

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Injetividade global de difeomorfismos locais:
alguns resultados com ênfase no caso polinomial**

Marina Andrade Domingues

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando Mello

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da
CAPES

ITAJUBÁ, 26 DE JUNHO DE 2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Injetividade global de difeomorfismos locais:
alguns resultados com ênfase no caso polinomial**

Marina Andrade Domingues

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando Mello

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

ITAJUBÁ – MG

26 DE JUNHO DE 2025

Ao meu pai Valdiel, minha mãe Ivone e minha irmã Aline.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, fonte de todo o bem e ciência, por todas as oportunidades colocadas no meu caminho, e à Maria Santíssima, por sempre se mostrar uma verdadeira mãe e mestra. Agradeço à minha família, em especial, à minha mãe Ivone e ao meu pai Valdiel, por todo amor, carinho e apoio. Ao Nicolas, minha gratidão por sempre ter-se feito presente durante essa caminhada, mesmo quando longe. À Paula e à Fernanda, minha gratidão pela companhia, afeto e por me receberem tão bem em Itajubá.

Agradeço aos meus amigos, por tornarem esse caminho mais leve e bonito. Em especial, agradeço a todos os colegas e amigos do PMAT, por toda a ajuda durante o curso e pelas boas risadas, de maneira especial, à Débora, Geovane, Liomar e Yelsin. Às meninas do Travessia, em especial, à Bruna, pela acolhida, amizade e por me ajudarem a enxergar onde também verdadeiramente o céu e o mar se encontram: no nosso estudo e trabalho de cada dia.

Meu sincero agradecimento ao meu orientador, Prof. Dr. Luis Fernando, por toda a ajuda, paciência, motivação e inspiração. Estendo esse agradecimento aos professores do PMAT e a todos aqueles que me ajudaram a enxergar, ainda mais, a beleza da Matemática.

Agradeço à banca pela disponibilidade em avaliar este trabalho e pelas importantes contribuições. De maneira especial, agradeço ao Prof. Dr. Jaume Llibre por ter-me recebido na Universitat Autònoma de Barcelona e pelas valiosas discussões.

Por fim, agradeço à CAPES pela concessão da bolsa e à UNIFEI pela oportunidade de concluir este mestrado e pelo auxílio recebido para a realização do estágio no exterior.

Resumo

A Conjectura Jacobiana Real no plano (CJR) afirma que uma aplicação polinomial do plano no plano com Jacobiano não nulo em todo ponto é invertível. Apesar de sabermos que essa conjectura é falsa, é de grande interesse encontrar condições que garantam a invertibilidade global de difeomorfismos locais, em particular, de aplicações polinomiais no plano. Nesta dissertação, exploramos resultados relacionados à CJR, com ênfase em resultados baseados na Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Em particular, exploramos a relação entre injetividade global e equivalência topológica de campos de vetores paralelos.

Palavras-chave: Injetividade global, Conjectura Jacobiana Real, campos de vetores paralelos.

Abstract

The Real Jacobian Conjecture (RJC) states that a polynomial map of the plane in the plane with nonzero Jacobian at every point is invertible. Although we know that this conjecture is false, it is of great interest to find conditions that guarantee the global invertibility of local diffeomorphisms, in particular, of polynomial maps in the plane. In this dissertation, we explore results related to the RJC, with emphasis on results based on the Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations. In particular, we explore the relation between global injectivity and topological equivalence of parallel vector fields.

Keywords: Global injectivity, Real Jacobian conjecture, parallel vector fields.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Sumário	vi
Lista de Figuras	viii
1 Introdução	1
1.1 Contextualização histórica	1
1.2 Problema de pesquisa	3
1.3 Estrutura da dissertação	4
2 Considerações iniciais	5
2.1 Conjectura Jacobiana	5
2.2 Revisão de Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias	8
2.2.1 Equivalência topológica e Teorema de Hartman-Grobman	11
2.2.2 Transformação de Poincaré e Teorema de Poincaré-Bendixson	12
2.3 Compactificação de Poincaré	13
2.4 Índice topológico	20
3 Respostas às Conjecturas Jacobianas	23
3.1 Teorema de Hadamard	23

3.2	Injetividade global e conexidade dos conjuntos de nível	24
3.3	Injetividade global e graus das componentes	25
4	Injetividade global e campos paralelos em \mathbb{R}^2	28
4.1	Injetividade global e centro global em \mathbb{R}^2	28
4.1.1	Centro global	28
4.1.2	Teorema de Sabatini	30
4.1.3	Generalização do Teorema de Sabatini	34
4.2	Injetividade global e campos paralelos em \mathbb{R}^2	42
4.3	Equivalência topológica de campos de vetores paralelos	55
5	Condições suficientes para que a Conjectura Jacobiana Real em \mathbb{R}^2 seja verdadeira	66
	Conclusões	75
	Bibliografia	76

Lista de Figuras

2.1	As folhas L_1 e L_2 são inseparáveis.	10
2.2	Projeção central.	14
2.3	Cartas locais (U_k, ϕ_k) , para $k = 1, 2, 3$, na esfera de Poincaré. [15]	16
2.4	Setores de um ponto de equilíbrio.	20
2.5	Ilustração de um setor hiperbólico degenerado.	21
4.1	Centro linear.	29
4.2	Centro não global.	30
4.3	Anel com bordo $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$	37
4.4	Curvas C_A e C_B da Afirmação 2.	38
4.5	F é injetora em duas órbitas distintas.	39
4.6	Retratos de fases dos campos canônicos anular (a), radial (b) e faixa (c).	43
4.7	Retrato de fase do pullback $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$, sendo $\mathcal{X}(x, y) = (-y, x)$ e $F(x, y) = (\arctan x, y)$	53
4.8	Retrato de fase global de um campo com um equilíbrio instável na origem e tal que todos os pontos no infinito são pontos de equilíbrio.	59
4.9	Retrato de fase global de um campo com um equilíbrio instável na origem e quatro pontos equilíbrios infinitos formados por dois setores hiperbólicos degenerados.	59
4.10	Retrato de fase global de um campo com um equilíbrio instável na origem e dois pares de pontos de equilíbrio infinitos: dois nós topológicos estáveis e duas selas topológicas.	60

- 4.11 Retrato de fase global de um campo com um equilíbrio instável na origem e quatro pares de pontos de equilíbrio infinitos: dois nós topológicos estáveis, duas selas topológicas e quatro pontos de equilíbrio infinitos degenerados. 60
- 4.12 Retrato de fase do campo $JF \cdot \mathcal{Y}_X(x, y) = (-3y^2 - 1, -3x^2 - 1)$ 65

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização histórica

O Teorema da Função Inversa garante que se uma aplicação F diferenciável definida em \mathbb{R}^2 possui Jacobiano não nulo em um determinado ponto x_0 , então F é invertível em uma vizinhança de x_0 . No entanto, mesmo que uma função possua Jacobiano não nulo em todo ponto do plano, é possível que essa função não seja globalmente invertível. De fato, existem na literatura contraexemplos para a chamada Conjectura Jacobiana Real no plano, a qual afirma que se $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto do plano, então F é invertível. Essa conjectura foi introduzida na literatura por Ott-Heinrich Keller em 1939, no artigo [21], para o caso de aplicações polinomiais definidas em \mathbb{C}^n , e aparece, inclusive, como um dos 18 problemas matemáticos para o século XXI listados por Smale em [28], destacando sua relevância.

Em 1994, Pinchuk exibiu, no artigo [25], uma classe de aplicações polinomiais no plano, não injetoras, com Jacobiano não nulo em todo ponto, mostrando, assim, que a Conjectura Jacobiana é falsa, em geral. No contraexemplo fornecido em [25], a componente g possui grau 40 e, em 2011, Campbell mostrou em [12] que o seu grau pode ser reduzido a 25. Em 2021, mantendo a aplicação f de Pinchuk, outro exemplo foi dado em [16], com g de grau 15. Em 2023, Braun e Fernandes, em [3], construíram um difeomorfismo local não injetor no plano, com a primeira componente f tendo grau 9 e a segunda componente g

possuindo grau 15.

A partir do contraexemplo fornecido por Pinchuk, vários matemáticos se esforçam para buscar condições adicionais que garantam a validade da conjectura. Nesse sentido, citamos, por exemplo, o artigo [4] de Braun, Fernandes e Oréface-Okamoto, publicado em 2025, no qual os autores provaram que a Conjectura Jacobiana no plano é verdadeira no caso em que uma das funções componentes possui grau menor ou igual a 5. Essa afirmação havia sido provada anteriormente, em 2010, por Braun e dos Santos em [10], para o caso em que o grau de uma das componentes é menor ou igual a 3 e, em 2016, por Braun e Oréface-Okamoto em [9], para grau menor ou igual a 4. A validade da Conjectura Jacobiana também é conhecida, por exemplo, no caso em que os conjuntos de níveis de uma das funções coordenadas são conexos.

Resultados equivalentes à Conjectura Jacobiana no plano também são conhecidos na literatura. Por exemplo, o Teorema de Hadamard (veja o Teorema A de [18]) diz que uma aplicação de classe C^1 definida em \mathbb{R}^n com Jacobiano não nulo em todo ponto é um difeomorfismo global se, e somente se, é própria. No entanto, não é simples, em geral, verificar se uma dada função é própria.

Em 1998, Sabatini provou em [27] que uma aplicação polinomial $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $F(0, 0) = (0, 0)$ e cujo Jacobiano nunca se anula é um difeomorfismo global se, e somente se, o campo Hamiltoniano $H_{M_F} = (-ff_y - gg_y, ff_x + gg_x)$ possui um centro global na origem, isto é, H_{M_F} possui um único equilíbrio na origem e todas as órbitas regulares de H_{M_F} são periódicas. Cabe ressaltar que um resultado análogo foi obtido por Gavrilov em [17] de forma independente. Nesta dissertação, iremos nos referir a estes resultados como Teorema de Sabatini. Esse resultado foi generalizado por Braun e Llibre, no artigo [8], no sentido em que não exigem que a aplicação seja polinomial e nem que esteja definida no plano todo, bastando estar definida em um subconjunto aberto U do plano. No artigo [7], em 2024, os mesmos autores forneceram outra generalização do Teorema de Sabatini, demonstrando que um difeomorfismo local $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um difeomorfismo global se, e somente se, o pullback de \mathcal{X} por F definido por $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}(z) = DF(z)^{-1}\mathcal{X}(F(z))$, $z \in U$, é topologicamente equivalente a \mathcal{X} , em que $\mathcal{X}(x, y) = (-y, x)$, $\mathcal{X}(x, y) = (x, y)$ ou

$\mathcal{X}(x, y) = (1, 0)$. Assim, se considerarmos o centro linear $\mathcal{X}(x, y) = (-y, x)$, então o produto do Jacobiano de F pelo pullback $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ coincide com o campo Hamiltoniano H_{M_F} e o Teorema de Sabatini é obtido como uma consequência desse resultado.

Recordamos que uma aplicação polinomial definida em \mathbb{R}^n injetora é automaticamente sobrejetora, de acordo com [2], ou seja, se queremos provar que uma função polinomial no plano é invertível, basta provarmos a injetividade da função e a sobrejetividade será uma consequência. Utilizando o Teorema de Sabatini, foram encontradas condições suficientes para que uma função satisfazendo as hipóteses da Conjectura Jacobiana em \mathbb{R}^2 seja globalmente injetora. De fato, em 2015, Braun e Llibre mostraram no artigo [6] que é suficiente que os polinômios homogêneos de mais altos graus das funções coordenadas não possuam um fator linear real comum, no caso particular em que essas funções possuem o mesmo grau $m > 1$. Em 2016, no artigo [5], Braun, Giné e Llibre obtiveram um novo resultado, o qual mostra que se F é uma aplicação nas hipóteses da Conjectura Jacobiana com $F(0, 0) = (0, 0)$ e tal que a parte homogênea de mais alto grau das componentes do Hamiltoniano H_{M_F} não possuem um fator linear real em comum, então F é injetora. Nesse sentido, em posse de novos resultados equivalentes à Conjectura Jacobiana no plano, é natural e válido continuarmos buscando novas condições que garantam a validade da conjectura.

1.2 Problema de pesquisa

A questão central que norteia este trabalho é a seguinte: dada uma aplicação diferenciável, quais mecanismos influenciam a passagem da invertibilidade local para a invertibilidade global? Como discutido anteriormente, as descobertas desses mecanismos têm sido um processo lento ao longo dos anos, para o qual muitos matemáticos têm contribuído. Ao longo desta dissertação, nos concentramos no estudo da invertibilidade global de aplicações polinomiais definidas no plano e em buscarmos respostas a esse questionamento utilizando, principalmente, resultados da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias.

1.3 Estrutura da dissertação

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2, enunciamos a Conjectura Jacobiana e apresentamos uma breve contextualização matemática de conceitos que serão utilizados ao longo desta dissertação, revisando alguns conceitos relativos à Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, bem como a ideia da compactificação de Poincaré e resultados relacionados ao índice topológico de um ponto de equilíbrio.

O Capítulo 3 reúne algumas respostas às Conjecturas Jacobianas encontradas na literatura, incluindo o Teorema de Hadamard, a relação entre injetividade global e a conexidade dos conjuntos de nível das componentes de funções definidas no plano, além da conexão entre injetividade global e o grau das funções componentes.

No Capítulo 4, exploramos resultados que abordam a relação entre a injetividade global e a equivalência topológica a campos de vetores paralelos em \mathbb{R}^2 . Também fornecemos uma demonstração alternativa do Teorema de Hadamard em \mathbb{R}^2 .

Em seguida, no Capítulo 5, apresentamos condições suficientes para a validade da Conjectura Jacobiana no plano, a partir dos resultados explorados no capítulo anterior e da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Por fim, algumas considerações finais são apresentadas em 5 e, ao final, listamos as referências bibliográficas utilizadas.

Capítulo 2

Considerações iniciais

Neste capítulo, serão apresentados alguns conceitos básicos utilizados ao longo desta dissertação e pertinentes para a compreensão geral do texto. Na Seção 2.1, serão enunciadas algumas versões da Conjectura Jacobiana, bem como algumas definições e resultados relacionados. Na Seção 2.2, serão revisados alguns conceitos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Nas Seções 2.3 e 2.4, apresentaremos, respectivamente, a compactificação de Poincaré e alguns resultados envolvendo índices topológicos e setores de pontos de equilíbrio.

2.1 Conjectura Jacobiana

Pela definição de função, a injetividade de uma aplicação é necessária para calcular sua inversa. Nesse sentido, para que uma função seja globalmente invertível, é necessário garantir que ela seja globalmente injetora. No caso polinomial, a injetividade de uma aplicação é também suficiente para se garantir a existência de uma inversa global, como veremos no Lema 2.1. No entanto, o problema de determinar quando uma função é injetora é algo muito geral e difícil. Na busca de respostas para esse problema, usualmente são utilizados conceitos da Análise, relacionados ao Jacobiano da aplicação, cuja definição recordaremos a seguir.

Primeiramente, considere $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida por um vetor de n

componentes, sendo cada componente uma aplicação $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. As derivadas parciais dessas funções em um dado ponto x_0 do domínio podem ser organizadas em uma matriz $n \times n$, a qual é chamada *Matriz Jacobiana* da aplicação F no ponto x_0 . Ao longo desta dissertação, denotaremos a Matriz Jacobiana da aplicação F no ponto x_0 por $DF(x_0)$.

$$DF(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}.$$

Chamamos de *Jacobiano* de F no ponto x_0 o determinante da Matriz Jacobiana da aplicação F no ponto x_0 e o denotaremos por $JF(x_0)$, ou seja,

$$JF(x_0) = \det(DF(x_0)).$$

Suponha que uma aplicação F possua Jacobiano não nulo em um determinado ponto pertencente ao domínio de F . Neste contexto, a passagem do comportamento pontual para o comportamento local é garantida pelo Teorema da Função Inversa, isto é, se uma aplicação F possui Jacobiano não nulo em um determinado ponto, então a injetividade é garantida pelo menos em uma vizinhança U desse ponto. Uma demonstração do Teorema 2.1 pode ser encontrada na página 221 de [26].

Teorema 2.1 (Teorema da Função Inversa.). *Considere $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de classe C^k , $k \geq 1$, e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Suponha que a transformação linear $DF(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja um isomorfismo. Então, existem vizinhanças U_0 e V_0 de x_0 e de $F(x_0)$, respectivamente, tais que $F|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ é um difeomorfismo de classe C^k .*

Sabemos, no entanto, que a hipótese de que uma determinada aplicação possua Jacobiano não nulo em todo ponto de seu domínio não é suficiente para garantir a injetividade global, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 2.1. *Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação definida por*

$$F(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)).$$

Calculando o Jacobiano de F , obtemos

$$JF(x, y) = \det \begin{bmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \text{sen}(y) \\ e^x \text{sen}(y) & e^x \cos(y) \end{bmatrix} = e^{2x} \cos^2(y) + e^{2x} \text{sen}^2(y) = e^{2x} > 0,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim, pelo Teorema 2.1, segue que a função F é localmente injetora. Observe, no entanto, que a função não é globalmente injetora. De fato, tome $(0, 0) \neq (0, 2\pi)$ e note que $F(0, 0) = (1, 0) = F(0, 2\pi)$.

Assim, é válido formular a seguinte pergunta: quais são os mecanismos que influenciam a passagem da invertibilidade local para a invertibilidade global? No caso de aplicações polinomiais definidas em \mathbb{C}^n , Ott-Heinrich Keller introduziu em 1939, no artigo [21], a Conjectura Jacobiana.

Conjectura 1 (Conjectura Jacobiana). *Considere $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma aplicação polinomial com Jacobiano constante não nulo. Então, F é invertível e a sua inversa é uma aplicação polinomial.*

No espaço \mathbb{R}^n , a Conjectura Jacobiana é enunciada da seguinte forma.

Conjectura 2 (Conjectura Jacobiana em \mathbb{R}^n). *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação polinomial com Jacobiano constante não nulo. Então, F é invertível e a sua inversa é uma aplicação polinomial.*

Se a hipótese considerada for apenas que o Jacobiano seja não nulo em todo ponto, mas não necessariamente constante, temos a seguinte versão da Conjectura Jacobiana.

Conjectura 3 (Conjectura Jacobiana Real). *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto. Então, F é invertível.*

O nosso foco principal nesta dissertação é a Conjectura Jacobiana Real em \mathbb{R}^2 , enunciada a seguir.

Conjectura 4 (Conjectura Jacobiana Real (CJR) no plano). *Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto. Então, F é invertível.*

No caso polinomial, sabemos que se uma dada aplicação é injetora, então ela é também sobrejetora, ou seja, basta garantir a injetividade de uma aplicação polinomial e a sobrejetividade será uma consequência. O resultado que garante essa afirmação foi provado em [2] e o enunciaremos como o Lema 2.1 a seguir para o caso real.

Lema 2.1. *Se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação polinomial globalmente injetora, então ela é sobrejetora.*

Destacamos também que se $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, com f e g polinomiais, é um difeomorfismo local, então f e g são submersões, uma vez que a condição $\det(DF(x_0)) \neq 0$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^2$ implica que, em particular, $\nabla f \neq 0$ e $\nabla g \neq 0$ em todos os pontos.

2.2 Revisão de Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias

Nesta seção, faremos uma breve revisão de conceitos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, os quais podem ser consultados mais detalhadamente em [1]. No decorrer desta dissertação, estudaremos sistemas diferenciais definidos em \mathbb{R}^2 , ou seja, equações diferenciais ordinárias em duas variáveis reais

$$X' = \frac{dX}{dt} = (P(x, y), Q(x, y)), \quad (2.1)$$

em que $X = (x, y)$, t é a variável independente e P e Q são funções de classe C^r definidas em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, com $r = 1, 2, \dots, \infty, \omega$ e C^ω corresponde à classe das funções analíticas. Sem perda de generalidade, podemos identificar o sistema (2.1) com o seu campo de vetores associado, o qual pode ser escrito como $\mathcal{X}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$.

O nosso foco será estudar sistemas diferenciais polinomiais, isto é, sistemas da forma (2.1), em que P e Q são funções polinomiais. Uma *solução* de (2.1) é uma função diferenciável $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ tal que

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = \mathcal{X}(\phi(t)),$$

para todo $t \in I$. Um ponto $p \in U$ tal que $\mathcal{X}(p) = 0$ é chamado *ponto de equilíbrio* de \mathcal{X} . Caso $\mathcal{X}(p) \neq 0$, dizemos que p é um *ponto regular* de \mathcal{X} . Observe que se p é um ponto de equilíbrio de \mathcal{X} , então $\phi(t) = p$, com $-\infty < t < \infty$, é uma solução de (2.1), uma vez que $0 = \phi'(t) = \mathcal{X}(\phi(t)) = \mathcal{X}(p)$. Se tomarmos o sistema (2.1) e um par (t_0, x_0) , podemos construir o *problema de valor inicial* (2.2) com condição inicial x_0

$$\begin{cases} X' = \frac{dX}{dt}, \\ X(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Uma solução de (2.2) é uma função diferenciável $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$, tal que

$$\phi'(t) = \frac{d\phi}{dt}(t) = \mathcal{X}(\phi(t)),$$

para todo $t \in I$ e $\phi(t_0) = x_0$, $t_0 \in I$. Sem perda de generalidade, podemos considerar $t_0 = 0$. Um dos principais resultados relacionados ao problema de valor inicial é o Teorema 2.2 enunciado a seguir, o qual garante a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias e pode ser encontrado na página 25 de [1].

Teorema 2.2 (Teorema de Picard-Lindelöf). *Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e localmente Lipschitz em x num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, então para cada $(t_0, x_0) \in D$ existe uma e somente uma solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

em algum intervalo aberto contendo t_0 .

Além da existência e unicidade da solução, uma propriedade fundamental das equações diferenciais ordinárias é a *dependência contínua da solução em relação às condições iniciais*. Essa propriedade assegura que pequenas variações na condição inicial x_0 resultam em pequenas variações na solução correspondente, dentro de um mesmo intervalo de definição. Agora, seja $\phi : I \rightarrow U$ uma solução do sistema (2.2). Então, se para toda solução $\psi : J \rightarrow U$, com $I \subset J$ e $\phi = \psi|_I$, tivermos $I = J$ e, conseqüentemente, $\phi = \psi$, dizemos que ϕ é uma solução *maximal*. Nesse caso, escrevemos $I = I_{x_0}$ e o

chamamos de *intervalo maximal*. Em outras palavras, as soluções maximais são aquelas definidas no maior intervalo possível. Se $\phi : I_{x_0} \rightarrow U$ é uma solução maximal, sua imagem $\gamma_\phi = \{\phi(t) : t \in I_{x_0} \subset U\}$, com a orientação induzida por ϕ no caso em que ϕ é não constante, é chamada de *trajetória*, *órbita* ou *curva integral* associada à solução maximal ϕ . Uma órbita $\gamma = \{x(t) : t \in (a, b)\}$ que não é um ponto de equilíbrio é chamada *periódica* se existe $T > 0$ tal que $x(t + T) = x(t)$ sempre que $t, t + T \in \mathbb{R}$. Ao longo do texto, usaremos também a expressão *órbita fechada*. Se existe um ponto de equilíbrio p tal que $x(t) \rightarrow p$ quando $t \rightarrow -\infty$ e $x(t) \rightarrow p$ quando $t \rightarrow +\infty$, então γ é chamada *homoclínica*. No caso em que existem pontos de equilíbrios distintos p e q tais que $x(t) \rightarrow p$ quando $t \rightarrow -\infty$ e $x(t) \rightarrow q$ quando $t \rightarrow +\infty$, dizemos que γ é uma órbita *heteroclínica*. O chamado *retrato de fase* da equação é obtido representando as órbitas no conjunto D , juntamente com a indicação do sentido do movimento. Um campo de vetores definido em U define uma folheação em U cujas folhas são as órbitas desse campo. Nesse sentido, duas folhas L_1 e L_2 de \mathcal{Z} são chamadas *inseparáveis* se, para quaisquer seções transversais C_1 e C_2 que intersectem L_1 e L_2 , respectivamente, existir uma folha L_3 cruzando C_1 e C_2 . Veja a Figura 2.1.

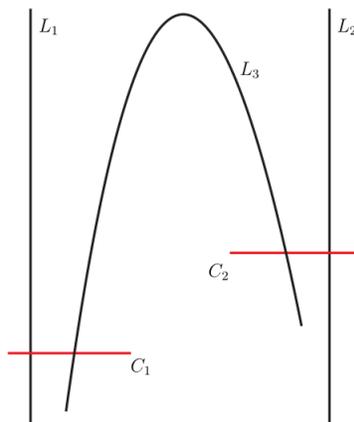


Figura 2.1: As folhas L_1 e L_2 são inseparáveis.

Para uma folheação, o conjunto de *separatrizes* é precisamente o fecho do conjunto das folhas inseparáveis.

2.2.1 Equivalência topológica e Teorema de Hartman-Grobman

Dizemos que dois campos de vetores $\mathcal{Z} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ são *topologicamente equivalentes* quando existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ que leva órbitas de \mathcal{Z} em órbitas de \mathcal{W} preservando (revertendo) a orientação de todas as órbitas. Dizemos que \mathcal{Z} e \mathcal{W} são C^r *conjugados*, $r \geq 0$, quando existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ tal que

$$h(\phi(t, z)) = \psi(t, h(z)),$$

para todo (t, z) no domínio de ϕ . Em outras palavras, uma conjugação não apenas leva órbitas em órbitas, mas também preserva o tempo.

Recordemos também que uma matriz quadrada se diz *hiperbólica* quando não possui autovalores com parte real nula. Considere um campo de vetores $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e $p \in U$ um ponto de equilíbrio de F . Então, dizemos que p é um *ponto de equilíbrio hiperbólico* se a sua linearização $DF(p)$ possui todos os autovalores com partes reais não nulas. Caso contrário, o ponto p é *não hiperbólico*. O Teorema de Hartman-Grobman, o qual pode ser encontrado na página 149 de [1], mostra que para funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tais que a equação $x' = f(x)$ possui um ponto de equilíbrio hiperbólico x_0 , as soluções das equações

$$x' = f(x) \quad \text{e} \quad y' = Df(x_0)y$$

são topologicamente conjugadas em vizinhanças de x_0 e 0, respectivamente. Isto significa que se $\psi_t(z)$ e $\varphi_t(\tilde{z})$ são, respectivamente, as soluções dos problemas de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = z, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y' = Df(x_0)y, \\ y(0) = \tilde{z}, \end{cases} \quad (2.4)$$

então existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow V$, em que U e V são vizinhanças, respectivamente, de x_0 e 0, tal que $h(x_0) = 0$ e

$$h(\psi(t, z)) = \varphi(t, h(z)),$$

sempre que $z, \psi(t, z) \in U$. Isto garante que, a menos do homeomorfismo h , os retratos de fase das equações em (2.4) em vizinhanças de x_0 e 0, respectivamente, são os mesmos.

2.2.2 Transformação de Poincaré e Teorema de Poincaré-Bendixson

Próximo a uma órbita fechada γ , construímos a *Transformação de Poincaré* associada a γ da seguinte forma. Tome $X_0 \in \gamma$ e seja \mathcal{S} uma seção local em X_0 . Consideramos a função de primeiro retorno em \mathcal{S} , isto é, a função P que associa a $X \in \mathcal{S}$ o ponto $P(X) = \varphi_t(X) \in \mathcal{S}$, em que t é o menor tempo positivo tal que $\varphi_t(X) \in \mathcal{S}$. Note que P pode não estar definida para todos os pontos em \mathcal{S} , pois as soluções que passam por certos pontos em \mathcal{S} podem não retornar a \mathcal{S} , mas certamente temos que $P(X_0) = X_0$ e o Teorema da Função Implícita (veja o Teorema 9.27 na página 224 de [26]) garante que P está definida e é continuamente diferenciável em uma vizinhança de X_0 .

No caso de sistemas planares, uma seção local é um subconjunto de uma reta passando por X_0 , de modo que podemos considerar essa seção local como um subconjunto de \mathbb{R} e tomar $X_0 = 0 \in \mathbb{R}$. Assim, a Transformação de Poincaré é uma função real P tal que $P(0) = 0$ e, ainda, se $|P'(0)| < 1$, então P assume a forma $P(x) = ax + \text{termos de ordem superior}$, em que $|a| < 1$. Assim, para x próximo de 0, $P(x)$ está mais próximo de 0 do que x . Isso significa que a solução que passa pelo ponto correspondente em \mathcal{S} se aproxima de γ após uma passagem pela seção local.

O Teorema 2.3 apresentado a seguir, conhecido como Teorema de Poincaré-Bendixson, é um dos resultados centrais no estudo de sistemas planares, caracterizando conjuntos limites de órbitas limitadas. Antes de enunciá-lo, recordemos que o conjunto de todos os pontos limites de uma dada solução $X(t)$ é chamado conjunto ω -limite da solução $X(t)$. Similarmente, definimos o conjunto α -limite de uma solução $X(t)$ como sendo o conjunto dos pontos Z tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} X(t_n) = Z$, para alguma sequência $t_n \rightarrow -\infty$. A demonstração do Teorema 2.3 pode ser encontrada na página 223 de [20].

Teorema 2.3 (Teorema de Poincaré-Bendixson). *Seja Ω um conjunto limite não vazio e limitado de um sistema planar de equações diferenciais que não contém pontos de equilíbrio. Então, Ω é uma órbita periódica.*

O próximo resultado, Teorema 2.4, fornece uma condição suficiente para que um campo de vetores não possua órbitas periódicas e pode ser encontrado na página 188 de [15].

Teorema 2.4 (Teorema de Bendixson). *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto simplesmente conexo e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1 . Então, se a divergência de F possui sinal constante em U , o campo F não possui órbita fechada em U .*

2.3 Compactificação de Poincaré

Nesta seção, apresentaremos a compactificação de Poincaré, com base no Capítulo 5 de [15]. Trata-se de uma ferramenta que permite o estudo do comportamento de campos polinomiais no infinito. Basicamente, a ideia é mapear o plano \mathbb{R}^2 sobre a esfera \mathbb{S}^2 , utilizando a projeção central e identificar os pontos no infinito com os pontos sobre o equador da esfera. Por meio de uma mudança de coordenadas apropriada, o campo de vetores original é estendido analiticamente ao equador, permitindo analisar as órbitas próximas ao infinito.

Definição 2.1. *O grau do campo $\mathcal{X} = (P, Q)$ é definido como o número máximo d entre os graus dos polinômios P e Q , ou seja,*

$$d = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}.$$

Definição 2.2. *Chamaremos de Esfera de Poincaré a esfera*

$$\mathbb{S}^2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}.$$

Faremos uma identificação de \mathbb{R}^2 com o plano

$$T_{P_N}\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1\},$$

o qual é tangente à esfera \mathbb{S}^2 em $P_N = (0, 0, 1)$. Nesta seção, convencionaremos que as coordenadas y_i irão se referir à esfera \mathbb{S}^2 e as coordenadas x_i ao plano $T_{P_N}\mathbb{S}^2$, $i = 1, 2, 3$.

Definição 2.3. *Definimos*

$$H_+ = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 > 0\}$$

como sendo o hemisfério norte,

$$H_- = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 < 0\}$$

como sendo o hemisfério sul e

$$\mathbb{S}^1 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 = 0\}$$

como sendo o equador da Esfera de Poincaré.

A compactificação de Poincaré de \mathcal{X} consiste em fazer duas cópias do fluxo de \mathcal{X} , uma sobre H_+ e outra sobre H_- , fazendo uso da projeção central. Dessa maneira, consideremos a reta

$$L(t) = (0, 0, 0) + t(x_1, x_2, 1) = t(x_1, x_2, 1), \quad t \in \mathbb{R},$$

que une a origem de \mathbb{R}^3 a um ponto do plano $T_{P_N}\mathbb{S}^2$, o qual intercepta a esfera \mathbb{S}^2 em dois pontos, um no hemisfério norte e o outro no hemisfério sul. Ver Figura 2.2.

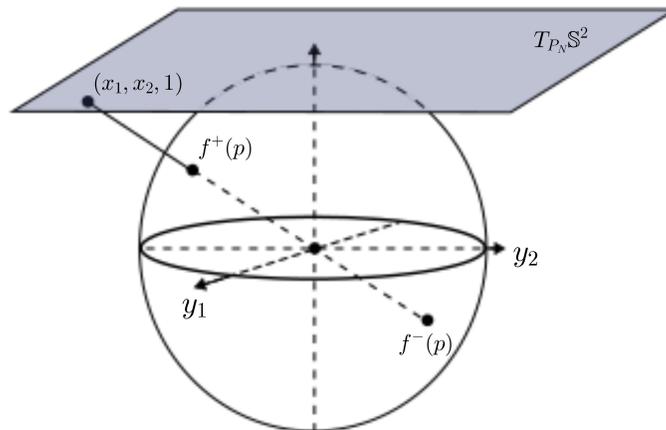


Figura 2.2: Projeção central.

Agora, considerando a projeção do campo vetorial X de $\mathbb{R}^2 \approx T_{P_N}\mathbb{S}^2$ para \mathbb{S}^2 dada pelas projeções centrais, temos dois difeomorfismos

$$f^+ : T_{P_N}\mathbb{S}^2 \rightarrow H_+ \quad \text{e} \quad f^- : T_{P_N}\mathbb{S}^2 \rightarrow H_-,$$

isto é, $f^+(p)$ (respectivamente, $f^-(p)$) é a interseção da reta que passa pelo ponto $p = (x_1, x_2, 1)$ ligando a origem com o hemisfério norte (respectivamente, sul) de \mathbb{S}^2 , cujas expressões são dadas por

$$f^+(x_1, x_2, 1) = \frac{(x_1, x_2, 1)}{\Delta(x)} \quad \text{e} \quad f^-(x_1, x_2, 1) = -\frac{(x_1, x_2, 1)}{\Delta(x)}, \quad (2.5)$$

em que $\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$.

Sem perda de generalidade, podemos considerar o campo \mathcal{X} definido no plano tangente à esfera, isto é, $\mathcal{X} : T_{P_N}\mathbb{S}^2 \rightarrow T_{P_N}\mathbb{S}^2$. Deste modo, podemos definir um novo campo $\tilde{\mathcal{X}}$ em \mathbb{S}^2 , induzido por \mathcal{X} em \mathbb{S}^2 por meio dos difeomorfismos f^+ e f^- , o qual será dado por

$$\tilde{\mathcal{X}}(y) = Df^+(x)\mathcal{X}(x), \quad \text{se } y = f^+(x) \in H_+,$$

e

$$\tilde{\mathcal{X}}(y) = Df^-(x)\mathcal{X}(x), \quad \text{se } y = f^-(x) \in H_-,$$

respectivamente. Note que $\tilde{\mathcal{X}}$ é um campo de vetores definido em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$. Assim, para estudar o comportamento assintótico das órbitas não limitadas de \mathcal{X} analisando $\tilde{\mathcal{X}}$, é necessário estender $\tilde{\mathcal{X}}$ para o equador \mathbb{S}^1 , de modo a obter um campo na esfera. Desta forma, o estudo de $\tilde{\mathcal{X}}$ em uma vizinhança do equador permitirá obter informações sobre o comportamento do campo \mathcal{X} no infinito. No entanto, em geral, essa extensão nem sempre é possível. No caso em que \mathcal{X} é um campo polinomial, podemos estender $\tilde{\mathcal{X}}$ analiticamente ao equador, como veremos adiante. Antes de estudar essa extensão, vamos adotar um sistema de coordenadas conveniente para \mathbb{S}^2 e calcular a expressão de $\tilde{\mathcal{X}}$ nessas coordenadas. Para tanto, usaremos seis cartas locais, dadas por

$$U_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k > 0\}, \quad V_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k < 0\},$$

para $k = 1, 2, 3$. Veja a Figura 2.3.

As aplicações locais correspondentes são dadas por $\phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\psi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas como

$$\phi_k(y) = -\psi_k(y) = \left(\frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k} \right),$$

para $m < n$ e $m, n \neq k$. A fim de encontrar a expressão do campo na carta local (U_1, ϕ_1) , inicialmente tome $y \in U_1 \cap H_+$. Assim, $y = f^+(x)$, $x \in T_{P_N}\mathbb{S}^2$ e

$$\begin{aligned} (\phi_1 \circ f^+)(x) &= \phi_1(f^+(x)) \\ &= \phi_1 \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) \\ &= \phi_1 \left(\frac{x_2}{\Delta(x)} \frac{\Delta(x)}{x_1}, \frac{1}{\Delta(x)} \frac{\Delta(x)}{x_1} \right) \\ &= \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right). \end{aligned}$$

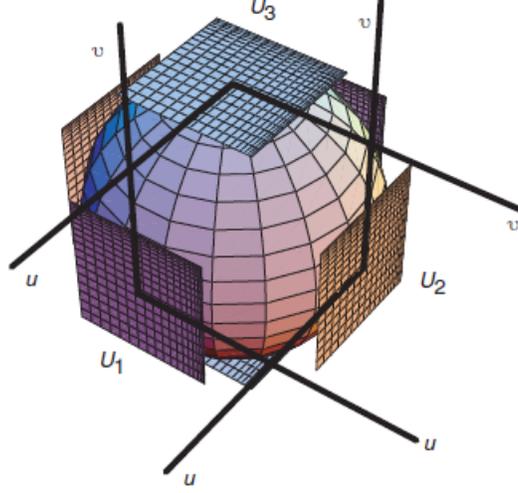


Figura 2.3: Cartas locais (U_k, ϕ_k) , para $k = 1, 2, 3$, na esfera de Poincaré. [15]

Portanto, $\phi_1(x_1, x_2, 1) = (u, v)$, em que $u = \frac{x_2}{x_1}$ e $v = \frac{1}{x_1}$. Como $y \in U_1 \cap H_+$, observe que $x_1 \neq 0$. Ainda, como $\tilde{\mathcal{X}}(y) = Df^+(x)\mathcal{X}(x)$ quando $y = f^+(x)$, segue que

$$\begin{aligned} D\phi_1(y)\tilde{\mathcal{X}}(y) &= D\phi_1(y) \circ Df^+(x)\mathcal{X}(x) \\ &= D(\phi_1 \circ f^+)(x)\mathcal{X}(x). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Denote por $\tilde{\mathcal{X}}(y)|_{U_1 \cap H_+}$ o sistema de coordenadas definido como $D\phi_1(y)\tilde{\mathcal{X}}(y)$. Assim, segue da expressão (2.6) que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{X}}(y)|_{U_1 \cap H_+} &= D(\phi_1 \circ f^+)(x)\mathcal{X}(x) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ \frac{-1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_2}(-x_2P(x_1, x_2) + x_1Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)). \end{aligned} \quad (2.7)$$

A expressão dada em (2.7) é a expressão de $\tilde{\mathcal{X}}$ em $U_1 \cap H_+$ nas coordenadas ϕ_1 e podemos colocá-la em função de u e v para facilitar a análise. Assim, considerando $x_1 = \frac{1}{v}$, $x_2 = \frac{u}{v}$, e substituindo em (2.7), temos

$$\tilde{\mathcal{X}}(y)|_{U_1 \cap H_+} = \left[-uvP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + vQ\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -v^2P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right].$$

Apesar de que, em geral, $\tilde{\mathcal{X}}$ não permanece limitado quando nos aproximamos de \mathbb{S}^1 , se multiplicarmos esse campo por um fator $\rho(y) = y_3^{d-1}$, em que d é o grau do campo \mathcal{X} ,

a extensão se torna possível. Assim,

$$\rho(f^+(x)) = \frac{1}{\Delta(x)^{d-1}} = \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}},$$

em que $z = (u, v)$. Desta forma, temos que $\rho\tilde{\mathcal{X}}$ nas coordenadas (u, v) é dado por

$$\begin{aligned} \rho\tilde{\mathcal{X}}(u, v) &= \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}} \left(-uvP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + vQ\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -v^2P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right) \\ &= \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}} \left(-uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -vP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Logo, (2.8) é a expressão do campo em $U_1 \setminus \mathbb{S}^1$. Se $y \in U_1 \cap H_-$, a mesma expressão é obtida.

Observe que os pontos do equador $\mathbb{S}^1 \cap U_1$ são representados por $v = 0$ nas coordenadas ϕ_1 e, por outro lado, esses pontos correspondem ao infinito do plano $T_{P_N}\mathbb{S}^2$. Observe, também, que é possível fazer $v = 0$ na expressão (2.8), resultando em

$$\rho\tilde{\mathcal{X}}(u, 0) = (-uP_d + Q_d, 0),$$

em que P_d e Q_d são os termos de maiores graus em P e Q , respectivamente. Perceba, ainda, que na expressão de $\rho\tilde{\mathcal{X}}(u, 0)$, temos a segunda componente do vetor igual a zero, o que significa que o vetor $\rho\tilde{\mathcal{X}}(u, 0)$ é tangente ao equador quando observado na esfera \mathbb{S}^2 . Assim, podemos concluir que o equador $\mathbb{S}^1 \cap U_1$ é invariante pelo campo $\rho\tilde{\mathcal{X}}$.

Removendo o fator $\frac{1}{\Delta(z)^{d-1}}$ de (2.8) por meio de uma parametrização de tempo, obtemos a expressão para o campo $\rho\mathcal{X}$ na carta local (U_1, ϕ_1) escrita como

$$\begin{cases} \dot{u} = v^d \left[-uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right], \\ \dot{v} = -v^{d+1}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right). \end{cases} \quad (2.9)$$

Analogamente, podemos calcular a expressão do campo $\rho\tilde{\mathcal{X}}$ na carta (U_2, ϕ_2) , que será dada por

$$\begin{cases} \dot{u} = v^d \left[P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right], \\ \dot{v} = -v^{d+1}Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right). \end{cases} \quad (2.10)$$

Finalmente, a expressão do campo $\rho\tilde{\mathcal{X}}$ na carta (U_3, ϕ_3) é dada por

$$\begin{cases} \dot{u} = P(u, v), \\ \dot{v} = Q(u, v). \end{cases} \quad (2.11)$$

Observação 1. *As expressões para $\rho\tilde{\mathcal{X}}$ nas cartas (V_1, ψ_1) , (V_2, ψ_2) , e (V_3, ψ_3) são dadas, respectivamente, pelas expressões (2.9), (2.10) e (2.11) multiplicadas por $(-1)^{d-1}$. Observe que o fator $(-1)^{d-1}$ desempenha um papel importante na análise das estabilidades dos pontos de equilíbrio infinitos e que, para estudar esses pontos, é suficiente analisar a carta (U_1, ϕ_1) e a origem da carta (U_2, ϕ_2) .*

Proposição 2.1. *Considere \mathcal{X} um campo polinomial em \mathbb{R}^2 de grau d . Seja $\rho : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\rho(y) = y_3^{d-1}$ e $\rho\tilde{\mathcal{X}}$ o campo induzido em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ por f^+ e f^- , como definido em (2.5). Então, $\rho\tilde{\mathcal{X}}$ pode ser estendido a um campo analítico de \mathbb{S}^2 com equador invariante.*

Demonstração: Vimos anteriormente que as expressões de $\rho\tilde{\mathcal{X}}$ nas cartas (U_1, ϕ_1) , (V_1, ψ_1) , (U_2, ϕ_2) e (V_2, ψ_2) são dadas por (2.9) e (2.10), respectivamente, multiplicadas pelo fator $(-1)^{d-1}$ quando for o caso. Observe que as expressões (2.9) e (2.10) são perfeitamente definidas para $v = 0$, isto é, no equador \mathbb{S}^1 . Assim, como tais expressões são analíticas, podemos estendê-las analiticamente ao equador. Fazendo $v = 0$ em (2.9) e (2.10), obtemos, respectivamente, $\rho\tilde{\mathcal{X}}(u, 0) = (-uP_d + Q_d, 0)$ e $\rho\tilde{\mathcal{X}}(u, 0) = (P_d, 0)$. Assim, concluímos que o equador será invariante por $\tilde{\mathcal{X}}$. ■

Definição 2.4. *O campo vetorial estendido na esfera \mathbb{S}^2 pelas cartas locais (U_k, ϕ_k) e (V_k, ψ_k) chama-se compactificação de Poincaré de \mathcal{X} e será indicado por $\mathcal{P}(\mathcal{X})$.*

Definição 2.5. *A projeção de $H_+ \cup \mathbb{S}^1$ em \mathbb{R}^2 é chamada de disco de Poincaré.*

Definição 2.6. *Chamamos de pontos de equilíbrio infinitos de \mathcal{X} os pontos de equilíbrio de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ em \mathbb{S}^1 .*

Como observado anteriormente, sabemos que os pontos de equilíbrio infinitos são da forma $(u, 0)$. As componentes P e Q do campo \mathcal{X} podem ser escritas como

$$P(x, y) = P_m(x, y) + \cdots + P_d(x, y)$$

e

$$Q(x, y) = Q_m(x, y) + \cdots + Q_d(x, y),$$

sendo P_j e Q_j polinômios homogêneos de grau j de P e Q , com $j = m, \dots, d$, com $m > 0$, os polinômios homogêneos não nulos de menor grau. A seguir apresentamos dois resultados envolvendo pontos de equilíbrio infinitos.

Proposição 2.2. *Seja $\mathcal{X} = (P, Q)$ um campo vetorial polinomial em \mathbb{R}^2 . As seguintes afirmações são verdadeiras:*

a) $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ é um ponto de equilíbrio infinito de $\mathcal{P}(X)$ se, e somente se,

$$F_1(u) \equiv Q_d(1, u) - uP_d(1, u) = 0.$$

b) $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cap V_2)$ é um ponto de equilíbrio infinito de $\mathcal{P}(X)$ se, e somente se,

$$F_2(u) \equiv Q_d(u, 1) - uP_d(u, 1) = 0.$$

Demonstração:

Considere o campo $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ na carta (U_1, ϕ_1) . Pela expressão dada em (2.9), temos que

$$\lim_{v \rightarrow 0} v^d \left[-uP \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) + Q \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) \right] = Q_d(1, u) - uP_d(1, u).$$

(\Rightarrow) Assuma que $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ seja um ponto de equilíbrio infinito de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$. Então, segue que

$$-uP_d(1, u) + Q_d(1, u) = 0.$$

(\Leftarrow) Agora, assumindo que $F_1(u) = 0$, de (2.9) segue que

$$\lim_{v \rightarrow 0} v^{d+1} P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) = 0.$$

Logo, $(u, 0)$ é um ponto singular de $\mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ e está provado o item (a). A prova do item (b) é análoga. ■

O Lema 2.2 a seguir é uma consequência direta da Proposição 2.2.

Lema 2.2. *A compactificação de Poincaré do campo de vetores $\mathcal{X}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ polinomial em \mathbb{R}^2 possui pontos de equilíbrio infinitos se existe um fator linear real $ax + by$ que divide o polinômio $xQ_d(x, y) - yP_d(x, y)$, em que Q_d e P_d são as partes homogêneas de grau d de Q e P , respectivamente, e d é o grau do campo \mathcal{X} .*

2.4 Índice topológico

Um setor topologicamente equivalente ao setor (a), (b) ou (c), respectivamente, representados na Figura 2.4 a seguir, é chamado de *setor hiperbólico*, *setor elíptico* e *setor parabólico*, respectivamente.

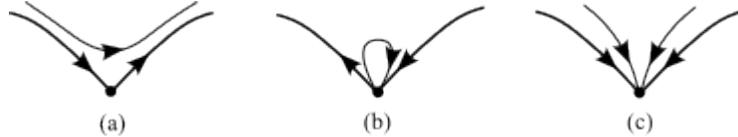


Figura 2.4: Setores de um ponto de equilíbrio.

Se p é um ponto de equilíbrio de um campo de vetores \mathcal{X} , dizemos que \mathcal{X} possui a propriedade da *decomposição setorial finita* em p se p é um centro, foco, nó ou possui uma vizinhança formada por uma união finita de setores parabólicos, hiperbólicos ou elípticos. Destacamos que todos os pontos de equilíbrio isolados de um sistema diferencial polinomial satisfazem a propriedade da decomposição setorial finita. Veja a Seção 1.5 de [15] para mais detalhes sobre a estrutura local de pontos de equilíbrio.

O número de setores hiperbólicos e elípticos de um ponto de equilíbrio p permite o cálculo do chamado *índice de p* , como mostra o Teorema 2.5 a seguir. A grosso modo, o índice de um ponto de equilíbrio fornece uma medida do "giro" do campo de vetores ao redor desse ponto. Uma definição precisa do índice de um ponto de equilíbrio e a demonstração do Teorema 2.5 podem ser encontradas nas páginas 172 e 179 de [15], respectivamente.

Teorema 2.5 (Fórmula do índice de Poincaré). *Seja q um ponto de equilíbrio isolado que possua a propriedade de decomposição setorial finita. Seja e , h e p o número de setores elípticos, hiperbólicos e parabólicos de q , respectivamente, com $e + h + p > 0$. Então, o índice $ind(q)$ de q é dado por*

$$ind(q) = \frac{e - h}{2} + 1.$$

Se a compactificação de Poincaré de um dado campo \mathcal{X} possui uma quantidade finita de pontos de equilíbrio, o Teorema 2.6 garante que a soma dos índices desses pontos

independe do campo considerado. Uma demonstração desse resultado pode ser encontrada na página 177 de [15].

Teorema 2.6 (Teorema de Poincaré-Hopf). *Seja \mathcal{X} um campo de vetores polinomial. Se a compactificação de Poincaré de \mathcal{X} possui uma quantidade finita de pontos de equilíbrio, então a soma dos índices desses pontos é igual a dois.*

Definição 2.7. *Denote por $G_{m,n}$ o conjunto de todos os campos de vetores polinomiais $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ com $\text{grau}(P) = m$ e $\text{grau}(Q) = n$, tal que os polinômios homogêneos P_m e Q_n não têm fatores lineares reais em comum. No caso em que $m = n$, denotamos esse conjunto por G_n .*

Definição 2.8. *Seja $F = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores polinomial. Considere $P_0 \in \mathbb{S}^1$ um ponto de equilíbrio infinito na compactificação de Poincaré do campo F . Suponha que P_0 tenha um setor hiperbólico. Dizemos que esse setor hiperbólico é degenerado se as duas separatrizes estão contidas em \mathbb{S}^1 . Caso contrário, esse setor hiperbólico é chamado não degenerado.*

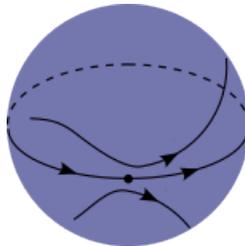


Figura 2.5: Ilustração de um setor hiperbólico degenerado.

O Teorema 2.7 a seguir, obtido por Cima, Gasull e Mañosas, reúne resultados envolvendo o grau das componentes de um campo de vetores polinomial Hamiltoniano e o índice topológico de um ponto de equilíbrio infinito. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [13].

Teorema 2.7. *Seja $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação polinomial. Seja q um ponto de equilíbrio infinito do campo de vetores polinomial Hamiltoniano $H_M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que*

$$H_M = \left(-\frac{\partial M}{\partial y}(x, y), \frac{\partial M}{\partial x}(x, y) \right) = (-M_y, M_x),$$

com $\text{grau}(M_y) = m$ e $\text{grau}(M_x) = n$. As seguintes afirmações são válidas:

1. Se $m = n$ e $H_M \in G_m$, então q é um nó e, portanto, $\text{ind}(q) = 1$.
2. Se q tem algum setor hiperbólico não degenerado h , então $H_M \notin G_{m,n}$.
3. Se $m > n$ e $H_M \in G_{m,n}$, então
 - (a) Se m é par, então q é um nó e, portanto, $\text{ind}(q) = 1$.
 - (b) Se m é ímpar e n é par, então q tem um setor hiperbólico degenerado e um setor elíptico, e, portanto, $\text{ind}(q) = 1$.
 - (c) Se m e n são ímpares, então q tem dois setores hiperbólicos degenerados e, portanto, $\text{ind}(q) = 0$, ou q tem dois setores elípticos e, portanto, $\text{ind}(q) = 2$.

Como consequência do Teorema 2.7, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.1. *Seja q um ponto de equilíbrio infinito do campo de vetores Hamiltoniano polinomial $H_M = (-M_y, M_x)$ tal que $\text{grau}(M_y) = m$ e $\text{grau}(M_x) = n$. Se $H_M \in G_{m,n}$, então o $\text{ind}(q)$ é maior ou igual a zero e quando é zero o ponto de equilíbrio q na esfera de Poincaré é formado por dois setores hiperbólicos degenerados.*

Capítulo 3

Respostas às Conjecturas Jacobianas

3.1 Teorema de Hadamard

O Teorema 3.1 seguinte, conhecido como Teorema de Hadamard, nos fornece uma condição equivalente à CJR e sua demonstração pode ser encontrada em [18]. Para enunciá-lo, precisaremos definir quando uma função é dita *própria*.

Definição 3.1. *Uma função contínua f é dita própria se $f^{-1}(K)$ é compacto sempre que K é compacto, ou seja, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é própria se $\|x\| \rightarrow \infty$ implica $\|f(x)\| \rightarrow \infty$.*

Teorema 3.1. *(Teorema de Hadamard). Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^2 com Jacobiano não nulo em todo ponto. Então, F é um difeomorfismo global se, e somente se, F é própria.*

Apesar do Teorema de Hadamard nos fornecer uma condição necessária e suficiente para garantir que um determinado difeomorfismo local seja um difeomorfismo global, em geral é bastante difícil verificar que uma dada aplicação é própria.

3.2 Injetividade global e conexidade dos conjuntos de nível

Veamos a seguir alguns resultados que fornecem respostas para a CJR no plano, analisando os conjuntos de nível das funções coordenadas da aplicação.

Teorema 3.2. *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^2 com Jacobiano não nulo em todo ponto. Se os conjuntos de nível de f ou g são conexos, então F é injetora.*

Demonstração: Como o Jacobiano de F é não nulo em todo ponto, segue que $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são submersões. Defina o campo de vetores Hamiltoniano associado a f por

$$H_f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$H_f(x, y) = (-f_y(x, y), f_x(x, y)).$$

Sabemos que as curvas de nível de f definem uma folheação sem singularidades em \mathbb{R}^2 , a qual coincide com as órbitas de H_f . Assim, temos que cada componente conexa da curva de nível $f^{-1}(\{c\})$, $c \in \mathbb{R}$, é composta por uma órbita de H_f . Suponha que os conjuntos de nível de f (análogo para g) sejam conexos e seja $\phi_t(x, y)$ o fluxo do campo de vetores H_f . Como o Jacobiano de F é não nulo em todo ponto, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g(\phi_t(x, y))) &= \nabla g(\phi_t(x, y)) \cdot \phi'_t(x, y) \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(\phi_t(x, y)), \frac{\partial g}{\partial y}(\phi_t(x, y)) \right) \cdot \phi'_t(x, y) \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{-\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right) (\phi_t(x, y)) \\ &= \det(D(f, g))(\phi_t(x, y)) \neq 0, \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Portanto, temos que a derivada é sempre positiva ou sempre negativa, o que implica que a função g é monótona ao longo das órbitas de H_f . Agora, considere $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ arbitrários. Queremos mostrar que $F(x_1, y_1) \neq F(x_2, y_2)$. Para isso, é suficiente mostrar que $f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2)$ ou $g(x_1, y_1) \neq g(x_2, y_2)$. Consideremos, então, $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = a \in \mathbb{R}$ e seja $L = f^{-1}(\{a\})$. Por hipótese, $L \in F_f$ possui apenas uma componente conexa,

a qual contém (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . Mas, pela observação anterior, g é monótona ao longo da folha L . Logo, $g(x_1, y_1) \neq g(x_2, y_2)$, o que implica $F(x_1, y_1) \neq F(x_2, y_2)$. ■

Se a aplicação F do Teorema 3.2 for polinomial, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.3. *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto. Então, F é injetora se, e somente se, os conjuntos de nível das aplicações f e g são conexos.*

Demonstração: (\Leftarrow) Segue imediatamente do Teorema 3.2.

(\Rightarrow) Se F é polinomial e injetora, pelo Lema 2.1 temos que F é também sobrejetora e, portanto, um difeomorfismo global. Assim, considerando $a \in \mathbb{R}$ arbitrário, podemos observar que $f^{-1}(\{a\}) = F^{-1}(\{a\} \times \mathbb{R})$, o qual é um conjunto conexo. O raciocínio é análogo para a função g . ■

O Exemplo 3.1 mostra que a hipótese de F ser polinomial no Teorema 3.3 é necessária.

Exemplo 3.1. *Considere a aplicação $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = ((1 - x^2)e^y, -xe^y)$. Temos que o Jacobiano de F é dado por*

$$\det(DF(x, y)) = \det \begin{bmatrix} -2xe^y & e^y - x^2e^y \\ -e^y & -xe^y \end{bmatrix} = e^{2y}(x^2 + 1) > 0, \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pelo Teorema 3.2, como os conjuntos de nível de g são conexos, então F é injetora. No entanto, observe que

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{0\}) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (1 - x^2)e^y = 0\} \\ &= \{-1, 1\} \times \mathbb{R}, \end{aligned}$$

o qual não é conexo.

3.3 Injetividade global e graus das componentes

Em 1994, S. Pinchuk provou, no artigo [25], que a CJR no plano é falsa. De fato, ele exibiu um contraexemplo e suas ideias foram generalizadas, sendo obtidos novos contra-

exemplos com graus mais baixos. Por exemplo, em 2023, F. Braun e F. Fernandes, em [3], construíram um difeomorfismo local não injetor no plano, com a primeira componente tendo grau 9 e a segunda componente possuindo grau 15.

Por outro lado, existem na literatura algumas respostas afirmativas à Conjectura Jacobiana Real em \mathbb{R}^2 considerando os graus das componentes de $F = (f, g)$. Em 2001, Gwózdziwics provou em [19] que a CJR no plano é verdadeira se os graus de f e de g são menores ou iguais a três, como mostra o Teorema 3.6 a seguir.

Teorema 3.4 (Gwózdziwics). *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto. Se os graus de f e de g são menores ou iguais a três, então F é injetora.*

Em 2010, F. Braun e J. R. dos Santos melhoraram o resultado do Teorema 3.6 anterior no artigo [10], tendo obtido o Teorema 3.5, o qual mostra que, nas condições da CJR no plano, basta que uma das funções coordenadas possua grau menor ou igual a três para se garantir a injetividade, independentemente do grau da outra.

Teorema 3.5. *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto. Se os graus de uma das funções coordenadas de F é menor ou igual a três, então F é injetora.*

Em 2016, F. Braun e B. Oréface-Okamoto mostraram, em [9], que é suficiente uma das funções coordenadas possuir grau menor ou igual a 4.

Teorema 3.6. *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto. Se os graus de uma das funções coordenadas de F é menor ou igual a quatro, então F é injetora.*

Posteriormente, no artigo [4], em 2025, F. Braun, F. Fernandes e B. Oréface-Okamoto melhoraram os resultados anteriores, tendo obtido o Teorema 3.7.

Teorema 3.7. *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto. Se o grau de f é menor ou igual a cinco, então F é injetora.*

Desta forma, de acordo com os resultados mencionados nesta seção, fica em aberto a seguinte questão.

Questão 1. *O que pode ser dito a respeito da Conjectura Jacobiana Real no plano no caso em que o grau de uma das funções coordenadas é maior ou igual a seis e menor ou igual a oito?*

Capítulo 4

Injetividade global e campos paralelos em \mathbb{R}^2

Neste capítulo, exploramos como M. Sabatini, em 1998 no artigo [27], e independentemente L. Gavrilov no artigo [17], estabeleceram uma conexão entre a propriedade CJR no plano e a existência de um centro global de um campo de vetores Hamiltoniano e uma extensão desse resultado obtida por F. Braun e J. Llibre, em 2024 no artigo [7], utilizando a equivalência topológica a outros tipos de campos paralelos.

4.1 Injetividade global e centro global em \mathbb{R}^2

O nosso foco, nesta seção, é apresentar o Teorema de Sabatini, o qual pode ser encontrado em [27]. Como mencionado anteriormente, esse resultado exhibe a equivalência entre a CJR no plano e a existência de um centro global. A fim de enunciá-lo, apresentaremos inicialmente uma breve descrição de centros no plano.

4.1.1 Centro global

Considere $\mathcal{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $\mathcal{X}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ um campo de vetores de classe C^k , $k \geq 1$ e p um ponto de equilíbrio de \mathcal{X} . Temos as seguintes definições.

Definição 4.1. *Seja p um ponto de equilíbrio de \mathcal{X} e V uma vizinhança de p . Definimos a vizinhança perfurada de p , a qual denotaremos por V_p , como sendo $V_p = V \setminus \{p\}$.*

Definição 4.2. *Um ponto de equilíbrio p de \mathcal{X} é dito ser um centro se existir uma vizinhança perfurada V_p preenchida por órbitas periódicas.*

Definição 4.3. *O anel periódico do centro p é a maior (no sentido de inclusão) vizinhança perfurada V_p preenchida por órbitas periódicas.*

Definição 4.4. *Dizemos que um centro p é global se seu anel periódico é $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$.*

Definição 4.5. *Se p é um centro, dizemos que p é um centro não degenerado se o Jacobiano de \mathcal{X} em p é não nulo.*

Um exemplo básico de centro global é o centro linear, conforme o Exemplo 4.1 a seguir.

Exemplo 4.1. *Considere o centro linear $\mathcal{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $X(x, y) = (-y, x)$. Note que $H(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ é uma integral primeira do campo \mathcal{X} . Assim, as curvas de nível de H coincidem com as órbitas do campo $\mathcal{X}(x, y)$. Para todo $k > 0$, temos que $(x^2 + y^2)/2 = k$ são circunferências. Logo, o anel periódico da origem do campo \mathcal{X} é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Veja a Figura 4.1.*

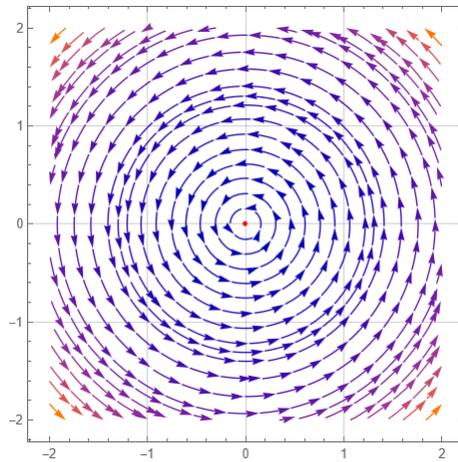


Figura 4.1: Centro linear.

No Exemplo 4.2, temos um exemplo de um centro que não é um centro global.

Exemplo 4.2. Considere $\mathcal{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $\mathcal{X}(x, y) = (-y - x^2 + y^2, x + 3xy)$. Note que a origem é um ponto de equilíbrio, o qual é um centro. Porém, o sistema possui outros pontos de equilíbrios, por exemplo, o ponto $(0, 1)$. Portanto, o centro $(0, 0)$ não pode ser global, ou seja, o anel periódico da origem não é o $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Veja a Figura 4.2.

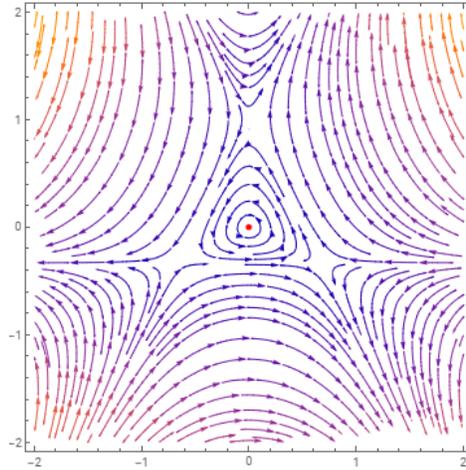


Figura 4.2: Centro não global.

4.1.2 Teorema de Sabatini

Antes de enunciarmos o Teorema de Sabatini, recordemos a definição do campo de vetores Hamiltoniano associado a uma função. Considere $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^2 . Definimos o campo de vetores Hamiltoniano associado à G , o qual denotaremos por $H_G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, por

$$H_G(x, y) = \left(-\frac{\partial G(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} \right).$$

Em particular, considere $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial com $F(0, 0) = (0, 0)$ e defina a função $M_F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$M_F(x, y) = \frac{F(x, y)^2}{2} = \frac{(f(x, y))^2 + (g(x, y))^2}{2}. \quad (4.1)$$

Note que a imagem de M_F contém apenas valores reais maiores ou iguais a zero. Pela definição que acabamos de apresentar, temos que o campo de vetores Hamiltoniano associado à M_F , ou seja, $H_{M_F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, é dado por

$$H_{M_F}(x, y) = \left(-\frac{\partial M_F(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial M_F(x, y)}{\partial x} \right). \quad (4.2)$$

Calculando as entradas do campo $H_{M_F}(x, y)$, temos que

$$-\frac{\partial M_F(x, y)}{\partial y} = -(f(x, y)f_y(x, y)) + g(x, y)g_y(x, y)$$

e

$$\frac{\partial M_F(x, y)}{\partial x} = f(x, y)f_x(x, y) + g(x, y)g_x(x, y),$$

em que as notações p_x e p_y indicam as derivadas do polinômio p com relação às variáveis x e y , respectivamente, aplicadas no ponto $.$ Observe que M_F é uma integral primeira do campo de vetores H_{M_F} . Deste modo, temos que as órbitas do campo H_{M_F} estão contidas nas curvas de nível de M_F . O Lema 4.1 a seguir será utilizado na demonstração do Teorema de Sabatini.

Lema 4.1. *Considere $F = (f, g) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação com Jacobiano não nulo em todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Os pontos de equilíbrio de H_{M_F} são centros e são os zeros de M_F ou, equivalentemente, são os zeros de F . Além disso, esses pontos de equilíbrio são não degenerados, equivalentemente, são pontos de mínimo isolados de M_F .*

Demonstração: Considere (x_0, y_0) um ponto de equilíbrio do campo H_{M_F} , isto é,

$$\frac{\partial M_F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial M_F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

Equivalentemente, temos que

$$\begin{cases} f(x_0, y_0)f_x(x_0, y_0) + g(x_0, y_0)g_x(x_0, y_0) = 0, \\ f(x_0, y_0)f_y(x_0, y_0) + g(x_0, y_0)g_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Podemos transformar (4.3) no sistema

$$\begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & g_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Observe que a matriz que define o sistema linear (4.4) possui determinante igual ao Jacobiano de F no ponto (x_0, y_0) , o qual, por hipótese, é diferente de zero. Portanto, a única solução do sistema é a solução trivial, isto é, $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$, o que implica que $F(x_0, y_0) = (0, 0)$ e, conseqüentemente, $M_F(x_0, y_0) = 0$. Como $F(x_0, y_0) = (0, 0)$ e F é localmente injetiva, pelo Teorema da Função Inversa, segue que existem vizinhanças V e W de (x_0, y_0) e $F(x_0, y_0)$, respectivamente, tais que $F(x, y) \neq (0, 0)$ para $(x, y) \neq (x_0, y_0) \in V$. Assim, (x_0, y_0) é um ponto de mínimo local isolado de M_F , pois $M_F(x, y) \neq 0$, para todo $(x, y) \neq (x_0, y_0) \in V$.

Agora, observe que a parte linear de H_{M_F} em $p = (x_0, y_0)$ é

$$DH_{M_F}(p) = \begin{bmatrix} -f_x(p)f_y(p) - g_x(p)g_y(p) & -f_y^2(p) - g_y^2(p) \\ f_x^2(p) + g_x^2(p) & f_x(p)f_y(p) + g_x(p)g_y(p) \end{bmatrix}.$$

Como $\det(DH_{M_F}) = (\det(DF))^2 > 0$, concluímos que (x_0, y_0) é um ponto de equilíbrio não degenerado do campo H_{M_F} e que os autovalores de $DH_{M_F}(x_0, y_0)$ são imaginários puros, pois $\text{tr}(DH_{M_F}) = 0$. Assim, (x_0, y_0) é um ponto de equilíbrio do tipo foco ou centro. Como as órbitas de H_{M_F} estão contidas nos conjuntos de níveis de M_F e (x_0, y_0) é um mínimo isolado de M_F , concluímos que (x_0, y_0) é um centro do campo de vetores H_{M_F} . ■

Teorema 4.1 (Teorema de Sabatini). *Considere $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial com $F(0, 0) = (0, 0)$ e com Jacobiano diferente de zero em todo ponto $\in \mathbb{R}^2$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *A origem é um centro global de H_{M_F} .*
2. *F é um difeomorfismo global.*

Demonstração: (1) \Rightarrow (2) Assumindo que a origem é um centro global de H_{M_F} , queremos mostrar que F é um difeomorfismo global. Para isto, mostraremos que F é própria e utilizaremos o Teorema de Hadamard para concluir que F é um difeomorfismo global. Sendo a origem um centro global de H_{M_F} , temos que a origem é o único ponto de equilíbrio desse campo de vetores. Assim, pelo Lema 4.1, temos que $(0, 0)$ é o único

zero de M_F . Agora, considere uma reta L passando pela origem, gráfico de uma função da forma $y = ax$, com $a \in \mathbb{R}$. Observe que a restrição de M_F à reta L é uma função polinomial de uma variável, não constante e, conseqüentemente, não limitada. Logo, M_F é também não limitada. Como os conjuntos de nível $h > 0$ de M_F coincidem com as órbitas fechadas de H_{M_F} , eles são compactos e como M_F é constante ao longo das órbitas do campo H_{M_F} temos que se $\|(x, y)\|$ tende ao infinito, a imagem de M_F também tende ao infinito. Logo, $\|F(x, y)\|$ tende ao infinito, ou seja, F é própria.

(2) \Rightarrow (1) Assumindo que F é um difeomorfismo global, vamos mostrar que a origem do campo de vetores H_{M_F} é um centro global. Pelo Teorema de Hadamard, temos que F é própria e, conseqüentemente, M_F é também própria. Portanto, toda órbita de H_{M_F} possui fecho compacto, pois está contida em um conjunto de nível de M_F e para cada $h \geq 0 \in \mathbb{R}$ temos que $M_F^{-1}(h)$ é um compacto. Sendo F um difeomorfismo global, em particular segue que F é injetora e, por hipótese, $F(0, 0) = (0, 0)$. Assim, temos que $F(x, y) \neq (0, 0)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Desta forma, pelo Lema 4.1, temos que H_{M_F} possui um equilíbrio apenas na origem. Para toda condição inicial diferente da origem, os conjuntos α e ω -limite da órbita de H_{M_F} que passa por essa condição inicial são não vazios e não contêm pontos de equilíbrio, pois a origem do campo H_{M_F} é um centro local. Assim, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, temos que essa órbita é fechada. Portanto, segue que $(0, 0)$ é um centro global de H_{M_F} . ■

Vejamos uma aplicação do Teorema 4.1 no Exemplo 4.3 a seguir.

Exemplo 4.3. Considere a aplicação polinomial $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$F(x, y) = (x(1 + x^2 + y^2), y(1 + x^2 + y^2)).$$

Observe que $F(0, 0) = (0, 0)$ e que seu Jacobiano F é dado por

$$\det(DF(x, y)) = 1 + 3x^4 + 4y^2 + 3y^4 + x^2(4 + 6y^2) > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calculando o campo Hamiltoniano H_{M_F} associado a essa função, obtemos

$$H_{M_F} = (-y(1 + x^2 + y^2)(1 + 3x^2 + 3y^2), x(1 + x^2 + y^2)(1 + 3x^2 + 3y^2)),$$

o qual possui a origem como único ponto de equilíbrio e não possui pontos de equilíbrio infinitos. De fato, na carta U_1 , as coordenadas desse campo são dadas por

$$\begin{aligned} u' &= 3 + 9u^2 + 9u^4 + 3u^6 + 4v^2 + 8u^2v^2 + 4u^4v^2 + v^4 + u^2v^4, \\ v' &= 3uv + 6u^3v + 3u^5v + 4uv^3 + 4u^3v^3 + uv^5 \end{aligned}$$

e na carta U_2 temos

$$\begin{aligned} u' &= -3 - 9u^2 - 9u^4 - 3u^6 - 4v^2 - 8u^2v^2 - 4u^4v^2 - v^4 - u^2v^4, \\ v' &= -3uv - 6u^3v - 3u^5v + 4uv^3 - 4u^3v^3 - uv^5. \end{aligned}$$

Note que fazendo $v = 0$, temos que u' é sempre positivo na carta U_1 e sempre negativo na carta U_2 . Deste modo, temos que o infinito é uma órbita periódica e a origem é um centro global de H_{M_F} , pelo Teorema de Poincaré-Bendixson. Logo, pelo Teorema de Sabatini, concluímos que F é um difeomorfismo global.

4.1.3 Generalização do Teorema de Sabatini

A seguir, apresentaremos resultados obtidos por F. Braun e J. Llibre, no artigo [8], os quais generalizam o Teorema de Sabatini, no sentido em que não exigem que a aplicação seja polinomial e nem que esteja definida sobre o plano todo, bastando estar definida em um subconjunto aberto U do plano. Ao longo desta subseção, convencionaremos que $U \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto e conexo, $F = (f, g) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação de classe C^2 e M_F e H_{M_F} são, respectivamente, a função e o campo de vetores definidos anteriormente em (4.1) e (4.2).

Lema 4.2. *Considere $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^2 com Jacobiano não nulo em todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $F(p) = (0, 0)$, $p \in U$. Suponha que F é injetora. Então, p é um centro global de H_{M_F} se, e somente se, $F(U) = \mathbb{R}^2$ ou $F(U) = B((0, 0), \delta)$, com $\delta > 0$.*

Demonstração: Como $p \in U$ é tal que $F(p) = (0, 0)$, pelo Lema 4.1, p é pelo menos um centro local de H_{M_F} . Como, por hipótese, F é injetora, novamente pelo Lema 4.1

temos que p é o único ponto de equilíbrio de H_{M_F} . Note que $0 < h \in M_F(U)$ se, e somente se, existe $(x_0, y_0) \in U$ tal que $M_F(x_0, y_0) = h$, ou seja,

$$h = M_F(x_0, y_0) = \frac{\|F(x_0, y_0)\|^2}{2} = \frac{(f(x_0, y_0))^2 + (g(x_0, y_0))^2}{2}.$$

Observe que esta expressão é equivalente a

$$(f(x_0, y_0))^2 + (g(x_0, y_0))^2 = (\sqrt{2h})^2,$$

ou seja, existe um ponto $(u, v) \in F(U)$ tal que $(u, v) = F(x_0, y_0)$ e $\|(u, v)\| = \sqrt{2h}$. Agora, a partir do ponto $F(x_0, y_0)$, vamos definir a circunferência S_h centrada em $(0, 0)$ e de raio $\sqrt{2h}$, com $h > 0$. Assim, temos que

$$S_h = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = (\sqrt{2h})^2\}.$$

Note que S_h é um subconjunto do contradomínio de F . Pela discussão anterior, concluímos que $0 < h \in M_F(U)$ se, e somente se, $S_h \cap F(U) \neq \emptyset$.

(\Rightarrow) Suponha que p seja um centro global de H_{M_F} . Devemos mostrar que $F(U) = \mathbb{R}^2$ ou $F(U) = B((0, 0), \delta)$, $\delta > 0$. Como U é conexo e M_F é contínua, segue que $M_F(U) \subset \mathbb{R}$ é conexo. Logo, $M_F(U)$ é um intervalo da forma $[0, l)$, com $0 \leq l \in \mathbb{R}$, ou $M_F(U) = [0, \infty)$. Agora, tome $q \in F(U)$, $q \neq (0, 0)$ arbitrário, considere $F^{-1}(q) \subset U$ e defina $h_q = M_F(F^{-1}(q))$. Pela hipótese de que p é um centro global de H_{M_F} , temos que as órbitas não singulares de H_{M_F} são periódicas. Logo, as componentes conexas de $M_F^{-1}(h_q)$ são curvas fechadas. Então, sendo Γ_{h_q} uma dessas componentes conexas, segue que $F(\Gamma_{h_q})$ é uma curva fechada. Observe que para cada $p \in \Gamma_{h_q}$, temos que $M_F(p) = h_q \in M_F(U)$. Logo, $F(p) \in F(U) \cap S_{h_q}$ e, portanto, temos que $F(\Gamma_{h_q})$ está contida em $F(U)$ e também está contida em S_{h_q} . Por outro lado, como $F(\Gamma_{h_q})$ é uma curva fechada contida em S_{h_q} , segue que $F(\Gamma_{h_q}) = S_{h_q} \subset F(U)$. Em outras palavras, se $q \in F(U)$, então a circunferência S_{h_q} está contida em $F(U)$. Isso implica que a imagem de $F(U)$ é folheada por circunferências, isto é

$$F(U) = \{(0, 0)\} \cup \bigcup_{h \in M_F(U)} S_h.$$

Portanto, $F(U) = \mathbb{R}^2$, se $l = \infty$, enquanto que se $l \in \mathbb{R}$, $l \geq 0$, então $F(U)$ é o disco aberto com raio l centrado em $(0, 0)$.

(\Leftarrow) Assumindo que $F(U) = \mathbb{R}^2$ ou $F(U) = B((0, 0), \delta)$, com $\delta > 0$, queremos mostrar que p é um centro global de H_{M_F} . Para isto, vamos mostrar que as curvas de nível de M_F , as quais coincidem com as órbitas do campo H_{M_F} , são fechadas. Deste modo, fixemos, arbitrariamente, $h > 0$, com $h \in M_F(U)$. Como vimos, $h \in M_F(U)$ se, e somente se, $S_h \cap F(U) \neq \emptyset$. Se $F(U) = \mathbb{R}^2$, então $S_h \subset \mathbb{R}^2 = F(U)$. Por outro lado, se $F(U) = B((0, 0), \delta)$, então $S_h \cap B((0, 0), \delta) \neq \emptyset$. Portanto, $S_h \subset B((0, 0), \delta)$, o que implica que $S_h \subset F(U)$. Assim, concluímos que, $0 < h \in M_F(U)$ se, e somente se, $S_h \subset F(U)$. Agora, observe que

$$M_F^{-1}(h) = \{(x, y) \in U : M_F(x, y) = h\} = \{(x, y) \in U : (f(x, y))^2 + (g(x, y))^2 = (\sqrt{2h})^2\}$$

e, por outro lado,

$$F^{-1}(S_h) = \{(x, y) \in U : F(x, y) \in S_h\} = \{(x, y) \in U : (f(x, y))^2 + (g(x, y))^2 = (\sqrt{2h})^2\}.$$

Assim, concluímos que $M_F^{-1}(h) = F^{-1}(S_h)$. Note que $F^{-1}(S_h)$ é um conjunto não vazio, uma vez que $S_h \subset F(U)$. Daí, como F é contínua e é um difeomorfismo local, temos que $F^{-1}(S_h) = M_F^{-1}(h)$ é uma curva de Jordan, isto é, uma curva fechada simples. Como $h \in M_F(U)$, $h > 0$, foi tomado de forma arbitrária, segue que as órbitas não singulares do campo H_{M_F} são periódicas. Desta forma, temos que o centro p é global. ■

Lema 4.3. *Considere $F : U \subset \mathbb{R}^2$. Seja F uma aplicação de classe C^2 com Jacobiano não nulo em todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $F(p) = (0, 0)$, $p \in U$. Suponha que p seja um centro global em U de H_{M_F} . Então, F é injetora.*

Demonstração: Temos que p é um centro global de M_F , o qual corresponde à curva de nível $M_F^{-1}(\{0\})$. Pelo Lema 4.1, p é o único zero de F , isto é, $F(p) = (0, 0)$. Portanto, para cada $h > 0 \in M_F(U)$, o conjunto de nível $M_F^{-1}(\{h\})$ é uma união de órbitas fechadas.

Afirmção 1: Para cada $h > 0 \in M_F(U)$, $M_F^{-1}(\{h\}) \subset U$ é um conjunto conexo.

De fato, suponha que exista $h_0 > 0 \in M_F(U)$ tal que $M_F^{-1}(\{h_0\}) \subset U$ é não conexo. Sejam $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset U$ duas órbitas fechadas distintas de $M_F^{-1}(\{h_0\})$. Considere o anel aberto A

cujo bordo é $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Considere também uma curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow \bar{A}$ tal que α seja injetora, de classe C^1 , com $\alpha(0) \in \Gamma_1, \alpha(1) \in \Gamma_2$ e $\alpha(s) \subset A, \forall s \in (0, 1)$. Como $M_F(\alpha(0)) = M_F(\alpha(1)) = h_0$, segue que a função $M_F \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ atinge um máximo ou um mínimo em $s_0 \in (0, 1)$. Assim, considere a órbita $\Gamma_3 \in U$ passando por $\alpha(s_0)$. Veja a Figura 4.3.

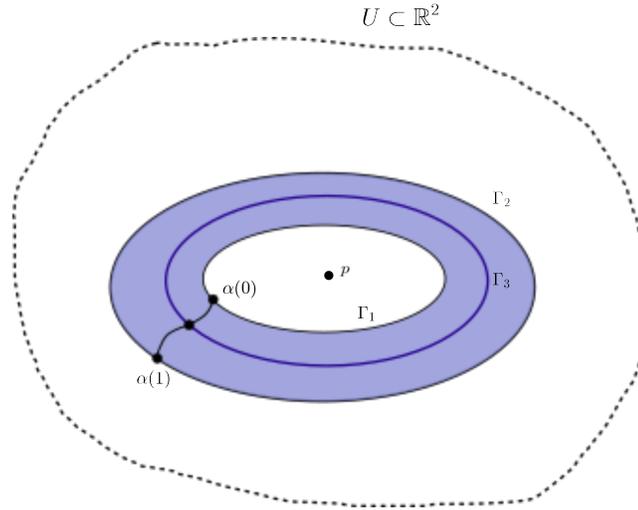


Figura 4.3: Anel com bordo $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Observe que, localmente, Γ_3 decompõe o anel A em duas regiões, A_1 e A_2 . Como ∇M_F restrito a Γ_3 não se anula (pois ∇M_F se anula apenas no ponto $p = M_F^{-1}(\{0\})$), a curva $\alpha(0, 1)$ deve estar inteiramente contida em uma das duas regiões: A_1 ou A_2 . No entanto, percebe-se que isso resulta em uma contradição com o fato de que a curva α conecta Γ_1 e Γ_2 , provando, assim, a Afirmação 1.

Agora, denote por Γ_h a órbita fechada $M_F^{-1}(\{h\})$, $0 < h \in M_F(U)$. Observe que se $0 < h_1 < h_2 \in M_F(U)$, então Γ_{h_1} está contida na região limitada por Γ_{h_2} .

Afirmação 2: Seja $0 < h \in M_F(U)$. Então, F é injetora em Γ_h .

De fato, considere

$$T = \{h > 0, h \in M_F(U) : F \text{ não é injetora em } \Gamma_h.\}.$$

Vamos mostrar que o conjunto T é vazio. Para isto, suponha que $T \neq \emptyset$. Então, como T é um subconjunto da imagem de M_F , a qual é limitada inferiormente, segue que T é também

limitado inferiormente. Logo, $T \subset \mathbb{R}$ possui ínfimo. Assim, considere $h_0 = \inf T$. Observe que $h_0 > 0$, pois F é um difeomorfismo local e, portanto, injetora em uma vizinhança de $p = M_F^{-1}(\{0\})$. Suponha que F não seja injetora em Γ_{h_0} . Assim, existem $A, B \in \Gamma_{h_0}$, tais que $A \neq B$ e $F(A) = F(B)$. Então, como F é um difeomorfismo local, existem vizinhanças $U_A, U_B \subset U$ de A e B , respectivamente, e $W \subset \mathbb{R}^2$ vizinhança de $F(A) = F(B) \neq (0, 0)$, com $U_A \cap U_B = \emptyset$ tais que $F_A := F|_{U_A} : U_A \rightarrow W$ e $F_B := F|_{U_B} : U_B \rightarrow W$ são difeomorfismos.

Agora, note que $F(A) = F(B) \in S_{h_0}$ e considere o segmento de reta L que une $F(A)$ à origem e defina $C = L \cap W$. Veja a Figura 4.4.

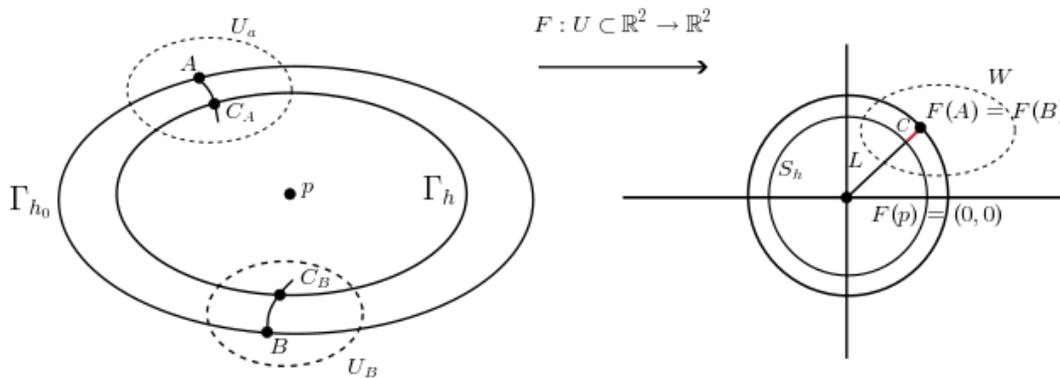


Figura 4.4: Curvas C_A e C_B da Afirmação 2.

Assim, ficam bem definidas as curvas $C_A = F_A^{-1}(C)$ e $C_B = F_B^{-1}(C)$, as quais estão contidas na região compacta limitada por Γ_{h_0} , pois, caso contrário, existiria um ponto $c \in C_A$ (análogo para C_B) tal que $c \in \Gamma_{h_1}$, para algum $h_1 > h_0$, de forma que $F(c) \in S_{h_1}$, o que implicaria $c \notin C_A$.

Logo, para $0 < h < h_0$ suficientemente próximo de h_0 , a órbita fechada Γ_h possui interseção não vazia com C_A e com C_B . Portanto, existem pontos $P_A = \Gamma_h \cap C_A$ e $P_B = \Gamma_h \cap C_B$, tais que $P_A \neq P_B$, pois $P_A \in U_A$ e $P_B \in U_B$. Deste modo, como $F(P_A), F(P_B) \in C$ e $F(P_A), F(P_B) \in S_h$, segue que $F(P_A) = F(P_B)$. Portanto, concluímos que F não é injetora em Γ_h . Assim, temos que $h \in T$, com $0 < h < h_0 = \inf T$, o que é uma contradição. Portanto, temos que F é injetora em Γ_{h_0} .

Agora, observe que pela definição de ínfimo, existe uma sequência (h_n) em T , decres-

cente, com $h_n > h_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que h_n converge para h_0 e F não é injetora em Γ_{h_n} , para cada $n \in \mathbb{N}$. Isto significa que para todo $n \in \mathbb{N}$ existem $A_n \neq B_n$, com $A_n, B_n \in \Gamma_{h_n}$ e $F(A_n) = F(B_n)$. Como (A_n) e (B_n) estão em um conjunto compacto limitado por Γ_{h_1} , existem subsequências convergentes (A_{n_k}) e (B_{n_k}) de (A_n) e (B_n) , respectivamente, as quais, por sua vez, admitem subsequências $(A_{n_{k_j}})$ e $(B_{n_{k_j}})$, respectivamente, tais que $(A_{n_{k_j}})$ converge para $a \in U$ e $(B_{n_{k_j}})$ converge para $b \in U$. Então, como h_n converge para h_0 , temos que $a, b \in \Gamma_{h_0}$ e $F(a) = F(b)$, pois $F(A_n) = F(B_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, o fato de F ser injetora em Γ_{h_0} , implica que $a = b$. Como, por hipótese, F é um difeomorfismo local em a , pois $a \in U$, existem vizinhanças V e W de a e $F(a)$, respectivamente, tais que $F|_V : V \rightarrow W$ é um difeomorfismo local. Em particular, $F|_V$ é injetora. Portanto, obtemos uma contradição com a hipótese que $A_n \neq B_n$ e $F(A_n) = F(B_n)$, para n suficientemente grande. Essa contradição prova que o conjunto T é vazio, ou seja, F é injetora em Γ_h , para cada $h > 0 \in M_F(U)$, concluindo a prova da Afirmação 2.

Agora, nos resta mostrar que dados dois pontos P_1 e P_2 pertencentes a órbitas distintas, Γ_{h_1} e Γ_{h_2} , respectivamente, então $F(P_1) \neq F(P_2)$, ou seja, que F é injetora em órbitas distintas. Observe, no entanto, que esse fato é imediato, pois se $P_1 \neq P_2$, com $P_1 \in \Gamma_{h_1}$ e $P_2 \in \Gamma_{h_2}$, com $0 < h_1 < h_2$, então $F(P_1) \in S_{h_1}$ e $F(P_2) \in S_{h_2}$, de forma que $F(P_1) \neq F(P_2)$. Veja a Figura 4.5. ■

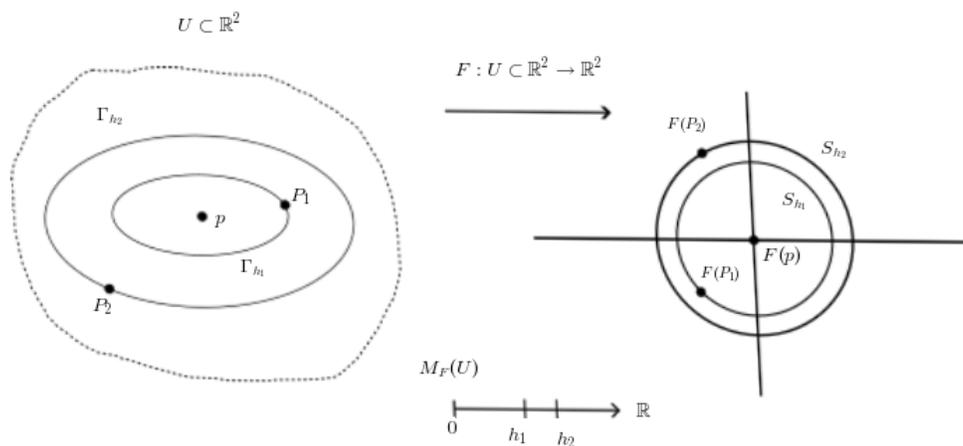


Figura 4.5: F é injetora em duas órbitas distintas.

O principal resultado apresentado por F. Braun e J. Llibre em [6] é o Teorema 4.2 seguinte. Observe que sua demonstração é uma aplicação direta dos Lemas 4.1 e 4.3 anteriores.

Teorema 4.2. *Considere $F = (f, g) : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^2 com Jacobiano não nulo em todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $F(p) = (0, 0)$, $p \in U$. O ponto de equilíbrio p é um centro global de H_{M_F} se, e somente se, F é injetora e $F(U) = \mathbb{R}^2$ ou $F(U) = B((0, 0), \delta)$, $\delta > 0$.*

Demonstração: (\Rightarrow) Assumindo que p é um centro global de H_{M_F} , segue do Lema 4.3 que F é injetora. Portanto, podemos utilizar o Lema 4.2 para concluir que $F(U) = \mathbb{R}^2$ ou $F(U) = B((0, 0), \delta)$, $\delta > 0$. (\Leftarrow) Segue diretamente do Lema 4.2. ■

Note que, de fato, o Teorema de Sabatini é um caso particular do Teorema 4.2, em que $U = \mathbb{R}^2$ e F é polinomial. Do Teorema 4.2, obtemos ainda os seguintes corolários.

Corolário 4.1. *Seja $F = (f, g) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^2 com Jacobiano não nulo em todo ponto $(x, y) \in U$ e $F(p) = (0, 0)$, para algum $p \in U$. Então, são válidas as seguintes afirmações:*

1. F é injetora em $\overline{P_p}$, em que $\overline{P_p}$ é o fecho de P_p em U e P_p denota o anel periódico de p .
2. $F(P_p) = \mathbb{R}^2$ ou $F(P_p)$ é um disco aberto de centro $(0, 0)$ e raio δ , $\delta > 0$.

Demonstração: Como $F(p) = (0, 0)$, pelo Lema 4.1, p é um ponto de equilíbrio do tipo centro do campo de vetores H_{M_F} . Pela Definição 4.3, V_p é um conjunto aberto e conexo contido em U . Considere $F|_{P_p} \rightarrow \mathbb{R}^2$, isto é, a restrição da aplicação F ao anel periódico de p . Observe que o centro p do campo de vetores H_{M_F} definido em P_p é global. Assim, pelo Teorema 4.2, F é injetora em V_p e $F(V_p) = \mathbb{R}^2$ ou $F(V_p) = B((0, 0), \delta)$, com $\delta > 0$. Portanto, está provado o item 2.

Agora, considere $P = \overline{P_p} \setminus P_p$. Para finalizar a demonstração do corolário, basta mostrar que F é injetora em P . A prova deste fato é similar à feita no Lema 4.3. Suponha

que F não seja injetora em P . Desta forma, existem $a, b \in P$, $a \neq b$, com $F(a) = F(b)$. Como F é um difeomorfismo local, sabemos que existem vizinhanças $U_a, U_b \subset U$, de a e b , respectivamente, com $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, e $W \subset \mathbb{R}^2$ vizinhança de $F(a) = F(b) \neq (0, 0)$, tais que $F|_{U_a}$ e $F|_{U_b}$ são difeomorfismos. Note que para cada $p \in P$ e cada $h \in M_F(P_p)$, temos $M_f(p) > h$. Logo, $(a) = F(b) \notin S_h$.

Considere o segmento de reta L que une $F(a) = F(b)$ à origem e defina $C = L \cap W$. Assim, ficam bem definidas as curvas $C_a = F_a^{-1}(C)$ e $C_b = F_b^{-1}(C)$. Observe que C_a e C_b estão contidas na região limitada por P , pois, caso contrário, se C_a não está contida na região limitada por P , então existe $c_a \in C_a$, tal que $F(c_a) \notin S_h$, para todo $h \in M_F(P_p)$. Logo, $F(c_a) \notin C$, o que é uma contradição. Para C_b é análogo.

Para $h_0 \in M_F(P_p)$, existe uma órbita fechada $\Gamma_0 = M_F^{-1}(h_0) \in P_p$, suficientemente próxima de P , tal que Γ_0 possui interseção não vazia com C_a e com C_b . Portanto, existem pontos $p_a = \Gamma_0 \cap C_a$ e $p_b = \Gamma_0 \cap C_b$, tais que $p_a \neq p_b$, pois $p_a \in U_a$ e $p_b \in U_b$. Então, uma vez que $F(p_a), F(p_b) \in C$ e $F(p_a), F(p_b) \in S_{h_0}$, segue, portanto, que $F(p_a) = F(p_b)$, o que implica que F é não injetora em Γ_0 . No entanto, observe que isso é uma contradição, pois já vimos que F é injetora em P_p . ■

Corolário 4.2. *Seja $F = (f, g) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe \mathcal{C}^2 com Jacobiano não nulo em todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $F(p) = (0, 0)$, para algum $p \in U$. Então, o anel periódico é o maior conjunto aberto e conexo que contém o ponto de equilíbrio p e tal que satisfaz as duas condições seguintes.*

1. F é injetora nele.
2. Sua imagem por F é \mathbb{R}^2 ou um disco aberto de centro $(0, 0)$ e raio δ , $\delta > 0$.

Demonstração: Pelo Corolário 4.1, sabemos que P_p satisfaz as condições 1 e 2. Resta mostrar que P_p é o maior conjunto aberto e conexo que contém o ponto de equilíbrio p satisfazendo 1 e 2. Suponha que $V \subset U$ seja um aberto conexo tal que F é injetora em V e $F(V) = \mathbb{R}^2$ ou $F(V)$ é um disco aberto de centro $(0, 0)$ e raio $\delta > 0$. Considere $F|_V \rightarrow \mathbb{R}^2$. Pelo Teorema 4.2, temos que p é um centro global de $H_{M_F} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Portanto,

temos que as órbitas do campo H_{M_F} que interceptam V são periódicas e estão contidas em V . Daí, temos que $V \subset P_p$, pois P_p é a maior (no sentido de inclusão) vizinhança perfurada de p preenchida por órbitas periódicas. ■

4.2 Injetividade global e campos paralelos em \mathbb{R}^2

Nesta seção, apresentaremos o principal resultado deste capítulo, o Teorema 4.3, o qual foi obtido por F. Braun e J. Llibre, em 2024, no artigo [7]. Esse resultado representa também uma generalização do Teorema de Sabatini, no sentido de que, ao invés de verificar se o Hamiltoniano H_{M_F} possui um centro global na origem para concluir a injetividade de F , tomamos um campo de vetores paralelo \mathcal{X} e verificamos se esse campo é topologicamente equivalente ao seu pullback pela aplicação F . No caso particular em que tomamos o campo anular $\mathcal{X}(x, y) = (-y, x)$, o pullback de F por \mathcal{X} coincide com o campo Hamiltoniano H_{M_F} definido anteriormente. Desta forma, veremos que o Teorema de Sabatini representa um caso particular do Teorema 4.3. A fim de enunciar e demonstrar esse teorema, precisaremos primeiramente de algumas definições e lemas auxiliares.

Definição 4.6. *Dizemos que um campo de vetores $\mathcal{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é paralelo se ele é topologicamente equivalente a um dos seguintes campos vetoriais:*

(a) $\mathcal{X}(x, y) = (-y, x)$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;

(b) $\mathcal{X}(x, y) = (x, y)$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;

(c) $\mathcal{X}(x, y) = (1, 0)$ em \mathbb{R}^2 .

Um campo de vetores paralelo é chamado anular, radial ou faixa quando é topologicamente equivalente ao campo de vetores (a), (b) ou (c), respectivamente. Chamaremos ainda de campo canônico anular, radial ou faixa, os campos (a), (b) e (c), respectivamente. Veja a Figura 4.6.

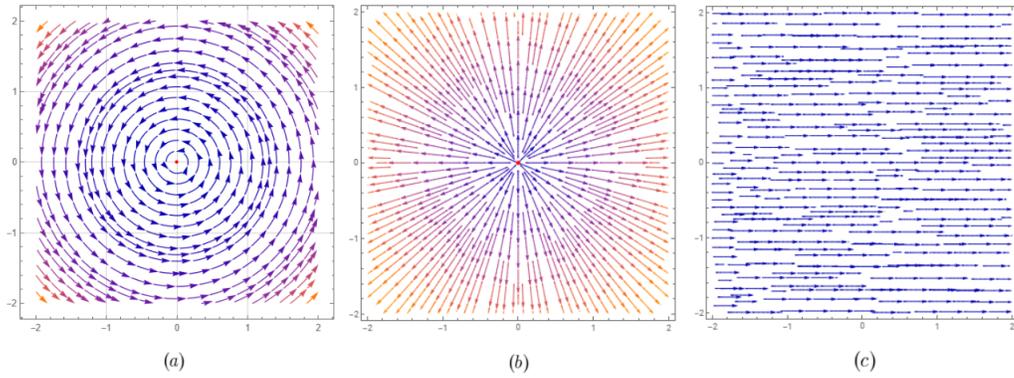


Figura 4.6: Retratos de fases dos campos canônicos anular (a), radial (b) e faixa (c).

Definição 4.7. *Se um campo de vetores $\mathcal{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ é tal que $\mathcal{X}|_{U \setminus \{z\}}$, para algum $z \in U$, é anular ou radial, dizemos simplesmente que \mathcal{X} é anular ou radial em torno de z , respectivamente.*

Observe que a condição da Definição 4.7 impõe que U seja simplesmente conexo.

Definição 4.8. *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação com Jacobiano não nulo em todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{X} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores com $F(U) \subset V$. Definimos, em U , o pullback de \mathcal{X} por F , denotado por $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$, da seguinte forma*

$$\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}(z) = DF(z)^{-1} \mathcal{X}(F(z)), \quad (4.5)$$

com $z \in U$.

No Exemplo 4.4 a seguir, consideramos $F = (f, g)$ um difeomorfismo local e exibimos as expressões explícitas para o pullback de \mathcal{X} por F , no caso em que tomamos \mathcal{X} como sendo cada um dos campos canônicos definidos na Definição 4.6.

Exemplo 4.4. *Seja $F = (f, g) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^2 com Jacobiano JF não nulo em todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $z \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(z) = 0$. A seguir, forneceremos as expressões explícitas de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ para os campos canônicos anular, radial e faixa. Para simplificar as expressões, vamos considerar o produto $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ em vez de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$. É fácil notar que $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ é topologicamente equivalente a \mathcal{X} se, e somente se, $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ é topologicamente equivalente a \mathcal{X} .*

Primeiramente, tomando o campo canônico anular $\mathcal{X}(x, y) = (-y, x)$ da Definição 4.8, obtemos que

$$JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}} = (-ff_y - gg_y, ff_x + gg_x) = H_{M_F}, \quad (4.6)$$

em que H_{M_F} é a aplicação definida em (4.2). Tomando o campo canônico radial $\mathcal{X}(x, y) = (x, y)$, obtemos que

$$JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}} = (fg_y - gfy, -fg_x + gfx). \quad (4.7)$$

Tomando, por fim, o campo canônico do tipo faixa, $\mathcal{X}(x, y) = (1, 0)$, obtemos que

$$JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}} = (g_y, -g_x). \quad (4.8)$$

Observação 2. Sejam $F = (f, g) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo local e $G : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 com $F(U) \subset V$. Se $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $H = G \circ F$, então

$$\begin{aligned} H_H(x, y) &= \left(\frac{\partial H}{\partial y}(x, y), -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right) \\ &= \begin{pmatrix} g_y(x, y) & -f_y(x, y) \\ -g_x(x, y) & f_x(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial y}(F(x, y)), -\frac{\partial G}{\partial x}(F(x, y)) \end{pmatrix} \\ &= JF(x, y) DF(x, y)^{-1} H_G(F(x, y)) \\ &= JF(x, y) \mathcal{Y}_{H_G}(x, y). \end{aligned}$$

Assim, vemos que \mathcal{Y}_{H_G} é um múltiplo do Hamiltoniano H_H por um fator não nulo. Consequentemente, esses dois campos de vetores são topologicamente equivalentes.

Lema 4.4. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto. Considere $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^2 com Jacobiano não nulo em todo ponto $(x, y) \in U$ e \mathcal{X} um campo de vetores de classe C^1 definido em um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^2$ tal que $F(U) \subset V$. Seja $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ o pullback de \mathcal{X} . As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Um ponto $z \in U$ é um ponto de equilíbrio de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ se, e somente se, $F(z)$ for um ponto de equilíbrio de \mathcal{X} .
- (ii) Se γ é uma órbita de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$, então $(F \circ \gamma)'(t) = \mathcal{X}(F \circ \gamma(t))$, para todo t pertencente ao intervalo máximo de definição da solução γ . Em particular, $F \circ \gamma$ está contida em uma órbita de \mathcal{X} .

(iii) Para cada seção transversal S de \mathcal{Y}_X que passa por um ponto $p \in U$, existe uma vizinhança U_p de p tal que $F(S \cap U_p)$ é uma seção transversal de \mathcal{X} em $F(p)$.

(iv) Se $G : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma integral primeira de \mathcal{X} , então $H = G \circ F$ é uma integral primeira de \mathcal{Y}_X . Um ponto $z \in U$ é um ponto crítico de H se, e somente se, $F(z)$ for um ponto crítico de G .

Demonstração: A prova do item (i) segue diretamente da definição de \mathcal{Y}_X . Agora, sendo γ uma órbita de \mathcal{Y}_X , segue que, para cada t pertencente ao intervalo maximal em que a solução γ está definida, temos

$$(F \circ \gamma)'(t) = DF(\gamma(t))\gamma'(t) = DF(\gamma(t))\mathcal{Y}_X(\gamma(t)) = \mathcal{X}(F(\gamma(t))).$$

. Assim, fica provado o item (ii).. O item (iii) segue do fato de F ser um difeomorfismo local. Finalmente, a função H do item (iv) não é constante em nenhum aberto, pois F é uma aplicação aberta. Por outro lado, H é constante ao longo das órbitas de \mathcal{Y}_X , de acordo com o item (ii). Tomando $z \in U$, pela regra da cadeia, temos

$$\nabla H(z) = \nabla G(F(z))DF(z).$$

Daí, temos que

$$\nabla H(z)\mathcal{Y}_X(z) = (\nabla G(F(z))DF(z))(DF(z)^{-1}\mathcal{X}(F(z))) = \nabla G(F(z))\mathcal{X}(F(z)) = 0,$$

pois G é uma integral primeira de \mathcal{X} . Logo, H é uma integral primeira de \mathcal{Y}_X . Ainda, como $\nabla H(z) = \nabla G(F(z))DF(z)$ e $DF(z)$ é invertível, temos que $\nabla H(z) = 0$ se, e somente se, $\nabla G(F(z)) = 0$, ou seja, z é um ponto crítico de H se, e somente se, $F(z)$ é um ponto crítico de G . Assim está provado o item (iv). ■

Considerando a notação das hipóteses do Lema 4.4, é claro que se F é um difeomorfismo em V , então $F \circ \gamma$ é uma órbita de \mathcal{X} , uma vez que \mathcal{X} e \mathcal{Y}_X são topologicamente equivalentes. Todavia, isso pode não ser verdade se F for apenas um difeomorfismo local, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 4.5. *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo local que não seja globalmente injetor e considere o campo de vetores faixa $\mathcal{X} = (0, 1)$, definido em \mathbb{R}^2 . Observe que as órbitas deste campo são retas verticais e as órbitas de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}} = (-f_y, f_x)$ são as componentes conexas dos conjuntos de nível de f , pois, neste caso, f é uma integral primeira de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$. Como F não é injetor, devem existir conjuntos de níveis de f não conexos, de acordo com o Teorema 3.2. Então, devem existir pelo menos duas folhas inseparáveis γ_1 e γ_2 de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ (veja Teorema 1 de [24] ou Proposição A de [11]). Dessa forma, uma vez que elas pertencem ao mesmo conjunto de nível de f , segue que $F(\gamma_1)$ e $F(\gamma_2)$ estão contidas na mesma reta vertical. Por outro lado, observe que a função g é monótona ao longo de cada órbita de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$, uma vez que JF não se anula em nenhum ponto. Assim, da inseparabilidade de γ_1 e γ_2 segue que $g(\gamma_1) \cap g(\gamma_2) = \emptyset$. Em particular, $F(\gamma_1)$ e $F(\gamma_2)$ não podem ser uma reta vertical. Observe que isso acontece independentemente de F ser sobrejetora em \mathbb{R}^2 ou não.*

De acordo com [22], se \mathcal{X} é um campo de vetores paralelo de classe C^k , com $k = 1, \dots, \infty$, então \mathcal{X} admite uma integral primeira de classe C^k sem pontos críticos. Assim, como os campos de vetores canônicos dos tipos anular, radial e faixa da Definição 4.6 possuem integrais primeiras dadas por $x^2 + y^2$, $\arctan(y/x)$ e y , definidas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e \mathbb{R}^2 , respectivamente, podemos definir uma *integral primeira canônica* G , fazendo a composição dessas funções com T^{-1} , em que T é um difeomorfismo de classe C^k (veja [22]), o qual leva os campos canônicos anular, radial e faixa em \mathcal{X} , respectivamente.

Lema 4.5. *Seja $\mathcal{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1 e $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma integral primeira de \mathcal{X} de classe C^2 sem pontos críticos. Se \mathcal{X} é do tipo faixa (respectivamente, anular), então os conjuntos de nível de F são conexos. Reciprocamente, assumindo que \mathcal{X} não tem pontos de equilíbrio e U é simplesmente conexo, se os conjuntos de nível de F são conexos, então \mathcal{X} é do tipo faixa.*

Demonstração: Suponha que \mathcal{X} seja anular ou faixa e sejam

$$T_a : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow U \setminus \{z\} \quad \text{e} \quad T_s : \mathbb{R}^2 \rightarrow U$$

as equivalências topológicas de classe C^1 entre \mathcal{X} e os campos de vetores $\mathcal{X}(x, y) = (-y, x)$ e $\mathcal{X}(x, y) = (1, 0)$, respectivamente. As componentes conexas de $(F \circ T_a)^{-1}(c)$ e $(F \circ T_s)^{-1}(c)$, com $c \in F(U)$, são círculos centrados em $(0, 0)$ e retas horizontais, respectivamente. Como $F \circ T_a$ e $F \circ T_s$ não possuem pontos críticos, temos que $F \circ T_a$ é monótona ao longo de qualquer raio, enquanto $F \circ T_s$ é monótona em qualquer segmento vertical. Em particular, os conjuntos $(F \circ T_a)^{-1}(c)$ e $(F \circ T_s)^{-1}(c)$, com $c \in F(U)$, são conexos. Deste modo, os níveis de F em ambos os casos devem ser conexos.

Por outro lado, suponha que \mathcal{X} não possua pontos de equilíbrio e que F não possua pontos críticos. Nessas condições, temos que \mathcal{X} e H_F são topologicamente equivalentes. Agora, suponha que os conjuntos de nível de F são conexos. Então, se \mathcal{X} não for do tipo faixa e, conseqüentemente, H_F também não for faixa, deve existir um par de folhas inseparáveis da folheação de U dada por F . No entanto, isso resulta em uma contradição, uma vez que folhas inseparáveis devem estar contidas em um mesmo conjunto de nível de F . ■

Como mencionado anteriormente, o principal resultado deste capítulo é o Teorema 4.3, enunciado a seguir.

Teorema 4.3. *Seja U um subconjunto de \mathbb{R}^2 aberto e simplesmente conexo. Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^2 com Jacobiano não nulo em todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{X} : F(U) \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1 do tipo anular, radial ou faixa, em torno de um ponto de equilíbrio no primeiro e segundo casos. Então, as duas condições seguintes são equivalentes:*

- (i) *O campo de vetores $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ é topologicamente equivalente ao campo de vetores \mathcal{X} .*
- (ii) *F é um difeomorfismo global em $F(U)$.*

Demonstração: A prova de que (ii) implica (i) é imediata. Vamos mostrar que (i) implica (ii). Observe que para os casos anular e radial, será suficiente provar a injetividade de F sobre cada órbita não singular de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$, levando em consideração o item (i) do Lema 4.4. Primeiramente, provaremos a seguinte afirmação.

Afirmação 1. Se γ_1 e γ_2 são duas órbitas não singulares distintas de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$, então as curvas $F \circ \gamma_1$ e $F \circ \gamma_2$ estão contidas em órbitas diferentes de \mathcal{X} .

Para o caso faixa (respectivamente, anular), seja G uma integral primeira canônica de \mathcal{X} (respectivamente, de \mathcal{X} restrito a $F(U) \setminus \{F(z)\}$) e defina a função $H = G \circ F$ em U (respectivamente, em $U \setminus \{z\}$). Pelo item (iv) do Lema 4.4, segue que H é uma integral primeira de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ (respectivamente, de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ restrito a $U \setminus \{z\}$) sem pontos críticos. Suponha que $F(\gamma_1)$ e $F(\gamma_2)$ estejam contidas em uma mesma órbita de \mathcal{X} . Assim, em particular segue que $G \circ F(\gamma_1) = G \circ F(\gamma_2)$ e, portanto, temos que γ_1 e γ_2 estão no mesmo nível de H , o qual é conexo, pelo Lema 4.5. Logo, $\gamma_1 = \gamma_2$.

Para o caso radial, seja U_z uma vizinhança de z tal que $F|_{U_z} : U_z \rightarrow F(U_z)$ seja um difeomorfismo. Então, como todas as órbitas em um campo radial em torno de um ponto de equilíbrio z possuem o ponto z em seu fecho, temos que $F(\gamma_1 \cap U_z)$ e $F(\gamma_2 \cap U_z)$ estão em órbitas distintas de \mathcal{X} . Portanto, a Afirmação 1 decorre do item (ii) do Lema 4.4.

Se \mathcal{X} é um campo de vetores do tipo faixa ou radial, então as órbitas não constantes de \mathcal{X} são homeomorfas a \mathbb{R} . Assim, a injetividade de F sobre cada órbita não singular de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ decorre do item (ii) do Lema 4.4. No caso anular a prova não é tão direta, pois, se γ é uma órbita de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$, poderia acontecer que $F \circ \gamma$ percorra mais de uma vez a curva fechada $F(\gamma)$. Veremos, no entanto, que isso não é possível, por argumentos de continuidade.

Tomando \mathcal{X} um campo de vetores anular, podemos parametrizar as órbitas não singulares do campo vetorial anular $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ pelos níveis de uma integral primeira canônica H definida em $U \setminus \{z\}$, tal que para cada $h \in H(U)$, $h > 0$, o conjunto de nível $H^{-1}(h)$ é uma órbita periódica de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$, a qual denotaremos por γ_h . Observe que $0 < h_1 < h_2$ se, e somente se, a curva γ_{h_1} está contida na região limitada por γ_{h_2} . Defina o conjunto

$$T = \{h \in H(U), h > 0 \mid F \text{ não é injetora em } \gamma_h\}.$$

Assim, basta provarmos que o conjunto T é vazio.

Suponha $T \neq \emptyset$ e defina $\inf T = h_\alpha$. Como F é localmente injetora em z , segue que $h_\alpha > 0$. Provaremos que $h_\alpha \notin T$.

Afirmção 2: $h_\alpha \notin T$.

Suponha que $h_\alpha \in T$. Então, isso significa que F não é injetora em γ_{h_α} , ou seja,

existem $p, q \in \gamma_{h_\alpha}$, com $p \neq q$ e $F(p) = F(q)$. Como F é um difeomorfismo local, podemos tomar vizinhanças U_p, U_q e V de p, q e $F(p)$, respectivamente, com $U_p \cap U_q = \emptyset$ e tais que as restrições $F|_{U_p} : U_p \rightarrow V$ e $F|_{U_q} : U_q \rightarrow V$ são difeomorfismos. Seja C a interseção de uma seção transversal ao fluxo de X que une $F(z)$ e $F(p)$ com o aberto V e defina $C_p = F|_{U_p}^{-1}(C)$ e $C_q = F|_{U_q}^{-1}(C)$. Observe que as curvas C_p e C_q estão contidas na região compacta limitada pela curva γ_{h_α} . Em particular, para $h < h_\alpha$ suficientemente próximo de h_α , a órbita γ_h possui interseção não vazia com C_p e C_q . Daí, temos

$$F(C_p \cap \gamma_h) = F(C_q \cap \gamma_h)$$

e, conseqüentemente, F não é injetora em γ_h . Desta forma, teríamos $h \in T$, o que é uma contradição com o fato de que $h_\alpha = \inf T$. Isso prova a Afirmação 2.

Por outro lado, pela definição de h_α , existe uma seqüência decrescente $\{h_n\}$ em T , com $h_n > h_\alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $h_n \rightarrow h_\alpha$ e F não é injetora em γ_{h_n} . Isso significa que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existem $p_n \neq q_n$, com $p_n, q_n \in \gamma_{h_n}$ e $F(p_n) = F(q_n)$. Então, como $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ estão em um conjunto compacto limitado por Γ_{h_1} , temos que $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ admitem, respectivamente, subsequências convergentes $\{p_{n_k}\}$ e $\{q_{n_k}\}$, as quais, por sua vez, admitem subsequências convergentes $\{p_{n_{k_j}}\}$ e $\{q_{n_{k_j}}\}$, respectivamente, tais que $p_{n_{k_j}} \rightarrow p$ e $q_{n_{k_j}} \rightarrow q$, com $p, q \in U$ e $F(p_{n_{k_j}}) = F(q_{n_{k_j}})$, para todo índice n_{k_j} . Então, como $\{h_n\} \rightarrow h_0$, temos $p, q \in \gamma_{h_\alpha}$ e $F(p) = F(q)$, o que implica $p = q$, pois F é injetora em γ_{h_α} . No entanto, isso gera uma contradição com o fato de que F é localmente injetora em P , pois, nessas condições, temos $F(p_{n_{k_j}}) \rightarrow F(p)$, $F(q_{n_{k_j}}) \rightarrow F(q) = F(p)$, $p_{n_{k_j}} \neq q_{n_{k_j}}$ e $F(p_{n_{k_j}}) = F(q_{n_{k_j}})$, para todo índice n_{k_j} . Assim, concluímos que o conjunto T é vazio e está provado o Teorema. ■

Vejamos uma aplicação do Teorema 4.3 no Exemplo 4.6 a seguir.

Exemplo 4.6. *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por*

$$F(x, y) = (x(1 + x^2 + y^2), y(1 + x^2 + y^2)).$$

No Exemplo 4.3, verificamos que F é um difeomorfismo local e utilizamos o Teorema de Sabatini para concluir que essa aplicação é um difeomorfismo global. Agora, vamos

utilizar o Teorema 4.3, considerando os campos de vetores paralelos do tipo radial e faixa, para concluir a injetividade da aplicação. Tomando inicialmente o campo canônico radial $\mathcal{X}(x, y) = (x, y)$, calculando $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ a partir da expressão dada em (4.7), obtemos

$$JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}} = (x(1 + x^2 + y^2)^2, y(1 + x^2 + y^2)^2),$$

o qual, claramente, é topologicamente equivalente a \mathcal{X} . Agora, se considerarmos o campo do tipo faixa $\mathcal{X} = (1, 0)$, calculando $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ obtemos

$$JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}} = (1 + x^2 + 3y^2, -2xy).$$

Observe que, neste caso, o campo $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ não possui pontos de equilíbrio. Como o campo é polinomial, podemos utilizar a compactificação de Poincaré para analisar a existência de pontos de equilíbrio no infinito. Procedendo desta maneira, podemos concluir que os únicos pontos de equilíbrio no infinito são a origem da carta U_1 , a qual é um nó atrator, e seu correspondente na origem da carta V_1 , o qual é um nó repulsor. Portanto, uma vez que não existem pontos de equilíbrio no interior do disco de Poincaré, concluímos que o campo $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ é topologicamente equivalente ao campo faixa $\mathcal{X} = (1, 0)$. Assim, em ambos os casos, podemos aplicar o Teorema 4.3 para concluir que F é um difeomorfismo global.

O Exemplo 4.7 mostra que a hipótese de U ser um conjunto simplesmente conexo no Teorema 4.3 não pode ser descartada.

Exemplo 4.7. Seja $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ a aplicação dada em coordenadas polares por $F(r, \theta) = (r, 2\theta)$. Em coordenadas cartesianas, F possui a seguinte expressão:

$$F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\cos \left(2 \arctan \frac{y}{x} \right), \sin \left(2 \arctan \frac{y}{x} \right) \right).$$

Essa aplicação é analítica em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, pois, para x próximo de zero e $y > 0$ (respectivamente, $y < 0$) podemos considerar $\arccos(x/\sqrt{x^2 + y^2})$ (respectivamente, $\arccos(x/\sqrt{x^2 + y^2}) + \pi$). Temos também que o Jacobiano de F é constante e igual a 2 e, portanto, F é um difeomorfismo local. Ainda, é fácil ver que se $\mathcal{X} = 2(-y, x)$, então $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}} = (-y, x)$ e se $\mathcal{X} = (x, y)$, então $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}} = (x, y)$. Portanto, em ambos os casos, \mathcal{X} e $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ são topologicamente equivalentes, mas F não é injetora, pois é um duplo recobrimento de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Como consequência da Observação 2 e do Teorema 4.3, temos o Corolário 4.3 enunciado a seguir. Observe que não consideramos o caso radial no Corolário 4.3, pois o pullback de um campo radial por um difeomorfismo local não é um campo de vetores Hamiltoniano.

Corolário 4.3. *Seja U um subconjunto aberto simplesmente conexo de \mathbb{R}^2 . Sejam $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^2 com Jacobiano não nulo em todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $G : F(U) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Suponha que o campo de vetores Hamiltoniano H_G seja anular ou faixa e defina $H = G \circ F$. Então, as duas condições seguintes são equivalentes:*

(i) *Os campos vetoriais Hamiltonianos H_H e H_G são topologicamente equivalentes.*

(ii) *F é um difeomorfismo global em $F(U)$.*

O Teorema 4.4 a seguir não depende do conhecimento de $F(U)$ a priori e sua demonstração é análoga à demonstração de que (i) implica (ii) no Teorema 4.3.

Teorema 4.4. *Sejam U um subconjunto aberto simplesmente conexo de \mathbb{R}^2 , $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação com Jacobiano não nulo em todo ponto $(x, y) \in U$ e $\mathcal{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores C^1 anular, radial ou faixa, em torno de um ponto de equilíbrio $F(z)$ nos primeiros dois casos. Se $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ é topologicamente equivalente a \mathcal{X} , então F é globalmente injetora.*

O Exemplo 4.8 a seguir apresenta um exemplo de difeomorfismo local cuja injetividade global pode ser concluída diretamente pelo Teorema 4.3, considerando o campo radial.

Exemplo 4.8. *Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por*

$$F(x, y) = (x + p_1x^3 + p_2x^2y - p_3xy^2, y + p_1x^2y + p_2xy^2 - p_3y^3).$$

Observe que $F(0, 0) = (0, 0)$ e que o Jacobiano de F é dado por

$$JF(x, y) = (1 + 3p_1x^2 + 3p_2xy - 3p_3y^2)(1 + p_1x^2 + p_2xy - p_3y^2),$$

o qual não se anula em nenhum ponto se $p_3 < 0$ e $p_2^2 + 4p_1p_3 < 0$, ou $p_2 = p_3 = 0$ e $p_1 \geq 0$. Logo, sob essas condições, temos que F é um difeomorfismo local. Vamos aplicar o

Teorema 4.3, utilizando o campo canônico radial, para concluir que F é um difeomorfismo global. Considere o campo de vetores $\mathcal{X}(x, y) = (x, y)$. A partir da expressão (4.7), obtemos

$$JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}(x, y) = (1 + p_1x^2 + p_2xy - p_3y^3)^2(x, y).$$

Claramente, temos que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ é topologicamente equivalente a \mathcal{X} , uma vez que $1 + p_1x^2 + p_2xy - p_3y^3 > 0$, sob as condições assumidas para os parâmetros p_1, p_2 e p_3 . Desta forma, segue do Teorema 4.4 que F é globalmente injetora e, conseqüentemente, é um difeomorfismo global, pois F é polinomial.

Observação 3. A recíproca do Teorema 4.4 é falsa, em geral, como mostra o Exemplo 4.9. No entanto, é claramente verdadeira se assumirmos $F(U) = \mathbb{R}^2$, de acordo com o Teorema 4.3. Assim, no caso em que $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é polinomial, a recíproca também é verdadeira, uma vez que uma aplicação polinomial injetora cujo domínio e contradomínio sejam \mathbb{R}^n é automaticamente sobrejetora, de acordo com [2]. No caso particular em que $\mathcal{X}(x, y) = (-y, x)$ é o campo canônico anular, a recíproca também é verdadeira com a hipótese adicional de que $F(U)$ é um disco centrado na origem, de acordo com [8].

Exemplo 4.9. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação dada por $F(x, y) = (\arctan x, y)$. Temos que $\det(DF(x, y)) = \frac{1}{1+x^2} > 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e essa aplicação é claramente injetora. Observe, no entanto, que o pullback $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}} = (-(1+x^2)y, \arctan x)$ do centro linear $\mathcal{X}(x, y) = (-y, x)$ por F não é um centro global, pois as órbitas que passam por pontos (x, y) com $|y| \geq \frac{\pi}{2}$ são ilimitadas, veja a Figura 4.7. De fato, uma tal órbita é a pré-imagem por F da curva fechada $(r \cos t, r \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, com $r \geq \frac{\pi}{2}$. Trata-se, portanto, de uma das curvas $(\tan(r \cos t), r \sin t)$, com $|\cos t| < 1$.

O próximo corolário é o Teorema 4.4 para campos de vetores paralelos Hamiltonianos.

Corolário 4.4. Sejam U um subconjunto aberto simplesmente conexo de \mathbb{R}^2 , $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^2 com Jacobiano não nulo em todo ponto $(x, y) \in U$ e $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^2 . Suponha que o campo de vetores Hamiltoniano H_G seja do tipo anular ou faixa, em torno de um ponto de equilíbrio $F(z)$ no primeiro

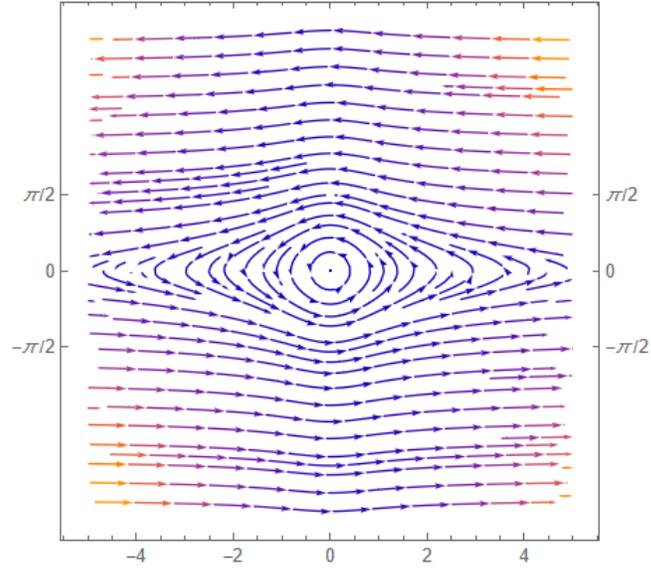


Figura 4.7: Retrato de fase do pullback $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$, sendo $\mathcal{X}(x, y) = (-y, x)$ e $F(x, y) = (\arctan x, y)$.

caso, e defina $H = G \circ F$. Se H_H é topologicamente equivalente a H_G , então F é um difeomorfismo global.

Observe que o Corolário 4.4 no caso em que $G(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)}{2}$ e $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um difeomorfismo local polinomial com $F(0, 0) = (0, 0)$ é exatamente o Teorema de Sabatini, levando em consideração a Observação 3 para a recíproca. Ainda, se $G(x, y) = x$, então o Corolário 4.4 recupera o Teorema 3.2, o qual afirma que se os conjuntos de nível de uma das funções componentes de um difeomorfismo local $F = (f, g)$ em \mathbb{R}^2 são conexos, então F é injetora. Isso decorre do fato de que $H_G = (0, -1)$ é um campo de vetores do tipo faixa, enquanto o campo de vetores Hamiltoniano $H_H = H_f$ definido no conjunto simplesmente conexo U é faixa se, e somente se, os conjuntos de nível de $H = f$ são conexos, de acordo com o Lema 4.5.

No Capítulo 3, enunciamos o resultado conhecido como Teorema de Hadamard (Teorema 3.1), cuja demonstração pode ser encontrada em [18]. Recordamos que esse teorema nos fornece uma condição necessária e suficiente para que a CRJ no plano seja verdadeira, pois afirma que uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com Jacobiano não nulo em todo ponto é um di-

feomorfismo global se, e somente se, é própria. A seguir, forneceremos uma demonstração desse resultado em \mathbb{R}^2 , utilizando o Lema 4.4 e o Teorema 4.3.

Prova do Teorema de Hadamard em \mathbb{R}^2 : É claro que um difeomorfismo global é uma aplicação própria. Por outro lado, suponha que a aplicação $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ possua Jacobiano não nulo em todo ponto do plano e seja própria. Como F é um difeomorfismo local e, portanto, uma aplicação aberta, segue que sua imagem é um conjunto aberto, o qual deve ser todo o \mathbb{R}^2 , uma vez que F é própria. De fato, caso contrário, isto é, se $F(\mathbb{R}^2) \neq \mathbb{R}^2$, poderíamos tomar uma sequência $F(x_n)$ que converge a um ponto no bordo de $F(\mathbb{R}^2)$ e teríamos uma contradição. Em particular, deve existir um ponto $z_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(z_0) = (0, 0)$.

Agora, considere o campo canônico anular $\mathcal{X}(x, y) = (-y, x)$. Sabemos que os pontos de equilíbrio do pullback $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ são as pré-imagens de 0 pela aplicação F , de acordo com o Lema 4.4, e são localmente centros, pois F é um difeomorfismo local. Por outro lado, cada órbita não constante de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ está contida na pré-imagem de um círculo $x^2 + y^2 = r^2$, o qual é um conjunto compacto, uma vez que F é própria. Logo, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, segue que todas as órbitas não constantes de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ são periódicas e os pontos de equilíbrio de $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ são centros. Note que $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ deve possuir um único centro, pois, caso contrário, deveria existir uma separatriz γ , a qual é necessariamente uma órbita periódica no bordo do anel periódico de um dos centros. No entanto, isso é uma contradição, pois a dependência contínua em relação às condições iniciais obriga γ a estar contida no período anular do centro. Assim, temos que \mathcal{X} e $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ são topologicamente equivalentes e F é um difeomorfismo global, pelo Teorema 4.3. ■

4.3 Equivalência topológica de campos de vetores paralelos

Em posse dos Teoremas 4.3 e 4.4, é pertinente buscarmos condições para que um campo de vetores seja topologicamente equivalente a um campo paralelo do tipo anular, radial ou faixa. De fato, essa ideia é bem explorada na literatura para o caso anular, tendo em vista o Teorema de Sabatini. A Proposição 4.1 a seguir fornece uma condição necessária e suficiente para que um campo de vetores polinomial seja topologicamente equivalente a um campo anular.

Proposição 4.1. *Sejam Y um campo de vetores polinomial em \mathbb{R}^2 e $\mathcal{X}(x, y) = (-y, x)$ o campo de vetores canônico do tipo anular. Então, Y é topologicamente equivalente a \mathcal{X} se, e somente se, as duas condições seguintes são satisfeitas:*

- (i) *Y possui um único ponto de equilíbrio, o qual é do tipo centro.*
- (ii) *Cada ponto de equilíbrio infinito de Y é formado por dois setores hiperbólicos degenerados.*

Demonstração: (\Rightarrow) Se Y é topologicamente equivalente a \mathcal{X} , Y deve possuir, obrigatoriamente, um único ponto de equilíbrio, o qual deve ser do tipo centro, uma vez que \mathcal{X} possui um único ponto de equilíbrio, o qual é um centro. Se Y não possui pontos de equilíbrios infinitos, a condição (ii) é automaticamente satisfeita, por vacuidade. Agora, se Y possui pontos de equilíbrio infinitos, a única possibilidade é que cada ponto de equilíbrio infinito seja formado por dois setores hiperbólicos degenerados, pois se um ponto de equilíbrio infinito for α ou ω -limite de alguma órbita com condição inicial no interior do disco de Poincaré, esse campo não pode ser topologicamente equivalente a \mathcal{X} , uma vez que as órbitas de \mathcal{X} com condição inicial no interior do disco de Poincaré são órbitas periódicas e a imagem de uma órbita periódica por um homeomorfismo é também uma órbita periódica.

(\Leftarrow) Seja Y um campo de vetores polinomial no plano que satisfaça as condições (i) e (ii). Suponha que Y não seja topologicamente equivalente a \mathcal{X} . Observe que, nestas

condições, a única possibilidade, a princípio, para que Y não seja topologicamente equivalente a \mathcal{X} é que o anel periódico de Y não seja todo o plano, ou seja, que o anel periódico de Y possua um anel periódico Γ contido no interior do disco de Poincaré. Como estamos exigindo que Y possua um único equilíbrio, Γ só pode ser uma órbita fechada, na qual as órbitas do centro se acumulam. Tome uma seção transversal sobre Γ . Então, como a aplicação de Poincaré é analítica e no interior do anel periódico ela é constante, isto é, a identidade, segue que essa aplicação deve também ser a aplicação identidade no exterior do anel periódico, o que é um absurdo, pela definição de anel periódico. Logo, Y é topologicamente equivalente a \mathcal{X} . ■

Observe que se considerarmos um difeomorfismo local polinomial F definido no plano, com $F(z) = (0, 0)$, para um único $z \in \mathbb{R}^2$, e tomarmos Y como sendo o pullback de \mathcal{X} por F , então a condição (i) da Proposição 4.1 é automaticamente satisfeita, de acordo com o Lema 4.1. Assim, para esse caso particular, o resultado anterior pode ser enunciado da seguinte maneira.

Teorema 4.5. *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial, cujo Jacobiano não se anula em nenhum ponto e tal que existe um único $z \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(z) = (0, 0)$. Considerando o campo canônico anular $\mathcal{X}(x, y) = (-y, x)$, temos que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ é topologicamente equivalente a \mathcal{X} (consequentemente, F é injetora) se, e somente se, cada ponto de equilíbrio infinito de $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ é formado por dois setores hiperbólicos degenerados, isto é, as separatrizes dos setores hiperbólicos estão contidas no bordo do disco de Poincaré.*

Nesse sentido, é interessante pensarmos em condições análogas para garantir que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ e \mathcal{X} sejam topologicamente equivalentes, quando \mathcal{X} é um campo paralelo do tipo radial ou faixa. A princípio, uma das condições que precisaríamos garantir, nesses dois casos, para que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ e \mathcal{X} sejam topologicamente equivalentes, seria que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ não possua órbitas periódicas. No entanto, veremos na proposição a seguir que essa condição é automaticamente satisfeita.

Proposição 4.2. *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial em \mathbb{R}^2 cujo Jacobiano não se anula em nenhum ponto. Então, se $\mathcal{X}(x, y) = (x, y)$ ou $\mathcal{X}(x, y) = (1, 0)$,*

o pullback $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ não possui órbitas periódicas.

Demonstração: Considerando o campo canônico radial $\mathcal{X}(x, y) = (x, y)$, de acordo com (4.7), temos que

$$JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}} = (P, Q) = (fg_y - gf_y, -fg_x + gf_x).$$

Calculando a divergência de $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}) &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \\ &= \frac{\partial(fg_y - gf_y)}{\partial x} + \frac{\partial(-fg_x + gf_x)}{\partial y} \\ &= f_x g_y + f g_{y_x} - g_x f_y - g f_{y_x} - f_y g_x - f g_{x_y} + g_y f_x + g f_{x_y} \\ &= 2(f_x g_y - g_x f_y). \end{aligned}$$

Observe que $f_x g_y - g_x f_y$ é exatamente a expressão para o Jacobiano de F , o qual não se anula em nenhum ponto do plano, por hipótese. Logo, o sinal de $\operatorname{div}(F)$ é constante em todo o plano. Então, pelo Teorema de Bendixson (Teorema 2.4), concluímos que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ não possui órbitas periódicas.

Agora, se considerarmos o campo $\mathcal{X}(x, y) = (1, 0)$, temos que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}} = (g_y, -g_x)$. Observe que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ não possui pontos de equilíbrio, pois o fato de o Jacobiano de F não se anular em nenhum ponto implica, em particular, que o gradiente de g nunca se anula. Consequentemente, concluímos que neste caso também não existem órbitas periódicas, pois, se tais órbitas existissem, existiria necessariamente um ponto de equilíbrio no interior da região delimitada pela órbita periódica. ■

Definição 4.9. *Se p é um ponto de equilíbrio ou ponto de equilíbrio infinito de um dado campo de vetores em \mathbb{R}^2 , dizemos que p é uma sela topológica (respectivamente, nó topológico) quando p é topologicamente equivalente a uma sela hiperbólica (respectivamente, nó hiperbólico).*

Considerando o campo radial $\mathcal{X}(x, y) = (x, y)$, podemos enunciar o seguinte resultado.

Proposição 4.3. *Sejam $F = (f, g)$ uma aplicação polinomial em \mathbb{R}^2 cujo Jacobiano não se anula em nenhum ponto e $\mathcal{X}(x, y) = (x, y)$ o campo de vetores canônico radial. Suponha que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}} = (fg_y - gf_y, -fg_x + gf_x)$ possua um único ponto de equilíbrio p e satisfaça alguma das seguintes condições:*

- (i) *Todos os pontos no infinito são pontos de equilíbrio infinitos e cada ponto no infinito é ω -limite de uma única órbita com condição inicial no interior do disco de Poincaré;*
- (ii) *Todos os pontos de equilíbrio no infinito são formados por dois setores hiperbólicos degenerados;*
- (iii) *Existem $2n$ pontos de equilíbrios no infinito, dos quais n são selas topológicas e os outros n pontos são nós topológicos, dispostos de forma alternada, isto é, entre dois nós topológicos sempre existe uma sela topológica. Ainda, se o ponto de equilíbrio p é instável (respectivamente, estável), então os nós topológicos no infinito são estáveis (respectivamente, instáveis). Se existem outros pontos de equilíbrio no infinito, então estes são formados por dois setores hiperbólicos degenerados.*

Então, $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ é topologicamente equivalente a \mathcal{X} . Consequentemente, F é injetora.

Demonstração: Como F é um difeomorfismo local e $p = F(0, 0)$, uma vez que a origem é o único ponto de equilíbrio do campo \mathcal{X} e p é o único ponto de equilíbrio do campo $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$, temos que p é localmente um nó topológico. Pela Proposição 4.2, sabemos que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ não possui órbitas periódicas. Desta forma, nos resta analisar os pontos de equilíbrio no infinito de $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$.

É fácil ver que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ e \mathcal{X} são topologicamente equivalentes no caso em que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ possui infinitos pontos de equilíbrio no infinito e cada ponto de equilíbrio infinito é ω -limite (respectivamente, α -limite) de uma única órbita com condição inicial no interior do disco de Poincaré. De fato, nesse caso, toda órbita diferente de p no interior do disco possui p como α -limite (respectivamente, ω -limite) e um ponto no infinito como ω -limite (respectivamente, α -limite). Assim, quando $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ satisfaz a condição (i), está provado. Veja a Figura 4.8.

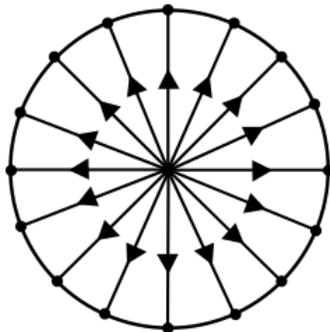


Figura 4.8: Retrato de fase global de um campo com um equilíbrio instável na origem e tal que todos os pontos no infinito são pontos de equilíbrio.

Agora, se cada ponto de equilíbrio no infinito é formado por dois setores hiperbólicos degenerados, então o infinito é ω -limite (respectivamente, α -limite) de todas as órbitas diferentes de p , as quais possuem p como α -limite (respectivamente, ω -limite). Dessa forma, temos que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ é também topologicamente equivalente a \mathcal{X} , no caso em que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ satisfaz a condição (ii). Veja a Figura 4.9.

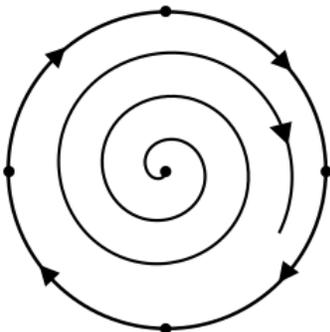


Figura 4.9: Retrato de fase global de um campo com um equilíbrio instável na origem e quatro pontos equilíbrios infinitos formados por dois setores hiperbólicos degenerados.

Agora, suponha que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ satisfaça a condição (iii). Então, se p é instável (respectivamente, estável) e $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ possui n nós topológicos e n selas topológicas como pontos de equilíbrios infinitos, então cada nó topológico no infinito deve ser estável (respectivamente, instável), por hipótese, e a parte instável (respectivamente, estável) de cada sela topológica no infinito deve estar contida no bordo do disco de Poincaré, uma vez que, por hipótese, entre dois nós topológicos sempre existe uma sela topológica. Assim, toda órbita diferente de p que está contida no interior do disco de Poincaré possui p como

α -limite (respectivamente, ω -limite) e um ponto no infinito (uma sela topológica ou um nó topológico) como ω -limite (respectivamente, α -limite). Veja a Figura 4.10.

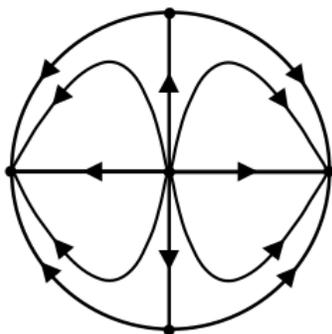


Figura 4.10: Retrato de fase global de um campo com um equilíbrio instável na origem e dois pares de pontos de equilíbrio infinitos: dois nós topológicos estáveis e duas selas topológicas.

Desta forma, segue que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ e \mathcal{X} são também topologicamente equivalentes neste caso. Observe que o resultado continua válido caso $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ possua outros pontos de equilíbrio infinitos formados por dois setores hiperbólicos degenerados, pois, neste caso, esses pontos não podem ser α -limite ou ω -limite de nenhuma órbita com condição inicial no interior do disco de Poincaré e, portanto, $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ e \mathcal{X} continuam sendo topologicamente equivalentes. Veja a Figura 4.11. ■

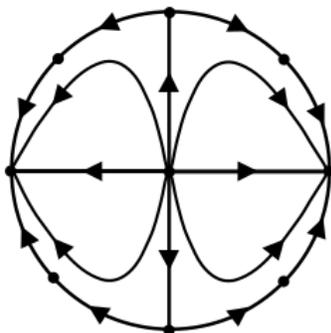


Figura 4.11: Retrato de fase global de um campo com um equilíbrio instável na origem e quatro pares de pontos de equilíbrio infinitos: dois nós topológicos estáveis, duas selas topológicas e quatro pontos de equilíbrio infinitos degenerados.

Observação 4. Observe que a condição (ii) inclui o caso em que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ não possui pontos de equilíbrios infinitos. De fato, neste caso, o infinito é uma órbita periódica. Entretanto,

a próxima proposição mostra que esse caso não acontece se estivermos considerando o campo canônico radial $\mathcal{X}(x, y) = (x, y)$, isto é, $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ sempre possui pontos de equilíbrio infinitos, neste caso.

Proposição 4.4. *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial cujo Jacobiano não se anula em nenhum ponto e $\mathcal{X}(x, y) = (x, y)$ o campo de vetores canônico radial. Então, $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ sempre possui pontos de equilíbrio infinitos.*

Demonstração: Neste caso, temos

$$JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}} = (P, Q) = (fg_y - gf_y, -fg_x + gf_x).$$

Assim, pelo Lema 2.2, sabemos que os pontos de equilíbrio infinitos de $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ são dados pelos fatores lineares do polinômio homogêneo

$$yP_k - xQ_k = y(fg_y - gf_y)_k - x(-fg_x + gf_x)_k,$$

em que $k = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}$ e P_k e Q_k denotam as partes homogêneas de grau k dos polinômios P e Q , respectivamente. Sendo $n = \text{grau}(f)$ e $m = \text{grau}(g)$, pelo Teorema de Euler, temos que

$$xf_{n_x} + yf_{n_y} = nf_n \tag{4.9}$$

e

$$xg_{m_x} + yg_{m_y} = mg_m, \tag{4.10}$$

em que f_n e g_m são as partes homogêneas de grau n e m , de f e g , respectivamente (note que se $m \neq n$, então $k = m + n - 1$). Multiplicando (4.9) e (4.10) por g_m e f_n , respectivamente, obtemos

$$xf_{n_x}g_m + yf_{n_y}g_m = nf_n g_m \tag{4.11}$$

e

$$xg_{m_x}f_n + yg_{m_y}f_n = mg_m f_n. \tag{4.12}$$

Subtraindo a expressão (4.11) da expressão (4.12), obtemos que

$$(m - n)f_n g_m = y(g_{m_y}f_n - f_{n_y}g_m) - x(f_{n_x}g_m - g_{m_x}f_n) = yP_k - xQ_k.$$

Desta forma, segue que

$$yP_k - xQ_k = (m - n)f_n g_m. \quad (4.13)$$

Agora, tome o campo $H_f = (f_y, -f_x)$. Então, como H_f não possui pontos de equilíbrio (uma vez que o gradiente de f não se anula em nenhum ponto), o Teorema de Poincaré-Hopf garante que esse campo deve possuir pontos de equilíbrio infinitos, o que implica que existe um fator linear que divide o polinômio $yf_{n_y} + xf_{n_x} = nf_n$. Assim, pela expressão (4.13), concluímos que sempre existe um fator linear que divide $yP_k - xQ_k$, ou seja, $JF \cdot \mathcal{Y}_\mathcal{X}$ sempre possui pontos de equilíbrio infinitos. Em particular, observe que se $m = n$, então todos os pontos no infinito são pontos de equilíbrio. ■

Observe que na Proposição 4.4 havíamos considerado o campo canônico radial $\mathcal{X}(x, y) = (x, y)$ para construir o pullback $JF \cdot \mathcal{Y}_\mathcal{X}$ e mostramos que $JF \cdot \mathcal{Y}_\mathcal{X}$ sempre possui pontos de equilíbrios infinitos, neste caso. Poderíamos, no entanto, reescrever a Proposição 4.3 tomando \mathcal{X} um campo topologicamente equivalente ao campo canônico radial. Assim, se tomarmos o campo radial $\mathcal{X}(x, y) = (x - y, x + y)$, é possível que o pullback $JF \cdot \mathcal{Y}_\mathcal{X}$ não possua pontos de equilíbrios infinitos. Para esse caso, sendo $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, temos que

$$JF \cdot \mathcal{Y}_\mathcal{X} = (g_y(f - g) - f_y(f + g), -g_x(f - g) + f_x(f + g)), \quad (4.14)$$

o qual pode não possuir pontos de equilíbrio infinitos. De fato, se tomarmos o exemplo trivial em que F é a aplicação identidade, $JF \cdot \mathcal{Y}_\mathcal{X}$ não possui pontos de equilíbrios infinitos. Isso também acontece no seguinte exemplo.

Exemplo 4.10. *Seja $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) = (x^3 - y^3 - y, x^3 + y^3 + x)$ e considere o campo*

$\mathcal{X}(x, y) = (x - y, x + y)$. *Observe que o Jacobiano de F é dado por $1 + 3y^2 + 3x^2(1 + 6y^2)$ e não se anula em nenhum ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. De acordo com a expressão (4.14), temos que*

$$JF \cdot \mathcal{Y}_\mathcal{X}(x, y) = (x - y + x^3(2 + 6y^2) - 6(y^3 + y^5), x + y + 2y^3 + 6x^2(x + x^3 + y^3)),$$

o qual possui um único ponto de equilíbrio na origem e cuja compactificação de Poincaré não possui pontos de equilíbrio infinitos.

Observação 5. Se tomarmos $\mathcal{X}(x, y) = (x + y, x - y)$, utilizando um argumento análogo ao da demonstração da Proposição 4.2 é possível também concluir que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ não possui órbitas periódicas, em que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}} = (g_y(f - g) - f_y(f + g), -g_x(f - g) + f_x(f + g))$.

No próximo exemplo, utilizamos a Proposição 4.3, juntamente com as observações anteriores, para concluir a injetividade de uma classe de aplicações polinomiais no plano.

Exemplo 4.11. Considere a seguinte classe de aplicações polinomiais $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$F(x, y) = (-y + x^k - y^k, x + x^k + y^k),$$

com $k > 1$ ímpar. O Jacobiano de F é dado por

$$\det(DF(x, y)) = 1 + k(x^{k-1} + y^{k-1}) + 2k^2x^{k-1}y^{k-1} > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Tomando $\mathcal{X}(x, y) = (x + y, x - y)$, calculando o pullback $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ de acordo com a expressão (4.14), sendo $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}} := (P, Q)$, obtemos

$$P(x, y) = x - y - 2ky^{k-1}(y + y^k) + 2x^k(1 + ky^{k-1}),$$

$$Q(x, y) = x + 2kx^k + 2kx^{2k-1} + y + 2y^k(1 + 2kx^{k-1}).$$

É possível concluir que a origem é o único ponto de equilíbrio de $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$. De fato, pelo item (i) do Lema 4.4, p é um ponto de equilíbrio de $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ se, e somente, se $F(p)$ é um ponto de equilíbrio de \mathcal{X} . Assim, temos que a origem é o único equilíbrio de $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ se, e somente se, o sistema

$$f(x, y) - g(x, y) = -y - x - 2y^k = 0, \tag{4.15}$$

$$f(x, y) + g(x, y) = x - y + 2x^k = 0 \tag{4.16}$$

possui o ponto $(0, 0)$ como única solução. Observe que isso é verdade, pois, como k é ímpar, a reta $x = -y - 2y^k$ possui coeficiente angular negativo e a reta $y = x + 2x^k$ possui coeficiente angular positivo. Desta forma, essas retas têm apenas um ponto de interseção.

Agora, analisaremos os pontos de equilíbrio infinitos. Se $k > 1$, então as partes homogêneas de maior grau de $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ possuem grau $2k - 1$ e são dadas por

$$P_{2k-1}(x, y) = -2k(y^{2k-1} - x^ky^{k-1})$$

$$Q_{2k-1}(x, y) = 2k(y^kx^{k-1} - x^{2k-1}).$$

Assim, de acordo com o Lema 2.2, a compactificação de Poincaré do campo $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ possui pontos de equilíbrios infinitos se existe um fator linear real da forma $ax + by$ que divide o polinômio $yP_{2k-1} - xQ_{2k-1}$. Então, como

$$\begin{aligned} yP_{2k-1}(x, y) - xQ_{2k-1}(x, y) &= y(-2k(y^{2k-1} - x^k y^{k-1})) - x(2k(y^k x^{k-1} - x^{2k-1})) \\ &= -2k(y^{2k} - x^k y^k + y^k x^k + x^{2k}) \\ &= -2k(y^{2k} + x^{2k}), \end{aligned}$$

concluimos que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ não possui pontos de equilíbrio infinitos, uma vez que não existe um fator linear real que divide o polinômio $y^{2k} + x^{2k}$, sendo $k > 1$. Assim, temos que \mathcal{X} e $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ são topologicamente equivalentes. Consequentemente, F é injetora. Observe que no Exemplo 4.10 tomamos $k = 3$.

Na próxima proposição, temos uma condição suficiente para que o pullback do campo de vetores canônico do tipo faixa $\mathcal{X}(x, y) = (1, 0)$ por uma aplicação polinomial F com Jacobiano não nulo em todo ponto seja topologicamente equivalente a \mathcal{X} .

Proposição 4.5. *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto e considere o campo canônico do tipo faixa $\mathcal{X}(x, y) = (1, 0)$. Então, se $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ possui como pontos de equilíbrio infinitos um único par de pontos, p e p' , sendo p um nó atrator e p' um nó repulsor, $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ é topologicamente equivalente a \mathcal{X} . Consequentemente, F é injetora. O resultado continua válido se, além de p e p' , $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ possuir outros pontos de equilíbrio infinitos formados por dois setores hiperbólicos degenerados.*

Demonstração: De acordo com a expressão (4.8), temos que, neste caso, o pullback de \mathcal{X} por F é dado por

$$JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}} = (g_y, -g_x).$$

Podemos observar, inicialmente, que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ não possui equilíbrios, uma vez que o fato de o Jacobiano de F não se anular em nenhum ponto implica que, em particular, o gradiente de g também não se anule em nenhum ponto. Assim, concluimos também que não existem órbitas periódicas, pois, caso existissem, obrigatoriamente existiria um ponto de equilíbrio no interior da região limitada pela órbita periódica. Logo, todas as órbitas são ilimitadas.

Dessa forma, se existem exatamente dois pontos de equilíbrios no infinito, um deles é o ω -limite de todas as órbitas e o outro é o α -limite de todas as órbitas, o que é garantido pela condição de que um dos nós seja atrator e o outro repulsor. Nestas condições, $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ é topologicamente equivalente a \mathcal{X} . Agora, suponha que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ possua outros pontos de equilíbrios infinitos, formados por dois setores hiperbólicos degenerados, e seja p'' um desses pontos. Então, como p'' é formado por dois setores hiperbólicos degenerados, p'' não pode ser α -limite ou ω -limite de nenhuma órbita com condição inicial no interior do disco de Poincaré. Assim, $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ continua sendo topologicamente equivalente a X . ■

Exemplo 4.12. *Seja $F(x, y) = (x^3 + y^3 + x + y, y^3 - x^3 - x + y)$ e considere o campo $\mathcal{X}(x, y) = (1, 0)$. Observe que o Jacobiano de F , dado por $2(3x^2 + 1)(3y^2 + 1)$, não se anula em nenhum ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculando o pullback de \mathcal{X} por F , obtemos*

$$JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}(x, y) = (-3y^2 - 1, -3x^2 - 1).$$

De fato, $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ não possui pontos de equilíbrio e, quando compactificado, possui apenas o ponto $(1, 0)$ como ponto de equilíbrio infinito na carta U_1 , o qual é um nó repulsor, e seu correspondente na carta V_1 , o qual é um nó atrator. Logo, temos que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ e \mathcal{X} são topologicamente equivalentes e F é injetora. Veja a Figura 4.12.

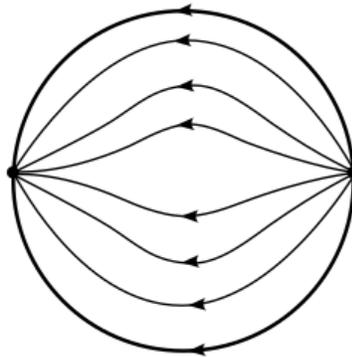


Figura 4.12: Retrato de fase do campo $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}(x, y) = (-3y^2 - 1, -3x^2 - 1)$.

Capítulo 5

Condições suficientes para que a Conjectura Jacobiana Real em \mathbb{R}^2 seja verdadeira

No Capítulo 3, mencionamos alguns resultados que estabelecem uma condição suficiente para a CJR em \mathbb{R}^2 , considerando o grau de uma das funções coordenadas. Agora, neste capítulo, o nosso interesse é explorar resultados que fornecem condições suficientes para que a CJR em \mathbb{R}^2 seja válida, a partir do Teorema 4.3. Utilizando o Teorema de Sabatini, essa ideia foi explorada em 2015 no artigo [6], por F. Braun e J. Llibre, e em 2016, no artigo [5], por F. Braun, J. Giné e J. Llibre. O principal resultado do artigo [6] é o Teorema 5.1, o qual será enunciado a seguir. Este resultado estabelece uma condição suficiente para que a CJR em \mathbb{R}^2 seja verdadeira, considerando os polinômios homogêneos de mais altos graus das funções coordenadas, no caso particular em que essas funções possuem o mesmo grau.

Teorema 5.1. *Considere $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto. Suponha que $\text{grau}(f) = \text{grau}(g) = m > 1$. Se os polinômios homogêneos de mais altos graus de f_m e g_m de f e g , respectivamente, não têm fatores lineares reais comuns, então F é injetora.*

Demonstração: A demonstração consiste, essencialmente, em mostrar que nas hi-

póteses do teorema, H_{M_F} possui um centro global na origem e, portanto, F é um difeomorfismo global, de acordo com o Teorema de Sabatini, sendo, em particular, injetora.

Inicialmente, observe que nas hipóteses do Teorema de Sabatini é exigido que $F(0, 0) = (0, 0)$, no entanto, caso isso não ocorra, basta fazer uma translação. De fato, se $F(0, 0) = (a, b) \neq (0, 0)$, com $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, temos que F é injetora se, e somente se, $G = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $G(x, y) = F(x, y) - (a, b)$ é injetora. Mais ainda, é imediato que G é polinomial, $\text{grau}(g_1) = \text{grau}(g_2) = m$, o Jacobiano de G é igual ao Jacobiano de F e $G(0, 0) = (0, 0)$. Assim, sem perda de generalidade, podemos assumir que $F(0, 0) = (0, 0)$.

Observe que as componentes do campo de vetores $H_{M_F} = (P, Q)$ são

$$P(x, y) = -\frac{\partial M_F}{\partial y} = -f(x, y)f_y(x, y) - g(x, y)g_y(x, y)$$

e

$$Q(x, y) = \frac{\partial M_F}{\partial x} = f(x, y)f_x(x, y) + g(x, y)g_x(x, y).$$

Deste modo, denotando por n o máximo grau de P e Q , temos $n \leq 2m - 1$.

O fato do campo H_{M_F} possuir um centro global na origem decorre das três afirmações seguintes.

Afirmção 1. A compactificação de Poincaré de H_{M_F} não possui pontos de equilíbrio infinito.

Pelo Lema 2.2, o campo de vetores H_{M_F} tem pontos de equilíbrio infinito se existir um fator linear da forma $ax + by$ que divide o polinômio $xQ_n - yP_n$. As funções a seguir estão aplicadas em (x, y) , omitiremos isso para facilitar a notação. Assim, temos

$$\begin{aligned} xQ_n - yP_n &= x \left[f_m \left(\frac{\partial f_m}{\partial x} \right) + g_m \left(\frac{\partial g_m}{\partial x} \right) \right] + y \left[f_m \left(\frac{\partial f_m}{\partial y} \right) + g_m \left(\frac{\partial g_m}{\partial y} \right) \right] \\ &= (x, y) \cdot \frac{1}{2} \nabla (f_m^2 + g_m^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2m(f_m^2 + g_m^2) \\ &= m(f_m^2 + g_m^2). \end{aligned}$$

A terceira igualdade anterior decorre diretamente da Fórmula de Euler. Assim, concluimos que a compactificação de Poincaré de H_{M_F} não possui pontos de equilíbrio no infinito, pois,

caso contrário, se existisse um fator linear real $ax + by$ que divida o polinômio $xQ_n(x, y) - yP_n(x, y)$, ele dividiria também $f_m^2 + g_m^2$, o que implicaria que dividiria simultaneamente f_m e g_m , o que não ocorre, por hipótese.

Afirmção 2. H_{M_F} não possui pontos de equilíbrio diferentes da origem.

Por definição, sabemos que os pontos de equilíbrio de H_{M_F} satisfazem $P(x, y) = Q(x, y) = 0$, o que é equivalente ao sistema (4.4). Como observado anteriormente na demonstração do Lema 4.1, a matriz associada a este sistema linear possui determinante igual ao Jacobiano de F no ponto (x, y) , o qual é diferente de zero. Logo, não podemos ter uma quantidade infinita de soluções para $F(x, y) = (0, 0)$. Pelo Lema 4.1, todos os pontos de equilíbrio finitos de H_{M_F} são os zeros de F e, portanto, temos uma quantidade finita deles.

Sabemos que cada ponto de equilíbrio de H_{M_F} corresponde a dois pontos de equilíbrio na esfera de Poincaré quando compactificado, um no hemisfério norte e outro no hemisfério sul. Além disso, pelo Lema 4.1, temos que os pontos de equilíbrio de H_{M_F} são centros e, portanto, correspondem a centros na esfera de Poincaré. Observe que a origem do campo H_{M_F} é um ponto de equilíbrio, pois estamos assumindo que $F(0, 0) = (0, 0)$, o qual induz dois centros na esfera de Poincaré, $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$, com índices iguais a 1, de acordo com o Lema 4.1. Portanto, o somatório desses índices na esfera é dois. Assim, se existisse outro ponto de equilíbrio de H_{M_F} diferente da origem, o somatório dos índices excederia dois, o que não pode acontecer, de acordo com o Teorema de Poincaré-Hopf, o qual garante que o somatório dos índices dos pontos de equilíbrio na esfera é dois. Assim, não podem existir outros pontos de equilíbrio de H_{M_F} diferentes da origem, a menos que existam pontos de equilíbrio em \mathbb{S}^1 com índices negativos para compensar a soma, o que não ocorre devido à Afirmção 1. Portanto, a origem de H_{M_F} é o único ponto de equilíbrio finito.

Afirmção 3. O anel periódico da origem de H_{M_F} é o $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Suponha que o anel periódico da origem de H_{M_F} não seja o $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Deste modo, o anel periódico da origem de H_{M_F} não é o \mathbb{S}^1 , quando consideramos a projeção da compactificação do campo H_{M_F} sobre o disco de Poincaré. Considere, então, a projeção

da compactificação do campo H_{M_F} sobre o disco de Poincaré. Sabemos que não existem pontos de equilíbrio, exceto a origem, bem como pontos de equilíbrio infinitos. Considere Γ o bordo do anel periódico e a um ponto no exterior da região limitada por Γ . Agora, vamos analisar a órbita γ_a , passando por a . Observe que γ_a possui Γ como ω -limite ou α -limite, pois, caso contrário, contradizemos o Teorema 2.2, o qual garante a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais. Assim, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, segue que Γ é uma órbita fechada, uma vez que não possui pontos de equilíbrio.

Agora, tome Σ uma seção transversal sobre Γ . Observe que a transformação de Poincaré, quando restrita à interseção de Σ com pontos de Γ e pontos do interior da região limitada por Γ é a aplicação identidade, uma vez que nestas regiões o bordo e os pontos interiores do bordo são órbitas periódicas. Como a transformação de Poincaré Σ é analítica, pois o campo é polinomial e, portanto, analítico, de acordo com a Proposição 1.21 do livro [15], ela deve ser também a identidade quando restrita à interseção Σ com pontos do exterior da região limitada por Γ . No entanto, isso nos leva a uma contradição com a definição de anel periódico, pois o anel periódico da origem é a maior (no sentido da inclusão) vizinhança de $(0, 0)$ tal que o seu interior é preenchido por órbitas periódicas. ■

Proposição 5.1. *Considere $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto, $F(0, 0) = (0, 0)$ e*

$$H_{M_F} = (P(x, y), Q(x, y)) = (-(ff_y + gg_y), ff_x + gg_x).$$

Suponha que $\text{grau}(f) = \text{grau}(g) = m > 1$. Se os polinômios homogêneos de mais altos graus f_m e g_m de f e de g , respectivamente, não têm fatores lineares reais comuns, então os polinômios homogêneos de mais altos graus de P e Q também não têm fatores lineares reais comuns.

Demonstração: Nesta demonstração, as funções estão sempre aplicadas em (x, y) , todavia, omitiremos esse detalhe e denotaremos por $(P(x, y))_x$ e $(P(x, y))_y$ as derivadas parciais do polinômio $P(x, y)$ com respeito a x e a y , respectivamente, para facilitar a notação.

Primeiramente, note que $(f_m^2 + g_m^2)_x \neq 0$ e $(f_m^2 + g_m^2)_y \neq 0$. De fato, se supormos que $(f_m^2 + g_m^2)_x \equiv 0$, então f_m^2 e g_m^2 seriam funções apenas de y e, portanto, teríamos que $f_m(x, y) = a_m y^m$ e $g_m(x, y) = b_m y^m$, o que implicaria que y é um fator comum de $f_m(x, y)$ e $g_m(x, y)$, o que não ocorre, por hipótese. De forma análoga, provamos que $(f_m^2 + g_m^2)_y \neq 0$. Assim, a menos de sinal, temos que os termos homogêneos de mais altos graus de Q e P são dados, respectivamente, por

$$\left(\frac{f_m^2 + g_m^2}{2} \right)_x \quad \text{e} \quad \left(\frac{f_m^2 + g_m^2}{2} \right)_y.$$

Temos que

$$\left(\frac{f_m^2 + g_m^2}{2} \right)_x = \frac{2f_m(f_m)_x + 2g_m(g_m)_x}{2} = f_m(f_m)_x + g_m(g_m)_x = Q_n \neq 0,$$

$$\left(\frac{f_m^2 + g_m^2}{2} \right)_y = \frac{2f_m(f_m)_y + 2g_m(g_m)_y}{2} = f_m(f_m)_y + g_m(g_m)_y = -P_n \neq 0.$$

Para provar a proposição, utilizaremos a contrapositiva. Assim, suponha a existência de um fator linear real da forma $ax + by$ que divida os termos homogêneos de mais altos graus de Q e P . Vamos mostrar que $ax + by$ divide os polinômios f_m e g_m . Como, por hipótese, $ax + by$ divide os termos homogêneos de mais altos graus de Q e P , temos que $ax + by$ divide qualquer combinação linear desses termos, em particular, divide $xQ_n - yP_n$.

Agora, observe que

$$\begin{aligned} xQ_n - yP_n &= x \left(\frac{f_m^2 + g_m^2}{2} \right)_x + y \left(\frac{f_m^2 + g_m^2}{2} \right)_y \\ &= x \left(\frac{2f_m(f_m)_x + 2g_m(g_m)_x}{2} \right) + y \left(\frac{2f_m(f_m)_y + 2g_m(g_m)_y}{2} \right) \\ &= x (f_m(f_m)_x + g_m(g_m)_x) + y (f_m(f_m)_y + g_m(g_m)_y) \\ &= (x, y) \cdot \frac{1}{2} \nabla (f_m^2 + g_m^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2m (f_m^2 + g_m^2) \\ &= m (f_m^2 + g_m^2). \end{aligned}$$

Assim, obtemos que $ax + by$ divide $m(f_m^2 + g_m^2)$ e, portanto, divide f_m e g_m , ou seja, é um fator linear em comum de f_m e g_m , concluindo a prova da proposição. ■

Em 2016, F. Braun, J. Giné e J. Llibre, no artigo [5], generalizaram o resultado obtido no Teorema 5.1 por meio do Teorema 5.2.

Teorema 5.2. (*Braun, Giné, Llibre*). *Considere $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto, $F(0, 0) = (0, 0)$, e o campo de vetores polinomial $H_{M_F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (-(ff_y + gg_y), ff_x + gg_x)$. Suponha que os polinômios homogêneos de mais altos graus de P e Q , respectivamente, não tenha fatores lineares reais comuns. Então, F é injetora.*

Observe que a Proposição 5.1 demonstra que o Teorema 5.2 é de fato uma generalização do Teorema 5.1. Vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 5.1. *Considere a aplicação polinomial $F(x, y) = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por*

$$F(x, y) = (x + x^3 - y, x^3 + y).$$

Observe que o Jacobiano de F é dado por $1 + 6x^2$, que é maior ou igual a zero para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Além disso, temos que $\text{grau}(f) = \text{grau}(g) = 3$, $f_3(x, y) = x^3$ e $g_3(x, y) = x^3$. Assim, o fator linear x é comum a ambos. Portanto, não estamos nas hipóteses do Teorema 5.1. Por outro lado, é fácil ver que $F(0, 0) = (0, 0)$ e que

$$H_{M_F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (x - 2y, x - y + 4x^3 + 6x^5).$$

O polinômio homogêneo de mais alto grau de P é $x - 2y$ e o polinômio homogêneo de mais alto grau de Q é $6x^5$, os quais não possuem fator linear em comum. Portanto, estamos nas hipóteses do Teorema 5.2. Logo, F é injetora e, como é polinomial, é um difeomorfismo global.

Observe que a ideia central presente nas demonstrações dos Teoremas 5.1 e 5.2 foi utilizar a parte homogênea de mais alto grau das funções coordenadas e de suas derivadas para garantir uma condição suficiente para a existência de um centro global, a fim de utilizar o Teorema de Sabatini para se concluir a injetividade da aplicação. O Teorema 4.3 abre novas possibilidades nesse sentido. Para buscar condições que garantam a injetividade de um difeomorfismo local polinomial F no plano, podemos, de uma forma mais

geral, tomar \mathcal{X} um campo de vetores paralelo e buscar condições para que o pullback $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ seja topologicamente a \mathcal{X} .

Deste modo, torna-se válido o seguinte questionamento: Dado um difeomorfismo local polinomial $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $f(z) = 0$, para algum $z \in \mathbb{R}^2$, e um campo de vetores \mathcal{X} do tipo anular, radial ou faixa, quais condições podemos impor nas funções coordenadas f e g de forma a garantir que o pullback $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ seja topologicamente equivalente a \mathcal{X} e, portanto, F seja globalmente injetora? Em outras palavras, queremos utilizar o Teorema 4.3 para encontrar condições suficientes para que a CJR no plano seja verdadeira. Como mencionado anteriormente, essa ideia foi explorada em [5] e [6] para o caso anular. O próximo resultado, o qual pode ser encontrado em [14], explora uma ideia similar considerando o campo do tipo faixa $\mathcal{X}(x, y) = (1, 0)$.

Teorema 5.3. *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto e tal que o grau da componente g é ímpar. Então, sendo \bar{g} a parte homogênea de maior grau de g , se \bar{g}_x e \bar{g}_y , ambas não identicamente nulas, não possuem fatores lineares reais em comum, F é injetora.*

Demonstração: A ideia desta demonstração será utilizar o campo canônico do tipo faixa $\mathcal{X} = (1, 0)$ e construir o pullback $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$, a fim de mostrar que, sob as hipóteses consideradas, \mathcal{X} e $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ são topologicamente equivalentes e, portanto, F é injetora, de acordo com o Teorema 4.3. Tomando o campo $\mathcal{X}(x, y) = (1, 0)$, temos que

$$JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}} = (g_y, -g_x).$$

Observe que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ não possui pontos de equilíbrios, pois, em particular, o gradiente de g não se anula em nenhum ponto, uma vez que o Jacobiano da F nunca se anula. Logo, pelo Teorema de Poincaré-Hopf, devem existir pontos de equilíbrios infinitos. Então, seja p um ponto de equilíbrio infinito de $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$. Supondo $\text{grau}(g) = m$, por hipótese temos que m é ímpar. Consequentemente, temos que \bar{g}_x e \bar{g}_y , ambas não identicamente nulas, por hipótese, possuem grau $m - 1$, o qual é par. Por hipótese, temos também que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}} \in G_{m-1}$, em que G_{m-1} é o conjunto definido em 2.7. Portanto, podemos aplicar o Teorema 2.7 para concluir que p é um nó, de forma que $\text{ind}(p) = 1$. Desta maneira, concluímos que todos os pontos de equilíbrio infinitos de $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ são nós.

Observe que isso força a existência de uma quantidade finita de equilíbrios infinitos, pois, caso existissem infinitos pontos de equilíbrio infinitos, como o bordo do disco de Poincaré é um conjunto compacto, existiria um ponto de acumulação que não seria um nó, uma contradição. Logo, pelo Teorema de Poincaré-Hopf, segue que $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ possui apenas dois nós como pontos de equilíbrios infinitos. Deste modo, como o grau de $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ é par, temos que os nós possuem sinais opostos, ou seja, um deles deve ser um nó atrator e o outro um nó repulsor. Logo, pela Proposição 4.5, concluímos que \mathcal{X} e $JF \cdot \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ são topologicamente equivalentes. Consequentemente, F é injetora. ■

Observação 6. *Observe que poderíamos enunciar o teorema anterior a partir da componente f . Neste caso, bastaria tomarmos o campo $\mathcal{X}(x, y) = (0, 1)$ e a demonstração seria análoga.*

A seguir, no Exemplo 5.2, temos um exemplo que não satisfaz as hipóteses do Teorema 5.2, mas podemos concluir a injetividade da aplicação pelo Teorema 5.3.

Exemplo 5.2. *Seja $F(x, y) = (f, g) = (x^5 + y^3 + x + y, y - x)$. Observe que o Jacobiano de F é dado por $2 + 5x^4 + 3y^2 > 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Obviamente, F não está nas hipóteses do Teorema 5.1, uma vez que os graus de f e g são diferentes. Calculando o Hamiltoniano H_{M_F} , obtemos*

$$H_{M_F}(x, y) = (P, Q) = (x - y - (1 + 3y^2)(x + x^5 + y + y^3), x - y + (1 + 5x^4)(x + x^5 + y + y^3)).$$

Assim, as partes homogêneas de maior grau de P e Q são, respectivamente, $3y^2x^5$ e $5x^9$, as quais possuem o fator x em comum. Portanto, também não estamos nas hipóteses do Teorema 5.2. No entanto, podemos aplicar o Teorema 5.3. De fato, note que g é uma função homogênea de grau 1. Então, como $g_x = -1$ e $g_y = 1$ não possuem fatores lineares comuns, pelo Teorema 5.3 segue que F é um difeomorfismo global.

Podemos utilizar o Teorema 5.3 para construir uma classe de aplicações polinomiais injetoras no plano, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 5.3. Considere a seguinte classe de aplicações polinomiais $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$F(x, y) = (x^m + y^n + x + y, y^k - x^k + y - x),$$

com m, n e k ímpares. Calculando o Jacobiano de F , obtemos

$$\begin{aligned} \det(DF(x, y)) &= \det \begin{bmatrix} mx^{m-1} + 1 & ny^{n-1} + 1 \\ -kx^{k-1} - 1 & ky^{k-1} + 1 \end{bmatrix} \\ &= (mx^{m-1} + 1)(ky^{k-1} + 1) - (ny^{n-1} + 1)(ny^{n-1} + 1)(-kx^{k-1} - 1), \end{aligned}$$

o qual é maior que 0 para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, F é um difeomorfismo local. Observe que $\text{grau}(g) = k$, o qual é ímpar, por hipótese. Note ainda que $\bar{g}_x = -kx^{k-1}$ e $\bar{g}_y = ky^{k-1}$ não possuem fatores lineares reais comuns. Assim, segue do Teorema 5.3 que F é um difeomorfismo global.

O seguinte exemplo mostra que os Teoremas 5.1, 5.2 e 5.3 fornecem apenas condições suficientes para garantir a injetividade da aplicação F .

Exemplo 5.4. Considere a função $F(x, y) = (f, g) = (x(1 + x^2), y(1 + x^2))$, a qual é um caso particular da aplicação apresentada no Exemplo 4.8, em que tomamos $p_1 = 1$ e $p_2 = p_3 = 0$. Assim, de acordo com o Exemplo 4.8, sabemos que F é um difeomorfismo global. No entanto, observe que F não satisfaz as hipóteses de nenhum dos Teoremas 5.1, 5.2 e 5.3. De fato, F não está nas hipóteses do Teorema 5.1, pois as partes homogêneas de mais alto grau de f e g possuem o fator x em comum. Também não está nas hipóteses do Teorema 5.2, pois $H_{M_F} = (P, Q) = (y(1 + x^2)^2, x(1 + x^2)(1 + 3x^2 + 2y^2))$ é tal que as partes homogêneas de mais alto grau de P e Q também possuem x como fator comum. Temos ainda que F não está nas hipóteses do Teorema 5.3, pois, sendo \bar{f} e \bar{g} as partes homogêneas de maior grau de f e g , respectivamente, temos que \bar{f}_y é identicamente nula e \bar{g}_x e \bar{g}_y possuem y como fator comum.

Conclusões

O problema da invertibilidade global tem despertado o interesse de muitos matemáticos ao longo dos anos e, em particular, a Conjectura Jacobiana. A partir dos resultados explorados neste trabalho, vemos que a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias é uma ferramenta poderosa na busca por condições que assegurem a validade dessa conjectura no plano. Resultados equivalentes à CJR, como o Teorema 4.3, abrem novas possibilidades de pesquisa e também geram novas perguntas como, por exemplo, entender quais são as condições necessárias e suficientes para que um campo de vetores seja topologicamente equivalente a um campo de vetores paralelo. Observamos também que o pullback do campo canônico anular ou faixa por um difeomorfismo local resulta em um campo Hamiltoniano. Essa característica facilita algumas análises e a busca por condições que impliquem equivalências topológicas, tendo em vista os resultados existentes na literatura para campos Hamiltonianos. Por outro lado, o pullback de um campo radial apresenta uma expressão um pouco mais complexa, por não ser Hamiltoniano, mas, ainda assim, há casos em que a injetividade global da aplicação pode ser verificada diretamente a partir desse tipo de campo. Por fim, temos a expectativa de que seja possível utilizar o Teorema 4.3 para fornecer demonstrações alternativas e, possivelmente, mais simples para teoremas relacionados à Conjectura Jacobiana em \mathbb{R}^2 .

Referências Bibliográficas

- [1] L. Barreira, C. Valls, *Equações Diferenciais Ordinárias: Teoria Qualitativa*, Livraria da Física, 1st ed., São Paulo, 2012.
- [2] A. Bialynicki-Birula, M. Rosenlicht, *Injective morphisms of real algebraic varieties*, Proceedings of the American Mathematical Society. **13** (1962), 200–203.
- [3] F. Braun, F. Fernandes, *Very degenerate polynomial submersions and counterexamples to the real Jacobian conjecture*, Journal of Pure and Applied Algebra. **227** (2023) 107345.
- [4] F. Braun, F. Fernandes, B. Oréface-Okamoto, *Injectivity of polynomial maps and foliations in the real plane*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. **250** (2025), 113645.
- [5] F. Braun, J. Giné, J. Llibre, *A sufficient condition in order that the real Jacobian Conjecture in \mathbb{R}^2 holds*, Journal of Differential Equations. **260** (2016), 5250–5258.
- [6] F. Braun, J. Llibre, *A new qualitative proof of a result on the real Jacobian Conjecture*, Annals of the Brazilian Academy of Sciences. **87** (2015), 1519–1524.
- [7] F. Braun, J. Llibre, *Parallel vector fields and global injectivity in two dimensions*, Pacific Journal of Mathematics. **333** (2024), 1–15.
- [8] F. Braun, J. Llibre, *On the connection between global centers and global injectivity in the plane*, Differential Equations and Dynamical Systems. **33** (2025), 71–79.

- [9] F. Braun, B. Oréface-Okamoto, *On polynomial submersions of degree 4 and the real Jacobian conjecture in \mathbb{R}^2* , Journal of Mathematical Analysis and Applications. **443** (2016), 688–706.
- [10] F. Braun, J. R. dos Santos, *The real Jacobian conjecture on \mathbb{R}^2 is true when one of the components has degree 3*, Discrete and Continuous Dynamical Systems. **26** (2010), 75–87.
- [11] F. Braun, J. R. dos Santos Filho, M. A. Teixeira, *Foliations, solvability, and global injectivity*, Archiv der Mathematik **119**:6 (2022), 649–665.
- [12] L. A. Campbell, *The asymptotic variety of a Pinchuk map as a polynomial curve*, Applied Mathematics Letters. **24** (2011), 62–65.
- [13] A. Cima, A. Gasull, F. Mañosas, *On polynomial Hamiltonian planar vector fields*, Journal of Differential Equations. **106** (1993), 367–383.
- [14] M. Domingues, J. Llibre, L. F. Mello, *A new sufficient condition in order that the real Jacobian conjecture in \mathbb{R}^2 holds*, preprint, 2025.
- [15] F. Dumortier, J. Llibre, J. Artés, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer, Berlin, 2006.
- [16] F. Fernandes, *A new class of non-injective polynomial local diffeomorphisms on the plane*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **507** (2021) 125736.
- [17] L. Gavrilov, *Isochronicity of plane polynomial Hamiltonian systems*, Nonlinearity. **10** (1997), 433–448.
- [18] W. Gordon, *On the diffeomorphisms of Euclidean space*, The American Mathematical Monthly. **79** (1972), 755–759.
- [19] J. Gwozdziwicz, *The real Jacobian conjecture for polynomials of degree 3*, Annales Polonici Mathematici. **76** (2001), 121–125.

- [20] M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Elsevier, 3rd ed., 2012.
- [21] O.-H. Keller, *Ganze Cremona-Transformationen*, Monatshefte für Mathematik und Physik **47** (1939), 299–306.
- [22] W. Li, J. Llibre, M. Nicolau, X. Zhang, *On the differentiability of first integrals of two-dimensional flows*, Proceedings of the American Mathematical Society. **130**:7 (2002), 2079–2088.
- [23] P. Machado, *Centro Global e o Problema da Injetividade Global no Plano*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá, 2023.
- [24] L. Markus, *Topological types of polynomial differential equations*, Transactions of the American Mathematical Society **171** (1972), 157–178.
- [25] S. Pinchuk, *A counterexample to the strong real Jacobian conjecture*, Mathematische Zeitschrift. **217** (1994), 1–4.
- [26] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 3rd ed., 1976.
- [27] M. Sabatini, *A connection between isochronous Hamiltonian centres and the Jacobian conjecture*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. **34** (1998), 829–838.
- [28] S. Smale, *Mathematical problems for the next century*, The Mathematical Intelligencer. **20** (1998), 7–15.