|\Omega| + 1) \|u_j(\tau)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)} \leq |\Omega| + 1$. Então, usando (4.7) tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq -\frac{1}{2^{p^+}} \underbrace{\|u_j(\tau)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)}^{p^-}}_{<1} + L \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_0 \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq L(|\Omega| + 1)^2 + C_0(|\Omega| + 1).
\end{aligned}$$

Em que $C_0 := \|B(0)\|_{L^2(\Omega)} \geq 0$. Agora, consideremos a seguinte sequência $y_j(\tau) := \|u_j(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2$ e temos que existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\frac{d}{d\tau} [y_j(\tau) e^{2\alpha\tau}] \leq C_3 e^{2\alpha\tau}.$$

Integrando entre 0 e t temos

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} [y_j(\tau)e^{2\alpha\tau}] d\tau \leq \int_0^t C_3 e^{2\alpha\tau} d\tau.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo tem-se

$$y_j(t)e^{2\alpha t} - y_j(0) \underbrace{e^{2\alpha 0}}_{=1} \leq \frac{C_3}{2\alpha} e^{2\alpha t} - \frac{C_3}{2\alpha} \underbrace{e^{2\alpha 0}}_{=1}.$$

Então

$$\begin{aligned} y_j(t)e^{2\alpha t} &\leq y_j(0) + \frac{C_3}{2\alpha} e^{2\alpha t} - \frac{C_3}{2\alpha} \\ &\leq |u_{0j}|^2 + \frac{C_3}{2\alpha} e^{2\alpha t}. \end{aligned}$$

Multiplicando por $e^{-2\alpha t}$ obtemos

$$\begin{aligned} \|u_j(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= y_j(t) \\ &\leq \|u_{0j}\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2\alpha t} + \frac{C_3}{2\alpha} \\ &\leq \|u_{0j}\|_{L^2(\Omega)}^2 e^0 + \frac{C_3}{2\alpha}. \end{aligned}$$

Portanto, $u_{0j} \in D$ e D é limitado, isto é, existe $r_0 > 0$ tal que $\|u_j(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq r_0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ então

$$\|u_j(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq R := \left(r_0^2 + \frac{C_3}{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ para todo } t \geq 0 \text{ e todo } j \in \mathbb{N}.$$

□

O seguinte teorema fornece algumas estimativas para as soluções de (4.2).

Teorema 4.2. *Considere b e B com constante Lipschitz $L < \frac{1}{2^{p_1^+}(|\Omega| + 1)^2}$. Sejam $p_j^-, p_j^+ \in [2, p_0]$, $p_0 > 2$ para qualquer j . Então existem constantes $r_1, R_1 > 0$ e um conjunto compacto K_0 de $L^2(\Omega)$ o qual não depende de j , tal que para qualquer conjunto limitado D de $L^2(\Omega)$ existe um tempo $\bar{T} = \bar{T}(D)$ tal que*

$$\varphi_j(u_j(t)) \leq r_1 \tag{4.9}$$

$$\|u_j(t)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)} \leq R_1 \tag{4.10}$$

e

$$u_j(t) \in K_0. \tag{4.11}$$

Para todo $t \geq \bar{T}$ e qualquer solução u_j de (4.2) com $u_{0j} \in D$. Também para qualquer conjunto limitado D de $L^2(\Omega)$ e qualquer $r > 0$ existem $r_2(D, r), R_2(D, r)$ tal que

$$\varphi_j(u_j(t)) \leq r_2 \quad (4.12)$$

e

$$\|u_j(t)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)} \leq R_2. \quad (4.13)$$

Para todo $t \geq \bar{T}$ e qualquer solução u_j de (4.2) com $u_{0j} \in D$. Além disso, se $\varphi_j(u_{0j}) \leq r_0$, para qualquer $u_{0j} \in D$ e $j \in \mathbb{N}$, então existe uma constante $k = k(r_0, D)$ tal que $\|u_j(t)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)} \leq k$, para todo $t \geq 0$ e qualquer solução u_j de (4.2).

Demonstração. Passo 1: O Lema 2.1 é chave para começar a obter nossas estimativas. Usando a Proposição 4.1 obtemos as seguintes desigualdades

$$\frac{d}{dt}\varphi(u_j(t)) \leq \frac{1}{2} \left(\underbrace{LR + \|B(0)\|_{L^2(\Omega)}}_{K_1} \right)^2 =: \frac{1}{2} K_1^2. \quad (4.14)$$

Para cada $t \geq T$ e cada $j \in \mathbb{N}$. A outra desigualdade importante será

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_j(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varphi_j(u_j(t)) \leq K_1 R, \quad (4.15)$$

em que R é a constante é a mesma dada pela Proposição 4.1. De fato, vamos usar a seguinte igualdade do Lema 2.1.

$$\frac{d}{dt}\varphi_j(u(t)) = \left\langle \partial\varphi_j(u(t)), \frac{du}{dt}(t) \right\rangle. \quad (4.16)$$

Da anterior igualdade (4.16) e de que $A_j = \partial\varphi_j$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi_j(u_j(t)) &= \left\langle B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t), \frac{du_j}{dt}(t) \right\rangle \\
&= \left\langle B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t), \frac{du_j}{dt}(t) - B(u_j(t)) + B(u_j(t)) \right\rangle \\
&= \left\langle B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t), - \left(B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t) \right) - B(u_j(t)) \right\rangle \\
&= \left\langle B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t), - \left(B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t) \right) \right\rangle + \left\langle B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t), B(u_j(t)) \right\rangle \\
&= - \left\| B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\langle B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t), B(u_j(t)) \right\rangle \\
&\stackrel{CBS}{\leq} - \left\| B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \|B(u_j(t))\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Então, usando a Desigualdade de Young temos

$$\left\| B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \|B(u_j(t))\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \left\| B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|B(u_j(t))\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Segue-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi_j(u_j(t)) &\leq - \left\| B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \|B(u_j(t))\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq - \left\| B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left\| B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|B(u_j(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= -\frac{1}{2} \left\| B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|B(u_j(t))\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\varphi_j(u_j(t)) + \frac{1}{2} \left\| B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|B(u_j(t))\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Agora, pela Desigualdade Triangular obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|B(u_j(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \frac{1}{2} \|B(u_j(t)) - B(0) + B(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\|B(u_j(t)) - B(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|B(0)\|_{L^2(\Omega)} \right)^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi_j(u_j(t)) + \frac{1}{2} \left\| B(u_j(t)) - \frac{du_j}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{2} \|B(u_j(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\|B(u_j(t)) - B(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|B(0)\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \\
&\stackrel{\substack{\leq \\ B \text{ é Lipschitz}}}{\leq} \frac{1}{2} \left(\underbrace{L \|u_j(t)\|_{L^2(\Omega)}}_{\leq R} + \|B(0)\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \left(LR + \|B(0)\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 =: \frac{1}{2} K_1^2.
\end{aligned}$$

Para cada $t \geq T$ e todo $j \in \mathbb{N}$. Com isso está provada (4.14).

Passo 2: Agora vamos provar (4.15). Usando a definição de subdiferencial temos

$$\varphi_j(u_j(t)) \leq \langle \partial\varphi_j(u_j(t)), u_j(t) \rangle$$

Sabemos que $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_j(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left\langle \frac{du_j}{dt}(t), u_j(t) \right\rangle$ então, junto com a definição de subdiferencial segue-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_j(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varphi_j(u_j(t)) &\leq \left\langle \frac{du_j}{dt}(t), u_j(t) \right\rangle + \langle \partial\varphi_j(u_j(t)), u_j(t) \rangle \\
&= \left\langle \underbrace{\partial\varphi_j(u_j(t)) + \frac{du_j}{dt}(t)}_{=B(u_j(t))}, u_j(t) \right\rangle \\
&= \langle B(u_j(t)), u_j(t) \rangle \\
&\stackrel{CBS}{\leq} \underbrace{\|B(u_j(t))\|_{L^2(\Omega)}}_{< K_1} \underbrace{\|u_j(t)\|_{L^2(\Omega)}}_{< R} \\
&\leq K_1 R.
\end{aligned}$$

Para cada $t \geq T(D)$ e cada $j \in \mathbb{N}$. Isso prova a desigualdade (4.15).

Passo 3: Fixando $r > 0$ e integrando ambos lados da desigualdade (4.15) no intervalo $(t, t+r)$ para $t \geq T(d)$ conseguimos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_j(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varphi_j(u_j(t)) \leq K_1 R \\
& \int_t^{t+r} \frac{d}{dt} \|u_j(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_t^{t+r} \varphi_j(u_j(s)) ds \leq \int_t^{t+r} K_1 R ds \\
& \frac{1}{2} \left(\|u_j(t+r)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_j(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \int_t^{t+r} \varphi_j(u_j(s)) ds \leq K_1 R r \\
& \frac{1}{2} \|u_j(t+r)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_t^{t+r} \varphi_j(u_j(s)) ds \leq \frac{1}{2} \|u_j(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + K_1 R r.
\end{aligned}$$

Em particular, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+r} \varphi_j(u_j(s)) ds & \leq \frac{1}{2} \underbrace{\|u_j(t)\|_{L^2(\Omega)}^2}_{\leq R} + K_1 R r \\
& \leq \frac{1}{2} R^2 + K_1 R r.
\end{aligned}$$

Para $s \in (t, t+r)$ integrando (4.14) sob o intervalo $(s, t+r)$ obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \varphi_j(u_j(t)) \leq \frac{1}{2} K_1^2 \\
& \int_s^{t+r} \frac{d}{dt} \varphi_j(u_j(x)) dx \leq \int_s^{t+r} K_1^2 dx \\
& \varphi_j(u_j(t+r)) \leq \varphi_j(u_j(s)) + \frac{1}{2} K_1^2 \underbrace{(t+r-s)}_{< r} \\
& \leq \varphi_j(u_j(s)) + \frac{1}{2} K_1^2 r.
\end{aligned}$$

Integrando novamente (4.14) no intervalo $(t, t+r)$ tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \varphi_j(u_j(t)) \leq \frac{1}{2} K_1^2 \\
& \int_s^{t+r} \frac{d}{dt} \varphi_j(u_j(x)) dx \leq \int_s^{t+r} K_1^2 dx \\
& \varphi_j(u_j(t+r)) \leq \varphi_j(s) + \frac{1}{2} K_1^2 r \\
& r \varphi_j(u_j(t+r)) \leq \int_t^{t+r} \varphi_j(u_j(s)) ds + \frac{1}{2} K_1^2 r^2 \\
& r \varphi_j(u_j(t+r)) \leq \frac{1}{2} R^2 + K_1 R r + \frac{1}{2} K_1^2 r^2 \\
& \varphi_j(u_j(t+r)) \leq \frac{1}{2r} R^2 + K_1 R + \frac{1}{2} K_1^2 r := r_1,
\end{aligned}$$

se $t \geq T(D)$.

Passo 4: Lembremos que $A_j = \partial\varphi_j$ é um subdiferencial da função $\varphi_j(u) : L^2(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definido assim

$$\varphi_j(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} \frac{1}{p_j(x)} |\nabla u_j(t, x)|^{p_j(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p_j(x)} |u_j(t, x)|^{p_j(x)} dx & \text{se } u \in W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega) \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, pelo anterior temos

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p_j(x)} |\nabla u_j(t, x)|^{p_j(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p_j(x)} |u_j(t, x)|^{p_j(x)} dx \leq r_1,$$

se $t \geq \overline{T}(d) + r$. Além disso, lembre que $p_j := \sup_{j \in \mathbb{N}} p_j$, então temos que $p_j \leq p_j^+$, portanto

$\frac{1}{p_j^+} \leq \frac{1}{p_j}$. Com isso e a desigualdade de acima, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{p_j^+(x)} |\nabla u_j(t, x)|^{p_j(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p_j^+(x)} |u_j(t, x)|^{p_j(x)} dx \\ \leq \int_{\Omega} \frac{1}{p_j(x)} |\nabla u_j(t, x)|^{p_j(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p_j(x)} |u_j(t, x)|^{p_j(x)} dx \\ \leq r_1. \end{aligned}$$

Escrevendo com a notação do modular, isto é,

$$\frac{1}{p_j^+} [\rho_j(\nabla u_j(t)) + \rho_j(u_j(t))] \leq r_1.$$

Logo

$$\rho_j(\nabla u_j(t)) + \rho_j(u_j(t)) \leq p_j^+ r_1.$$

Se $t \geq \overline{T}(D)$. Daqui segue-se que existe $R > 0$ tal que

$$\|u_j(t)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)} \leq R, \quad \text{se } t \geq \overline{T}(D). \quad (4.17)$$

Tendo em conta que existe $K(\Omega)$ tal que

$$\|u_j(t)\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \leq K(\Omega) \|u_j(t)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)}.$$

Para qualquer $u \in W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)$. (Veja 2.8, pois $\mathcal{H}^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$). Conseguimos uma bola K_0 de raio $\tilde{R} = K(\Omega)R$ no espaço $\mathcal{H}^1(\Omega)$ definido por

$$K_0 = \left\{ y \in \mathcal{H}^1(\Omega) : \|y\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \leq \tilde{R} \right\}.$$

Do Teorema 2.9 a imersão de $\mathcal{H}^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ é compacta, portanto; K_0 é um conjunto compacto de $L^2(\Omega)$.

Para provar as últimas desigualdades do teorema, o argumento é totalmente análogo, só basta trocar a constante R por $R(D)$ na proposição 4.1 e $T(D)$ por 0 e utilizando os mesmos argumentos usados anteriormente.

Passo 5: Agora, vamos provar o que acontece com os conjuntos limitados. Seja D é um conjunto limitado de $L^2(\Omega)$, então existe um tempo $\bar{T}(D)$ tal que satisfaz

$$\|u_j(t)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)} \leq R, \quad \text{se} \quad t \geq \bar{T}(D).$$

Para qualquer solução u_j de (4.2) com $u_{0j} \in D$, integrando entre $(0, t)$ com $t \leq \bar{T}(D)$ e usando o fato que $\varphi_j(u_{0j}) \leq r_0$ para qualquer $u_{0j} \in D$ e $j \in \mathbb{N}$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{ds} \varphi_j(u_j(s)) ds &\leq \int_0^t \frac{1}{2} K_1^2 ds \\ &\leq \frac{1}{2} K_1^2 \bar{T}(D). \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned} \varphi_j(u_j(t)) &\leq \underbrace{\varphi_j(u_j(0))}_{\leq r_0} + \frac{K_1}{2} \bar{T}(D) \\ &\leq r_0 + \frac{K_1}{2} \bar{T}(D) \\ &:= \gamma(r_0, D). \end{aligned}$$

Para todo $t \in [0, \bar{T}(D)]$. Argumentando como na prova da primeira desigualdade, temos que existe uma constante $k_1 = k_1(R_0, D)$ tal que

$$\|u_j(t)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)} \leq k_1, \quad \text{para todo} \quad t \in [0, \bar{T}(D)].$$

Então da desigualdade anterior e de (4.17), temos que

$$\|u_j(t)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)} \leq k, \quad \text{para todo} \quad t \geq 0.$$

Em que $k = k(r_0, D) = \max \{k_1, R\}$. Isso conclui nossa demonstração. □

No seguinte corolário provamos que a união de todos eles é um conjunto compacto de $L^2(\Omega)$.

Corolário 4.1. *O conjunto $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_j}$ é compacto no espaço $L^2(\Omega)$.*

Demonstração. Pela prova do Teorema 4.2 o conjunto $K_0 = \left\{ y \in \mathcal{H}^1(\Omega) : \|y\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \leq \tilde{R} \right\}$ é um conjunto compacto em $L^2(\Omega)$. O conjunto K_0 é um atrator limitado de $L^2(\Omega)$. Pela minimalidade do atrator K_0 , então $\mathcal{A}_j \subset K_0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, logo

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_j \subset \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_j} \subset \underbrace{\overline{K_0}}_{K_0 \text{ é compacto}} = K_0.$$

A última igualdade é válida, pois todo conjunto compacto é fechado. Logo $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_j}$ é um conjunto fechado dentro de um conjunto compacto, logo $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_j}$ é compacto em $L^2(\Omega)$. $\square$

4.3 Continuidade do Fluxo e Semicontinuidade Superior dos Atratores

Nosso objetivo nesta seção é provar que o problema limite (4.3) quando $j \rightarrow \infty$ é descrito pela equação parabólico semilinear em (4.4). Vamos provar a continuidade do fluxo e semicontinuidade superior da família de atratores globais quando $j \rightarrow \infty$ para o problema (4.2) com respeito aos parâmetros p_j . O seguinte resultado garante-nos que (4.4) é de fato o problema limite para (4.3) quando $j \rightarrow \infty$.

Teorema 4.3. *Seja u_j uma solução de (4.3) com $u_j(0) = u_{0j} \rightarrow u_0$ em $L^2(\Omega)$ quando $j \rightarrow \infty$ e $\varphi_j(u_{0j}) \leq r_0$ para todo j . Então existe uma solução u de (4.4) com $u(0) = u_0$ e uma subsequência $\{u_{j_n}\}_n$ de $\{u_j\}_j$ tal que, para cada $T > 0$, $u_{j_n} \rightarrow u$ em $C([0, T], L^2(\Omega))$ quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Passo 1: Seja $T > 0$ fixo. Lembremos que estamos estudando o problema (4.3);

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + A_j = B(u) & t > 0 \\ u(0) = u_0 \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

em que $B : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é globalmente Lipschitz. Seja também u_j uma solução para (4.3), com $u_j(0) = u_{0j} \rightarrow u_0$ em $L^2(\Omega)$ quando $j \rightarrow \infty$. Como $A_j = \partial\varphi_j$ então de (4.3) temos

$$\frac{du_j}{dt} + \partial\varphi_j(u_j) = B(u_j); \quad \text{para quase todo } t \in (0, T).$$

Agora, usando a igualdade dada no Lema 2.1, vamos ter que

$$\left\langle \partial \varphi_j(u_j(t)), \frac{du_j}{dt}(t) \right\rangle = \frac{d}{dt} \varphi_j(u_j(t)). \quad (4.18)$$

Tome $\epsilon > 0$ arbitrário. Tomando produto escalar com $\frac{du_j}{dt}$ obtemos

$$\left\langle \frac{du_j}{dt}(t), \frac{du_j}{dt}(t) \right\rangle + \left\langle \partial \varphi_j(u_j(t)), \frac{du_j}{dt}(t) \right\rangle = \left\langle B(u_j(t)), \frac{du_j}{dt}(t) \right\rangle.$$

Pela definição da norma e a igualdade (4.18) e integrando sobre (ϵ, T) obtemos

$$\int_{\epsilon}^T \left\| \frac{du_j(t)}{dt} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_{\epsilon}^T \frac{d}{dt} \varphi_j(u_j(t)) dt = \int_{\epsilon}^T \left\langle B(u_j(t)), \frac{du_j}{dt} \right\rangle dt.$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_{\epsilon}^T \left\| \frac{du_j}{dt} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \varphi_j(u_j(T)) - \varphi_j(u_j(\epsilon)) = \int_{\epsilon}^T \left\langle B(u_j(t)), \frac{du_j}{dt} \right\rangle dt. \quad (4.19)$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Bunyakowsky-Schwarz

$$\int_{\epsilon}^T \left\langle B(u_j(t)), \frac{du_j}{dt} \right\rangle dt \leq \int_{\epsilon}^T \|B(u_j(t))\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{du_j}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Omega)} dt.$$

Note que $\|B(u_j(t))\|_{L^2(\Omega)}, \left\| \frac{du_j}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \geq 0$. Então, usando a Desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^T \|B(u_j(t))\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{du_j}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Omega)} dt &\leq \int_{\epsilon}^T \left(\frac{1}{2} \|B(u_j(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{du_j}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^T \|B(u_j(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^T \left\| \frac{du_j}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Logo, juntando a desigualdade anterior com a igualdade (4.19) obtemos a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{2} \int_{\epsilon}^T \left\| \frac{du_j}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \varphi_j(u_j(T)) \leq \varphi_j(u_j(\epsilon)) + \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^T \|B(u_j(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Passo 2: Agora, usando Teorema 4.2 que diz que existe uma constante ϵ -dependente c_{ϵ} tal que $\varphi_j(u_j(t)) \leq c_{\epsilon}$ e pela Proposição 4.1 existe uma constante C tal que

$$\frac{1}{2} \int_{\epsilon}^T \|B(u_j(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C.$$

Portanto, segue-se,

$$\int_{\epsilon}^T \left\| \frac{du_j}{dt}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq c_{\epsilon} + CT, \quad \text{Para todo } t \in [\epsilon, T].$$

Logo, $\frac{du_j}{dt}$ é limitada para todo j em $L^2(\epsilon, T; L^2(\Omega))$. Também, pelo Teorema 4.2 temos, u_j é limitada para todo j em $L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))$. Pelo Teorema 1.8 obtemos as seguintes convergências.

Como $L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))$ não é reflexivo nossa convergência vai ser fraca *. Isto é, existe uma subsequência $\{u_{j_n}\}_n$ de $\{u_j\}_j$ em $L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))$ que converge fracamente * para u . Isto é,

$$u_{j_n} \longrightarrow u \quad \text{fracamente}^* \quad \text{em } L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)).$$

Como $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ é reflexivo, então

$$u_{j_n} \longrightarrow u \quad \text{fracamente} \quad \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Também tem-se,

$$\frac{du_{j_n}}{dt} \longrightarrow \frac{du}{dt} \quad \text{fracamente} \quad \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Logo, essa função u é nossa candidata para ser a solução do problema limite que estamos estudando. Vamos provar rigorosamente que de fato ela é solução do problema limite. Pelo Teorema 4.2, existe uma ϵ -dependente constante R_{ϵ} tal que

$$\|u_j(t)\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \leq K \|u_j(t)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)} \leq R_{\epsilon}, \quad \text{para todo } t \in [\epsilon, T],$$

em que $\mathcal{H}^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$. Pelo Teorema 2.9 imersão de $\mathcal{H}^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ é compacta e contínua, implica que para qualquer $t \in [\epsilon, T]$ a sequência $\{u_{j_n}(t)\}_n$ é relativamente compacta em $L^2(\Omega)$. Então, pelo Teorema de Ascoli-Arzelá existe uma subsequência (que denotaremos da mesma maneira) tal que

$$u_{j_n} \longrightarrow u \quad \text{em } C([\epsilon, T]; L^2(\Omega)).$$

Também, a função u é absolutamente contínua em $[\epsilon, T]$.

Passo 3: Vamos provar que u é uma solução integral para o problema limite (4.4) (e, portanto, uma solução forte) no intervalo (ϵ, T) . Pela Proposição 3.6 de [6] precisamos provar que a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\frac{1}{2} \|u_{j_n}(t) - \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|u_{j_n}(s) - \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_s^t \langle B(u_{j_n}(\tau)) + \Delta_{p_{j_n}(x)}(\phi), u_{j_n}(\tau) - \phi \rangle d\tau. \quad (4.20)$$

Para toda $\phi \in D(A_{j_n})$ e $0 \leq s \leq t \leq T$.

Nossa ideia agora é tomar limite quando $n \rightarrow +\infty$ ($p_{j_n} \rightarrow 2$) na desigualdade (4.20). Agora, como $L^2(\epsilon, T; L^2(\Omega))$ é um espaço de Banach reflexivo e pela definição de B está definido em $L^2(\epsilon, T; L^2(\Omega))$. Logo, a sequência $\{B \circ u_{j_n}\}_n$ é uma sequência em $L^2(\epsilon, T; L^2(\Omega))$, além disso $\{B \circ u_{j_n}\}_n$ é uma sequência limitada (pois B é limitada e $\{u_{j_n}\}_n$ também é limitada pois ela é convergente). Logo, pelo Teorema 1.8 existe $w \in L^2(\epsilon, T; L^2(\Omega))$ tal que

$$B \circ u_{j_n} \rightharpoonup w \quad \text{em} \quad L^2(\epsilon, T; L^2(\Omega)).$$

Então, como B é contínua (pois é limitada e Lipschitz) e $u_{j_n} \rightarrow u$ em $L^2(\Omega)$ segue-se $B(u_{j_n}(t)) \rightarrow B(u(t))$. Portanto, tem-se pela unicidade do limite que $w = B \circ u$, então

$$B \circ u_{j_n} \rightharpoonup B \circ u \quad \text{em} \quad L^2(\epsilon, T; L^2(\Omega)).$$

Agora, observe que $B \circ u_{j_n} \rightharpoonup B \circ u$ em $L^2(\epsilon, T; L^2(\Omega))$ implica que

$$B \circ u_{j_n} \rightharpoonup B \circ u \quad \text{em} \quad L^2(s, t; L^2(\Omega)), \quad \text{para todo} \quad \epsilon \leq s \leq t \leq T$$

e $u_{j_n} \rightarrow u$ em $C(\epsilon, T; L^2(\Omega))$ implica que $u_{j_n} \rightarrow u$ em $C([s, t]; L^2(\Omega))$, consequentemente

$$u_{j_n} \rightarrow u \quad \text{em} \quad L^2(s, t; L^2(\Omega)), \quad \epsilon \leq s \leq t \leq T$$

logo, como $\langle \cdot \rangle$ é uma função contínua tem-se

$$\langle B \circ u_{j_n} - h, u_{j_n} - \theta \rangle_{L^2(s, t; L^2(\Omega))} \rightarrow \langle B \circ u - h, u - \theta \rangle_{L^2(s, t; L^2(\Omega))},$$

para todos $\theta, h \in L^2(\Omega)$.

Agora, consideremos $\bar{\theta} \in C_0^\infty(\Omega) \subset D(A_{j_n}) \subset L^2(\Omega)$ e seja $\bar{h} := A(\bar{\theta}) \in L^2(\Omega)$ usando a desigualdade (4.20) obtemos que,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|u_{j_n}(t) - \bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{2} \|u_{j_n}(s) - \bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_s^t \langle B(u_{j_n}(\tau)) + A_{j_n}(\bar{\theta}), u_{j_n}(\tau) - \bar{\theta} \rangle d\tau \\
&= \frac{1}{2} \|u_{j_n}(s) - \bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_s^t \langle B(u_{j_n}(\tau)) - \bar{h} + \bar{h} + A_{j_n}(\bar{\theta}), u_{j_n}(\tau) - \bar{\theta} \rangle d\tau \\
&= \frac{1}{2} \|u_{j_n}(s) - \bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_s^t \langle B(u_{j_n}(\tau)) - \bar{h}, u_{j_n}(\tau) - \bar{\theta} \rangle d\tau \\
&\quad + \int_s^t \langle \bar{h} + A_{j_n}(\bar{\theta}), u_{j_n}(\tau) - \bar{\theta} \rangle d\tau. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Passo 4:

Afirmação: Vamos provar o seguinte limite

$$\int_s^t \langle \bar{h} + A_{j_n}(\bar{\theta}), u_{j_n}(\tau) - \bar{\theta} \rangle d\tau \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

De fato, para cada $\tau > \epsilon$. Usando a definição de A e A_{j_n} e as propriedades da integral e o valor absoluto tem-se

$$\begin{aligned}
&|\langle \bar{h} - A_{j_n}(\bar{\theta}), u_{j_n}(\tau) - \bar{\theta} \rangle| \\
&= |\langle A(\bar{\theta}) - A_{j_n}(\bar{\theta}), u_{j_n}(\tau) - \bar{\theta} \rangle| \\
&= |\langle A(\bar{\theta}), u_{j_n}(\tau) - \bar{\theta} \rangle - \langle A_{j_n}(\bar{\theta}), u_{j_n}(\tau) - \bar{\theta} \rangle| \\
&= \left| \int_{\Omega} (|\nabla \bar{\theta}|^0 \nabla \bar{\theta} \cdot \nabla (u_{j_n}(\tau) - \bar{\theta})) dx + \int_{\Omega} (|\bar{\theta}|^0 \bar{\theta} \cdot (u_{j_n}(\tau) - \bar{\theta})) dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega} (|\nabla \bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)-2} \nabla \bar{\theta} \cdot \nabla (u_{j_n}(\tau) - \bar{\theta})) dx - \int_{\Omega} (|\bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)-2} \bar{\theta} \cdot (u_{j_n}(\tau) - \bar{\theta})) dx \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} (\nabla \bar{\theta} \cdot \nabla u_{j_n}(\tau) - |\nabla \bar{\theta}|^2) dx - \int_{\Omega} |\nabla \bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)-2} (\nabla \bar{\theta} \cdot \nabla u_{j_n}(\tau) - |\nabla \bar{\theta}|^2) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} (\bar{\theta} \cdot u_{j_n}(\tau) - |\bar{\theta}|^2) dx - \int_{\Omega} |\bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)-2} (\bar{\theta} \cdot u_{j_n}(\tau) - |\bar{\theta}|^2) dx \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} (\nabla u_{j_n}(\tau) \cdot (\nabla \bar{\theta} - |\nabla \bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)-2} \nabla \bar{\theta})) dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega} (|\nabla \bar{\theta}|^2 - |\nabla \bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)}) dx + \int_{\Omega} (u_{j_n}(\tau) \cdot (\bar{\theta} - |\bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)-2} \bar{\theta})) dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega} (|\bar{\theta}|^2 - |\bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)}) dx \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |\nabla u_{j_n}(\tau)| \left| |\nabla \bar{\theta}| - |\nabla \bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)-1} \right| dx - \int_{\Omega} \left| |\nabla \bar{\theta}|^2 - |\nabla \bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)} \right| dx \\
&\quad + \int_{\Omega} |u_{j_n}(\tau)| \left| |\bar{\theta}| - |\bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)-1} \right| dx - \int_{\Omega} \left| |\bar{\theta}|^2 - |\bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)} \right| dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|\langle \bar{h} - A_{j_n}(\bar{\theta}), u_{j_n}(\tau) - \bar{\theta} \rangle| &\leq \int_{\Omega} |\nabla u_{j_n}(\tau)| \left| |\nabla \bar{\theta}| - |\nabla \bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)-1} \right| dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \left| |\nabla \bar{\theta}|^2 - |\nabla \bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)} \right| dx \\
&\quad + \int_{\Omega} |u_{j_n}(\tau)| \left| |\bar{\theta}| - |\bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)-1} \right| dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \left| |\bar{\theta}|^2 - |\bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)} \right| dx.
\end{aligned}$$

Agora, note que quando $n \rightarrow \infty$ temos que $p_{j_n} \rightarrow 2$, para cada $x \in \Omega$. Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\int_{\Omega} \left| |\nabla \bar{\theta}|^2 - |\nabla \bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)} \right| dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

e

$$\int_{\Omega} \left| |\bar{\theta}|^2 - |\bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)} \right| dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Agora, vamos ver o que acontece com outros membros da desigualdade anterior. Usando o Teorema do Valor Médio para a função ($g(x) = |\nabla \bar{\theta}|^x$) (cuja derivada é dada por; $g'(x) = |\nabla \bar{\theta}|^x \ln |\nabla \bar{\theta}|$) no intervalo $[2, p_{j_n}(x)]$. Então, existe uma função $2 < \tau(n, x) < p_{j_n}(x)$ tal que

$$|\nabla \bar{\theta}|^{\tau(n, x)} \ln |\nabla \bar{\theta}| = \frac{|\nabla \bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)} - |\nabla \bar{\theta}|^2}{p_{j_n}(x) - 2},$$

então

$$\begin{aligned}
|\nabla \bar{\theta}|^{\tau(n, x)} \ln |\nabla \bar{\theta}| (p_{j_n}(x) - 2) &= \left| |\nabla \bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)} - |\nabla \bar{\theta}|^2 \right| \\
&= |\nabla \bar{\theta}| \left| |\nabla \bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)-1} - |\nabla \bar{\theta}| \right| \\
&\geq \left| |\nabla \bar{\theta}| - |\nabla \bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)-1} \right|.
\end{aligned}$$

Então, multiplicando por $|\nabla u_{j_n}(\tau)|$ e integrando sobre Ω tem-se,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \left(\left| |\nabla \bar{\theta}| - |\nabla \bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)-1} \right| \right) |\nabla u_{j_n}(\tau)| dx \\
&\leq \int_{\Omega} |\nabla \bar{\theta}|^{\tau(n, x)} \ln (|\nabla \bar{\theta}|) (p_{j_n}(x) - 2) |\nabla u_{j_n}(\tau)| dx.
\end{aligned}$$

Agora, vamos considerar o expoente conjugado para $p_{j_n}(\cdot)$, isto é, uma $q_{j_n}(\cdot)$ tal que

$\frac{1}{p_{j_n}(x)} + \frac{1}{q_{j_n}(x)} = 1$ para todo $x \in \Omega$, portanto

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| |\nabla \bar{\theta}| - |\nabla \bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)-1} \right| |\nabla u_{j_n}(\tau)| dx &\leq \int_{\Omega} |\nabla \bar{\theta}|^{\tau(n,x)} \ln(|\nabla \bar{\theta}|) (p_{j_n}(x) - 2) |\nabla u_{j_n}(\tau)| dx \\ &\leq \|p_{j_n} - 2\|_{\infty} \int_{\Omega} |\nabla \bar{\theta}|^{\tau(n,x)} \ln(|\nabla \bar{\theta}|) |\nabla u_{j_n}(\tau)| dx \\ &\leq \|p_{j_n} - 2\|_{\infty} \int_{\Omega} |\nabla \bar{\theta}|^{\tau(n,x)+1} |\nabla u_{j_n}(\tau)| dx, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \|p_{j_n} - 2\|_{\infty} \int_{\Omega} |\nabla \bar{\theta}|^{\tau(n,x)+1} |\nabla u_{j_n}(\tau)| dx &\leq \|p_{j_n} - 2\|_{\infty} \left[\int_{\Omega} \frac{1}{q_{j_n}(x)} |\nabla \bar{\theta}|^{(\tau(n,x)+1)q_{j_n}(x)} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \frac{1}{p_{j_n}(x)} |\nabla u_{j_n}(\tau)|^{p_{j_n}(x)} dx \right] \\ &\leq \|p_{j_n} - 2\|_{\infty} \left[\int_{\Omega} |\nabla \bar{\theta}|^{(\tau(n,x)+1)q_{j_n}(x)} dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{j_n}(\tau)|^{p_{j_n}(x)} dx \right], \end{aligned}$$

em que a última desigualdade é dada porque $p_{j_n} > 2$ e $\frac{1}{q_{j_n}(x)} < 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \Omega$.

Agora, usando o Teorema 4.2, que diz $\|u_j(t)\|_{W^{1,p_j(\cdot)}(\Omega)} < \infty$ a partir de certo tempo T e pela definição da norma nos espaços de Sobolev vai existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla \bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)} dx \leq C,$$

para todo $\tau \in (s, t)$ e $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, sabemos que $2 < \tau(n, x) < p_{j_n}(x) < p_0$, portanto, $3 < \tau(n, x) + 1 < p_{j_n} + 1 < p_0 + 1$ e $1 < q_{j_n}(x) < 2 < 3$ e como a função exponencial é crescente tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \bar{\theta}|^{(\tau(n,x)+1)q_{j_n}(x)} dx &= \int_{\Omega} |\nabla \bar{\theta}|^{\tau(n,x)q_{j_n}(x)} dx + \int_{\Omega} |\nabla \bar{\theta}|^{q_{j_n}(x)} dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla \bar{\theta}|^{2(p_0+1)} dx + \int_{\Omega} |\nabla \bar{\theta}|^3 dx \\ &\leq \underbrace{\tilde{C}}_{< \infty}. \end{aligned}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, considerando $\bar{C} := C + \tilde{C}$, obtemos

$$\int_{\Omega} \left(\left| |\nabla \bar{\theta}| - |\nabla \bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)-1} \right| \right) |\nabla u_{j_n}(\tau)| dx \leq \|p_{j_n} - 2\|_{\infty} \bar{C}.$$

Portanto, quando $n \rightarrow \infty$ temos que $p_{j_n} \rightarrow 2$. Como $\|p_{j_n} - 2\|_{\infty} \rightarrow 0$. Logo,

$$\int_{\Omega} \left(\left| |\nabla \bar{\theta}| - |\nabla \bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)-1} \right| \right) |\nabla u_{j_n}(\tau)| dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

De maneira totalmente análoga vamos ter

$$\int_{\Omega} \left(\left| |\bar{\theta}| - |\bar{\theta}|^{p_{j_n}(x)-1} \right| \right) |\nabla u_{j_n}(\tau)| dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Daí segue-se a demonstração da afirmação.

$$\int_s^t \langle \bar{h} + A_{j_n}, u_{j_n}(\tau) - \bar{\theta} \rangle d\tau \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Logo, tomando limite em na desigualdade (4.21) quando $n \rightarrow +\infty$, vamos obter que $u_{j_n} \rightarrow u$, então temos

$$\frac{1}{2} \|u(t) - \bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|u(s) - \bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_s^t \langle B(u(\tau)) - A(\bar{\theta}), u(\tau) - \bar{\theta} \rangle d\tau. \quad (4.22)$$

Para todo $\bar{\theta} \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\epsilon \leq s \leq t \leq T$.

Passo 5: Agora vamos usar um argumento de densidade para concluir que efetivamente u é uma solução ao problema limite (4.4) no intervalo (ϵ, T) . Para isso, é importante lembrar que o conjunto das funções de suporte compacto $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$ (veja Teorema 2.3). Portanto, existe uma sequência $\{\bar{\theta}_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty$ talque $\|\bar{\theta}_j - \bar{\theta}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$. Como a norma $M \|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)} \geq \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ para alguma constante $M > 0$, tem-se que $\|\bar{\theta}_j - \bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, aplicando o anterior na desigualdade (4.22), obtemos

$$\frac{1}{2} \|u(t) - \bar{\theta}_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|u(s) - \bar{\theta}_j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_s^t \langle B(u(\tau)) - A(\bar{\theta}_j), u(\tau) - \bar{\theta}_j \rangle d\tau.$$

Para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\epsilon \leq s \leq t \leq T$. Lembremos que $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ é uma função contínua, então

$$\frac{1}{2} \|u(t) - \bar{\theta}_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow \frac{1}{2} \|u(t) - \bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{quando } j \rightarrow \infty$$

e

$$\frac{1}{2} \|u(s) - \bar{\theta}_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow \frac{1}{2} \|u(s) - \bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{quando } j \rightarrow \infty.$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma função contínua e pelo Teorema da Convergência Dominada obtemos

$$\int_s^t \langle B(u(\tau)) - A(\bar{\theta}_j), u(\tau) - \bar{\theta}_j \rangle d\tau \longrightarrow \int_s^t \langle B(u(\tau)) - A(\bar{\theta}), u(\tau) - \bar{\theta} \rangle d\tau,$$

quando $j \longrightarrow \infty$, então, concluímos que

$$\frac{1}{2} \|u(t) - \bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|u(s) - \bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_s^t \langle B(u(\tau)) - A(\bar{\theta}), u(\tau) - \bar{\theta} \rangle d\tau.$$

Para toda $\bar{\theta} \in D(A)$ e $\epsilon \leq s \leq t \leq T$ e u é uma solução para (4.4).

Passo 6: Agora, vamos ver que $u(\cdot)$ é uma solução forte para o problema limite (4.4) no intervalo $[0, T]$ e vamos provar também que $u(t) \longrightarrow u_0$ quando $t \longrightarrow 0^+$. Seja $v(t) = e^{-t}u_0$, consideremos a diferença $v_{j_n}(t) = u_{j_n}(t) - v(t)$, derivando vamos ter

$$\begin{aligned} \frac{dv_{j_n}}{dt} &= \frac{d}{dt} (u_{j_n} - v) = \frac{du_{j_n}}{dt} - \frac{dv}{dt} \\ &= -A_{j_n}(u_{j_n}) + B(u_{j_n}(t)) - \frac{d}{dt} (e^{-t}u_0) \\ &= -A_{j_n}(u_{j_n}) + B(u_{j_n}(t)) + v \\ &= -A_{j_n}(u_{j_n}) - A_{j_n}(v) + A_{j_n}(v) + B(u_{j_n}(t)) + v. \end{aligned}$$

Pela definição de A_j , vamos ter

$$A_{j_n}(v) = -\Delta_{p_{j_n}(x)}(v) + |v|^{p_{j_n}(x)-2}v = -e^{-t}u_0 + |v|^{p_{j_n}(x)-2}v = -v + |v|^{p_{j_n}(x)-2}v,$$

então

$$-A_{j_n}(v) = v - |v|^{p_{j_n}(x)-2}v.$$

Logo,

$$\frac{dv_{j_n}}{dt} = -A_{j_n}(u_{j_n}) + 2v - |v|^{p_{j_n}(x)-2}v + A_{j_n}(v) + B(u_{j_n}).$$

Multiplicando por v_{j_n} e usando o fato que A_{j_n} é um operador monótono tem-se

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dv_{j_n}}{dt}, v_{j_n} \right\rangle &= \langle -A_{j_n}(u_{j_n}), v_{j_n} \rangle + \langle A_{j_n}v, v_{j_n} \rangle \\ &\quad + 2 \langle v, v_{j_n} \rangle + \langle B(u_{j_n}(t)), v_{j_n} \rangle \\ &\quad + \left\langle -|v|^{p_{j_n}(x)-2}v, v_{j_n} \right\rangle. \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\left\langle \frac{dv_{j_n}}{dt}, v_{j_n} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_{j_n}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_{j_n}\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \langle -A_{j_n}(u_{j_n}) + A_{j_n}(v), v_{j_n} \rangle + 2 \langle v, v_{j_n} \rangle \\
&\quad + \langle B(u_{j_n}(t)), v_{j_n} \rangle + \left\langle -|v|^{p_{j_n}(x)-2} v, v_{j_n} \right\rangle \\
&= -\langle A_{j_n}(u_{j_n}) - A_{j_n}(v), u_{j_n} - v \rangle + 2 \langle v, v_{j_n} \rangle \\
&\quad + \langle B(u_{j_n}(t)), v_{j_n} \rangle + \left\langle -|v|^{p_{j_n}(x)-2} v, v_{j_n} \right\rangle \\
&= -\underbrace{\langle A_{j_n}(u_{j_n}) - A_{j_n}(v), u_{j_n} - v \rangle}_{A_{j_n} \geq 0} + 2 \langle v, v_{j_n} \rangle \\
&\quad + \langle B(u_{j_n}(t)), v_{j_n} \rangle + \left\langle -|v|^{p_{j_n}(x)-2} v, v_{j_n} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Então, pela definição de produto interno em $L^2(\Omega)$ (veja Exemplo 1.1) e pela Desigualdade de Cauchy-Bunyakowsky-Schwarz tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|v_{j_n}\|_{L^2(\Omega)}^2 &+ 2 \langle A_{j_n}(u_{j_n}) - A_{j_n}(v), u_{j_n} - v \rangle \\
&= 4 \langle v, v_{j_n} \rangle + 2 \langle B(u_{j_n}(t)), v_{j_n} \rangle + 2 \left\langle -|v|^{p_{j_n}(x)-2} v, v_{j_n} \right\rangle \\
&\leq 4 \|v(t)\|_{L^2(\Omega)} \|v_{j_n}(t)\|_{L^2(\Omega)} + 2 \langle B(u_{j_n}(t)), v_{j_n} \rangle \\
&\quad + 2 \int_{\Omega} \left(|v(t)|^{p_{j_n}(x)-2} v \right) \left(|v(t)|^{p_{j_n}(x)-2} v \right) dx \|v_{j_n}\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \underbrace{4 \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}}_{< \infty} \underbrace{\|v_{j_n}(t)\|_{L^2(\Omega)}}_{< \infty} + \underbrace{2 \langle B(u_{j_n}(t)), v_{j_n} \rangle}_{< \infty} \\
&\quad + \underbrace{2 \int_{\Omega} |v(t)|^{2p_{j_n}(x)-2} dx}_{< \infty} \underbrace{\|v_{j_n}(t)\|_{L^2}}_{< \infty} \leq K < \infty.
\end{aligned}$$

Dai, temos

$$\frac{d}{dt} \|v_{j_n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \langle A_{j_n}(u_{j_n}) - A_{j_n}(v), u_{j_n} - v \rangle \leq K.$$

Em particular, temos

$$\frac{d}{dt} \|v_{j_n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq K.$$

Integrando sobre o intervalo $[0, t]$ obtemos

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \|v_{j_n}(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leq \int_0^t K d\tau.$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo segue-se que

$$\|v_{j_n}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v_{j_n}(0)\|_{L^2(\Omega)} + Kt \quad \text{para } t > 0.$$

Passo 7: Note que $u_{j_n}(t) \rightarrow u(t)$ quando $n \rightarrow \infty$, e como $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ é contínua, então

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{j_n}(t) - v(t)\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_{j_n}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{Kt}.$$

Para $t > 0$. Tomando limite para $t \rightarrow 0^+$ obtemos;

$$\|u(t) - u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u(t) - v(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|v(t) - u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{Kt} + \|e^{-t}u_0 - u_0\|_{L^2(\Omega)} < \delta,$$

para $0 < t < \eta(\delta)$. Então, $u(t) \rightarrow u_0$ quando $t \rightarrow 0^+$. Finalmente, precisamos mostrar que $u_{j_n} \rightarrow u$ em $C([0, T]; L^2(\Omega))$. Para provar isso, basta provar que, para qualquer sequência $t_n \rightarrow 0^+$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que $u_{j_n}(t_n) \rightarrow u_0$. De fato, fazendo $t_n \rightarrow 0^+$ tem-se

$$\begin{aligned} \|u_{j_n}(t_n) - u_0\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_{j_n}(t_n) - v(t_n)\|_{L^2(\Omega)} + \|v(t_n) - u_0\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \sqrt{\|v_{j_n}(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + Kt_n} + \|v(t_n) - u_0\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|v_{j_n}(0)\|_{L^2(\Omega)} + Kt_n \\ &\leq Kt_n \\ &< \epsilon_1. \end{aligned}$$

Para $\epsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno. Logo,

$$\|u_{j_n}(t_n) - u_0\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{quando } t_n \rightarrow 0^+.$$

□

Teorema 4.4. *A família de atratores globais $\{\mathcal{A}_j : j \in \mathbb{N}\}$ é semicontínua superiormente em j no infinito, na topologia de $L^2(\Omega)$, isto é,*

$$\text{dist}(\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_\infty) \rightarrow 0 \quad \text{quando } j \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Vamos supor que não é verdade, então existe $\epsilon > 0$ e uma sequência $y_n \in \mathcal{A}_{j_n}$, com $j_n \rightarrow \infty$, tal que

$$\text{dist}(y_n, \mathcal{A}_\infty) \geq \epsilon, \quad \text{para todo } n.$$

Seja $K = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_j}$ pelo Corolário 4.1, K é compacto em $L^2(\Omega)$. Então, existe um tempo $T_1 > 0$ tal que

$$\text{dist}(S(t, K), \mathcal{A}_\infty) < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para todo } t \geq T_1.$$

Pela invariância dos atratores existe $\psi_n \in \mathcal{A}_{j_n} \subset K$ tal que $y_n = u_{j_n}(T_1, \psi_n)$. Portanto, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, temos $\psi_n \rightarrow \psi_0$ para algum $\psi_0 \in K$ (ao menos para uma subsequência). Usando de novo a invariância dos atratores e a desigualdade (4.9) do Teorema 4.2 temos que $\varphi_{j_n}(\psi_n)$ é uniformemente limitada. Portanto, pelo teorema anterior, existe $n_0(T_1)$ tal que

$$\|u_{j_n}(T_1, \psi) - u(T_1, \psi_0)\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Se $n > n_0$. Então obtemos

$$\begin{aligned} \text{dist}(y_n, \mathcal{A}_\infty) &\leq \|u_{j_n}(T_1, \psi) - u(T_1, \psi_0)\|_{L^2(\Omega)} + \text{dist}(u(T_1, \varphi_0), \mathcal{A}_\infty) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \text{dist}(S(t, K), \mathcal{A}_\infty) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Se $n > n_0$, o qual é uma contradição, provando a desigualdade desejada.

□

Bibliografia

- [1] ALVES, C. O., SHMAREV, S., SIMSEN, J., AND SIMSEN, M. S. The cauchy problem for a class of parabolic equations in weighted variable sobolev spaces: Existence and asymptotic behavior. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 443, 1 (2016), 265–294.
- [2] BARBU, V. Nonlinear semigroups and differential equations in banach spaces.
- [3] BARBU, V. Nonlinear differential equations of monotone types in banach spaces.
- [4] BEZERRA, F. D. M., SIMSEN, J., AND SIMSEN, M. S. Semilinear limit problems for reaction–diffusion equations with variable exponents. *Journal of Differential Equations* 266 (2019), 3906–3924.
- [5] BEZERRA, F. D. M., SIMSEN, J., AND SIMSEN, M. S. Convergence of quasilinear parabolic equations to semilinear equations. *Discrete Continuous Dynamical Systems - B* 22 (01 2021).
- [6] BREZIS, H. Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de hilbert.
- [7] BREZIS, H. Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations.
- [8] BROWDER, F. E. Nonlinear elliptic boundary value problems. *Bulletin of the American Mathematical Society* 69 (1963), 862–874.
- [9] CHOLEWA, J. W., AND DLOTKO, T. *Application of abstract results to parabolic equations*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2000, p. 90–102.
- [10] CHOLEWA, J. W., AND DŁOTKO, T. Global attractors in abstract parabolic problems.
- [11] CONWAY, J. B. *A course in functional analysis*, vol. 96. Springer, 2019.
- [12] DE OLIVEIRA, C. *Introdução à análise funcional*. Projeto Euclides. IMPA, 2012.

- [13] DIENING, L., HARJULEHTO, P., HÄSTÖ, P. A., AND RŮIKA, M. Lebesgue and sobolev spaces with variable exponents.
- [14] FAN, X. Existence and uniqueness for the $p(x)$ -Laplacian-dirichlet problems. *Mathematische Nachrichten* 284, 11-12 (2011), 1435 – 1445.
- [15] FAN, X., AND ZHAO, D. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 263, 2 (2001), 424–446.
- [16] HENRY, D. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, vol. 840 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981.
- [17] MINTY, G. J. On a "monotonicity" method for the solution of nonlinear equations in banach spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 50 6 (1963), 1038–41.
- [18] MUNKRES, J. *Topology*. Featured Titles for Topology. Prentice Hall, Incorporated, 2000.
- [19] RUDIN, W. Real and complex analysis.
- [20] RUDIN, W. *Principios de análisis matemático*. Ediciones del Castillo, 1971.
- [21] SIMSEN, J., AND SIMSEN, M. S. On $p(x)$ -Laplacian parabolic problems. *Nonlinear Stud.* 18, 3 (2011), 393–403.
- [22] SIMSEN, J., SIMSEN, M. S., AND PRIMO, M. R. T. Reaction-diffusion equations with spatially variable exponents and large diffusion. *Commun. Pure Appl. Anal.* 15, 2 (2016), 495–506.
- [23] SIMSEN, J., SIMSEN, M. S., AND ROCHA, F. B. Existence of solutions for some classes of parabolic problems involving variable exponents. *Nonlinear Stud.* 21, 1 (2014), 113–128.
- [24] SIMSEN, J., SIMSEN, M. S., AND ZIMMERMANN, A. Study of ODE limit problems for reaction-diffusion equations. *Opuscula Math.* 38, 1 (2018), 117–131.