

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Dinâmica global em um modelo simples
de Leucemia Promielocítica Aguda**

Yelsin Velasquez Varillas

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando Mello

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES
e o orientador da FAPEMIG

ITAJUBÁ, 11 DE ABRIL DE 2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dinâmica global em um modelo simples de Leucemia Promielocítica Aguda

Yelsin Velasquez Varillas

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando Mello

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

ITAJUBÁ – MG

11 DE ABRIL DE 2025

À minha mãe, Enedina.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ser minha fonte de força e esperança, e por me conceder a dádiva de uma nova oportunidade de vida.

Meu eterno e sincero agradecimento vai aos meus pais, que são para mim exemplos de motivação, admiração e respeito incondicional. Sua presença é essencial para me incentivar a superar os momentos mais desafiadores.

Sou imensamente grato aos meus irmãos, pelo apoio incansável, tanto econômico quanto moral, que tem sido fundamental para que eu continue perseguindo meus sonhos.

Estendo minha gratidão às pessoas do meu distrito de Aczo, em especial a todos os meus professores, que sempre acreditaram em mim e ofereceram apoio de diversas formas.

Agradeço também aos meus amigos e conhecidos, cujas palavras de incentivo e gestos de solidariedade foram indispensáveis para que eu seguisse firme nessa caminhada.

Minha especial gratidão vai para meu respeitável orientador, Luis Fernando Mello, cuja conduta exemplar e dedicação fazem dele uma verdadeira inspiração. Sou profundamente grato pelas valiosas orientações, pelos ensinamentos marcantes e pelo impacto significativo que teve em minha formação acadêmica e pessoal.

Meu reconhecimento sincero ao corpo docente da UNIFEI, cuja dedicação ao ensino e à pesquisa proporcionou bases sólidas para o meu desenvolvimento acadêmico e profissional.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro concedido durante o mestrado.

Não há revolução sem matemática.

-Evariste Galois

Resumo

Frequentemente, utilizamos modelos matemáticos para entender a dinâmica de alguns fenômenos naturais e também para estudar o comportamento de algumas doenças, como por exemplo, a Leucemia Promielocítica Aguda (LPA), que é um subtipo de Leucemia Mieloide Aguda (LMA), em que a medula óssea é incapaz de produzir células sanguíneas normais em quantidade suficiente devido a bloqueios na maturação dessas células. Nesta dissertação se faz a análise global de uma família a dois parâmetros de campo de vetores polinomiais no plano que modela uma simplificação da dinâmica da LPA. Serão analisadas as possíveis bifurcações locais e globais e, utilizando a compactificação de Poincaré, serão fornecidas as descrições completas das suas dinâmicas no disco de Poincaré.

Palavras-chave: Compactificação de Poincaré, blow-up polar, retrato de fase global, bifurcações.

Abstract

We often use mathematical models to understand the dynamics of natural phenomena and to study the behavior of diseases, such as Acute Promyelocytic Leukemia (APL). APL is a subtype of Acute Myeloid Leukemia (AML) in which the bone marrow cannot produce enough normal blood cells due to blockages in the maturation of these cells. This dissertation presents a global analysis of a two-parameter family of polynomial vector fields in the plane that models a simplified version of the dynamics of APL. All possible local and global bifurcations are analyzed, and, using Poincaré compactification, complete descriptions of their dynamics on the Poincaré disk are provided.

Keywords: Poincaré compactification, polar blow-up, global phase portrait, bifurcations.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Sumário	vi
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
2 Preliminares	4
2.1 Aspectos gerais de teoria qualitativa de EDOs	4
2.1.1 Compactificação de Poincaré	13
2.1.2 Blow-up polar	21
2.2 Resultados preliminares	24
3 Estudo nos eixos coordenados	30
3.1 Alguns resultados previamente apresentados	30
3.2 Resultado do estudo nos eixos paramétricos	31
3.2.1 Caso 1: $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = 0$	32
3.2.2 Caso 2: $\beta_1 > 0$ e $\beta_2 = 0$	35

3.2.3	Caso 3: $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 > 0$	37
3.2.4	Caso 4: $\beta_1 < 0$ e $\beta_2 = 0$	39
3.2.5	Caso 5: $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 < 0$	43
4	Estudo no segundo, terceiro e quarto quadrantes	46
4.1	Segundo quadrante	46
4.2	Terceiro quadrante	51
4.3	Quarto quadrante	59
5	Proposições	65
5.1	Proposições novas e generalizadas	69
5.1.1	Proposições novas	69
5.1.2	Proposições generalizadas	71
	Conclusões	80
	Bibliografia	81

Lista de Figuras

2.1	Projeção central.	15
2.2	Cartas locais U_1 , U_2 e U_3 da esfera de Poincaré.	16
2.3	Retrato de fase global do campo $F(x, y) = (-x, y)$	19
2.4	Blow-up polar do plano no cilindro.	22
2.5	A desingularização do Exemplo 2.1.3 usando blow-up polar.	24
2.6	Retratos de fase de pontos de equilíbrio semi-hiperbólicos.	28
3.1	Blow-up e retrato de fase local em S_0	34
3.2	Retrato de fase global de (3.1). $\beta_1 = \beta_2 = 0$ corresponde ao ponto O . Veja a Figura 3.10.	35
3.3	Retratos de fase locais de (3.5) em S_0 quando $\beta_1 \neq 1$	36
3.4	Retratos de fase globais de (3.5). $\beta_2 = 0$: $0 < \beta_1 < 1$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{R}_4$; $\beta_1 = 1$ corresponde à região $\mathcal{Q}_9$; $\beta_1 > 1$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{R}_9$. Veja a Figura 3.10. . . .	37
3.5	Retratos de fase globais de (3.8). $\beta_1 = 0$: $0 < \beta_2 < 1$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_8$ e $\mathcal{R}_4$; $\beta_2 = 1$ corresponde à região $\mathcal{Q}_7$; $\beta_2 > 1$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_9$ e $\mathcal{R}_3$. Veja a Figura 3.10. . . .	38
3.6	Retratos de fase locais de (3.13) em S_0 quando $\beta_1 \neq -1$	41
3.7	Retrato de fase local de (3.13) em S_0 quando $\beta_1 = -1$	42
3.8	Retratos de fase globais de (3.12). $\beta_2 = 0$: $-1 < \beta_1 < 0$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_3$ e $\mathcal{A}_8$; $\beta_1 = -1$ corresponde à região $\mathcal{Q}_8$; $\beta_1 < -1$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_7$ e $\mathcal{A}_8$. Veja a Figura 3.10.	43

- 3.9 Retrato de fase global de (3.17). $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 < 0$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$ 44
- 3.10 Diagrama de bifurcação do sistema (1.1). A curva $\mathcal{SN}$ das bifurcações sela-nó é a união das curvas $\mathcal{SN}_1$ (verde) e $\mathcal{SN}_2$ (laranja). A curva $\mathcal{H}$ (vermelha) é a curva das bifurcações de Hopf. A curva $\mathcal{T}$ (marrom) é a curva das bifurcações transcricas (finitas). A curva $\mathcal{T}_\infty$ (azul) é a curva de bifurcações transcricas infinitas. Os arcos $\widehat{Q_2Q_3}$ (roxo) e $\widehat{QQ'}$ são as curvas das bifurcações homoclínicas. A curva $\mathcal{HL}_3$ (marrom) é a curva de laços heteroclínicos ilimitados Γ_∞^3 . A curva $\mathcal{HL}_4$ (magenta) é a curva de 4-gráficos ilimitados Γ_∞^4 45
- 4.1 Retratos de fase globais de (1.1) para parâmetros no segundo quadrante. $0 < \beta_1 < 1$ corresponde à região $\mathcal{A}_2$; $\beta_1 = 1$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$; $\beta_1 > 1$ corresponde à região $\mathcal{A}_1$. Veja a Figura 3.10. 51
- 4.2 Retratos de fase globais de (1.1) para parâmetros no terceiro quadrante. $\beta_1 > -1$: $(\beta_1 + 1)^2/4\beta_1 < \beta_2$ corresponde à região $\mathcal{A}_3$; $\beta_2 = (\beta_1 + 1)^2/4\beta_1$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_3$ e $\mathcal{A}_4$; $\beta_2 < (\beta_1 + 1)^2/4\beta_1$ corresponde à região $\mathcal{A}_4$. $Q = (\beta_2, \beta_1) = ((1 - \sqrt{2})/2, -1 - \sqrt{2})$ o ponto de equilíbrio $P_1 = (-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ é um ponto de Bogdanov-Takens. $\beta_1 < -1 - \sqrt{2}$: $\beta_2 = (\beta_1 + 1)^2/4\beta_1$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_4$ e $\mathcal{A}_5$; $(\beta_1 + 1)^2/4\beta_1 < \beta_2 < (\beta_1 + 2)/(\beta_1 + 1)^2$ corresponde à região $\mathcal{A}_5$. Veja a Figura 3.10. 57
- 4.3 Retratos de fase globais de (1.1) para parâmetros no terceiro quadrante. $\beta_1 < -1 - \sqrt{2}$: $\beta_2 = (\beta_1 + 2)/(\beta_1 + 1)^2$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_5$ e $\mathcal{A}_6$; quando β_2 está entre as regiões delimitadas pela curva de Hopf e a curva dos laços homoclínicos corresponde à região $\mathcal{A}_6$. A curva de laços homoclínicos corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_6$ e $\mathcal{A}_7$. $-1 - \sqrt{2} < \beta_1 < -1$ e $(\beta_1 + 1)^2/4\beta_1 < \beta_2$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_4$ e $\mathcal{A}_7$. Veja a Figura 3.10. 58

4.4	Retratos de fase globais de (1.1) para parâmetros no quarto quadrante. $0 < \beta_2 < 1$ corresponde à região $\mathcal{A}_8$; $\beta_2 = 1$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_8$ e $\mathcal{A}_9$; $\beta_2 > 1$ corresponde à região $\mathcal{A}_9$. Veja a Figura 3.10. . .	64
5.1	Retratos de fase globais de (3.1) parte 1.	77
5.2	Retratos de fase globais de (3.1) parte 2.	78
5.3	Retratos de fase globais de (3.1) parte 3.	79

Lista de Tabelas

5.1	Classificação topológica de cada ponto de equilíbrio do sistema (1.1) no disco de Poincaré, em função dos valores positivos de β_2 e β_1	75
5.2	Classificação topológica de cada ponto de equilíbrio do sistema (1.1) no disco de Poincaré, em função dos valores não positivos de β_2 e β_1 . Veja as Figuras 5.1, 5.2 e 5.3.	76

Capítulo 1

Introdução

As equações diferenciais ordinárias (EDOs) surgiram no contexto histórico da matemática como uma ferramenta importante para descrever fenômenos naturais que variam no tempo. Durante o século XVII, motivados pela necessidade de formalizar as leis da física e descrever a evolução de fenômenos naturais, matemáticos como Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz desenvolveram, independentemente, o cálculo diferencial. Esse avanço possibilitou a formulação de equações diferenciais, que se tornaram a base para modelar o comportamento dinâmico de sistemas físicos e biológicos, relacionando uma função desconhecida com suas derivadas.

No final do século XIX, Henri Poincaré, matemático francês e uma das figuras mais influentes de sua época, revolucionou o campo ao introduzir o conceito de *retrato de fase*. Poincaré demonstrou que, em vez de buscar soluções exatas das equações diferenciais que muitas vezes são difíceis de achar, era possível estudar o comportamento qualitativo dos sistemas através da representação gráfica de suas trajetórias no plano de fase. Essa abordagem permitiu visualizar padrões como pontos de equilíbrio, ciclos limites e comportamentos assintóticos, virando uma ferramenta central, até hoje, no estudo de sistemas não lineares. Já no início do século XX, Alfred J. Lotka e Vito Volterra formularam, também de forma independente, um sistema de equações diferenciais que descrevia a interação entre duas espécies: *presa e predador*. Conhecidas como *equações de Lotka-Volterra*, elas

são escritas da seguinte forma

$$x' = \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \quad y' = \frac{dy}{dt} = \gamma y - \delta xy,$$

onde x representa a população de presas, y representa a população de predadores, α , β , δ e γ são parâmetros positivos que descrevem as taxas de crescimento e interação e as derivadas são tomadas com relação à variável independente t .

Este modelo inaugurou uma nova era na modelagem matemática, ao inspirar o desenvolvimento de inúmeras equações similares para descrever interações dinâmicas em sistemas complexos. Nesse contexto, modelos matemáticos têm sido utilizados para compreender a dinâmica da Leucemia Promielocítica Aguda (LPA). Dentre esses modelos, destacam-se aqueles analisados em [7, 15] e nas referências ali citadas. Em ambos, o modelo matemático estudado é o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$N' = \frac{dN}{dt} = r_N - \mu_N N - \beta_1 N A, \quad A' = \frac{dA}{dt} = r_A A \left(1 - \frac{A}{K_A}\right) - \mu_A A - \beta_2 N A,$$

onde N é a função que representa o número de leucócitos normais, A é a função que representa o número de células leucêmicas, e t é a variável independente, aqui denominada tempo. O parâmetro r_N denota a taxa de reprodução total e constante dos leucócitos normais, enquanto μ_N corresponde à sua taxa de mortalidade natural (o estado homeostático da população de leucócitos normais é dado por r_N/μ_N). Já r_A representa a taxa de crescimento per capita da população A , K_A é a capacidade de suporte, e μ_A a taxa de mortalidade natural desta população. Os parâmetros β_1 e β_2 regulam a interação entre as variáveis N e A .

Do ponto de vista matemático, o sistema descrito configura uma família de equações diferenciais ordinárias (EDOs) no plano com múltiplos parâmetros, o que torna difícil o estudo das dinâmicas possíveis. Para simplificar a análise, mas sem perder de vista características essenciais do sistema, fixaremos valores específicos para cinco dos parâmetros:

$$r_A = K_A = 2, \quad \mu_A = \mu_N = r_N = 1.$$

Definindo $x = N$ e $y = A$, obtemos a seguinte família de sistemas polinomiais no plano, parametrizada por dois parâmetros, como uma simplificação da dinâmica da LPA

$$x' = 1 - x - \beta_1 xy, \quad y' = y - y^2 - \beta_2 xy, \tag{1.1}$$

onde, como já foi escrito acima, x representa o número de leucócitos normais e y o número de células leucêmicas. Os parâmetros β_1 e β_2 regulam as interações entre as variáveis x e y . Especificamente, β_1 caracteriza o efeito negativo das células leucêmicas sobre os leucócitos normais, enquanto β_2 reflete o efeito negativo e inibitório dos leucócitos normais sobre a população de células leucêmicas.

Exploraremos nos capítulos seguintes a rica estrutura dinâmica que apresenta o sistema não linear (1.1), analisaremos seus pontos de equilíbrio, suas classificações e as bifurcações associadas. No **Capítulo 2**, apresentaremos definições e resultados fundamentais que servirão de base para o desenvolvimento desta dissertação. Em seguida, no **Capítulo 3**, revisitaremos os resultados previamente publicados no artigo [4], analisaremos a equação diferencial nos eixos paramétricos e apresentaremos o diagrama de bifurcação correspondente. O **Capítulo 4** será dedicado ao estudo do sistema nos segundo, terceiro e quarto quadrantes do plano de parâmetros. Por fim, no **Capítulo 5**, reuniremos os teoremas e proposições que emergem como resultado do estudo do sistema (1.1) em todo o plano de parâmetros.

Capítulo 2

Preliminares

Como já mencionamos, nesta seção, apresentaremos algumas definições e principais resultados da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, que serão utilizados ao longo do desenvolvimento desta dissertação. A seção a seguir pode ser encontrada principalmente no Capítulo 3 do livro [14] e também no Capítulo 2 do livro [13].

2.1 Aspectos gerais de teoria qualitativa de EDOs

Campos vetoriais e fluxos

Definição 2.1.1. *Seja U um subconjunto aberto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Um campo vetorial em U é uma aplicação $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ao campo vetorial F , sempre associaremos o sistema autônomo*

$$X' = F(X). \quad (2.1)$$

As soluções de (2.1), isto é, as aplicações diferenciáveis $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U$ tais que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = F(\varphi(t)), \quad (2.2)$$

para todo $t \in I$, são chamadas trajetórias ou curvas integrais de F ou da equação diferencial (2.1).

Definição 2.1.2. *Um ponto $P \in U$ é dito ponto de equilíbrio de F se $F(P) = 0$ e é chamado ponto regular de F se $F(P) \neq 0$.*

Se P é ponto de equilíbrio então $\varphi(t) = P$, $-\infty < t < \infty$, é solução de (2.1). Reciprocamente, se $\varphi(t) = P$, $-\infty < t < \infty$, é solução de (2.1) então P é ponto de equilíbrio de F , pois $0 = \varphi'(t) = F(\varphi(t)) = F(P)$.

Definição 2.1.3. Uma curva integral $\varphi : I \rightarrow U$ de F chama-se máxima se para toda curva integral $\psi : J \rightarrow U$ tal que $I \subseteq J$ e $\varphi|_I = \psi|_I$ então $I = J$ e, consequentemente, $\varphi = \psi$. Neste caso, I é chamado intervalo máximo.

Uma equação diferencial do tipo (2.1) é chamada equação diferencial autônoma, isto é, o campo de vetores $F = (F_1, \dots, F_n)$ é independente de t .

Teorema 2.1.1. Sejam F , U e φ como na Definição 2.1.1.

- (a) (Existência e unicidade de soluções máximas) Para cada $X \in U$ existe um intervalo aberto I_X onde está definida a única solução máxima φ_X de (2.1) tal que $\varphi_X(0) = X$.
- (b) (Propriedade de grupo) Se $Y = \varphi_X(s)$ e $s \in I_X$, então $I_Y = I_X - s = \{r - s; r \in I_X\}$, $\varphi_Y(0) = Y$ e $\varphi_Y(t) = \varphi_X(t + s)$ para todo $t \in I_Y$.
- (c) (Diferenciabilidade em relação às condições iniciais) O conjunto $D = \{(t, X); X \in U, t \in I_X\}$ é aberto em $\mathbb{R}^{n+1}$ e a aplicação $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(t, X) = \varphi_X(t)$ é de classe C^k , assumindo que $F \in C^k$. Mais ainda, φ satisfaz à equação

$$D_1 D_2 \varphi(t, X) = DF(\varphi(t, X)) \cdot D_2 \varphi(t, X), \quad D_2 \varphi(t, X)|_{t=0} = E,$$

para todo $(t, X) \in D$. Aqui E denota a identidade de $\mathbb{R}^n$.

Corolário 2.1.1. Seja F um campo vetorial em $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $X \in U$ e $I_X = (\omega_-(X), \omega_+(X))$ é tal que $\omega_+(X) < \infty$ (resp. $\omega_-(X) > -\infty$) então $\varphi_X(t)$ tende a ∂U quando $t \rightarrow \omega_+(X)$ (resp. $t \rightarrow \omega_-(X)$), isto é, para todo compacto $K \subset U$ existe $\varepsilon = \varepsilon(K) > 0$ tal que se $t \in [\omega_+(X) - \varepsilon, \omega_+(X))$ então $\varphi_X(t) \notin K$.

Demonstração. Por contradição, suponhamos que exista um compacto $K \subset U$ e uma sequência $t_n \rightarrow \omega_+(X)$ tal que $\varphi_X(t_n) \in K$ para todo n . Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $\varphi_X(t_n)$ converge a um ponto $X_0 \in K$. Sejam $b > 0$ e $\alpha > 0$

tais que $B_b \times I_\alpha \subseteq D$, onde $B_b = \{Y \in \mathbb{R}^n; |Y - X_0| \leq b\} \subset U$ e $I_\alpha = \{t \in \mathbb{R}; |t| < \alpha\}$. Pela parte (c) do Teorema 2.1.1, D é aberto. Pela parte (b), $\varphi_2(t_n + s)$ está definido para $s < \alpha$ e coincide com $\varphi_Y(s)$ para n suficientemente grande, onde $Y = \varphi_X(t_n)$. Mas, $t_n + s > \omega_+(X)$, contradição. ■

Corolário 2.1.2. *Se $U = \mathbb{R}^n$ e $|F(X)| < c$ para todo $X \in \mathbb{R}^n$, então $I_X = \mathbb{R}$ para todo $X \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Suponhamos que $\omega_+(X) < \infty$ para algum $X \in \mathbb{R}^n$. Como $|\varphi(t) - X| = \left| \int_0^t F(\varphi_s(X)) ds \right| \leq ct \leq c\omega_+(X)$, resulta que para todo $t \in [0, \omega_+(X))$, $\varphi(t)$ está na bola fechada de centro X e raio $c\omega_+(X)$, o que contradiz o Corolário 2.1.1. Logo, $\omega_+(X) = \infty$ para todo $X \in \mathbb{R}^n$. Do mesmo modo, prova-se que $\omega_-(X) = -\infty$, para todo $X \in \mathbb{R}^n$. ■

Definição 2.1.4. *Seja F um campo vetorial. Definimos o fluxo de F como sendo a aplicação $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $D = \{(t, X) \in \mathbb{R} \times U; X \in U, t \in I_X\}$, dada por $\varphi(t, X) = \varphi_X(t)$.*

A aplicação φ satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) $\varphi(0, X) = X$, para todo $X \in U$.
- (b) Se $(t, X), (s, \varphi(t, X)) \in D$, então $(t + s, X) \in D$ e $\varphi(t + s, X) = \varphi(s, \varphi(t, X))$.
- (c) Para todo $(t, X) \in D$, a aplicação $t \mapsto \varphi(t, X)$ é a solução máxima de $X' = F(X)$, tal que $\varphi(0, X) = X$.

Retrato de fase de um campo vetorial

O retrato de fase de uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma representação geométrica utilizada para descrever o comportamento qualitativo das soluções de um sistema no espaço de fase. Essa representação permite visualizar as trajetórias das soluções no plano ou em um espaço de dimensão superior, frequentemente sem a necessidade de resolver o sistema de forma explícita.

A seguir, são apresentadas algumas definições e um teorema para esclarecer o conceito de retrato de fase.

Definição 2.1.5. O conjunto $\gamma_P = \{\varphi(t, P); t \in I_P\}$, isto é, a imagem da curva integral de F pelo ponto P , chama-se órbita de F pelo ponto P .

Observe que $Q \in \gamma_P \iff \gamma_Q = \gamma_P$. De fato, se $Q \in \gamma_P$, $Q = \varphi(t_1, P)$ e $\varphi(t, Q) = \varphi(t + t_1, P)$ e $I_P - t_1 = I_Q$.

Em outros termos, duas órbitas de F coincidem ou são disjuntas. Deste modo, U fica decomposto numa união disjunta de curvas diferenciáveis, podendo cada uma ser:

- (a) imagem biunívoca de um intervalo de $\mathbb{R}$,
- (b) um ponto, ou
- (c) difeomorfo a um círculo,

correspondendo cada caso a uma das alternativas do teorema a seguir. No caso (b) $P \in \gamma_P$, a órbita chama-se ponto de equilíbrio; no caso (c) se chama órbita fechada ou periódica.

Teorema 2.1.2. Se φ_X é uma solução máxima de (2.1) em I_X , verifica-se uma única das seguintes alternativas:

- (a) φ_X é 1-1, i.e., φ_X é injetiva;
- (b) $I_X = \mathbb{R}$ e φ_X é constante;
- (c) $I_X = \mathbb{R}$ e φ_X é periódica, isto é, existe $\tau > 0$ tal que $\varphi_X(t + \tau) = \varphi_X(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\varphi_X(t_1) \neq \varphi_X(t_2)$ se $|t_1 - t_2| < \tau$.

Definição 2.1.6. O conjunto aberto U , munido da decomposição em órbitas de F , chama-se retrato de fase de F . As órbitas são orientadas no sentido das curvas integrais do campo F ; os pontos de equilíbrio são munidos da orientação trivial.

Equivalência e conjugação de campos vetoriais

Definição 2.1.7. Sejam F_1, F_2 campos vetoriais definidos nos abertos de $\mathbb{R}^n$, U_1, U_2 , respectivamente. Diz-se que F_1 é topologicamente equivalente (resp. C^r -equivalente) a F_2

quando existe um homeomorfismo (resp. um difeomorfismo de classe C^r) $H : U_1 \rightarrow U_2$ que leva órbita de F_1 em órbita de F_2 preservando a orientação. Mais precisamente, seja $P \in U_1$ e seja $\gamma^1(P)$ a órbita orientada de F_1 passando por P ; então $H(\gamma^1(P))$ é a órbita orientada $\gamma^2(H(P))$ de F_2 passando por $H(P)$.

Definição 2.1.8. *Sejam $\varphi_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ os fluxos gerados pelos campos $F_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $F_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, respectivamente. Diz-se que F_1 é topologicamente conjugado (resp. C^r -conjugado) a F_2 quando existe um homeomorfismo (resp. um difeomorfismo de classe C^r) $H : U_1 \rightarrow U_2$ tal que*

$$\varphi_2(t, H(P)) = H(\varphi_1(t, P)), \quad \forall (t, P) \in D_1.$$

Neste caso, tem-se necessariamente $I_1(X) = I_2(H(X))$, onde $I_1(X)$ e $I_2(H(X))$ são os intervalos máximos das respectivas soluções máximas. O homeomorfismo H chama-se conjugação topológica (resp. C^r -conjugação) entre F_1 e F_2 .

Observação 2.1.1. *A relação de conjugação é uma relação de equivalência entre campos definidos em abertos de $\mathbb{R}^n$. Uma equivalência H entre F_1 e F_2 leva ponto de equilíbrio em ponto de equilíbrio e órbita periódica em órbita periódica. Se H for uma conjugação, o período das órbitas periódicas também é preservado.*

A definição de Conjugação é dada em termos dos fluxos, o lema abaixo mostra que esta definição também pode ser dada em termos dos campos. Usaremos este fato na Observação [2.1.3](#).

Lema 2.1.1. *Sejam $F_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $F_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos vetoriais e $H : U_1 \rightarrow U_2$ um difeomorfismo. Então H é uma conjugação entre F_1 e F_2 se, e somente se,*

$$DH(P)F_1(P) = F_2(H(P)), \quad \forall P \in U_1.$$

Demonstração. Sejam $\varphi_1 : D_1 \rightarrow U_1$ e $\varphi_2 : D_2 \rightarrow U_2$ os fluxos de F_1 e F_2 , respectivamente. Suponhamos que H satisfaz a condição dada. Dado $P \in U_1$, seja $\psi(t) = H(\varphi_1(t, P))$, $t \in I_1(P)$. Então ψ é solução do problema de Cauchy $X' = F_2(X)$, $X(0) = H(P)$, pois

$$\psi'(t) = DH(\varphi_1(t, P)) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t, P) = DH(\varphi_1(t, P)) F_1(\varphi_1(t, P)) = F_2(H(\varphi_1(t, P))) = F_2(\psi(t)).$$

Portanto, $H(\varphi_1(t, P)) = \varphi_2(t, H(P))$.

Reciprocamente, suponhamos que H seja uma conjugação. Dado $P \in U_1$, tem-se

$$H(\varphi_1(t, P)) = \varphi_2(t, H(P)), t \in I_1(P),$$

intervalo contendo 0. Derivando esta relação com respeito a t em $t = 0$, obtém-se $DH(p)F_1(P) = F_2(H(P))$, $\forall P \in U_1$. ■

Exemplo 2.1.1. $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $H(x, y) = (x, y + x^3/4)$ é uma C^r -conjugação entre $F(x, y) = (x, -y)$ e $G(x, y) = (x, -y + x^3)$. De fato, $DH(x, y)F(x, y) = G(H(x, y))$.

Definição 2.1.9. Sejam $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $f : A \rightarrow U$ chama-se seção transversal local de F quando, para todo $a \in A$, $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ e $F(f(a))$ geram o espaço $\mathbb{R}^n$. Seja $\Sigma = f(A)$ munido da topologia induzida. Se $f : A \rightarrow \Sigma$ for um homeomorfismo, diz-se que Σ é uma seção transversal de F .

Observação 2.1.2. Sejam $P \in U$ um ponto regular e $\{V_1, \dots, V_{n-1}, F(P)\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Seja $B(0, \delta)$ uma bola de $\mathbb{R}^{n-1}$ com centro na origem e raio $\delta > 0$. Para δ suficientemente pequeno, $f : B(0, \delta) \rightarrow U$ dada por $f(x_1, \dots, x_{n-1}) = P + \sum_{i=1}^{n-1} x_i V_i$ é uma seção transversal local de F em P .

Teorema 2.1.3. (Teorema do fluxo tubular). Seja P um ponto regular de $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k e $f : A \rightarrow \Sigma$ uma seção transversal local de F de classe C^k com $f(0) = P$. Então existe uma vizinhança V de P em U e um difeomorfismo $H : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de classe C^k , onde $\varepsilon > 0$ e B é uma bola aberta em $\mathbb{R}^{n-1}$ de centro na origem $0 = f^{-1}(P)$ tal que:

(a) $H(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$;

(b) H é uma C^k -conjugação entre $F|_V$ e o campo constante $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $Y = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Estrutura local dos pontos de equilíbrio

Se P um ponto regular de um campo vetorial F , pelo Teorema 2.1.3, sabemos que existe um difeomorfismo que conjuga F em uma vizinhança de P com o campo constante $Y \equiv (1, 0, \dots, 0)$. Por causa desta observação podemos considerar satisfatório o conhecimento qualitativo local das órbitas de um campo vetorial em torno de pontos regulares, sendo que existe apenas uma classe de conjugação diferenciável local.

Seja P um ponto de equilíbrio. A análise de seu comportamento local apresenta maior complexidade. A seguir, descrevemos as características dos retratos de fase em uma vizinhança de P , com foco no comportamento dinâmico ao seu redor.

Definição 2.1.10. *A origem é chamada de centro para o sistema (2.1) se existe um $\delta > 0$ tal que toda órbita ou trajetória de (2.1) na vizinhança perfurada $N_\delta(0) \setminus \{0\}$ é uma curva fechada com 0 em seu interior.*

O sistema de equações diferenciais (2.1), em $\mathbb{R}^2$ quando expresso em coordenadas polares como $r(t)$ e $\theta(t)$, permite identificar com maior clareza a natureza dos pontos de equilíbrio localizados na origem.

Definição 2.1.11. *A origem é chamada de foco estável para (2.1) se existe um $\delta > 0$ tal que para $0 < r_0 < \delta$ e $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$ e $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \rightarrow \infty$ conforme $t \rightarrow \infty$. Ela é chamada de foco instável se $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$ e $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \rightarrow \infty$ conforme $t \rightarrow -\infty$. Toda trajetória de (2.1) que satisfaz $r(t) \rightarrow 0$ e $|\theta(t)| \rightarrow \infty$ conforme $t \rightarrow \pm\infty$ é dita como espiralando em direção à origem conforme $t \rightarrow \pm\infty$.*

Definição 2.1.12. *A origem é chamada de nó estável para (2.1) se existe um $\delta > 0$ tal que para $0 < r_0 < \delta$ e $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$ e*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t, r_0, \theta_0) \text{ existe};$$

ou seja, cada trajetória em uma vizinhança perfurada da origem aproxima-se da origem ao longo de uma linha bem definida conforme $t \rightarrow \infty$. A origem é chamada de nó instável se $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow -\infty$ e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t, r_0, \theta_0) \text{ existe para todo } r_0 \in (0, \delta) \text{ e } \theta_0 \in \mathbb{R}.$$

De forma alternativa, considerando nas Definições 2.1.11 e 2.1.12 com $n = 2$, a origem é denominada nó estável (respectivamente nó instável) linear se a matriz jacobiana associada apresenta 2 autovalores reais negativos (respectivamente 2 autovalores reais positivos). Já para a Definição 2.1.11 temos que a parte real dos autovalores é negativa (ou positiva).

Definição 2.1.13. A origem é uma sela de (2.1) se existem duas trajetórias γ_1 e γ_2 que aproximam-se de 0 conforme $t \rightarrow \infty$ e duas trajetórias γ_3 e γ_4 que aproximam-se de 0 conforme $t \rightarrow -\infty$, e se existe um $\delta > 0$ tal que todas as outras trajetórias que iniciam na vizinhança deletada da origem $N_\delta(0) \setminus \{0\}$ deixam $N_\delta(0)$ conforme $t \rightarrow \pm\infty$. As trajetórias especiais $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ são chamadas de separatrizes.

De forma alternativa, considerando a Definição 2.1.13 com $n = 2$, a origem é denominada uma sela linear se a matriz jacobiana associada apresenta um autovalor real negativo e outro positivo.

Definição 2.1.14. Um ponto de equilíbrio P de um campo vetorial F de classe C^k , $k \geq 1$, chama-se hiperbólico se todos os autovalores de $DF(P)$ têm partes reais diferentes de zero.

Observação 2.1.3. É fácil ver que este conceito é invariante sob conjugação local C^2 de F em P . Sejam F e G campos de classe C^k , $k \geq 2$, e H um C^2 -conjugação entre F e G em torno de um ponto de equilíbrio P_0 de F ; $Q_0 = H(P_0)$ é um ponto de equilíbrio de G e pelo Lema 2.1.1 tem-se que $G = DH \circ H^{-1} \cdot F \circ H^{-1}$. Daí,

$$DG(Q) = D^2H(H^{-1}(Q))DH^{-1}(Q)F(H^{-1}(Q)) + DH(H^{-1}(Q))DF(H^{-1}(Q))DH^{-1}(Q).$$

Logo,

$$DG(Q_0) = DH(P_0)DF(P_0)[DH(P_0)]^{-1}.$$

A observação acima mostra que é o mesmo o número de autovalores negativos de dois campos C^2 -conjugados em torno de um ponto de equilíbrio hiperbólico. Entretanto, vale mais do que isto: o número de autovalores negativos determina a classe de conjugação topológica local. Este é o conteúdo do Teorema de Hartman-Grobman, que estabelece

que nas proximidades do ponto de equilíbrio hiperbólico de um sistema de EDOs o comportamento qualitativo do sistema não linear pode ser aproximado pelo comportamento do sistema linearizado.

Teorema 2.1.4 (Teorema de Hartman-Grobman). *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 e P um ponto de equilíbrio hiperbólico. Existem vizinhanças W de P em U e V de 0 em $\mathbb{R}^n$ tais que $F|_W$ é topologicamente conjugado a $DF(P)|_V$.*

Estrutura local de órbitas periódicas

A transformação de Poincaré associada a uma órbita fechada γ de um campo vetorial é um difeomorfismo π que definiremos a seguir. Esta transformação descreve o comportamento do campo em uma vizinhança de γ .

Seja $\gamma = \{\varphi(t, P) \mid 0 \leq t \leq \tau_0\}$ uma órbita periódica de período τ_0 de um campo vetorial F de classe C^k , $k \geq 1$, definido em $U \subset \mathbb{R}^n$. Seja Σ uma seção transversal a F em P . Em virtude da continuidade do fluxo φ de F , para todo ponto $Q \in \Sigma$ próximo de P a trajetória $\varphi(t, Q)$ permanece próxima a γ , com t em um intervalo compacto pré-fixado, por exemplo, $[0, 2\tau_0]$. Define-se $\pi(Q)$ como o primeiro ponto onde esta órbita, partindo de Q , volta a interceptar novamente a seção Σ . Seja Σ_0 o domínio de π . Naturalmente $p \in \Sigma_0$ e $\pi(P) = P$.

Definição 2.1.15. *Com as notações acima, a órbita fechada γ é um atrator periódico (ou órbita estável) quando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, Q), \gamma) = 0$.*

Definição 2.1.16. *Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^2$ e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 . Uma órbita periódica γ de F chama-se ciclo limite se existe uma vizinhança V de γ tal que γ é a única órbita fechada de F que intercepta V .*

Proposição 2.1.1. *Com as notações da Definição 2.1.16, existem apenas os seguintes tipos de ciclos limites (diminuindo V se necessário):*

(a) *Estável, quando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, Q), \gamma) = 0$ para todo $Q \in V$;*

(b) *Instável, quando $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, Q), \gamma) = 0$ para todo $Q \in V$;*

- (c) *Semiestável, quando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, Q), \gamma) = 0$ para todo $Q \in V \cap \text{Ext}\gamma$; e $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, Q), \gamma) = 0$ para todo $Q \in V \cap \text{Int}\gamma$, ou contrário.*

Curvas Algébricas Invariantes

Definição 2.1.17. *Seja $f \in \mathbb{R}[x, y]$, f não identicamente nula. A curva algébrica $f(x, y) = 0$ é uma curva algébrica invariante do sistema polinomial $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ de grau m se, para algum polinômio $K \in \mathbb{R}[x, y]$, tivermos*

$$F \cdot \nabla f = P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} = Kf.$$

Observação 2.1.4. *O polinômio K é chamado de cofator da curva algébrica invariante $f = 0$. Note-se que, como o sistema polinomial tem grau m , qualquer cofator tem grau no máximo $m - 1$. Nos pontos da curva algébrica $f = 0$, o gradiente de f é ortogonal ao campo vetorial $F = (P(x, y), Q(x, y))$. Portanto, em cada ponto de $f = 0$, o campo vetorial F é tangente à curva $f = 0$, de modo que a curva $f = 0$ é formada por trajetórias do campo vetorial F . Isso justifica o nome “curva algébrica invariante”, já que é invariante sob o fluxo definido por F .*

2.1.1 Compactificação de Poincaré

Ao estudar o comportamento das trajetórias de um sistema planar próximo aos seus pontos de equilíbrio, obtemos uma informação local do sistema. No entanto, para entender seu retrato de fase global, precisaríamos trabalhar em todo o plano $\mathbb{R}^2$, o que seria pouco prático e não tão simples. Uma ferramenta de grande ajuda para entender o comportamento global de um sistema polinomial no plano é a compactificação de Poincaré, que permite controlar as órbitas que saem de partes compactas do plano e nos indica como representar todo o retrato de fase em um disco.

A seguir, apresentaremos a construção da compactificação de Poincaré em $\mathbb{R}^2$. Esta construção pode ser encontrado no Capítulo 5 do livro [6].

Cartas Locais

Utilizaremos a notação (x_1, x_2) ao invés de (x, y) para o ponto que está em $\mathbb{R}^2$. Suponha que $F(x_1, x_2) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$ seja um campo vetorial polinomial no plano, onde P e Q são polinômios de grau arbitrário nas variáveis x_1 e x_2 , ou seja,

$$x'_1 = P(x_1, x_2), \quad x'_2 = Q(x_1, x_2). \quad (2.3)$$

Definimos que o grau de F é d se d for o máximo dos graus de P e Q .

Considere a esfera unitária $\mathbb{S}^2 = \{Y \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$, a qual chamaremos *esfera de Poincaré*. Consideramos $\mathbb{R}^2$ como o plano em $\mathbb{R}^3$, definido pelas coordenadas $(x_1, x_2, 1)$. Dessa forma fazemos que esse plano seja tangente a $\mathbb{S}^2$ no ponto $(0, 0, 1)$.

Para simplificar o estudo, dividiremos esta esfera em três partes, sendo

$$H^+ = \{Y \in \mathbb{S}^2 : y_3 > 0\},$$

que corresponde ao hemisfério norte,

$$H^- = \{Y \in \mathbb{S}^2 : y_3 < 0\},$$

que corresponde ao hemisfério sul,

$$\mathbb{S}^1 = \{Y \in \mathbb{S}^2 : y_3 = 0\}$$

que chamaremos equador.

Agora, consideramos a projeção do campo vetorial F de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{S}^2$ dada pelas projeções centrais $f^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ e $f^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. De maneira mais precisa, $f^+(X)$ é a interseção da reta que passa pelo ponto X e pela origem com o hemisfério norte de $\mathbb{S}^2$, enquanto $f^-(X)$ corresponde à interseção com o emisferio sul, como ilustrado na Figura 2.1 abaixo,

$$f^+(X) = \left(\frac{x_1}{\Delta(X)}, \frac{x_2}{\Delta(X)}, \frac{1}{\Delta(X)} \right), \quad f^-(X) = \left(\frac{-x_1}{\Delta(X)}, \frac{-x_2}{\Delta(X)}, \frac{-1}{\Delta(X)} \right),$$

sendo

$$\Delta(X) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}.$$

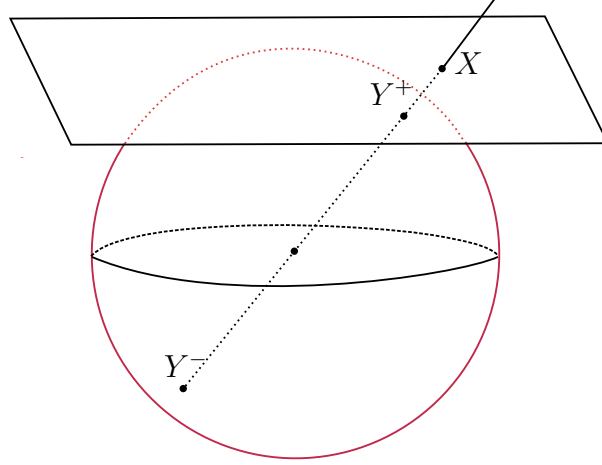


Figura 2.1: Projeção central.

Dessa forma, obtemos campos vetoriais induzidos em cada hemisfério. Cada campo vetorial induzido é analiticamente conjugado a F . O campo vetorial induzido em H^+ é dado por $\bar{F}(Y) = Df^+(X)F(X)$, onde $Y = f^+(X)$, e o em H^- é dado por $\bar{F}(Y) = Df^-(X)F(X)$, onde $Y = f^-(X)$. Observamos que F é um campo vetorial em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ que é tangente a $\mathbb{S}^2$.

Notemos que os pontos no infinito de $\mathbb{R}^2$ (dois para cada direção) estão em correspondência bijetiva com os pontos do equador de $\mathbb{S}^2$. Agora, gostaríamos de estender o campo vetorial induzido por F em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ para $\mathbb{S}^2$. No entanto, em geral, ele não permanece limitado quando nos aproximamos a $\mathbb{S}^1$, impedindo a extensão. Verifica-se, entretanto, que se multiplicarmos o campo vetorial pelo fator $\rho(X) = x_3^{d-1}$, a extensão se torna possível.

O campo vetorial estendido em $\mathbb{S}^2$ é chamado de compactificação de Poincaré do campo vetorial F em $\mathbb{R}^2$, denotado por $p(F)$. Em cada hemisfério H^+ e H^- , ele não é mais C^ω -conjugado a F , mas permanece C^ω -equivalente. Esta técnica é útil para traçar retratos de fase, mas devem-se tomar precauções ao realizar cálculos detalhados.

Agora vamos trabalhar na construção. Como é comum ao trabalhar com superfícies, usamos cartas locais para fazer cálculos. Para $\mathbb{S}^2$ utilizamos as seis cartas locais dadas por $U_k = \{Y \in \mathbb{S}^2 : y_k > 0\}$, $V_k = \{Y \in \mathbb{S}^2 : y_k < 0\}$ para $k = 1, 2, 3$. As cartas locais correspondentes $\varphi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\psi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ são definidas como $\varphi_k(y) = (y_m/y_k, y_n/y_k)$, para $m < n$ e $m, n \neq k$.

Denotamos por $z = (u, v)$ o valor de $\varphi_k(Y)$ ou $\psi_k(Y)$ para qualquer $k = 1, 2, 3$ de forma que (u, v) terão papéis diferentes dependendo da carta local que estamos considerando. Geometricamente, as coordenadas (u, v) podem ser expressas como na Figura 2.2. Os pontos de $\mathbb{S}^1$ em qualquer carta são dados por $v = 0$.

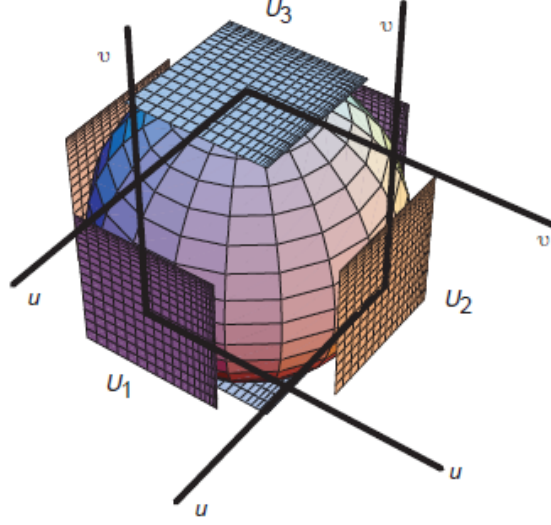


Figura 2.2: Cartas locais U_1 , U_2 e U_3 da esfera de Poincaré.

No que segue, fazemos um cálculo detalhado da expressão de $p(F)$ apenas na carta local U_1 .

Considere $F(X) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$. Então $\bar{F}(Y) = Df^+(X)F(X)$ com $Y = f^+(X)$ e

$$D\varphi_1(Y)\bar{F}(Y) = D\varphi_1(Y) \circ Df^+(X)F(X) = D(\varphi_1 \circ f^+)(X)F(X).$$

Seja $\bar{F}|_{U_1}$ o sistema definido como $D\varphi_1(Y)\bar{F}(Y)$. Então, como

$$(\varphi_1 \circ f^+)(X) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right) = (u, v),$$

temos

$$\begin{aligned}
\overline{F}|_{U_1} &= \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ -\frac{1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{x_1^2} \left(-x_2 P(x_1, x_2) + Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2) \right) \\
&= v^2 \left(-u P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v} Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right).
\end{aligned}$$

Agora,

$$\rho(Y) = y_3^{d-1} = \frac{1}{\Delta(X)^{d-1}} = \frac{v^{d-1}}{\Delta(X)^{d-1}} = v^{d-1} m(z),$$

sendo $m(z) = (1 + u^2 + v^2)^{(1-d)/2}$. Consequentemente, segue que

$$\rho(\overline{F}|_{U_1})(z) = v^{d+1} m(z) \left(-\frac{u}{v} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v} Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right).$$

Para provar que a extensão $\rho\overline{X}$ para $p(X)$ é definida em toda a esfera $\mathbb{S}^2$, notamos que enquanto $\overline{X}|_{U_1}$ não está bem definida quando $v = 0$, $p(X)|_{U_1} = \rho\overline{X}|_{U_1}$ está bem definida ao longo de $v = 0$, pois o fator multiplicador v^{d+1} cancela qualquer fator de v que possa aparecer no denominador. Argumentos semelhantes podem ser aplicados ao restante das cartas locais.

Para simplificar o campo vetorial estendido, fazemos uma mudança na variável independente e removemos o fator $m(z)$. Ainda mantemos um campo vetorial em $\mathbb{S}^2$ que é C^∞ -equivalente a F em qualquer um dos hemisférios H_+ e H_- .

A expressão para $p(F)$ na carta local (U_1, ϕ_1) é dada por

$$u' = v^d \left[-u P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right], \quad v' = -v^{d+1} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \quad (2.4)$$

A expressão para (U_2, ϕ_2) é

$$u' = v^d \left[P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - u Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right], \quad v' = -v^{d+1} Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right), \quad (2.5)$$

e para (U_3, ϕ_3) é

$$u' = P(u, v), \quad v' = Q(u, v). \quad (2.6)$$

A expressões para $p(F)$ nas cartas (V_k, ψ_k) são as mesmas que para (U_k, ϕ_k) multiplicada por $(-1)^{d-1}$, para $k = 1, 2, 3$.

Para estudar F em todo o plano $\mathbb{R}^2$, incluindo seu comportamento próximo ao infinito, é suficiente trabalhar em $H_+ \cup \mathbb{S}^1$ e a projeção desse conjunto no plano, que chamamos de disco de Poincaré. Todos os cálculos podem ser feitos nas três cartas (U_1, φ_1) , (U_2, φ_2) e (U_3, φ_3) .

É claro que não precisamos passar por toda a construção geométrica completa, como acabamos de apresentar, para obter essas expressões. As expressões na carta local (U_3, φ_3) claramente não necessitam de qualquer elaboração adicional. Para obter a equação na carta (U_1, φ_1) , começamos com (2.3) e introduzimos as coordenadas (u, v) pelas fórmulas

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right).$$

Isso leva a um campo vetorial $\bar{X}^u$ que multiplicamos por v^{d-1} .

De modo análogo, para obter a equação na carta (U_2, φ_2) , começamos com (2.3) e introduzimos as coordenadas (u, v) pelas fórmulas

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right).$$

Pontos de equilíbrio no infinito

Queremos estudar o retrato de fase local nos pontos de equilíbrio no infinito. Escolhemos um ponto de equilíbrio infinito $(u, 0)$ e começamos examinando a expressão da parte linear do campo $p(F)$. Denotamos por P_i e Q_i os polinômios homogêneos de grau i , para $i = 0, 1, \dots, d$, de modo que $P = P_0 + P_1 + \dots + P_d$ e $Q = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_d$. Então, $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ é um ponto de equilíbrio infinito de $p(F)$ se, e somente se,

$$F(u) \equiv Q_d(1, u) - uP_d(1, u) = 0.$$

De fato, da equação da carta local (U_1, φ_1) , temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^d \left[-uP \left(\frac{1}{t}, \frac{u}{t} \right) + Q \left(\frac{1}{t}, \frac{u}{t} \right) \right] = -uP_d(1, u) + Q_d(1, u).$$

De forma similar, $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$ é um ponto de equilíbrio infinito de $p(F)$ se, e somente se,

$$G(u) \equiv P_d(u, 1) - uQ_d(u, 1) = 0.$$

Exemplo 2.1.2. *Seja o campo linear no plano $F(x, y) = (-x, y)$, ou seja,*

$$x' = -x, \quad y' = y.$$

Este sistema possui um ponto de equilíbrio finito único, a origem, que é um ponto de sela hiperbólica. Queremos desenhar o retrato de fase em um disco de Poincaré.

A expressão de $p(F)$ na carta local U_1 é

$$u' = 2u, \quad v' = v.$$

Assim, existe um único ponto de equilíbrio em U_1 , a origem, que é um nó estável no infinito. Como o grau de F é ímpar, a origem de V_1 também é um nó estável.

A expressão para $p(F)$ na carta local U_2 é

$$u' = -2u, \quad v' = -v.$$

Então, a origem de U_2 é um nó instável. O mesmo ocorre para a origem de V_2 .

Veja a Figura 2.3.

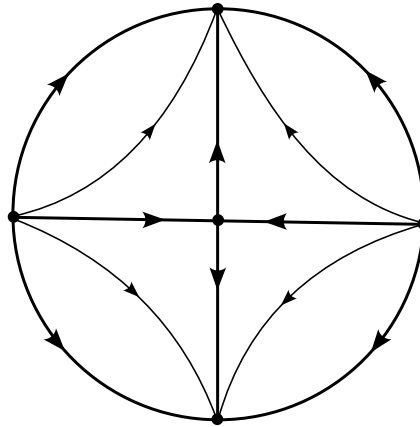


Figura 2.3: Retrato de fase global do campo $F(x, y) = (-x, y)$.

Na seguinte subseção, apresentaremos a técnica de *blow-up polar*, que pode ser encontrado no artigo [1].

Campos topologicamente equivalentes

A seguir, apresentamos a caracterização dos retratos de fase globais no disco de Poincaré para sistemas diferenciais polinomiais.

Definição 2.1.18. *Dizemos que dois campos vetoriais polinomiais F e G são topologicamente equivalentes se existir um homeomorfismo em $\mathbb{S}^2$ preservando o infinito $\mathbb{S}^1$ e levando órbitas do fluxo induzido em $p(F)$ em órbitas do fluxo induzido em $p(G)$, preservando ou invertendo, simultaneamente, o sentido de todas as órbitas.*

Uma separatriz de um campo vetorial $p(F)$ no disco de Poincaré pode ser:

- Todas as órbitas de $p(F)$ que estão na fronteira $\mathbb{S}^1$ do disco de Poincaré.
- Todos os pontos de equilíbrio finitos de $p(F)$.
- Todos os ciclos limites de $p(F)$.
- Todas as separatrizes de setores hiperbólicos dos pontos de equilíbrio finitos e infinitos de $p(F)$.

Denotamos por $\mathcal{S}(p(F))$ o conjunto formado por todas as separatrizes de $p(F)$. Cada componente conexa de $\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{S}(p(F))$ é chamada de região canônica de $p(F)$. A união de $\mathcal{S}(p(F))$ com uma solução escolhida (representante) de cada região canônica será chamada de configuração de separatriz.

Definição 2.1.19. *Dizemos que $\mathcal{S}(p(F))$ e $\mathcal{S}(p(G))$ são equivalentes se existir um homeomorfismo em $\mathbb{S}^2$ preservando o infinito $\mathbb{S}^1$ e levando órbitas de $\mathcal{S}(p(F))$ em órbitas de $\mathcal{S}(p(G))$, preservando ou invertendo, simultaneamente, o sentido de todas as órbitas.*

O seguinte teorema é devido a Markus [10], Neumann [11] e Peixoto [12].

Teorema 2.1.5. *Os retratos de fase no disco de Poincaré de dois sistemas diferenciais polinomiais compactificados $p(F)$ e $p(G)$, com pontos de equilíbrio isolados, são topologicamente equivalentes se, e somente se, suas configurações de separatrizes $\mathcal{S}(p(F))$ e $\mathcal{S}(p(G))$ são topologicamente equivalentes.*

2.1.2 Blow-up polar

Quando um ponto de equilíbrio de uma EDO é degenerado, como analisamos seu comportamento local em uma vizinhança? Para isso, uma das técnicas utilizada é o *blow-up polar* cuja ideia principal consiste em “explodir” o ponto de equilíbrio por meio de uma mudança de variáveis que não é um difeomorfismo, o ponto de equilíbrio em um círculo. Posteriormente, o estudo do ponto de equilíbrio original é realizado a partir da análise de novos pontos de equilíbrio que aparecem nesse círculo, os quais, em geral, apresentam comportamentos mais simples. Se alguns desses novos pontos forem degenerados, o processo é repetido. Dumortier em [5], demonstrou que esse processo iterativo de dessingularização é finito se o campo de vetores é analítico.

Agora detalhamos o processo para aplicar a técnica de blow-up polar homogêneo. Considere um sistema diferencial polinomial planar real da forma

$$x' = P(x, y) = P_n(x, y) + \cdots, \quad y' = Q(x, y) = Q_n(x, y) + \cdots, \quad (2.7)$$

onde P e Q são polinômios coprimos, P_n e Q_n são polinômios homogêneos de grau $n \in \mathbb{N}$ e os pontos indicam termos de ordem superior em x e y . Estamos assumindo que a origem é um ponto de equilíbrio, ou seja, $n > 0$. Consideremos que F é um campo vetorial analítico associado à equação diferencial (2.7).

Tomando coordenadas polares $(x, y) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$, o sistema (2.7) torna-se

$$r' = \mathcal{R}(\theta)r + \cdots, \quad \theta' = \mathcal{F}(\theta) + \cdots, \quad (2.8)$$

onde $\mathcal{R}$ e $\mathcal{F}$ são polinômios em termos de $\cos \theta$ e $\sin \theta$, e os pontos suspensivos indicam termos de ordem superior. Se $\mathcal{F} \not\equiv 0$, dizemos que ponto de equilíbrio na origem é não dicrítico. Neste caso, as órbitas de F que tendem para a origem são tangentes às soluções $\theta^* \in [0, 2\pi)$ da equação $\mathcal{F}(\theta) = 0$. Chamamos de $\mathcal{F}$ o *polinômio característico* de (2.7) na origem, e θ^* uma *direção caraterística*.

Em coordenadas cartesianas $\mathcal{F}$ escreve-se como

$$\mathcal{F}(x, y) = xQ_n(x, y) - yP_n(x, y). \quad (2.9)$$

Se $\mathcal{F} \equiv 0$ na origem, então a origem é chamado ponto de equilíbrio dicrítico. Nesse caso, deduzimos facilmente de (2.9) que $P_n = xW_{n-1}$ e $Q_n = yW_{n-1}$, onde $W_{n-1} \not\equiv 0$ é um polinômio homogêneo de grau $n - 1$. Se $y - vx$ é um fator de W_{n-1} e $v = \tan \theta^*$, $\theta^* \in [0, 2\pi)$, então θ^* é uma *direção singular*.

O blow-up polar homogêneo (ou simplesmente blow-up polar) é a aplicação $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$, com $r \in \mathbb{R}$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Esta aplicação transforma a origem do sistema (2.7) no círculo $r = 0$, que é chamado de divisor excepcional (veja a Figura 2.4). Após aplicarmos blow-up polar e cancelarmos o fator comum r^{n-1} , o sistema (2.7) se torna o sistema (2.8). Se $\mathcal{F} \equiv 0$, o fator comum é r^n .

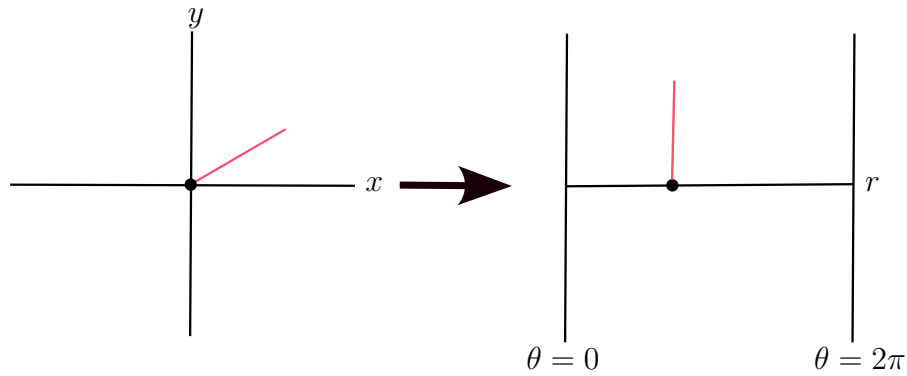


Figura 2.4: Blow-up polar do plano no cilindro.

A seguir, apresentaremos um exemplo detalhado de como aplicar a técnica de blow-up polar a um ponto de equilíbrio degenerado de uma EDO.

Exemplo 2.1.3. *Considere o sistema planar*

$$x' = (3/2)x^2 - 2xy, \quad y' = y^2 - (3/2)xy. \quad (2.10)$$

Estudaremos o comportamento local desse sistema em torno da origem, que é um ponto de equilíbrio degenerado.

O blow-up polar transforma o sistema (2.10) em

$$\begin{aligned} r' &= r \left((3/2) \cos^3(\theta) + \sin^3(\theta) - 2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - (3/2) \cos(\theta) \sin^2(\theta) \right), \\ \theta' &= \sin(\theta) \cos(\theta) (3 \sin(\theta) - 3 \cos(\theta)). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para dessingularizar a origem do sistema (2.10), precisamos estudar os pontos de equilíbrio do sistema (2.11) no círculo excepcional $r = 0$, que são as soluções da equação

$$3\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)[\operatorname{sen}(\theta) - \cos(\theta)] = 0.$$

Os pontos de equilíbrio do sistema (2.11) são

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi/4, \quad \theta_3 = \pi/2, \quad \theta_4 = \pi, \quad \theta_5 = 5\pi/4, \quad \theta_6 = 3\pi/2.$$

Seja H o campo vetorial associado ao sistema (2.11). A matriz Jacobiana é calculada nos seguintes pontos de equilíbrio

$$JH(0,0) = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

de onde concluimos que o ponto $(0,0)$ é uma sela hiperbólica,

$$JH(0,\pi/4) = \begin{pmatrix} -\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{16}} & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{8} \end{pmatrix},$$

de onde concluimos que o ponto $(0,\pi/4)$ é uma sela hiperbólica,

$$JH(0,\pi/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

de onde concluimos que o ponto $(0,\pi/2)$ é uma sela hiperbólica,

$$JH(0,\pi) = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

de onde concluimos que o ponto $(0,\pi)$ é uma sela hiperbólica,

$$JH(0,5\pi/4) = \begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{16}} & 0 \\ 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{8}} \end{pmatrix},$$

de onde concluimos que o ponto $(0,5\pi/4)$ é uma sela hiperbólica,

$$JH(0,3\pi/2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

de onde concluimos que o ponto $(0, 3\pi/2)$ é uma sela hiperbólica.

O retrato de fase do sistema (2.11) no cilindro é mostrado na Figura 2.5(a). Se considerarmos o cilindro identificando $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ (onde o eixo excepcional é desenhado como um círculo, veja a Figura 2.5(b)), esse é o modo usual de visualizar $r = 0$ no sistema de blow-up polar. Nesse caso, o exterior do círculo representa $r > 0$. Consequentemente, trabalharemos com as separatrizes no exterior do círculo. Finalmente, ao retrai-lo, recuperamos o retrato de fase planar do sistema original (2.10) na Figura 2.5(c). Como podemos ver, isso é feito facilmente retraindo o círculo a um ponto.

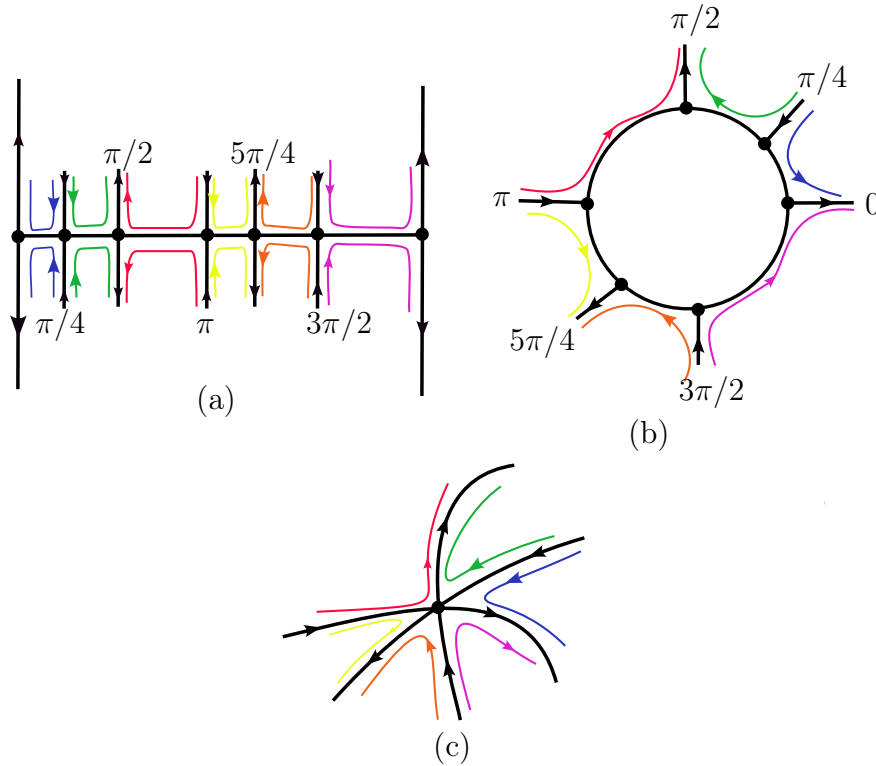


Figura 2.5: A desingularização do Exemplo 2.1.3 usando blow-up polar.

2.2 Resultados preliminares

A seguir, enunciamos alguns resultados que serão usados ao longo do desenvolvimento desta dissertação.

Teorema 2.2.1 (Ver [8], página 148). (*Bifurcação sela-nó*) Considere $X' = F(X, \alpha)$ uma família suave de equações diferenciais no plano, dependendo do parâmetro α . Supo-

nha que, para $\alpha = \alpha_0$, exista um ponto de equilíbrio P_0 para o qual as seguintes hipóteses são satisfeitas:

- **SN1:** A matriz Jacobiana de F em (P_0, α_0) tem um autovalor zero simples com autovetor direito V_0 e autovetor esquerdo W_0 .
- **SN2:** $W_0 \cdot \frac{dF}{d\alpha}(P_0, \alpha_0) \neq 0$.
- **SN3:** $W_0 \cdot D_X^2 F(P_0, \alpha_0)(V_0, V_0) \neq 0$.

Então, essa família de equações diferenciais tem uma bifurcação de sela-nó em P_0 para os parâmetro $\alpha = \alpha_0$.

Teorema 2.2.2 (Ver [13], página 338). (*Bifurcação transcritical*) Considere $X' = F(X, \alpha)$ uma família suave de equações diferenciais no plano, dependendo do parâmetro α . Suponha que exista um ponto de equilíbrio P_0 para todos os valores de α . Além disso, suponha que para $\alpha = \alpha_0$ as seguintes hipóteses sejam satisfeitas:

- **T1:** A matriz Jacobiana de F em (P_0, α_0) tem um autovalor zero simples com autovetor direito V_0 e vetor próprio esquerdo W_0 .
- **T2:** $W_0 \cdot \frac{dF}{d\alpha}(P_0, \alpha_0) = 0$.
- **T3:** $W_0 \cdot D_X \left(\frac{dF}{d\alpha}(P_0, \alpha_0) \right) (V_0) \neq 0$.
- **T4:** $W_0 \cdot D_X^2 F(P_0, \alpha_0)(V_0, V_0) \neq 0$.

Então, essa família de equações diferenciais tem uma bifurcação transcritical em P_0 para o parâmetro $\alpha = \alpha_0$.

Agora, consideremos a seguinte equação

$$x' = ax + by + p(x, y), \quad y' = cx + dy + q(x, y) \quad (2.12)$$

sendo p e q dadas por

$$p(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} a_{ij} x^i y^j = a_{20} x^2 + a_{11} xy + a_{02} y^2 + a_{30} x^3 + a_{21} x^2 y + a_{12} xy^2 + a_{03} y^3 + \dots$$

e

$$q(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} b_{ij} x^i y^j = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 + \dots$$

No livro [3], página 253, o primeiro coeficiente de Lyapunov para a equação (2.12) está dado por

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{-\pi}{4b\beta^3} [& ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + ab(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{20}) + c^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) \\ & - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 - b_{20}b_{02}) - b^2(b_{11}b_{20} + 2a_{20}b_{20}) + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20}) \\ & - (a^2 + bc)(3(cb_{03} - ba_{30}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + ca_{12} - bb_{21})], \end{aligned}$$

sendo $\beta = \sqrt{ad - bc}$.

Teorema 2.2.3 (Ver [9], página 100). (*Bifurcação de Hopf*) *Considere uma família suave de equações diferenciais no plano*

$$X' = F(X, \alpha), \quad X \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Fazendo translações, suponha que $X_\alpha = 0$ é um ponto de equilíbrio para $|\alpha|$ suficientemente pequeno com autovalores $\lambda_{1,2} = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$, sendo $\mu(0) = 0$ e $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Assuma que as seguintes condições são satisfeitas:

- **H1:** $\sigma(0) \neq 0$, sendo σ é o primeiro coeficiente de Lyapunov.
- **H2:** $\mu'(0) = \frac{d\mu(0)}{d\alpha} \neq 0$.

Então X_0 é ponto de Hopf e existem mudanças de coordenadas e parâmetros e uma reparametrização da variável independente de modo que (2.13) tem a seguinte forma

$$x' = \beta x - y \pm x(x^2 + y^2), \quad y' = x + \beta y \pm y(x^2 + y^2).$$

Observação 2.2.1. 1) *Se $\sigma < 0$, então X_0 é assintoticamente estável e (2.13) tem um ciclo limite estável envolvendo o ponto de equilíbrio instável X_0 .*

2) *Se $\sigma > 0$, então X_0 é instável e (2.13) tem um ciclo limite instável envolvendo o ponto de equilíbrio assintoticamente estável X_0 .*

Precisamos fixar algumas notações antes de enunciar o Teorema 2.2.4. Considere um sistema suave $X' = F(X, \alpha, \beta)$, $X \in \mathbb{R}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Suponha que para $\alpha = \alpha_0$ e $\beta = \beta_0$, existe um ponto de equilíbrio $X = X_0$ tal que a matriz Jacobiana A de F em X_0 possui um valor duplo zero de autovalores. Denotando $X - X_0$ por X , podemos escrever

$$F(X) = AX + \frac{1}{2}B(X, X) + O(3),$$

onde, para $i = 1, 2$,

$$B_i(X, Y) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k.$$

Considere os vetores $q_0, q_1, p_0, p_1 \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$Aq_0 = 0, \quad Aq_1 = q_0, \quad A^T p_1 = 0, \quad A^T p_0 = p_1,$$

onde A^T é a transposta de A , satisfazendo

$$\langle q_0, p_1 \rangle = 0, \quad \langle q_1, p_0 \rangle = 0, \quad \langle q_0, p_0 \rangle = 1, \quad \langle q_1, p_1 \rangle = 1.$$

Teorema 2.2.4 (Ver [9], página 321). (*Bifurcação Bogdanov-Takens*) Considere uma família de equações diferenciais suaves com dois parâmetros no plano

$$X' = F(X, \alpha, \beta), \quad X \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Suponha que para $\alpha = \alpha_0$ e $\beta = \beta_0$, a matriz Jacobiana A de F no ponto de equilíbrio X_0 tenha um autovalor zero duplo. Suponha que as seguintes condições de genericidade sejam satisfeitas:

- **BT0:** A matriz Jacobiana $A \neq 0$.
- **BT1:** $a = \langle p_1, B(q_0, q_0) \rangle \neq 0$.
- **BT2:** $b = \langle p_0, B(q_0, q_0) \rangle + \langle p_1, B(q_0, q_1) \rangle \neq 0$.
- **BT3:** A aplicação

$$G : (X, \alpha, \beta) \mapsto (F(X, \alpha, \beta), \text{tr } DF(X, \alpha, \beta), \det DF(X, \alpha, \beta))$$

é regular em (X_0, α_0, β_0) .

Então, essa família de equações diferenciais com dois parâmetros tem uma bifurcação Bogdanov-Takens em X_0 para os parâmetros $\alpha = \alpha_0$ e $\beta = \beta_0$ e pode ser escrita como

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = \beta_1 + \beta_2 \eta_1 + \eta_1^2 + s \eta_1 \eta_2 + O(3),$$

sendo $s = \text{sign}(ab) = \pm 1$.

A seguir, enunciamos o seguinte teorema do livro [6], página 74.

Teorema 2.2.5. (Teorema dos Pontos de Equilíbrio Semi-Hiperbólicos) *Seja $(0,0)$ um ponto de equilíbrio isolado do campo vetorial F dado por*

$$x' = A(x, y), \quad y' = \lambda y + B(x, y), \quad (2.14)$$

sendo A e B funções analíticas em uma vizinhança da origem com $A(0,0) = B(0,0) = DA(0,0) = DB(0,0) = 0$ e $\lambda > 0$. Seja $y = f(x)$ a solução da equação $\lambda y + B(x, y) = 0$ em uma vizinhança do ponto $(0,0)$, e suponha que a função $g(x) = A(x, f(x))$ tenha a expressão $g(x) = a_m x^m + o(x^m)$, onde $m \geq 2$ e $a_m \neq 0$. Então, sempre existe uma curva analítica invariante, chamada de variedade instável forte, tangente em 0 ao eixo y , na qual F é analiticamente conjugado a

$$\dot{y} = \lambda y;$$

isso representa um comportamento repulsivo, pois $\lambda > 0$. Além disso, as seguintes afirmações são válidas.

(i) *Se m é ímpar e $a_m < 0$, então $(0,0)$ é uma sela topológica (ver Figura 2.1(a)).*

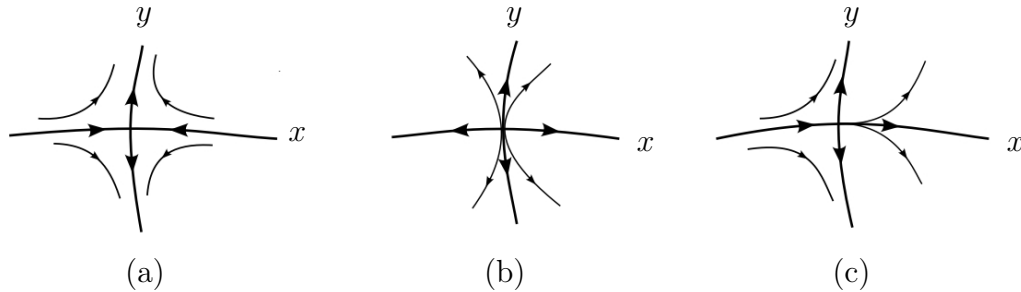


Figura 2.6: Retratos de fase de pontos de equilíbrio semi-hiperbólicos.

- (ii) Se m é ímpar e $a_m > 0$, então $(0, 0)$ é um nó topológico instável (ver Figura 2.1(b)).
- (iii) Se m é par, então $(0, 0)$ é uma sela-nó, isto é, um ponto de equilíbrio cuja vizinhança é a união de um setor parabólico e dois setores hiperbólicos (ver Figura 2.1(c)).

Observação 2.2.2. O caso $\lambda < 0$ pode ser reduzido para $\lambda > 0$ ao se trocar F por $-F$. Além dos resultados sobre singularidades semi-hiperbólicas com variedades centrais não-planas, como afirmado no Teorema 2.2.5, também lembramos que no caso em que $g(x) = A(x, f(x))$, conforme definido no Teorema 2.2.5, é identicamente zero, então existe uma curva analítica que consiste em pontos de equilíbrio.

Teorema 2.2.6 (Ver [13], página 265). (**Critério de Dulac**) Seja $F \in C^1(E, \mathbb{R}^2)$, onde E é uma região simplesmente conexa em $\mathbb{R}^2$. Se existe uma função $\phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ tal que $\nabla \cdot (\phi F)$ não seja identicamente zero e não mude de sinal em E , então $X' = F(X)$ não tem órbitas fechadas inteiramente contidas em E .

Capítulo 3

Estudo nos eixos coordenados

A partir deste capítulo, dedicaremos nossa análise ao estudo detalhado do sistema de equações diferenciais que constitui o foco principal desta dissertação, dado em (1.1).

No decorrer deste estudo, apresentaremos resultados relevantes e proposições fundamentais que emergem da investigação deste sistema.

3.1 Alguns resultados previamente apresentados

Antes de estudar o comportamento do sistema (1.1) quando os parâmetros estão sobre os eixos coordenados, apresentamos nesta seção alguns resultados obtidos no artigo [4]. Neste artigo, os autores realizam um estudo global do sistema para os casos em que os parâmetros β_1 e β_2 são positivos.

Proposição 3.1.1. *Defina o conjunto*

$$\mathcal{SN} = \left\{ (\beta_2, \beta_1) \mid \beta_1 > 0, \quad \beta_2 = \frac{(\beta_1 + 1)^2}{4\beta_1}, \quad \beta_1 \neq \sqrt{2} - 1, \quad \beta_1 \neq 1 \right\}.$$

O ponto de equilíbrio

$$P_{1,2} = \left(\frac{2}{1 + \beta_1}, \frac{\beta_1 - 1}{2\beta_1} \right)$$

de (1.1) é um ponto sela-nó para parâmetros em $\mathcal{SN}$.

Proposição 3.1.2. *Defina o conjunto*

$$\mathcal{H} = \left\{ (\beta_2, \beta_1) \mid \beta_2 = \frac{\beta_1 + 2}{(\beta_1 + 1)^2}, \quad \beta_1 > \sqrt{2} - 1 \right\}.$$

O ponto de equilíbrio

$$P_1 = \left(1 + \beta_1, -\frac{1}{1 + \beta_1}\right)$$

de (1.1) é um ponto de Hopf para parâmetros em $\mathcal{H}$.

Proposição 3.1.3. *Defina o conjunto*

$$\mathcal{T} = \{(\beta_2, \beta_1) \mid \beta_2 = 1, \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_1 \neq 1\}.$$

O ponto de equilíbrio $P_0 = (1, 0)$ de (1.1) é um ponto transcrito para parâmetros em $\mathcal{T}$.

Proposição 3.1.4. *Defina o conjunto*

$$\mathcal{T}_\infty = \{(\beta_2, \beta_1) \mid \beta_1 = 1, \quad \beta_2 > 0\}.$$

O ponto de equilíbrio $M_0 = (0, 0)$ de (1.1) é um ponto transcrito para parâmetros em $\mathcal{T}_\infty$.

Proposição 3.1.5. *O ponto de equilíbrio $P_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2)$ de (1.1) é um ponto de Bogdanov-Takens para os parâmetros $Q = (\beta_2, \beta_1) = ((1 + \sqrt{2})/2, \sqrt{2} - 1)$.*

Antes de enunciar o teorema principal do artigo [4], lembremos que dois campos vetoriais no disco de Poincaré $\mathbb{D}$ são topologicamente equivalentes se existir um homeomorfismo em $\mathbb{D}$ que aplique órbitas em órbitas, preservando ou invertendo a direção do fluxo. Veja [6] para mais detalhes. A seguir, se enuncia o principal teorema do artigo [4].

Teorema 3.1.1. *O sistema de equações diferenciais ordinárias (1.1) com dois parâmetros positivos possui 26 retratos de fase globais não topologicamente equivalentes.*

Os 26 retratos de fase globais de (1.1) para os parâmetros positivos, bem como o diagrama de bifurcação, podem ser encontrados em [4].

3.2 Resultado do estudo nos eixos paramétricos

Nesta seção, é feito um estudo global de (1.1) quando os parâmetros estão sobre os eixos coordenados.

3.2.1 Caso 1: $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = 0$

Aqui mostraremos em detalhes a análise para obter o retrato de fase global no disco de Poincaré. Nos casos seguintes, omitiremos os cálculos e só mostraremos os resultados necessários.

Se $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = 0$, a equação (1.1) tem a seguinte forma

$$x' = 1 - x, \quad y' = y(1 - y). \quad (3.1)$$

Os pontos de equilíbrio são $P_0 = (1, 0)$ e $P_2 = (1, 1)$ e a matriz Jacobiana é

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 - 2y \end{pmatrix}.$$

A matriz Jacobiana avaliada no ponto de equilíbrio P_0 é dada por

$$DF(P_0) = DF(1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de onde o ponto de equilíbrio P_0 é uma sela hiperbólica. Por outro lado, a matriz Jacobiana avaliada no ponto de equilíbrio P_2 é da forma

$$DF(P_2) = DF(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

logo o ponto de equilíbrio P_2 é um nó estável hiperbólico.

Agora analisamos o comportamento dos pontos de equilíbrio no infinito.

A expressão da compactificação de Poincaré do sistema (3.1) na carta local U_2 é

$$u' = v^2 - 2uv + u, \quad v' = v - v^2. \quad (3.2)$$

$M_0 = (0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio e a matriz Jacobiana de (3.2) em M_0 é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Segue que o ponto $M_0 = (0, 0)$ é um nó instável hiperbólico.

A expressão da compactificação de Poincaré do sistema (3.1) na carta local U_1 é

$$u' = -uv^2 + 2uv - u^2, \quad v' = v^2 - v^3. \quad (3.3)$$

$S_0 = (0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio e a matriz Jacobiana de (3.3) em S_0 é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que S_0 é linearmente nulo.

Para analisar o retrato de fase local na vizinhança de $S_0 = (0, 0)$ aplicaremos a técnica de blow-up polar. A equação acima (3.3) pode ser escrita como

$$u' = -uv^2 + 2uv - u^2 = P_2(u, v) + P_3(u, v), \quad v' = v^2 - v^3 = Q_2(u, v) + Q_3(u, v), \quad (3.4)$$

sendo P_2 e Q_2 polinômios homogêneos de grau dois e P_3 e Q_3 são polinômios homogêneos de graus três. Nesse caso, temos $m = 2$, que corresponde ao menor grau dos polinômios homogêneos.

Polinômio característico

$$\mathcal{F}(u, v) = uQ_2(u, v) - vP_2(u, v) = u(v^2) - v(-u^2 + 2uv) = uv(u - v).$$

$$\mathcal{F} = 0 \iff uv(u - v) = 0 \Rightarrow u = 0, \quad v = 0 \quad \text{e} \quad u = v.$$

Então existem três direções características $u = 0$, $v = 0$ e $u = v$.

Para fazer bow-up polar fazemos a mudança de coordenadas $u = r \cos(\theta)$ e $v = r \sin(\theta)$ e, a equação (3.3) depois de fazer a mudança e dividir por $r^{m-1} = r$ tem a forma

$$r' = r^2[-\cos^3(\theta) + 2\cos^2(\theta)\sin(\theta) + \sin^3(\theta) - r\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - r\sin^4(\theta)],$$

$$\theta' = \cos(\theta)\sin(\theta)[\cos(\theta) - \sin(\theta)].$$

Pontos de equilíbrio em $r = 0$

$$\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0, \quad \theta_4 = \pi.$$

$$\sin(\theta) - \cos(\theta) = 0 \iff \sin(\theta) = \cos(\theta) \Rightarrow \theta_2 = \pi/4, \quad \theta_5 = 5\pi/4.$$

$$\cos(\theta) = 0 \Rightarrow \theta_3 = \pi/2, \quad \theta_6 = 3\pi/2.$$

A matriz Jacobiana é calculada nos pontos de equilíbrio acima, resultando em:

$$JH(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de onde concluimos que o ponto $(0, 0)$ é uma sela hiperbólica,

$$JH(0, \pi/4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

de onde concluimos que o ponto $(0, \pi/4)$ é uma sela hiperbólica,

$$JH(0, \pi/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de onde concluimos que o ponto $(0, \pi/2)$ é um nó instável hiperbólico,

$$JH(0, \pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

de onde concluimos que o ponto $(0, \pi)$ é uma sela hiperbólica,

$$JH(0, 5\pi/4) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

de onde concluimos que o ponto $(0, 5\pi/4)$ é uma sela hiperbólica,

$$JH(0, 3\pi/2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

de onde concluimos que o ponto $(0, 3\pi/2)$ é um nó estável hiperbólico.

A seguir, apresentamos a Figura 3.1, que ilustra o blow-up polar. Em seguida, a Figura 3.2 é exibida, mostrando o retrato de fase global para o caso analisado. Essa análise foi feita levando-se em conta os pontos de equilíbrio finitos e infinitos e a não existência de ciclos limites uma vez que a reta $x = 1$ é invariante.

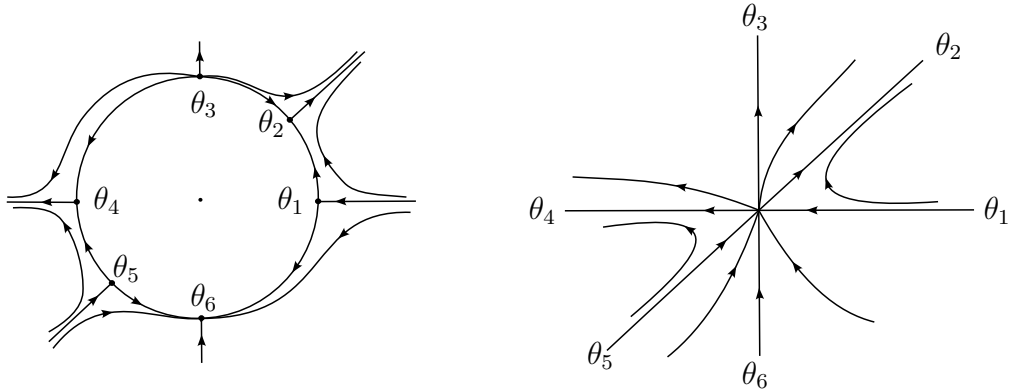


Figura 3.1: Blow-up e retrato de fase local em S_0 .

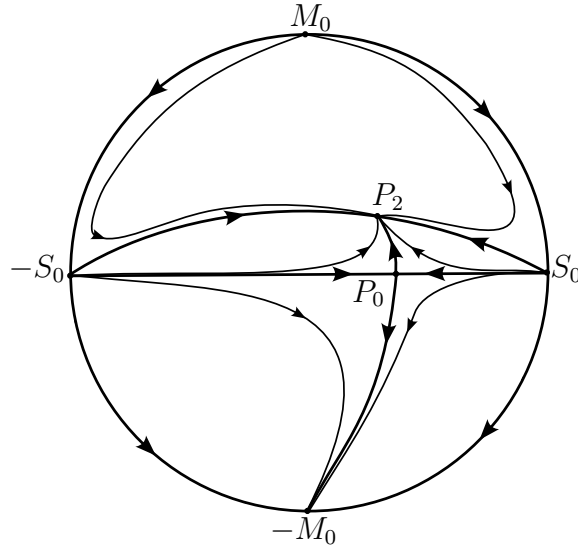


Figura 3.2: Retrato de fase global de (3.1). $\beta_1 = \beta_2 = 0$ corresponde ao ponto O . Veja a Figura 3.10.

3.2.2 Caso 2: $\beta_1 > 0$ e $\beta_2 = 0$

Se $\beta_1 > 0$ e $\beta_2 = 0$, a equação (1.1) tem a seguinte forma

$$x' = 1 - x - \beta_1 xy, \quad y' = y(1 - y). \quad (3.5)$$

Os pontos de equilíbrio são $P_0 = (1, 0)$, o qual corresponde a uma sela hiperbólica, e $P_2 = (1/(\beta_1 + 1), 1)$, que é um nó estável hiperbólico.

Agora analisamos o comportamento dos pontos de equilíbrio no infinito.

A expressão da compactificação de Poincaré do sistema (3.5) na carta local U_1 é

$$u' = -uv^2 + 2uv + (\beta_1 - 1)u^2, \quad v' = v^2 - v^3 + \beta_1 uv. \quad (3.6)$$

$S_0 = (0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio degenerado e o seu comportamento local depende, conforme mencionado, do valor que assume β_1 .

Se $\beta_1 = 1$, todos os pontos do bordo do disco de Poincaré são pontos de equilíbrio que são repulsores na carta local V_1 e atratores na carta local V_2 .

A seguir, apresentamos a Figura 3.3 que ilustra os retratos de fase locais quando $\beta_1 \neq 1$. Se $0 < \beta_1 < 1$, depois de fazer o blow-up, o ponto de equilíbrio $S_0 = (0, 0)$ é topologicamente como na Figura 3.3 à esquerda: ele tem dois setores parabólicos, sendo

um atrator e outro repulsor, e dois setores hiperbólicos. Se $\beta_1 > 1$, depois de fazer o blow-up polar, concluimos que o retrato de fase local no ponto $S_0 = (0, 0)$ é topologicamente como na Figura 3.3 à direita: ele tem dois setores parabólicos, sendo um atrator e outro repulsor, e dois setores elípticos.

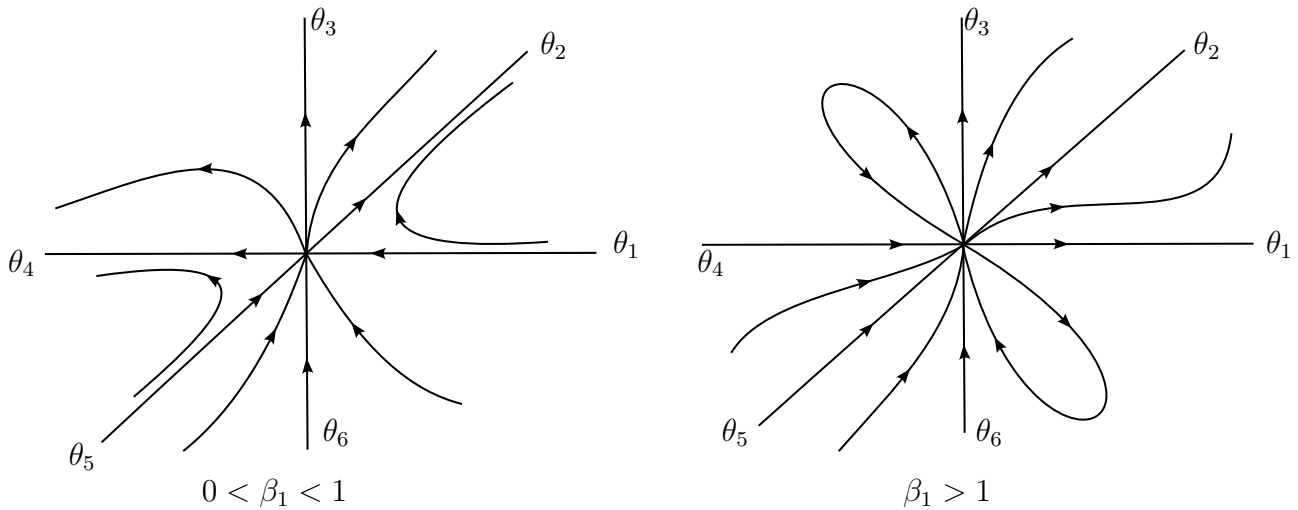


Figura 3.3: Retratos de fase locais de (3.5) em S_0 quando $\beta_1 \neq 1$.

A expressão da compactificação de Poincaré do sistema (3.5) na carta local U_2 é

$$u' = (1 - \beta_1)u - 2uv + v^2, \quad v' = v - v^2. \quad (3.7)$$

Quando $\beta_1 \neq 1$, $M_0 = (0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio.

Se $0 < \beta_1 < 1$, $M_0 = (0, 0)$ é um nó instável hiperbólico.

Se $\beta_1 = 1$, todos os pontos da fronteira do disco de Poincaré são pontos de equilíbrio que são atratores na carta local V_2 e repulsores na carta local V_1 .

Se $\beta_1 > 1$, $M_0 = (0, 0)$ é um sela hiperbólica.

A seguir, apresentamos a Figura 3.4, que ilustra os retratos de fase globais para o caso analisado. Essa análise foi feita levando-se em conta os pontos de equilíbrio finitos e infinitos e a não existência de ciclos limites uma vez que a reta $y = 1$ é invariante.

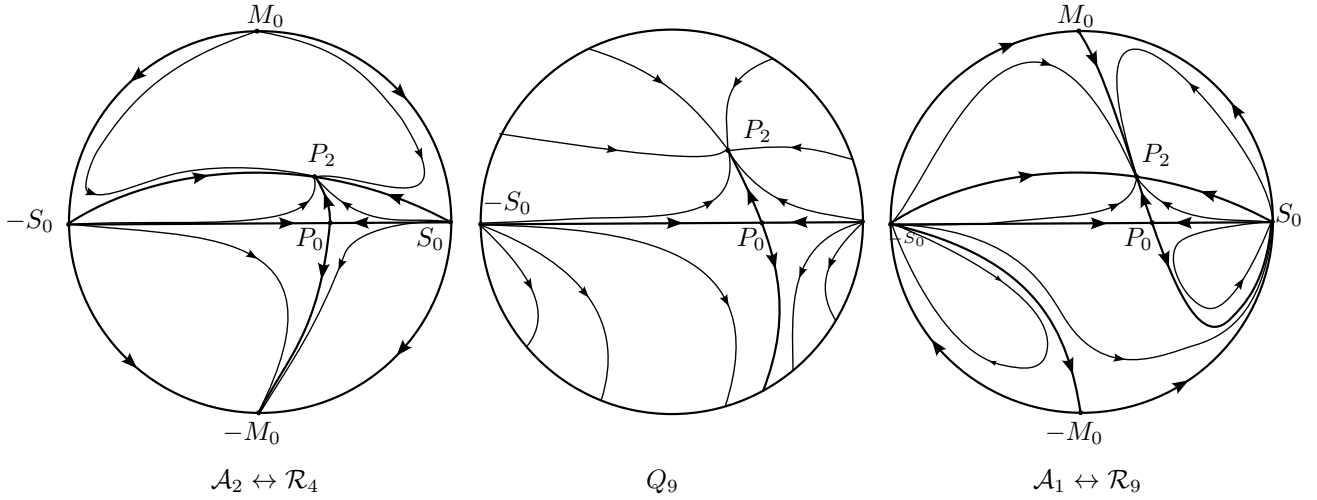


Figura 3.4: Retratos de fase globais de (3.5). $\beta_2 = 0$: $0 < \beta_1 < 1$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{R}_4$; $\beta_1 = 1$ corresponde à região $\mathcal{Q}_9$; $\beta_1 > 1$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{R}_9$. Veja a Figura 3.10.

3.2.3 Caso 3: $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 > 0$

Se $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 > 0$, a equação (1.1) tem a seguinte forma

$$x' = 1 - x, \quad y' = y(1 - y - \beta_2 x). \quad (3.8)$$

Os pontos de equilíbrio são $P_0 = (1, 0)$ e $P_1 = (1, 1 - \beta_2)$ e o comportamento local destes pontos dependerão do valor que assume o parâmetro β_2 .

Se $0 < \beta_2 < 1$, $P_0 = (1, 0)$ é uma sela hiperbólica e $P_1 = (1, 1 - \beta_2)$ é um nó estável hiperbólico.

Se $\beta_2 = 1$, os pontos coincidem, i.e, $P_0 = (1, 0) = P_1 = (1, 1 - \beta_2)$ é um ponto transcítico que topologicamente é uma sela-nó.

Se $\beta_2 > 1$ $P_0 = (1, 0)$ é um nó estável hiperbólico e, $P_1 = (1, 1 - \beta_2)$ é uma sela hiperbólica.

A seguir, enunciamos a seguinte proposição.

Proposição 3.2.1. *Defina o conjunto*

$$\mathcal{T} = \{(\beta_2, \beta_1) \mid \beta_2 = 1, \quad \beta_1 = 0\}.$$

O ponto de equilíbrio $P_0 = (1, 0)$ de (3.8) é um ponto transcrito para parâmetros em $\mathcal{T}$.

Demonstração. Ver a prova da Proposição 5.1.3. ■

Agora analisamos o comportamento dos pontos de equilíbrio no infinito.

A expressão da compactificação de Poincaré do sistema (3.8) na carta local U_1 é

$$u' = -\beta_2 u + 2uv - u^2 - uv^2, \quad v' = v^2 - v^3. \quad (3.9)$$

Para simplificar os cálculos, adotamos $\beta_2 = 1$. Para aplicar o Teorema 2.2.5, fazemos a substituição $\bar{u} = v$ e $\bar{v} = u$, transformando o sistema anterior em

$$\bar{u}' = \bar{u}^2 - \bar{u}^3 = A(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{v}' = -\bar{v} - \bar{v}^2 + 2\bar{v}\bar{u} - \bar{v}\bar{u}^2 = -\bar{v} + B(\bar{u}, \bar{v}). \quad (3.10)$$

Seja $\bar{v} = f(\bar{u}) = a_1 \bar{u} + a_2 \bar{u}^2$ a expansão de Taylor da solução de $-\bar{v} + B(\bar{u}, \bar{v}) = 0$. Assim, segue que $a_1 = 0$ e $g(\bar{u}) = A(f(\bar{u}), \bar{u}) = \bar{u}^2 + \mathcal{O}(3)$. Então, como o expoente de menor grau de $g(\bar{u})$ é par, concluimos que $S_0 = (0, 0)$ é uma sela-nó. De forma análoga, se comprova que o ponto de equilíbrio $S_1 = (-1, 0)$ é uma sela-nó.

A expressão da compactificação de Poincaré do sistema (3.8) na carta local U_2 é

$$u' = u + \beta_2 u^2 - 2uv + v^2, \quad v' = v + \beta_2 uv - v^2. \quad (3.11)$$

$M_0 = (0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio que é um nó instável hiperbólico.

A seguir, apresentamos a Figura 3.5, que ilustra os retratos de fase globais para o caso analisado.

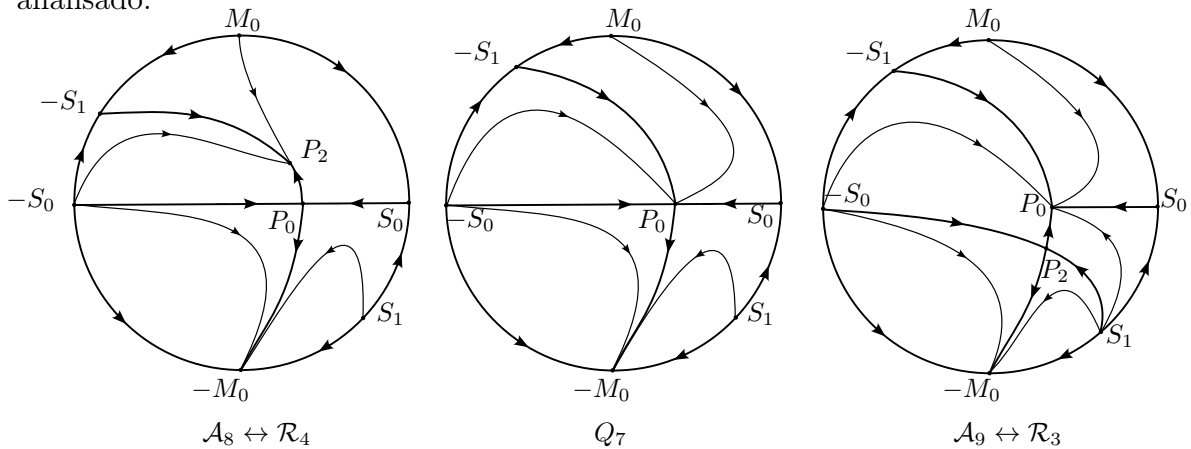


Figura 3.5: Retratos de fase globais de (3.8). $\beta_1 = 0$: $0 < \beta_2 < 1$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_8$ e $\mathcal{R}_4$; $\beta_2 = 1$ corresponde à região Q_7 ; $\beta_2 > 1$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_9$ e $\mathcal{R}_3$. Veja a Figura 3.10.

3.2.4 Caso 4: $\beta_1 < 0$ e $\beta_2 = 0$

Se $\beta_1 < 0$ e $\beta_2 = 0$, a equação (1.1) tem a seguinte forma

$$x' = 1 - x - \beta_1 xy, \quad y' = y(1 - y). \quad (3.12)$$

Os pontos de equilíbrio são $P_0 = (1, 0)$ que é uma sela hiperbólica e $P_1 = (1/(\beta_1 + 1), 1)$ se $\beta_1 \neq -1$, onde a sua estabilidade dependerá do valor que assume o parâmetro β_1 .

Se $\beta_1 < -1$, o ponto de equilíbrio P_1 é uma sela hiperbólica.

Se $\beta_1 = -1$, neste caso o ponto de equilíbrio P_1 desaparece.

Se $-1 < \beta_1 < 0$, o ponto de equilíbrio P_1 é um nó estável hiperbólico.

Agora analisamos o comportamento dos pontos de equilíbrio no infinito.

A expressão da compactificação de Poincaré do sistema (3.12) na carta local U_1 é

$$u' = (-1 + \beta_1)u^2 + 2uv - uv^2, \quad v' = \beta_1 uv + v^2 - v^3. \quad (3.13)$$

$S_0 = (0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio degenerado e a sua estabilidade depende do valor do parâmetro β_1 .

Para analisar o retrato de fase local na vizinhança de $S_0 = (0, 0)$ aplicaremos a técnica de blow-up polar.

A equação acima (3.13) em coordenadas polares pode ser escrita como

$$\begin{aligned} r' &= \frac{r}{4}[-2r + (-3 + 4\beta_1)\cos(\theta) + 2r\cos(2\theta) - \cos(3\theta) + 5\sin(\theta) + \sin(3\theta)], \\ \theta' &= \cos(\theta)\sin(\theta)[\cos(\theta) - \sin(\theta)]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Pontos de equilíbrio em $r = 0$

$$\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0, \quad \theta_4 = \pi.$$

$$\sin(\theta) - \cos(\theta) = 0 \iff \sin(\theta) = \cos(\theta) \Rightarrow \theta_2 = \pi/4, \quad \theta_5 = 5\pi/4.$$

$$\cos(\theta) = 0 \Rightarrow \theta_3 = \pi/2, \quad \theta_6 = 3\pi/2.$$

A matriz Jacobiana é calculada nos pontos de equilíbrio acima, resultando em:

$$JH(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 + \beta_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de onde concluímos que o ponto $(0, 0)$ é uma sela hiperbólica,

$$JH(0, \pi/4) = \begin{pmatrix} \frac{1+\beta_1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

de onde concluimos que o ponto $(0, \pi/4)$ é uma sela hiperbólica se $-1 < \beta_1 < 0$ e um nó estável hiperbólico se $\beta_1 < -1$,

$$JH(0, \pi/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de onde concluimos que o ponto $(0, \pi/2)$ é um nó instável hiperbólico,

$$JH(0, \pi) = \begin{pmatrix} 1-\beta_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

de onde concluimos que o ponto $(0, \pi)$ é uma sela hiperbólica,

$$JH(0, 5\pi/4) = \begin{pmatrix} \frac{-1-\beta_1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

de onde concluimos que o ponto $(0, 5\pi/4)$ é uma sela hiperbólica se $-1 < \beta_1 < 0$ e um nó instável hiperbólico se $\beta_1 < -1$,

$$JH(0, 3\pi/2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

de onde concluimos que o ponto $(0, 3\pi/2)$ é um nó estável hiperbólico.

A seguir, apresentamos a Figura 3.6 que ilustra os retratos de fase locais quando $\beta_1 \neq -1$. Se $-1 < \beta_1 < 0$, depois de fazer o blow-up, o ponto de equilíbrio $S_0 = (0, 0)$ é topologicamente como na Figura 3.6 à esquerda: ele tem dois setores parabólicos, sendo um atrator e outro repulsor, e dois setores hiperbólicos. Se $\beta_1 < -1$, depois de fazer o blow-up polar, concluimos que o retrato de fase local no ponto $S_0 = (0, 0)$ é topologicamente como na Figura 3.6 à direita: ele tem dois setores parabólicos, sendo um atrator e outro repulsor, e dois setores elípticos.

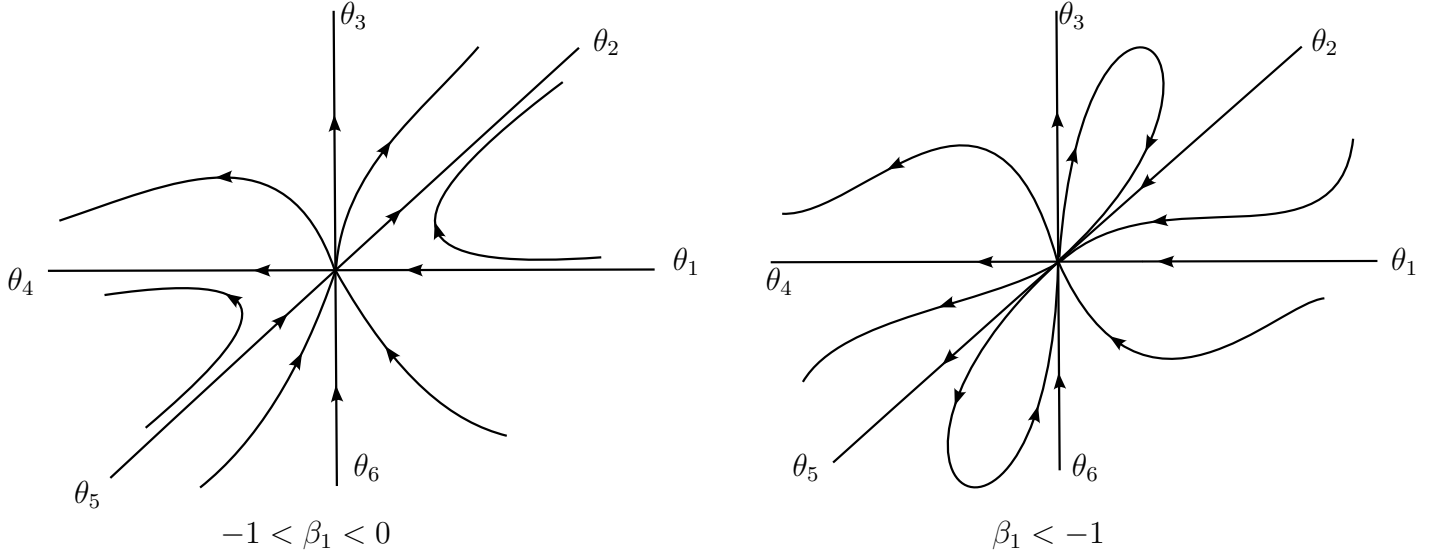


Figura 3.6: Retratos de fase locais de (3.13) em S_0 quando $\beta_1 \neq -1$.

Se $\beta_1 = -1$, a equação (3.14) tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} r' &= \frac{r}{4}[-2r + -7\cos(\theta) + 2r\cos(2\theta) - \cos(3\theta) + 5\sin(\theta) + \sin(3\theta)], \\ \theta' &= \cos(\theta)\sin(\theta)[\cos(\theta) - \sin(\theta)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Observa-se que os pontos de equilíbrio são os mesmos que da equação (3.14). A matriz Jacobiana é calculada nesses pontos de equilíbrio, resultando em:

$$JH(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de onde concluímos que o ponto $(0,0)$ é uma sela hiperbólica,

$$JH(0,\pi/4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

que é uma matriz semi-hiperbólica,

$$JH(0,\pi/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de onde concluímos que o ponto $(0,\pi/2)$ é um nó instável hiperbólico,

$$JH(0,\pi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

de onde concluímos que o ponto $(0, \pi)$ é uma sela hiperbólica,

$$JH(0, 5\pi/4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

que é uma matriz semi-hiperbólica,

$$JH(0, 3\pi/2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

de onde concluímos que o ponto $(0, 3\pi/2)$ é um nó estável hiperbólico.

Avaliando os pontos de equilíbrio $(0, \pi/4)$ e $(0, 5\pi/4)$ em (3.15) temos que $r' = -r^2/2$, então r é um atrator. A seguir, apresentamos a Figura 3.7, que ilustra o retrato de fase local em $S_0 = (0, 0)$ quando $\beta_1 = -1$.

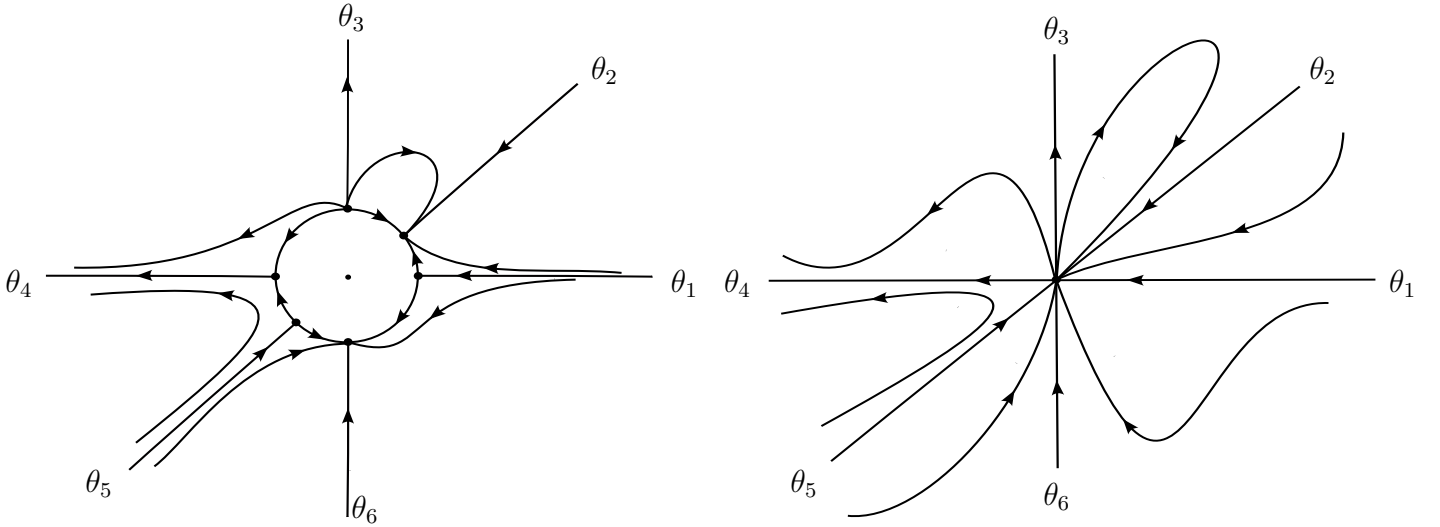


Figura 3.7: Retrato de fase local de (3.13) em S_0 quando $\beta_1 = -1$.

A expressão da compactificação de Poincaré do sistema (3.12) na carta local U_2 é

$$u' = (1 - \beta_1)u - 2uv + v^2, \quad v' = v - v^2. \quad (3.16)$$

$M_0 = (0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio que é um nó instável hiperbólico.

A seguir, apresentamos a Figura 3.8, que ilustra os retratos de fase globais para o caso analisado. Essa análise foi feita levando-se em conta os pontos de equilíbrio finitos e infinitos e a não existência de ciclos limites uma vez que a reta $y = 1$ é invariante.

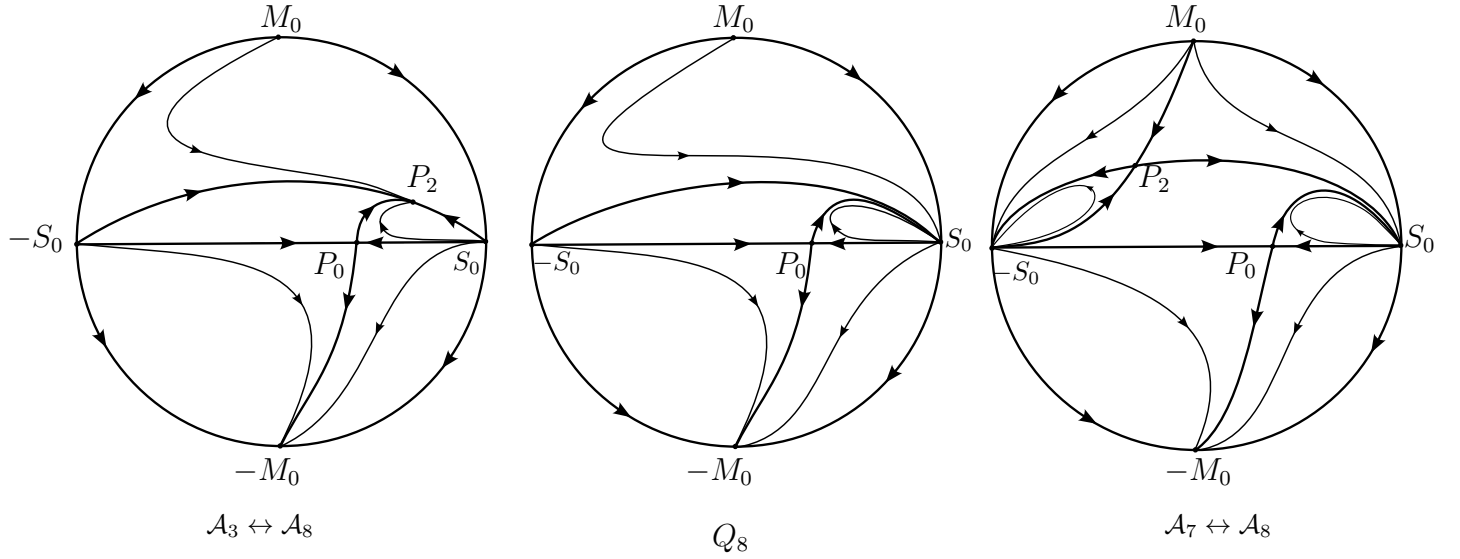


Figura 3.8: Retratos de fase globais de (3.12). $\beta_2 = 0$: $-1 < \beta_1 < 0$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_3$ e $\mathcal{A}_8$; $\beta_1 = -1$ corresponde à região Q_8 ; $\beta_1 < -1$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_7$ e $\mathcal{A}_8$. Veja a Figura 3.10.

3.2.5 Caso 5: $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 < 0$

Se $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 < 0$, a equação (1.1) tem a seguinte forma

$$x' = 1 - x, \quad y' = y(1 - y - \beta_2 x). \quad (3.17)$$

Os pontos de equilíbrio são $P_0 = (1, 0)$, que é uma sela hiperbólica e, $P_1 = (1, 1 - \beta_2)$, que é um nó estável hiperbólico.

Agora analisamos o comportamento dos pontos de equilíbrio no infinito.

A expressão da compactificação de Poincaré do sistema (3.17) na carta local U_1 é

$$u' = -\beta_2 u + 2uv - u^2 - uv^2, \quad v' = v^2 - v^3. \quad (3.18)$$

Os pontos de equilíbrio nesta carta são $S_0 = (0, 0)$ e $S_1 = (-\beta_2, 0)$.

Com base no Teorema 2.2.5, conclui-se que o ponto $S_0 = (0, 0)$ é uma sela-nó. Para o ponto de equilíbrio $S_1 = (-\beta_2, 0)$, realiza-se uma translação para a origem a fim de aplicar novamente o Teorema 2.2.5 permitindo concluir que este ponto também é uma sela-nó.

A expressão da compactificação de Poincaré do sistema (3.17) na carta local U_2 é

$$u' = u + \beta_2 u^2 - 2uv + v^2, \quad v' = v + \beta_2 uv - v^2. \quad (3.19)$$

$M_0 = (0, 0)$ é um ponto de equilíbrio que é um nó instável hiperbólico.

A seguir, apresentamos a Figura 3.9, que ilustra o retrato de fase global para o caso analisado. Essa análise foi feita levando-se em conta os pontos de equilíbrio finitos e infinitos e a não existência de ciclos limites uma vez que a reta $x = 1$ é invariante.

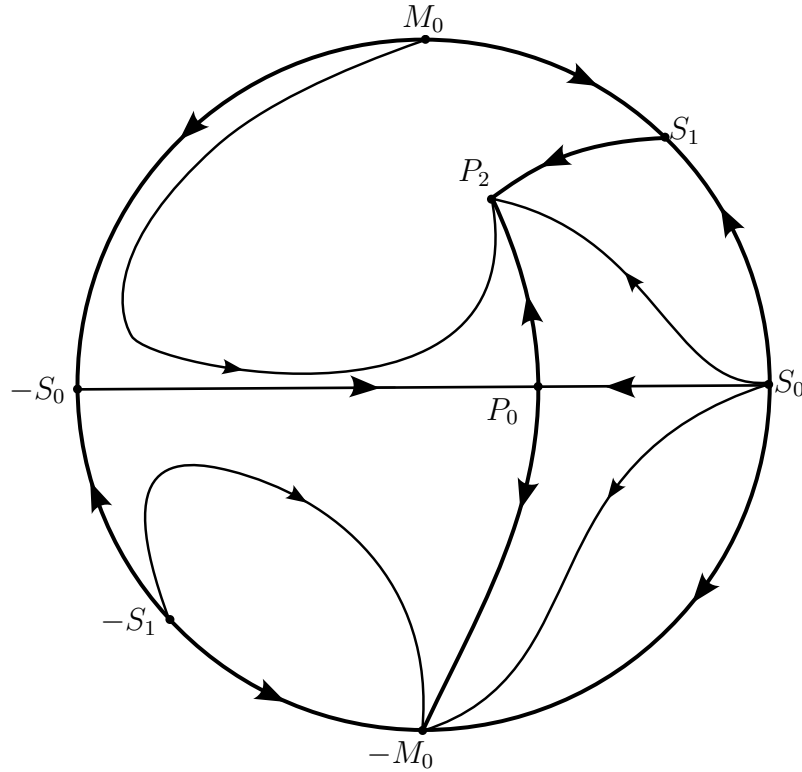


Figura 3.9: Retrato de fase global de (3.17). $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 < 0$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$.

Antes de iniciar o estudo da equação (1.1) com parâmetros nos quadrantes 2, 3 e 4, apresentamos o diagrama de bifurcação mostrado na Figura 3.10, no qual cada região $\mathcal{A}_i$ e $\mathcal{R}_i$ no plano corresponde a um retrato de fase global único. As curvas notáveis das bifurcações, representam transições entre diferentes comportamentos dinâmicos. Além disso, os pontos Q e Q_2 , que são pontos de Bogdanov-Takens, marcam mudanças qualitativas no sistema.

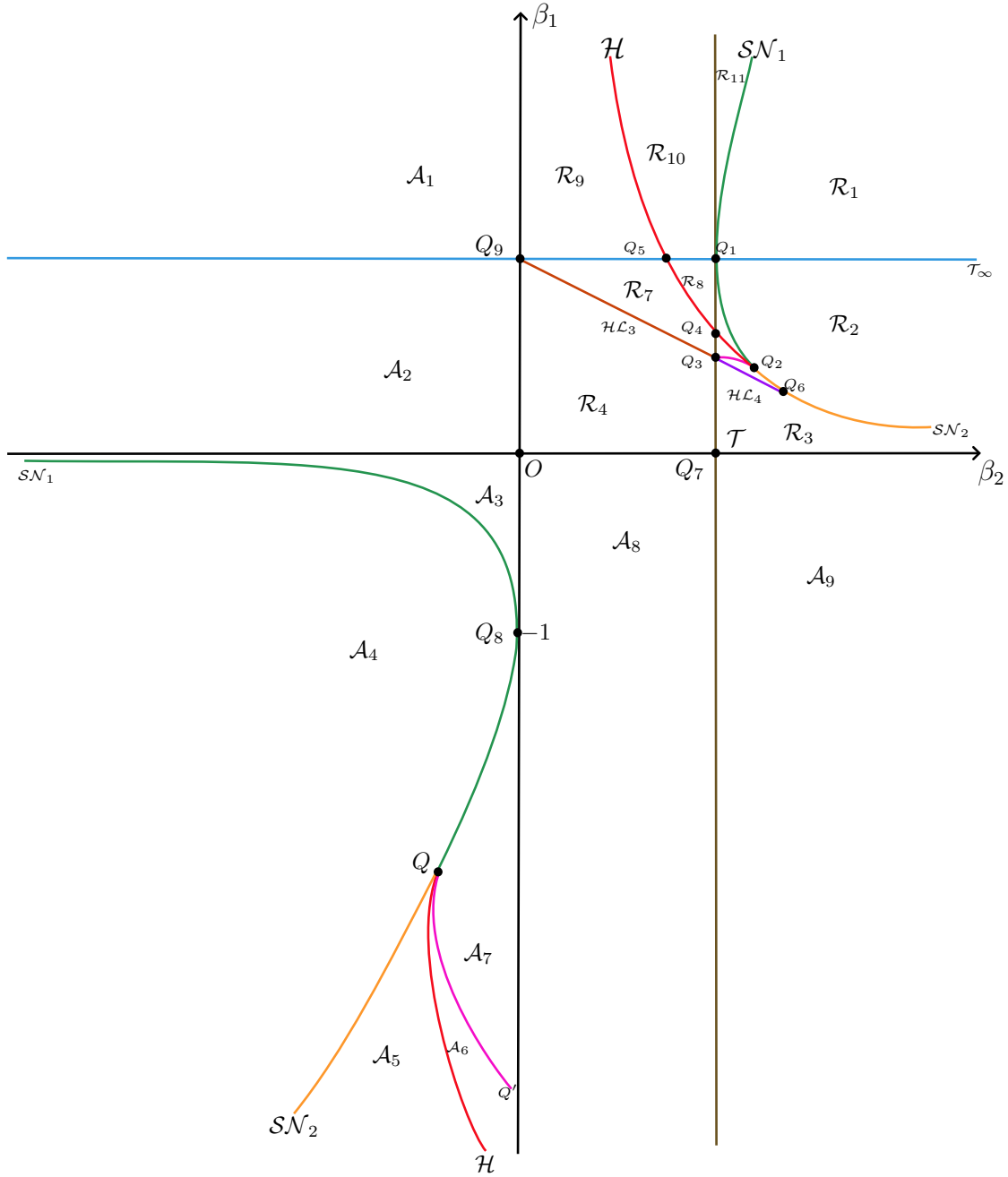


Figura 3.10: Diagrama de bifurcação do sistema (1.1). A curva $\mathcal{SN}$ das bifurcações sela-nó é a união das curvas $\mathcal{SN}_1$ (verde) e $\mathcal{SN}_2$ (laranja). A curva $\mathcal{H}$ (vermelha) é a curva das bifurcações de Hopf. A curva $\mathcal{T}$ (marrom) é a curva das bifurcações transcricas (finitas). A curva $\mathcal{T}_\infty$ (azul) é a curva de bifurcações transcricas infinitas. Os arcos $\widehat{Q_2 Q_3}$ (roxo) e $\widehat{Q Q'}$ são as curvas das bifurcações homoclínicas. A curva $\mathcal{HL}_3$ (marrom) é a curva de laços heteroclínicos ilimitados Γ_∞^3 . A curva $\mathcal{HL}_4$ (magenta) é a curva de 4-gráficos ilimitados Γ_∞^4 .

Capítulo 4

Estudo no segundo, terceiro e quarto quadrantes

Nas seções seguintes, analisaremos o comportamento dos retratos de fase globais do sistema (1.1) no segundo, terceiro e quarto quadrantes.

4.1 Segundo quadrante

Neste quadrante, se tem que $\beta_1 > 0$ e $\beta_2 < 0$. Os possíveis pontos de equilíbrio de (1.1) para este caso são

$$P_0 = (1, 0), P_1 = \left(\frac{\beta_1 + 1 + d}{2\beta_1\beta_2}, \frac{\beta_1 - 1 - d}{2\beta_1} \right) \text{ e } P_2 = \left(\frac{\beta_1 + 1 - d}{2\beta_1\beta_2}, \frac{\beta_1 - 1 + d}{2\beta_1} \right),$$

com

$$d = \sqrt{(\beta_1 + 1)^2 - 4\beta_1\beta_2} \geq 0.$$

A matriz Jacobiana é

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} -1 - \beta_1 y & -\beta_1 x \\ -\beta_2 y & 1 - 2y - \beta_2 x \end{pmatrix},$$

de onde concluímos que o traço e o determinante para os pontos de equilíbrio P_1 e P_2 são da seguinte forma

$$T = -1 - (1 + \beta_1)y \quad \text{e} \quad D = y(1 + \beta_1 y) - \beta_1\beta_2 xy.$$

A matriz Jacobiana avaliada no ponto de equilíbrio P_0 é

$$JF(P_0) = \begin{pmatrix} -1 & -\beta_1 \\ 0 & 1 - \beta_2 \end{pmatrix},$$

e como $1 - \beta_2 > 0$, segue-se que P_0 é uma sela hiperbólica.

A seguir, analisaremos a natureza dos pontos de equilíbrio por meio do traço e do determinante da matriz Jacobiana, além de determinar em qual quadrante eles se encontram.

Primeiramente, consideramos o ponto de equilíbrio $P_1 = (x_1, y_1)$, dado por

$$P_1 = \left(\frac{\beta_1 + 1 + d}{2\beta_1\beta_2}, \frac{\beta_1 - 1 - d}{2\beta_1} \right).$$

As condições para x_1 e y_1 serem negativos são

$$0 < \beta_1 + 1 \Rightarrow d < \beta_1 + 1 + d < 2d,$$

o que implica

$$x_1 < \frac{d}{2\beta_1\beta_2} < 0,$$

e

$$\beta_1 + 1 < d \Rightarrow \beta_1 - 1 - d < -2,$$

logo,

$$y_1 < \frac{-1}{\beta_1} < 0.$$

Como x_1 e y_1 são sempre negativos, concluímos que o ponto de equilíbrio P_1 pertence ao terceiro quadrante.

Para verificar a existência de uma bifurcação de Hopf, analisamos o traço e o determinante da matriz Jacobiana em P_1 . As condições necessárias para a bifurcação de Hopf são $T = 0$ e $D > 0$.

No cálculo do traço, temos que

$$y_1 < \frac{-1}{\beta_1},$$

o que implica

$$-1 + \frac{1 + \beta_1}{\beta_1} < -1 - (1 + \beta_1)y_1 = T.$$

Como resultado,

$$T > \frac{1}{\beta_1} > 0.$$

Portanto, o traço é sempre positivo e não se anula, indicando que não ocorre uma bifurcação de Hopf.

Quanto ao determinante, sabemos que

$$D = y_1(1 + \beta_1 y_1) - \beta_1 \beta_2 x_1 y_1.$$

Dado que $y_1(1 + \beta_1 y_1) > 0$ e $-\beta_1 \beta_2 x_1 y_1 > 0$, concluímos que $D > 0$.

Dessa forma, com $T > 0$ e $D > 0$ para P_1 no terceiro quadrante, o ponto de equilíbrio é um foco instável.

Consideramos agora o ponto de equilíbrio $P_2 = (x_2, y_2)$, definido por

$$P_2 = \left(\frac{\beta_1 + 1 - d}{2\beta_1 \beta_2}, \frac{\beta_1 - 1 + d}{2\beta_1} \right).$$

Para analisar a localização deste ponto no plano, verificamos as condições para x_2 e y_2 .

Sabemos que

$$\beta_1 + 1 < d \Rightarrow \beta_1 + 1 - d < 0 \Rightarrow x_2 > 0.$$

Além disso, como

$$\beta_1 + 1 < d \Rightarrow 2\beta_1 < \beta_1 - 1 + d,$$

obtemos

$$\frac{2\beta_1}{2\beta_1} < \frac{\beta_1 - 1 + d}{2\beta_1} = y_2 \Rightarrow y_2 > 1.$$

Assim, como $x_2 > 0$ e $y_2 > 0$, concluímos que o ponto de equilíbrio P_2 pertence ao primeiro quadrante.

Para determinar a natureza desse ponto, analisamos o traço e o determinante da matriz Jacobiana avaliados em P_2 .

No cálculo do traço, temos

$$T = -1 - (1 + \beta_1)y.$$

Como $y > 0$, segue que $T < 0$.

Já para o determinante, verificamos que

$$D = y(1 + \beta_1 y) - \beta_1 \beta_2 xy.$$

Como $-\beta_1 \beta_2 xy > 0$ e $y(1 + \beta_1 y) > 0$, concluímos que $D > 0$.

Dessa forma, como o traço é negativo e o determinante é positivo, o ponto de equilíbrio P_2 é classificado como um foco estável ou um nó estável.

Observação 4.1.1. *Como os três pontos de equilíbrio pertencem regiões disjuntas, eles não se colidem, e portanto não existem bifurcações transcritical e nem sela-nó, além de não existir bifurcação de Hopf.*

A expressão da compactificação de Poincaré do sistema (1.1) na carta local U_2 é

$$u' = (1 - \beta_1)u + \beta_2 u^2 - 2uv + v^2, \quad v' = v + \beta_2 uv - v^2. \quad (4.1)$$

Os pontos de equilíbrio nesta carta local são $M_0 = (0, 0)$ e $M_1 = (\beta_1 - 1/\beta_2, 0)$.

A matriz Jacobiana do sistema (4.1) é

$$JG(u, v) = \begin{pmatrix} 1 - \beta_1 + 2\beta_2 u - 2v & -2u + 2v \\ \beta_2 v & 1 - 2v + \beta_2 u \end{pmatrix}.$$

A matriz Jacobiana avaliada nos pontos de equilíbrio M_0 é

$$JG(M_0) = \begin{pmatrix} 1 - \beta_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e a estabilidade de M_0 dependerá do valor que assume o parâmetro β_1 .

Se $0 < \beta_1 < 1$, então M_0 é um nó instável hiperbólico.

Se $\beta_1 = 1$, então $M_0 = M_1$ ponto transcritical que é topologicamente uma sela-nó.

Se $\beta_1 < 1$, então M_0 é uma sela hiperbólica.

A matriz Jacobiana avaliada no ponto de equilíbrio M_1 é

$$JG(M_1) = \begin{pmatrix} \beta_1 - 1 & \frac{2 - 2\beta_1}{\beta_2} \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

e a estabilidade dependerá do valor que assume o parâmetro β_1 .

Se $0 < \beta_1 < 1 \Rightarrow M_0$ é uma sela hiperbólica.

Se $\beta_1 = 1 \Rightarrow M_0 = M_1$ ponto transcrito que é topologicamente uma sela-nó.

Se $\beta_1 > 1 \Rightarrow M_1$ é um nó instável hiperbólico.

Proposição 4.1.1. *Defina o conjunto*

$$\mathcal{T}_\infty = \{(\beta_2, \beta_1) \mid \beta_1 = 1, \beta_2 < 0\}.$$

O ponto de equilíbrio $M_0 = (0, 0)$ é um ponto transcrito para parâmetros em $\mathcal{T}_\infty$.

Demonstração. Ver a prova da Proposição 5.1.2. ■

A expressão da compactificação de Poincaré do sistema (1.1) na carta local U_1 é

$$u' = -\beta_2 u + (\beta_1 - 1)u^2 + 2uv - uv^2, \quad v' = \beta_1 uv + v^2 - v^3. \quad (4.2)$$

Se $v = 0$, então $S_0 = (0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio nesta carta.

Para aplicar o Teorema 2.2.5 fazemos $\bar{u} = v$ e $\bar{v} = u$ e o sistema anterior se converte em

$$\bar{u}' = \beta_1 \bar{u}\bar{v} + \bar{u}^2 - \bar{u}^3 = A(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{v}' = -\beta_2 \bar{v} + (\beta_1 - 1)\bar{v}^2 + 2\bar{v}\bar{u} - \bar{v}\bar{u}^2 = -\beta_2 \bar{v} + B(\bar{u}, \bar{v}). \quad (4.3)$$

Seja $\bar{v} = f(\bar{u}) = a_1 \bar{u} + a_2 \bar{u}^2$ a expansão de Taylor da solução de $-\beta_2 \bar{v} + B(\bar{u}, \bar{v}) = 0$. Assim, segue que $a_1 = 0$ e $g(\bar{u}) = A(f(\bar{u}), \bar{u}) = \bar{u}^2 + \mathcal{O}(3)$. Então, como o expoente de menor grau de $g(\bar{u})$ é par, concluímos que $S_0 = (0, 0)$ é uma sela-nó.

A seguir, apresentamos a Figura 4.1, que ilustra os retratos de fase globais para o caso analisado. Essa análise foi feita levando-se em conta que o ponto de equilíbrio P_1 é um repulsor no terceiro quadrante ($x < 0, y < 0$). Para garantir que P_1 não está contido em uma região limitada por um ciclo limite aplicamos o Teorema 2.2.6 com a função $\phi(x, y) = 1/xy$. A divergência de $(\phi f, \phi g)$ tem a forma

$$\text{div}(\phi f, \phi g) = -\frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x},$$

a qual é sempre positiva na região $x < 0, y < 0$, garantindo a ausência de órbitas fechadas no terceiro quadrante. Como $y = 0$ é reta invariante e o campo que define (1.1) restrito

a $x = 0$ tem a primeira componente 1, não existe órbita fechada circulando o ponto de equilíbrio P_1 . O ponto de equilíbrio P_2 é um nó atrator no primeiro quadrante ($x > 0$, $y > 0$) e a divergência de $(\phi f, \phi g)$ é sempre negativa na região $x > 0$, $y > 0$, garantindo a ausência de órbita fechada no primeiro quadrante e, de modo análogo ao explicado acima, não existe órbita fechada circulando o ponto de equilíbrio P_2 . Além disso, a reta invariante $y = 0$ divide o plano de fase em duas regiões ($y > 0$ e $y < 0$), e a análise pode ser feita separadamente para cada região. Portanto, concluímos que não há ciclos limites em todo o plano de fase.

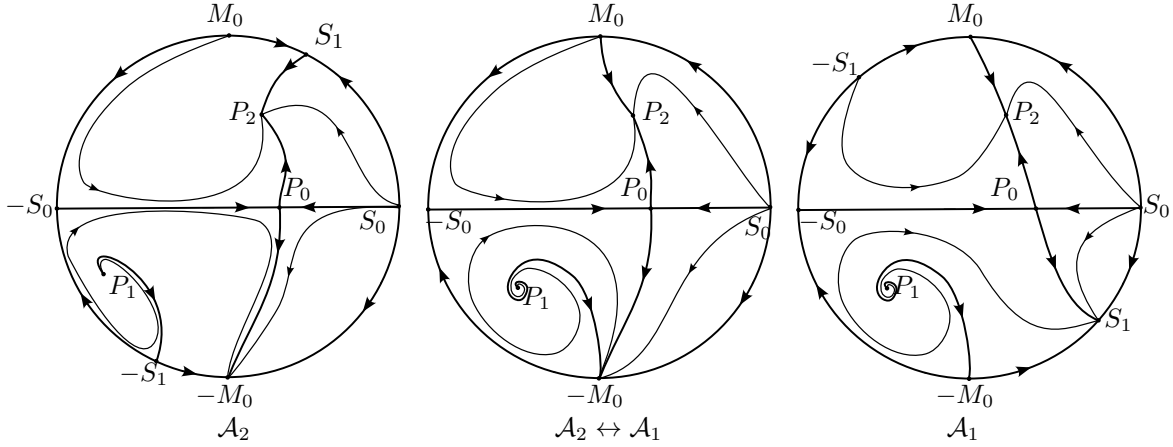


Figura 4.1: Retratos de fase globais de (1.1) para parâmetros no segundo quadrante. $0 < \beta_1 < 1$ corresponde à região $\mathcal{A}_2$; $\beta_1 = 1$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$; $\beta_1 > 1$ corresponde à região $\mathcal{A}_1$. Veja a Figura 3.10.

4.2 Terceiro quadrante

Neste quadrante, temos que $\beta_1 < 0$ e $\beta_2 < 0$. Os pontos de equilíbrio de (1.1) para este caso são

$$P_0 = (1, 0), \quad P_1 = \left(\frac{\beta_1 + 1 + d}{2\beta_1\beta_2}, \frac{\beta_1 - 1 - d}{2\beta_1} \right) \text{ e } P_2 = \left(\frac{\beta_1 + 1 - d}{2\beta_1\beta_2}, \frac{\beta_1 - 1 + d}{2\beta_1} \right),$$

com

$$d = \sqrt{(\beta_1 + 1)^2 - 4\beta_1\beta_2}.$$

Observação 4.2.1. Nos retratos de fase, os pontos de equilíbrio P_1 e P_2 existem somente

se $d \geq 0$, ou seja, quando a seguinte condição é satisfeita

$$\beta_2 \geq \frac{(\beta_1 + 1)^2}{4\beta_1}.$$

Além disso, para os pontos de equilíbrio P_1 e P_2 , a seguinte equação deve ser satisfeita

$$1 - y - \beta_2 x = 0.$$

A matriz Jacobiana é dada por

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} -1 - \beta_1 y & -\beta_1 x \\ -\beta_2 y & 1 - 2y - \beta_2 x \end{pmatrix}.$$

A seguir, analisaremos a natureza dos pontos de equilíbrio por meio do traço e do determinante da matriz Jacobiana, além de determinar em qual quadrante eles se encontram.

A matriz Jacobiana avaliada no ponto de equilíbrio P_0 é

$$JF(P_0) = \begin{pmatrix} -1 & -\beta_1 \\ 0 & 1 - \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz dada tem um autovalor positivo e outro negativo, então o ponto P_0 é uma sela hiperbólica.

Analisamos a localização e a natureza do ponto de equilíbrio $P_1 = (x_1, y_1)$, definido por

$$P_1 = \left(\frac{\beta_1 + 1 + d}{2\beta_1\beta_2}, \frac{\beta_1 - 1 - d}{2\beta_1} \right).$$

Se $-1 < \beta_1 < 0$, como $\beta_1 - 1 - d$ e β_1 são negativos, então y_1 é positivo. Além disso, um cálculo simples mostra que x_1 também é positivo. Assim, $P_1 = (x_1, y_1)$ pertence ao primeiro quadrante.

Se $\beta_1 = -1$, o ponto P_1 desaparece.

Se $\beta_1 < -1$, então $\beta_1 + 1 < 0$, o que implica

$$|\beta_1 + 1| = -1 - \beta_1.$$

Além disso,

$$0 \leq (\beta_1 + 1)^2 - 4\beta_1\beta_2 < (\beta_1 + 1)^2 \Rightarrow 0 \leq d < |\beta_1 + 1| = -1 - \beta_1.$$

Portanto,

$$1 + \beta_1 \leq 1 + \beta_1 + d < 0 \Rightarrow \frac{1 + \beta_1}{2\beta_1\beta_2} \leq x_1 < 0.$$

Concluimos que $P_1 = (x_1, y_1)$ pertence ao segundo quadrante.

Assim, temos

Se $-1 < \beta_1 < 0 \Rightarrow P_1$ pertence ao primeiro quadrante.

Se $\beta_1 = -1 \Rightarrow P_1$ desaparece.

Se $\beta_1 < -1 \Rightarrow P_1$ pertence ao segundo quadrante.

Analisamos agora o determinante da matriz Jacobiana no ponto P_1 .

No cálculo do determinante, levando em conta que $1 - y - \beta_2 x = 0$, temos

$$D = y(1 + \beta_1 y) - \beta_1 \beta_2 x y = y(1 + \beta_1 y - \beta_1(1 - y)).$$

Rearranjando os termos

$$D = y(1 + \beta_1 y - \beta_1 + \beta_1 y) = y(2\beta_1 y + 1 - \beta_1).$$

Como $d = -(2\beta_1 y + 1 - \beta_1)$, então

$$D = y(-d) < 0 \Rightarrow D < 0, \text{ sempre.}$$

Portanto, o ponto de equilíbrio P_1 é uma sela hiperbólica.

Em seguida, analisamos a localização e a natureza do ponto de equilíbrio $P_2 = (x_2, y_2)$, definido por

$$P_2 = \left(\frac{\beta_1 + 1 - d}{2\beta_1\beta_2}, \frac{\beta_1 - 1 + d}{2\beta_1} \right).$$

Se $-1 < \beta_1 < 0 \Rightarrow 0 < \beta_1 + 1 < 1$,

$$0 < d < \beta_1 + 1 \Rightarrow -\beta_1 - 1 < -d < 0,$$

$$0 < \beta_1 + 1 - d < \beta_1 + 1 \Rightarrow 0 < \frac{\beta_1 + 1 - d}{2\beta_1\beta_2} < \frac{\beta_1 + 1}{2\beta_1\beta_2},$$

$$\Rightarrow 0 < x_2 < \frac{\beta_1 + 1}{2\beta_1\beta_2} \Rightarrow x_2 > 0.$$

Se $\beta_1 < -1 \Rightarrow |\beta_1 + 1| = -1 - \beta_1$

$$\Rightarrow 0 < d < -1 - \beta_1 \Rightarrow \beta_1 + 1 < -d < 0$$

$$\Rightarrow \beta_1 + 1 - d < -2d \Rightarrow \frac{\beta_1 + 1 - d}{2\beta_1\beta_2} < \frac{-d}{2\beta_1\beta_2} \Rightarrow x_2 < 0.$$

$$\text{Se } -1 < \beta_1 < 0 \Rightarrow 0 < \beta_1 + 1 < 1,$$

$$0 < \beta_1 + 1 < 1 \Rightarrow \beta_1 - 1 < \beta_1 - 1 + d < 2\beta_1$$

$$\Rightarrow \frac{\beta_1 - 1}{2\beta_1} > \frac{\beta_1 - 1 - 1 + d}{2\beta_1} > \frac{2\beta_1}{2\beta_1}$$

$$\Rightarrow 1 < y_2 < \frac{\beta_1 - 1}{2\beta_1} \Rightarrow y_2 > 0.$$

$$\text{Se } \beta_1 < -1 \Rightarrow |\beta_1 + 1| = -1 - \beta_1$$

$$\Rightarrow 0 < d < -1 - \beta_1 \Rightarrow \beta_1 - 1 < \beta_1 - 1 + d < -2,$$

$$\frac{\beta_1 - 1}{2\beta_1} > \frac{\beta_1 - 1 - 1 + d}{2\beta_1} > \frac{-2}{2\beta_1} \Rightarrow \frac{-1}{\beta_1} < y_2 < \frac{\beta_1 - 1}{2\beta_1} \Rightarrow y_2 > 0.$$

Em conclusão:

Se $-1 < \beta_1 < 0$, então P_2 pertence ao primeiro quadrante.

Se $\beta_1 = 0$, então P_2 desaparece.

Se $\beta_1 < -1$, então P_2 pertence ao segundo quadrante.

Para determinar a natureza desse ponto, analisamos o traço e o determinante da matriz Jacobiana avaliados em P_2 .

No cálculo do determinante, levando em conta que $1 - y - \beta_2 x = 0$, temos

$$D = y(1 + \beta_1 y) - \beta_1 \beta_2 x y = y^2 + \beta_1 y^2 - \beta_1 y(1 - y)$$

$$= y^2 + \beta_1 y^2 - \beta_1 y + \beta_1 y^2 = y + 2\beta_1 y^2 - \beta_1 y$$

$$y(2\beta_1 y + 1 - \beta_1) = yd > 0 \Rightarrow D > 0 \text{ sempre.}$$

Já para o traço, temos os seguintes casos

Traço negativo: $T < 0$

- Se $-1 < \beta_1 < 0$ e $\frac{(\beta_1 + 1)^2}{4\beta_1} \leq \beta_2 < 0$.

- Se $-1 - \sqrt{2} < \beta_1 < -1$ e $\frac{(\beta_1 + 1)^2}{4\beta_1} \leq \beta_2 < 0$.

- Se $\beta_1 \leq -1 - \sqrt{2}$ e $\frac{(\beta_1 + 1)^2}{4\beta_1} < \beta_2 < 0$.

Traço Nulo: $T = 0$

- Se $\beta_1 \leq -1 - \sqrt{2}$ e $\beta_2 = \frac{\beta_1 + 2}{(\beta_1 + 1)^2}$.

Traço positivo: $T > 0$

- Se $\beta_1 < -1 - \sqrt{2}$ e $\frac{(\beta_1 + 1)^2}{4\beta_1} \leq \beta_2 < \frac{\beta_1 + 2}{(\beta_1 + 1)^2}$.

Observação 4.2.2. *O ponto de equilíbrio P_1 antes de colidir é uma sela hiperbólica, depois ele colide com o ponto de equilíbrio P_2 e ambos desaparecem. O ponto de equilíbrio P_2 possui determinante sempre positivo, e o sinal do traço varia de acordo com a mudança dos parâmetros.*

A expressão da compactificação de Poincaré do sistema (1.1) na carta local U_1 é

$$u' = -\beta_2 u + (\beta_1 - 1)u^2 + 2uv - uv^2, \quad v' = v^2 - v^3 + \beta_1 uv. \quad (4.4)$$

Os pontos de equilíbrio no infinito são $S_0 = (0, 0)$ e $S_1 = (\beta_2/(\beta_1 - 1), 0)$.

A matriz Jacobiana no ponto de equilíbrio S_0 é

$$JG(S_0) = \begin{pmatrix} -\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De (4.4), sem perda de generalidade, para simplificar o cálculo, tomando $\beta_2 = -1$ e $\beta_1 = -1$ temos que

$$u' = -u + 2uv - uv^2, \quad v' = v^2 - v^3 - \beta_1 uv. \quad (4.5)$$

Seguindo a sugestão do livro [2], página 338, fazemos $\bar{u} = v$ e $\bar{v} = u$ e (4.5) se converte em

$$\bar{u}' = \bar{u}^2 - \bar{u}^3 - \bar{u}\bar{v} = A(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{v}' = \bar{v} - 2\bar{v}^2 + 2\bar{u}\bar{v} - \bar{v}\bar{u}^2 = \bar{v} + B(\bar{u}, \bar{v}). \quad (4.6)$$

Seja $\bar{v} = f(\bar{u}) = a_1\bar{u} + a_2\bar{u}^2 + \dots$, a expansão de Taylor da solução de $-\bar{v} + B(\bar{u}, \bar{v}) = 0$, ao resolver temos que $a_1 = 0$ e $g(\bar{u}) = A(f(\bar{u}), \bar{u}) = \bar{u}^2 + \mathcal{O}(3)$. Então, como o expoente de

menor grau de $g(\bar{u})$ é par, pelo Teorema 2.2.5 concluímos que $S_0 = (0, 0)$ é uma sela-nó. A matriz Jacobiana no ponto de equilíbrio $S_1 = (\beta_2/(\beta_1 - 1), 0)$ é

$$JG(S_1) = \begin{pmatrix} \beta_2 & \frac{2\beta_2}{\beta_1 - 1} \\ 0 & \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1 - 1} \end{pmatrix}.$$

Como seus autovalores da matriz são negativos, conclui-se que S_1 é um nó estável hiperbólico.

A expressão da compactificação de Poincaré do sistema (1.1) na carta local U_2 é

$$u' = (1 - \beta_1)u + \beta_2u^2 - 2uv + v^2, \quad v' = v + \beta_2uv - v^2. \quad (4.7)$$

$S_0 = (0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio.

A matriz Jacobiana do sistema (4.7) é

$$JG(u, v) = \begin{pmatrix} 1 - \beta_1 + 2\beta_2u - 2v & -2u + 2v \\ \beta_2v & 1 - 2v + \beta_2u \end{pmatrix}.$$

A matriz Jacobiana avaliada no ponto de equilíbrio M_0 é

$$JG(M_0) = \begin{pmatrix} 1 - \beta_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como os autovalores da matriz anterior são positivos, então M_0 é um nó instável hiperbólico.

A seguir, apresentamos as Figuras 4.2 e 4.3 que ilustram os retratos de fase globais para o caso analisado. Essa análise foi feita levando-se em conta os seguintes fatos. Na região $\mathcal{A}_3$ o ponto de equilíbrio P_1 é uma sela, o que implica que não pode estar em uma região limitada por uma órbita fechada. Para o ponto P_2 , aplicamos o Teorema 2.2.6 com a função $\phi(x, y) = 1/xy$ no primeiro quadrante. Deste modo, $\text{div}(\phi f, \phi g) = -1/(x^2y) - 1/x$ é sempre negativa na região $x > 0$, $y > 0$, garantindo a ausência de órbita fechada circulando o ponto P_2 . Na região $\mathcal{A}_6$, segundo o Teorema 2.2.3, um ciclo limite instável único bifurca do ponto de equilíbrio P_1 quando os parâmetros cruzam transversalmente o conjunto $\mathcal{H}$ da região $\mathcal{A}_5$ para a região $\mathcal{A}_6$. Em outras regiões, não é difícil ver que não há ciclos limites. Veja a Figura 3.10.

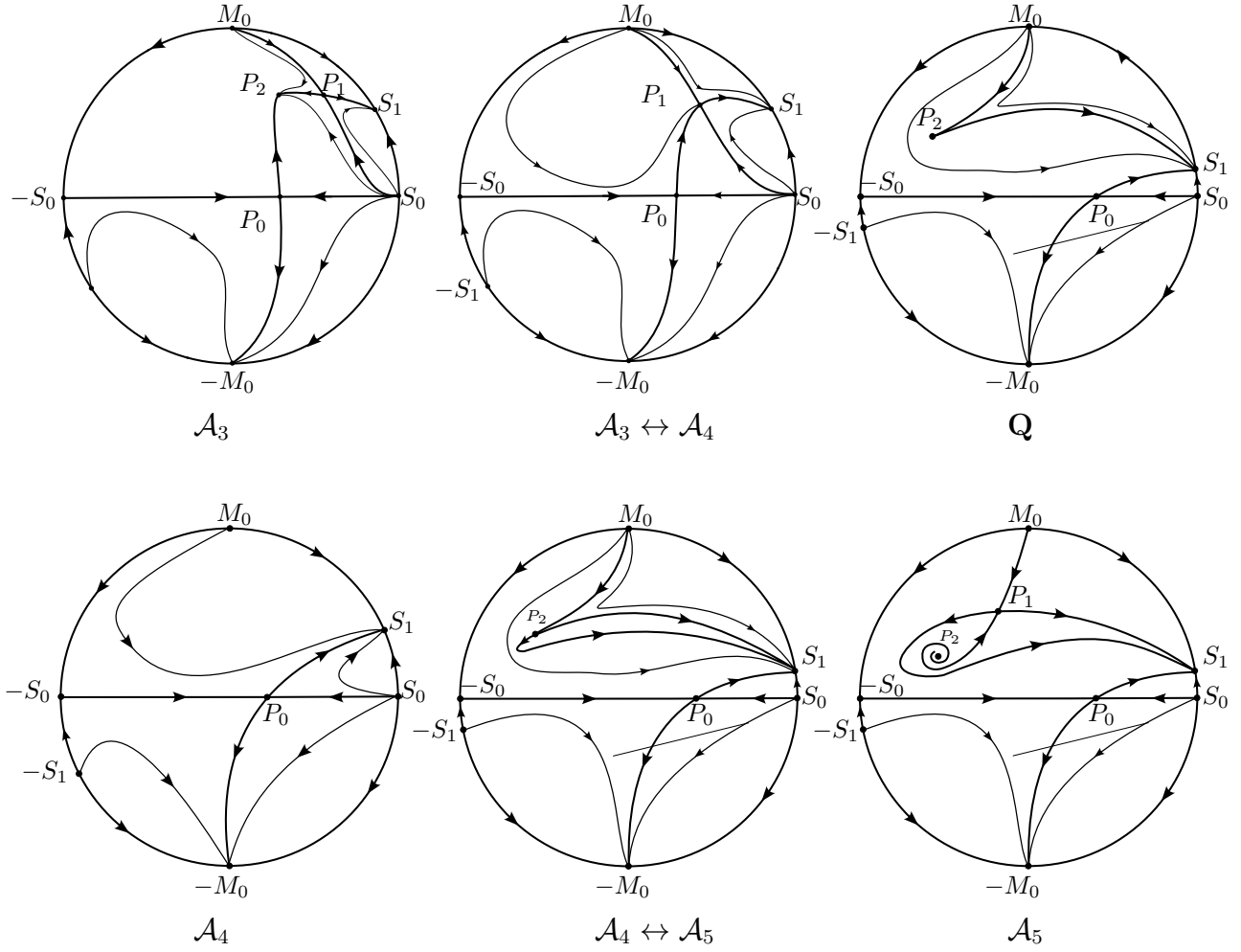


Figura 4.2: Retratos de fase globais de (1.1) para parâmetros no terceiro quadrante. $\beta_1 > -1$: $(\beta_1 + 1)^2/4\beta_1 < \beta_2$ corresponde à região $\mathcal{A}_3$; $\beta_2 = (\beta_1 + 1)^2/4\beta_1$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_3$ e $\mathcal{A}_4$; $\beta_2 < (\beta_1 + 1)^2/4\beta_1$ corresponde à região $\mathcal{A}_4$. $Q = (\beta_2, \beta_1) = ((1 - \sqrt{2})/2, -1 - \sqrt{2})$ o ponto de equilíbrio $P_1 = (-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ é um ponto de Bogdanov-Takens. $\beta_1 < -1 - \sqrt{2}$: $\beta_2 = (\beta_1 + 1)^2/4\beta_1$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_4$ e $\mathcal{A}_5$; $(\beta_1 + 1)^2/4\beta_1 < \beta_2 < (\beta_1 + 2)/(\beta_1 + 1)^2$ corresponde à região $\mathcal{A}_5$. Veja a Figura 3.10.

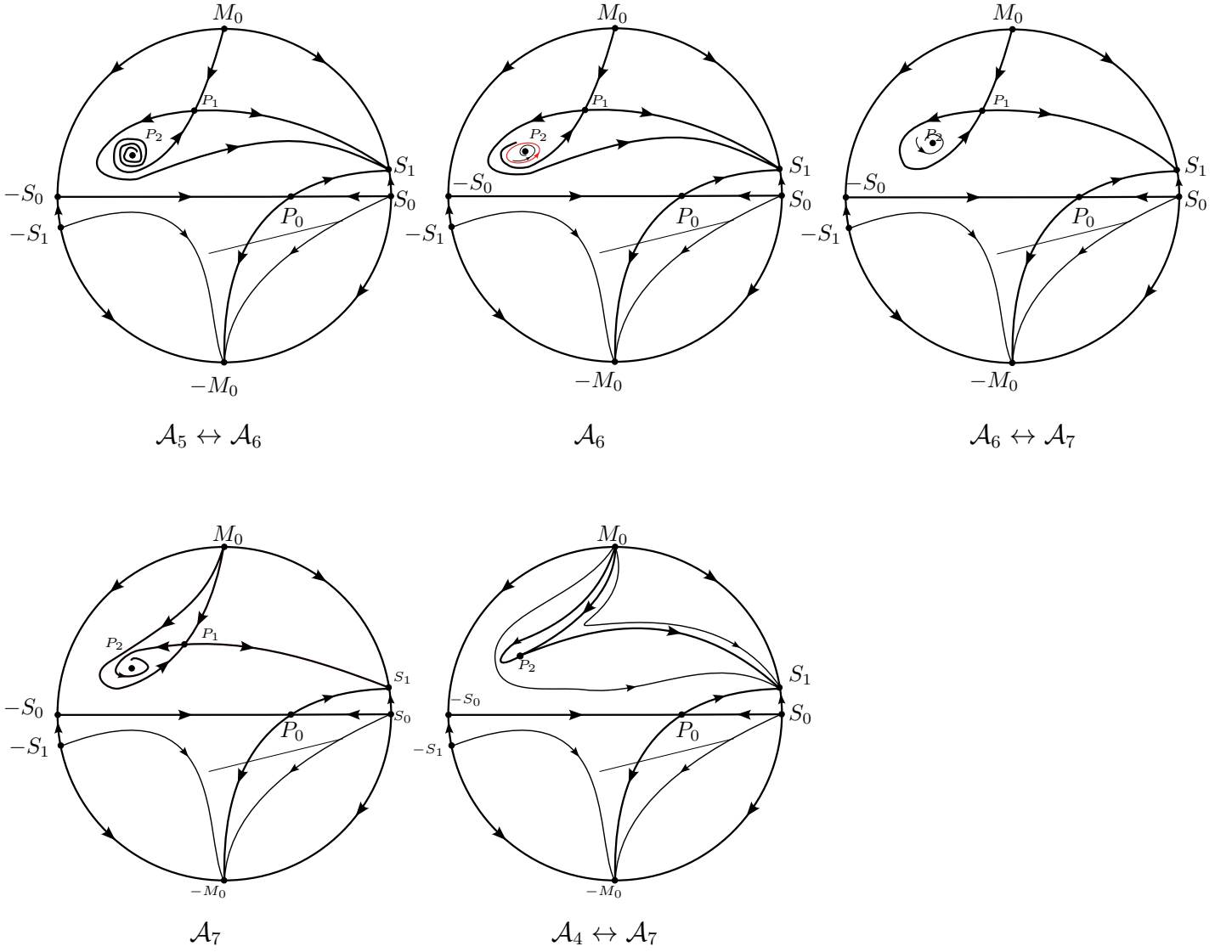


Figura 4.3: Retratos de fase globais de (1.1) para parâmetros no terceiro quadrante. $\beta_1 < -1 - \sqrt{2}$: $\beta_2 = (\beta_1 + 2)/(\beta_1 + 1)^2$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_5$ e $\mathcal{A}_6$; quando β_2 está entre as regiões delimitadas pela curva de Hopf e a curva dos laços homoclínicos corresponde à região $\mathcal{A}_6$. A curva de laços homoclínicos corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_6$ e $\mathcal{A}_7$. $-1 - \sqrt{2} < \beta_1 < -1$ e $(\beta_1 + 1)^2/4\beta_1 < \beta_2$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_4$ e $\mathcal{A}_7$. Veja a Figura 3.10.

4.3 Quarto quadrante

Neste quadrante, temos que $\beta_1 < 0$ e $\beta_2 > 0$. Os pontos de equilíbrio de (1.1) para este caso são

$$P_0 = (1, 0), \quad P_1 = \left(\frac{\beta_1 + 1 + d}{2\beta_1\beta_2}, \frac{\beta_1 - 1 - d}{2\beta_1} \right), \quad P_2 = \left(\frac{\beta_1 + 1 - d}{2\beta_1\beta_2}, \frac{\beta_1 - 1 + d}{2\beta_1} \right),$$

com

$$d = \sqrt{(\beta_1 + 1)^2 - 4\beta_1\beta_2}.$$

A matriz Jacobiana é dada por

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} -1 - \beta_1 y & -\beta_1 x \\ -\beta_2 y & 1 - 2y - \beta_2 x \end{pmatrix}.$$

A matriz Jacobiana avaliada no ponto de equilíbrio P_0 tem a forma

$$JF(P_0) = \begin{pmatrix} -1 & -\beta_1 \\ 0 & 1 - \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Vemos que a estabilidade de P_0 depende do valor que o parâmetro β_2 assume, e temos os seguintes casos: Se $0 < \beta_2 < 1$, então P_0 é uma sela hiperbólica; se $\beta_2 = 1$, então P_0 é um ponto transcítico que, topologicamente é uma sela-nó; e se $\beta_2 > 1$, então P_0 é um nó estável hiperbólico.

A seguir, analisaremos a natureza dos pontos de equilíbrio P_1 e P_2 por meio do traço e do determinante da matriz Jacobiana, além de determinar em qual quadrante eles se encontram.

Consideramos o ponto de equilíbrio $P_1 = (x_1, y_1)$, dado por

$$P_1 = \left(\frac{\beta_1 + 1 + d}{2\beta_1\beta_2}, \frac{\beta_1 - 1 - d}{2\beta_1} \right),$$

onde

$$d = \sqrt{(\beta_1 + 1)^2 - 4\beta_1\beta_2}.$$

É imediato que $y_1 > 0$, pois $\beta_1 - 1 - d < 0$ e $\beta_1 < 0$. Para x_1 , analisamos separadamente os casos de β_1 . Se $-1 \leq \beta_1 < 0$, então

$$x_1 < \frac{d}{2\beta_1\beta_2} \Rightarrow x_1 < 0.$$

Se $\beta_1 < -1$, então

$$-\beta_1 + 1 < 0 \Rightarrow -\beta_1 - 1 < d \Rightarrow 0 < \beta_1 + 1 + d \Rightarrow x_1 < 0.$$

Assim, como $x_1 < 0$ e $y_1 > 0$, concluímos que o ponto de equilíbrio P_1 pertence ao segundo quadrante. O determinante da matriz Jacobiana é dado por

$$D = y(1 + \beta_1 y) - \beta_1 \beta_2 xy.$$

Substituindo $y = y_1$, verificamos que

$$-d < 0 \Rightarrow \beta_1 - 1 - d < \beta_1 - 1.$$

Isso implica

$$2\beta_1 y < \beta_1 - 1 \Rightarrow 2\beta_1 y + 1 - \beta_1 < 0.$$

Multiplicando por y , obtemos

$$y(2\beta_1 y + 1 - \beta_1) < 0.$$

Rearranjando os termos

$$\beta_1 y^2 + y < \beta_1 y - \beta_1 y^2.$$

Ou seja,

$$y(1 + \beta_1 y) < \beta_1 y(1 - \beta_1) = \beta_1 y(\beta_2 x).$$

Portanto,

$$y(1 + \beta_1 y) - \beta_1 \beta_2 xy < 0 \Rightarrow D < 0.$$

Como $D < 0$, concluímos que o ponto de equilíbrio P_1 é uma sela hiperbólica.

Agora, considere o ponto de equilíbrio $P_2 = (x_2, y_2)$, dado por

$$P_2 = \left(\frac{\beta_1 + 1 - d}{2\beta_1 \beta_2}, \frac{\beta_1 - 1 + d}{2\beta_1} \right).$$

Para $-1 < \beta_1 < 0$, temos $0 < \beta_1 + 1 < 1$, o que implica $|\beta_1 + 1| = 1 + \beta_1$. Sob a condição $1 + \beta_1 < d$, segue que

$$\beta_1 + 1 - d < 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{\beta_1 + 1 - d}{2\beta_1 \beta_2} > 0.$$

$$\text{Se } \beta_1 = -1 \Rightarrow x_2 = \frac{-d}{-2\beta_2} > 0 \Rightarrow x_2 > 0.$$

$$\text{Se } \beta_1 < -1 \Rightarrow \beta_1 + 1 < 0 \Rightarrow |\beta_1 + 1| = -(\beta_1 + 1),$$

$$|\beta_1 + 1| < d \Rightarrow -\beta_1 - 1 < d \Rightarrow -d < \beta_1 + 1,$$

$$\begin{aligned} \beta_1 + 1 - d &< 2(\beta_1 + 1), \\ x_2 = \frac{\beta_1 + 1 - d}{2\beta_1\beta_2} &> \frac{2(\beta_1 + 1)}{2\beta_1\beta_2} > 0. \end{aligned}$$

Assim, temos que $x_2 > 0$.

A coordenada y_2 é dada por

$$y_2 = \frac{\beta_1 - 1 + d}{2\beta_1}.$$

Para $\beta_2 = 1$, obtemos $d = 1 - \beta_1$, o que implica $y_2 = 0$.

No caso em que $0 < \beta_2 < 1$, as desigualdades $(\beta_1 + 1)^2 < d^2 < (\beta_1 - 1)^2$ são satisfeitas.

Para $-1 < \beta_1 < 0$, temos

$$\beta_1 + 1 < d < 1 - \beta_1,$$

o que garante $0 < y_2 < 1$. Assim, P_2 pertence ao primeiro quadrante.

Se $\beta_1 = -1$, então $y_2 = 1 - \sqrt{\beta_2}$. Se $\beta_1 < -1$, então $|\beta_1 + 1| = -\beta_1 - 1$ e $|\beta_1 - 1| = 1 - \beta_1$, com $|\beta_1 + 1| < d < |1 - \beta_1| \Rightarrow -\beta_1 - 1 < d < 1 - \beta_1$.

Logo,

$$-2 < \beta_1 - 1 + d < 0 \Rightarrow \frac{-2}{2\beta_1} > \frac{\beta_1 + 1 - d}{2\beta_1} > 0 \Rightarrow 0 < y_2 < \frac{-1}{\beta_1}.$$

Portanto, temos que $y_2 > 0$.

Quando $\beta_2 = 1$, o ponto P_2 coincide com P_0 . Para $\beta_2 > 1$, temos $d > 1 - \beta_1$, o que implica

$$y_2 = \frac{d + \beta_1 - 1}{2\beta_1} < 0.$$

Portanto, P_2 pertence ao quarto quadrante.

Em resumo, o ponto de equilíbrio P_2 possui a seguinte localização, dependendo dos parâmetros: Se $0 < \beta_2 < 1$, P_2 pertence ao primeiro quadrante; se $\beta_2 = 1$, P_2 coincide com P_0 ; e se $\beta_2 > 1$, P_2 pertence ao quarto quadrante.

Observação 4.3.1. Quando $\beta_2 \rightarrow 1^-$ o ponto de equilíbrio P_2 que está no primeiro quadrante começa descer, se $\beta_2 = 1$ ele colide com P_0 e se $\beta_2 > 1$ passa para o quarto quadrante.

Analisamos agora o determinante da matriz Jacobiana no ponto $P_2 = (x_2, y_2)$. No cálculo do determinante, temos: Se $\beta_2 > 1$, $y(1 + \beta_2 y)$ e $-\beta_1 \beta_2 xy$ são negativos; portanto, $D = y(1 + \beta_1 y) - \beta_1 \beta_2 xy < 0$. Assim, como o determinante é negativo, o ponto de equilíbrio P_2 é uma sela hiperbólica.

Se $\beta_2 = 1$, então $P_2 = P_0$ é um ponto transcítico que topologicamente é uma sela-nó. Se $0 < \beta_2 < 1$, então P_2 pertence ao primeiro quadrante e, como

$$D = y(1 + \beta_1 y) - \beta_1 \beta_2 xy = y[1 + \beta_1 y - \beta_1(1 - y)] = y(1 + 2\beta_1 - \beta_1) = yd,$$

segue que $D > 0$.

Já para o traço, temos: Se $0 < \beta_1 < 1$, como o traço é da forma $T = -1 - (1 + \beta_1)y$, é fácil ver que ele é negativo se $\beta_1 \geq -1$. Se $\beta_1 < -1$, tem-se que $-\beta_1 - 1 < d < 1 - \beta_1$ e $-\beta_1 - 1 < 2\beta_1 y + 1 - \beta_1 < 1 - \beta_1$. Com algumas contas simples, conclui-se que $-1 - y < T < -y < 0$, portanto, o traço é negativo. Assim, se $0 < \beta_1 < 1$, o ponto de equilíbrio P_2 é um nó estável ou foco estável.

Enunciamos a seguinte proposição.

Proposição 4.3.1. *Defina o conjunto*

$$\mathcal{T} = \{(\beta_2, \beta_1) \mid \beta_2 = 1, \beta_1 < 0\}.$$

O ponto de equilíbrio $P_0 = (1, 0)$ de (1.1) é um ponto transcítico para parâmetros em $\mathcal{T}$.

Demonstração. Ver prova da Proposição 5.1.3. ■

Agora analisamos o comportamento dos pontos de equilíbrio no infinito. A expressão da compactificação de Poincaré do sistema (1.1) na carta local U_1 é

$$u' = -\beta_2 u + (\beta_1 - 1)u^2 + 2uv - uv^2, \quad v' = v^2 - v^3 + \beta_1 uv. \quad (4.8)$$

A matriz Jacobiana do sistema (4.8) está dada por

$$JG(u, v) = \begin{pmatrix} -\beta_2 + 2(\beta_1 - 1)u + 2v - v^2 & 2u - 2uv \\ \beta_1 v & 2v - 3v^2 + \beta_1 u \end{pmatrix}.$$

Os pontos de equilíbrio na carta local U_1 são $S_0 = (0, 0)$ e $S_1 = (\beta_2/(\beta_1 - 1), 0)$.

A matriz Jacobiana no ponto de equilíbrio S_0 é

$$JG(S_0) = \begin{pmatrix} -\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De (4.8), sem perda de generalidade tomando $\beta_2 = 1$ e $\beta_1 = -1$ e fazendo $\bar{u} = v$ e $\bar{v} = u$, temos que

$$\bar{u}' = \bar{u}^2 - \bar{v}^3 - \bar{u}\bar{v}, \quad \bar{v}' = -\bar{v} - 2\bar{v}^2 + 2\bar{u}\bar{v} - \bar{u}\bar{v}^2. \quad (4.9)$$

Na equação (4.9), o termo linear $-\bar{v}$ no lado direito da segunda equação é negativo, então de acordo com a Observação 2.2.2, ao substituir $\bar{u}$ por $-\bar{u}$, teremos que

$$\bar{u}' = \bar{u}^2 + \bar{v}^3 + \bar{u}\bar{v} = A(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{v}' = -\bar{v} - 2\bar{v}^2 - 2\bar{u}\bar{v} - \bar{v}\bar{u}^2 = -\bar{v} + B(\bar{u}, \bar{v}). \quad (4.10)$$

Seja $\bar{v} = f(\bar{u}) = a_1\bar{u} + a_2\bar{u}^2 + \dots$, a expansão de Taylor da solução de $-\bar{v} + B(\bar{u}, \bar{v}) = 0$. Ao resolver temos que $a_1 = 0$ e $g(\bar{u}) = A(f(\bar{u}), \bar{u}) = \bar{u}^2 + \mathcal{O}(3)$. Então, como o expoente de menor grau de $g(\bar{u})$ é par, concluímos pelo Teorema 2.2.5 que $S_0 = (0, 0)$ é uma sela-nó. A matriz Jacobiana de (4.8) no ponto de equilíbrio $S_1 = (\beta_2/(\beta_1 - 1), 0)$ é

$$JG(S_1) = \begin{pmatrix} \beta_2 & \frac{2\beta_2}{\beta_1 - 1} \\ 0 & \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1 - 1} \end{pmatrix}.$$

Como os autovalores dessa matriz são positivos, segue-se que S_1 é um nó instável hiperbólico.

A expressão da compactificação de Poincaré do sistema (1.1) na carta local U_2 é

$$u' = (1 - \beta_1)u + \beta_2 u^2 - 2uv + v^2, \quad v' = v + \beta_2 uv - v^2. \quad (4.11)$$

$M_0 = (0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio e, a matriz Jacobiana do sistema (4.11) é dada por

$$JG(u, v) = \begin{pmatrix} 1 - \beta_1 + 2\beta_2 u - 2v & -2u + 2v \\ \beta_2 v & 1 - 2v + \beta_2 u \end{pmatrix}.$$

A matriz Jacobiana avaliada no ponto de equilíbrio M_0 é dada por

$$JG(M_0) = \begin{pmatrix} 1 - \beta_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como os autovalores são positivos, então M_0 é um nó instável hiperbólico.

A seguir, apresentamos a Figura 4.4 que ilustra os retratos de fase globais para o caso analisado. Essa análise foi feita levando-se em conta que o ponto de equilíbrio P_1 é uma sela, o que implica que não pode estar em uma região limitada por uma órbita fechada. Para o ponto P_2 , que pertence ao primeiro quadrante quando $0 < \beta_2 < 1$, aplicamos o Teorema 2.2.6 com a função $\phi(x, y) = 1/xy$ no primeiro quadrante. Assim, $\text{div}(\phi f, \phi g) = -1/(x^2 y) - 1/x$ é sempre negativa na região $x > 0, y > 0$, garantindo a ausência de órbitas fechadas no quarto quadrante. Como $y = 0$ é reta invariante e o campo que define (1.1) restrito a $x = 0$ tem a primeira componente 1, não existe órbita fechada circulando o ponto de equilíbrio P_2 . Se $\beta_2 = 0$ não existe ciclo limite uma vez que a reta $y = 0$ é invariante. Se $\beta_2 > 1$ o ponto P_2 é uma sela, o que implica que não pode estar associado a ciclos limites.

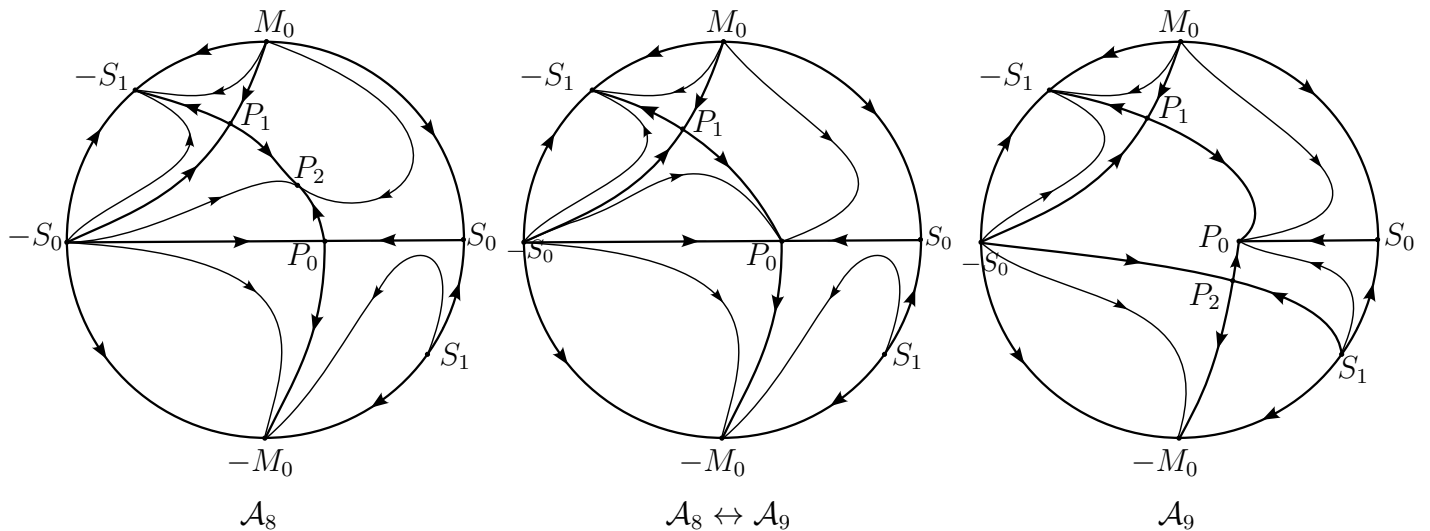


Figura 4.4: Retratos de fase globais de (1.1) para parâmetros no quarto quadrante. $0 < \beta_2 < 1$ corresponde à região $\mathcal{A}_8$; $\beta_2 = 1$ corresponde à transição entre as regiões $\mathcal{A}_8$ e $\mathcal{A}_9$; $\beta_2 > 1$ corresponde à região $\mathcal{A}_9$. Veja a Figura 3.10.

Capítulo 5

Proposições

Neste capítulo, apresentamos todas as proposições resultantes das análises realizadas nos Capítulos 3 e 4. Além disso, formularemos as proposições que generalizam esses resultados.

Proposição 5.0.1. *Defina o conjunto*

$$\mathcal{SN} = \left\{ (\beta_2, \beta_1) \mid \beta_2 = \frac{(\beta_1 + 1)^2}{4\beta_1}, \quad \beta_1 < 0, \quad \beta_1 \neq -1 - \sqrt{2}, \quad \beta_1 \neq -1 \right\}.$$

O ponto de equilíbrio

$$P_{1,2} = \left(\frac{2}{1 + \beta_1}, \frac{\beta_1 - 1}{2\beta_1} \right)$$

de (1.1) é um ponto sela-nó para parâmetros em $\mathcal{SN}$.

Demonstração. A prova apresentada a seguir é uma verificação das condições apresentadas no Teorema 2.2.1. Se $(\beta_2, \beta_1) \in \mathcal{SN}$, então o ponto de equilíbrio $P_{1,2} = (2/(1 + \beta_1), (\beta_1 - 1)/2\beta_1)$ é não hiperbólico, pois a matriz Jacobiana do sistema (1.1) no ponto $P_{1,2}$ tem autovalores

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{1 - 2\beta_1 - \beta_1^2}{2\beta_1}.$$

A matriz Jacobiana do sistema (1.1) em $P_{1,2}$ para valores de parâmetro em $\mathcal{SN}$ tem a forma

$$A_{\beta_1} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \beta_1}{2} & \frac{-2\beta_1}{\beta_1 + 1} \\ \frac{(1 - \beta_1)(1 + \beta_1)^2}{8\beta_1^2} & \frac{1 - \beta_1}{2\beta_1} \end{pmatrix}.$$

Segue-se que os autovetores direito e esquerdo de A_{β_1} associados ao autovalor zero são dados, respectivamente, por

$$V_0 = \left(-\frac{4\beta_1}{(1+\beta_1)^2}, 1 \right), \quad W_0 = \left(\frac{1-\beta_1^2}{4\beta_1^2}, 1 \right).$$

Assim, a condição **SN1** do Teorema 2.2.1 é satisfeita.

Denotando por F o campo de vetores que define o sistema (1.1) e por $X = (x, y)$, temos

$$D_x^2 F(P_{1,2}, \beta_1)(V_0, V_0) = \left(\frac{8\beta_1^2}{(1+\beta_1)^2}, 0 \right).$$

Portanto,

$$W_0 \cdot D_x^2 F(P_{1,2}, \beta_1)(V_0, V_0) = 2 \left(\frac{1-\beta_1}{1+\beta_1} \right) \neq 0, \quad \text{se } \beta_1 \neq -1.$$

Essa última condição **SN3** do Teorema 2.2.1, controla a não degenerescência do comportamento com respeito ao parâmetro e o efeito dominante do termo não linear quadrático do campo de vetores F .

A condição **SN2** do Teorema 2.2.1 é equivalente a cruzar a curva $\mathcal{SN}$ transversalmente no plano de parâmetros.

Se considerarmos a curva

$$C = \left\{ (-1, \beta_1) \mid -3 - 2\sqrt{2} - t < \beta_1 < -3 - 2\sqrt{2} + t, \quad t > 0 \right\},$$

então, para todo $(\beta_2, \beta_1) \in C \setminus \{-1, -3 - 2\sqrt{2}\}$, temos que

$$W_0 \cdot \frac{dF}{d\beta_1}(P_{1,2}, \beta_1)(V_0, V_0) \neq 0.$$

Em resumo, a proposição está provada. ■

Proposição 5.0.2. *Defina o conjunto*

$$\mathcal{H} = \left\{ (\beta_2, \beta_1) \mid \beta_2 = \frac{\beta_1 + 2}{(\beta_1 + 1)^2}, \quad \beta_1 < -1 - \sqrt{2} \right\}.$$

O ponto de equilíbrio

$$P_1 = \left(1 + \beta_1, -\frac{1}{1 + \beta_1} \right)$$

de (1.1) é um ponto de Hopf para parâmetros em $\mathcal{H}$.

Demonstração. A prova apresentada a seguir é uma verificação das condições apresentadas no Teorema 2.2.3. Se $(\beta_2, \beta_1) \in \mathcal{H}$, então $P_1 = (1 + \beta_1, -1/(1 + \beta_1))$.

Fazendo a translação de P_1 para a origem, o sistema (1.1) assume a seguinte forma

$$x' = -\frac{1}{1 + \beta_1}x - \beta_1(\beta_1 + 2)y - \beta_1xy, \quad y' = \frac{\beta_1 + 2}{(\beta_1 + 1)^3}x + \frac{1}{1 + \beta_1}y - \frac{\beta_1 + 2}{(\beta_1 + 1)^2}xy - y^2.$$

Após realizar os cálculos, o primeiro coeficiente de Lyapunov, conforme definido no Teorema 2.2.4 para o sistema anterior, é dado por

$$\sigma(\beta_1) = \frac{\pi(\beta_1 + 2)}{4(\beta_1 + 1)(\beta_1(\beta_1 + 2) - 1)^{3/2}} > 0.$$

Segundo o Teorema 2.2.3, um ciclo limite instável único bifurca do ponto de equilíbrio P_1 quando os parâmetros cruzam transversalmente o conjunto $\mathcal{H}$ da região $\mathcal{A}_5$ para a região $\mathcal{A}_6$. Veja a Figura 3.10. ■

Proposição 5.0.3. *Consideremos o sistema (1.1). O ponto de equilíbrio $P_1 = (-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ de (1.1) é um ponto de Bogdanov-Takens para os parâmetros*

$$Q = (\beta_2; \beta_1) = \left((1 - \sqrt{2})/2, -1 - \sqrt{2} \right).$$

Demonstração. A prova apresentada a seguir é uma verificação das condições apresentadas no Teorema 2.2.4. Para os parâmetros

$$\beta_1 = -1 - \sqrt{2}, \quad \beta_2 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2},$$

o ponto de equilíbrio P_1 tem coordenadas $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}/2)$. A matriz Jacobiana do sistema (1.1) em P_1 para β_1 e β_2 é dada por

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -2 - \sqrt{2} \\ \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2}) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

a qual possui um autovalor duplo zero. Como A não é a matriz nula, a condição **BT0** do Teorema 2.2.4 é satisfeita. Os vetores

$$q_0 = (2 + 2\sqrt{2}, 1), \quad q_1 = (6 + 4\sqrt{2}, 1),$$

$$p_0 = \left(\frac{\sqrt{2}-2}{4}, \frac{2+\sqrt{2}}{2} \right), \quad p_1 = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

satisfazem as equações $Aq_0 = A^T p_1 = 0, Aq_1 = q_0, A^T p_0 = p_1$ e $\langle q_0, p_1 \rangle = \langle q_1, p_0 \rangle = 0, \langle p_0, q_0 \rangle = \langle p_1, q_1 \rangle = 1$. A função bilinear simétrica tem a forma

$$B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \left(B_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)), B_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \right),$$

onde

$$B_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (1 + \sqrt{2})(x_2 y_1 + x_1 y_2),$$

$$B_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ((\sqrt{2} - 1)/2)(x_1 y_2 + x_2 y_1) - 2x_2 y_2.$$

Segue que

$$a = \langle p_1, B(q_0, q_0) \rangle = 2 + \sqrt{2} \neq 0,$$

$$b = \langle p_0, B(q_0, q_1) \rangle + \langle p_1, B(q_0, q_1) \rangle = \sqrt{2} \neq 0.$$

Desta forma, as condições **BT1** e **BT2** do Teorema 2.2.4 são satisfeitas. Finalmente, considere a aplicação

$$F(X, \alpha, \beta) = (f(X, \alpha, \beta), \text{tr } Df(X, \alpha, \beta), \det Df(X, \alpha, \beta)).$$

A matriz Jacobiana de $F(X, \alpha, \beta)$ em (P_1, β_1, β_2) é igual a

$$DF(X, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -2 - \sqrt{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2}) & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \\ \frac{-1 + \sqrt{2}}{2} & -1 + \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ \frac{1 - \sqrt{2}}{2} & -1 - \sqrt{2} & 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

a qual tem o determinante $-\sqrt{2} \neq 0$. Assim, a aplicação F é regular neste ponto e a condição **BT3** do Teorema 2.2.4 é satisfeita. Pelo Teorema 2.2.4, o sistema (1.1) sofre uma bifurcação de Bogdanov-Takens nos parâmetros (β_1, β_2) . Vale a pena mencionar que $s = \text{sign}(ab) = 1$, concordando com a análise da Proposição 5.0.2. ■

Como consequência da existência da bifurcação de Bogdanov-Takens, existe uma curva de bifurcações homoclínicas (associada aos laços homoclínicos do ponto de sela

P_1) no plano de parâmetros, denotada pelo arco $\widehat{QQ'}$ na Figura 3.10, em que $Q = ((1 - \sqrt{2})/2, -1 - \sqrt{2})$ corresponde ao ponto da bifurcação de Bogdanov-Takens e Q' é o ponto final da curva. Essa curva pode ser obtida numericamente por meio de métodos computacionais, como o MatCont [16], que foi utilizado neste caso, para aproximar as soluções numéricas do sistema dinâmico em estudo.

5.1 Proposições novas e generalizadas

5.1.1 Proposições novas

Proposição 5.1.1. *Definamos o conjunto*

$$\mathcal{P} = \{(\beta_2, \beta_1) \mid \beta_1 = 0, \beta_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

O ponto de equilíbrio $S_1 = (-\beta_2, 0)$ é um ponto transcrito para parâmetros em $\mathcal{P}$.

Demonstração. A prova apresentada a seguir é uma verificação das condições apresentadas no Teorema 2.2.2. O sistema (1.1) na carta local U_1 se escreve como

$$u' = -\beta_2 u + (\beta_2 - 1)u^2 + 2uv - v^2 u, \quad v' = \beta_1 uv + v^2 - v^3. \quad (5.1)$$

Chamemos de G o campo de vetores que define o sistema (5.1). A seguir, consideremos $\beta_1 = 0$. A matriz Jacobiana de G em $S_1 = (-\beta_2, 0)$ e $\beta_1 = 0$ tem a forma

$$A = \begin{pmatrix} \beta_2 & -2\beta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, os autovalores de A são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \beta_2$. Segue-se então que os autovetores direito e esquerdo associados ao autovalor $\lambda_1 = 0$ são

$$V_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } W_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

respectivamente. A condição **T1** do Teorema 2.2.2 é satisfeita.

Por um cálculo simples, obtemos

$$\frac{\partial G}{\partial \beta_1}(S_1, \beta_1 = 0) = (-u^2, uv) = (-\beta_2^2, 0),$$

segue-se que

$$W_0^\top \cdot \frac{\partial G}{\partial \beta_1}(S_1, \beta_1 = 0) = (0, 1) \cdot (-\beta_2^2, 0) = 0$$

e a condição **T2** do Teorema 2.2.2 é satisfeita. Como

$$D_x \left(\frac{\partial G}{\partial \beta_1} \right) (S_1, \beta_1 = 0) = \begin{pmatrix} -2\beta_2 & 0 \\ 0 & -\beta_2 \end{pmatrix},$$

então

$$W_0^\top \cdot \left[D_x \left(\frac{\partial G}{\partial \beta_1} \right) (S_1, \beta_1 = 0)(V_0) \right] = (0, 1) \cdot \left[\begin{pmatrix} -2\beta_2 & 0 \\ 0 & -\beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = -\beta_2 \neq 0.$$

e a condição **T3** do Teorema 2.2.2 é satisfeita.

Finalmente, como

$$W_0^\top \cdot [D_x^2 G(S_1, \beta_1 = 0)(V_0, V_0)] = (0, 1) \cdot (2\beta_2, 2) = 2 \neq 0, \forall \beta_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

e a condição **T4** do Teorema 2.2.2 é satisfeita. Isso completa a prova. ■

Observação 5.1.1. *Consideremos o seguinte conjunto*

$$\mathcal{R} = \{(\beta_2, \beta_1) \mid \beta_2 = 0, \beta_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

Neste conjunto, o ponto de equilíbrio semi-hiperbólico $S_0 = (0, 0)$, que é uma sela-nó, apresenta um comportamento característico de bifurcação.

A seguir, faremos uma descrição detalhada do comportamento da estabilidade local do ponto de equilíbrio $S_0 = (0, 0)$ à medida que os parâmetros β_1 e β_2 variam.

- **Quando $\beta_1 = 0$ e $-\epsilon \leq \beta_2 \leq \epsilon$, $\epsilon > 0$**

Se $\beta_2 \rightarrow 0^+$, o ponto de equilíbrio semi-hiperbólico S_1 , que é uma sela-nó, se aproxima do ponto de equilíbrio semi-hiperbólico S_0 , que também é uma sela-nó. Quando $\beta_2 = 0$, os dois pontos de equilíbrio colidem, tornando-se $S_0 = S_1$, um ponto de equilíbrio degenerado. Para $\beta_2 < 0$, o ponto S_1 reaparece, mas com as estabilidades de S_0 e S_1 invertidas em relação ao caso anterior. Esse comportamento sugere uma bifurcação transcítica dos pontos de equilíbrio sela-nó.

- **Quando** $0 < \beta_1 < 1$ e $-\epsilon \leq \beta_2 \leq \epsilon, \epsilon > 0$

Se $\beta_2 \rightarrow 0^+$, os pontos de equilíbrio P_1 e S_1 se aproximam do ponto de equilíbrio S_0 . Quando $\beta_2 = 0$, os três pontos de equilíbrio colidem, tornando-se um único ponto degenerado, isto é, $P_1 = S_0 = S_1$. Para $\beta_2 < 0$, os pontos S_1 e P_1 reaparecem, com P_1 surgindo a partir do antípoda de S_1 .

- **Quando** $\beta_1 = 1$ e $-\epsilon \leq \beta_2 \leq \epsilon, \epsilon > 0$

Se $\beta_2 \rightarrow 0^+$, o ciclo limite associado a P_1 cresce, enquanto P_1 se aproxima do ponto de equilíbrio S_0 . Quando $\beta_2 = 0$, todos os pontos do bordo do disco de Poincaré se tornam pontos de equilíbrio. Para $\beta_2 < 0$, o ponto P_1 reaparece, surgindo a partir do antípoda de S_0 .

- **Quando** $\beta_1 > 1$ e $-\epsilon \leq \beta_2 \leq \epsilon, \epsilon > 0$

Se $\beta_2 \rightarrow 0^+$, os pontos de equilíbrio P_1 e S_1 se aproximam do ponto de equilíbrio S_0 , e o ciclo limite associado a P_1 cresce até colidir com uma das separatrizes do ponto de equilíbrio P_0 e com uma parte da reta invariante $y = 0$. Quando $\beta_2 = 0$, os três pontos de equilíbrio colidem, tornando-se $P_1 = S_0 = S_1$, um ponto degenerado. Para $\beta_2 < 0$, os pontos S_1 e P_1 reaparecem, com P_1 surgindo a partir do antípoda de S_1 .

5.1.2 Proposições generalizadas

A partir das Proposições 3.1.5 e 4.1.1, enunciamos e provamos a seguinte proposição, que constitui uma generalização desses dois resultados.

Proposição 5.1.2. *Defina o conjunto*

$$\mathcal{T}_\infty = \{(\beta_2, \beta_1) \mid \beta_1 = 1, \beta_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

O ponto de equilíbrio $M_0 = (0, 0)$ é um ponto transcrito para parâmetros em $\mathcal{T}_\infty$.

Demonstração. A prova apresentada a seguir é uma verificação das condições apresentadas no Teorema 2.2.2. Seja G o campo vetorial que define o sistema (4.1) que depende do

parâmetro β_1 . A seguir, consideramos o valor da bifurcação $\beta_1 = 1$. A matriz Jacobiana de G em $M_0 = (0, 0)$ e $\beta_1 = 1$ tem a forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, os autovalores de A são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Segue-se que os autovetores direito e esquerdo associados ao autovalor zero coincidem e podem ser escritos como

$$V_0 = W_0 = (1, 0).$$

Assim, a hipótese **T1** do Teorema 2.2.2 é satisfeita. Por um cálculo simples, obtemos

$$\frac{\partial G}{\partial \beta_1}(M_0, \beta_1 = 1) = (0, 0).$$

Segue-se que

$$W_0 \cdot \frac{\partial G}{\partial \beta_1}(M_0, \beta_1 = 1) = 0,$$

e a hipótese **T2** do Teorema 2.2.2 também é satisfeita. Como

$$W_0 \cdot D_x \left(\frac{\partial G}{\partial \beta_1} \right) (M_0, \beta_1 = 1)(V_0) = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1,$$

segue-se que a hipótese **T3** do Teorema 2.2.2 é satisfeita. Agora, como

$$D_x^2 G(M_0, \beta_1 = 1)(V_0, V_0) = (2\beta_2, 0),$$

obtemos

$$W_0 \cdot D_x^2 G(M_0, \beta_1 = 1)(V_0, V_0) = (1, 0) \cdot (2\beta_2, 0) = 2\beta_2 \neq 0, \forall \beta_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A hipótese **T4** do Teorema 2.2.2 é satisfeita. Isso completa a prova da proposição. ■

Apresentamos a seguinte proposição, juntamente com sua prova, que generaliza as Proposições 3.1.4, 3.2.1 e 4.3.1.

Proposição 5.1.3. *Defina o conjunto*

$$\mathcal{T} = \{(\beta_2, \beta_1) \mid \beta_2 = 1, \quad \beta_1 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}.$$

O ponto de equilíbrio $P_0 = (0, 0)$ é um ponto transcítico para parâmetros em $\mathcal{T}$.

Demonstração. A prova apresentada a seguir é uma verificação das condições apresentadas no Teorema 2.2.2. Seja F o campo vetorial que define o sistema (1.1). É fácil ver que P_0 é um ponto de equilíbrio para todo $\beta_1 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. A matriz Jacobiana de F em P_0 e $\beta_2 = 1$ tem a forma

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\beta_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovalores de A são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$. Segue-se que os autovetores direito e esquerdo de A associados ao autovalor zero são dados, respectivamente, por

$$V_0 = (-\beta_1, 1), \quad W_0 = (0, 1).$$

Assim, a hipótese **T1** do Teorema 2.2.2 é satisfeita. A hipótese **T2** do Teorema 2.2.2 também é satisfeita por um cálculo fácil. Como

$$W_0 \cdot D_x \left(\frac{dF}{d\beta_2} \right) (P_0, \beta_2 = 1)(V_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta_1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1,$$

segue-se que a hipótese **T3** do Teorema 2.2.2 é satisfeita. Agora, como

$$D_x^2 F(P_0, \beta_2 = 1)(V_0, V_0) = (2\beta_1^2, 2(\beta_1 - 1)),$$

obtemos

$$W_0 \cdot D_x^2 F(P_0, \beta_2 = 1)(V_0, V_0) = (0, 1) \cdot (2\beta_1^2, 2(\beta_1 - 1)) = 2(\beta_1 - 1) \neq 0,$$

para todo $\beta_1 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. A hipótese **T4** do Teorema 2.2.2 é satisfeita. Isso completa a prova desta proposição. ■

Teorema 5.1.1. Para $(\beta_2, \beta_1) \in \mathbb{R}^2$ onde $\beta_1 = 1 - \beta_2/2$, a reta $f(x, y) = 2x + y - 2 = 0$ é uma reta invariante do sistema (1.1).

Demonstração. Seja F o campo de vetores associado ao sistema (1.1). Vamos mostrar que existe $k(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ que satisfaz a condição

$$F \cdot \nabla f = k \cdot f.$$

Calculamos $F(x, y) \cdot \nabla f(x, y)$,

$$F(x, y) \cdot \nabla f(x, y) = \left(1 - x - \left(1 - \frac{\beta_2}{2} \right) xy, y - y^2 - \beta_2 xy \right) \cdot (2, 1).$$

Expandindo o produto escalar, obtemos

$$F(x, y) \cdot \nabla f(x, y) = 2 \left(1 - x - \left(1 - \frac{\beta_2}{2} \right) xy \right) + 1 (y - y^2 - \beta_2 xy).$$

Após simplificação, resulta em

$$2 - 2x - 2xy + y - y^2 = -(y + 1)(2x + y - 2).$$

Portanto,

$$F(x, y) \cdot \nabla f(x, y) = -(y + 1)(2x + y - 2) = -(y + 1)f(x, y).$$

Definindo $k(x, y) = -(y + 1) \in \mathbb{R}[x, y]$, o teorema está demonstrado. ■

Observação 5.1.2. *É imediato verificar que a reta $y = 0$ é uma reta invariante do sistema (1.1).*

Como síntese dos resultados obtidos, são apresentadas, a seguir, duas tabelas e todos os retratos de fase estudados nesta dissertação. A partir da análise realizada na parte finita e em cada carta local no infinito para os parâmetros β_1 e β_2 , se conclui que cada retrato de fase local corresponde a um único retrato de fase global no disco de Poincaré.

Nas tabelas a seguir, usamos as seguintes notações e pontos: PP (retrato de fase), PV (valores dos parâmetros), S (sela), UN (nó instável ou foco instável), SN (nó estável ou foco estável), O (origem), E (elíptico) e S-N (sela-nó topológica).

A Tabela 5.1, extraída do artigo [4], descreve a classificação topológica dos pontos de equilíbrio do sistema (1.1) no disco de Poincaré, em função dos parâmetros positivos β_1 e β_2 . Por sua vez, a Tabela 5.2 apresenta a classificação topológica dos pontos de equilíbrio do mesmo sistema no disco de Poincaré para os parâmetros β_1 e β_2 não positivos.

Tabela 5.1: Classificação topológica de cada ponto de equilíbrio do sistema (1.1) no disco de Poincaré, em função dos valores positivos de β_2 e β_1 .

Regiões	P_0	P_1	P_2	S_0	S_1	M_0	PP	PV: (β_2, β_1)
$\mathcal{R}_1$	SN	$\nexists$	$\nexists$	S-N	UN	S	$\mathcal{R}_1$	(2, 2)
$\mathcal{R}_2$	SN	$\nexists$	$\nexists$	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_1$	(2, 1/2)
$\mathcal{R}_3$	SN	UN	S	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_3$	(2, 1/10)
$\mathcal{R}_4$	S	UN	SN	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_4$	(1/2, 1/2)
$\mathcal{R}_5$	SN	UN	S	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_5$	(21/20, 53/100)
$\mathcal{R}_6$	SN	SN	S	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_6$	(21/20, 3/5)
$\mathcal{R}_7$	S	UN	SN	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_7$	(1/2, 9/10)
$\mathcal{R}_8$	S	SN	SN	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_8$	(10/11, 10/11)
$\mathcal{R}_9$	S	UN	SN	S-N	UN	S	$\mathcal{R}_7$	(1/2, 4/3)
$\mathcal{R}_{10}$	S	SN	SN	S-N	UN	S	$\mathcal{R}_8$	(3/4, 2)
$\mathcal{R}_{11}$	SN	S	SN	S-N	UN	S	$\mathcal{R}_{11}$	(11/10, 3)
$\mathcal{R}_{12}$	SN	UN	S	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_{12}$	(21/20, 51/100)
$\mathcal{R}_1 \leftrightarrow \mathcal{R}_2$	SN	$\nexists$	$\nexists$	S-N	$\nexists$	S-N	$\mathcal{R}_1 \leftrightarrow \mathcal{R}_2$	(2, 1)
$\mathcal{R}_2 \leftrightarrow \mathcal{R}_3$	SN	S-N	$\nexists$	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_2 \leftrightarrow \mathcal{R}_3$	(9/5, 1/5)
$\mathcal{R}_3 \leftrightarrow \mathcal{R}_4$	S-N	UN	$\nexists$	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_3 \leftrightarrow \mathcal{R}_4$	(1, 1/5)
$\mathcal{R}_4 \leftrightarrow \mathcal{R}_7$	S	UN	SN	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_4 \leftrightarrow \mathcal{R}_7$	(1/2, 3/4)
$\mathcal{R}_7 \leftrightarrow \mathcal{R}_8$	S	SN	SN	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_8$	(4/5, $(-3 + \sqrt{105})/8$)
$\mathcal{R}_5 \leftrightarrow \mathcal{R}_6$	SN	SN	S	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_6$	(112/100, $(-31 + \sqrt{3425})/56$)
$\mathcal{R}_5 \leftrightarrow \mathcal{R}_7$	S-N	UN	$\nexists$	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_5 \leftrightarrow \mathcal{R}_7$	(1, 53/100)
$\mathcal{R}_5 \leftrightarrow \mathcal{R}_{12}$	SN	UN	S	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_5 \leftrightarrow \mathcal{R}_{12}$	$\approx (21/20, 52/100)$
$\mathcal{R}_6 \leftrightarrow \mathcal{R}_8$	S-N	SN	$\nexists$	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_6 \leftrightarrow \mathcal{R}_8$	(1, 7/10)
$\mathcal{R}_2 \leftrightarrow \mathcal{R}_6$	SN	S-N	$\nexists$	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_2 \leftrightarrow \mathcal{R}_6$	(16/15, 3/5)
$\mathcal{R}_7 \leftrightarrow \mathcal{R}_9$	S	UN	SN	S-N	$\nexists$	S-N	$\mathcal{R}_7 \leftrightarrow \mathcal{R}_9$	(1/2, 1)
$\mathcal{R}_8 \leftrightarrow \mathcal{R}_{10}$	S	SN	SN	S-N	$\nexists$	S-N	$\mathcal{R}_8 \leftrightarrow \mathcal{R}_{10}$	(5/6, 1)
$\mathcal{R}_9 \leftrightarrow \mathcal{R}_{10}$	S	SN	SN	S-N	UN	S	$\mathcal{R}_8$	(1/2, $\sqrt{3}$)
$\mathcal{R}_{10} \leftrightarrow \mathcal{R}_{11}$	S-N	$\nexists$	SN	S-N	UN	S	$\mathcal{R}_{10} \leftrightarrow \mathcal{R}_{11}$	(1, 2)
$\mathcal{R}_1 \leftrightarrow \mathcal{R}_{11}$	SN	S-N	$\nexists$	S-N	UN	S	$\mathcal{R}_1 \leftrightarrow \mathcal{R}_{11}$	(9/8, 2)
$\mathcal{R}_2 \leftrightarrow \mathcal{R}_{12}$	SN	S-N	$\nexists$	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_2 \leftrightarrow \mathcal{R}_{12}$	(13/10, $(8 - \sqrt{39})/5$)
$\mathcal{R}_3 \leftrightarrow \mathcal{R}_{12}$	SN	UN	S	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_3 \leftrightarrow \mathcal{R}_{12}$	(21/20, 19/40)
$\mathcal{Q}_1$	SN	$\nexists$	$\nexists$	S-N	$\nexists$	S-N	$\mathcal{R}_1 \leftrightarrow \mathcal{R}_2$	(1, 1)
$\mathcal{Q}_2$	SN	BT	$\nexists$	S-N	S	UN	$\mathcal{Q}_2$	$((\sqrt{2} + 1)/2, \sqrt{2} - 1)$
$\mathcal{Q}_3$	S-N	UN	$\nexists$	S-N	S	UN	$\mathcal{Q}_3$	(1, 1/2)
$\mathcal{Q}_4$	S-N	SN	$\nexists$	S-N	S	UN	$\mathcal{R}_6 \leftrightarrow \mathcal{R}_8$	(1, $(\sqrt{5} - 1)/2$)
$\mathcal{Q}_5$	S	SN	SN	S-N	$\nexists$	S-N	$\mathcal{R}_8 \leftrightarrow \mathcal{R}_{10}$	(3/4, 1)
$\mathcal{Q}_6$	SN	S-N	$\nexists$	S-N	S	UN	$\mathcal{Q}_6$	(4/3, 1/3)

Tabela 5.2: Classificação topológica de cada ponto de equilíbrio do sistema (1.1) no disco de Poincaré, em função dos valores não positivos de β_2 e β_1 . Veja as Figuras 5.1, 5.2 e 5.3.

Regiões	P_0	P_1	P_2	S_0	S_1	M_0	PP	PV: (β_2, β_1)
$\mathcal{A}_1$	S	UN	SN	S-N	SN	S	$\mathcal{A}_1$	$(-2, 2)$
$\mathcal{A}_2$	S	UN	SN	S-N	S	UN	$\mathcal{A}_1$	$(-1/2, 1/2)$
$\mathcal{A}_3$	S	S	SN	S-N	SN	UN	$\mathcal{A}_3$	$(-1/5, -1/5)$
$\mathcal{A}_4$	S	$\nexists$	$\nexists$	S-N	SN	UN	$\mathcal{A}_4$	$(-2, -2)$
$\mathcal{A}_5$	S	S	UN	S-N	SN	UN	$\mathcal{A}_5$	$(-3/10, -3)$
$\mathcal{A}_6$	S	S	SN	S-N	SN	UN	$\mathcal{A}_6$	$(-11/5, -31/10)$
$\mathcal{A}_7$	S	S	SN	S-N	SN	UN	$\mathcal{A}_7$	$(-1/10, -5/2)$
$\mathcal{A}_8$	S	S	SN	S-N	UN	UN	$\mathcal{A}_8$	$(1/2, -1/2)$
$\mathcal{A}_9$	SN	S	S	S-N	UN	UN	$\mathcal{A}_9$	$(2, -1/2)$
$\mathcal{A}_1 \leftrightarrow \mathcal{A}_2$	S	UN	SN	S-N	$\nexists$	S-N	$\mathcal{A}_1 \leftrightarrow \mathcal{A}_2$	$(-1, 1)$
$\mathcal{A}_2 \leftrightarrow \mathcal{A}_3$	S	$\nexists$	SN	S-N	S-N	UN	$\mathcal{A}_2 \leftrightarrow \mathcal{A}_3$	$(-1, 0)$
$\mathcal{A}_3 \leftrightarrow \mathcal{A}_4$	S	S-N	$\nexists$	S-N	SN	UN	$\mathcal{A}_3 \leftrightarrow \mathcal{A}_4$	$(-4/5, -1/5)$
$\mathcal{A}_4 \leftrightarrow \mathcal{A}_5$	S	$\nexists$	S-N	S-N	SN	UN	$\mathcal{A}_4 \leftrightarrow \mathcal{A}_5$	$(-1/3, -3)$
$\mathcal{A}_5 \leftrightarrow \mathcal{A}_6$	S	S	UN	S-N	SN	UN	$\mathcal{A}_5$	$(-1/4, -3)$
$\mathcal{A}_6 \leftrightarrow \mathcal{A}_7$	S	S	SN	S-N	SN	UN	$\mathcal{A}_6$	$\approx (-19337/100000, -31/10)$
$\mathcal{A}_7 \leftrightarrow \mathcal{A}_8$	S	$\nexists$	S	E	$\nexists$	UN	$\mathcal{A}_7 \leftrightarrow \mathcal{A}_8$	$(0, -3/2)$
$\mathcal{A}_8 \leftrightarrow \mathcal{A}_9$	S-N	S	$\nexists$	S-N	UN	UN	$\mathcal{A}_8 \leftrightarrow \mathcal{A}_9$	$(-1, -1)$
$\mathcal{A}_4 \leftrightarrow \mathcal{A}_7$	S	$\nexists$	S-N	S-N	SN	UN	$\mathcal{A}_4 \leftrightarrow \mathcal{A}_7$	$(-1/8, -2)$
$\mathcal{A}_3 \leftrightarrow \mathcal{A}_8$	S	$\nexists$	SN	S-N	$\nexists$	UN	$\mathcal{A}_3 \leftrightarrow \mathcal{A}_8$	$(0, -1/2)$
$\mathcal{A}_9 \leftrightarrow \mathcal{R}_3$	SN	$\nexists$	S	S-N	UN	UN	$\mathcal{A}_9 \leftrightarrow \mathcal{R}_3$	$(3/2, 0)$
$\mathcal{Q}_7$	S-N	$\nexists$	$\nexists$	S-N	UN	UN	$\mathcal{Q}_7$	$(1, 0)$
$\mathcal{A}_8 \leftrightarrow \mathcal{R}_4$	S	$\nexists$	SN	S-N	UN	UN	$\mathcal{A}_8 \leftrightarrow \mathcal{R}_4$	$(1/2, 0)$
O	S	$\nexists$	SN	S-N	$\nexists$	UN	$\mathcal{A}_2 \leftrightarrow \mathcal{R}_4$	$(0, 0)$
$\mathcal{A}_2 \leftrightarrow \mathcal{R}_4$	S	$\nexists$	SN	S-N	$\nexists$	UN	$\mathcal{A}_2 \leftrightarrow \mathcal{R}_4$	$(0, 1/2)$
$\mathcal{Q}_9$	S	$\nexists$	SN	SN	$\nexists$	$\nexists$	$\mathcal{Q}_9$	$(0, 1)$
$\mathcal{A}_1 \leftrightarrow \mathcal{R}_9$	S	$\nexists$	SN	E	$\nexists$	S	$\mathcal{A}_1 \leftrightarrow \mathcal{R}_9$	$(0, 3/2)$
$\mathcal{Q}$	S	$\nexists$	S-N	S-N	SN	UN	$\mathcal{Q}$	$((1 - \sqrt{2})/2, -1 - \sqrt{2})$
$\mathcal{Q}_8$	S	$\nexists$	$\nexists$	E	$\nexists$	UN	$\mathcal{Q}_8$	$(0, -1)$

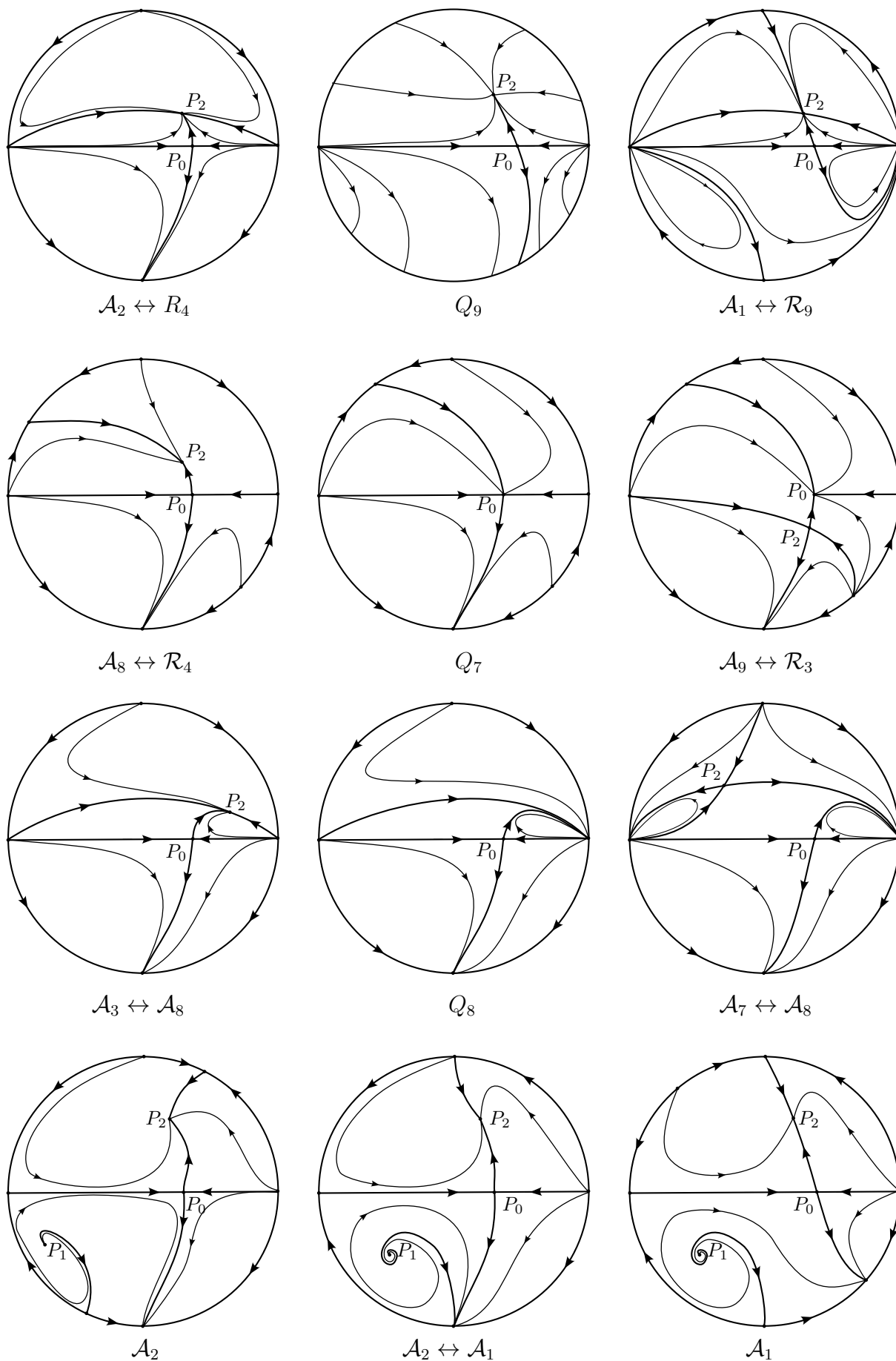


Figura 5.1: Retratos de fase globais de (3.1) parte 1.

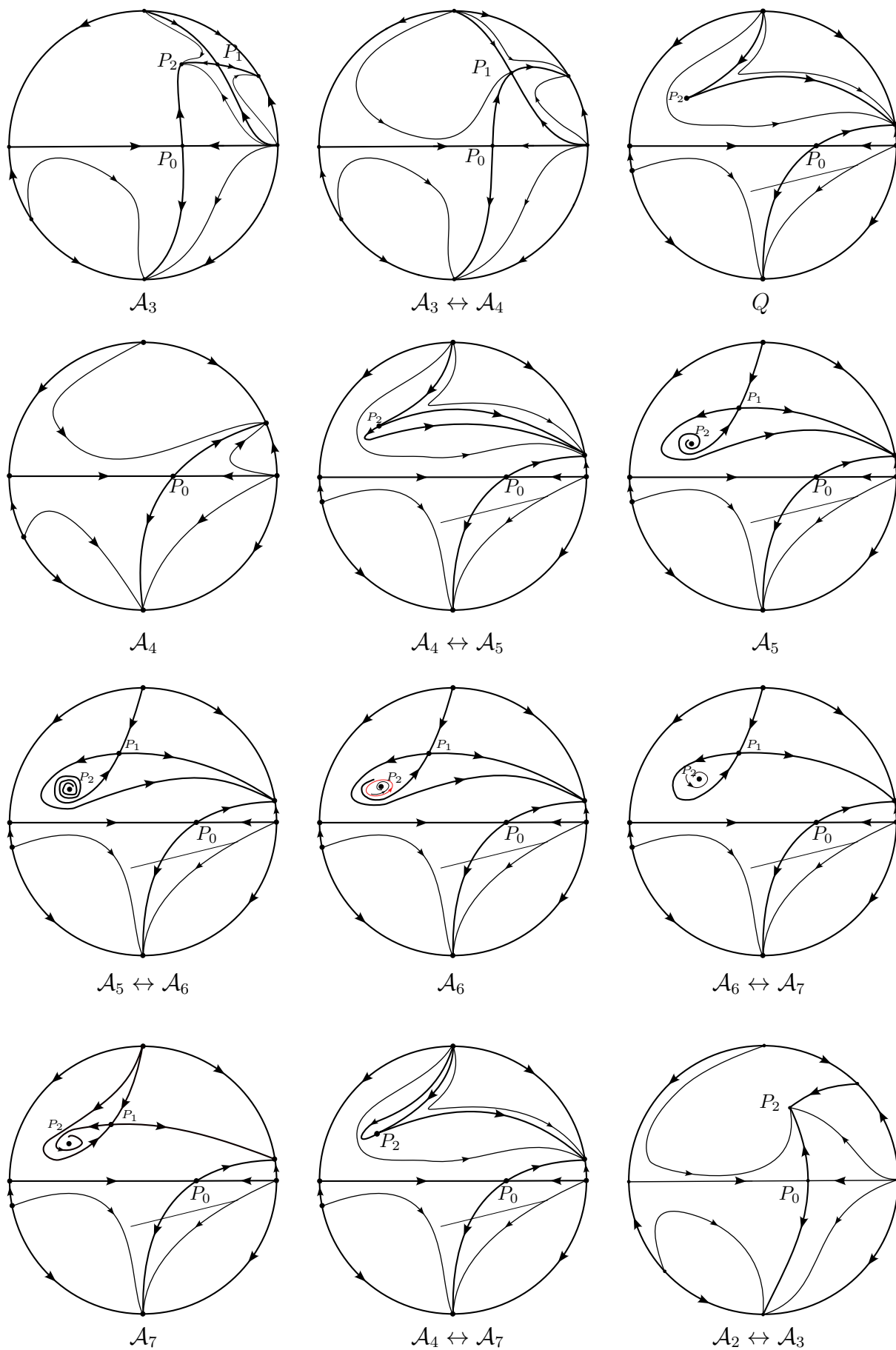


Figura 5.2: Retratos de fase globais de (3.1) parte 2.

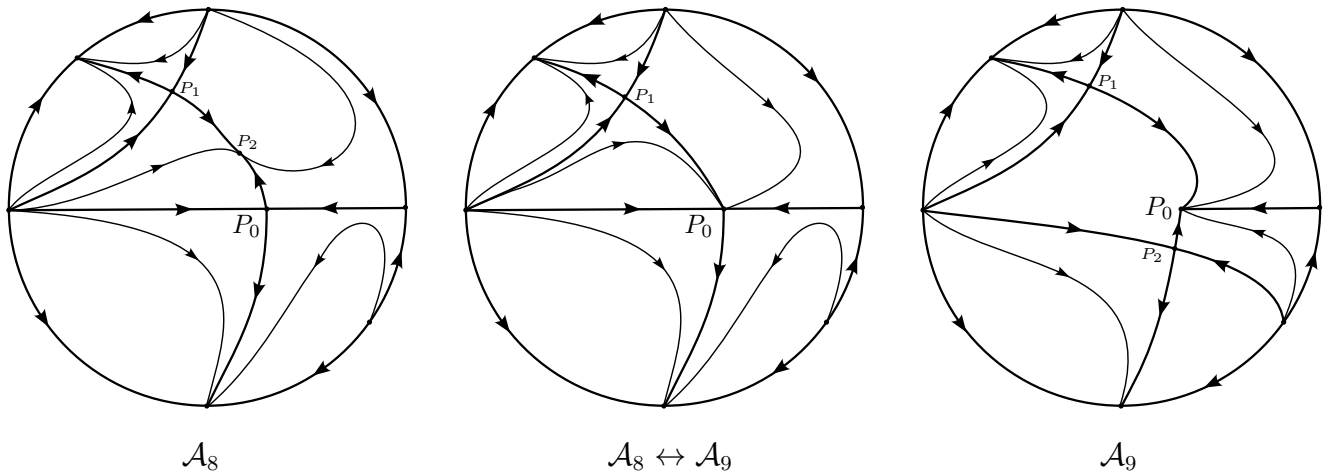


Figura 5.3: Retratos de fase globais de (3.1) parte 3.

Observação 5.1.3. *Nos retratos de fase globais das Figuras 5.1, 5.2 e 5.3, optamos por identificar apenas os pontos de equilíbrio finitos, omitindo os símbolos dos pontos de equilíbrio no infinito. Isso se deve ao fato de que, nos casos estudados, esses pontos já estão devidamente nomeados e não há risco de confusão.*

Como consequência de todo o estudo desenvolvido nesta dissertação, enunciamos o seguinte teorema, que generaliza o Teorema 3.1.1.

Teorema 5.1.2. *O sistema de equações diferenciais ordinárias (1.1) com dois parâmetros possui no máximo 50 retratos de fase globais não topologicamente equivalentes.*

Conclusões

Nesta dissertação, estudamos a dinâmica qualitativa de um sistema de equações diferenciais que modela a interação entre leucócitos normais e células leucêmicas, a saber

$$x' = 1 - x - \beta_1 xy, \quad y' = y - y^2 - \beta_2 xy.$$

A análise detalhada permitiu identificar os pontos de equilíbrio, suas classificações e as bifurcações associadas, revelando a riqueza estrutural do sistema. Os retratos de fase globais obtidos fornecem uma visão qualitativa abrangente da interação entre leucócitos normais e células leucêmicas, destacando a importância dos modelos matemáticos no estudo de sistemas biológicos complexos.

Contudo, surgem questões instigantes a partir desses resultados. O que aconteceria, por exemplo, se realizássemos pequenas variações nos valores dos cinco parâmetros fixados $r_A = K_A = 2$ e $\mu_A = \mu_N = r_N = 1$? Caso $r_N = 13/10$ ao invés de 1 ou $K_A = 11/5$ ao invés de 2, os retratos de fase globais permanecerão topologicamente equivalentes ou será que tem um cambio qualitativo significativo?

Além disso, surgiu outra pergunta interessante, sugerida por Daniel Panazzolo: o que se pode observar ao compactificar o plano dos parâmetros (β_1, β_2) ? Será que essa abordagem traria novas informações sobre o sistema, revelando comportamentos dinâmicos ainda desconhecidos? Nesse caso, ao permitir que β_1 e β_2 variem livremente no espaço compactificado, poderiam surgir novos padrões globais ou bifurcações significativas?

Essas questões abertas oferecem perspectivas promissoras para futuros estudos, ampliando as possibilidades de compreensão deste modelo e de sistemas dinâmicos similares.

Referências Bibliográficas

- [1] M.J. ÁLVAREZ, A. FERRAGUT, X. JARQUE, *A survey on the blow up technique*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg, **21** (2011), 3103–3118.
- [2] A.A. ANDRONOV, E.A. LEONTOVICH, I.I. GORDON, A.G. MAIER, *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems*. Translated from the Russian by D. Louvish. Halsted Press [John Wiley & Sons], New York-Toronto; Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem-London, 1973. 524 pp.
- [3] A.A. ANDRONOV, E.A. LEONTOVICH, I.I. GORDON, A.G. MAIER, *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*. Translated from the Russian. Halsted Press [John Wiley & Sons], New York-Toronto; Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem-London, 1973. 482 pp.
- [4] D.M. CANDIDO, F.S. DIAS, L.F. MELLO, *Global phase portraits of ordinary differential equations Modeling the Acute Promyelocytic Leukemia*, Differ. Equ. Dyn. Syst. preprint 2023. 18 pp.
- [5] F. DUMORTIER, *Singularities of vector fields on the plane*, Journal of Differential Equations, **23** (1977), 53–106.
- [6] F. DUMORTIER, J. LLIBRE, J.C. ARTÉS, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006. 298 pp.
- [7] A.C. FASSONI, H.M. YANG, *An ecological resilience perspective on cancer: Insights from a toy model*, Ecological Complexity, **30** (2017), 33–46.

- [8] J. GUCKENHEIMER, P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Revised and corrected reprint of the 1983 original. Applied Mathematical Sciences, 42. Springer-Verlag, New York, 1990. 459 pp.
- [9] Y.A. KUZNETSOV, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 2nd Ed., Springer-Verlag, New York, 1998. 593 pp.
- [10] L. MARKUS, *Global structure of ordinary differential equations in the plane*, Trans. Amer. Math. Soc. **76** (1954), 127–148.
- [11] D.A. NEUMANN, *Classification of continuous flows on 2-manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **48** (1975), 73–81.
- [12] M.M. PEIXOTO, *Dynamical Systems. Proceedings of a Symposium held at the University of Bahia*, Acad. Press, New York (1973), 389–420.
- [13] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3rd Ed., Springer-Verlag, New York, 2001. 553 pp.
- [14] J. SOTOMAYOR, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projetos Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979. 327 pp.
- [15] G.H. YOSHINARI JÚNIOR, A.C. FASSONI, L.F. MELLO, E.M. REGO, *Modeling dynamics and alternative treatment strategies in acute promyelocytic leukemia*, PLoS One, **14** (2019), p. e0221011.
- [16] Software **MATCONT 6.1**: <http://www.matcont.ugent.be>.