

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

## Configurações Centrais, $(n, 1)$ -Empilhadas

Anderson Mauro da Silva

Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes

ITAJUBÁ, 10 DE JULHO DE 2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

## Configurações Centrais, $(n, 1)$ -empilhadas

**Anderson Mauro da Silva**

**Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Matemática.

**Área de Concentração: Mecânica Celeste**

ITAJUBÁ – MG

10 DE JULHO DE 2025

# Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo das configurações centrais  $(n, 1)$ -empilhadas Planares, não-Colineares. Analisamos as configurações utilizando tanto as Equações de Andoyer quanto o Potencial e o Momento de Inércia. Demonstramos que para  $n \leq 7$  as únicas configurações centrais  $(n, 1)$ -empilhadas são as formadas por um polígono regular com massas iguais em seus vértices e uma massa arbitrária no centro.

**Palavras-chave:** Problema de n-Corpos, Configurações Centrais, Configurações Centrais Empilhadas, Configurações centrais co-Circulares;

# Abstract

In this work we present a study of  $(n, 1)$ -Stacked Planar, non-Collinear, Central Configurations. We analyze the configurations using both the Andoyer Equations and the Potential and Moment of Inertia. We demonstrate that for  $n \leq 7$  the only  $(n, 1)$ -stacked central configurations are those formed by a regular polygon with equal masses at its vertices and an arbitrary mass at the center.

**Keywords:** n-Body Problem, Central Configurations, Stacked Central Configurations, Co-Circular Central Configurations.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>Sumário</b>	<b>iii</b>
<b>1 Introdução e Resultados Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Equações de Função Potencial ( $U$ ) e Momento de Inércia ( $I$ ) para Configurações Centrais e Configurações Centrais Empilhadas . . . . .	6
1.2 Seção 1.3 - Equações de Laura-Andoyer . . . . .	9
1.3 Seção 1.4 - Teorema do Bissetor Perpendicular . . . . .	9
<b>2 Configurações Centrais Planares, não Colineares, Empilhadas, Utilizando as Equações de Laura-Andoyer</b>	<b>12</b>
2.1 Configurações Centrais (4,1)-Empilhadas . . . . .	13
2.2 Configurações Centrais (5, 1)-Empilhadas . . . . .	16
2.3 Configurações Centrais ( $n, 1$ )-Empilhadas com as equações de Laura-Andoyer	27
<b>3 Classificação das Configurações Centrais Planares, não Colineares, (<math>n + 1, 1</math>)-Empilhadas</b>	<b>30</b>
3.1 Simplificação das equações das Configurações Centrais Empilhadas . . . . .	32
3.2 Classificação das Configurações Centrais Planares, Não-Colineares ( $n + 1, 1$ )-Empilhadas . . . . .	34
3.3 O Valor $\rho_0$ nas configurações Centrais Co-Circulares . . . . .	38

3.4	Configurações Centrais $(n + 1, 1)$ -Empilhadas com $n \leq 6$ . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Configurações Centrais Co-Circulares Centradas C.C.C.C.</b>	<b>45</b>
4.1	Equações para as Configurações Centrais Co-Circulares Centradas . . . . .	47
4.2	O Ponto Crítico do potencial $U_\alpha$ e de uma função relacionada . . . . .	53
4.3	Simetria das Configurações Centrais Co-Circulares Centradas (CCCC) . . .	57
4.4	Resultado Principal . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>71</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>73</b>

# Capítulo 1

## Introdução e Resultados Preliminares

O problema de  $n$ -corpos clássico consiste no estudo do movimento de  $n$  corpos pontuais com massas positivas  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , interagindo entre si de acordo com a lei de gravitação publicada por Newton em [21]. Nele consideramos que as  $n$  massas estão nas posições  $r_1, r_2, \dots, r_n, r_i \in \mathbb{R}^d, d = 2, 3$ . Com o objetivo de facilitar os cálculos, é usual considerar a constante gravitacional igual a 1. Segundo Albouy, Cabral e Santos [2], o problema de  $n$ -corpos Newtoniano é definido como a equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$\ddot{r}_i = \sum_{j \neq i}^n \frac{m_j}{r_{ij}^3} (r_j - r_i), \quad (1.1)$$

onde cada massa  $m_i$  está localizada na posição  $r_i \in \mathbb{R}^3$  e  $r_{ij}$  representa a distância euclidiana entre  $r_i$  e  $r_j, ||r_i - r_j||$ , conhecido como o problema de  $n$ -corpos Newtoniano. Em alguns casos, vale a pena considerar a restrição ao plano, com  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}^2$ , como será abordado ao longo do texto, assim como considerar um caso mais geral:

$$\ddot{r}_i = \sum_{j \neq i}^n \frac{\alpha m_j}{r_{ij}^{\alpha+2}} (r_j - r_i), \quad (1.2)$$

com  $\alpha \geq 0$ , que será tratado de forma mais detalhada no Capítulo 4 e tem como casos específicos o problema de  $n$ -corpos Newtoniano, quando  $\alpha = 1$ , e o problema de  $n$ -vórtices, quando  $\alpha = 0$ .

Dadas as posições  $r_1, r_2, \dots, r_n$  e as massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , chamaremos  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  de configuração. Se, para algum  $i \neq j, r_i = r_j$ , diremos que a configuração  $r = (r_1, \dots, r_n)$  está no conjunto de colisões  $\Delta$ . Como pode ser observado nas equações (1.1) e (1.2), o problema de  $n$ -corpos não está bem definido quando  $r$  pertence ao conjunto de colisões, desta forma somente serão consideradas configurações fora deste conjunto, ou seja  $r_{ij} \neq 0$  para todo  $i \neq j$ .

Um tópico de particular interesse no problema de  $n$ -corpos é o estudo das configurações centrais. Segundo Chenciner et al. [10], as configurações centrais podem ser definidas da seguinte maneira:

Configurações centrais são configurações nas quais a aceleração em cada corpo é igual a uma constante  $\lambda$  multiplicada pelo vetor posição do corpo, sendo o centro de massa da configuração tomado como a origem. O redimensionamento de uma configuração central ainda garante uma configuração central mas o fator  $\lambda$  é alterado.

A propriedade mais simples de uma configuração central é que ela define um movimento homotético se as velocidades iniciais forem escolhidas convenientemente, por exemplo, se forem consideradas todas zero. Dizemos que um movimento é homotético se durante o movimento apenas o tamanho da configuração muda. Se aceitarmos também rotações das configurações, dizemos que o movimento é homográfico. Por fim, se aceitamos rotações, mas não mudanças no tamanho, dizemos que o movimento é um equilíbrio relativo (Chenciner et al., 2002, p.1-2).

O escalar  $\lambda$  é chamado o multiplicador da configuração central.

Ao longo da dissertação não serão consideradas as velocidades, mas apenas se as posições iniciais são configurações centrais. Ainda assim, supor velocidades iniciais nulas e, logo, um movimento homotético, gera uma facilidade na imaginação do movimento, pois as configurações se manteriam, com todas as massas se aproximando cada vez mais até uma colisão total no centro de massa.

Algumas vezes, após a inclusão ou retirada de uma massa na configuração central, não ficará claro se a posição do centro de massa será alterada ou se permanecerá na origem. Nesses casos a equação da configuração central será a seguinte:

$$\lambda(r_i - c) = \sum_{j \neq i}^n \frac{\alpha m_j}{r_{ij}^{\alpha+2}} (r_j - r_i), \quad (1.3)$$

para cada instante e para cada  $i = 1, \dots, n$ , onde  $c$  é o centro de massa, ou seja,  $c = \sum_{i=1}^n \frac{r_i m_i}{m}$ , e  $m = \sum_{j=1}^n m_j$  é a massa total da configuração  $r = (r_1, \dots, r_n)$ .

Para evitar que o texto fique muito repetitivo, muitas vezes utilizaremos a abreviação C.C. para as configurações centrais.

Cada C.C. define uma classe de equivalência por rotações e homotetias. Por exemplo, para o caso  $n = 3$  existem três classes de equivalência, sendo três destas classes geradas por C.C., conforme comprovado por Euler em [14]. Estas configurações podem ser visualizadas na Figura 1.1. Existem também duas classes de equivalência geradas por triângulos equiláteros, conforme demonstrado por Lagrange em [17], cujas configurações podem ser observadas na Figura 1.2.

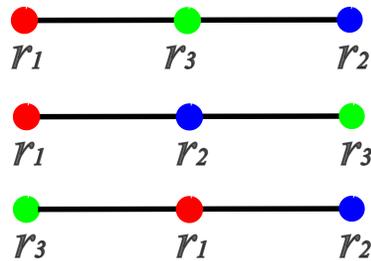


Figura 1.1: As três classes de equivalência de Configurações Centrais de Euler.

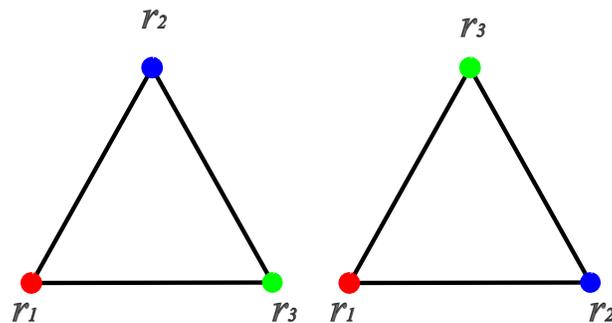


Figura 1.2: As duas classes de equivalência de Configurações Centrais de Lagrange.

Hampton [16] define a família de C.C. que possui a propriedade de possuir algum subconjunto próprio de três ou mais corpos formando uma configuração central como Configuração Central Empilhada.

O objetivo de estudo desta dissertação serão as C.C. planares, não colineares, com  $n$  corpos,  $n \geq 4$ , nas quais é possível retirar uma das massas e ainda ter uma C.C. planar, mas não colinear. Vale ressaltar que a mesma configuração central empilhada pode ser encontrada considerando uma C.C. planar, não-colinear, na qual é possível incluir uma massa no mesmo plano e ainda ter uma C.C. planar, sendo apenas uma diferença na abordagem.

Sempre que não for explicitada a dimensão na qual está a configuração, consideraremos que está estritamente em  $\mathbb{R}^2$ , ou seja, é planar e não colinear. Da mesma maneira, sempre que nos referirmos a uma configuração central empilhada e não especificarmos quantas massas serão incluídas ou retiradas, será apenas uma massa.

Quanto à retirada ou inclusão da massa, ao longo do texto serão utilizadas diferentes abordagens. Quando nos referirmos a uma C.C. de  $n$  corpos na qual uma das massas é retirada, a chamaremos de C.C.  $(n, 1)$ -empilhada, enquanto quando nos referirmos ao caso com  $n$  massas na qual uma nova massa é inserida utilizaremos a notação C.C.  $(n + 1, 1)$ -empilhada, de maneira geral, ao longo do capítulo 2 será utilizada a primeira abordagem e nos demais a segunda.

Outra diferença marcante ao longo da dissertação será que, enquanto nos capítulos 3 e 4, as C.C. serão analisadas utilizando a Função Potencial  $U$  e o Momento de Inércia  $I$ , que serão apresentados na Seção 1.1, o capítulo 2 utilizará as equações de Laura-Andoyer, que serão definidas na Seção 1.2. Comparativamente uma vantagem na utilização das equações de Laura-Andoyer é uma maior facilidade na análise geométrica. Em função disso, no segundo capítulo será possível utilizar mais figuras para facilitar a compreensão e assimilação das ideias.

No início de cada capítulo ou seção onde houver uma mudança na abordagem ou na notação utilizada, estas serão devidamente explicitadas.

Considerando sempre C.C. planares e não colineares, após a apresentação de algumas

ferramentas necessárias nas próximas seções, veremos:

1. No capítulo 2 será demonstrado que as únicas C.C.  $(4, 1)$  e  $(5, 1)$ -empilhadas são, respectivamente, o triângulo equilátero com massas iguais em seus vértices e uma massa arbitrária no baricentro e o quadrado com massas iguais em seus vértices e uma massa arbitrária em seu centro. Na última seção, veremos que, para o caso geral, de  $n$  corpos, as únicas C.C.  $(n, 1)$ -empilhadas possíveis serão formadas por uma configuração central co-circular (C.C.C.), com uma massa no centro, onde a massa a ser retirada só poderá ser a massa central.
2. No capítulo 3 será realizada uma classificação das Configurações Centrais, uma demonstração com uma abordagem diferente para os casos já citados, inclusive para o caso geral, com  $n$  corpos, no qual será demonstrado que uma configuração central  $(n + 1, 1)$ -empilhada, deverá partir de uma C.C. com os corpos em uma configuração co-circular, ou seja, uma C.C.C., e o novo corpo só poderá ser incluído no centro do círculo. Para o caso  $(n + 1, 1)$ ,  $3 \leq n \leq 6$ , poderemos garantir que as únicas configurações centrais  $(n + 1, 1)$ -empilhadas possíveis serão formadas por configurações centrais co-circulares centradas (C.C.C.C.).
3. O capítulo 4 irá focar na análise das C.C.C.C., e a análise será expandida para considerar não apenas o caso Newtoniano, mas o caso geral, o que será explicado em detalhes no início do capítulo. Utilizando a análise de pontos críticos e de simetrias por permutações e rotações poderemos demonstrar diversos resultados. Ao final do capítulo será possível obter um resultado geral que, dentro de determinadas premissas, garante que os únicos casos possíveis são as configurações geradas por polígonos regulares com massas iguais. Em particular, para o caso Newtoniano, será possível demonstrar que a única Configuração Central co-Circular Centrada é o hexágono regular com todas as massas iguais.

Por fim, utilizando os resultados apresentados, em especial no terceiro e quarto capítulos, conseguiremos demonstrar que, para o caso Newtoniano, com  $3 \leq n \leq 6$ , a única configuração central  $(n + 1, 1)$ -empilhada possível será a formada por massas iguais nos

vértices de um polinômio regular e uma massa arbitrária no centro do círculo, que coincide com o centro de massa.

## 1.1 Equações de Função Potencial ( $U$ ) e Momento de Inércia ( $I$ ) para Configurações Centrais e Configurações Centrais Empilhadas

Nesta seção serão introduzidas a Função Potencial  $U$  e o Momento de Inércia  $I$ .

Seja  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  uma configuração com massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , então teremos que a Função Potencial  $U$  será tal que:

$$m_k \ddot{r}_k = \frac{\partial U(r)}{\partial r_k}, k = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

Logo, utilizando a equação (1.1), temos, para cada  $k = 1, \dots, n$ :

$$-\frac{\partial U(r)}{\partial r_k} = \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{m_k m_j}{r_{kj}^3} (r_k - r_j). \quad (1.5)$$

Na equação acima  $U(r)$  é a função potencial Newtoniana dada por:

$$U(r) = \sum_{j=1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}. \quad (1.6)$$

Definamos o momento de Inércia  $I$  como:

$$I(r) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{m} r_{ij}^2, \quad (1.7)$$

onde  $m = \sum_{j=1}^n m_j$ . Sempre que ficar claro à qual configuração  $r$  a função potencial  $U(r)$  e o Momento de Inércia  $I(r)$  se referir, escreveremos apenas  $U$  e  $I$ .

Realizando uma mudança de coordenadas no momento de inércia para relacionar ao centro de massa, temos:

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{m} |r_i - r_j|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{m_i m_j}{m} |(r_i - c) - (r_j - c)|^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{m_i m_j}{m} ((r_i - c)^2 - 2\langle (r_i - c), (r_j - c) \rangle + (r_j - c)^2) \\
&= \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{m_i m_j}{m} ((r_i - c)^2 + (r_j - c)^2) \right) - \left( \frac{1}{m} \sum_{i,j=1}^n (m_i r_i - m_i c_i)(m_j r_j - m_j c_j) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^n m_i (r_i - c)^2 \right) + \left( \sum_{j=1}^n m_j (r_j - c)^2 \right) \right) - \left( \frac{1}{m} (m c - m c)(m c - m c) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n m_i |r_i - c|^2, \tag{1.8}
\end{aligned}$$

onde  $c = \sum_{k=1}^n \frac{m_k r_k}{m}$ .

Se a configuração  $r$  for uma Configuração Central, então, pelas equações (1.3) e (1.5), temos:

$$\nabla_i U = \lambda m_i (r_i - c), i = 1, \dots, n, \tag{1.9}$$

Calculando o vetor gradiente do momento de inércia  $I$ , temos:

$$\begin{aligned}
\nabla I &= \left( \sum_{j=2}^n \frac{m_1 m_j 2(r_1 - r_j)}{m}, \dots, \sum_{j=1}^{i-1} \frac{-m_j m_i 2(r_j - r_i)}{m} + \sum_{j=i+1}^n \frac{m_i m_j 2(r_i - r_j)}{m}, \dots, \right. \\
&\quad \left. \sum_{j=1}^{n-1} \frac{-2m_j m_n (r_j - r_n)}{m} \right) \\
&= 2 \left( \sum_{j \neq 1}^n \frac{m_1 m_j (r_1 - r_j)}{m}, \dots, \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (r_i - r_j)}{m}, \dots, \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_n m_j (r_n - r_j)}{m} \right) \\
&= 2 \left( \sum_{j \neq 1}^n \frac{m_1 m_j r_1}{m} - m_1 \left( c - \frac{m_1 r_1}{m} \right), \dots, \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_n m_j r_n}{m} - m_n \left( c - \frac{m_n r_n}{m} \right) \right) \\
&= 2 \left( \sum_{j=1}^n \frac{m_1 m_j r_1}{m} - m_1 c, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{m_n m_j r_n}{m} - m_n c \right) \\
&= 2(m_1(r_1 - c), \dots, m_n(r_n - c)); \tag{1.10}
\end{aligned}$$

Logo, pelas equações (1.9) e (1.10), se a configuração  $r$  é central, temos:

$$\nabla U(r) + \frac{\lambda}{2} \nabla I = 0, \quad (1.11)$$

onde  $\lambda = \frac{U}{I}$ .

Incluindo uma nova massa  $m_0$  na configuração  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ , chamaremos a nova configuração de  $\bar{r} = (r_0, r_1, r_2, \dots, r_n)$  e, caso esta seja uma configuração central, teremos as seguintes equações:

$$\bar{\lambda}(r_i - \bar{c}) = \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{m_j}{r_{ij}^3} (r_j - r_i), \quad (1.12)$$

para cada  $i = 0, \dots, n$  onde  $\bar{c}$  é o centro de massa, ou seja,  $\bar{c} = \sum_{i=0}^n \frac{r_i m_i}{\bar{m}} = \frac{m c + m_0 r_0}{m + m_0}$  e  $\bar{m} = \sum_{j=0}^n m_j$  é a massa total da configuração  $\bar{r} = (r_0, r_1, \dots, r_n)$ . Além disso, vale ressaltar que o multiplicador  $\bar{\lambda}$  pode ser diferente do multiplicador  $\lambda$ .

Teremos as seguintes equações para o potencial  $\bar{U}$  e para o momento de inércia  $\bar{I}$ :

$$\bar{U} = U(\bar{r}) = \sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = U + \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i}{r_{0i}}; \quad (1.13)$$

$$\bar{I} = I(\bar{r}) = \sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\bar{m}} r_{ij}^2 = \sum_{i=0}^n m_i |r_i - \bar{c}|^2, \quad (1.14)$$

$$\bar{U} + \frac{\bar{\lambda}}{2} \nabla \bar{I} = 0, \quad (1.15)$$

onde  $\bar{\lambda} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}$ .

Em resumo, teremos uma configuração central  $(n+1, 1)$ -empilhada se, e somente se, tivermos dois sistemas de massas  $m = (m_1, \dots, m_n)$  e  $\bar{m} = (m_0, m_1, \dots, m_n)$ ,  $m_i > 0$  para  $i = 0, \dots, n$ , respectivamente nas posições  $r = (r_1, \dots, r_n)$  e  $\bar{r} = (r_0, r_1, \dots, r_n)$ , no qual cada  $r_i$  representa uma posição no plano (ou no espaço no caso espacial), no qual as equações (1.3) e (1.12) sejam satisfeitas, ou, equivalentemente, as equações (1.11) e (1.15), ou seja:

$$\nabla U(r) + \frac{\lambda}{2} \nabla I(r) = 0 \text{ e } \nabla \bar{U}(\bar{r}) + \frac{\bar{\lambda}}{2} \nabla \bar{I}(\bar{r}) = 0, \text{ onde } \lambda = \frac{U}{I} \text{ e } \bar{\lambda} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}. \quad (1.16)$$

## 1.2 Seção 1.3 - Equações de Laura-Andoyer

Nesta seção iremos apresentar as equações de Laura-Andoyer, que, segundo [8] são também conhecidas como equação de Andoyer ou de Routh. As equações constam no trabalho original [3] e estão bem organizadas em [15] e [8]. Como esta dissertação foca no caso planar, não colinear, iremos restringir o resultado ao  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 1.2.1.** *As equações de Andoyer com as áreas em  $\mathbb{R}^2$  são dadas por:*

$$f_{ij} = \sum_{k \neq i,j} m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} = 0, 1 \leq i, j, k \leq n; \quad (1.17)$$

onde  $R_{ij} = |r_i - r_j|^{-3}$  e  $\Delta_{ijk} = (r_i - r_j) \wedge (r_j - r_k)$  é o dobro da área orientada do triângulo com vértices nos pontos  $r_i, r_j$  e  $r_k$ .

Conforme pode ser observado no Teorema 5.2.4 de [8], um sistema de  $n$  massas não colineares forma uma configuração central se, e somente se,  $f_{ij} = 0$ , para todo  $1 \leq i, j \leq n$ .

## 1.3 Seção 1.4 - Teorema do Bissetor Perpendicular

Nesta seção apresentaremos um último resultado preliminar, o Teorema do Bissetor Perpendicular. Segundo Moeckel [20] este resultado trata sobre o formato da configuração central e é devido a Conley. Fernandes [8] ressalta que o Teorema é muito útil para provar a não existência de certas configurações centrais. O Teorema será amplamente utilizado ao longo da dissertação, em especial no próximo capítulo, mas, antes, precisaremos definir a mediatriz:

**Definição 1.3.1.** *Uma reta perpendicular a um segmento de reta, que contem seu ponto médio é chamada mediatriz.*

Com esta definição temos condições de enunciar e demonstrar, utilizando as Equações de Andoyer, o Teorema do Bissetor Perpendicular:

**Teorema 1.3.2.** *Considere uma Configuração Central Planar formada por  $n$  massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Escolha duas massas  $m_i$  e  $m_j$  com posições  $r_i$  e  $r_j$ , respectivamente.*

Trace a reta que contem estas duas massas e a reta que bissecta o seguimento  $\overline{r_i r_j}$ , de acordo com as figuras 1.3 e 1.4. Estas duas retas definem dois cones no plano. Então, se existem massas em um dos cones abertos, devemos ter também massas no outro cone. Em outras palavras, se as massas que não estiverem sobre uma das duas retas estiverem todas em um mesmo cone, não teremos uma configuração central.

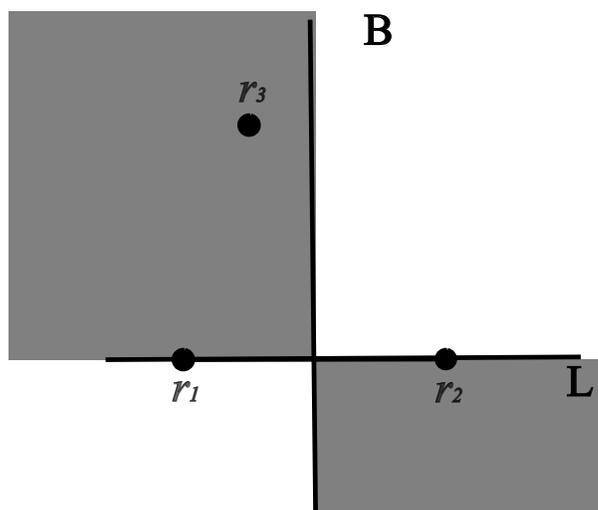


Figura 1.3: Não pode ser Configuração Central.

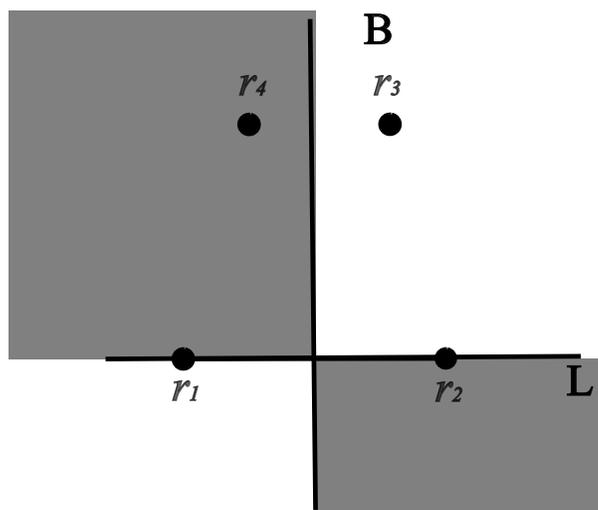


Figura 1.4: Poderia ser uma Configuração Central.

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, sejam as massas  $m_1$  e  $m_2$  localizadas nas posições  $r_1$  e  $r_2$ ,  $L$  a reta que conecta  $r_1$  a  $r_2$  e  $B$  a reta que bissecta o seguimento  $\overline{r_1 r_2}$ .

Suponhamos que uma massa  $m_3$  esteja localizado na posição  $r_3$ , em um dos cones abertos definidos pelas retas, digamos, sem perda de generalidade, no segundo quadrante. Então, pelas equações de Andoyer, para que tenhamos uma configuração central deveremos ter, em particular:

$$f_{12} = \sum_{k=3}^n m_k (R_{1k} - R_{2k}) \Delta_{ijk} = 0.$$

Como  $r_{13} < r_{23}$ ,  $(R_{13} - R_{23}) > 0$ , como ainda  $\Delta_{123} > 0$ , temos que  $(R_{13} - R_{23}) \Delta_{123} > 0$ . Para que tenhamos  $f_{12} = 0$ , para ao menos algum  $4 \leq i \leq n$ , deveremos ter  $(R_{1i} - R_{2i}) \Delta_{12i} < 0$ .

Analisando todas as opções para a posição  $r_i$  da massa  $m_i$ , temos:

- a) Se  $r_i$  está localizada sobre a reta  $L$ , então  $r_{1i} = r_{2i}$  e  $m_i (R_{1i} - R_{2i}) \Delta_{12i} = 0$ ;
- b) Se  $r_i$  está localizada sobre a reta  $M$ , então  $\Delta_{12i} = 0$  e  $m_i (R_{1i} - R_{2i}) \Delta_{12i} = 0$ ;
- c) Se  $r_i$  está localizado no primeiro quadrante, então  $r_{1i} > r_{2i}$ , temos  $(R_{1i} - R_{2i}) < 0$  e  $\Delta_{12i} > 0$ , temos que  $(R_{13} - R_{23}) \Delta_{123} < 0$ ;
- d) Se  $r_i$  está localizado no segundo quadrante, então  $r_{1i} < r_{2i}$ , temos  $(R_{1i} - R_{2i}) > 0$  e  $\Delta_{12i} > 0$ , temos que  $(R_{13} - R_{23}) \Delta_{123} > 0$ ;
- e) Se  $r_i$  está localizado no terceiro quadrante, então  $r_{1i} < r_{2i}$ , temos  $(R_{1i} - R_{2i}) > 0$  e  $\Delta_{12i} < 0$ , temos que  $(R_{13} - R_{23}) \Delta_{123} < 0$ ;
- f) Se  $r_i$  está localizado no quarto quadrante, então  $r_{1i} > r_{2i}$ , temos  $(R_{1i} - R_{2i}) < 0$  e  $\Delta_{12i} < 0$ , temos que  $(R_{13} - R_{23}) \Delta_{123} > 0$ .

Assim, para que a equação  $f_{12}$  seja satisfeita, deveremos ter ao menos uma massa  $m_i$  localizada no primeiro ou no terceiro quadrante, ou seja, no outro cone aberto.  $\square$

## Capítulo 2

# Configurações Centrais Planares, não Colineares, Empilhadas, Utilizando as Equações de Laura-Andoyer

Neste capítulo verificaremos alguns casos de C.C. empilhadas utilizando as equações de Laura-Andoyer (1.17).

Como o estudo é focado nas configurações planares e não colineares e não é possível obter tal configuração com menos de 3 corpos, os casos se restringem às C.C. (4, 1)-empilhadas, que serão analisadas na primeira seção e têm como único resultado o triângulo equilátero com corpos com massas iguais em seus vértices e um corpo com massa arbitrária no baricentro, as C.C. (5, 1)-empilhadas, que serão estudadas na segunda seção e possuem como único resultado o quadrado com corpos de massas iguais nos seus vértices e um corpo de massa arbitrária no centro e, por fim, o caso geral, que será estudado na terceira e última seção, onde demonstraremos que os únicos casos possíveis de C.C. (n, 1)-empilhadas ocorrem quando os  $n - 1$  corpos estão localizados num círculo e o  $n$ -ésimo corpo, que pode ter massa arbitrária, está localizado no centro do círculo.

## 2.1 Configurações Centrais (4,1)-Empilhadas

Nesta seção verificaremos que para o caso (4, 1) a única configuração central empilhada possível é a C.C. formada por um triângulo equilátero com corpos com massas iguais em seus vértices e um corpo com massa arbitrária no baricentro, na qual este último corpo pode ser retirado e ainda teremos uma C.C..

O caso com 3 corpos é o primeiro que permite uma configuração não colinear e, conforme demonstrado em [24], existe uma única configuração. Este fato pode ser verificado no lema a seguir:

**Lema 2.1.1.** *A única configuração central não colinear com 3 corpos é o triângulo equilátero.*

*Demonstração.* Para verificar seguem as equações de Laura-Andoyer:

$$f_{12} = m_3(R_{13} - R_{23})\Delta_{123} = 0,$$

$$f_{13} = m_2(R_{12} - R_{32})\Delta_{132} = 0,$$

$$f_{23} = m_1(R_{21} - R_{31})\Delta_{231} = 0.$$

Como no caso não colinear  $\Delta_{123} \neq 0$  e tomando  $m_1, m_2, m_3 \neq 0$ , temos  $R_{13} - R_{23} = R_{12} - R_{32} = R_{21} - R_{31} = 0$ , ou seja, todos os lados do triângulo têm o mesmo comprimento, logo o triângulo é equilátero.  $\square$

Com este resultado, analisaremos o caso  $n = 4$ , no qual as equações de Laura-Andoyer são as seguintes:

$$f_{12} = m_3(R_{13} - R_{23})\Delta_{123} + m_4(R_{14} - R_{24})\Delta_{124} = 0, \quad (2.1)$$

$$f_{13} = m_2(R_{12} - R_{32})\Delta_{132} + m_4(R_{14} - R_{34})\Delta_{134} = 0, \quad (2.2)$$

$$f_{14} = m_2(R_{12} - R_{42})\Delta_{142} + m_3(R_{13} - R_{43})\Delta_{143} = 0, \quad (2.3)$$

$$f_{23} = m_1(R_{21} - R_{31})\Delta_{231} + m_4(R_{24} - R_{34})\Delta_{234} = 0, \quad (2.4)$$

$$f_{24} = m_1(R_{21} - R_{41})\Delta_{241} + m_3(R_{23} - R_{43})\Delta_{243} = 0, \quad (2.5)$$

$$f_{34} = m_1(R_{31} - R_{41})\Delta_{341} + m_2(R_{32} - R_{42})\Delta_{342} = 0. \quad (2.6)$$

Para verificar quais são as possíveis configurações centrais empilhadas (4, 1), consideremos, sem perda de generalidade, que os corpos de massas  $m_1, m_2$  e  $m_3$  formam um triângulo equilátero, ou seja, que  $R_{13} - R_{23} = R_{12} - R_{32} = R_{21} - R_{31} = 0$ . Assim, as equações  $f_{12}, f_{13}$  e  $f_{23}$ , cada uma delas igual a zero, nos dão:

$$f_{12} = m_4(R_{14} - R_{24})\Delta_{124} = 0, \quad (2.7)$$

$$f_{13} = m_4(R_{14} - R_{34})\Delta_{134} = 0, \quad (2.8)$$

$$f_{23} = m_4(R_{24} - R_{34})\Delta_{234} = 0. \quad (2.9)$$

No lema a seguir, veremos que  $\Delta_{124}, \Delta_{134}, \Delta_{234} \neq 0$ .

**Lema 2.1.2.** *Em uma configuração central (4, 1)-empilhada, o quarto corpo (que será removido) não pertence a nenhum dos lados do triângulo equilátero  $\mathcal{T}$ , formado pelos outros três corpos.*

*Demonstração.* Suponha que  $r_1, r_2$  e  $r_3$  estão ordenados em sentido anti-horário e que  $r_4$  esteja no segmento  $\overline{r_1 r_2}$ , conforme a Figura 2.1.

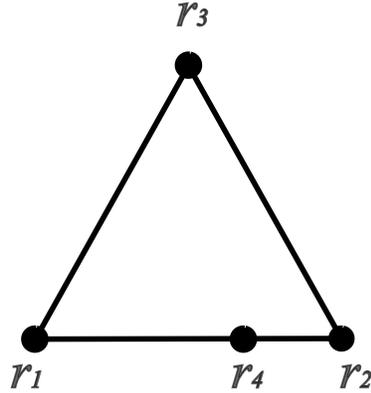


Figura 2.1:  $r_4$  localizado no segmento  $\overline{r_1 r_2}$ .

Então  $\Delta_{134} \neq 0$ , logo, pela equação (2.8),  $r_{14} = r_{34}$ , o que é um absurdo, pois como  $r_1, r_2$  e  $r_3$  formam um triângulo equilátero, a única forma de termos  $r_4$  no segmento  $\overline{r_1 r_2}$  e  $r_{14} = r_{34}$  é se tivermos  $r_4 = r_2$ . Assim temos que  $\Delta_{124} \neq 0$ . Para  $\Delta_{134} \neq 0$  e  $\Delta_{234} \neq 0$  a demonstração é exatamente igual.  $\square$

Assim, tomando  $m_4 \neq 0$ , temos:

$$R_{14} - R_{24} = R_{14} - R_{34} = R_{24} - R_{34} = 0, \quad (2.10)$$

ou seja, os corpos  $r_1, r_2$  e  $r_3$  se encontram num círculo centrado em  $r_4$ . Considerando que temos um triângulo equilátero,  $r_4$  estará no baricentro, o que será demonstrado formalmente no Lema 2.1.3, a seguir:

**Lema 2.1.3.** *Em uma configuração central (4,1)-empilhada, o quarto corpo (que será removido) se encontra no baricentro do triângulo equilátero  $\mathcal{T}$ , formado pelos outros três corpos.*

*Demonstração.* Uma vez que pelo Lema 2.1.2  $r_4$  não pode pertencer a nenhum dos lados de  $\mathcal{T}$ , e temos  $R_{14} = R_{24}$ ,  $r_4$  se encontra na reta gerada pela bissetriz  $B$ , que corta  $\overline{r_1 r_2}$ . Definindo o lado do triângulo  $\mathcal{T}$  como 1 e pelas equações (2.10), temos que  $r_{14} - r_{34} = \sqrt{(1/2)^2 + h^2} - \sqrt{3}/2 - h = 0$ , o que nos dá que  $h = \sqrt{3}/6$ , conforme a Figura 2.2.

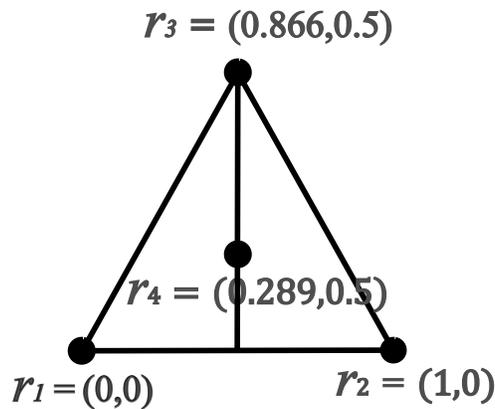


Figura 2.2:  $r_4$  localizado no baricentro.

Como este resultado é válido fazendo a comparação em relação a cada lado do triângulo  $\mathcal{T}$ , temos que  $r_4$  se encontra no baricentro do triângulo equilátero  $\mathcal{T}$ .  $\square$

Com isso chegamos ao resultado principal da seção:

**Teorema 2.1.4.** *O triângulo equilátero com massas iguais em seus vértices e uma massa arbitrária no baricentro é a única configuração central empilhada (4,1).*

*Demonstração.* Pelo Lema 2.1.3, temos que a única configuração central empilhada possível é o triângulo equilátero com uma massa no seu baricentro, logo só resta demonstrar que a massa no baricentro pode ser arbitrária, enquanto as massas nos vértices têm de ser iguais.

É fácil ver que a massa  $m_4$  é arbitrária, pois  $r_4$  se encontra no baricentro, logo, nas equações (2.1), (2.2) e (2.4), temos que  $R_{14} - R_{24} = R_{14} - R_{34} = R_{24} - R_{34} = 0$ , logo nestas equações, o valores de  $m_4$  é arbitrária.

Quanto às massas  $m_1, m_2$  e  $m_3$ , tomando a equação (2.3), como  $r_{12} = r_{13}$  e  $r_{42} = r_{43}$ , temos  $R_{12} - R_{42} = R_{13} - R_{43}$  e, como os triângulos  $\Delta_{142}$  e  $\Delta_{143}$  são espelhados, temos que  $\Delta_{142}$  e  $\Delta_{143}$  possuem sinais opostos, logo  $m_2 = m_3$ . Utilizando a mesma lógica na equação (2.5), temos que  $m_1 = m_3$ . Assim o triângulo equilátero com massas iguais em seus vértices e uma massa qualquer no baricentro é a única configuração central empilhada (4,1).  $\square$

## 2.2 Configurações Centrais (5, 1)-Empilhadas

Nesta seção estamos interessados nas configurações centrais (5,1)-empilhadas, ou seja, nas C.C. com 5 corpos, nas quais um dos corpos pode ser removido e ainda teremos uma C.C. com os 4 corpos restantes. Veremos que a única possibilidade ocorre quando 4 dos 5 corpos formam um quadrado com massas iguais em seus vértices e o quinto corpo está localizado no centro do quadrado, podendo possuir uma massa qualquer.

A questão foi posta por Hampton em [16], onde questionou, em relação ao caso planar, se além do quadrado com uma massa no centro, que já era um caso conhecido, havia outra configuração central planar, não colinear, com cinco corpos que possuísse um subconjunto formando uma configuração central planar, não colinear, de quatro corpos.

De fato, Fernandes e Mello [4], demonstraram que o quadrado com uma massa em seu centro é a única possibilidade para o caso planar, ou seja, demonstraram o seguinte teorema:

**Teorema 2.2.1.** *Considere o problema de cinco-corpos planar não-colinear. A única*

*configuração central (5,1)-empilhada é obtida com quatro corpos de massas iguais nos vértices de um quadrado e um corpo de massa arbitrária na interseção das diagonais.*

Dividiremos a demonstração em 5 lemas e, para formalizar o problema serão utilizadas as equações de Laura-Andoyer. No caso da configuração central de 5 corpos, suas massas e posições terão que obedecer às seguintes equações:

$$\begin{aligned}
f_{12} &= m_3(R_{13} - R_{23})\Delta_{123} + m_4(R_{14} - R_{24})\Delta_{124} + m_5(R_{15} - R_{25})\Delta_{125} = 0, \\
f_{13} &= m_2(R_{12} - R_{32})\Delta_{132} + m_4(R_{14} - R_{34})\Delta_{134} + m_5(R_{15} - R_{35})\Delta_{135} = 0, \\
f_{14} &= m_2(R_{12} - R_{42})\Delta_{142} + m_3(R_{13} - R_{43})\Delta_{143} + m_5(R_{15} - R_{45})\Delta_{145} = 0, \\
f_{15} &= m_2(R_{12} - R_{52})\Delta_{152} + m_3(R_{13} - R_{53})\Delta_{153} + m_4(R_{14} - R_{54})\Delta_{154} = 0, \\
f_{23} &= m_1(R_{21} - R_{31})\Delta_{231} + m_4(R_{24} - R_{34})\Delta_{234} + m_5(R_{25} - R_{35})\Delta_{235} = 0, \\
f_{24} &= m_1(R_{21} - R_{41})\Delta_{241} + m_3(R_{23} - R_{43})\Delta_{243} + m_5(R_{25} - R_{45})\Delta_{245} = 0, \\
f_{25} &= m_1(R_{21} - R_{51})\Delta_{251} + m_3(R_{23} - R_{53})\Delta_{253} + m_4(R_{24} - R_{54})\Delta_{254} = 0, \\
f_{34} &= m_1(R_{31} - R_{41})\Delta_{341} + m_2(R_{32} - R_{42})\Delta_{342} + m_5(R_{35} - R_{45})\Delta_{345} = 0, \\
f_{35} &= m_1(R_{31} - R_{51})\Delta_{351} + m_2(R_{32} - R_{52})\Delta_{352} + m_4(R_{34} - R_{54})\Delta_{354} = 0, \\
f_{45} &= m_1(R_{41} - R_{51})\Delta_{451} + m_2(R_{42} - R_{52})\Delta_{452} + m_3(R_{43} - R_{53})\Delta_{453} = 0.
\end{aligned}$$

Como a configuração central deve ser (5,1), ao retirar a quinta massa ainda restará uma configuração central, logo as seguintes equações também deverão ser garantidas:

$$\begin{aligned}
g_{12} &= m_3(R_{13} - R_{23})\Delta_{123} + m_4(R_{14} - R_{24})\Delta_{124} = 0, \\
g_{13} &= m_2(R_{12} - R_{32})\Delta_{132} + m_4(R_{14} - R_{34})\Delta_{134} = 0, \\
g_{14} &= m_2(R_{12} - R_{42})\Delta_{142} + m_3(R_{13} - R_{43})\Delta_{143} = 0, \\
g_{23} &= m_1(R_{21} - R_{31})\Delta_{231} + m_4(R_{24} - R_{34})\Delta_{234} = 0, \\
g_{24} &= m_1(R_{21} - R_{41})\Delta_{241} + m_3(R_{23} - R_{43})\Delta_{243} = 0,
\end{aligned}$$

$$g_{34} = m_1(R_{31} - R_{41})\Delta_{341} + m_2(R_{32} - R_{42})\Delta_{342} = 0.$$

Com estes dois conjuntos de equações é possível demonstrar o primeiro dos 5 lemas necessários para o resultado principal da seção.

**Lema 2.2.2.** *Para termos uma configuração central (5, 1)-empilhada, as massas e posições dos demais corpos devem ser independentes da massa do corpo a ser removido.*

*Demonstração.* Como os dois grupos de equações devem ser garantidos, é possível realizar a substituição das 6 equações  $g_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ , em cada uma das respectivas  $f_{ij}$ , obtendo:

$$f_{12} = g_{12} + m_5(R_{15} - R_{25})\Delta_{125} = 0,$$

$$f_{13} = g_{13} + m_5(R_{15} - R_{35})\Delta_{135} = 0,$$

$$f_{14} = g_{14} + m_5(R_{15} - R_{45})\Delta_{145} = 0,$$

$$f_{23} = g_{23} + m_5(R_{25} - R_{35})\Delta_{235} = 0,$$

$$f_{24} = g_{24} + m_5(R_{25} - R_{45})\Delta_{245} = 0,$$

$$f_{34} = g_{34} + m_5(R_{35} - R_{45})\Delta_{345} = 0.$$

Para  $1 \leq i < j \leq 4$ ,  $f_{ij} = 0$  e  $g_{ij} = 0$ , logo, tomando  $m_5 \neq 0$ , tem-se:

$$(R_{15} - R_{25})\Delta_{125} = 0, \tag{2.11}$$

$$(R_{15} - R_{35})\Delta_{135} = 0, \tag{2.12}$$

$$(R_{15} - R_{45})\Delta_{145} = 0, \tag{2.13}$$

$$(R_{25} - R_{35})\Delta_{235} = 0, \tag{2.14}$$

$$(R_{25} - R_{45})\Delta_{245} = 0, \tag{2.15}$$

$$(R_{35} - R_{45})\Delta_{345} = 0. \tag{2.16}$$

□

Além disso, pode-se limitar a forma do quadrilátero  $\mathcal{Q}$  gerado pelos quatro corpos que não serão removidos utilizando o próximo lema.

**Lema 2.2.3.** *Em uma configuração central (5,1)-empilhada, os quatro corpos restantes formam uma configuração central estritamente convexa.*

*Demonstração.* A prova se dá por contradição.

Suponha que os quatro corpos restantes, 1, 2, 3 e 4, formam uma configuração central côncava e, sem perda de generalidade, que  $r_1, r_2$  e  $r_3$  sejam os vértices de um triângulo  $\mathcal{T}$ . Assim, pelo Teorema do Bissetor Perpendicular 1.3.2,  $r_4$  não pode pertencer a nenhum dos lados do triângulo. Isto ocorre, pois, senão, poderíamos traçar  $\mathcal{L}$  como a reta que conecta três dos quatro pontos, digamos,  $r_1, r_2$  e  $r_4$  e teríamos que  $r_3$  se encontraria em um dos cones abertos determinados por  $\mathcal{L}$  e seu bissetor  $\mathcal{B}$ , enquanto no outro cone aberto não haveria nenhum ponto, conforme a Figura 2.3.

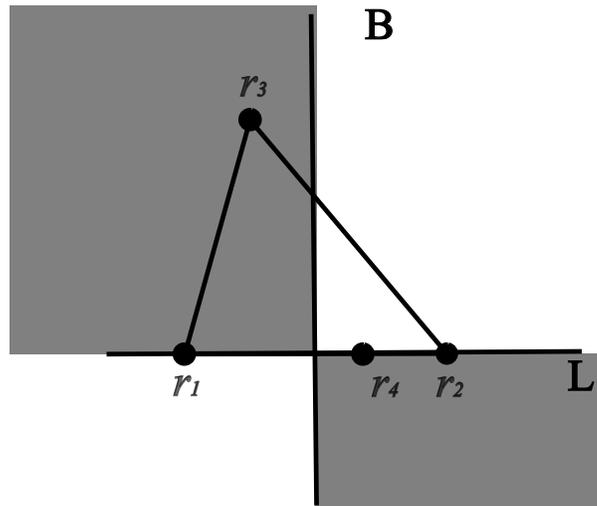


Figura 2.3: Lema 2.1.2.

Suponhamos então que  $r_4$  se encontra no interior do triângulo  $\mathcal{T}$  e consideremos 3 casos:  $r_5$  pertence ao exterior de  $\mathcal{T}$ ,  $r_5$  pertence a um dos lados de  $\mathcal{T}$  e  $r_5$  pertence ao interior de  $\mathcal{T}$ .

Caso 1:  $r_5$  pertence ao exterior de  $\mathcal{T}$ . Este caso pode ser dividido em dois subcasos, uma vez que ou  $r_5$  pertence a uma linha entre dois vértices de  $\mathcal{T}$  ou não. No primeiro subcaso, digamos, sem perda de generalidade, que  $r_5$  se encontra na reta entre os vértices  $r_1$  e  $r_2$ , conforme a Figura 2.4.

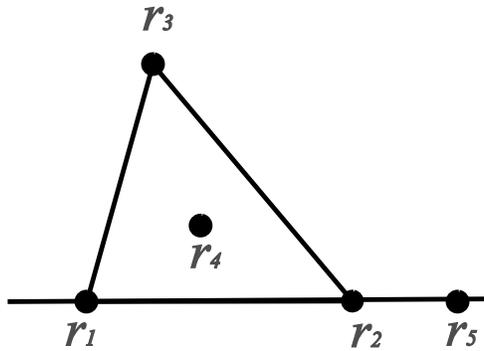


Figura 2.4: Caso 1.1, com  $r_4$  no interior de  $\mathcal{T}$ .

Então,  $\Delta_{135} \neq 0$ ,  $\Delta_{145} \neq 0$  e  $\Delta_{235} \neq 0$ . Logo, pelas equações (2.12), (2.13) e (2.14),  $r_{15} = r_{35} = r_{45} = r_{25}$ , ou seja,  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$  teriam que se encontrar num círculo de raio  $r_{15}$  e centro em  $r_5$ , o que é uma contradição, pois supomos que  $r_4$  era interior.

No segundo subcaso,  $r_5$  não se encontra na reta entre dois vértices de  $\mathcal{T}$ . Sem perda de generalidade, considere que  $r_5$  se encontra no semiplano definido pela reta que liga os vértices  $r_2$  e  $r_3$ , conforme a Figura 2.5.

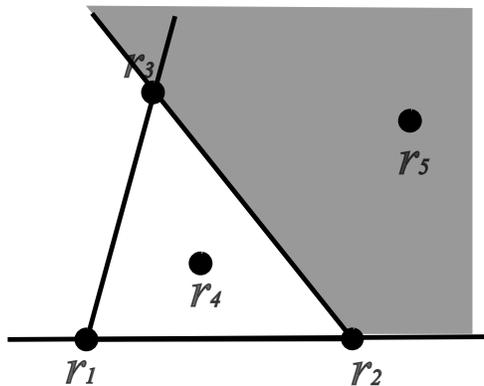


Figura 2.5: Caso 1.2, com  $r_4$  no interior de  $\mathcal{T}$ .

Neste caso,  $\Delta_{125} \neq 0$  e  $\Delta_{135} \neq 0$ . Então, pelas equações (2.11) e (2.12),  $r_{25} = r_{15} = r_{13} \neq 0$ . Por fim, se  $\Delta_{245} \neq 0$ , então, pela equação (2.15),  $r_{45} = r_{25}$ . Caso contrário, se  $\Delta_{245} = 0$ , então  $r_2, r_4$  e  $r_5$  são colineares, logo  $r_3, r_4$  e  $r_5$  não são colineares,  $\Delta_{345} \neq 0$  e, pela equação (2.16),  $r_{35} = r_{45}$ .

Em ambos os casos,  $r_{15} = r_{25} = r_{35} = r_{45} \neq 0$ , ou seja,  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$  se encontram num círculo centrado em  $r_5$  com raio  $r_{15}$ , chegando-se a mesma contradição do subcaso

anterior.

Caso 2:  $r_5$  pertence a um lado de  $\mathcal{T}$ . Sem perda de generalidade, considere que  $r_5$  pertence ao lado  $\overline{r_1 r_2}$ . Conforme a Figura 2.6.

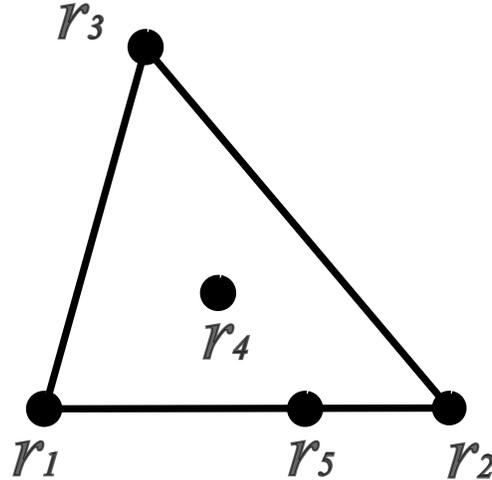


Figura 2.6: Caso 2, com  $r_4$  no interior de  $\mathcal{T}$ .

Então  $\Delta_{135} \neq 0$ ,  $\Delta_{235} \neq 0$  e  $\Delta_{245} \neq 0$ , logo, pelas equações (2.12), (2.14) e (2.15),  $r_{15} = r_{35} = r_{25} = r_{45}$ , ou seja  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$  encontram-se num círculo centrado em  $r_5$  com raio  $r_{15}$ , chegando a uma contradição.

Caso 3:  $r_5$  pertence ao interior de  $\mathcal{T}$ , conforme a Figura 2.7.

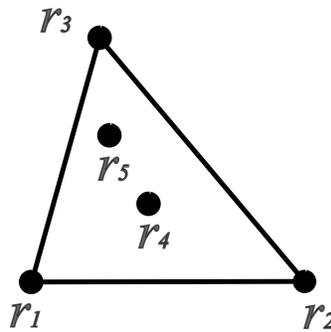


Figura 2.7: Caso 3, com  $r_4$  no interior de  $\mathcal{T}$ .

Se  $r_5$  pertence ao interior de  $\mathcal{T}$ , então  $\Delta_{125} \neq 0$  e  $\Delta_{135} \neq 0$ , logo, por (2.11) e (2.12),  $r_{25} = r_{15} = r_{35}$ . Se  $\Delta_{145} \neq 0$ , então, por (2.13),  $r_{45} = r_{15}$ . Senão, se  $\Delta_{145} = 0$ , então  $r_1, r_4$  e  $r_5$  são colineares, mas  $r_2, r_4$  e  $r_5$  serão não colineares, ou seja,  $\Delta_{245} \neq 0$  e, por (2.15),

$r_{25} = r_{45}$ . Em ambos os casos  $r_{15} = r_{25} = r_{35} = r_{45} \neq 0$ , chegando à mesma contradição dos demais casos.  $\square$

Com este lema temos uma disposição preliminar dos quatro primeiros corpos, formando um quadrilátero convexo, e podemos passar à análise da posição do quinto corpo. Nos próximos 2 lemas mostraremos que este quinto corpo não poderá se encontrar nem no exterior do quadrilátero  $\mathcal{Q}$  e nem em algum de seus lados, restando apenas o interior do quadrilátero convexo  $\mathcal{Q}$ .

**Lema 2.2.4.** *Em uma configuração central  $(5, 1)$ -empilhada, o quinto corpo (que será removido) não pertence ao exterior do quadrilátero convexo  $\mathcal{Q}$ , formado pelos outros quatro corpos.*

*Demonstração.* Suponha que  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$  sejam as posições dos vértices, ordenados no sentido anti-horário, de um quadrilátero convexo  $\mathcal{Q}$ . Considere dois casos:  $r_5$  pertence ao exterior de  $\mathcal{Q}$  e está situado em uma das retas determinadas por um lado de  $\mathcal{Q}$ ;  $r_5$  pertence ao exterior de  $\mathcal{Q}$ , mas não se encontra sobre nenhuma das retas determinadas pelos lados de  $\mathcal{Q}$ .

Caso 1 -  $r_5$  pertence ao exterior de  $\mathcal{Q}$  e está situado em uma reta determinada por um dos lados de  $\mathcal{Q}$ . Sem perda de generalidade, se  $r_5$  se encontra sobre a reta determinada pelo lado  $\overline{r_1 r_2}$ , conforme a Figura 2.8.

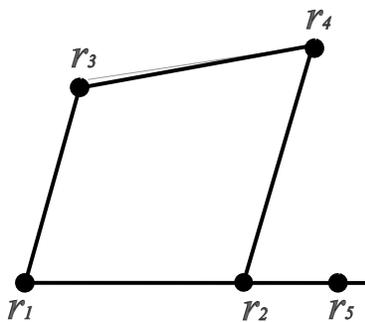


Figura 2.8: Caso 1  $r_5$  no exterior de  $\mathcal{Q}$ .

Neste caso  $\Delta_{135} \neq 0$  e  $\Delta_{235} \neq 0$ , o que implica, por (2.12) e (2.14), que  $r_{15} = r_{35} = r_{25}$ , o que é uma contradição, pois como  $r_1, r_2$  e  $r_5$  são colineares e  $r_5$  não se encontra entre  $r_1$  e  $r_2$ , deveríamos ter  $r_{15} \neq r_{25}$ .

Caso 2 -  $r_5$  pertence ao exterior de  $\mathcal{Q}$ , mas não se encontra sobre nenhuma das retas determinadas pelos lados de  $\mathcal{Q}$ . Neste caso  $\Delta_{125} \neq 0, \Delta_{145} \neq 0$  e  $\Delta_{235} \neq 0$ , logo, por (2.11), (2.13) e (2.14), temos que  $r_{45} = r_{15} = r_{25} = r_{35}$ , ou seja,  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$  se encontram num círculo centrado em  $r_5$ , o que é uma contradição em relação ao Teorema do Bissetor Perpendicular 1.3.2, conforme pode ser observado na Figura 2.9.

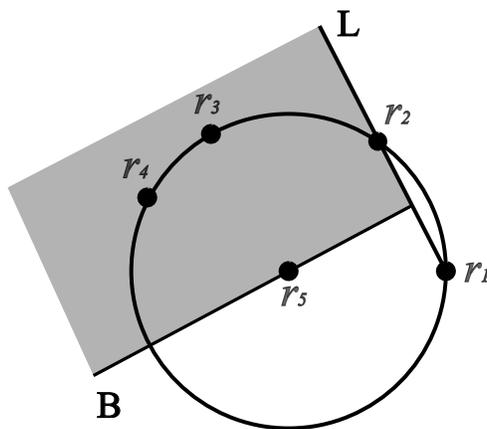


Figura 2.9: Caso 2 Lema 2.1.3.

□

**Lema 2.2.5.** *Em uma configuração central  $(5, 1)$ -empilhada, o quinto corpo (que será removido) não pertence a nenhum dos lados do quadrilátero convexo  $\mathcal{Q}$ , formado pelos outros quatro corpos.*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, suponha que  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$  estão ordenados em sentido anti-horário e que  $r_5$  esteja no segmento  $\overline{r_1 r_2}$ . Então  $\Delta_{145} \neq 0$ , logo, por (2.13),  $r_{15} = r_{45}$  e traçando a reta  $\mathcal{L}$  entre  $r_1$  e  $r_5$ , o bissetor perpendicular  $\mathcal{B}$  passará exatamente pelo ponto  $r_5$ , pois, como  $r_{15} = r_{45}$ ,  $r_1, r_4$  e  $r_5$  formam um triângulo isósceles. Assim, enquanto um dos cones abertos determinados pelas retas  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{B}$  contem os pontos  $r_2$  e  $r_3$ , o cone oposto não possui nenhum elemento, conforme a Figura 2.10, o que contraria o Teorema do Bissetor Perpendicular 1.3.2.

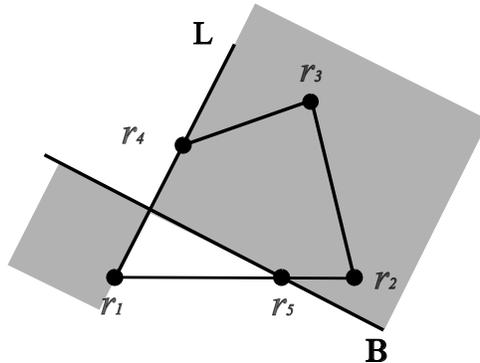


Figura 2.10: Lema  $r_5$  não pertence a nenhum lado de  $\mathcal{Q}$ .

□

Com estes resultados, a única opção disponível é que as massas estão situadas nos vértices do quadrilátero convexo  $\mathcal{Q}$  e a quinta massa se encontra no interior do quadrilátero. Resta mostrar que as quatro massas que formam os vértices do quadrilátero  $\mathcal{Q}$  são iguais e formam um quadrado e que a quinta massa deverá se encontrar no centro do quadrado e poderá ter massa arbitrária, o que será demonstrado no último lema desta seção:

**Lema 2.2.6.** *Em uma configuração central (5,1)-empilhada, se o quinto corpo (o corpo a ser removido) se encontrar no interior de um quadrilátero convexo  $\mathcal{Q}$ , formado pelos outros quatro corpos, então a configuração central destes cinco corpos será formada por quatro corpos de massas iguais nos vértices de um quadrado e o quinto corpo, com massa arbitrária, localizado na interseção das diagonais.*

*Demonstração.* Considerando um quadrilátero convexo  $\mathcal{Q}$ , enumere seus lados no sentido anti-horário e considere o quinto corpo no interior do quadrilátero. Então  $\Delta_{125}, \Delta_{235}, \Delta_{345}$  e  $\Delta_{415}$  são todos diferentes de 0. Assim, pelas equações (2.11), (2.14) e (2.16),  $r_{15} = r_{25} = r_{35} = r_{45}$ , ou seja,  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$  estão posicionados num círculo de raio  $d > 0$ , centrado em  $r_5$ , conforme a Figura 2.11.

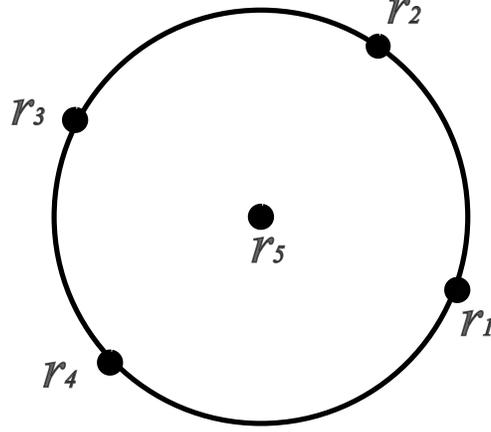


Figura 2.11:  $r_1$  a  $r_4$  posicionados num círculo centrado em  $r_5$ .

É suficiente demonstrar que  $r_5$  coincide com o centro de massa  $c = \frac{(m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + m_4 r_4)}{m}$ , onde  $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ . Pela equação (1.3), convencionando o centro de massa da configuração central  $\bar{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$  na origem, temos para o quinto corpo:

$$\bar{\lambda} r_5 = - \sum_{j=1}^4 m_j \frac{r_5 - r_j}{r_{j5}^3} \Rightarrow d^3 \bar{\lambda} r_5 = \sum_{j=1}^4 m_j r_j - \sum_{j=1}^4 m_j r_5 = m c - m r_5. \quad (2.17)$$

Como convencionamos o centro de massa da configuração central  $r = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$  na origem, temos que  $m c + m_5 r_5 = 0$ , ou seja,

$$m c = -m_5 r_5. \quad (2.18)$$

Substituindo a equação (2.18) na equação (2.17), temos:

$$d^3 \bar{\lambda} r_5 = -m_5 r_5 - m r_5 \Rightarrow (d^3 \bar{\lambda} + \bar{m}) r_5 = 0, \quad (2.19)$$

onde  $\bar{m} = m_1 + \dots + m_5$ .

Vamos supor que  $r_5 \neq (0, 0)$ . A partir desta parte consideraremos o corrigendum [6]. A equação (2.19) é equivalente a

$$\frac{\bar{\lambda}}{\bar{m}} + R, \quad (2.20)$$

onde  $R = d^{-3}$ .

Pela equação (1.16), a equação (2.19) pode ser reescrita como:

$$R - \frac{\bar{U}}{\bar{mI}} = 0 \Rightarrow R\bar{mI} - \bar{U} = 0 \Rightarrow R \sum_{1 \leq i < j \leq 5} m_i m_j r_{ij}^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = 0,$$

separando  $m_5$ , temos

$$\begin{aligned} m_5 \left( R \sum_{i=1}^4 m_i d^2 - \sum_{i=1}^4 \frac{m_i}{d} \right) + R \sum_{1 \leq i < j \leq 4} m_i m_j d^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{m_i m_j}{d} &= 0 \Rightarrow \\ m_5 \left( \sum_{i=1}^4 \frac{m_i}{d} - \sum_{i=1}^4 \frac{m_i}{d} \right) + RmI - U &= 0 \Rightarrow R - \frac{U}{mI} = 0 \Rightarrow \\ R - \frac{\lambda}{m} &= 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Como os quatro corpos estão numa configuração central convexa com as posições dispostas no sentido anti-horário, conforme pode ser observado em [13], as seguintes inequações devem valer:

$$R_{13}, R_{21} < -\frac{\lambda}{m} < R_{12}, R_{23}, R_{34}, R_{41}. \tag{2.22}$$

Por outro lado, conforme [13], usando o Teorema do Bissetor Perpendicular, vemos que em uma configuração central co-circular o centro do círculo pertence ao interior do fecho convexo do quadrilátero.

Logo, pela geometria de um quadrilátero inscrito no círculo de raio  $d$ , com centro do círculo dentro do fecho convexo do quadrilátero, ao menos um lado é maior do que  $\sqrt{2}d$ ,

Então a equação (2.21) nunca é satisfeita, pois os quatro corpos co-circulares estão em uma configuração central convexa. Assim, para satisfazer a equação (2.19) devemos ter  $r_5 = (0, 0) = c$ , o que encerra a demonstração.  $\square$

## 2.3 Configurações Centrais $(n, 1)$ -Empilhadas com as equações de Laura-Andoyer

Nesta última seção analisaremos, com as equações de Laura-Andoyer (1.17), as configurações centrais  $(n, 1)$ - empilhadas. Ou seja, ao contrário das seções anteriores nas quais foram estudados casos específicos, nesta seção veremos quais resultados já foram obtidos para o caso geral, onde temos uma C.C. de  $n$  corpos e, após retirarmos 1 corpo, teremos uma C.C. de  $n - 1$  corpos. O assunto foi tratado em [5].

O principal resultado desta seção é o seguinte teorema:

**Teorema 2.3.1.** *Para cada  $n$ , com  $n \geq 4$ , toda Configuração Central  $(n, 1)$ -empilhada é formada por  $n - 1$  massas localizadas num círculo, com uma massa arbitrária  $m_n$  em seu centro.*

A demonstração será dividida em dois lemas, sendo que o primeiro destes garante que a massa  $m_n$ , do corpo a ser removido, é arbitrária:

**Lema 2.3.2.** *Para termos uma configuração central  $(n, 1)$ -empilhada, as massas e posições dos demais corpos devem ser independentes da massa do corpo a ser removido.*

*Demonstração.* Para o caso geral, com  $n$  corpos, as  $n(n-1)/2$  equações de Laura-Andoyer são as seguintes:

$$f_{ij} = \sum_{k \neq i, j} m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} = 0, 1 \leq i < j \leq n. \quad (2.23)$$

Já o caso com  $n - 1$  corpos temos as  $(n - 1)(n - 2)/2$  seguintes equações:

$$g_{ij} = \sum_{k \neq i, j} m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} = 0, 1 \leq i < j \leq n - 1. \quad (2.24)$$

Logo, substituindo as  $(n - 1)(n - 2)/2$  equações  $g_{i,j}$ ,  $1 \leq i < j \leq n - 1$ , nas correspondentes  $f_{i,j}$ ,  $1 \leq i < j \leq n - 1$ , temos:

$$f_{ij} = g_{ij} + m_n (R_{in} - R_{jn}) \Delta_{ijn} = 0, 1 \leq i < j \leq n. \quad (2.25)$$

Como por (2.24)  $g_{i,j} = 0$ , para  $1 \leq i < j \leq n - 1$ :

$$f_{ij} = +m_n(R_{in} - R_{jn})\Delta_{ijn} = 0, 1 \leq i < j \leq n. \quad (2.26)$$

Como as  $n - 1$  restantes equações  $f_{1n}$  independem do fator  $m_n$  e  $m_n \neq 0$ , temos:

$$(R_{in} - R_{jn})\Delta_{ijn} = 0 \quad (2.27)$$

Então as massas e posições dos demais corpos independem da massa do corpo a ser removido.  $\square$

Para finalizarmos a demonstração do Teorema só resta mostrar que as outras  $n - 1$  massas estão localizadas em um círculo centrado na massa  $m_n$ , o que é comprovado no lema seguinte:

**Lema 2.3.3.** *Para termos uma configuração central  $(n, 1)$ -empilhada é necessário que os  $n - 1$  corpos restantes estejam em uma configuração central co-circular.*

*Demonstração.* Por suposição, temos que as configurações não são colineares, logo, existem  $1 \leq i < j \leq n$  tais que  $i, j$  e  $n$  não são colineares, logo  $\Delta_{i,j,n} \neq 0$ . Por (2.27), temos que  $(R_{in} - R_{jn}) = 0$ , ou seja,  $r_{in} = r_{jn} = d$ , onde  $d$  é o raio de um círculo centrado em  $r_n$ .

Sem perda de generalidade, suponha que  $i = 1$  e  $j = 2$  e tome  $2 < k < n$ . Como  $r_1, r_2$  e  $r_n$  não são colineares, ou  $r_1, r_k$  e  $r_n$  não são colineares ou  $r_2, r_k$  e  $r_n$  não o são, conforme pode ser observado na Figura 2.12.

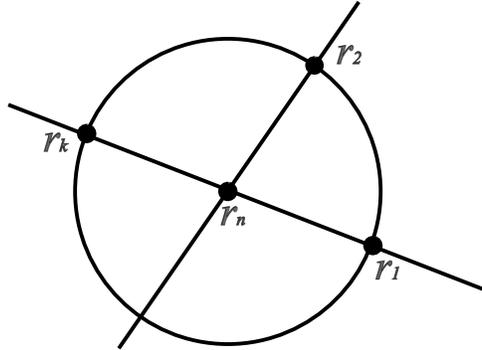


Figura 2.12: Ou  $r_1, r_k$  e  $r_n$  não são colineares ou  $r_2, r_k$  e  $r_n$  não o são.

Em outras palavras ou  $\Delta_{1kn} \neq 0$ , o que nos dá, por (2.27), que  $R_{1n} - R_{kn} = 0$  e  $r_{kn} = r_{1n} = d$ , ou  $\Delta_{2kn} \neq 0$ , por (2.27)  $R_{2n} - R_{kn} = 0$  e  $r_{kn} = r_{2n} = d$ . Em todo caso,  $r_{kn} = d$ , mas como  $k$  é arbitrário, para todo  $2 < k < n$ , temos que  $r_{ln} = d$  para todo  $1 \leq l < n$ , ou seja, todos os pontos estão num círculo de raio  $d$  centrado em  $r_n$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

Um resultado direto do Lema 2.3.3 é o seguinte:

**Corolário 2.3.4.** *Em uma Configuração Central não colinear  $(n, 1)$ -empilhada, os  $n - 1$  corpos restantes após a retirada do corpo de massa  $m_n$  formam um polígono convexo.*

# Capítulo 3

## Classificação das Configurações Centrais Planares, não Colineares, $(n + 1, 1)$ -Empilhadas

Neste capítulo estudaremos as Configurações Centrais empilhadas com enfoque nas Funções Potencial e de Momento de Inércia, utilizando como base o artigo [23] e não serão utilizadas as equações de Laura-Andoyer. Assim como no artigo [23], será utilizada a notação  $(n+1, 1)$  na qual a C.C. empilhada é uma C.C. de  $n$  corpos que pode ser estendida a uma C.C. com  $n + 1$  corpos. Assim, deve ficar claro que enquanto no capítulo anterior, numa C.C.  $(n, 1)$ -empilhada começávamos a análise com  $n$  corpos e encontrávamos uma C.C. com  $n - 1$  corpos, neste capítulo, uma C.C.  $(n + 1, 1)$ -empilhada é uma C.C. com  $n$  corpos na qual podemos incluir 1 corpo e ainda ter uma C.C. com  $n + 1$  corpos.

Na seção 1 será realizada uma simplificação das equações apresentadas na seção (1.1), para obter os sistemas (3.4) e (3.8), que serão utilizados ao longo das seções seguintes.

Na seção 2 realizaremos a classificação das Configurações Centrais planares, não-colineares  $(n + 1, 1)$ . Para isto, utilizaremos dois importantes Teoremas, 3.2.1 e 3.2.2, que limitarão consideravelmente as opções. Teremos que independente da massa adicionada à C.C. de  $n$  corpos estar ou não no centro de massa, estas deverão estar centradas em um círculo, ou seja, serem Configurações Centrais co-Circulares (C.C.C.).

Com estes resultados, através do Teorema 3.2.4, conseguiremos demonstrar que, no caso em estudo (planar, não-colinear), a única C.C. na qual todos os subconjuntos formam uma C.C. é formada por um triângulo equilátero de Lagrange, que já estudamos no capítulo anterior, como o único caso de configuração central planar, não colinear, com 3 corpos e, após a definição de configurações centrais co-circulares, poderemos classificar todas as configurações centrais co-circulares na Proposição 3.2.5, que será o objetivo principal da seção.

Na seção 3 sairemos um pouco do estudo das configurações centrais empilhadas para focar nos escalares  $\rho$  e  $\rho_0$ , que serão definidos na seção 2, respectivamente, como o raio da C.C.C. e como a raiz cúbica do quociente da divisão entre a massa total da C.C.  $m$ , e o multiplicador  $\lambda$ .

Verificaremos no Teorema 3.3.1 uma importante restrição para as C.C.C. com  $n$  corpos,  $n \geq 4$ , mostrando que para qualquer destas configurações, todos os lados exteriores serão menores do que  $\rho_0$  e, em cada vértice, haverá ao menos uma diagonal incidente maior do que  $\rho_0$ . Como consequência deste Teorema, poderemos demonstrar o principal resultado da seção, a Proposição 3.3.3, segundo a qual para todas as C.C.C. com quatro, cinco ou seis corpos, o raio do círculo contendo os corpos será menor do que  $\rho_0$ .

Por fim, na seção 4, voltaremos ao estudo das C.C. empilhadas e, utilizando os resultados das seções anteriores, poderemos demonstrar a Proposição 3.4.1 e verificar que, para os casos onde  $3 \leq n \leq 6$ , somente será possível o caso 1 dos dois tipos de C.C. planar, não-colinear,  $(n + 1, 1)$ -empilhada, obtidos através da classificação das C.C.C. na Proposição 3.2.5, no qual o centro de massa da C.C.C. deverá estar no centro geométrico da configuração, ou seja, deverá ser uma Configuração Central co-Circular Centrada (C.C.C.C.) e a massa  $m_0$  deverá ser incluída no centro de massa  $c$ .

### 3.1 Simplificação das equações das Configurações Centrais Empilhadas

Primeiramente iremos simplificar a equação das configurações centrais empilhadas (1.16).

Para isto, notaremos um fato simples, mas importante: os três pontos  $c, \bar{c}$  e  $r_0$  são colineares, onde, lembrando,  $c$  é o centro de massa do sistema  $r$ ,  $\bar{c}$  é o centro de massas do sistema  $\bar{r}$  e  $r_0$  é a posição da massa  $m_0$ , que faz parte do sistema  $\bar{r}$ , mas não do sistema  $r$ .

De fato  $\bar{c}$  pode ser visto como o centro de massa de dois pontos materiais  $c$  e  $r_0$ , com massas  $m$  e  $m_0$ . Então  $\bar{c} = c$  se, e somente se,  $c = r_0$ . A colinearidade dos três pontos também pode ser observada na seguinte equação:

$$\begin{aligned} \bar{m}(\bar{c} - r_0) &= (m + m_0) \left( \frac{\sum_{i=0}^n m_i r_i}{m + m_0} - r_0 \right) = \sum_{i=0}^n q_i m_i - r_0 m + r_0 m_0 = \\ &= \sum_{i=1}^n q_i m_i - r_0 m = m \left( \frac{\sum_{i=1}^n r_1 m_1}{\sum_{i=1}^n m_i} - r_0 \right) = m(c - r_0), \end{aligned} \quad (3.1)$$

ou seja, os segmentos  $\bar{c} - r_0$  e  $c - r_0$  são proporcionais a  $\frac{m}{m}$  e, como

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{m + m_0}(r_0 - c) + c &= \frac{m_0 r_0 - m_0 c + m c + m_0 c}{m + m_0} = \frac{m_0 r_0 + m c}{m + m_0} = \\ &= \frac{m_0 r_0 + m \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i r_i}{m} \right)}{m + m_0} = \frac{\sum_{i=0}^n m_i r_i}{m + m_0} = \bar{c}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

para um ponto arbitrário  $A$ , temos:

$$A - \bar{c} = (A - c) - \frac{m_0}{m + m_0}(r_0 - c) = A - c - (\bar{c} - c). \quad (3.3)$$

Assim, o vetor posição entre  $A$  e o centro de massa  $\bar{c}$  é igual à diferença entre o vetor posição entre  $A$  e o centro de massa  $c$  menos o vetor entre  $\bar{c}$  e  $c$ , que é gerado pelo escalar da divisão entre  $m_0$  e a massa total  $\bar{m} = m + m_0$  multiplicado vetor entre a nova posição  $r_0$  e o centro de massa  $c$ , ou seja  $(r_0 - c)$ .

Verificada a colinearidade, assumamos que  $r = (r_0, r_1, \dots, r_n)$  é uma configuração central empilhada  $(n+1, 1)$ . Considerando os gradientes  $\nabla U, \nabla I, \nabla \bar{U}$  e  $\nabla \bar{I}$ , temos que a equação (1.16) pode ser escrita como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \neq i, j=1}^n \frac{m_i m_j (r_i - r_j)}{|r_i - r_j|^3} = -\lambda m_i (r_i - c), i = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i (r_i - r_0)}{|r_i - r_0|^3} = -\bar{\lambda} m_0 (r_0 - \bar{c}) \\ \sum_{j \neq i, j=1}^n \frac{m_i m_j (r_i - r_j)}{|r_i - r_j|^3} + \frac{m_i m_0 (r_0 - r_i)}{|r_0 - r_i|^3} = -\bar{\lambda} m_i (r_i - \bar{c}), i = 1, \dots, n; \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Utilizando a primeira parte do sistema (3.4), a terceira parte do mesmo pode ser reescrita da seguinte forma, após a troca de sinais em  $\frac{m_i m_0 (r_0 - r_i)}{|r_0 - r_i|^3}$ :

$$\lambda m_i (r_i - c) + \frac{m_i m_0 (r_i - r_0)}{|r_i - r_0|^3} = \bar{\lambda} m_i (r_i - \bar{c}), i = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Somando a equação (3.5) para  $i = 1$  até  $n$ , temos que a somatória de (3.5) se torna a segunda parte de (3.4):

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n m_i (r_i - c) + \frac{m_i m_0 (r_i - r_0)}{|r_i - r_0|^3} = \sum_{i=1}^n \bar{\lambda} m_i (r_i - \bar{c}) = \\ & \left( \sum_{i=1}^n m_i r_i \right) - mc + \left( \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i (r_i - r_0)}{|r_i - r_0|^3} \right) = \bar{\lambda} \left( \sum_{i=1}^n m_i r_i - m_i \bar{c} + m_0 r_0 - m_0 r_0 + m_0 \bar{c} - m_0 \bar{c} \right) = \\ & mc - mc + \left( \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i (r_i - r_0)}{|r_i - r_0|^3} \right) = \bar{\lambda} (\bar{m} c - \bar{m} \bar{c} - m_0 r_0 + m_0 \bar{c}) = \\ & \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i (r_i - r_0)}{|r_i - r_0|^3} = \bar{\lambda} (\bar{m} - m_0) (c - \bar{c}) = \bar{\lambda} (\bar{m} - m_0) \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i r_i}{\bar{m} - m_0} - \frac{\sum_{i=1}^n m_i r_i}{\bar{m}} - \frac{m_0 r_0}{\bar{m}} \right) = \\ & \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i (r_i - r_0)}{|r_i - r_0|^3} = \bar{\lambda} \left( \sum_{i=1}^n m_i r_i - \sum_{i=1}^n m_i r_i - m_0 r_0 + m_0 \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i r_i + m_0 r_0}{\bar{m}} \right) \right) = \\ & \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i (r_i - r_0)}{|r_i - r_0|^3} = -\bar{\lambda} m_0 (r_0 - \bar{c}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Além disso, por (3.3), temos que as  $n$  equações (3.5) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
& \lambda m_i(r_i - c) + \frac{m_i m_0(r_i - r_0)}{|r_i - r_0|^3} = \bar{\lambda} m_i(r_i - c - \frac{m_0}{\bar{m}}(r_0 - c)) \\
& m_i \left( \lambda(r_i - c) + \frac{m_0(r_i - c + c - r_0)}{|r_i - r_0|^3} \right) = m_i \left( \bar{\lambda} \left( r_i - c - \frac{m_0}{\bar{m}}(r_0 - c) \right) \right) \\
& \left( \lambda - \bar{\lambda} + \frac{m_0}{|r_i - r_0|^3} \right) (r_i - c) = \left( \frac{m_0}{|r_i - r_0|^3} - \frac{\bar{\lambda} m_0}{\bar{m}} \right) (r_0 - c), i = 1, \dots, n. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Assim, substituindo por comodidade  $|r_i - r_0|$  por  $r_{i0}$ , o sistema (3.4) é equivalente ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} \sum_{j \neq i, j=1}^n \frac{m_i m_j (r_i - r_j)}{|r_i - r_j|^3} = -\lambda m_i (r_i - c), i = 1, \dots, n; \\ \left( \lambda - \bar{\lambda} + \frac{m_0}{r_{i0}^3} \right) (r_i - c) = \left( \frac{m_0}{r_{i0}^3} - \frac{\bar{\lambda} m_0}{\bar{m}} \right) (r_0 - c), i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (3.8)$$

Onde  $\lambda = U/I$  e  $\bar{\lambda} = \bar{U}/\bar{I}$ .

## 3.2 Classificação das Configurações Centrais Planares, Não-Colineares $(n + 1, 1)$ -Empilhadas

Com os resultados preliminares da Introdução e da seção anterior conseguimos demonstrar alguns teoremas sobre configurações centrais empilhadas:

**Teorema 3.2.1.** *Seja  $r = (r_1, \dots, r_n)$  uma configuração central com centro de massa  $c$ . Considere a configuração central com  $(n + 1)$  corpos adicionando  $m_0$  na posição  $c$ , ou seja  $\bar{r} = (c, r_1, \dots, r_n)$ . Então  $\bar{r}$  é uma configuração central se, e somente se,  $|r_1 - c| = |r_2 - c| = \dots = |r_n - c|$ .*

*Demonstração.* Inicialmente notamos que como  $\bar{c} = c = c_0$ , temos  $r_i \neq c, i = 1, \dots, n$ , pois dois elementos não podem estar no mesmo lugar, logo a segunda parte de (3.8) nos dá que  $\lambda - \bar{\lambda} + \frac{m_0}{r_{i0}^3} = 0, i = 1, \dots, n$ , ou seja,  $r_{i0}^3 = \frac{m_0}{\lambda - \bar{\lambda}}, i = 1, \dots, n$ , ou seja,  $r_{i0} = r_{j0}, 1 \leq i, j \leq n$ , o que demonstra que se  $\bar{r}$  é uma configuração, então  $|r_1 - c| = |r_2 - c| = \dots = |r_n - c|$ .

Para a volta, a primeira equação de (3.8) é satisfeita pois ela independe do corpo inserido. Quando à segunda equação, como  $r_0 = c = \bar{c}$  e  $r_{10} = r_{20} = \dots = r_{n0}$ , temos:

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \sum_{i=0}^n m_i |r_i - \bar{c}|^2 = \sum_{i=1}^n m_i r_{i0}^2 = I = m r_{10}^2. \\ \bar{\lambda} &= \frac{U + \sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{m_0 m_i}{r_{i0}}}{\bar{I}} = \frac{U}{I} + \frac{m_0 \sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{m_i}{r_{i0}}}{m r_{10}^2} = \lambda + \frac{m_0}{r_{10}^3}\end{aligned}\quad (3.9)$$

Assim, temos que  $\frac{m_0}{r_{10}^3} = \bar{\lambda} - \lambda, i = 1, \dots, n$ , ou seja, a segunda equação de (3.8) também é satisfeita.  $\square$

**Teorema 3.2.2.** *Seja  $r = (r_1, \dots, r_n)$  uma configuração central com centro de massa  $c$ , massa total  $m$  e multiplicador  $\lambda$ . Considere uma configuração com  $(n + 1)$  corpos adicionando  $m_0$  em alguma posição que não seja o centro de massa, ou seja  $\bar{r} = (r_0, r_1, \dots, r_n), r_0 \neq c$ . Então  $\bar{r}$  é uma configuração central  $(n + 1, 1)$ -empilhada se, e somente se,  $\frac{1}{r_{i0}^3} = \frac{\lambda}{m}, i = 1, \dots, n$ .*

*Demonstração.* Para demonstrarmos a condição necessária, suponha que  $\bar{r}$  é uma configuração central. Como  $\bar{r}$  não é colinear, existe algum  $k, 1 \leq k \leq n$ , tal que  $r_k$  não pertence à reta  $\overline{r_0 c}$ .

Note que a  $k$ -ésima equação da segunda parte do sistema (3.8) vale se, e somente se,

$$\left( \lambda - \bar{\lambda} + \frac{m_0}{r_{k0}^3} \right) (r_k - c) = \left( \frac{m_0}{r_{k0}^3} - \frac{\bar{\lambda} m_0}{\bar{m}} \right) (r_0 - c).$$

Como  $(r_k - c)$  e  $(r_0 - c)$  não estão na mesma reta, a equação só será verdadeira se:

$$\lambda - \bar{\lambda} + \frac{m_0}{r_{k0}^3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_{k0}^3} = \frac{\bar{\lambda} - \lambda}{m_0} \text{ e } \frac{m_0}{r_{k0}^3} - \frac{\bar{\lambda} m_0}{\bar{m}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_{k0}^3} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{m}},$$

ou seja, temos:

$$\frac{\bar{\lambda} - \lambda}{m_0} = \frac{1}{r_{k0}^3} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{m}}. \quad (3.10)$$

Suponha agora que para algum  $j, 1 \leq j \leq n, r_j$  esteja na reta  $\overline{r_0 c}$  enquanto  $r_k$  não pertence a esta reta. Então, pela  $j$ -ésima equação da segunda parte do sistema (3.8), temos:

$$\left(\lambda - \bar{\lambda} + \frac{m_0}{r_{j0}^3}\right)(r_j - c) = \left(\frac{m_0}{r_{j0}^3} - \frac{\bar{\lambda}m_0}{\bar{m}}\right)(r_0 - c).$$

Mas como  $(r_j - c)$  e  $(r_0 - c)$  são colineares, existe um  $\alpha$  pertencente aos reais tal que  $\lambda(r_j - c) = (r_0 - c)$  e temos:

$$\begin{aligned} \alpha \left(\lambda - \bar{\lambda} + \frac{m_0}{r_{j0}^3}\right) &= \left(\frac{m_0}{r_{j0}^3} - \frac{\bar{\lambda}m_0}{\bar{m}}\right) \\ \frac{m_0}{r_{j0}^3}(\alpha - 1) &= -\frac{\bar{\lambda}m_0}{\bar{m}} + \alpha(\bar{\lambda} - \lambda) \\ \frac{1}{r_{j0}^3} &= \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{\bar{\lambda} - \lambda}{m_0} - \frac{1}{\alpha - 1} \frac{\bar{\lambda}}{\bar{m}} = \\ \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{1}{r_{k0}^3} - \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{r_{k0}^3} &= \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha - 1}\right) \frac{1}{r_{k0}^3} = \frac{1}{r_{k0}^3}. \end{aligned}$$

Para completarmos a demonstração da condição necessária, usando (3.10), temos:

$$\frac{\bar{\lambda}}{\bar{m}} = \frac{\bar{\lambda} - \lambda}{m_0} = \frac{\bar{\lambda} - \lambda}{\bar{m} - m} \Rightarrow \bar{\lambda}(\bar{m} - m) = (\bar{\lambda} - \lambda)\bar{m} \Rightarrow \frac{\bar{\lambda}}{\bar{m}} = \frac{\lambda}{m}$$

Logo temos que  $\frac{1}{r_{i0}^3} = \frac{\lambda}{m}, i = 1 \dots n$ .

Para a demonstração da condição necessária, temos que, como  $r$  é uma configuração central, a primeira parte do sistema (3.8) é claramente válida. Para a segunda parte do sistema, se  $\frac{1}{r_{i0}^3} = \frac{\lambda}{m}, i = 1, \dots, n$ , então, por (1.13) e (1.14):

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\lambda}}{\bar{m}} &= \frac{\bar{U}}{\bar{m} \bar{I}} = \frac{U + \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i}{r_{i0}}}{\sum_{0 \leq i < j \leq n} m_i m_j r_{ij}^2} = \frac{\lambda I + m_0 \frac{m r_{i0}^2}{r_{i0}^3}}{(\sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j r_{ij}^2) + \sum_{i=1}^n m_0 m_i r_{i0}^2} = \\ \frac{\lambda I + m_0 m r_{i0}^2 \frac{\lambda}{m}}{m I + m m_0 r_{i0}^2} &= \frac{\lambda(I + m_0 r_{i0}^2)}{m(I + m_0 r_{i0}^2)} = \frac{\lambda}{m}. \end{aligned}$$

A equação  $\frac{\bar{\lambda}}{\bar{m}} = \frac{\lambda}{m}$  implica que:

$$\frac{\lambda}{m} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{m}} \Rightarrow \lambda \bar{m} = \bar{\lambda} m \Rightarrow \lambda(m + m_0) = \bar{\lambda} m \Rightarrow (\bar{\lambda} - \lambda)m = \lambda m_0 \Rightarrow \frac{\bar{\lambda} - \lambda}{m_0} = \frac{\lambda}{m}.$$

Logo temos que  $\frac{1}{r_{i0}^3} = \frac{\lambda}{m} = \frac{\bar{\lambda} - \lambda}{m_0} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{m}}, i = 1, \dots, n$ .

Assim temos que:

$$\lambda - \bar{\lambda} + \frac{m_0}{r_{i0}^3} = \lambda - \bar{\lambda} + m_0 \frac{\bar{\lambda} - \lambda}{m_0} = 0 \text{ e } \frac{m_0}{r_{i0}^3} - \frac{\bar{\lambda} m_0}{\bar{m}} = m_0 \frac{\bar{\lambda}}{\bar{m}} - m_0 \frac{\bar{\lambda}}{\bar{m}} = 0.$$

Assim, a segunda parte do sistema (3.8) é válido para  $i = 1, \dots, n$ , e temos que  $\bar{r}$  é configuração central  $(n + 1, 1)$ -empilhada, finalizando a demonstração.  $\square$

Com este teorema, podemos enunciar um resultado direto.

**Corolário 3.2.3.** *Suponha que  $\bar{r}$  é uma configuração central não-colinear  $(n + 1, 1)$ -empilhada para as massas  $(m_0, m_1, \dots, m_n)$ . Então  $\bar{r}$  também será uma configuração central não colinear  $(n + 1, 1)$ -empilhada para as massas  $(m'_0, m_1, \dots, m_n)$ , onde  $m'_0$  é uma massa arbitrária.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.2.2, temos que a massa  $m_0$  independe. Ou seja, como  $\bar{r}$  é uma configuração central não-colinear  $(n+1, 1)$ -empilhada para as massas  $(m_0, m_1, \dots, m_n)$ , por 3.2.2, temos que  $\frac{1}{r_{i0}^3} = \frac{\lambda}{m}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , então, pelo mesmo Teorema 3.2.2, a configuração central  $\bar{r}$  também será uma configuração central não colinear  $(n + 1, 1)$ -empilhada para as massas  $(m'_0, m_1, \dots, m_n)$ , onde  $m'_0$  é uma massa arbitrária.  $\square$

**Teorema 3.2.4.** *Em  $\mathbb{R}^2$  há apenas um tipo de configuração central não colinear com  $n$  corpos, cujos todos os subconjuntos formam uma configuração central, a configuração central formada por um triângulo equilátero de Lagrange.*

*Demonstração.* Se  $r = (r_0, r_1, \dots, r_n)$  é uma configuração central  $(n + 1)$ -empilhada, cujos todos os subconjuntos formam configurações centrais, pelos Teoremas 3.2.1 e 3.2.2, teremos que  $r_{ij} = r_{i'j'}$  para todo  $0 \leq i, j, i', j' \leq n$ , onde  $i \neq j$  e  $i' \neq j'$ . Isto somente irá ocorrer no caso planar, não colinear, se todos os corpos dos subconjuntos formarem uma polígono regular, o que não acontece em nenhum caso com  $n \geq 4$ . O único caso planar, não-colinear, restante é o triângulo equilátero, que como mostramos em 2.1.1, é uma configuração central e cujos subconjuntos são configurações com 2 corpos, que sempre geram uma configuração central.  $\square$

Com estes resultados, para termos uma configuração central  $(n + 1, 1)$ -empilhada, independente da massa adicionada à subconfiguração  $r = (r_1, \dots, r_n)$  estar ou não no centro

de massa, deverá existir um ponto  $a$  tal que  $|r_i - a| = |r_j - a|$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Restringindo as configurações centrais a  $\mathbb{R}^2$ , a subconfiguração central  $r$  deverá ser centrada em um círculo. Essas configurações centrais são chamadas configurações centrais co-circulares.

Denotando por  $\rho$  o raio do círculo citado e por  $\rho_0$  a raiz cúbica da razão entre a massa total  $m$  e o multiplicador  $\lambda$  da sub-configuração central  $r$ , temos:

$$\rho_0 = \left(\frac{m}{\lambda}\right)^{1/3} = \left(\frac{mI}{U}\right)^{1/3} = \left(\frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j r_{ij}^2}{\sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j / r_{ij}}\right)^{1/3}.$$

O resultado a seguir é obtido diretamente dos Teoremas 3.2.1 e 3.2.2, mas devido à sua importância no capítulo o chamaremos proposição ao invés de corolário:

**Proposição 3.2.5.** *Seja  $r = (r_1, \dots, r_n)$  uma configuração central co-circular com centro de massa  $c$ , massa total  $m$  e multiplicador  $\lambda$ . Seja  $\rho$  o raio do círculo e  $\rho_0 = (\frac{m}{\lambda})^{1/3}$ . Então  $r$  pode ser extendido para uma configuração central  $(n+1, 1)$ -empilhada  $\bar{r} = (r_0, r_1, \dots, r_n)$  apenas nos seguintes casos:*

1.  $c$  é o centro geométrico de  $r$  e  $r_0 = c$ ;
2.  $\rho = \rho_0$  e  $r_0$  será colocado no centro geométrico de  $r$ .

O corolário a seguir também é um resultado direto dos resultados anteriores:

**Corolário 3.2.6.** *No caso 2 da Proposição 3.2.5, sejam  $\bar{m}$  a massa total da configuração central  $(n+1, 1)$ -empilhada  $\bar{r}$ ,  $\bar{\lambda}$  o multiplicador desta, e  $\bar{\rho}_0 = (\frac{\bar{m}}{\bar{\lambda}})^{1/3}$ . Então,  $\bar{\rho}_0$  não depende do valor de  $m_0$  e  $\bar{\rho}_0 = \rho_0$ .*

*Demonstração.* A independência do valor de  $m_0$  vem diretamente do Corolário 3.2.3 e a igualdade  $\bar{\rho}_0 = (\frac{\bar{m}}{\bar{\lambda}})^{1/3} = r_{i0} = (\frac{m}{\lambda})^{1/3} = \rho$  do Teorema 3.2.2.  $\square$

### 3.3 O Valor $\rho_0$ nas configurações Centrais Co-Circulares

De acordo com a Proposição 3.2.5 a medida do raio  $\rho$  e de  $\rho_0 = (\frac{m}{\lambda})^{1/3}$  é crucial para a classificação da configuração central  $(n+1, 1)$ -empilhada. Nós obtemos um resultado geral

para o caso co-circular, no qual, provamos que para as configurações centrais co-circulares com quatro, cinco e seis corpos temos  $\rho_0 > \rho$ .

Para isto usaremos as seguintes notações para as configurações centrais co-circulares: arestas são seguimentos de retas conectando dois diferentes vértices de um polígono. Em uma configuração central na qual os vértices são ordenados no sentido anti-horário como  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ , as arestas  $\overline{r_i r_j}$  são chamados lados exteriores se  $|i - j| = 1$  ou  $n - 1$ . Uma aresta e um vértice nesta aresta são chamados incidentes.

**Teorema 3.3.1.** *Assuma que  $n \geq 4$ . Para qualquer configuração central co-circular com  $n$  corpos, todos os lados exteriores são menores que  $\rho_0$ . Em cada vértice há ao menos uma diagonal incidente maior do que  $\rho_0$ .*

Para  $n = 2, 3$  não há diagonais. Para  $n \geq 4$  haverá ao menos  $n/2$  diagonais maiores que  $\rho_0$  no caso par, sendo ao menos uma para cada lado, descontadas as repetições, e ao menos  $(n + 1)/2$  para o caso ímpar. Para  $n = 4$  e  $n = 5$  o resultado foi provado para todas as configurações centrais planares convexas, respectivamente, por MacMillan e Bartky em [18] e Chen e Hsiao em [9]. Segue a demonstração para CCCs com  $n \geq 4$ .

*Demonstração.* Assumamos que  $r_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$  e  $0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$ , ou seja, temos uma configuração central co-circular centrada na origem com raio 1 onde  $r_1 = (1, 0)$  e os vértices estão ordenados no sentido horário. Reescrevendo a equação das configurações centrais, temos que a configuração será central se, e somente se:

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq j} m_k \left( \frac{1}{r_{kj}^3} - \frac{\lambda}{m} \right) (r_k - r_j) &= \sum_{k \neq j} m_k \left( \frac{1}{r_{kj}^3} - \frac{1}{\rho_0^3} \right) (r_k - r_j) = \\ \sum_{k \neq j} m_k S_{kj} (r_k - r_j) &= 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde  $S_{kj} = \frac{1}{r_{kj}^3} - \frac{1}{\rho_0^3}$ .

Para verificar que os dois lados exteriores incidentes com  $r_1$  são menores do que  $\rho_0$ , notemos que a sequência  $\{r_{12}, r_{13}, \dots, r_{1n}\}$  é, ou monótona, ou é primeiro crescente e depois decrescente.

Provaremos considerando dois casos: o primeiro, quando  $r_{12} \geq \rho_0$  e  $r_{n1} \geq \rho_0$  e o segundo quando apenas um dos lados incidentes exteriores é maior do que  $\rho_0$ , digamos  $r_{12} \geq \rho_0$ .

Caso 1 - Se  $r_{12} \geq \rho_0$  e  $r_{n1} \geq \rho_0$ , então:

$$r_{k1} > \min\{r_{12}, r_{n1}\} \geq \rho_0, \frac{1}{r_{k1}^3} - \frac{1}{\rho_0^3} < 0, k = 3, \dots, n-1.$$

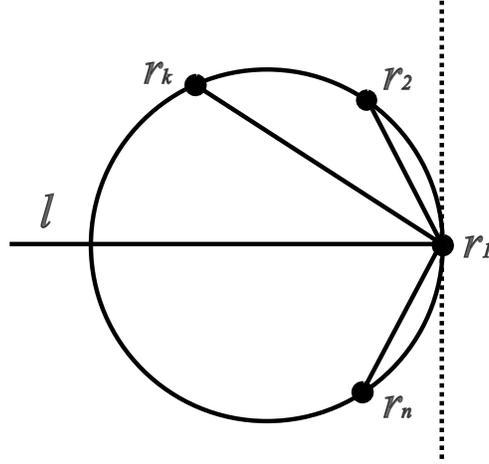


Figura 3.1:  $r_{12} \geq \rho_0$  e  $r_{n1} \geq \rho_0$ .

Isto é,  $S_{k1} \leq 0$  para  $k = 2, \dots, n$ . Denotando por  $l$  a linha perpendicular com a tangente do círculo em  $r_1$ , conforme a Figura 3.1, e por  $P_l u$  a projeção ortogonal do vetor  $u$  ao longo da linha  $l$ , temos:

$$P_l \left( \sum_{k \neq 1} m_k S_{k1} (r_k - r_1) \right) = \sum_{k \neq 1} m_k S_{k1} P_l (r_k - r_1) \neq 0.$$

Sendo que a igualdade é verdadeira porque podemos "passar"  $P_l$  por  $m_k S_{k1}$ , pois este é um escalar e a desigualdade é válida porque  $m_k$  será sempre positivo,  $S_{k1}$  sempre negativo e a projeção  $P_l(r_k - r_1)$  tem sempre o mesmo sentido, pois todas as projeções serão feitas do mesmo lado de  $r_1$ , logo o resultado será diferente de 0.

Assim, a equação (3.11) não será satisfeita.

Caso 2 - Se  $r_{12} \geq \rho_0$  e  $r_{n1} < \rho_0$ , suponha que  $\theta_2 < \dots < \theta_L < \theta_{L+1} < \dots < \theta_n < 2\pi$ ,  $r_{1L} \geq \rho_0$  e  $r_{1(L+1)} < \rho_0$ .

Teremos que  $S_{1k} \leq 0$  para  $k = 2, \dots, L$  e  $S_{1k} > 0$  para  $k = L+1, \dots, n$ . Conectando  $r_1$  com um ponto entre  $r_L$  e  $r_{L+1}$  e traçando uma reta, chamemos a reta ortogonal a esta de  $l$ , conforme a Figura 3.2.

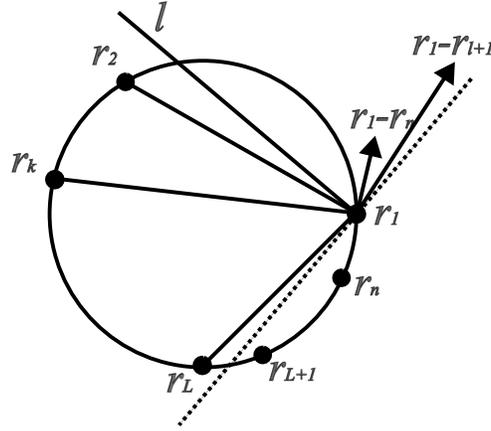


Figura 3.2:  $r_{12} \geq \rho_0$  e  $r_{n1} < \rho_0$ .

Teremos:

$$\begin{aligned} P_l \left( \sum_{k=2}^L m_k S_{k1} (r_k - r_1) + \sum_{k=L+1}^n -m_k S_{k1} (r_1 - r_k) \right) = \\ = \sum_{k=2}^L m_k S_{k1} P_l(r_k - r_1) + \sum_{k \neq 1} -m_k S_{k1} P_l(r_1 - r_k) \neq 0. \end{aligned}$$

A desigualdade se justifica, pois os dois termos terão sempre o mesmo sinal. O primeiro porque  $S_{k1}$  será negativo, possivelmente com a exceção de  $S_{21}$ , que poderá ser igual a 0,  $m_k$  será sempre positivo e  $P_l(r_k - r_1)$  terá sempre o mesmo sentido, pois a interseção será dentro do círculo. O segundo termo porque  $m_k$  e  $S_{k1}$  serão positivos, enquanto  $P_l(r_1 - r_k)$  terá o sentido oposto dos elementos do primeiro termo, pois a projeção será fora do círculo, conforme a Figura 3.2.

Assim, a equação (3.11) não será satisfeita e o sistema também não será uma configuração central no segundo caso, como queríamos demonstrar.

Concluimos que os dois lados exteriores incidentes serão sempre menores do que  $\rho_0$ .

Mostraremos agora que ao menos uma diagonal incidente deve ser maior do que  $\rho_0$ , uma vez que se os valores  $S_{12}, \dots, S_{n1}$  forem sempre positivos, então a equação (3.11)

também não poderá ser satisfeita, pois, utilizando a mesma projeção do caso 1, teremos  $S_{1k}$  e  $m_k$  sempre positivos e  $P_l(r_k - r_1)$  sempre no mesmo sentido, conforme a Figura 3.1. Então ao menos um  $S_{1k}$  deverá ser negativo e corresponderá a uma diagonal, ou seja, ao menos uma diagonal incidente com  $r_1$  deverá ser maior do que  $\rho_0$ , como queríamos demonstrar.

Por simetria, o resultado será válido para todos os vértices  $r_k, k = 1, \dots, n$  e fica demonstrado que todos os lados exteriores serão menores do que  $\rho_0$  e ao menos uma diagonal incidente será maior do que  $\rho_0$  em cada vértice.  $\square$

Um resultado direto deste teorema é o seguinte:

**Corolário 3.3.2.** *Configurações centrais co-circulares não podem estar inteiramente em um semi-círculo.*

*Demonstração.* Caso contrário, haveria um lado exterior maior do que todas as diagonais.  $\square$

**Proposição 3.3.3.** *Para todas as configurações centrais co-circulares com quatro, cinco ou seis corpos, o raio do círculo contendo os corpos será menor do que  $\rho_0$ .*

*Demonstração.* Para o caso  $n = 6$ , ordenando as massas em um círculo no sentido anti-horário, pelo Teorema 3.3.1, temos que  $r_{12}, r_{23}, r_{34}, r_{45}, r_{56}, r_{61} < \rho_0$ . Mas como os triângulos  $\overline{r_i 0 r_{i+1}}, i = 1, \dots, n - 1$  e  $\overline{r_n 0 r_1}$  serão todos isósceles, isto somente poderia ocorrer se  $\angle r_1 0 r_2, \dots, \angle r_{n-1} 0 r_n, \angle r_n 0 r_1 < \pi/3$ . O que é um absurdo, pois a soma dos ângulos internos seria menor do que  $2\pi$ . A demonstração para os casos  $n = 4$  e  $n = 5$  é idêntica.  $\square$

## 3.4 Configurações Centrais $(n + 1, 1)$ -Empilhadas com

$$n \leq 6$$

Com os resultados demonstrados, podemos concluir que para  $3 \leq n \leq 6$ , as únicas configurações centrais co-circulares  $(n + 1, 1)$ -empilhadas são as previstas no caso 1 da

Proposição 3.2.5, ou seja, nas quais o centro de massa da subconfiguração  $r$  será o seu centro geométrico e a  $(n + 1)$ -ésima massa deverá ser colocada no centro do círculo, conforme é constatado na proposição a seguir:

**Proposição 3.4.1.** *Seja  $r = (r_1, \dots, r_n)$ ,  $3 \leq n \leq 6$ , uma configuração central co-circular com cento de massa  $c$ , massa total  $m$  e multiplicados  $\lambda$ . Então  $r$  só poderá ser estendido para uma configuração central  $(n + 1, 1)$ -empilhada  $\bar{r} = (r_0, r_1, \dots, r_n)$  se  $c$  for o centro geométrico de  $r$  e  $r_0 = c$ .*

*Demonstração.* Para os casos  $n = 3$  e  $n = 4$  já demonstramos no capítulo anterior que as únicas opções de configurações centrais planares, não colineares, são, respectivamente, o triângulo equilátero, com massas iguais em seus vértices e uma massa arbitrária em seu centro e o quadrado com massas iguais em seus vértices e uma massa arbitrária em seu centro. Ambas configurações são co-circulares, com centro de massa no centro geométrico e a massa  $m_0$  é incluída no centro do círculo.

Para os casos  $n = 5$  e  $n = 6$ , pela Proposição 3.2.5, as únicas opções para a configuração central  $\bar{r}$  seriam  $c$  como o centro geométrico de  $r$  e  $r_0 = c$ , ou  $\rho = \rho_0$  e  $r_0$  no centro geométrico de  $r$ . Pela Proposição 3.3.3, nos casos onde  $4 \leq n \leq 6$ , o raio do círculo contendo os corpos será menor do que  $\rho_0$ , logo o segundo caso da Proposição 3.2.5 é vazio e a única opção de extensão é o primeiro caso, onde  $c$  é o centro geométrico de  $r$  e  $r_0 = c$ .  $\square$

Com esta proposição encerramos o capítulo 3 onde foi apresentada uma abordagem diferente no estudos das configurações centrais empilhadas, utilizando as funções potencial e de momento de inércia e provamos alguns resultados, concluindo que as configurações centrais planares, não-colíneas  $(n + 1, 1)$ -empilhadas devem ser centradas co-circulares, ou seja, ser uma Configuração Central co-Circular (C.C.C) e, para os casos com  $3 \leq n \leq 6$ , a nova massa deverá ser incluída no centro de massa  $c$ , que deverá estar posicionado no centro geométrico da subconfiguração central, gerando uma Configuração Central Co-Circular Centrada (C.C.C.C.). No próximo capítulo estudaremos especificamente as C.C.C.C. e provaremos que para o caso  $n \leq 6$  as únicas configurações centrais  $(n + 1, 1)$ -

empilhadas planares, não-colineares possíveis são as formadas por um polígono regular de  $n$  lados.

# Capítulo 4

## Configurações Centrais Co-Circulares Centradas C.C.C.C.

No capítulo anterior provamos através dos Teoremas 3.2.1, 3.2.2 e da Proposição 3.2.5 que só podem existir dois tipos de configurações centrais planares, não colineares,  $(n+1, 1)$ -empilhadas, sendo:

1. As Configurações Centrais Co-Circulares Centradas (C.C.C.C), onde a nova massa é incluída no centro de massa, que condiz com o centro de um círculo no qual todas as demais massas estão dispostas, ou seja, o caso 1 da Proposição 3.2.5 e;
2. As Configurações Centrais Co-Circulares, Não Centradas, onde a nova massa também poderia ser incluída no centro de um círculo no qual todas as demais massas estariam dispostas, mas este não seria o centro de massa da Configuração Central, ou seja a Configuração não seria centrada, conforme caso 2 da Proposição 3.2.5.

O primeiro caso será o assunto deste capítulo, onde analisaremos o artigo [25].

O estudo é motivado pela Conjectura de Chenciner, um questionamento formulado por Chenciner em [11], onde o autor questiona se o  $n$ -ágono regular com massas iguais é a única configuração central na qual todos os corpos se situam em um círculo e o centro de massa coincide com o centro do círculo.

Neste capítulo será utilizada uma noção mais ampla do Potencial  $U$ , pois, além do caso

Newtoniano, abordado na Introdução e no capítulo anterior, que aqui chamaremos de  $U_1$ , será analisado um caso mais geral:  $U_\alpha$ ,  $\alpha \geq 0$ . Conseguiremos demonstrar duas maneiras práticas de verificar se uma configuração não pode gerar uma CCCC, demonstraremos que, com algumas restrições colocadas no principal resultado do capítulo, o Teorema 4.4.4, a conjectura de Chenciner é verdadeira e mostraremos que para o caso newtoniano, para  $n \leq 6$ , o polígono regular de  $n$  lados é a única Configuração Central Co-Circular Centrada.

Para isto, na primeira seção, vamos utilizar a definição de Configuração Central apresentada em [25] e vamos encontrar o sistema de equações para as Configurações Centrais Co-Circulares Centradas (CCCC) em (4.3). Observaremos que uma vantagem na utilização do potencial mais genérico, em termos de  $U_\alpha$ , é que o momento de inércia  $I$  pode ser expresso como  $U_{-2}$ . Finalizaremos a seção apresentando as equações para as configurações centrais em termos dos gradientes pelos vetores  $m$  e  $\theta$  do potencial  $U_\alpha$ , respectivamente,  $\nabla_\theta U_\alpha|_{m,\theta}$  e  $\nabla_m U_\alpha|_{m,\theta}$ , em (4.7) e do momento de inércia  $I = U_{-2}$ , respectivamente,  $\nabla_\theta U_{-2}|_{m,\theta}$  e  $\nabla_m U_{-2}|_{m,\theta}$ , em (4.8).

Na segunda seção citaremos [12], um importante resultado de Cors, Hall e Roberts, no qual eles comprovam que dado um conjunto de massas  $m$ , com um ordenamento fixado, a função  $U_\alpha(m)$  terá apenas um ponto crítico, que será um ponto de mínimo. Este resultado será enunciado no Lema 4.2.1, mas não será demonstrado, pois, com a ajuda de uma constante  $K \geq \frac{2^{3+\alpha}}{\alpha}$ , o resultado será expandido, como feito por Zhiqiang em [25] no Lema 4.2.2, que será demonstrado da forma mais detalhada e terá o Lema 4.2.1 com consequência direta.

Na seção 3 realizaremos uma análise quanto às simetrias das configurações centrais por rotações, em especial permutações e reflexões. Também enunciaremos e provaremos três novos lemas, sendo o Lema 4.3.1, que prova que, para CCCCs, a simetria da distribuição das massas pode implicar na simetria da configuração e os lemas 4.3.3 e 4.3.4, que trarão maneiras de demonstrar que uma dada configuração não é uma CCCC. Estes novos resultados fornecerão uma ferramenta para verificar quando configurações não podem gerar CCCCs, possibilitando diversos resultados práticos, sendo que alguns serão demonstrados na seção. Dentre estes vale citar os corolários 4.3.5 e 4.3.6, que, respectivamente, demons-

tram que o triângulo equilátero com massas iguais e que o quadrado com massas iguais são as únicas CCCCs com, respectivamente, três e quatro corpos, para o caso geral do potencial  $U_\alpha$ .

Na quarta e última seção será demonstrado o Lema 4.4.1, último lema preparatório, e dois corolários deste, 4.4.2 e 4.4.3, sendo que este último fornece uma segunda forma prática, depois da forma evidenciada nos lemas 4.3.3 e 4.3.4, de verificar quando uma configuração não pode gerar uma CCCC, ao demonstrar que dado um vetor de massas não todas iguais  $m$ , se existir alguma configuração qualquer  $\varphi_m$  tal que  $2^{\alpha+1} \frac{U_\alpha(m, \varphi_m)}{M^2} \leq 1 + \frac{\alpha}{4}$ , então não poderá haver qualquer CCCC  $(m, \theta_m)$ .

Com isto poderemos demonstrar o resultado principal do capítulo, o Teorema 4.4.4, que esclarece que para números positivos  $\alpha$  e inteiros  $n \geq 3$ , satisfazendo

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \csc^\alpha \frac{j\pi}{n} < 1 + \frac{\alpha}{4},$$

o polígono regular de  $n$  faces com massas iguais é a única configuração central co-circular centrada para o problema de  $n$ -corpos com o potencial  $U_\alpha$ . Concluiremos com o Corolário 4.4.5 que, para o caso do problema de  $n$ -corpos Newtoniano, onde  $\alpha = 1$  e  $n \leq 6$ , o polígono regular de  $n$  corpos é a única configuração central co-circular centrada.

## 4.1 Equações para as Configurações Centrais Co-Circulares Centradas

Dadas  $n$  massas  $m_k > 0$ , e suas posições  $x_k \in \mathbb{R}^2$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \geq 0$ , o movimento é regido pelas seguintes equações diferenciais:

$$m_k \ddot{x}_k = \frac{\partial U_\alpha(x)}{\partial x_k}, k = 1, 2, \dots, n,$$

onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , e

$$U_\alpha(x) = \begin{cases} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{m_j m_k}{|x_j - x_k|^\alpha}, & \alpha \neq 0, \\ \sum_{1 \leq j < k \leq N} m_j m_k \ln |x_j - x_k|, & \alpha = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

**Observação 4.1.1.** *Dois casos especiais para o potencial geral  $U_\alpha$  merecem ser ressaltados. O primeiro é o caso Newtoniano, com o qual estamos mais habituados, sendo o foco do capítulo 2 desta dissertação, que ocorre quando  $\alpha = 1$ . O outro é o problema de  $n$ -vórtices, que ocorre quando  $\alpha = 0$ . Para o problema de  $n$ -vórtices, Cors, Hall e Roberts demonstraram em [12] que, para o caso planar do problema de  $n$ -vortex, com vórtices arbitrários, a única configuração central co-circular centrada é o polígono regular com massas iguais. Como este caso já está resolvido e não é o foco desta dissertação, a partir deste momento consideraremos sempre  $\alpha > 0$ .*

Considerando  $X$  o conjunto de todas as configurações  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , diremos que uma configuração  $x$  pertence ao conjunto de colisões  $\Delta$  se existir  $x_{ij} = |x_i - x_j| = 0$ , onde  $|x_i - x_j|$  é a distância euclidiana entre  $x_i$  e  $x_j$ . Como o sistema (4.1) não está bem definido para qualquer  $x_{ij} = 0$ , sempre consideraremos configurações fora do conjunto de colisões, ou seja, trabalharemos no seguinte conjunto de configurações:

$$X \setminus \Delta = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{3n} : x_j \neq x_k, \text{ onde } j \neq k\}.$$

Estando claro o espaço de configurações que será considerado, é possível definir de forma clara as configurações centrais que serão estudadas no capítulo, conforme segue:

**Definição 4.1.2.** *Uma configuração  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X \setminus \Delta$  será chamada configuração central (CC) para as massas  $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T$ , se existir alguma constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que:*

$$\sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|^{\alpha+2}} m_j m_k = -\frac{\lambda}{\alpha} m_k (x_k - c_0), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.2)$$

ou, equivalentemente:

$$\frac{\partial U_\alpha(x)}{\partial x_k} = -\lambda m_k (x_k - c_0), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

onde o centro de massa é definido como  $c_0 = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$ , pois, para  $\alpha > 0$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} U_\alpha(x) = \sum_{1 \leq j < k} m_j m_k (-\alpha) (-1) \frac{(x_j - x_k)}{|x_j - x_k|} \frac{1}{|x_j - x_k|^{\alpha+1}} +$$

$$\sum_{k < j \leq n} m_k m_j (-\alpha) (1) \frac{(x_k - x_j)}{|x_k - x_j|} \frac{1}{|x_k - x_j|^{\alpha+1}} = \sum_{j=1, j \neq k}^n \alpha m_j m_k \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|^{\alpha+2}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Definida a configuração central, como serão estudadas Configurações Centrais co-Circulares Centradas (CCCC), as  $n$  massas positivas  $(m_1, m_2, \dots, m_n)^T \in \mathbb{R}_+^n$  devem ser todas tomadas em um círculo unitário centrado na origem do plano complexo, então suas posições serão  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T \in \mathbb{C}^n$ , onde  $r_j = e^{i\theta_j} = \cos \theta_j + i \operatorname{sen} \theta_j$ . Consideremos  $\theta_j \in (0, 2\pi]$  e, para evitar colisões:

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T \in \mathcal{K} = \{\theta \in \mathbb{R}^n : 0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n \leq 2\pi\}.$$

Assim, dado um vetor de massas  $m$ , sua ordem também estará determinada.

Sob estas notações, o potencial  $U_\alpha$  pode ser escrito como:

$$U_\alpha(m, \theta) = \sum_{j < k} \frac{m_j m_k}{r_{jk}^\alpha(\theta)} = 2^{-\alpha} \sum_{j < k} \frac{m_j m_k}{\left| \operatorname{sen}^\alpha \left( \frac{\theta_k - \theta_j}{2} \right) \right|},$$

uma vez que:

$$r_{jk} = |r_j - r_k| = |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}| = |(\cos \theta_j - \cos \theta_k) - i(\operatorname{sen} \theta_j - \operatorname{sen} \theta_k)| =$$

$$\sqrt{(\cos \theta_j - \cos \theta_k)^2 + (\operatorname{sen} \theta_j - \operatorname{sen} \theta_k)^2} =$$

$$\sqrt{\cos^2 \theta_j + \cos^2 \theta_k + \operatorname{sen}^2 \theta_j + \operatorname{sen}^2 \theta_k - 2(\cos \theta_j \cos \theta_k + \operatorname{sen} \theta_j \operatorname{sen} \theta_k)} =$$

$$\sqrt{2 - 2 \cos(\theta_j - \theta_k)};$$

$$\sqrt{2 - 2 \cos(\theta_j - \theta_k)} = \sqrt{2(1 - \cos(\theta_j - \theta_k))} = \sqrt{2 \left( 2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\theta_j - \theta_k}{2} \right) \right)} =$$

$$\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\theta_j - \theta_k}{2} \right)} = 2 \sqrt{\operatorname{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_k}{2} \right)^2} = \left| 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_k}{2} \right) \right|,$$

é a distância entre  $r_j$  e  $r_k$ .

Tomando (4.2), dividindo as  $n$  equações por  $m_k x_k$  e considerando a notação apresentada, com  $c_0 = 0$ , temos que a configuração  $r = (r_1, \dots, r_n)$  será CCCC, se e somente se,

$$\begin{cases} \sum_{j \neq k} \frac{m_j(1-r_j/r_k)}{r_{jk}^{\alpha+2}} = \frac{\lambda}{\alpha}, & k = 1, \dots, n. \\ \sum_{j=1}^n m_j r_j = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Pois, enquanto a segunda equação de (4.3) ocorre por se tratar de uma configuração centrada na origem do plano complexo ( $c = 0$ ), para a primeira equação temos:

$$\sum_{j \neq k} \frac{r_j - r_k}{r_{jk}^{\alpha+2}} m_j m_k = -\frac{\lambda}{\alpha} m_k r_k \Rightarrow \sum_{j \neq k} \frac{m_j(r_k - r_j)}{r_{jk}^{\alpha+2}} = \frac{\lambda}{\alpha} r_k \Rightarrow \sum_{j \neq k} \frac{m_j(1 - r_j/r_k)}{r_{jk}^{\alpha+2}} = \frac{\lambda}{\alpha},$$

sendo a última passagem possível considerando que  $r_k \neq 0$  para  $k = 1 \dots, n$ .

Escrevendo as partes real e imaginárias de (4.3) separadamente, temos:

Para a primeira equação:

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq k} \frac{m_j(1 - r_j/r_k)}{r_{jk}^{\alpha+2}} = \frac{\lambda}{\alpha} &\Rightarrow \sum_{j \neq k} \frac{m_j(1 - e^{i(\theta_j - \theta_k)})}{r_{jk}^{\alpha+2}} = \frac{\lambda}{\alpha} \Rightarrow \\ \sum_{j \neq k} \frac{m_j(1 - \cos(\theta_j - \theta_k) + i \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_k))}{r_{jk}^{\alpha+2}} &= \frac{\lambda}{\alpha}, \end{aligned}$$

onde a parte real fica

$$\sum_{j \neq k} \frac{m_j(1 - \cos(\theta_j - \theta_k))}{2(1 - \cos(\theta_j - \theta_k))r_{jk}^{\alpha}} = \frac{\lambda}{\alpha} \Rightarrow \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^{\alpha}} = \frac{2\lambda}{\alpha} = \tilde{\lambda},$$

pois adotaremos  $\frac{2\lambda}{\alpha} = \tilde{\lambda}$ . Por outro lado, a parte imaginária fica:

$$\sum_{j \neq k} \frac{m_j \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_k)}{r_{jk}^{\alpha+2}} = 0.$$

Quanto à segunda equação de (4.3), temos:

$$\sum_{j=1}^n m_j r_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n m_j (\cos \theta_j - i \operatorname{sen} \theta_j) = 0.$$

Assim, para os reais,  $\sum_{j=1}^n m_j \cos \theta_j = 0$  e, para os imaginários,  $\sum_{j=1}^n m_j \text{sen} \theta_j = 0$ .

Por fim, com a separação, o sistema (4.3) fica:

$$\begin{cases} \sum_{j \neq k}^n \frac{m_j}{r_{jk}^\alpha} = \tilde{\lambda} \\ \sum_{j \neq k}^n \frac{m_j \text{sen}(\theta_j - \theta_k)}{r_{jk}^{\alpha+2}} = 0 \\ \sum_{j=1}^n m_j \cos \theta_j = 0 = \sum_{j=1}^n m_j \text{sen} \theta_j = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Considerando  $U_\alpha(m, \theta) = \sum_{j < k} \frac{m_j m_k}{r_{jk}^\alpha(\theta)}$  como uma função das variáveis  $m$  e  $\theta$ , temos que essas equações são equivalentes a:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} U_\alpha = 0, \quad \frac{\partial}{\partial m_k} U_\alpha = \tilde{\lambda}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (4.5)$$

pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_k} U_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \theta_k} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{m_j m_k}{r_{jk}^\alpha} = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\partial}{\partial \theta_k} m_j m_k (2 - 2 \cos(\theta_j - \theta_k))^{-\frac{\alpha}{2}} = \\ &= - \sum_{j=1, j \neq k}^n m_k m_j \left( \frac{-\alpha}{2} \right) (2 - 2 \cos(\theta_j - \theta_k))^{(-\frac{\alpha}{2}-1)} 2 \text{sen}(\theta_j - \theta_k) = \\ \alpha m_k \left( \sum_{j \neq k} \frac{m_j \text{sen}(\theta_j - \theta_k)}{(2 - 2 \cos(\theta_j - \theta_k))^{\frac{\alpha}{2}-1}} \right) &= \alpha m_k \left( \sum_{j \neq k} \frac{m_j \text{sen}(\theta_j - \theta_k)}{r_{jk}^{\alpha+2}} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, n; \\ \frac{\partial}{\partial m_k} U_\alpha &= \frac{\partial}{\partial m_k} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{m_j m_k}{r_{jk}^\alpha} = \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^\alpha} = \tilde{\lambda}, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Outro ponto interessante ao abordar o potencial  $U$  em termos de  $\alpha, m$  e  $\theta$  é que, ao tomarmos  $\alpha = -2$ , temos que  $U_{-2}(m, \theta)$  não é outro senão o Momento de Inércia  $I$  apresentado nos capítulos anteriores, conforme pode ser verificado abaixo:

$$U_{-2}(m, \theta) = \sum_{j < k} m_j m_k r_{jk}^2 = \sum_{j < k} m_j m_k (2 - 2 \cos(\theta_j - \theta_k)),$$

Aplicando a equação (4.5) para o caso específico onde  $\alpha = -2$ , ou seja, para o momento de Inércia, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} U_{-2} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial m_k} U_{-2} = 2M, \quad k = 1, \dots, n, \quad (4.6)$$

onde a derivada parcial de  $U_{-2}(m, \theta)$  por  $\theta_k$  continua igual a 0, pois esta não depende de  $\alpha$ , enquanto, para a derivada parcial de  $U_{-2}(m, \theta)$  por  $m_k$ , obtemos o resultado específico  $2M$ , pois:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m_k} U_{-2} &= \frac{\partial}{\partial m_k} \sum_{1 \leq j < k \leq n} m_j m_k (2 - 2 \cos(\theta_j - \theta_k)) = \\ &= \sum_{j=1, j \neq k}^n m_j (2 - 2 \cos(\theta_j - \theta_k)) = 2(M - m_k) - \sum_{j=1, j \neq k}^n 2m_j \cos(\theta_j - \theta_k) = \\ &= 2(M - m_k) - 2 \left( \sum_{1 \leq j < k \leq n} m_j \cos \theta_j \cos \theta_k + m_j \operatorname{sen} \theta_j \operatorname{sen} \theta_k \right) = \\ &= 2(M - m_k) - 2 \left( \cos \theta_k \left( \sum_{j \neq k} m_j \cos \theta_j \right) + \operatorname{sen} \theta_k \left( \sum_{j \neq k} m_j \operatorname{sen} \theta_j \right) \right) = \\ &= 2(M - m_k) - 2(-\cos \theta_k (m_k \cos \theta_k) - \operatorname{sen} \theta_k (m_k \operatorname{sen} \theta_k)) \\ &= 2(M - m_k) + 2m_k (\cos^2 \theta_k + \operatorname{sen}^2 \theta_k) = 2M, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Por fim, expressando as equações (4.5) e (4.6) através do vetor gradiente:

$$\nabla_{\theta} U_{\alpha}|_{m, \theta} = 0 \quad \nabla_m U_{\alpha}|_{m, \theta} = \tilde{\lambda} \mathbf{1} \quad (4.7)$$

$$\nabla_{\theta} U_{-2}|_{m, \theta} = 0 \quad \nabla_m U_{-2}|_{m, \theta} = 2M \mathbf{1}, \quad (4.8)$$

onde os vetores  $0, 1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 = (0, \dots, 0)^T$  e  $1 = (1, \dots, 1)^T$ . Então,  $m, \theta$  formarão uma configuração central co-circular centrada (C.C.C.C.) se, e somente se, a equação (4.7) valer para o potencial  $U_{\alpha}$  e a equação (4.8) for válida para o Momento de Inércia  $I$ .

Nos casos onde  $m$  e  $\theta$  satisfazem (4.7) e (4.8), simplesmente denotaremos que  $(m, \theta) \in C.C.$ .

## 4.2 O Ponto Crítico do potencial $U_\alpha$ e de uma função relacionada

Um grande avanço no estudos das C.C.C.C.s foi dado por Cors, Hall e Roberts em [12], ao notarem que  $\nabla_\theta U_\alpha = 0$  significa que  $\theta$  será um ponto crítico de  $U_\alpha$  quando o vetor de massas positivas  $m$  é dado. Calculando a correspondente matriz hessiana de  $U_\alpha$  eles mostraram que o ponto crítico será um mínimo e será único, exceto por translação, o que pode ser removido tomando  $\theta_n = 2\pi$ . Seja

$$\mathcal{K}_0 = \{\theta \in \mathcal{K} | \theta_n = 2\pi\}, \mathcal{CC}_0 = \{(m, \theta) \in \mathcal{CC} \in \mathcal{K}_0\}.$$

Este resultado pode ser expresso conforme lema a seguir:

**Lema 4.2.1.** *Para qualquer vetor dado  $m \in \mathbb{R}_+^n$ , existe um único  $\varphi_m \in \mathcal{K}_0$  tal que  $\nabla_\theta U_\alpha(m, \varphi_m) = 0$ . Além disso, este ponto crítico será um ponto de mínimo.*

Cors, Hall e Roberts também concluem que dado um vetor de massas positivas  $m$ , uma configuração central co-circular centrada (se existir), digamos  $\theta$ , deverá ser o único mínimo do potencial  $U_\alpha$ , ou seja:

$$(m, \theta) \in \mathcal{CC}_0 \Rightarrow \theta = \varphi_m.$$

No artigo [25] é feita uma extensão do resultado demonstrado em [12]. Para isto é necessário uma constante  $K \geq \frac{2^{3+\alpha}}{\alpha}$  e definir a função  $f_k$ :

$$f_K(m, \theta) = U_\alpha + \frac{U_{-2}}{K}.$$

Com estas temos o lema a seguir:

**Lema 4.2.2.** *Para qualquer vetor de massas positivas  $m \in \mathbb{R}_+^n$  e qualquer número inteiro  $K \geq \frac{2^{3+\alpha}}{\alpha}$ , existe um único  $\theta_m \in \mathcal{K}_0$  tal que  $\nabla_\theta f_k(m, \theta_m) = 0$ . Além disso, este ponto crítico é um ponto de mínimo e  $(m, \theta) \in \mathcal{CC}_0$  implica que  $\theta = \theta_m$ .*

*Demonstração.* Para um dado número  $\beta \neq 0$ , derivando parcialmente em termos de  $\theta_j$  e  $\theta_i$ , temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}U_\beta &= \frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} \left( \sum_{l < k} \frac{m_l m_k}{r_{lk}^\beta} \right) = \frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} \left( \sum_{l < k} \frac{m_l m_k}{|2\text{sen} \left( \frac{\theta_l - \theta_k}{2} \right)|^\beta} \right) = \\
\frac{\partial}{\partial\theta_i} m_j &\left( \sum_{k \neq j} \frac{-m_k \beta |2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_k}{2} \right)|^{\beta-1} \frac{2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_k}{2} \right)}{|2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_k}{2} \right)|} 2 \cos \left( \frac{\theta_j - \theta_k}{2} \right) \frac{1}{2}}{|2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_k}{2} \right)|^{2\beta}} \right) = \\
&\frac{\partial}{\partial\theta_i} \left( -\beta m_j \left( \sum_{k \neq j} \frac{m_k 2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_k}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta_j - \theta_k}{2} \right)}{|2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_k}{2} \right)|^{\beta+2}} \right) \right) = \\
&-\beta m_j \left( \frac{m_i 2 \cos \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right) |2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right)|^{\beta+2}}{|2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right)|^{2\beta+4}} \right. \\
&+ \frac{m_i 2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right) (-1)\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} \right) |2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right)|^{\beta+2}}{|2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right)|^{2\beta+4}} \\
&\left. - \left( \frac{m_i 2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right) (\beta + 2) |2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right)|^{\beta+1}}{|2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right)|^{2\beta+4}} \right) \right) = \\
&\left( \frac{2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right)}{|2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right)|} 2 \cos \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} \right) \right) = \\
&-\beta m_j m_i \left( \frac{\left( -\cos^2 \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right) + \text{sen}^2 \left( \frac{\theta_j - \theta_k}{2} \right) \right) |2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_k}{2} \right)|^2}{|2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right)|^{\beta+4}} \right. \\
&\left. \frac{(\beta + 2) \left( 2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right) \right)^2 \cos^2 \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right)}{|2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right)|^{\beta+4}} \right) = \\
&-\beta m_j m_i \left( \frac{-\cos^2 \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right) + \text{sen}^2 \left( \frac{\theta_j - \theta_k}{2} \right) + \beta \cos^2 \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right) + 2 \cos^2 \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right)}{|2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right)|^{\beta+2}} \right) = \\
&\frac{-\beta m_j m_i \left( 1 + \beta \cos^2 \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right) \right)}{|2\text{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right)|^{\beta+2}}.
\end{aligned}$$

Os cálculos para derivar parcialmente duas vezes em  $\theta_i$  utilizam o mesmo raciocínio, de modo que não será repetido. Assim, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} U_\beta = \frac{-\beta m_j m_i \left(1 + \beta \cos^2\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right)\right)}{\left|2\text{sen}\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right)\right|^{\beta+2}} \text{ se } i \neq j \\ \frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2} U_\beta = \sum_{j \neq i} \frac{\beta m_i m_j \left(1 + \beta \cos^2\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right)\right)}{\left|2\text{sen}\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right)\right|^{\beta+2}} = \sum_{j \neq i}^n -\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} U_\beta. \end{array} \right.$$

Assim, derivando duas vezes na mesma coordenada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2} f_K &= \frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2} \left( U_\alpha + \frac{U_{-2}}{K} \right) = \frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2} U_\alpha + \frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2} \frac{U_{-2}}{K} = \\ &= -\sum_{j \neq i} \frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} U_\alpha - \frac{\sum_{j \neq i} \frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} U_{-2}}{K} = -\sum_{j \neq i} \frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} \left( U_\alpha + \frac{U_{-2}}{K} \right) = -\sum_{j \neq i} \frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} f_K. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Por outro lado, derivando em coordenadas diferentes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} f_K &= m_i m_j \left[ \frac{-\alpha \left(1 + \alpha \cos^2\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right)\right)}{\left|2\text{sen}\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right)\right|^{\alpha+2}} + \frac{2 - 4 \cos^2\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right)}{K} \right] \leq \\ &= m_i m_j \left[ \frac{-\alpha \left(1 + \alpha \cos^2\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right)\right)}{2^{\alpha+2}} + \frac{2 - 4 \cos^2\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right)}{K} \right], \end{aligned}$$

onde a passagem se justifica pois o numerador é positivo. Tomando  $K \geq \frac{2^{3+\alpha}}{\alpha}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} f_K &\leq m_i m_j \left[ \frac{-\alpha \left(1 + \alpha \cos^2\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right)\right)}{2^{\alpha+2}} + \frac{\alpha}{2^{2+\alpha}} - \frac{4 \cos^2\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right)}{K} \right] = \\ &= m_i m_j \left[ \frac{-\alpha^2 \cos^2\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right)}{2^{\alpha+2}} - \frac{4 \cos^2\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right)}{K} \right] \leq 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Tomando a matriz hessiana de  $f_K$  ( $D^2 f_K = \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \theta_j} f_K \right)_{n \times n}$ ), por (4.9) e (4.10) temos que todos os elementos fora da diagonal principal são não positivos, enquanto os da diagonal principal são a soma dos módulos dos elementos na mesma linha/coluna, ou seja,  $D^2 f_K$  será uma matriz diagonal dominante. Como também é simétrica e todos os elementos da diagonal principal são não negativos, a matriz hessiana é positiva semidefinida.

O único autovetor de  $D^2 f_K$  associado ao autovalor 0 será o vetor unitário 1, o que será verificado a seguir:

1) Existência:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \theta_1} f_K & \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \theta_2} f_K & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \theta_n} f_K \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta_2 \theta_1} f_K & \frac{\partial^2}{\partial \theta_2 \theta_2} f_K & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial \theta_2 \theta_n} f_K \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta_n \theta_1} f_K & \frac{\partial^2}{\partial \theta_n \theta_2} f_K & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial \theta_n \theta_n} f_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{j \neq 1} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \theta_j} f_K + \sum_{j \neq 1} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \theta_j} f_K \\ -\sum_{j \neq 2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_2 \theta_j} f_K + \sum_{j \neq 2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_2 \theta_j} f_K \\ \cdots \\ -\sum_{j \neq n} \frac{\partial^2}{\partial \theta_n \theta_j} f_K + \sum_{j \neq n} \frac{\partial^2}{\partial \theta_n \theta_j} f_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Unicidade:

Seja  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$  um vetor não nulo, não paralelo a 1 e tal que  $D^2 f_K(v) = 0$ . Existe  $k, 1 \leq k \leq n$  tal que  $v_k \geq v_i$ , para todo  $i = 1, \dots, n$  e temos que o  $k$ -ésimo elemento de  $D^2 f_K(v)$  será:

$$v_k \left( -\sum_{i \neq k} \frac{\partial^2}{\partial \theta_k \theta_i} \right) + \sum_{i \neq k} v_i \frac{\partial^2}{\partial \theta_k \theta_i} > 0,$$

pois, como  $v$  não é paralelo a 1, para algum  $j = 1, \dots, n, v_k > v_j$ , o que é uma contradição. Logo a forma quadrática  $v^T (D^2 f_K) v$  é maior do que ou igual a 0, sendo identicamente nula apenas se  $v$  for múltiplo do vetor 1.

Este vetor corresponde à invariância translacional de  $f_K$ , assim, limitando  $\theta_n = 2\pi$ , como  $\lim_{\theta \rightarrow \partial \mathcal{K}_0} = +\infty$ , pois os denominadores tenderiam a 0, temos que para um dado vetor de massas  $m$  existe no máximo um ponto crítico  $\theta_m$ , que, quando existir, será um ponto de mínimo e, se  $(m, \theta) \in \mathcal{CC}_0$  é uma C.C.C.C., então (4.7), (4.8) serão satisfeitos e  $\theta = \theta_m$  será o único ponto crítico da função  $f_k, K \geq \frac{2^{3+\alpha}}{\alpha}$ .  $\square$

Considerando que (4.7) implica (4.8),  $\varphi_m$  no Lema 4.2.1 é igual a  $\theta_m$  no Lema 4.2.2.

### 4.3 Simetria das Configurações Centrais Co-Circulares Centradas (CCCC)

Nesta seção será estudada a simetria das configurações centrais co-circulares centradas (CCCC). Para isto serão utilizadas reflexões ( $S$ ) e permutações ( $P$ ) de CCCCs, conforme a seguir:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para melhor visualização segue a Figura 4.1, na qual podem ser verificados, uma configuração qualquer  $(m, \theta)$ , sua projeção  $(Pm, P\theta)$  e sua reflexão  $(Sm, S\theta)$ :

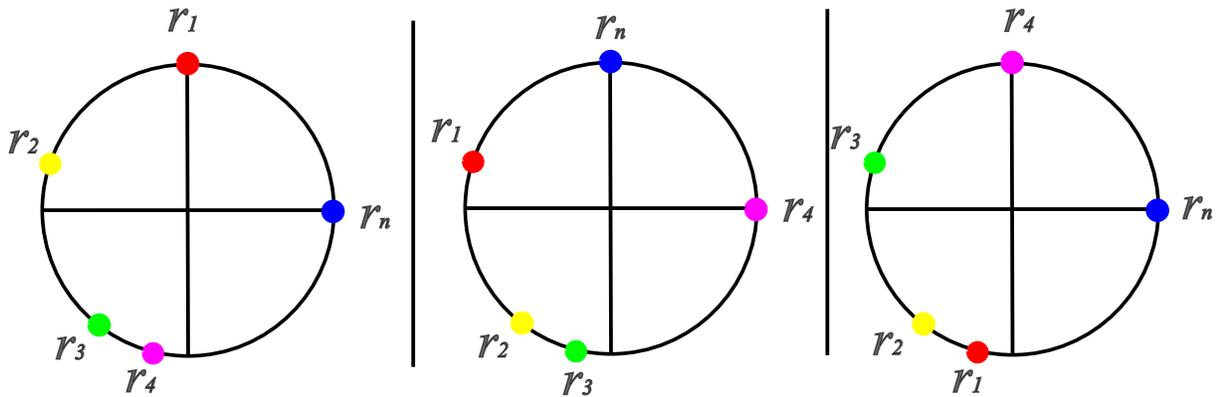


Figura 4.1: Uma configuração co-circular  $(m, \theta)$  à esquerda, a projeção  $(Pm, P\theta)$  no centro e a reflexão  $(Sm, S\theta)$  à direita.

Note que se  $(m, \theta)$  é uma configuração central, então  $(Pm, P\theta)$  e  $(Sm, S\theta)$  também serão, pois:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha P m_k \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{P m_j}{\|P \theta_j - P \theta_k\|^\alpha} \text{sen}(P \theta_j - P \theta_k) = \\ \alpha m_{k+1} \sum_{j=0, j \neq k}^{n-1} \frac{m_{j+1}}{\|\theta_{j+1} - \theta_{k+1}\|^\alpha} \text{sen}(\theta_{j+1} - \theta_{k+1}) = 0, \\ \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{P m_j}{\|P \theta_j - P \theta_k\|^\alpha} = \sum_{j=0, j \neq k}^{n-1} \frac{m_{j+1}}{\|\theta_{j+1} - \theta_{k+1}\|^\alpha} = \tilde{\lambda}, \\ \sum_{j=1}^n P m_j \cos(P \theta_j) = \sum_{j=0}^{n-1} m_{j+1} \cos \theta_{j+1} = 0 = \sum_{j=0}^{n-1} m_{j+1} \text{sen} \theta_{j+1} = \sum_{j=1}^n P m_j \text{sen}(P \theta_j); \end{array} \right. \quad (4.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha S m_k \sum_{j=1, j \neq k}^n \text{sen}(S \theta_j - S \theta_k) = \alpha m_{n-j+1} \sum_{j \neq k}^n \text{sen}(\theta_{n-j+1} - \theta_{n-j+1}) = 0, \\ \sum_{j \neq k}^n \frac{S m_j}{\|S \theta_j - S \theta_k\|^\alpha} = \sum_{j \neq k}^n \frac{m_{n-j+1}}{\|\theta_{n-j+1} - \theta_{n-j+1}\|^\alpha} = \tilde{\lambda}, \\ \sum_{j=1}^n S m_j \cos(S \theta_j) = \sum_{j=1}^n m_{n-j+1} \cos \theta_{n-j+1} = 0, \\ \sum_{j=1}^n S m_j \text{sen}(S \theta_j) = \sum_{j=1}^n m_{n-j+1} \text{sen} \theta_{n-j+1} = 0. \end{array} \right.$$

Com isto podemos observar que as equações (4.7) e (4.8) são invariantes pelas mesmas permutações e reflexões nos índices  $m$  e  $\theta$  simultaneamente. Seja  $G = \langle P, S \rangle$  o grupo diedral gerado pelas matrizes  $P$  e  $S$ . Então, para todo  $g \in G$ , teremos

$$(m, \theta) \in \mathcal{CC} \Leftrightarrow (gm, g\theta) \in \mathcal{CC}.$$

Restringindo os ângulos  $\theta \in \mathcal{K}_0$ , podemos tomar:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe na Figura 4.2 que ainda assim teremos uma permutação e uma reflexão, mas com uma rotação ( $R$ ), fazendo com que a última massa esteja no ponto  $(2\pi, 0)$ , no caso da projeção e mantendo o ordenamento no caso da reflexão.

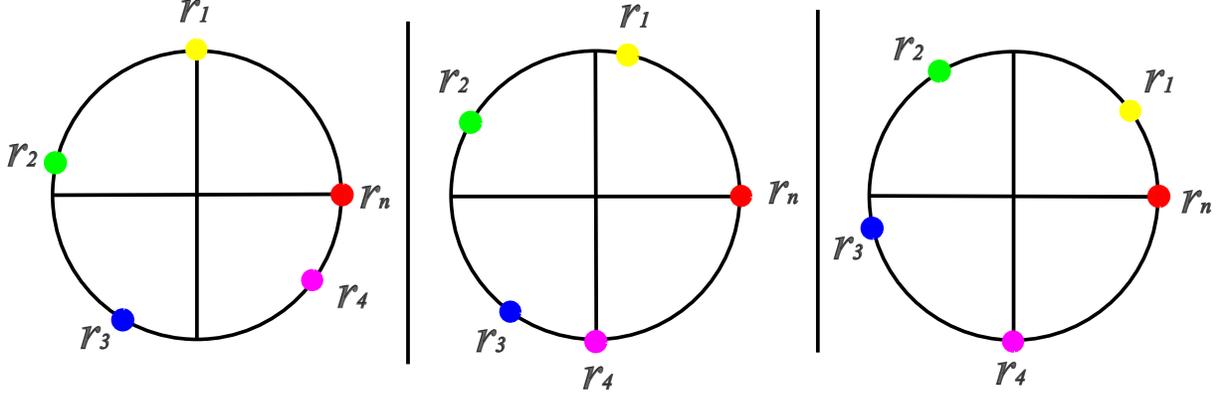


Figura 4.2: Uma configuração co-circular  $(m, \theta)$  à esquerda, a projeção  $(\mathcal{P}m, \mathcal{P}\theta)$  no centro e a reflexão  $(\mathcal{S}m, \mathcal{S}\theta)$  à direita.

Desta forma, comparando as Figuras 4.1 e 4.2, observamos que no segundo caso, na projeção, a última massa sempre estará na posição  $(2\pi, 0)$ , o que nem sempre ocorre com  $(\mathcal{P}m, \mathcal{P}\theta)$ , já na reflexão, com a aplicação de  $\mathcal{S}$  após a troca de posições  $S$ , a perspectiva e o ordenamento se mantêm, o que não ocorre com  $S$ , onde há uma inversão da ordem.

Logo  $\theta \in \mathcal{K}_0$  se, e somente se,  $\mathcal{P}^h \mathcal{S}^l \theta \in \mathcal{K}_0, \forall h, l \in \mathbb{Z}$ .

Para todo  $g = P^h S^l \in G$ , tomando  $\hat{g} = \mathcal{P}^h \mathcal{S}^l$ , podemos definir o grupo de representação

$$g(m, \theta) = (gm, \hat{g}\theta).$$

**Lema 4.3.1.** *Suponha que  $(m, \theta_m) \in \mathcal{CC}_0$  seja uma configuração central co-circular centrada, então:*

- 1)  $g(m, \theta_m) \in \mathcal{CC}_0 \forall g \in G$ ;
- 2)  $f_K(m, \theta_m) = f_K(gm, \hat{g}\theta_m) \leq f_K(gm, \theta_m)$  e  $\hat{g}\theta_m = \theta_{gm}$ ;
- 3)  $m = gm$  implica  $\theta_m = \hat{g}\theta_m$ .

*Demonstração.* 1) Se  $\theta \in \mathcal{K}_0$ , então  $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{n-1} < \theta_n = 2\pi$  e temos:

$$\mathcal{P}\theta = (\theta_2 - \theta_1, \theta_3 - \theta_1, \dots, \theta_n - \theta_1, \theta_1 - \theta_1 + 2\pi) \in \mathcal{K}_0,$$

$$\mathcal{S}\theta = (2\pi - \theta_{n-1}, 2\pi - \theta_{n-2}, \dots, 2\pi - \theta_1, 2\pi) \in \mathcal{K}_0.$$

Como ambos são rotações e reflexões acompanhados de translações e 4.7 e 4.8 são invariantes por estas operações, logo

$$(m, \theta) \in \mathcal{CC}_0 \Leftrightarrow (Pm\mathcal{P}\theta) \in \mathcal{CC}_0 \Leftrightarrow (Sm\mathcal{S}\theta) \in \mathcal{CC}_0 \Leftrightarrow g(m, \theta) \in \mathcal{CC}_0.$$

2) Pelo Lema 4.2.2  $f_K(m, \theta_m) = f_k(gm, \hat{g}\theta_m) \leq f_K(gm, \theta_m)$ , onde  $f_k(gm, \hat{g}\theta_m) \leq f_K(gm, \theta_m)$  se, e somente se,  $\theta_m = \hat{g}\theta_m$ , pois  $(gm, \hat{g}\theta_m)$  é o único ponto crítico de  $f$  e é um mínimo da função.

3) Pelo lema 4.2.2  $\theta_m$  é único, logo, se  $m = gm$ , então  $\theta_m = \hat{g}\theta_m$ .  $\square$

Este Lema nos diz que a simetria da distribuição das massas pode implicar na simetria da configuração. Por exemplo, se  $(m, \theta_m) \in \mathcal{CC}_0$  e  $m = Pm$  (ou seja, todas as massas são iguais), então  $\theta_m = \mathcal{P}\theta_m$ , que é o polígono regular de  $n$  lados. O que nos dá o corolário a seguir

**Corolário 4.3.2.** *Para qualquer inteiro  $n \geq 3$  e qualquer real  $\alpha > 0$ , se todas as massas são iguais, então a única configuração central co-circular centrada (CCCC) para o potencial  $U_\alpha$  será o polígono regular de  $n$  lados com todas as massas iguais.*

*Demonstração.* É um fato conhecido que o polígono regular de  $n$  lados com massas iguais é uma configuração central. Seja  $m$  um vetor de massas iguais, temos que o arranjo com as massas em um polígono regular nas posições  $\theta_m$  é uma CCCC. Pelo item 1) do Lema 4.3.1,  $g(m, \theta_m)$  também será uma CCCC. Por 3) do mesmo lema, como  $m = gm$ , uma vez que as massas são iguais,  $\tilde{g}\theta_m = \theta_m$ , ou seja, ainda teremos obrigatoriamente um polígono regular de  $n$  lados com massas iguais.  $\square$

Definamos agora a matriz

$$H_{\alpha, m} = \left( r_{jk}^{-\alpha}(\theta_m) + \frac{1}{K} r_{jk}^2(\theta_m) \right)_{n \times n},$$

que é determinada pelo vetor de massas  $m$ , entendendo  $r_{ij}(\theta)$  como variáveis indiretas, e consideremos a função

$$h_m(y) = f_K(y, \theta_m) = \sum_{j < k} \left( \frac{y_j y_k}{r_{jk}^\alpha(\theta)} + \frac{y_j y_k r_{jk}^2(\theta)}{K} \right) = \frac{1}{2} y^T H_{\alpha, m} y, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Então  $h_m(y)$  é um polinômio homogêneo de grau 2.

Se  $m$  e  $\theta_m$  também satisfizerem a segunda parte de (4.7) e (4.8), ou seja,  $(m, \theta_m) \in \mathcal{CC}_0$  é uma configuração central co-circular centrada, nós temos

$$Dh_m(m) = \nabla_m f_K(m, \theta_m) = \left( \tilde{\lambda} + \frac{2M}{K} \right) 1.$$

Escrevendo  $h_m(y)$  na sua expansão em série de Taylor no ponto  $m$ :

$$h_m(y) = f_K(m, \theta_m) + \sum_{j=1}^n \left( \tilde{\lambda} + \frac{2M}{K} \right) (y_j - m_j) + \frac{1}{2} (y - m)^T H_{\alpha, m} (y - m),$$

onde  $H_{\alpha, m}$  é a Hessiana de  $h_m(y)$  no ponto  $m$ .

Se  $(m, \theta) \in \mathcal{CC}_0$  e, para que o segundo termo da expansão se anule,  $\sum_{j=1}^n y_i = \sum_{j=1}^n m_i$ , então

$$f_K(y, \theta_m) - f_K(m, \theta_m) = \frac{1}{2} (y - m)^T H_{\alpha, m} (y - m) = f_K(y - m, \theta_m) \quad (4.12)$$

Por fim, para  $y = gm$ , temos o seguinte lema, que será o primeiro critério para verificar que um vetor de massas positivas  $m$  não poderá gerar uma CCCC:

**Lema 4.3.3.** *Para um vetor de massas positivas  $m$ , se*

$$m^T (g - I)^T H_{\alpha, m} (g - I) m < 0, \text{ para algum } g \in G,$$

ou

$$f_K(gm, \theta_m) < f_K(m, \theta_m), \text{ para algum } g \in G,$$

então não há nenhuma configuração central co-circular centrada para  $m$ .

*Demonstração.* Suponha que  $(m, \theta_m) \in \mathcal{CC}_0$ , então, por (4.12), as duas condições são equivalentes, mas pelo Lema 4.3.1, temos que

$$f_K(m, \theta_m) = f_K(gm, \hat{g}\theta_m) \leq f_K(gm, \theta_m),$$

o que é uma contradição. □

Vale ressaltar que é bem difícil computar  $\theta_m$  na matriz  $H_{\alpha,m}$ , mas com ele podemos demonstrar o próximo lema, que, utilizado juntamente com o Lema 4.3.3 fornecerá uma forma prática para verificar que certos vetores de massas  $m$  não podem gerar CCCCs:

**Lema 4.3.4.** *Suponha que  $m$  massas positivas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  formem uma CCCC. Alterando as posições de duas massas diferentes quaisquer o valor de  $f_K$  irá decrescer estritamente.*

*Demonstração.* Seja  $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T$ , com  $(m, \theta_m) \in \mathcal{CC}_0$ .

Tome  $m' = (m_1, \dots, m_{j-1}, m_k, m_{j+1}, \dots, m_{k-1}, m_j, m_{k+1}, \dots, m_n)$ ,

Pela Equação (4.12), nós temos:

$$\begin{aligned} f_K(m', \theta_m) &= h_m(m') = f_K(m, \theta_m) + \frac{1}{2}(m' - m)H_{\alpha,m}(m' - m)^T = \\ &= f_K(m, \theta_m) + (m_k - m_j) \left( r_{jk}^{-\alpha} + \frac{1}{K} r_{jk}^2 \right) (m_j - m_k), \end{aligned}$$

o que implica

$$f_K(m', \theta_m) < f_K(m, \theta_m), \text{ se } m_j \neq m_k,$$

o que é um absurdo, pois contraria o Lema 4.3.1.  $\square$

Com estes dois lemas podemos demonstrar os corolários seguintes, que além de demonstrarem resultados úteis também exemplificam a utilização dos lemas estudados até aqui.

**Corolário 4.3.5.** *A CC gerada por um triângulo equilátero com massas iguais em seus vértices é a única CCCC para o potencial geral  $\alpha$  no problema de 3 corpos.*

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que  $(m, \theta_m)$  seja uma CCCC, onde  $m_1, m_2$  e  $m_3$  não sejam todas iguais. Sem perda de generalidade, suponha  $m_1 \neq m_2$ . Então

$$m = (m_1, m_2, m_3)^T \neq (m_2, m_1, m_3)^T = S_m.$$

Mas, pelo Lema 4.3.4, numa CCCC, a troca de posição de duas massas diferentes quaisquer gera uma redução estrita no valor de  $f_K$ , o que é uma contradição, pois pelo Lema 4.3.3, se  $f_K(gm, \theta_m) < f_k(m, \theta_m)$ , então não existe CCCC para  $m$ .  $\square$

**Corolário 4.3.6.** *A configuração central gerada por um quadrado com massas iguais é a única CCCC para o potencial geral no problema de 4-corpos.*

*Demonstração.* Suponha que  $m = (m_1, m_2, m_3, m_4)$  e  $(m, \theta_m) \in \mathcal{CC}_0$ , então  $S_m = (m_3, m_2, m_1, m_4)$  e  $P^2S_m = (m_1, m_4, m_3, m_2)$  também formarão CCCCs. Aplicando os Lemas 4.3.3 e 4.3.4, um raciocínio similar ao apresentado na demonstração do Corolário 4.3.5 nos mostrará que, respectivamente,  $m_1 = m_3$  e  $m_2 = m_4$ .

Aplicando o item 3) do Lema 4.3.1, temos que  $\theta = \mathcal{S}\theta = \mathcal{P}^2\mathcal{S}\theta$ , o que implica que  $\theta = (\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ , um quadrado. Para verificar que, sendo um quadrado, as massas têm de ser todas iguais, suponhamos que duas das massas sejam diferentes, digamos  $m_1 \neq m_2$ . Então, pela segunda equação do sistema (4.4),  $\sum_{j \neq 1} \frac{m_j}{r_{j1}^\alpha} = \tilde{\lambda} = \sum_{j \neq 2} \frac{m_j}{r_{j2}^\alpha}$ , mas, se  $m_1 \neq m_2$  e  $\alpha \geq 0$ , então

$$\sum_{j \neq 1} \frac{m_j}{r_{j1}^\alpha} = \frac{m_2 + m_4}{\sqrt{2}^\alpha} + \frac{m_3}{2^\alpha} = \frac{\sqrt{2}^\alpha 2m_2 + m_1}{2^\alpha} \neq \frac{\sqrt{2}^\alpha 2m_1 + m_2}{2^\alpha} = \frac{m_1 + m_3}{\sqrt{2}^\alpha} + \frac{m_2}{2^\alpha} = \sum_{j \neq 2} \frac{m_j}{r_{j2}^\alpha}.$$

Logo  $\sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^\alpha} \neq \tilde{\lambda}$  para todo  $k$ , ou seja  $(m, \theta)$  não seria uma CCCC. Assim, uma CC gerada por um quadrado deve ter todas as massas iguais.  $\square$

**Corolário 4.3.7.** *No problema de  $n$ -corpos, para o potencial geral, não existem configurações centrais co-circulares centradas com todas as massas iguais, exceto uma.*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, suponha que o vetor de massas é

$$m = (1, \dots, 1, m_n).$$

Por contradição, suponha que  $m_n \neq 1$  e  $(m, \theta_m) \in \mathcal{CC}_0$ . Como

$$(I - P)m = (0, \dots, 0, 1 - m_n, m_n - 1),$$

o Lema 4.3.4 implica que  $f_K(Pm, \theta_m) < f_K(m, \theta_m)$ , mas isto contradiz o Lema 4.3.3, ou seja, para que tenhamos uma CCCC, não podemos ter todas as massas iguais exceto uma.  $\square$

**Corolário 4.3.8.** *No problema de  $n$ -corpos, para o potencial geral, quando  $n$  é ímpar, não existem configurações centrais tendo todas as massas iguais, exceto duas.*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, suponha que o vetor de massas  $m$  seja:

$$m = (1 \dots, 1, m_k, 1, \dots, 1, m_n),$$

onde todas as componentes, possivelmente com exceção da  $k$ -ésima e da  $n$ -ésima, são iguais a 1. Pelo Corolário 4.3.7 basta provar que  $m_k = 1$ . Suponha por contradição, que  $m_k \neq 1$  e que  $n$  é ímpar. Como temos:

$$(I - S)m = (0, \dots, 0, m_k - 1, 0, \dots, 0, 1 - m_k - 1, 0, \dots, 0, 0),$$

pelo Lema 4.3.4  $f_K(Sm, \theta_m) < f_K(m, \theta_m)$ , mas isto contradiz o Lema 4.3.3, ou seja, para que  $(m = (m_1, \dots, m_n), \theta_m)$ ,  $n$  ímpar, seja uma CCCC, não podemos ter todas as massas iguais exceto duas.  $\square$

**Corolário 4.3.9.** *No problema de  $n$ -corpos, para o potencial geral, se  $n$  for par, então não existirão CCCCs quando todas as massas forem iguais, exceto duas e:*

- 1) *Estas duas massas diferentes não sejam simetricamente opostas, ou*
- 2) *Estas duas massas sejam diferentes entre si.*

*Demonstração.* A demonstração dos casos 1 e 2 é similar à do corolário 4.3.8.

Sem perda de generalidade, suponha que:

Caso 1) o vetor de massas seja  $m = (1 \dots, 1, m_k, 1, \dots, 1, m_n)$ , onde  $k \neq n/2$ . Pelo Corolário 4.3.7 basta provar que  $m_k = 1$ . Suponha por contradição, que  $m_k \neq 1$  e que  $n$  é par. Como

$$(I - S)m = (0, \dots, 0, m_k - 1, 0, \dots, 0, 1 - m_k - 1, 0, \dots, 0, 0),$$

pelo Lema 4.3.4,  $f_K(Sm, \theta_m) < f_K(m, \theta_m)$ , mas isto contradiz o Lema 4.3.3, ou seja, para que  $(m = (1 \dots, 1, m_k, 1, \dots, 1, m_n), \theta_m)$ ,  $n$  par e  $k \neq n/2$ , seja uma CCCC, não podemos ter todas as massas iguais exceto duas.

Caso 2) o vetor de massas seja  $m = (1 \dots, 1, m_k, 1, \dots, 1, m_n)$ , onde  $k = n/2$  e  $m_k \neq m_n$ . Note que as demais possibilidades dentro do caso 2, ou seja, quando as massas são diferentes mas não simetricamente opostas, já foram resolvidas no caso 1.

Pelo Corolário 4.3.7 basta provar que  $m_k = 1$ . Suponha por contradição, que  $m_k \neq 1$  e que  $n$  é par.

Temos:

$$(I - P^{\frac{n}{2}})m = (0, \dots, 0, m_k - m_n, 0, \dots, 0, 1 - m_k - 1, 0, \dots, 0, m_n - m_k).$$

Pelo Lema 4.3.4,  $f_K(P^{\frac{n}{2}}m, \theta_m) < f_K(m, \theta_m)$ , mas isto contradiz o Lema 4.3.3, ou seja, para que  $(m = (1 \dots, 1, m_k, 1, \dots, 1, m_n), \theta_m)$ ,  $n$  par,  $k = n/2$  e  $m_k \neq m_n$  seja uma CCCC, não podemos ter todas as massas iguais exceto duas.

A restrição de que as duas massas não sejam simetricamente opostas entre si e iguais é necessária na demonstração, pois, caso fossem simetricamente opostas e iguais, não teríamos combinações de permutações e simetrias capazes de trocar as posições de apenas duas massas diferentes.  $\square$

## 4.4 Resultado Principal

O objetivo desta seção é provar o resultado principal do artigo [25] e seu corolário, que comprova que para o caso  $n \leq 6$  o questionamento elaborado por Chenciner em [11], se o polígono regular de  $n$  corpos com massas iguais é a única configuração central onde todos os corpos se situam num círculo e o centro de massa coincide com o centro do círculo, tem resposta positiva.

Para isto precisaremos de mais alguns resultados preliminares, onde, por simplicidade, nas demonstrações será considerado  $K = \frac{2^{3+\alpha}}{\alpha}$ , mas os resultados também são válidos para  $K > \frac{2^{3+\alpha}}{\alpha}$ .

Suponha que  $(m, \theta_m) \in \mathcal{CC}_0$  e considere

$$\mathcal{H}_{\alpha,m} = \left( \frac{2U_\alpha(m, \theta_m)}{M^2} + \frac{2M}{K} \right) J_n - H_{\alpha,m},$$

onde  $J_n$  é a matriz  $n \times n$  na qual todos os elementos são iguais a 1.

**Lema 4.4.1.** *Se  $(m, \theta_m) \in \mathcal{CC}_0$  e  $2^{\alpha+1} \frac{U_\alpha(m, \theta_m)}{M^2} \leq 1 + \frac{\alpha}{4}$ , então a matriz simétrica  $\mathcal{H}_{\alpha,m}$  é positiva semi-definida e seu único autovetor associado ao autovalor 0 é  $m$ .*

*Demonstração.* Inicialmente notemos que  $\mathcal{H}_{\alpha,m}$  é simétrica, pois  $J_n$  e  $H_{\alpha,m}$  são simétricas. Mostrar que é positiva semi-definida e que seu único autovetor associado ao autovalor 0 é equivalente a mostrar que a matriz simétrica  $\mathcal{M}^T \mathcal{H}_{\alpha,m} \mathcal{M}$  é positiva semi-definida e seu único autovetor associado ao autovalor 0 é 1, pois  $M$  é uma matriz positiva definida,  $M$  tem posto  $n$  e  $M(1) = m$ . Como  $(m, \theta_m) \in \mathcal{CC}_0$ , as segundas partes de (4.7) e de (4.8) implicam que

$$\begin{pmatrix} r_{11}^{-\alpha} + \frac{1}{K} r_{11}^2 & \cdots & r_{1n}^{-\alpha} + \frac{1}{K} r_{1n}^2 \\ r_{21}^{-\alpha} + \frac{1}{K} r_{21}^2 & \cdots & r_{2n}^{-\alpha} + \frac{1}{K} r_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1}^{-\alpha} + \frac{1}{K} r_{n1}^2 & \cdots & r_{nn}^{-\alpha} + \frac{1}{K} r_{nn}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n m_k r_{1k}^{-\alpha} + \frac{1}{K} m_k r_{1k}^2 \\ \sum_{k=1}^n m_k r_{2k}^{-\alpha} + \frac{1}{K} m_k r_{2k}^2 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n m_k r_{nk}^{-\alpha} + \frac{1}{K} m_k r_{nk}^2 \end{pmatrix} = \\ \left( \nabla_m \left( U_\alpha + \frac{U_2}{K} \right) \right) = \left( \frac{2U_\alpha}{M} + \frac{2M}{K} \right) 1,$$

então

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\alpha,m} m &= \left( \frac{2U_\alpha(m, \theta_m)}{M^2} \right) J_n m - H_{\alpha,m} m = \\ & \left( \frac{2U_\alpha(m, \theta_m)}{m} + \frac{2M}{K} \right) 1 - \left( \frac{2U_\alpha(m, \theta_m)}{m} + \frac{2M}{K} \right) 1 = 0, \end{aligned}$$

o que implica que

$$M^T \mathcal{H}_{\alpha,m} M 1 = 0. \quad (4.13)$$

A condição

$$2^{\alpha+1} \frac{U_\alpha(m, \theta_m)}{M^2} \leq 1 + \frac{\alpha}{4}$$

implica

$$\frac{2U_\alpha(m, \theta_m)}{M^2} \leq \frac{1}{2^\alpha} + \frac{\alpha}{2^{\alpha+2}} = \frac{1}{2^\alpha} + \frac{2}{K}.$$

Para  $r_{ij} \in (0, 2]$  e  $K = \frac{2^{3+\alpha}}{\alpha}$ ,

$$\frac{d}{dr_{ij}} \left( \frac{1}{r_{ij}^\alpha} + \frac{r_{ij}^2}{K} \right) = \frac{-\alpha}{r_{ij}^{\alpha+1}} + \frac{2r_{ij}}{\frac{2^{3+\alpha}}{\alpha}} = \alpha \left( \frac{-1}{r_{ij}^{\alpha+1}} + \frac{r_{ij}}{2^{2+\alpha}} \right) = \alpha \left( \frac{-r_{ij}}{r_{ij}^{\alpha+2}} + \frac{r_{ij}}{2^{2+\alpha}} \right) \leq 0,$$

logo  $\frac{d}{dr_{ij}} \left( \frac{1}{r_{ij}^\alpha} + \frac{r_{ij}^2}{K} \right)$  é decrescente no intervalo  $(0, 2)$ , sendo que no intervalo  $(0, 2]$  atinge mínimo quando  $r_{ij} = 2$ . Assim, para  $r_{ij} \in (0, 2]$  e  $K = \frac{2^{3+\alpha}}{\alpha}$ :

$$\frac{1}{r_{ij}^\alpha} + \frac{r_{ij}^2}{K} \geq \frac{1}{2^\alpha} + \frac{4}{K}.$$

Para os elementos fora da diagonal principal da matriz  $M^T \mathcal{H}_{\alpha, m} M$ , temos

$$\begin{aligned} m_i m_j \left[ \left( \frac{2U_\alpha(m, \theta_m)}{M^2} + \frac{2}{K} \right) - \left( \frac{1}{r_{ij}^\alpha} + \frac{r_{ij}^2}{K} \right) \right] &\leq \\ m_i m_j \left[ \left( \frac{1}{2^\alpha} + \frac{4}{K} \right) - \left( \frac{1}{r_{ij}^\alpha} + \frac{r_{ij}^2}{K} \right) \right] &\leq 0. \end{aligned}$$

Este resultado, juntamente com (4.13), mostra que a matriz  $M^t \mathcal{H} M$  é diagonalmente dominante e, logo, positiva semi-definida. Além disso, o vetor 1 é o único autovetor associado ao autovalor 0, pelo mesmo argumento apresentado na demonstração do Lema 4.2.2.  $\square$

Este lema implica que se as massas  $m_1, \dots, m_n$  não forem todas iguais, ou seja,  $P(m) \neq m$ , e  $2^{\alpha+1} \frac{U_\alpha(m, \theta_m)}{M^2} \leq 1 + \frac{\alpha}{4}$ , então

$$m^T (P - I)^T H_{\alpha, m} (P - I) m < 0.$$

Aplicando o Lema 4.3.3, temos como resultado direto o seguinte corolário:

**Corolário 4.4.2.** *Uma condição necessária para que massas não todas iguais  $m = (m_1, \dots, m_n)$  formem uma configuração central co-circular centrada  $(m, \theta_m) \in \mathcal{CC}_0$  é que*

$$2^{\alpha+1} \frac{U_\alpha(m, \theta_m)}{M^2} > 1 + \frac{\alpha}{4}.$$

Considerando que  $\theta_m$  é difícil de calcular e notando que  $\theta_m$  é um mínimo, temos o corolário a seguir que, após o Lema 4.3.3, é o segundo critério para verificar se um vetor de massas  $m$  não pode formar uma CCCC:

**Corolário 4.4.3.** *Para qualquer vetor de massas positivas, não todas iguais,  $m$ , se existir algum  $\varphi \in \mathcal{K}_0$  tal que*

$$2^{\alpha+1} \frac{U_\alpha(m, \varphi)}{M^2} \leq 1 + \frac{\alpha}{4},$$

*então não pode existir uma configuração central co-circular centrada para  $m$ , ou seja,  $(m, \theta_m) \notin \mathcal{CC}_0$ .*

*Demonstração.* Resultado direto dos Corolários 4.4.2 e 4.2.2. □

Finalmente podemos demonstrar o resultado principal do capítulo:

**Teorema 4.4.4.** *Para qualquer inteiro  $n \geq 3$  e números reais  $\alpha > 0$ , satisfazendo*

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \csc^\alpha \left( \frac{j\pi}{n} \right) \leq 1 + \frac{\alpha}{4},$$

*a configuração central gerada por um polígono regular de  $n$  lados é a única configuração central para o potencial  $U_\alpha$  na qual todos os copros estão em um círculo e o centro de massa coincide com o centro do círculo, ou seja, uma C.C.C.C..*

*Demonstração.* Conforme já mencionado, a configuração central gerada por um polígono regular de  $n$  lados com massas iguais em cada vértice é a CCCC trivial. Quando consideramos a CC gerada por um  $n$ -gono regular é interessante notar que  $\mathcal{H}_{\alpha,1}$ ,  $J_n$  e  $H_{\alpha,1}$  são todas matrizes circulantes, o que pode ser verificado em [19] e [22].

Uma matriz  $n \times n$   $C = (c_{kj})$  é chamada circulante se  $c_{kj} = c_{k-1,j-1}$ , onde  $c_{0,j}$  e  $c_{k,0}$  são identificadas como  $c_{n,j}$  e  $c_{k,n}$ , respectivamente. Então toda matriz circulante  $C$  pode ser representada como  $C = \sum_{j=1}^n c_{1j} P^{j-1}$ , sendo que todas estas têm os mesmos autovetores  $v_k = (\xi_{k-1}, \xi_{k-1}^2, \dots, \xi_{k-1}^n)^T$ , onde  $\xi_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$  denota a  $n$ -ésima raiz complexa da unidade.

Então considerando a CC gerada pelo  $n$ -gono regular com todas as massas iguais  $(1, \theta_1) \in \mathcal{CC}_0$ , se

$$2^{\alpha+1} \frac{U_\alpha(1, \theta_1)}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \csc^\alpha \frac{j\pi}{n} \leq 1 + \frac{\alpha}{4},$$

então, pelo Lema 4.4.1,  $\mathcal{H}_{\alpha,1}$  será positiva semi-definida com um único autovalor 0. Isto implica que os autovalores de  $H_{\alpha,1}$  serão negativos, exceto pelo correspondente ao autovalor  $v_1 = 1$ . Então para qualquer vetor de massas não todas iguais  $m$ , temos:

$$\frac{m^T H_{\alpha,1} m}{M^2} < \frac{1^T H_{\alpha,1}}{n^2}.$$

Notando que  $f_K(m, \theta_m) = \frac{1}{2} m^T H_{\alpha,1} m$ , então, pelo Lema 4.2.2:

$$\frac{m^T H_{\alpha,m} m}{M^2} \leq \frac{m^T H_{\alpha,1} m}{M^2} < \frac{1^T H_{\alpha,1}}{n^2}. \quad (4.14)$$

Suponha que exista algum vetor de massas  $m = m_1, \dots, m_n$ , com  $m_i \neq m_j$ , para algum  $1 \leq i, j \leq n$ , que forme uma CCCC, digamos  $(m, \theta_m) \in \mathcal{CC}_0$ , então as inequações (4.14) implicam que

$$\frac{2U_\alpha(m, \theta_m) + 2M^2}{M^2} < \frac{2U_\alpha(1, \theta_1) + 2n^2}{n^2},$$

logo

$$2^{\alpha+1} \frac{U_\alpha(m, \theta_m)}{M^2} < 1 + \frac{\alpha}{4}.$$

Mas pelo Corolário 4.4.3 isto é um absurdo, pois por este resultado, se  $2^{\alpha+1} \frac{U_\alpha(m, \theta_m)}{M^2} < 1 + \frac{\alpha}{4}$ , então  $(m, \theta_m) \notin \mathcal{CC}_0$ , o que encerra a demonstração do Teorema.  $\square$

Notando que a função  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \csc^\alpha \frac{j\pi}{n}$  é crescente com respeito a  $n$  e a  $\alpha$ , separadamente. Para qualquer inteiro  $n > 0$  dado, podemos obter uma resposta positiva para a Conjectura de Chenciner para o problema de  $n$ -corpos no potencial  $U_\alpha$ , no caso em que  $\alpha = \alpha(n)$  é suficientemente pequeno. Para o problema clássico Newtoniano, onde  $\alpha = 1$ , um cálculo direto mostra que:

$$\frac{1}{6} \sum_{j=1}^{6-1} \csc \frac{j\pi}{6} = \frac{5}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{9} < 1 + \frac{1}{4}.$$

Com isto, chegamos ao resultado final desta dissertação:

**Corolário 4.4.5.** *No caso Newtoniano do problema de  $n$ -corpos, se  $n \leq 6$ , então a configuração central gerada por um polígono regular de  $n$  lados com massas iguais em seus vértices é a única configuração central na qual todos os corpos se situam em um círculo e o centro de massa coincide com o centro do círculo.*

# Capítulo 5

## Conclusões

Considerando os tópicos abordados ao longo da dissertação podemos concluir o resultado publicado em [7] por Fernandes, Silva e Vidal:

**Teorema 5.0.1.** *No caso Newtoniano do problema de  $n$ -corpos, se  $n \leq 6$ , então a configuração central planar, não colinear,  $(n + 1, 1)$ -empilhada deverá ser formada por uma configuração central  $r = (r_1, \dots, r_n)$ , com  $n$  massas iguais localizadas nos vértices de um polígono regular que somente poderá ser estendida através da inclusão de uma massa arbitrária  $m_0$  no baricentro do polígono.*

*Demonstração.* Consideremos o caso Newtoniano.

Os Teoremas 3.2.1 e 3.2.2 garantem que uma configuração central de  $n$  corpos só pode ser estendida a uma configuração central de  $n + 1$  corpos se a configuração central original for co-circular e a nova massa tiver sido incluída no centro do círculo.

Não existem configurações centrais planares, não colineares para  $n < 3$ .

A Proposição 3.4.1 garante que, se  $3 \leq n \leq 6$ , então uma configuração central co-circular  $r = (r_1, \dots, r_n)$  com centro de massa  $c$  só poderá ser estendida, para uma configuração central  $(n + 1, 1)$ -empilhada  $\bar{r} = (r_0, r_1, \dots, r_n)$ , se  $c$  for o centro geométrico de  $r$  e  $r_0 = c$ .

Pelo Corolário 3.2.3 a massa  $m_0$  que será inserida na posição  $r_0$  é arbitrária.

Pelo corolário 4.4.5, como  $n \leq 6$ , a configuração central  $r$ , na qual todos os corpos se situam num círculo e o centro de massa coincide com o centro do círculo, só pode ser

gerada por um polígono regular de  $n$  lados com massas iguais em seus vértices, o que encerra a demonstração.  $\square$

Analogamente, utilizando a outra notação, a única configuração central planar, não-colinear,  $(n, 1)$ -empilhada para  $n \leq 7$  será a gerada por um polígono regular com  $n - 1$  massas iguais em seus vértices e uma massa arbitrária no baricentro, que poderá ser removida.

Ao longo da dissertação foram utilizadas as notações originais utilizadas nos artigos estudados, sendo a notação  $(n, 1)$  nos artigos [4] e [5] e a notação  $(n + 1, 1)$  nos artigos [23] e [25]. Para o caso das configurações centrais planares, não-colineares, empilhadas, na qual apenas um corpo é inserido ou removido, as duas notações são equivalentes, desde que se tenha a atenção para que não haja uma redução na dimensão da configuração para o caso  $(n, 1)$ , no qual se retira um dos corpos, ou um aumento da dimensão no caso  $(n + 1, 1)$ , no qual um corpo é inserido. Então a escolha da notação se torna uma questão de familiaridade. Pessoalmente, considerando que foi demonstrado que as configurações planares, não-colineares, empilhadas devem ser co-circulares, com a massa a ser inserida/removida, no centro do círculo, a notação  $(n + 1, 1)$  me parece mais intuitiva, mas a utilização da outra notação não gera nenhum prejuízo.

Para a continuação dos estudos desenvolvidos durante a dissertação é natural considerar como direções a serem perseguidas:

1. A conjectura de Chenciner, se o  $n$ -ágono com todas as massas iguais é a única configuração central na qual todos os corpos estão em um círculo e o centro de massa coincide com o centro do círculo.
2. Encontrar um exemplo do caso 2 da Proposição 3.2.5, de configuração co-circular central não centrada, ou comprovar a impossibilidade de existência deste tipo de configuração.
3. A solução dos problemas levantados por Albouy, Cabral e Santos em [2].

Vale notar que a generalização do resultado final obtido no Teorema 5.0.1 seria uma

consequência direta da verificação da conjectura de Chenciner, citada no caso 1, com a comprovação da impossibilidade de existência de C.C.C. não centrada, citada no caso 2.

É importante ressaltar que os caminhos de pesquisa sugeridos se referem a direções de estudo e a obtenção de resultados parciais que, apesar de não resolverem os problemas de forma definitiva, já representem um avanço relevante, é um objetivo a ser alcançado.

# Referências Bibliográficas

- [1] ALBOUY, Alain. The symmetric central configurations of four equal masses
- [2] ALBOUY, Alain; CABRAL, Hildeberto; Santos, Alan. Some problems on the Classical  $n$ -body problem. *Celest Mech. Dyn. Astr.*, 113:369-375, 2012.
- [3] ANDOYER, Marie. Sur l'équilibre relatif de  $n$  corps. *Bulletin astronomique*. vol 23 p. 50, 1906.
- [4] FERNANDES, Antonio; MELLO, Luis. On Stacked Planar Central Configurations with Five Bodies when One Body is Removed. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 12:293?303, 2013.
- [5] FERNANDES, Antonio; MELLO, Luis. On stacked central configurations with  $n$  bodies when one body is removed. *Journal of Mathematical Applications* 405 320?325, 2013.
- [6] FERNANDES, Antônio; MELLO Luis. Correction to: On stacked central configurations with  $n$  bodies when one body is removed. *Qualitative Theory of Dynamical Systems* 18:739-740, 2019.
- [7] FERNANDES, Antonio; SILVA, Anderson; VIDAL Claudio. Some Planar  $(n,1)$ -Stacked Central Configurations. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society* 56:16, 2025.
- [8] FERNANDES, Antonio. Sobre Configurações Centrais do Problema de  $n$  corpos. Configurações Centrais Planares, Espaciais e Empilhadas. Tese apresentada ao Ins-

tituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para Obtenção do Título de Doutor em Ciências. São Paulo. 158p, 2011.

- [9] CHEN, Kuo-Chang; HSIAO, Jun-Shian. Strictly convex central configurations of the planar five-body problem. *Transactions of the American Mathematical Society*, 370(3), 1907-1924. doi:10.1090/tran/7010, 2018.
- [10] CHENCINER, Alain; CUSHMAN Richard; ROBINSON Clark; ZHIHONG, Jeff Xia. **Celestial Mechanics**. Dedicated to Donald Saari for his 60th Birthday. Proceedings of an international conference on celestial mechanics. Evanston, Illinois. American Mathematical Society. 2002.
- [11] CHENCINER, Alain. Are there perverse choreographies? In *New advances in celestial mechanics and Hamiltonian systems*, pages 63-76. Kluwer/Plenum, New York, 2004.
- [12] CORS, Josep; HALL, Glen; ROBERTS, Gareth. Uniqueness results for co-circular central configurations for power-law potentials. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 280-281 44-47, 2014.
- [13] CORS, Josep; ROBERTS, Gareth. Four-Body Co-Circular Central Configurations. *Nonlinearity*, vol.25, 343-270, 2012.
- [14] EULER, Leonhard. De moto rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium, *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop.* 11 (1767) 144-151
- [15] HAGIHARA, Yusuke. *Celestial Mechanics*, vol 1. MIT Press, Massachussets, 1970.
- [16] HAMPTON, Marshaw. Stacked central configurations: new examples in the planar five-body problem. *Nonlinearity* 18, 2299-2304, 2005.
- [17] LAGRANGE, Joseph, *Essai sur le problème de trois corps*, in: *Oeuvres*, vol. 6, Gauthier-Villars, 1873.

- [18] MACMILLAN, Willian; BARTKY, Walter. Permanente Configurations in the Problem of Four Bodies. Transactions of the American Mathematical Society, 34(4), 838-838. doi:10.1090/s0002-9947-1932-1501666-7, 1932.
- [19] MARCUS, Marvin; MINC Henryk. A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Prindle, Weber & Schmidt, Incorporated, Boston, 1964, reimpresso por Dover, 2012.
- [20] MOECKEL, Richard. On Central Configurations. Math Z 205, 499-517, 1990.
- [21] NEWTON, Isac. Philosophi Naturalis Principia Mathematica. Royal Society, London, 1687.
- [22] PERKO, Lawrence; WALTER, Edward. Regular polygon solutions of the n-body problem. Proceedings of the American Mathematical Society Vol. 94, n.2, 301-309, 1985.
- [23] XIANG, Yu; SHUQIANG, Zhu. Classification of  $(n + 1, 1)$ -Stacked Central Configurations in  $R^3$ . Journal of Nonlinear Science (2021) 31:11.
- [24] WINTNER, Aurel, The Analytical Foundations of Celestial Mechanics. Princeton University Press, 2 Ed. 1947.
- [25] ZHIQIANG, Wang. On the Centered Co-Circular Central Configurations for the  $n$ -Body Problem. Journal of Differential Equations 361 (2023) 376-390.