Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Continuidade Absoluta de Folheações e Implicações Dinâmicas

Débora Bispo de Oliveira Costa

Orientador: Prof. Dr. Fernando Pereira Micena

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro inicialmente Institucional e posteriormente da CAPES.

Itajubá, 23 de julho de 2025

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Continuidade Absoluta de Folheações e Implicações Dinâmicas

Débora Bispo de Oliveira Costa

Orientador: Prof. Dr. Fernando Pereira Micena

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria e Topologia.

Itajubá – MG
23 de julho de 2025

Dedico este trabalho à minha família.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela oportunidade de fazer o mestrado e por estar concluindo mais esta importante fase da minha vida. Como diz o salmista: "*Muitas são, Senhor meu Deus, as maravilhas que tens operado para conosco, e os teus pensamentos não se podem contar diante de ti; eu quisera anunciá-los, e manifestá-los, mas são mais do que se podem contar (Sl 40:5).*"

Agradeço também aos meus pais, Edson de Sousa Costa e Maria José Bispo de Oliveira Costa, e à minha irmã Dâmaris Bispo de Oliveira Costa, por todo apoio aos meus estudos, por estarem sempre na torcida por mim e por serem uma motivação para que eu desse sempre o meu melhor. Agradeço ao meu amado esposo, Geovane Rocha de Araujo, por ser meu companheiro nos estudos, por me ajudar quando tive dificuldades nas disciplinas e por me incentivar, em todos os momentos, a continuar estudando, apesar das dificuldades.

Quero agradecer ao meu orientador, Fernando Pereira Micena, pelos conselhos, dedicação, paciência e por tudo o que aprendi sob sua orientação durante o mestrado. Agradeço também, a todos os professores do IMC, em especial ao Luís Fernando, Fábio, Rick, Denis e Mariza.

Agradeço aos meus colegas de mestrado, em especial à Marina, ao Liomar, Estiven, Alex, Alejandro, Brayan, Yelsin, Anderson, Lizzeth e Aldécio, pela recepção, amizade e por todos os momentos vividos.

Sou grata também aos professores da UFPI, Alex Sandro, Erik Lopes, João Santos, pelo apoio e conselhos.

Agradeço o apoio financeiro da CAPES.

Obrigada a todos!

"[...]A sabedoria é a coisa principal: adquire pois a sabedoria; sim, com tudo o que possuis adquire o conhecimento[...]" (Provérbios $4:7$*)*

Resumo

O principal objeto de estudo deste trabalho é a propriedade de continuidade absoluta de folheações invariantes por sistemas dinâmicos. Iniciamos com a construção dinâmica de um exemplo clássico de folheação que não possui essa propriedade [13]. Entre as diversas implicações dinâmicas da continuidade absoluta das folheações estável e instável de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos de classe C^2, destacamos a ergodicidade dos difeomorfismos de Anosov conservativos também de classe C^2 [2]. Por fim, no contexto dos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, investigamos a relação entre os expoentes de Lyapunov centrais e a continuidade absoluta da folheação central, explorando uma generalização do conhecido argumento de Mañé, conforme apresentado no trabalho de Pesin e Hirayama [7]. Deste resulta-se que, em certos contextos do ambiente parcialmente hiperbólico, a propriedade de continuidade absoluta falha genericamente.

Palavras–chave: Continuidade absoluta, folheações, variedades Riemannianas, difeomorfismos parcialmente hiperbólicos.

Abstract

The main object of study in this work is the absolute continuity property of invariant foliations for dynamical systems. We begin by presenting the dynamical construction of a classical example of a foliation that does not possess this property [13]. Among the various dynamical implications of the absolute continuity of the stable and unstable foliations of partially hyperbolic diffeomorphisms of class C^2, we highlight the ergodicity of conservative Anosov diffeomorphisms, also of class C^2 [2]. Finally, in the context of partially hyperbolic diffeomorphisms, we investigate the relationship between the central Lyapunov exponents and the absolute continuity of the central foliation, exploring a generalization of the well-known Mañé argument, as presented in the work of Pesin and Hirayama. This latter work leads to the conclusion that, in certain settings within the partially hyperbolic framework, the absolute continuity property fails generically [7].

Keywords: Absolute continuity, foliations, Riemannian manifolds, partially hyperbolic diffeomorphisms.

Sumário

Resumo iv

Abstract v

Sumário vi

1 Introdução 1

2 Preliminares 3

2.1 Variedades . . . 3

2.2 Folheações . . . 8

2.3 Teoria da medida . . . 10

3 Princípios de Teoria Ergódica 17

3.1 Medidas Invariantes e Recorrência de Poincaré . . . 17

3.2 Teorema Ergódico de Birkhoff . . . 24

3.3 Ergodicidade . . . 29

3.4 Expoentes de Lyapunov e Teorema de Oseledec . . . 32

4 Pesadelo de Fubini 34

4.1 Teorema de Fubini . . . 34

4.2 Pesadelo de Fubini . . . 35

5 Continuidade Absoluta das Folheações 44

5.1 Continuidade Absoluta por Folhas . . . 44

5.2 Noções de Dinâmica Parcialmente Hiperbólica 47
5.3 Continuidade Absoluta das Folheações Estáveis e Instáveis. 51
5.4 Prova da Ergodicidade do difeomorfismo Anosov C^2 55

6 Folheações Não Absolutamente Contínuas **59**
6.1 Conceitos necessários 60
6.2 Resultados 62

Referências Bibliográficas **73**

Capítulo 1

Introdução

O estudo das folheações surgiu a partir do interesse de entender a topologia de variedades, especialmente em resposta a questão de Hopf na década de 1930 sobre a existência de campos vetoriais completamente integráveis na esfera S^3.

As folheações em variedades desempenham um papel importante ao permitir a decomposição desses espaços complexos em subconjuntos de menor dimensão, chamados folhas, que preservam a estrutura local. Essa estrutura facilita o estudo tanto das propriedades dinâmica quanto das características geométricas da variedade. Esse conceito de folheação é fundamental na geometria diferencial e na topologia, com aplicações em áreas como sistemas dinâmicos e geometria complexa.

Folheações absolutamente contínuas estão associadas a boas propriedades dinâmicas. Intuitivamente, uma folheação $\mathcal{F}$ em uma variedade M, é *absolutamente contínua*, se localmente em relação a uma seção transversal é possível aplicar o Teorema de Fubini para o cálculo de integrais em M, para conjuntos de medida de Lebesgue nula.

Existem folheações que não satisfazem essa propriedade do " tipo Fubini ", um exemplo interessante desse fenômeno foi publicado por John Milnor na Mathematical Intelligencer em 1997 [13], da construção de uma folheação na qual as folhas são analíticas, mas intersectam um conjunto de medida positiva em no máximo um único ponto, motivo pelo qual o Teorema de Fubini não se aplica, sendo este exemplo conhecido como o "Pesadelo de Fubini". Nesse caso, o fenômeno decorre do fato de que a folheação construída não

possui a propriedade de continuidade absoluta, o que motiva o estudo sobre esta propriedade, bem como a investigação das condições sob as quais uma folheação é absolutamente contínua e se tal fenômeno se manifesta em contextos mais gerais.

No caso dos Difeomorfismos de Anosov conservativos de classe C^2, a continuidade absoluta das folheações estáveis e instáveis implicam na ergodicidade em relação a medida de Lebesgue. No entanto, para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos existem exemplos robustos em que a folheação central falha em ter a propriedade de continuidade absoluta.

O objetivo deste trabalho é estudar a propriedade de continuidade absoluta de folheações, em particular a continuidade absoluta da folheação central de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, explorando argumento de Mañé e algumas de suas generalizações. No primeiro capítulo, apresenta-se a introdução, No segundo capítulo reúne alguns preliminares necessários ao contexto em que os resultados são desenvolvidos, como as variedades diferenciáveis e Riemannianas, folheações e conceitos de teoria da medida. No terceiro capítulo, aborda algumas ferramentas de Teoria Ergódica, que possibilitam o estudo do comportamento de sistemas dinâmicos que permanecem invariantes sob a ação da dinâmica. Nesse capítulo, são tratados temas como medidas invariantes, o Teorema Ergódico de Birkhoff e os expoentes de Lyapunov.

No quarto capítulo, apresenta-se a construção da folheação conhecida como *Pesadelo de Fubini*, baseada no artigo de John Milnor [13]. O quinto capítulo é dedicado à apresentação das definições de continuidade absoluta de folheações, conforme o artigo de C. Pugh, M. Viana e A. Wilkinson [18], além de conceitos relacionados a sistemas dinâmicos hiperbólicos e parcialmente hiperbólicos, nesse contexto, discute-se também a implicação da continuidade absoluta das folheações estável e instável na ergodicidade dos difeomorfismos de Anosov de classe C^2, conforme demonstrado por M. Brin e G. Stuck [2]. Por fim, no sexto capítulo, são apresentados os resultados sobre a não continuidade absoluta da folheação central de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, obtidos por meio de um mecanismo conhecido como argumento de Mañé, com base no artigo de M. Hirayama e Y. Pesin [7].

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos chaves, sobre variedades, folheações e teoria da medida que serão base para a compreensão dos resultados posteriores.

2.1 Variedades

Variedades Diferenciáveis

Definição 2.1 ([8]). *Seja M um espaço topológico. Um* ***sistema de coordenadas locais*** *ou* ***carta local*** *em M é um homeomorfismo de um subconjunto aberto $U \subset M$ sobre um aberto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que m é a* ***dimensão*** *de $\varphi : U \to \varphi(U)$.*

Para cada $x \in U$ tem-se que $\varphi(x) = (\varphi^1(x), ..., \varphi^m(x))$. Os números $\varphi^i = \varphi^i(x)$, $i = 1, ..., m$ são chamados as coordenadas do ponto $x \in M$ no sistema φ.

Definição 2.2 ([8]). *Um* ***atlas*** *de dimensão m sobre um espaço topológico M é uma coleção $\mathfrak{A} = \{\varphi : U \to \mathbb{R}^m\}$ de cartas locais em M cujos domínios U cobrem M. Os domínios U dos sistemas $\varphi \in \mathfrak{A}$ são chamados as* ***vizinhanças coordenadas*** *de $\mathfrak{A}$.*

Definição 2.3 ([8]). *Um espaço topológico M no qual existe um atlas de dimensão m chama-se uma* ***variedade topológica*** *de dimensão m. Em outras palavras, M é uma variedade topológica de dimensão m, se cada ponto de M tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto do $\mathbb{R}^m$.*

Dadas as cartas locais $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ e $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ no espaço topológico M, tais que $U \cap V \neq \varnothing$, cada ponto $x \in U \cap V$ tem coordenadas $\varphi^i = \varphi^i(x)$ no sistema φ e coordenadas $\psi^i = \psi^i(x)$ relativamente ao sistema ψ.

A correspondência $(\varphi^1(x), ..., \varphi^m(x)) \leftrightarrow (\psi^1(x), ..., \psi^m(x))$ estabelece um homeomorfismo $\Phi_{\varphi\psi} = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ que é chamado **mudança de coordenadas**. Um atlas $\mathfrak{A}$ sobre um espaço topológico M diz-se **diferenciável**, de classe $C^r (r \geq 1)$,

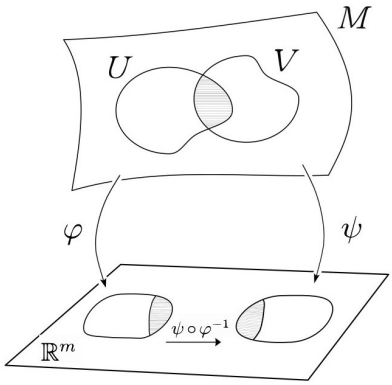


Figura 2.1: Mudança de Coordenadas.

se todas as mudanças de coordenadas $\Phi_{\varphi\psi}$, $\varphi, \psi \in \mathfrak{A}$ são aplicações de classe C^r. Como $\Phi_{\psi\varphi} = (\Phi_{\varphi\psi})^{-1}$, segue-se que os $\Phi_{\varphi\psi}$ são de fato, difeomorfismos C^r.

Seja $\mathfrak{A}$ um atlas de dimensão m e classe C^r num espaço topológico M. Uma carta local $\phi : W \to \mathbb{R}^m$ em M diz-se **admissível** relativamente a $\mathfrak{A}$ se para todo sistema de coordenadas locais $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$, pertencente a $\mathfrak{A}$ com $U \cap W \neq \varnothing$, as mudanças de coordenadas $\Phi_{\varphi\phi}$ e $\Phi_{\phi\varphi}$ são de classe C^r. Em outras palavras, se $\mathfrak{A} \cup \{\phi\}$ é ainda um atlas de classe C^r em M.

Um atlas $\mathfrak{A}$, de dimensão m e classe C^r sobre M, diz-se **máximo** quando contém todas as cartas locais que são admissíveis em relação a $\mathfrak{A}$.

Definição 2.4 ([8]). *Uma **variedade diferenciável** de dimensão m e classe C^r é um par ordenado $(M, \mathfrak{A})$ onde M é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e $\mathfrak{A}$ é um atlas máximo de dimensão m e classe C^r sobre M.*

Para denotar que M é uma variedade de dimensão m usaremos às vezes a notação M^m.

Espaço Tangente

Seja M^m uma variedade de classe C^r e fixado um ponto $x \in M$ denotemos por $\mathcal{C}_x(M)$ o conjunto de todas as curvas diferenciáveis C^r, $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ com $\delta > 0$ e $\gamma(0) = x$.

Definição 2.5 ([8]). *Seja, $\gamma \in C_x(M)$ e $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ um sistema de coordenadas em M. No sistema de coordenadas (φ, U) o* ***vetor tangente*** *a x é dado por $(\varphi \circ \gamma)'(0) = v_x$.*

Diremos que duas curvas $\gamma,\ \lambda \in \mathcal{C}_x(M)$ são **equivalentes** e escrevemos $\gamma \sim \lambda$ quando existir um sistema de coordenadas locais (φ, U) em M, com $x \in U$, tal que, $\varphi \circ \gamma = (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^m$ e $\varphi \circ \lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^m$ tem o mesmo vetor tangente em $t = 0$, isto é,

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \lambda)'(0). \tag{2.1}$$

Observe que a igualdade (2.1) independe da escolha do sistema de coordenadas (U, φ) em M, $x \in U$. Resulta disto que a relação $\gamma \sim \lambda$ é de fato uma relação de equivalência em $\mathcal{C}_x(M)$.

A derivada de uma curva diferenciável $\gamma \in \mathcal{C}_x(M)$, ou *vetor tangente à curva* é por definição a classe de equivalência de γ. Ou seja $[\gamma] = \dot{\gamma} = \{\lambda \in \mathcal{C}_x(M) : \gamma \sim \lambda\}$. Portanto dados $\gamma, \lambda \in \mathcal{C}_x(M)$ tem-se $[\gamma] = [\lambda]$ se, somente se, vale (2.1) para algum (logo para todo) sistema de coordenadas locais (U, φ) em M, $x \in U$.

Definição 2.6 ([8]). *O conjunto quociente $\mathcal{C}_x(M)/\sim$ é chamado* ***espaço tangente*** *a M e é denotado por T_xM.*

Desse modo, dizemos que um **vetor tangente** a M em x é a derivada de uma curva diferenciável em x. E o **espaço tangente** de M em x é o conjunto de todos o vetores tangentes em x e é denotado por T_xM. Assim,

$$T_xM = \{v_x : v_x \ \text{ é derivada de uma curva diferenciável}\}.$$

Fixado um ponto x em M temos que T_xM é um espaço vetorial (usando a adição em qualquer um dos sistemas de coordenadas em x). A união disjunta dos vetores tangentes

em todos os pontos de M define o **fibrado tangente** da variedade M, que é denotado por TM. Assim,

$$TM = \{(x, v_x) : x \in M \text{ e } v_x \text{ é um vetor tangente em } x\}.$$

Derivada de uma aplicação diferencial

Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis, variedades de classe C^r, $(r \geqslant 1)$ e suponhamos que $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ são atlas de classe C^r em M e N respectivamente. Dizemos que uma aplicação $f : M \to N$ é **diferenciável** de classe C^k, $k \leqslant r$, se f é contínua e para cada $x \in M$ existem cartas locais $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ e $(V, \psi) \in \mathfrak{B}$, com $x \in U$ e $f(U) \subset V$ tais que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

é de classe C^k.

Dizemos que f é de classe $C^k (k \leqslant r)$, se para cada $x \in M$, existem sistemas de coordenadas locais $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ em M, e $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ em N, com $x \in U$ e $f(U) \subset V$ tais que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ é de classe C^k.

Um **difeomorfismo** $f : M \to N$ é uma bijeção diferenciável, cuja inversa é também diferenciável. Se ambas f e f^{-1} são de classe C^k, dizemos que f é um difeomorfismo de classe C^k.

Definição 2.7 ([3]). *A **derivada da aplicação diferenciável** $f : M \to N$ no ponto x é uma transformação linear $Df(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$ que associa a cada $v = [\gamma] \in T_xM$ o elemento $Df(x) \cdot v = [f \circ \gamma] \in T_{f(x)}N$ a classe de equivalência da curva $f \circ \gamma \in \mathcal{C}_x(M)$.*

Subvariedades

Um subconjunto $N \subset M^m$ é chamado **subvariedade** de M de **dimensão** n e classe $C^r (r \geqslant 1)$, se para todo $x \in N$ existe uma carta local C^r (U, φ) com $\varphi(U) = V \times W$ onde $0 \in V \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ são bolas abertas euclidianas, tal que $\varphi(N \cap U) = V \times \{0\}$. Na situação acima dizemos também que a codimensão de N é $m - n = \dim M - \dim N$.

Segue-se da definição que uma subvariedade N de M é em particular uma variedade C^r. Por exemplo S^n é uma subvariedade de dimensão n e classe C^∞ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Variedades Riemannianas

Definição 2.8 ([8]). *Uma* ***métrica riemanniana*** *numa variedade diferenciável M, é uma correspondência que associa continuamente a cada ponto $x \in M$, um produto interno no espaço tangente T_xM.*

Seja g uma métrica riemanniana em M. Indicamos por $g_x(u, v)$, ou quando não há perigo de confusão, $< u, v >_x$ o produto interno dos vetores $u, v \in T_xM$. O **comprimento** ou **norma** do vetor tangente $u \in T_xM$ é definido por

$$|u|_x = \sqrt{g_x(u, u)}.$$

Definição 2.9 ([8]). *Uma variedade diferenciável M, onde está definida uma métrica riemanniana chama-se uma* ***variedade riemanniana****. Em termos mais preciso, trata-se de um par (M, g) onde g é uma métrica riemanniana na variedade M.*

Em uma variedade riemanniana M, podemos definir o **comprimento de um caminho** $\alpha : [a, b] \to M$ de classe C^1, como sendo

$$\ell(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|dt.$$

Nesta expressão, $|\alpha'(t)| = \sqrt{< \alpha'(t), \alpha'(t) >_{\alpha'(t)}}$ é a norma do vetor tangente $\alpha'(t) \in T_{\alpha'(t)}M$.

Um caminho $\alpha : [a, b] \to M$ diz-se **seccionalmente de classe C^1**, se α for contínuo e existir uma partição $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ tal que $\alpha_i = \alpha|_{[t_i,t_{i+1}]}$ é de classe C^1, para todo $i = 0, 1, ..., k - 1$.

Dados dois pontos arbitrários, $x, y \in M$, existe um caminho $\gamma : [0, 1] \to M$, seccionalmente de classe C^r, tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Definimos a **distância intrínseca** $d(x, y)$ entre dois pontos x, y de uma variedade riemanniana conexa como

$$d(x, y) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \text{ é seccionalmente } C^1 \text{ em } M \text{ ligando } x \text{ a } y\}.$$

2.2 Folheações

De maneira intuitiva, uma folheação de dimensão k, de uma variedade diferenciável M^m, é uma decomposição de M, em subvariedades de dimensão k, chamadas folhas, as quais se aglomeram localmente como subconjuntos de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$, com a segunda coordenada contante. Mais precisamente.

Definição 2.10 ([2]). *Seja $\mathcal{F}$ uma partição de uma variedade diferenciável M^m em subvariedades C^1 de dimensão k. Para $x \in M$, seja $\mathcal{F}(x)$ a subvariedade contendo x. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma* ***folheação contínua k-dimensional com folhas C^1*** *(ou simplesmente* ***folheação****) se para todo $x \in M$ existe uma vizinhança U e um homeomorfismo $\varphi : B^k \times B^{m-k} \longrightarrow U$, onde $B^i \subset \mathbb{R}^i$, $i \in \{k, m-k\}$, são bolas unitárias tal que:*

1. *Para cada $z \in B^{m-k}$, o conjunto $\varphi(B^k \times \{z\})$ é a componente conexa de $\mathcal{F}(\varphi(0,z)) \cap U$ contendo $\varphi(0,z)$ e*

2. *$\varphi(\cdot, z)$ é de classe C^1 e depende continuamente de z na topologia C^1.*

Cada subvariedade $\mathcal{F}(x)$ da folheação é chamada ***folha*** *de $\mathcal{F}$.*

O par (U, φ) como definido acima é chamado uma **carta de coordenadas da folheação**. Os conjuntos $\varphi(B^k \times \{z\})$ são chamados **folhas locais** (ou **placas**). Para $x \in U$, denotamos $\mathcal{F}_U(x)$ a folha local contendo x.

Os conjuntos $\varphi(\{y\} \times B^{m-k})$ são chamados **transversais locais**.

Definição 2.11 ([2]). *Uma subvariedade diferenciável $\mathcal{T}^{m-k} \subset M$ é uma* ***transversal*** *se $\mathcal{T}$ for transversal às folhas de $\mathcal{F}$.*

Observação 2.12. *Note que para a variedade M com $dim(M) = m \geqslant 2$ e uma folheação $\mathcal{F}$ com folhas de $dim(\mathcal{F}(p)) = k \ \ \forall p \in U$, se $\mathcal{T}$ é uma transversal local a $\mathcal{F}$, então $\forall p \in U$, as folhas $\mathcal{F}(p)$ e $\mathcal{T}$ são tais que:*

1. *$U \cap \mathcal{F}(p) \cap \mathcal{T} = \{p\}$;*

2. *$T_p\mathcal{F}(p) \oplus T_p\mathcal{T} = T_pM$.*

Uma folheação contínua $\mathcal{F}$ é uma folheação C^k, $(k \geqslant 1)$ se a carta φ pode ser escolhida para ser C^k.

Definição 2.13 ([7]). *Localmente, uma* ***holonomia*** *(ou* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$***-holonomia***) *entre duas transversais* $\mathcal{T}_1$ *e* $\mathcal{T}_2$ *à folheação* $\mathcal{F}$ *é a aplicação*

$$h_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2} : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2,$$

definida por

$$h_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2}(p) = \mathcal{F}(p) \cap \mathcal{T}_2.$$

Uma folheação $\mathcal{F}$ em uma variedade diferenciável M, define uma distribuição contínua $E = T\mathcal{F}$ no fibrado tangente TM, a qual consiste nos espaços tangentes às folhas. Uma distribuição E é dita **integrável**, se for tangente a uma folheação, isto é, se $E(x) = T_x\mathcal{F}(x)$ para cada $x \in M$.

2.3 Teoria da medida

Definição 2.14 ([20]). *Uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um conjunto M é chamada de*

***σ-álgebra** se possui as seguintes propriedades:*

(i) $M \in \mathcal{A}$;

(ii) *Se* $A \in \mathcal{A}$, *então* $A^c \in \mathcal{A}$;

(iii) *Se* $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathcal{A}$, *então* $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Definição 2.15 ([20]). *Um **espaço mensurável** é uma dupla $(M, \mathcal{A})$ onde M é um conjunto e $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de M. Os elementos de $\mathcal{A}$ são chamados **conjuntos mensuráveis** do espaço.*

Definição 2.16 ([2]). *Dados dois espaços mensuráveis $(M, \mathcal{A})$ e $(N, \mathcal{B})$, dizemos que uma aplicação $f : M \to N$ é **mensurável** se para todo conjunto $A \in \mathcal{B}$, tem-se que $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.*

Observação 2.17 ([20]). *Se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra em M, como consequência imediata da Definição 2.14, temos que*

(i) $\varnothing \in \mathcal{A}$;

(ii) *Se* $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ *então,* $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

(iii) $A_1, A_2, ...A_n \in \mathcal{A}$ *então,* $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$.

Definição 2.18 ([20]). *Seja M um espaço topológico. A menor σ-álgebra $\mathcal{B}$ em M tal que todo aberto de M pertence a $\mathcal{B}$ é chamada **σ-álgebra de Borel**, e os elementos de $\mathcal{B}$ são chamados **conjuntos de Borel** ou **borelianos** de M.*

Quando M é um espaço mensurável com a σ-álgebra de Borel, N um espaço topológico e $f : M \to N$ é uma função, dizemos que f é *mensurável*, se $f^{-1}(V)$ é um conjunto mensurável em M, para cada aberto V em N.

Definição 2.19 ([20]). *Uma* ***medida positiva*** *em* $(M, \mathcal{A})$ *é uma função* $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *tal que* $\mu(\varnothing) = 0$ *e cuja imagem* $[0, +\infty]$ *é* σ*-aditiva, isto é,*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j), \quad \textit{para qualquer coleção } \{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$$

de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{A}$*. A tripla* $(M, \mathcal{A}, \mu)$ *é chamada* ***espaço de medida****.*

Quando vale $\mu(M) < \infty$, dizemos que μ é uma *medida finita*. Se $\mu(M) = 1$, dizemos que μ é uma medida de **probabilidade**, neste caso $(M, \mathcal{A}, \mu)$ é um *espaço de probabilidade*. Escrevemos (M, μ) quando não é necessário especificar a σ-álgebra.

Teorema 2.20 ([20]). *Seja* μ *uma medida positiva em uma* σ*-álgebra* $\mathcal{A}$*. Então,*

(a) $\mu(\varnothing) = 0$*;*

(b) $\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$ *se* $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ *são dois a dois disjuntos;*

(c) $A \subset B$ *implica que* $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ *se* $A, B \in \mathcal{A}$*;*

(d) $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ *se* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathcal{A}$ *e* $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$;

(e) $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ *se* $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathcal{A}$, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ *e* $\mu(A_1) < \infty$.

Observação 2.21 ([2]). *Um mensurável* $A \in (M, \mu)$ *com* $\mu(A) = 0$ *é chamado* ***conjunto de medida nula****. Dizemos que* $A \in (M, \mu)$ *tem* ***medida total*** *se seu complementar* A^c *tem medida nula.*

Observação 2.22 ([2]). *Em um espaço de medida* (M, μ) *dizemos que uma propriedade é válida para (* $\mod 0$*) em* M*, ou que é válida em* ***μ-quase todo ponto*** **(μ-q.t.p.)** $x \in M$*, se é válida em todo* M *exceto, possivelmente num conjunto de medida nula. Também usamos a palavra* ***essencialmente*** *para indicar que uma propriedade é válida para (* $\mod 0$*).*

Definição 2.23 ([14]). *Seja* $(M, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida. Diz-se que* μ *é* ***atômica*** *se existe algum ponto* $x \in M$*, tal que* $\mu(\{x\}) > 0$*. Tais pontos são chamados de* ***átomos****.*

Definição 2.24 ([20]). *Seja M um espaço mensurável e $A \subset M$ é um conjunto mensurável, a função $\chi_A : M \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in A \\ 0, & se\ x \notin A \end{cases}$$

é chamada ***função característica*** *do conjunto A.*

Nessas condições, a função característica é uma função mensurável. Também usaremos em alguns momentos a notação $\mathbb{1}_A$ para denotar a função característica do conjunto A.

Definição 2.25 ([20]). *Seja $(M, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, com μ positiva. O espaço das* ***funções Lebesgue integráveis*** *em M é definido por,*

$$L^1 = L^1(\mu) = \left\{ f : M \to \mathbb{C} \text{ mensuráveis } : \int_M |f|\, d\mu \ < \infty \right\}.$$

Teorema 2.26 (**Teorema da Convergência Monótona** [20]). *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis em M e suponha que*

(a) $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \leqslant \cdots \leqslant \infty$ *para todo $x \in M$,*

(b) $f_n(x) \to f(x)$ *quando $n \to \infty$, para todo $x \in M$. Então f é mensurável, e*

$$\int_M f_n\, d\mu \longrightarrow \int_M f\, d\mu \quad quando \quad n \to \infty.$$

Teorema 2.27 (**Teorema da Convergência Dominada** [20]). *Seja $(M, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, com μ positiva. Suponha que $\{f_n\}$ é uma sequência de funções complexas mesuráveis em M tal que $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$ existe para cada $x \in M$. Se existe uma função $g \in L^1(\mu)$ ou seja integrável, tal que $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ $n = 1, 2, \ldots$ $x \in M$, então $f \in L^1(\mu)$,*

$$\lim_{n \to \infty} \int_M |f_n - f| = 0 \tag{2.2}$$

e

$$\lim_{n \to \infty} \int_M f_n\, d\mu = \int_M f\, d\mu. \tag{2.3}$$

Observação 2.28 ([20]). *Se $f, g : M \to N$ são mensuráveis e $\mu(\{x \in M : f(x) \neq g(x)\}) = 0$, dizemos que $f = g$ μ-q.t.p em M e escrevemos $f \sim g$.*

Definição 2.29 ([20]). *Se $0 < p < \infty$ e $f : M \to \mathbb{C}$ é mensurável define-se,*

$$\|f\|_p = \left\{ \int_M |f|^p \, d\mu \right\}^{1/p}$$

e $L^p(\mu) = L^p(M, \mu) = \{f : M \to \mathbb{C} \text{ mensurável} : \|f\|_p < \infty\}$.

Observação 2.30 ([20]). *Se $0 < p < \infty$ o espaço $L^p(M, \mu)$ consiste das classes de equivalência $\mod 0$, em que, $f \sim g \iff \|f - g\|_p = 0 \iff f = g$ μ-q.t.p em M.*

Observação 2.31 ([20]). *Sejam $(f_n) \in L^p$ e $f \in L^p$ dizemos que (f_n) **converge para** f **em** L^p se*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Lema 2.32 (**Lema de Borel-Cantelli** [14]). *Seja $(E_n)_n$ uma família enumerável de conjuntos mensuráveis. Seja F o conjunto dos pontos que pertencem a E_n para infinitos valores de n, ou seja, $F = \limsup_n E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ então $\mu(F) = 0$.*

Demonstração: Considere $F_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$ dessa forma $F = \limsup_n E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$. Observe que

$$\mu(F_k) = \mu(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \mu(E_n), \tag{2.4}$$

como por hipótese $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$, isto é, esta série converge, e isto implica que,

$$\sum_{n=k}^{\infty} \mu(E_n) \to 0 \text{ quando } k \to \infty$$

Logo por (2.4) como $\mu(F_k) > 0$ segue que $\mu(F_k) \to 0$ quando $k \to \infty$. Observe que $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ e $F_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow \mu(F_1) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \underset{Hip.}{<} \infty$, como $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ segue pelo Teorema 2.20 que

$$\mu(F) = \lim_{k\to\infty} \mu(F_k) = 0 \quad \therefore \quad \mu(F) = 0.$$

■

Definição 2.33 ([20]). *Sejam μ uma medida positiva e ν uma medida positiva (ou complexa) definidas em um espaço mensurável $(M, \mathcal{A})$. Dizemos que ν é* ***absolutamente contínua*** *com respeito a μ, e escrevemos $\nu \ll \mu$, se μ e ν satisfazem*

$$\nu(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad \textit{para o qual } \mu(A) = 0.$$

Quando $\nu \ll \mu$ e $\mu \ll \nu$, dizemos que μ e ν são *equivalentes* e escrevemos $\mu \sim \nu$.

Teorema 2.34 (**Teorema de Radon-Nikodym** [20]). *Sejam $(M, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, μ e ν medidas positivas finitas em $\mathcal{A}$, tais que $\nu \ll \mu$, então existe uma única função $\rho \in L^1(\mu)$ tal que*

$$\nu(A) = \int_A \rho \, d\mu \quad \textit{para todo } A \in \mathcal{A}.$$

Chamamos ρ de *densidade*, ou *derivada de Radon-Nikodym* de ν com relação a μ e escrevemos

$$\rho = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Ponto de Densidade([14]) Seja m a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$. Dado um subconjunto mensurável A, de $\mathbb{R}^d$, dizemos que um ponto $a \in A$ é um *ponto de densidade* de A se este conjunto preenche a maior parte de qualquer pequena vizinhança de a, isto é,

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{m(B(a, \delta) \cap A)}{m(B(a, \delta)} = 1. \tag{2.5}$$

Desintegração de Rokhlin

Definição 2.35. *Seja $(M, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Uma partição $\mathcal{P}$ de M é uma família de subconjuntos mensuráveis, dois a dois disjuntos, tal que, $\bigcup_{A \in \mathcal{P}} A = M$.*

Sejam $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $\mathcal{P}$ uma partição de M. Podemos definir em M a seguinte relação de equivalência $x \sim y \iff \mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(y)$, onde $\mathcal{P}(x)$ é o elemento da partição $\mathcal{P}$ que contém x.

Assim o conjunto quociente $M/\sim = \mathcal{P} = \{\mathcal{P}(x) : x \in M\}$ pode ser munido de uma estrutura de espaço de probabilidade, da seguinte forma: Considere primeiramente

a projeção natural

$$\pi : M \to \mathcal{P}$$
$$x \mapsto \mathcal{P}(x)$$

em seguida, defina em $\mathcal{P}$ a σ-álgebra $\hat{\mathcal{B}} = \{\mathcal{Q} \subset \mathcal{P} : \pi^{-1}(\mathcal{Q}) \in \mathcal{B}\}$ e a seguinte medida de probabilidade,

$$\hat{\mu}(\mathcal{Q}) = \pi * \mu = \mu(\pi^{-1}(\mathcal{Q})) \text{ para cada } \mathcal{Q} \in \hat{\mathcal{B}}.$$

Dessa forma, obtemos um espaço de probabilidade $(\mathcal{P}, \hat{\mathcal{B}}, \hat{\mu})$.

Dizemos que uma sequência de partições enumeráveis $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente ou que $\mathcal{P}_i$ é menos fina que $\mathcal{P}_{i+1}$, e escrevemos $\mathcal{P}_i \prec \mathcal{P}_{i+1}$ se todo elemento de $\mathcal{P}_{i+1}$ está contido em algum elemento de $\mathcal{P}_i$. Denotando

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n = \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n : \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n \neq \varnothing \text{ e } P_n \in \mathcal{P}_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \right\},$$

segue que $\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ é uma partição mais fina, tal que $\mathcal{P}_n \prec \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.36 ([14]). *Sejam $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade, e $\mathcal{P}$ uma partição de M. Dizemos que $\mathcal{P}$ é uma* ***partição mensurável****, se existe algum conjunto mensurável $M_0 \subset M$, com $\mu(M_0) = 1$, tal que, restrito a M_0, a partição $\mathcal{P}$ pode ser escrita como o* ***limite crescente*** *de uma sequência de partições enumeráveis $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots$, ou seja:*

$$\mathcal{P} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n,$$

para alguma sequência crescente $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec \ldots \prec \mathcal{P}_n \prec \ldots$ de partições enumeráveis.

Definição 2.37 ([14]). *Sejam $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade, e $\mathcal{P}$ uma partição de M. Uma* ***desintegração*** *de uma medida μ relativamente a $\mathcal{P}$ é uma família $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$ de probabilidades em M tal que, para todo mensurável $A \subset M$:*

(a) *$\mu_P(P) = 1$ para $\hat{\mu}$-quase todo $P \in \mathcal{P}$;*

(b) *a aplicação $\mathcal{P} \to \mathbb{R}$, definida por $P \mapsto \mu_P(A)$ é $\hat{\mu}$-mensurável;*

(c) $\mu(A) = \int \mu_P(A)\ d\hat{\mu}(P)$.

Teorema 2.38 (**Desintegração de Rokhlin** [14])**.** *Se* $(M, \mathcal{B}, \mu)$ *um espaço de probabilidade com* M*, um espaço métrico completo e* $\mathcal{P}$ *uma partição mensurável de* M*. Então, a probabilidade* μ *admite alguma desintegração relativamente a* $\mathcal{P}$*.*

Capítulo 3

Princípios de Teoria Ergódica

A teoria ergódica, estuda o comportamento de sistemas dinâmicos relativamente a medidas que permanecem invariantes sob a ação da dinâmica. Mais precisamente, busca-se descrever as propriedades que são válidas para quase toda trajetória do sistema em relação à medida invariante.

3.1 Medidas Invariantes e Recorrência de Poincaré

Definição 3.1 ([14]). *Sejam $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $f : M \to M$ uma transformação mensurável. Dizemos que a medida μ é* ***invariante por*** *f (ou* ***f-invariante****) se*

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A), \quad \text{para todo mensurável } A \subset M. \tag{3.1}$$

Neste caso, dizemos também que f ***preserva*** *μ.*

Proposição 3.2 ([14]). *Sejam $f : M \to M$ uma transformação mensurável e μ uma medida em M. Então, f preserva μ se, e somente se,*

$$\int \phi \, d\mu = \int \phi \circ f \, d\mu, \tag{3.2}$$

para toda função μ-integrável $\phi : M \to \mathbb{R}$.

Demonstração: ($\Leftarrow$) Suponha que f satisfaz (3.2) para toda função μ-integrável $\phi : M \to \mathbb{R}$. Então, dado $A \in \mathcal{B}$, tome $\phi = \chi_A$ assim,

$$\mu(f^{-1}(A)) = \int_M \chi_{f^{-1}(A)}\, d\mu = \int_M \chi_A \circ f\, d\mu \underset{(3.2)}{=} \int_M \chi_A\, d\mu = \mu(A). \tag{3.3}$$

Portanto, f-preserva μ.

($\Rightarrow$) Suponha agora que f preserva μ. Com um raciocínio análogo, a equação em (3.3) temos que f satisfaz (3.2) para toda função característica. Pela linearidade da integral também vale para funções simples, por ser uma combinação finita de funções características. De fato, dada uma função simples $s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}$ então,

$$\int_M s\, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap M) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i) \underset{(3.1)}{=} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(f^{-1}(A_i)) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_M \chi_{f^{-1}(A)}\, d\mu$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_M \chi_{A_i} \circ f\, d\mu = \int_M \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_A \circ f\, d\mu = \int_M s \circ f\, d\mu \Rightarrow \int_M s\, d\mu = \int_M s \circ f\, d\mu. \tag{3.4}$$

Sabemos que para qualquer função não-negativa $\phi : M \to [0, +\infty)$ integrável existe uma sequência crescente de funções simples $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M tais que $0 \leq s_1 \leq ... \leq \phi$ $s_n(x) \to \phi(x)$ para todo $x \in M$ assim, usando o teorema da convergência monótona duas vezes obtemos

$$\int_M \phi\, d\mu \underset{T.C.M.}{=} \lim_{n\to\infty} \int_M s_n\, d\mu \underset{(3.4)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_M s_n \circ f\, d\mu \underset{T.C.M.}{=} \int_M \phi \circ f\, d\mu. \tag{3.5}$$

Por fim, para uma função $\phi : M \to \mathbb{R}$ integrável qualquer, basta observar que $\phi = \phi^+ - \phi^-$, em que ϕ^+ e ϕ^- são ambas funções positivas, e procedendo de forma análoga ao que foi feito em (3.5) para as partes positivas e negativas de ϕ, obtemos o resultado para o caso geral. Portanto, f satisfaz (3.2) para toda função μ-integrável. ■

Teorema 3.3 (**Teorema de Recorrência de Poincaré** [14])**.** *Sejam $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida finita e $f : M \to M$ uma transformação mensurável que preserva μ. Se $A \subset M$ é um conjunto mensurável com $\mu(A) > 0$. Então, para μ-quase todo ponto $x \in A$ existem infinitos valores de $n \in \mathbb{N}$ para os quais $f^n(x) \in A$.*

Demonstração: Seja $A \in M$ um conjunto mensurável com medida positiva. Considere A_0 o conjuntos dos pontos $x \in A$ que nunca retornam para A, ou seja,

$$A_0 = \{x \in A : f^k(x) \notin A \ \forall \ k \geq 1\}.$$

Note que A_0 é mensurável. Pois, A é mensurável e tomando $B = A^c$, segue que B também é mensurável, assim temos:

$$A_0 = A \cap f^{-1}(B) \cap f^{-2}(B) \cap ... = A \cap (\bigcap_{j=1}^{+\infty} f^{-j}(B))$$

em que $f^{-j}(B)$ é mensurável para todo $j \geq 1$, logo $\bigcap_{j=1}^{+\infty} f^{-j}(B)$ também é mensurável e portanto, A_0 é mensurável.

Afirmação 1. O conjunto A_0 tem medida nula. Para provarmos esta afirmação precisamos de outra afirmação.

Afirmação 2. As pré-imagens $f^{-j}(A_0)$ são disjuntas duas a duas.

Prova da afirmação 2. Suponha por absurdo que exista $x \in f^{-n}(A_0) \cap f^{-m}(A_0)$, $n \geq 1, m \geq 1$ e $n \neq m$, sem perda de generalidade seja $m > n$. Tome $y = f^n(x)$ assim, $y \in A_0$ e $f^{m-n}(y) = f^m(x) \in A_0$, e como $A_0 \subset A$, temos que $f^{m-n}(y) \in A$, que é uma contradição com a definição do conjunto A_0. Portanto, as pré-imagens de A_0 são disjuntas duas a duas.

Prova da afirmação 1. Como f preserva a medida μ, temos que $\mu(f^{-n}(A_0)) = \mu(A_0)$ para todo $n \geq 1$. Além disso, μ é uma medida finita, assim, $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(A_0)) < +\infty$, com isto,

$$\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(A_0)) \underset{Af.2.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mu(f^{-n}(A_0)) \underset{f \ pres.\mu}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_0) < +\infty.$$

Como a série à direita tem termos constantes e converge pela finitude da medida, segue que $\mu(A_0) = 0$. Agora, considere F o conjunto dos pontos $x \in A$, que retornam ao conjunto A apenas um número finito de vezes. Observe que $x \in F$, implica que para algum $k \in \mathbb{N}$ $f^k(x) \in A_0$, ou seja,

$$F \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} (f^{-n}(A_0))$$

Como $\mu(A_0) = 0$ e f preserva μ, temos que

$$\mu(F) \leq \mu(\bigcup_{n=0}^{\infty}(f^{-n}(A_0))) = \sum_{n=0}^{\infty}\mu(f^{-n}(A_0)) = \sum_{n=0}^{\infty}\mu(A_0) = 0.$$

Portanto, $\mu(F) = 0$. Isto conclui a demonstração. ■

Exemplos

A seguir, temos alguns exemplos com medidas invariantes por transformações, que nos ajudam a compreender o significado do Teorema de Recorrência de Poincaré.

Observação 3.4. *No Teorema de Recorrência de Poincaré nota-se que a hipótese* ***medida finita*** *(ou de probabilidade) não pode ser retirada, veja o exemplo a seguir.*

Exemplo 1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 1$, com a σ-álgebra de Borel e m a medida de Lebesgue. A aplicação f preserva a medida de Lebesgue, mas não possui pontos recorrentes.*

De fato, como f é contínua, ela é mensurável. Além disso a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ coincide com o comprimento dos intervalos, ou seja, para qualquer intervalo não-degenerado $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, temos que $m(I) = |b - a|$. Como $f^{-1}(I) = (a - 1, b - 1)$ segue que:

$$m(f^{-1}(I)) = |(b - 1) - (a - 1)| = |b - a| = m(I),$$

o que mostra que f preserva a medida de Lebesgue. Por outro lado, f não possui pontos recorrentes. De fato, dado qualquer intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e qualquer ponto $x \in I$, pela propriedade arquimediana existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $f^k = x + k \notin I$. Assim,nenhum ponto retorna infinitamente muitas vezes ao intervalo I. Esse fenômeno ocorre porque a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$é infinita, impedindo que os conjuntos tenham recorrência global garantida, como ocorreria em espaços com medida finita.

Exemplo 2 (**Rotações no círculo** [14])**.** *Identificamos o* ***círculo*** *S^1 com o quociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, isto é, dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ são identificados quando $x - y \in \mathbb{Z}$. Assim, podemos*

escrever:

$$S^1 = \mathbb{R}/\sim, \quad \textit{onde} \quad x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z},$$

com $\sim$ *representa a relação de equivalência em* $\mathbb{R}$*. Cada classe de equivalência é dada por*

$$[x] = \{x + m : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Com essa identificação, o círculo herda de $\mathbb{R}$ *uma estrutura de grupo abeliano.com as operações:*

$$[x] + [y] = [x + y], \quad [x] - [y] = [x - y].$$

Também é possível identificar S^1 *com o intervalo unitário* $[0, 1]$*, com os extremos identificados:* $S^1 \cong [0, 1]/\{0, 1\}$.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$*, definimos a* ***rotação de ângulo*** α*, como a aplicação,*

$$R_\alpha : S^1 \to S^1, \quad R_\alpha([x]) = [x + \alpha].$$

Objetivo: *Estudar o comportamento dinâmico da rotação* R_α*, bem como a existência de uma medida de probabilidade invariante por essa rotação.*

Construção da medida: *Podemos munir* S^1 *com uma estrutura de espaço de probabilidade da seguinte forma. Seja* $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ *a projeção canônica* $x \mapsto [x]$*. Dizemos que um conjunto* $A \subset S^1$ *é mensurável se* $\pi^{-1}(A) \subset \mathbb{R}$ *é mensurável. A* ***medida de Lebesgue no círculo*** *é então definida por:*

$$\mu(A) = m(\pi^{-1}(A) \cap [k, k + 1)) \quad \textit{para qualquer } k \in \mathbb{Z},$$

Onde m *é a medida de Lebesgue em* $\mathbb{R}$*. Essa definição é bem posta, pois:*

$$\pi^{-1}(A) \cap [k, k + 1) = \big(\pi^{-1}(A) \cap [0, 1)\big) + k,$$

e a medida de Lebesgue é invariante por translações.

Dessa forma, temos:

$$\mu(S^1) = m([0, 1)) = 1,$$

isto é, μ *é uma medida de probabilidade.*

Invariância da medida: *Seja* $E \subset S^1$ *mensurável. Como* $\pi^{-1}(R_\alpha^{-1}(E)) = \pi^{-1}(E) - \alpha$

para todo mensurável $E \subset S^1$. Seja k a parte inteira de α. Como m é invariante por translações temos que,

$$\begin{aligned}\mu(R_\alpha^{-1}(E)) = m(\pi^{-1}(R_\alpha^{-1}(E)) \cap [0,1)) &= m((\pi^{-1}(E) - \alpha) \cap [0,1)) \\ &= m(\pi^{-1}(E) \cap [\alpha, \alpha+1)) \\ &= m(\pi^{-1}(E) \cap [\alpha, k+1)) + m(\pi^{-1}(E) \cap [k+1, \alpha+1)) \\ &\underset{*}{=} m(\pi^{-1}(E) \cap [k, k+1)) = \mu(E)\end{aligned}$$

Assim, a medida μ é invariante por R_α para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

$(*)$ *Note que, $\pi^{-1}(E) \cap [k+1, \alpha+1) = \pi^{-1}(E) \cap [k, \alpha) + 1$ logo,*
$m(\pi^{-1}(E) \cap [\alpha, k+1)) + m(\pi^{-1}(E) \cap [k, \alpha)) = m(\pi^{-1}(E) \cap [k, k+1])$.

Comportamento dinâmico de R_α: *A dinâmica da rotação $R_\alpha : S^1 \to S^1$, apresenta dois comportamentos diferentes dependendo se $\alpha \in \mathbb{R}$ for racional ou irracional.*

i) *Se $\alpha \in \mathbb{Q}$, digamos $\alpha = \dfrac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$, então dado qualquer $[x] \in S^1$*

$$[x] \underset{R_\alpha}{\longrightarrow} \left[x + \frac{p}{q}\right] \underset{R_\alpha}{\longrightarrow} \left[x + \frac{2p}{q}\right] \quad \cdots \underset{R_\alpha}{\longrightarrow} \left[x + \frac{qp}{q}\right] = [x+p] = [x]$$

ou seja, $R_\alpha^q([x]) = [x + q\alpha] = [x]$ $\forall x \in S^1$. Neste caso todo ponto $x \in S^1$ é periódico de período q.

ii) *Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então a órbita de $[x]$, ou seja, $\mathcal{O}([x]) = \{R_\alpha^n([x]) : n \in \mathbb{Z}\}$ é um subconjunto denso em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ para todo $[x]$.*

De fato, seja $A = \{m + n\alpha : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Note que $(A, +)$ é um grupo abeliano. Considere então $A^+ = A \cap (0, +\infty)$.

***Afirmação 1** : Se $\beta = inf A^+ > 0$ então $\beta \in A^+$.*

Prova da Afirmação 1. *Com efeito. Suponha que $\beta = \inf A^+ > 0$, mas $\beta \notin A^+$. Como $\beta > 0$ subdividimos a reta em intervalos de comprimento β, uma vez que $\beta \notin A^+$ então existe uma sequência $(a_n)_n$ em A^+ tal que $(a_n) \searrow \beta$. Em particular, como A é um grupo, temos que $a_n - a_{n+1} \in A^+$ e $a_n - a_{n+1} \to 0$ $\forall n$ suficientemente grande, logo $0 < \underbrace{a_n - a_{n+1}}_{\in A^+} < \beta$ para n*

suficientemente grande, absurdo. Portanto $\beta \in A^+$.

Afirmação 2: *Se* $\beta = \inf A^+ > 0$ *então* $A^+ = \{\beta, 2\beta, 3\beta, ..., n\beta, ...\}$.

Prova. *De fato. Seja* $a \in A^+$, *considere os valores* $n\beta, n \geqslant 0$, *assim* $a = n_0\beta + r$ *para algum* $n_0 \geqslant 0$ *inteiro e* $0 \leq r < \beta$. *Note que,* $n_0\beta \in A^+ \cup \{0\}$, *como* A *é um grupo, temos que,* $a - n_0\beta = r \in A^+ \cup \{0\}$. *Se* $r > 0$, *então* $0 < r < \beta$ *com* $r \in A^+$, *absurdo. Logo* $r = 0$ *e com isto,* $a = n_0\beta$. *Como* $a \in A^+$ *é arbitrário, segue que* $A^+ = \{n\beta : n > 0 \text{ inteiro}\}$. *Portanto* $A = \{n\beta : n \in \mathbb{Z}\}$.

Afirmação 3: *Se* $\beta = \inf A^+ > 0$ *então* $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Prova. *De fato, se* $\beta > 0$ *pela Afir.*2 $A = \{n\beta : n \in \mathbb{Z}\}$, *assim existe* $N_0 \underset{\neq 0}{\in} \mathbb{Z}$ *tal que* $N_0\beta = 1 \Rightarrow \beta = \dfrac{1}{N_0}$, *e existe* $k_0 \underset{\neq 0}{\in} \mathbb{Z}$ *tal que* $k_0\beta = \alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{k_0}{N_0} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$. *Segue que se* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow \beta = \inf A^+ = 0$.

Afirmação 4: *Se* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *então o conjunto* A *é denso em* $\mathbb{R}$.

Prova. *Basta mostrarmos que* A^+ *é denso em* $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$. *Seja* $(c, d) \subset (0, +\infty)$. *Como* $\inf A^+ \underset{Afir.3}{=} 0$, *existe* $a \in A^+$ *tal que* $0 < a < d - c$.
Considere os valores $\{na\}_{n \geqslant 0}$. *Pelo principio da boa ordem, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $Na \leqslant c$ *e* $(N + 1)a > c$. *Assim,* $c < (N + 1)a = Na + a < c + (d - c) = d \Rightarrow c < (N + 1)a < d$, *logo* $(N + 1)a \in A^+$ *e* $(N + 1)a \in (c, d)$. *Portanto,* A *é denso em* $\mathbb{R}^+$. *Disto, obtemos também que* A^- *é denso em* $\mathbb{R}^-$, *e portanto, que o conjunto* A *é um conjunto denso em* $\mathbb{R}$.
Isto mostra, que a órbita $\mathcal{O}([x])$ *é densa em* $S^1 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. *Em particular, para qualquer* $\alpha \in \mathbb{R}$, *segue que todo ponto do círculo é recorrente.*

Exemplo 3. *Considere* $f : S^1 \to S^1$ *definida por* $f([x]) = [2x] = 2x \mod 1$, *como* $S^1 \simeq [0, 1]/\{0, 1\}$ *podemos expressar essa função por*

$$f([x]) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2x - 1, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Assim, dado $x \in [0, 1)$, $x = (0, x_1x_2x_3...)_2$ *com* $x \in \{0, 1\}$, *isto é, na representação*

binária, então

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \cdots \quad x = [x] \\ \Rightarrow 2x &= \underset{\{0,1\}}{x_1} + \frac{x_2}{2^1} + \frac{x_3}{2^2} + \cdots \frac{x_n}{2^{n-1}} + \cdots \\ \Rightarrow [2x] &= 0, x_2x_3x_4... \end{aligned}$$

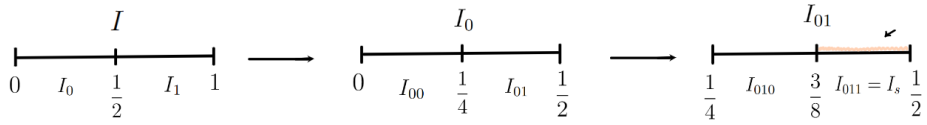
Implica que, $f(0, x_1x_2x_3...) = 0, x_2x_3x_4...$ *logo* $f^n(x) = 0, x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}....$

Observe que f *preserva a medida de Lebesgue* m *da reta. Pois, dado um intervalo qualquer* $I = (a, b) \subset [0, 1]$ *tem-se que* $m(I) = |b - a|$ *e que* $f^{-1}(I) = I_1 \cup I_2$ *onde* $I_1 = \dfrac{I}{2} = \left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ *e* $I_2 = \dfrac{I+1}{2} = \left(\dfrac{a+1}{2}, \dfrac{b+1}{2}\right)$ *logo,*

$$\begin{aligned} m(f^{-1}(I)) = m(I_1 \cup I_2) &\underset{disj.}{=} m(I_1) + m(I_2) \\ &= \left|\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right| + \left|\frac{b+1}{2} - \frac{(a+1)}{2}\right| \\ &= \left|\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right| + \left|\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right| \underset{b-a>0}{=} b - a = |b - a| = m(I). \end{aligned}$$

Portanto, $m(f^{-1}(I)) = m(I)$.

Seja $s = 011$ *e* $I_s = \{x \in [0, 1] : x$ *na base* 2 *começa por* $011\}$.



$m(I_s) = |\frac{1}{2} - \frac{3}{8}| = \frac{1}{8} > 0$, *como* f *preserva* m *e* $m(S^1) = 1$, *então pelo Teorema de Poincaré* m*-q.t.p.* $x \in S^1$ *tem em sua representação binária, infinitas aparições do bloco* 011.

3.2 Teorema Ergódico de Birkhoff

Veremos nesta seção o Teorema Ergódico de Birkhoff que fornece informações ainda mais quantitativas quanto ao comportamento das trajetórias de uma transformação mensurável no espaço em que ela está definida.

Definição 3.5 ([14]). *Sejam $f : M \to M$ uma transformação mensurável e μ uma medida de probabilidade invariante por f. Dada uma função mensurável $\varphi : M \to \mathbb{R}$ definimos a* ***média temporal de*** φ ***em*** x ***em relação a*** f *como o limite*

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \quad \text{se ele existir.} \tag{3.6}$$

Dado qualquer mensurável $A \subset M$, no caso em que $\varphi = \chi_A$ característica do conjunto A, denotaremos sua média temporal por $\tau(A, x)$ e observamos que

$$\tau(A, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(f^j(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{\ 0 \leqslant j \leqslant n-1 : f^j(x) \in A\},$$

chamamos $\tau(A, x)$ também de **tempo médio de visita de x ao conjunto A**.

Definição 3.6 ([14]). *Sejam $f : M \to M$ uma transformação mensurável, e μ uma medida de probabilidade invariante por f. Dizemos que uma função mensurável $\psi : M \to \mathbb{R}$ é* ***invariante por*** f *(ou* ***f-invariante****) se* $\boldsymbol{\psi \circ f = \psi}$ *em μ-quase todo ponto $x \in M$. Além disso, dizemos que um conjunto mensurável $B \subset M$, é invariante por f, se a sua função característica χ_B, é f-invariante. Em outras palavras,* ***B é invariante por f****, se $f^{-1}(B) = B$ a menos de conjuntos de medida nula, isto é,*

$$\mu(B \Delta f^{-1}(B)) = 0.$$

Denotamos por Δ a diferença simétrica, ou seja, $A\Delta B = (A \backslash B) \bigcup (B \backslash A)$.

Observação 3.7 ([14]). *Em particular, toda função f-invariante é constante em cada trajetória de f, a menos de um conjunto de medida nula.*

Teorema 3.8 (**Teorema Ergódico de Birkhoff** [14]). *Sejam $f : M \to M$ uma transformação mensurável, e μ uma medida de probabilidade invariante por f. Dada qualquer função integrável $\varphi : M \to \mathbb{R}$, sua média temporal*

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)),$$

existe em μ-quase todo ponto $x \in M$, e é invariante por f. Além disso, $\tilde{\varphi}$ é integrável e satisfaz

$$\int_M \tilde{\varphi}\ d\mu = \int_M \varphi\ d\mu.$$

Demonstração: Veja [14, *p.*115]. ■

Observação 3.9 ([14]). *Note que, dado qualquer conjunto mensurável $A \subset M$, tomando $\varphi = \chi_A$, segue do Teorema Ergódico de Birkhoff que o tempo médio de visita*

$$\tau(A, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(f^i(x)),$$

existe em μ-quase todo ponto $x \in M$. Além disso, $\int \tau(A, x)\, d\mu = \mu(A)$.

Nos próximos resultados $f : M \to M$ e μ são como no Teorema 3.8. A Proposição a seguir, mostra que as médias temporais são constantes ao longo da órbita de f, em μ-quase todo ponto $x \in M$.

Proposição 3.10 ([14]). *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então, $\tilde{\varphi}(f(x)) = \tilde{\varphi}(x)$ para μ-quase todo ponto $x \in M$.*

Demonstração: Com efeito, para a função característica de um conjunto mensurável $A \subset M$, temos que χ_A é integrável. Como observado anteriormente, o tempo médio de visitas de $x \in M$ ao conjunto A, denotado por $\tau(A, x)$, existe para μ-quase todo ponto $x \in M$. Por definição,

$$\begin{aligned}
\tau(A, f(x)) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi_A(f^i(x)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(f^i(x)) - \frac{1}{n}[\chi_A(x) - \chi_A(f^n(x)) \\
&= \tau(A, x) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[\chi_A(x) - \chi_A(f^n(x))].
\end{aligned}$$

Como a função característica é limitada, o limite à direta na última igualdade é igual a zero. Com isso, segue que $\tau(A, f(x)) = \tau(A, x)$ em μ-quase todo ponto $x \in M$. Para $\varphi : M \to \mathbb{R}$ integrável qualquer, pelo Teorema 3.8, a média temporal $\tilde{\varphi}$ existe em μ-q.t.p $x \in M$. Assim, por definição

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(f(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(f^j(x)) &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) + \frac{1}{n}(\varphi(f^n(x)) - \varphi(x)) \right] \\
&= \tilde{\varphi}(f(x)) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\varphi(f^n(x)) - \varphi(x)). \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Sabemos que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\varphi(x)=0$, basta então provarmos que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\varphi(f^n(x))=0$, para isto precisamos do seguinte Lema.

Lema 3.11 ([14]). *Se $\phi : M \to \mathbb{R}$ é uma função integrável, então o $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\phi(f^n(x))=0$ para μ-quase todo ponto $x \in M$.*

Demonstração: Fixe qualquer $\varepsilon > 0$. Como μ é invariante por f temos que

$$\begin{aligned}\mu(\{x\in M:|\phi(f^n(x))|\geqslant n\varepsilon\}) &\underset{\mu \text{ inv.}}{=} \mu(\{x\in M:|\phi(x)|\geqslant n\varepsilon\})\\ &= \mu(\{x\in M:\frac{|\phi(x)|}{\varepsilon}\geqslant n\})\\ &= \sum_{k=n}^{\infty}\mu(\{x\in M:k\leqslant\frac{|\phi(x)|}{\varepsilon}<k+1\})\end{aligned}$$

Considere $t_n=\sum_{k=n}^{\infty}u_k$, onde $u_k=\mu(\{x\in M:k\leqslant\frac{|\phi(x)|}{\varepsilon}<k+1\}$. Somando os t_n sobre todo $n\in\mathbb{N}$, na igualdade obtida acima, temos,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{x\in M:|\phi(f^n(x))|\geqslant n\varepsilon\})=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\mu(\{x\in M:k\leqslant\frac{|\phi(x)|}{\varepsilon}<k+1\}=\sum_{n=1}^{\infty}t_n \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned}t_1 &= u_1+u_2+u_3+\cdots\\ t_2 &= 0\ +\ u_2+u_3+\cdots\\ t_3 &= 0\ +\ 0\ \ +u_3+\cdots\\ &\vdots\ \ \vdots\ \ \ \vdots\ \ \ \vdots\ \ +\\ \Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}t_n &= u_1+2u_2+3u_3+4u_4+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}ku_k.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{x\in M:|\phi(f^n(x)|\geqslant n\varepsilon\}) &= \sum_{k=1}^{\infty}k\mu(\{x\in M:k\leqslant\frac{|\phi(x)|}{\varepsilon}<k+1\}\\ &\leqslant\int_M\frac{|\phi(x)|}{\varepsilon}\,d\mu. \qquad (3.8)\end{aligned}$$

A desigualdade em (3.8), decorre do fato de que, para $E_k = \{x \in M : k \leqslant \dfrac{|\phi(x)|}{\varepsilon} < k+1\}$, temos que

$$k\mu(E_k) = \int_{E_k} k \; d\mu \leqslant \int_{E_k} \frac{|\phi(x)|}{\varepsilon} \; d\mu$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k\mu(E_k) \leqslant \int_M \frac{|\phi(x)|}{\varepsilon} \; d\mu.$$

Como ϕ é integrável, temos que $\displaystyle\int_M \frac{|\phi(x)|}{\varepsilon} \; d\mu < \infty$, assim, todos os termos em (3.8) são finitos, disto temos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in M : |\phi(f^n(x))| \geqslant n\varepsilon\}) < \infty$. Isto implica, que o conjunto $B(\varepsilon)$ dos pontos x, tais que $|\phi(f^n(x))| \geqslant n\varepsilon$, para infinitos valores de n, tem medida nula, pelo Lema de Borel-Cantelli 2.32. Segue imediatamente da definição de $B(\varepsilon)$, que para todo $x \notin B(\varepsilon)$, existe algum $p \geqslant 1$ tal que $|\phi(f^n(x))| < n\varepsilon$ para todo $n \geqslant p$. Considere $B = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} B(1/i)$. Então B tem medida nula, logo para todo $x \notin B$ vale que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\phi(f^n(x)) = 0$. ■

Aplicando o Lema 3.11 para $\phi = \varphi$, obtemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\varphi(f^n(x)) - \varphi(x)) = 0$ para μ-quase todo ponto. Portanto, vale a igualdade em (3.7) μ-*q.t.p* $x \in M$. ■

O Teorema a seguir é uma versão mais geral do Teorema Ergódico de Birkhoff, que garante que para uma função invertível f, dada uma função integrável φ, as médias temporais $\tilde{\varphi}$ com relação a f e f^{-1}, existem e coincidem em quase todo ponto. Usaremos a notação $f^{-j}(x) = (f^{-1})^j(x)$.

Teorema 3.12 (**Teorema Ergódico de Birkhoff-Khinchin** [4])**.** *Seja $(M, \mathfrak{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $f : M \to M$, uma função invertível que preserva μ. Dada qualquer função $\varphi \in L^1(M, \mathfrak{B}, \mu)$, os seguintes limites*

$$\tilde{\varphi}(x) \underset{def.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^{-j}(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} \varphi(f^j(x))$$

existem e são iguais entre si, μ-quase todo ponto $x \in M$. Também, $\tilde{\varphi}(f(x)) = \tilde{\varphi}(x)$ μ-q.t.p sempre que $\tilde{\varphi}(x)$ existir. Além disto, $\tilde{\varphi} \in L^1(M, \mathfrak{B}, \mu)$ e $\displaystyle\int \tilde{\varphi}(x) \; d\mu = \int \varphi(x) \; d\mu$.

Denotaremos $\tilde{\varphi}_f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$ para a média temporal com respeito a f e $\tilde{\varphi}_{f^{-1}}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^{-j}(x))$ a média temporal com respeito a f^{-1}. Vale destacar que o Teorema Ergódico de Birkhoff-Khinchin é ainda mais geral, sendo o resultado válido para fluxos e semi-fluxos. Para a demonstração veja em [4].

3.3 Ergodicidade

Definição 3.13 ([14]). *Sejam $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $f : M \to M$ uma transformação mensurável que preserva μ. Dizemos que o sistema (f, μ) é* ***ergódico*** *(ou que μ é* ***ergódica****, "'ou que f é* ***ergódica relativamente a*** *μ) se para todo conjunto mensurável f-invariante $A \subset M$, tem-se que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.*

A proposição a seguir reformula essa definição de ergodicidade.

Proposição 3.14 ([17]). *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *O sistema (f, μ) é ergódico;*

(b) *Toda função integrável f-invariante $\varphi : M \to \mathbb{R}$ é constante para μ-quase todo ponto;*

(c) *Para toda função integrável $\varphi : M \to \mathbb{R}$ a média temporal $\tilde{\varphi} : M \to \mathbb{R}$ é constante em μ-quase todo ponto.*

Demonstração:

(a) $\Rightarrow$ (b) Suponha que exista $\varphi : M \to \mathbb{R}$ integrável e f-invariante, mas que não é constante μ-$q.t.p$, então podemos escolher $c \in \mathbb{R}$ tal que o conjunto $B = \{x \in M : \varphi(x) \geqslant c\}$ tenha medida $0 < \mu(B) < 1$.

Mas φ é f-invariante, isto é, $\varphi \circ f = \varphi$ μ-$q.t.p$, implica que

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B \iff \varphi(f(x)) \geqslant c \underset{f\text{-inv.}}{\iff} \varphi(x) \geqslant c \iff x \in B.$$

$\Rightarrow f^{-1}(B) = B$ em μ-$q.t.p$ e por (a) tem-se que (f, μ) é ergódico, então $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = 1$ que é um absurdo. Portanto φ é constante μ- quase todo ponto.

(b) ⇒ (a) Dado $B \subset M$ um conjunto mensurável f-invariante, ou seja, $f^{-1}(B) = B$ μ-*q.t.p*, defina $\varphi = \chi_B$. A condição de B, implica que, a característica de B é invariante por f, ou seja, $\chi_B \circ f = \chi_B$ e como χ_B é integrável, e por (b) temos que χ_B é constante μ-quase todo ponto e por definição ela só assume o valor 0 ou 1, portanto,

$$\text{se } \chi_B = 0 \ \Rightarrow \mu(B) = \int \chi_B \, d\mu = 0 \ \mu\text{-}q.t.p$$

$$\text{se } \chi_B = 1 \ \Rightarrow \mu(B) = \int \chi_B \, d\mu = 1 \ \mu\text{-}q.t.p$$

Segue que $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = 1$ então o sistema (f, μ) é ergódico.

(c) ⇒ (b) Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}$ uma função integrável e f-invariante. Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff a média temporal $\tilde{\varphi}$ existe μ-*q.t.p* é integrável e f- invariante, logo por (c) $\tilde{\varphi}$ é constante em μ-quase todo ponto. Como φ é invariante por f, para x em um conjunto de medida total vale que,

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x) = \varphi(x),$$

então, como $\varphi = \tilde{\varphi}$ μ-*q.t.p* segue que φ é constante μ-quase todo ponto.

(b) ⇒ (c) Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Segue do Teorema Ergódico de Birkhoff que a média temporal $\tilde{\varphi}$ existe para μ-*q.t.p*, é integrável e f- invariante, assim por (b) a média temporal $\tilde{\varphi}$ é constante em μ-quase todo ponto $x \in M$.

■

Proposição 3.15 ([4]). *Seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável que preserva uma medida de probabilidade μ. Se existe um conjunto denso $F \subset L^1(M)$ tal que*

$$\tilde{\varphi}(x) = \int_M \varphi \, d\mu \quad para \mu\text{-}q.t.p.$$

e todo $\varphi \in F$, então f é ergódica.

Demonstração: Dada uma função $\varphi \in L^1(M)$, pelo Teorema Ergódico de Birkhoff o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \tilde{\varphi}(x)$$

existe para $q.t.p\ x \in M$, para toda função integrável $\varphi : M \to \mathbb{R}$, isto significa que a sequência,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j$$

converge a $\tilde{\varphi}$ em L^1 (veja a Observação 2.31) pelo Teorema Ergódico de Birkhoff. Então é suficiente mostrar que se $\varphi \in L^1(M)$:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j - \int_M \varphi \, d\mu \right\|_1 = 0.$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja $\psi \in F$ tal que $\|\psi - \varphi\|_1 \leqslant \varepsilon/3$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant n_0$ implica que,

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j - \int_M \psi \, d\mu \right\|_1 \leqslant \varepsilon/3.$$

Então, se $n \geqslant n_0$ tem-se que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j - \int_M \varphi \, d\mu \right\|_1 &= \left\| \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j \right. \\
&\quad \left. - \int_M \psi \, d\mu + \int_M \psi \, d\mu - \int_M \varphi \, d\mu \right\|_1 \\
&\leqslant \frac{1}{n} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j - \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j \right\|_1 + \left\| \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j - \int_M \psi \, d\mu \right\|_1 \\
&\quad + \left| \int_M \psi \, d\mu - \int_M \varphi \, d\mu \right| \\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \left\| \varphi \circ f^j - \psi \circ f^j \right\|_1 + \left\| \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j - \int_M \psi \, d\mu \right\|_1 \\
&\quad + \left| \int_M \psi - \varphi \, d\mu \right|.
\end{aligned}$$

Como μ é f-invariante pela Proposição 3.2, $\|\varphi \circ f^j - \psi \circ f^j\|_1 = \|(\varphi - \psi) \circ f^j\|_1 = \|\varphi - \psi\|_1$ e

$$\left| \int_M \psi - \varphi \, d\mu \right| \leqslant \int_M |\psi - \varphi| \, d\mu = \|\psi - \varphi\|_1 .$$

Logo, para todo $n \geqslant n_0$

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j - \int_M \varphi \, d\mu \right\|_1 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi - \psi\|_1 + \left\| \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j - \int_M \psi \, d\mu \right\|_1 + \|\varphi - \psi\|_1$$
$$\leqslant \|\varphi - \psi\|_1 + \varepsilon/3 + \|\varphi - \psi\|_1 \leqslant \varepsilon.$$

Portanto,

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int_M \varphi \, d\mu \quad \mu\text{-}q.t.p \; x \in M,$$

isto implica, que a média temporal $\tilde{\varphi}$ é constante μ-$q.t.p$ e pela Proposição 3.14, segue que f é ergódico. ■

3.4 Expoentes de Lyapunov e Teorema de Oseledec

Nesta seção, considere M uma variedade diferenciável, compacta, conexa, sem bordo, de dimensão m, e $f : M \to M$ difeomorfismo de classe C^1. Queremos analisar a ação da derivada nas órbitas de f. Pela regra da cadeia Temos:

$$Df_x^n = Df(f^{n-1}(x)) \cdots Df(f(x)) \cdot Df(x), \text{ onde } \; f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-composições de } f}.$$

Como M é uma variedade diferenciável de dimensão m, a aplicação linear

$$Df_x^n : T_xM \to T_{f^n(x)}M$$

pode ser representada por uma matriz $m \times m$, com relação a qualquer base apropriada para os dois espaços vetoriais m-dimensionais. Há resultados, originalmente devidos a Oseledec, sobre a taxa de crescimento exponencial de $\|Df_x^n(v)\|$, com $v \in T_xM$.

Teorema 3.16 (**Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledec** [14]). *Sejam $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^1 de uma variedade diferenciável compacta M^m, e μ uma medida de probabilidade invariante por f. Então, existe um conjunto $\Gamma \subset M$, de medida total, para qualquer medida de probabilidade em M, invariante por f, tal que:*

(a) *Para cada $x \in \Gamma$, existem números $\chi_1(x) > \chi_2(x) > \cdots > \chi_{s(x)}(x)$ e uma decomposição mensurável do espaço tangente*

$$T_xM = E_1(x) \oplus \cdots \oplus E_{s(x)}(x), \quad com \ \dim(E_i(x)) = n_i(x),$$

tais que, para cada $i = 1, ..., s(x)$, temos:

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} log \parallel Df_x^n(v) \parallel = \chi_i(x), \ v \in E_i(x)\backslash\{0\},$$

e

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} log\,|Jac(Df_x^n)| = \sum_{i=1}^{s(x)} \chi_i(x) n_i(x),$$

onde $Jac(Df_x^n)$ denota o Jacobiano de Df_x^n no ponto x, isto é, o determinante $\det(Df_x^n)$.

(b) *Os inteiros positivos $n_1, ..., n_{s(x)} \in \mathbb{Z}_+$ são tais que $n_1 + \cdots + n_{s(x)} = m$.*

(c) *As funções $\Gamma \ni x \mapsto \chi(x), \ s(x), \ e \ E(x)$ são mensuráveis e f-invariantes, ou seja, para todo $x \in \Gamma$ e $i = 1, ..., s(x)$*

$$\chi_i(f(x)) = \chi_i(x), \ s(f(x)) = s(x), \ e \ Df(E_i(x)) = E_i(f(x)).$$

Os números $\chi_i(x)$ são denominados **expoentes de Lyapunov** de f em x, ao longo do subespaço $E_i(x)$, que é um **subespaço próprio** de f. Cada $n_i(x)$ é denominado *multiplicidade* do expoente de Lyapunov $\chi_i(x)$, e o conjunto Γ é chamado de **conjunto dos pontos regulares de** f.

Capítulo 4

Pesadelo de Fubini

4.1 Teorema de Fubini

O Teorema de Fubini, estabelece condições sob as quais é possível calcular uma integral dupla através de integrais iteradas. Primeiramente, apresentaremos o Teorema de Fubini de teoria da medida para espaços de medida em um contexto geral.

Seja $f : X \times Y \to Z$ uma função. A cada $x \in X$, associamos a função

$$f_x : Y \to Z, \;\; y \mapsto f_x(y) = f(x, y),$$

a qual chamamos de x-seção de f.

Analogamente, a cada $y \in Y$, associamos a função

$$f^y : X \to Z, \;\; x \mapsto f^y(x) = f(x, y),$$

a qual chamamos de y-seção de f.

Teorema 4.1 (**Teorema de Fubini** [20]). *Sejam (X, m_1, μ) e (Y, m_2, ν) espaços de medida σ-finitos, e f uma função $m_1 \times m_2$-mensurável em $X \times Y$.*

(a) *Se $0 \leqslant f \leqslant \infty$, e se*

$$\varphi(x) = \int_Y f_x \, d\nu(y) \quad e \quad \psi(x) = \int_X f^y \, d\mu(x) \tag{4.1}$$

então, φ é m_1-mensurável e ψ é m_2-mensurável e

$$\int_X \left(\int_Y f_x \, d\nu(y) \right) \, d\mu(x) = \int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X f^y \, d\mu(x) \right) \, d\nu(y). \quad (4.2)$$

(b) *Se f é complexa e se*

$$\varphi^*(x) = \int_Y |f(x,y)| \, d\nu(y), \quad e \quad \int_X \varphi^*(x) d\mu(x) < \infty,$$

então $f \in L^1(\mu \times \nu)$.

(c) *Se $f \in L^1(\mu \times \nu)$, então $f_x \in L^1(\nu)$ para quase todo $x \in X$, e $f^y \in L^1(\mu)$ para quase todo $y \in Y$. Além disso, as funções φ e ψ, definidas por (4.1), q.t.p pertencem a $L^1(\mu)$ e $L^1(\nu)$ respectivamente, e a igualdade da parte (a) vale.*

Para nossos propósito nos deteremos a espaços euclidianos (ou localmente homeomorfos a estes). O Teorema de Fubini pode ser provado para volumes n-dimensionais em espaços $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Segue abaixo o Teorema para medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^2$.

Teorema 4.2 (Teorema de Fubini para medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^2$). *Se a função $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $D \subset [a,b] \times [c,d]$ é mensurável, então*

$$\int \int_D f(x,y) \, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \mathbb{1}_D(x,y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \mathbb{1}_D(x,y) \, dx \right) dy.$$

Entre algumas aplicações do teorema de Fubini, podemos calcular a área do conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ como a integral dupla sobre D da função constante $f(x,y) = 1$ em $[a,b] \times [c,d]$.

O Teorema de Fubini também garante que o volume(ou área) de um conjunto mensurável é nulo se, e somente se, quase todo corte transversal horizontal(ou vertical) intersecta o mensurável em um conjunto de medida nula sobre a transversal. Uma questão interessante a ser feita é: seria possível particionar o quadrado $(0,1) \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ por folhas suaves de forma que esta folheação burle o Teorema de Fubini? A próxima seção mostra que de fato isso é possível.

4.2 Pesadelo de Fubini

A construção nesta seção foi feita com base no artigo publicado por John Milnor [13] para a descoberta por Anatole Katok.

Katok provou o seguinte: existe um conjunto mensurável de área total no quadrado unitário $(0,1) \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, juntamente com uma família de curvas analíticas reais e disjuntas Γ_β, que preenchem este quadrado, de modo que cada Γ_β intersecta esse conjunto em, no máximo, um único ponto. A Figura 4.1 mostra um exemplo de tal família de curvas, baseada em uma construção similar, mas não igual, a feita por Katok.

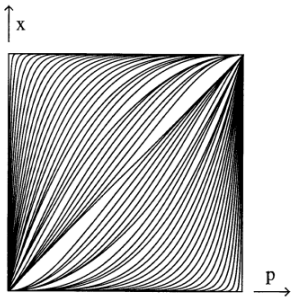


Figura 4.1: Família de curvas que formam uma folheação patológica. [13]

Assim, o objetivo é particionar o quadrado $Q = (0,1) \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, por uma folheação $\mathcal{F}$ com folhas suaves, de modo que exista um conjunto mensurável $R \subset Q$ de área total, tal que quase toda folha $\mathcal{F}_{(x)}$ encontre R em um conjunto de medida nula sobre $\mathcal{F}_{(x)}$.

Construção do Conjunto de Medida Positiva

No quadrado $Q = (0,1) \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, defina para cada $p \in (0,1)$ uma função $f_p : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dada por:

$$f_p(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{p}, & y \in [0,p) = I_0 \\ \\ \dfrac{y-p}{1-p}, & y \in [p,1] = I_1 \end{cases}$$

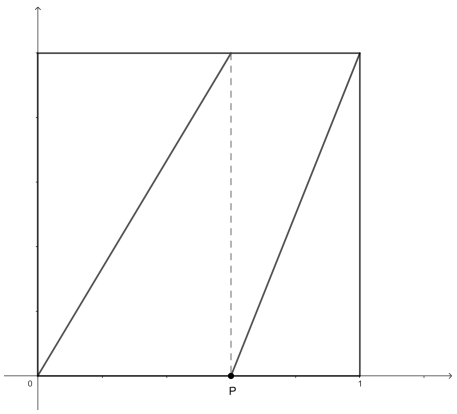


Figura 4.2: Gráfico da função f_p.

Observação 4.3. *Para garantirmos a continuidade, podemos entender, que estamos considerando a função $f_p : S^1 \longrightarrow S^1$, em que o intervalo $[0,1]$ tem seus extremos identificados. Estamos considerando a σ-álgebra de Borel, e a medida considerada é a medida de Lebesgue m.*

Observe que:

i) O espaço S^1 que é intervalo $[0,1]$ com os extremos identificados, é um espaço de probabilidade uma vez que, a medida de Lebesgue $m(S^1) = m([0,1]) = 1$.

ii) Para cada $p \in (0,1)$, f_p é Lebesgue mensurável. De fato, pois dado um intervalo aberto $J \subset [0,1]$ tem-se $f_p^{-1}(J) = J_1 \subset [0,p)$ e $f_p^{-1}(J) = J_2 \subset [p,1]$, são ambos intervalos abertos, ou seja, $f_p^{-1}(J) = J_1 \cup J_2$ é união de abertos (veja a Figura 4.3), logo é um boreliano em $[0,1]$, então f_p é Borel mensurável.

iii) Para cada $p \in (0,1)$, f_p preserva a medida de Lebesgue. De fato, note que qualquer intervalo $J \subset [0,1]$ tem pré-imagem $J_1 \subset [0,p)$ e $J_2 \subset [p,1]$,
de comprimentos

$$\ell(J_1) = p\ell(J)$$

e

$$\ell(J_2) = (1-p)\ell(J)$$

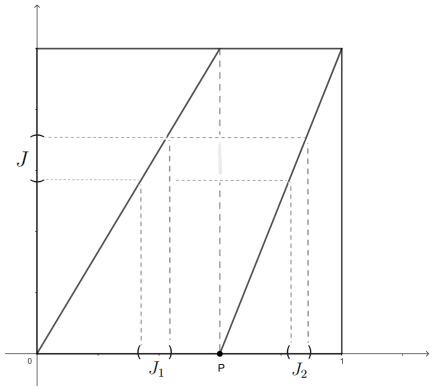


Figura 4.3: Pré-imagem da f_p

Como $f_p^{-1}(J) = J_1 \cup J_2$ e $J_1 \cap J_2 = \varnothing$, então

$$m(f_p^{-1}(J)) = \ell(J_1) + \ell(J_2) = p\ell(J) + (1-p)\ell(J) = \ell(J) = m(J)$$

logo, $m(f_p^{-1}(J)) = m(J)$. Portanto, f_p é mensurável e preserva a medida de probabilidade m no quadrado $Q = (0,1) \times [0,1]$.

iv) Para cada $p \in (0,1)$, f_p é uniformemente expansora, uma vez que para $y \in [0,p)$ temos que $f_p'(y) = \dfrac{1}{p}$, e para $y \in [p,1]$ temos $f_p'(y) = \dfrac{1}{1-p}$. Como $p \in (0,1)$, tem-se que $\dfrac{1}{p} > 1$ e $\dfrac{1}{1-p} > 1$. Logo, a derivada de f_p é maior que 1 em módulo para todo $y \in [0,1] \setminus \{y\}$. Portanto, f_p é uniformemente expansora com constante $\lambda = \min\left\{\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{1-p}\right\}$, válida em todo ponto, exceto possivelmente, em $y = p$.

Além disso, a função f_p é ergódica, pois é uniformemente expansora e preserva a medida de Lebesgue.

Agora, para cada $p \in (0,1)$ fixo, podemos codificar cada ponto $y \in S^1$ as iterações por f_p da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S^1 &\longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ y &\longmapsto (s_0, s_1, s_2, ...), \end{aligned}$$

uma sequência infinita não trivial de 0's e 1's, onde, cada elemento da sequência é dado por:

$$s_j = \begin{cases} 1, & \text{se } f_p^j(y) \in I_0 = [0,p), \\ 0, & \text{se } f_p^j(y) \in I_1 = [p,1]. \end{cases}$$

Para ilustrar, suponha que para um certo $y \in S^1$ tenhamos,

$$y \in I_0,\ f_p^1(y) \in I_1,\ f_p^2(y) \in I_1,\ f_p^3(y) \in I_0, ... \ \Rightarrow\ (0,1,1,0,...).$$

Assim, para cada (p,y) temos associada uma sequência de 0's e 1's, que descreve a trajetória de y por f_p, com $p \in (0,1)$ fixado. Note que, para quase todo $y \in S^1$ a frequência de "1s" no itinerário de y, são a quantidade de vezes que a iterada de y por f_p pertence ao intervalo I_1, ou seja, quando $f_p^j \in I_1$. Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff 3.8 essa frequência é dada por

$$\tau(I_1, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_{I_1}(f_p^j(y)),$$

e que,

$$\int \tau(I_1, y)\ dm = m(I_1) = \ell(I_1) = |1-p| = 1-p \quad \text{para } q.t.p.\ \ y \in S^1. \tag{4.3}$$

Para cada $p \in (0,1)$ fixo, definimos o conjunto,

$$C_p = \{(p,y) :\ \text{a frequência de } 1's \text{ no itinerário de } y \text{ seja } 1-p\}.$$

Como cada C_p é unidimensional, segue diretamente da Equação (4.3) que C_p é um conjunto mensurável de medida de Lebesgue total, tal que que todo $(p,y) \in C_p$ tem a frequência $1-p$ definida, ou seja, $\ell(C_p) = 1$.

Seja,

$$R = \bigcup_{p\in(0,1)} C_p\ .$$

Afirmação: $R = \{(p,y) \in (0,1)\times[0,1] : \tau_p(I_1, y) = 1\}$ é um conjunto mensurável.

Demonstração: De fato, defina para cada $N \in \mathbb{N}$, $\tau_N : (0,1)\times[0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\tau_N(p,y) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \chi_{I_1^p}(f_p^j(y)).$$

Observe que $(p,y) \mapsto \chi_{I_1^p}(y)$ é descontinua em (p,p), e pela continuidade da f_p, temos que $\chi_{I_1^p} \circ f_p$ é descontínua em uma união finita de curvas suaves $(p, y(p))$ em $(0,1)\times S^1$, logo $\tau_N(p,y)$ é continua $m_{(0,1)\times S^1}$-$q.t.p.$ Portanto $\tau_N(p,y)$ é mensurável.

Considere M_0 o conjunto dos pares (p,y) para os quais existe o limite pontual,

$$\lim_{N\to\infty} \tau_N(p,y) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \chi_{I_1^p}(f_p^j(y)).$$

Pela teoria da medida M_0 é mensurável. Defina $\tau : M_0 \subset (0,1)\times S^1 \to \mathbb{R}$ a função dada pelo limite pontual $\tau_N(p,y) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \tau(p,y)$. Finalmente, os pontos que queremos residem em M_0 e satisfazem $\tau(p,y) = 1-p$. Defina $\psi : M_0 \to \mathbb{R}$, por $\psi(p,y) := \tau(p,y) - (1-p)$, assim, o conjunto R é caracterizado por

$$(p,y) \in R \iff \psi(p,y) = 0.$$

Note que ψ é mensurável, pois τ é mensurável e $(p,y) \mapsto (1-p)$ é continua(mensurável). Como $R = \underset{\text{fechado}}{\psi^{-1}(\{0\})}$, segue que, R é mensurável. ■

Podemos calcular a medida do conjunto R usando o Teorema de Fubini. Isto é,

$$m(R) = \text{Área}(R) = \int\int_R \mathbb{1}_R(p,y)\ dydp.$$

$$m(R) = \int_0^1 \left[\int_0^1 \mathbb{1}_R(p,y)dy\right] dp = \int_0^1 \ell(C_p)dp = \int_0^1 1\ dp = 1. \tag{4.4}$$

Assim, temos que R é um conjunto de medida positiva $m(R) = 1$.

Construção da Folheação

Em seguida, defina uma família de curvas suaves Γ_β como segue. Seja $\beta \in [0,1]$ um número qualquer, então existe uma única expansão binária infinita não trivial, $0.b_1b_2b_3...$ que o representa, ou seja,

$$\beta = 0.b_1b_2b_3\underset{(base\ 2)}{...} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i}{2^i}, \quad \text{onde } \ b_i \in \{0,1\} \ \text{ são dígitos binários.}$$

Além disso, a expansão $0.b_1b_2b_3...$ pode ser expressa, por uma sequência infinita binária correspondente, $\beta = (b_1, b_2, b_3, ...)$. Dizemos que essa sequência é não trivial se ela não for identicamente nula, ou seja, se para todo $N \in \mathbb{N}$, existir $n \geqslant N$ tal que $b_n = 1$.

Fixada uma sequência binária infinita não trivial $\beta = (b_1, b_2, b_3, ...)$, associada ao número $\beta \in [0,1]$, e dado $p \in (0,1)$, associamos a ela o número $y(p,\beta) \in [0,1]$, cujo itinerário sob a ação de f_p é exatamente β.

Denote a curva definida pela sequência β, por

$$\Gamma_\beta = \{(p,y)\ ;\ p \in (0,1) \text{ e o itinerário de } y \text{ por } f_p \text{ é descrito por } \beta = (b_1, b_2, b_3, ...)\}.$$

Note que se $\beta \neq \beta'$, então $\Gamma_\beta \cap \Gamma_{\beta'} = \varnothing$. Pois, caso ocorresse que duas curvas Γ_β e $\Gamma_{\beta'}$, se intersectem em um mesmo par (p,y), isto implicaria que o itinerário de y por f_p seria definido por β e β', mas como um itinerário é unicamente definido, então $\beta = \beta'$, logo, $\Gamma_\beta = \Gamma_{\beta'}$.

Deste modo, as curvas Γ_β preenchem o quadrado $Q = (0,1) \times [0,1]$, isto é, folheiam este quadrado. Assim,

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\beta \in [0,1]} \Gamma_\beta,$$

é a folheação procurada.

Analiticidade das Folhas.

Dados $p \in (0,1)$ e $\beta \in [0,1]$. Seja $y = y(p,\beta)$ cujo o itinerário por f_p é dado por $\beta = (b_1, b_2, b_3, ...)$.

Cada $y(p,\beta)$ pode ser descrito como $y_1 + y_2 + y_3 + \cdots = y(p,\beta)$. Para obter $y_1, y_2, \cdots$ precisamos de funções auxiliares,

$$q : \{0,1\} \longrightarrow \{p, 1-p\} \qquad\qquad \delta : \{0,1\} \longrightarrow \{0, p\}$$
$$q(0) = p, \qquad\qquad \delta(0) = 0,$$
$$q(1) = 1-p. \qquad\qquad \delta(1) = p.$$

De modo que,

$$y_1 = \begin{cases} 0, & \text{se } \ b_1 = 0, \\ p, & \text{se } \ b_1 = 1. \end{cases}$$

Assim, $y_1 = \delta(b_1)$ e $y_n = \delta(b_n)q(b_1)...q(b_n)$ $n \geqslant 2$. Obtemos, dessa forma que y_n é o produto de $n+1$ fatores iguais a p ou $1-p$.

A ideia é iniciar com o intervalo $[0,1]$ o qual dividido em proporção $p : 1-p$; na etapa seguinte pela iteração da f_p um dos intervalos, o $I_0 = [0,1)$ ou $I_1 = [p,1]$ indicado o qual y_1 pertence, é dividido na proporção $p : 1-p$ e assim por diante. Na n-ésima etapa desse processo temos 2^n intervalos de tamanhos $q(b_1)q(b_2)q(b_3)...q(b_n)$. A multiplicação $\delta(b_n)q(b_1)q(b_2)...q(b_n)$ indica qual porção do intervalo y ocupa no intervalo de tamanho $q(b_1)q(b_2)q(b_3)...q(b_n)$. Se $b_n = 0$ é na primeira porção do intervalo que y está. Se $b_n = 1$ é na segunda porção do intervalo que y está.

Como y_n é o produto de $n+1$ fatores iguais a p ou $1-p$, tomando $\theta = \max\{p, 1-p\}$ temos que $0 < \theta < 1$. Além disso, $0 \leqslant y_n \leqslant \theta^n$ $\forall p \in (0,1)$.

Resultando, que $y = y(p,\beta)$ pode ser representado por uma série de potências de p, tal que

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \ \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \theta^j < \infty \ ,$$

uma vez que $0 < \theta < 1$ temos que a série geométrica $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \theta^j$ converge. Segue do Teorema

da Convergência Uniforme de Série de Funções de Weierstrass, mas conhecido como Teste M de Weierstrass [19] que para cada β fixo a série $y(p,\beta)$ é uniformente convergente. Portanto, $y(p,\beta)$ é uma função analítica em p, para todo $p \in (0,1)$. Desse modo, temos que Γ_β é o gráfico dessa função real analítica $p \mapsto y(p,\beta)$. Com isto

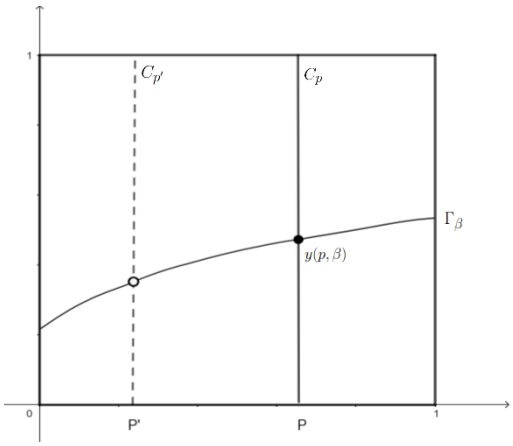
$$\mathcal{F} = \bigcup_{\beta\in[0,1]} \Gamma_\beta \ ,$$

é uma folheação com folhas analíticas.

Cada Γ_β intersecta o conjunto R em no máximo um ponto.

Dado $\beta \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, suponha que esteja bem definida a frequência de "$1's$" para a sequência β, e esta seja $1-p$. Note que $\Gamma_\beta \cap \{p\} \times S^1 = \{y(p,\beta)\} \subset C_p$. Observe que, para $p' \neq p$ temos que no conjunto $C_{p'}$, os pontos (p', y) são tais, que y define um itinerário cuja frequência de "$1's$" é $1-p' \neq 1-p$, logo $\Gamma_\beta \cap C_{p'} = \varnothing$.

Se para alguma sequência α, a frequência não está definida, então $\Gamma_\alpha \cap C_p = \varnothing \ \forall p \in (0,1)$. Portanto, Γ_β intersecta o conjunto R, no máximo em um único ponto para cada conjunto C_p, com $p \in (0,1)$.



O Teorema de Fubini Falha.

Mostramos em (4.4) que a medida de Lebesgue do conjunto $R \subset (0,1) \times [0,1]$ era $m(R) = 1$. No entanto, se pudéssemos calcular sobre $\mathcal{F} = \bigcup_{\beta\in[0,1]} \Gamma_\beta$, a integral tipo Fubini para obter $m(R)$ teríamos:

$$m(R) = \int_0^1 \left[\int_0^1 \mathbb{1}_{R \cap \Gamma_\beta} \, dy \right] dp = \int_0^1 \left[m(\underbrace{R \cap \Gamma_\beta}_{=ponto}) \right] dp = \int_0^1 0 \; dp = 0 \Longrightarrow m(R) = 0,$$

ou seja, para esta folheação o Teorema de Fubini falha.

A medida de Lebesgue de um único ponto é nula. Observe que a falha do Teorema de Fubini ocorre justamente, do fato que as folhas desta folheação intersectam o conjunto de medida positiva R, em um único ponto, ou seja, em um conjunto de medida nula sobre a folha.

Folheações para as quais ocorrem fenômenos como os descritos acima, são chamadas de "Patológicas", isso decorre do fato, de que essas folheações não satisfazem a propriedade de continuidade absoluta e acontecem em situações mais gerais. Em Difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, em relação a folheação central esse fenômeno aparece. Em diversos contextos, a continuidade absoluta da folheação central falha genericamente.

As definições e resultados sobre continuidade absoluta de folheações serão abordados nos capítulos seguintes.

Capítulo 5

Continuidade Absoluta das Folheações

Neste capítulo veremos as definições de continuidade absoluta para folheações, e um pouco sobre difeomorfismos de Anosov, para o qual as folheações estáveis e instáveis tem essas boas propriedades e também veremos o conceito sobre sistemas parcialmente hiperbólico.

5.1 Continuidade Absoluta por Folhas

Seja M^m uma variedade Riemanniana compacta, $U \subset M$ uma vizinhança aberta, e $\mathcal{F}$ uma folheação local de U de dimensão k. Assumimos que as folhas de $\mathcal{F}$ são uniformemente contínuas pelo menos C^1.

Assumimos também que $\mathcal{F}$ tem uma folheação local transversal $\mathcal{T}$ suave (isto significa que $U \subset M$ tem uma estrutura de vizinhança produto).

Denotaremos por m o volume Riemanniano em U; por $\lambda_{\sum}$, a medida Riemanniana induzida na subvariedade suave $\sum$ de U; e por μ, a projeção do volume Riemanniano m no espaço quociente $U/\mathcal{F}$. Denote por $\{m_{\mathcal{F}(p)} : p \in U\}$ a decomposição de Rokhlin da medida m ao longo das componentes conexas de $\mathcal{F}$ em U.

Observação 5.1 ([18]). *Os termos " absolutamente contínua " e " absolutamente contínua por folhas" e assim por diante, são definidas aqui para folheações locais. As correspondentes definições para folheações globais podem ser dadas em termos de cartas da*

folheação.

Definição 5.2 ([18]). *A folheação $\mathcal{F}$ é* ***absolutamente contínua*** *se para qualquer par de transversais suaves $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ em U, a aplicação de holonomia $h_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2}$ entre $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ é absolutamente contínua em relação a $\lambda_{\mathcal{T}_1}$, $\lambda_{\mathcal{T}_2}$.*

A holonomia $h_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2}$ é absolutamente contínua se dado $Z \subset \mathcal{T}_1$ tal que $\lambda_{\mathcal{T}_1}(Z) = 0$, então $\lambda_{\mathcal{T}_2}(h_{\mathcal{F}}^{\tau_1,\tau_2}(Z)) = 0$. Isto é, a holonomia ao longo das folhas de $\mathcal{F}$ é absolutamente contínua se leva conjuntos de medida nula da transversal $\mathcal{T}_1$ em conjuntos de medida nula em $\mathcal{T}_2$.

Definição 5.3 ([18]). *$\boldsymbol{\mathcal{F}}$ é* ***absolutamente contínua por folhas*** *do* ***tipo I****, quando para m-quase todo ponto $p \in U$ a medida $\lambda_{\mathcal{F}_p}$ é absolutamente contínua em relação a desintegração $m_{\mathcal{F}(p)}$.*

$\mathcal{F}$ é absolutamente contínua por folhas *do* ***tipo II****, quando para m-quase todo ponto $p \in U$, a desintegração $m_{\mathcal{F}(p)}$ é absolutamente contínua com respeito a $\lambda_{\mathcal{F}_p}$.*

$\mathcal{F}$ é absolutamente contínua por folhas *do* ***tipo III****, quando para m-quase todo ponto $p \in U$ a desintegração $m_{\mathcal{F}(p)}$ é equivalente a $\lambda_{\mathcal{F}_p}$.*

Podemos reformular essas definições em termos de desintegração.

Proposição 5.4 ([18]). **i)** *Se $\mathcal{F}$ é absolutamente contínua por folhas do tipo I, então para qualquer conjunto de medida nula $Z \subset U$ por m, isto é, $m(Z) = 0$, tem-se que para m-quase todo ponto $p \in U$, $\lambda_{\mathcal{F}_p}(Z \cap \mathcal{F}_p) = 0$.*

ii) *Se $\mathcal{F}$ é absolutamente contínua por folhas de tipo II, então para qualquer conjunto mensurável $Z \subset U$, tal que $\lambda_{\mathcal{F}_p}(Z \cap \mathcal{F}_p) = 0$ tem-se que $m(Z) = 0$ para m-quase todo $p \in U$.*

iii) *Se $\mathcal{F}$ é absolutamente contínua por folhas do tipo III, então $\mathcal{F}$ é absolutamente contínua por folhas do tipo I e do tipo II.*

Demonstração:

i) Seja $B \subset U$ um conjunto m-mensurável, com medida total, tal que para $\forall p \in B$ tem-se que $\hat{B} = \bigcup_{p \in B} \mathcal{F}_p$ tenha μ-medida total (para quase toda folha) para os quais valem a propriedade de que $\lambda_{\mathcal{F}_p} \ll m_{\mathcal{F}(p)}$. Considere $Z \subset U$ um conjunto m-mensurável tal que $m(Z) = 0$. Como,

$$m(Z) = \int_{U/\mathcal{F}} m_{\mathcal{F}(p)}(Z \cap \mathcal{F}_p)\ d\mu(\mathcal{F}_p) = 0$$

$\Rightarrow m_{\mathcal{F}(p)}(Z \cap \mathcal{F}_p) = 0$ para μ-quase toda folha $\mathcal{F}_p \in \bigcup_{p \in B} \mathcal{F}_p$.
Logo, existe um conjunto m-mensurável $A \subset U$ com m-medida total, de modo que, $m_{\mathcal{F}(p)}(Z \cap \mathcal{F}_p) = 0 \ \ \forall p \in A$.
Tome $E = A \cap B$ e note que, $m(E^c) = m(A^c \cup B^c) \leq m(A^c) + m(B^c) = 0$, logo E é um conjunto de m-medida total.

Assim, $\forall p \in E$ vale que $m_{\mathcal{F}(p)}(Z \cap \mathcal{F}_p) = 0 \Rightarrow \lambda_{\mathcal{F}_p}(Z \cap \mathcal{F}_p) = 0$ pois, por hipótese $\mathcal{F}$ é absolutamente contínua por folhas do tipo I. Portanto $\lambda_{\mathcal{F}_p}(Z \cap \mathcal{F}_p) = 0$ para *m-q.t.p.* $p \in U$.

ii) Seja $A \subset U$, um conjunto de m-medida total, tal que para cada $a \in A$ exista $C_a \subset \mathcal{F}_a$ mensurável tal que $\lambda_{\mathcal{F}_a}(C_a) = 0$. Considere $Z = \bigcup_{a \in A} C_a$, assim

$$\lambda_{\mathcal{F}_a}(Z \cap \mathcal{F}_a) = \lambda_{\mathcal{F}_a}(C_a) = 0\ \forall a \in A.$$

Como $\mathcal{F}$ é absolutamente contínua por folhas do tipo II, temos que $m_{\mathcal{F}_p} \ll \lambda_{\mathcal{F}_p}$ m-quase todo $p \in U$, então $m_{\mathcal{F}_p}(Z \cap \mathcal{F}_p) = 0$ *m-q.t.p* p em U. Logo,

$$m(Z) = \int_{U/\mathcal{F}} m_{\mathcal{F}_p}(Z \cap \mathcal{F}_p)\ d\mu(\mathcal{F}_p) = 0 \ \text{ pois } m_{\mathcal{F}_p}(Z \cap \mathcal{F}_p) = 0 \ \ m\text{-}q.t.p\ p \in U.$$

Portanto $m(Z) = 0$ para m-quase todo ponto $p \in U$.

iii) Se $\mathcal{F}$ é absolutamente contínua por folhas do tipo III, temos que, $m_{\mathcal{F}_{(p)}} \backsim \lambda_{\mathcal{F}_p}$, e assim, $\lambda_{\mathcal{F}_p} \ll m_{\mathcal{F}(p)}$ *m-q.t.p.* em U e $m_{\mathcal{F}_{(p)}} \ll \lambda_{\mathcal{F}_p}$ *m-q.t.p.* em U, isto implica, respectivamente, que $\mathcal{F}$ é absolutamente contínua por folhas do tipo I e do tipo II.

■

5.2 Noções de Dinâmica Parcialmente Hiperbólica

Esta seção é uma breve introdução aos sistemas parcialmente hiperbólicos. No entanto, antes disso, é necessário compreendermos o que é um sistema hiperbólico.

Localmente, um sistema dinâmico diferenciável é bem aproximado por uma aplicação linear, que é a sua derivada. Hiperbolicidade refere-se à existência de direções invariantes sob a ação da derivada, nas quais o sistema exibe contração e expansão uniformes e complementares. Por sua vez, a hiperbolicidade parcial caracteriza-se pela presença de uma terceira direção invariante, cuja dinâmica é dominada pelas taxas de expansão ou contração das demais, apresentando, portanto, comportamento intermediário.

Hiperbolicidade Completa (Sistemas Anosov).

Seja M uma variedade Riemanniana compacta, conexa, suave, sem bordo, e seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^r, com $r \geqslant 1$.

Definição 5.5 ([16]). *Dizemos que $f : M \to M$ é **completamente hiperbólico** ou um **difeomorfismo de Anosov** se para cada $x \in M$, existir uma decomposição do espaço tangente em dois subespaços*

$$T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$$

e constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1 < \mu$ tais que para cada $x \in M$,

1. *A decomposição é invariante sobre a ação da derivada, ou seja,*
$Df(E^s(x)) = E^s(f(x))$ *e* $Df(E^u(x)) = E^u(f(x))$;

2. $\| Df^n(v) \| \leqslant C\lambda^n \| v \|$ *para* $v \in E^s(x)$ *e* $n \geqslant 0$;

3. $\| Df^{-n}(v) \| \leqslant C\mu^{-n} \| v \|$ *para* $v \in E^u(x)$ *e* $n \geqslant 0$.

Os subespaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ são chamados respectivamente de **subespaço estável** e **subespaço instável**. Tem-se que Df contrai uniformemente em $x \in M$ os vetores ao longo do subespaço $E^s(x)$ e expande uniformemente os vetores ao longo do subespaço $E^u(x)$.

As distribuições E^s e E^u são unicamente integráveis pelo Teorema da Variedade Estável (veja em [15]). Suas variedades integráveis determinam duas folheações transversais, $\mathcal{W}^s$ tangente à E^s chamada de **folheação estável** e $\mathcal{W}^u$ tangente à E^u chamada de **folheação instável** de M. Essas folheações são f-invariantes, ou seja, para $x \in M$,

$$f(\mathcal{W}^\sigma(x)) = \mathcal{W}^\sigma(f(x)). \quad \sigma = s, u.$$

e podem ser caracterizadas da seguinte forma

$$\mathcal{W}^s(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \text{ quando } n \to \infty\},$$
$$\mathcal{W}^u(x) = \{y \in M : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to 0 \text{ quando } n \to \infty\}.$$

onde d é distância induzida pela métrica Riemanniana. [16]

Sistemas Parcialmente Hiperbólicos.

Definição 5.6 ([16]). *Dizemos que o difeomorfismo $f : M \to M$ é **Parcialmente Hiperbólico** se existem números $C > 0$,*

$$0 < \lambda_1 \leqslant \mu_1 < \lambda_2 \leqslant \mu_2 < \lambda_3 \leqslant \mu_3, \quad \mu_1 < 1 \ e \ \lambda_3 > 1 \tag{5.1}$$

tais que para cada $x \in M$, existe uma decomposição invariante do fibrado tangente

$$T_xM = E^s(x) \oplus E^c(x) \oplus E^u(x)$$
$$Df(E^\sigma(x)) = E^\sigma(f(x)), \quad \sigma = s, c, u \tag{5.2}$$

a qual, para todo $n \geqslant 0$

$$C^{-1}\lambda_1^n \ \leqslant \| Df^n(v) \| \leqslant \ C\mu_1^n \| v \|, \ v \in E^s(x),$$

$$C^{-1}\lambda_2^n \ \leqslant \| Df^n(v) \| \leqslant \ C\mu_2^n \| v \|, \ v \in E^c(x),$$

$$C^{-1}\lambda_3^n \ \leqslant \| Df^n(v) \| \leqslant \ C\mu_3^n \| v \|, \ v \in E^u(x).$$

*As distribuições E^s, E^c, E^u são chamadas respectivamente de **subespaço estável, subespaço central** e **subespaço instável**. Seguindo esta nomenclatura, as distribuições $E^{cs} := E^c \oplus E^s$ e $E^{cu} := E^c \oplus E^u$ são chamadas de **centro-estável** e **centro-instável**, respectivamente.*

Observe que Df contrai vetores uniformemente ao longo do subespaço estável $E^s(x)$, expande uniformente ao longo do subespaço instável $E^u(x)$ e atua com taxas intermediárias ao longo do subespaço central $E^c(x)$. A ação de Df em $E^c(x)$ é dominada pelas ações de Df em $E^s(x)$ e $E^u(x)$. Além disso se f é parcialmente hiperbólico então f^{-1} também é, e estão relacionados por: $E^s_f = E^u_{f^{-1}}$, $E^u_f = E^s_{f^{-1}}$ e $E^c_f = E^c_{f^{-1}}$.

Exemplos

Chamamos toro de dimensão d o espaço quociente $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, ou seja, o espaço das classes de equivalência da relação de equivalência definida em $\mathbb{R}^d$ por $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}^d$.

Exemplo 4 ([14]). *Seja $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ o difeomorfismo de Anosov sobre o toro $\mathbb{T}^2$, induzido pela transformação linear dada pela matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que os autovalores de A são $\lambda_u = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 1 > \lambda_s = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} > 0$ e os respectivos subespaços são tangentes às linhas no toro

$$L_u = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x\} \quad e \quad L_s = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}x\}.$$

Além disso, $|\det(A)| = \lambda_s \cdot \lambda_u = 1$. Como a matriz é hiperbólica, o espaço $\mathbb{R}^d$, pode ser escrito como soma direta, $\mathbb{R}^d = E^s \oplus E^u$ tal que, $A(E^s) = E^s$ e $A(E^u) = E^u$. Então, existem constantes $C > 0$ e $\lambda < 1$ tais que,

$$\begin{aligned} \|A^n(v^s)\| &\leqslant C\lambda^n \|v^s\| \quad \text{para todo } v^s \in E^s \text{ e todo } n \geqslant 0, \\ \|A^{-n}(v^u)\| &\leqslant C\lambda^n \|v^u\| \quad \text{para todo } v^s \in E^s \text{ e todo } n \geqslant 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

A família de todos os subespaços afins de $\mathbb{R}^d$ da forma $v + E^s$ com $v \in \mathbb{R}^d$, define uma partição $\mathcal{F}^s$ de $\mathbb{R}^d$,chamada de folheação estável, cujos elementos são denominados folhas estáveis de A. Essa folheação é invariante por A, isto é, a imagem de qualquer folha estável também é uma folha estável. Além disso, pela equação (4.3), A contrai distâncias, uniformemente, dentro de cada folha estável. Analogamente, a família de

todos os subespaços afins de $\mathbb{R}^d$ da forma $v + E^u$, com $v \in \mathbb{R}^d$, define uma partição $\mathcal{F}^u$ de $\mathbb{R}^d$ chamada folheação instável. Esta folheação também é invariante, e a transformação A expande distâncias ao longo das folhas instáveis.

Projetando $\mathcal{F}^s$ e $\mathcal{F}^u$ pela projeção canônica $\pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{T}^d$, obtemos folheações $\mathcal{W}^s$ e $\mathcal{W}^u$ do toro, chamadas de folheação estável e folheação instável da transformação f, respectivamente.

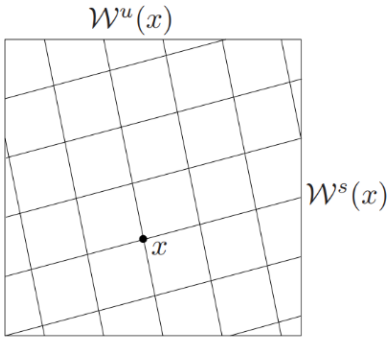


Figura 5.1: Folheação estável e folheação instável no toro $\mathbb{T}^2$ [14].

De forma geral, toda matriz $d \times d$ com entradas inteiras e determinante um, cujos autovalores, tem módulo diferente de um, induz um difeomorfismo Anosov no toro $\mathbb{T}^d$ que chamamos de Anosov linear. Isso ocorre, porque uma matriz com entradas inteiras, determinante um e autovalores com módulo diferente de um, define uma transformação hiperbólica em $\mathbb{R}^d$, cuja ação induz um difeomorfismo bem definido no toro $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. A condição sobre os autovalores garante a existência de uma decomposição hiperbólica do espaço tangente, com subespaços invariantes contraído e expandido, caracterizando um difeomorfismo de Anosov linear.

Exemplo 5 ([10]). *Seja $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ o difeomorfismo de Anosov sobre o toro $\mathbb{T}^2$, induzido pela transformação linear dada pela matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e considere $f_0 : \mathbb{T}^2 \times S^1 \to \mathbb{T}^2 \times S^1$ de modo que $f_0 = A \times Id$, isto é, $f_0(x, y, \theta) = (A(x, y), \theta)$.

Assim, f_0 é um exemplo de difeomorfismo parcialmente hiperbólico com,

$$T\mathbb{T}^3 = E^s_{f_0} \oplus E^c_{f_0} \oplus E^u_{f_0},$$

onde

$E^s_{f_0}(x,y,\theta) = E^s_A(x,y) \times \{\theta\}$

$E^u_{f_0}(x,y,\theta) = E^u_A(x,y) \times \{\theta\}$

$E^c_{f_0}(x,y,\theta) = T_{(x,y,\theta)}S^1$.

5.3 Continuidade Absoluta das Folheações Estáveis e Instáveis.

Seja M^m uma variedade Riemanniana, suave e conexa. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação k-dimensional com folhas C^1. Como na Definição 2.10, estamos considerando homeomorfismo $\varphi : B^k \times B^{m-k} \longrightarrow U$ para todo $x \in M$ e $U \subset M$ vizinhança de x.

A definição "usual" da propriedade de continuidade absoluta no sentido forte, que será apresentada a seguir, impõe condições sobre as derivadas de Radon-Nikodym das medidas condicionais geradas pelo volume em $\mathcal{F}_U$.

Seja (U, φ) a carta coordenada da folheação $\mathcal{F}$ em M, onde conjuntos $\varphi(B^k \times \{z\})$ são folhas locais e seja $\mathcal{T} = \varphi(\{y\} \times B^{m-k})$ a transversal local C^1. Para $x \in U$, denotamos $\mathcal{F}_U(x)$ a folha local contendo x. As notações para os volumes serão mantidas como na Seção 5.1.

Definição 5.7 ([2]). *A folheação $\mathcal{F}$ é dita* ***absolutamente contínua*** *se para quaisquer $\mathcal{T}$ e U existir uma família mensurável de funções mensuráveis positivas,*

$$\delta_x : \mathcal{F}_U(x) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{(chamadas } \textbf{\textit{densidades condicionais)}}$$

tal que, para cada subconjunto mensurável $A \subset U$,

$$m(A) = \int_{\mathcal{T}} \left[\int_{\mathcal{F}_U(x)} \mathbb{1}_A(x,y)\delta_x(y)\ d\lambda_{\mathcal{F}_{(x)}}(y) \right]\ d\lambda_{\mathcal{T}}(x).$$

Note que as densidades condicionais são automaticamente integráveis. Observe também, que essa definição é equivalente, a definição de $\mathcal{F}$ ser absolutamente contínua do tipo II.

Proposição 5.8 ([2]). *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação absolutamente contínua de uma variedade Riemanniana M, e seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Suponha que exista um conjunto $A \subset M$ de medida nula, tal que f é constante em $\mathcal{F}_{(x)} \backslash A$ para cada folha $\mathcal{F}_{(x)}$. Então, f é essencialmente constante em quase todas as folhas, isto é, para qualquer transversal $\mathcal{T}$, a função f é $\lambda_{\mathcal{F}_{(x)}}$-essencialmente constante para $\lambda_{\mathcal{T}}$-quase todo $x \in \mathcal{T}$.*

Demonstração: Seja $A \subset M$ um conjunto mensurável, com $m(A) = 0$ tal que a função mensurável $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ seja constante em $\mathcal{F}_{(x)} \backslash A$. Dada uma transversal local $\mathcal{T}$, como $\mathcal{F}$ é absolutamente contínua temos que,

$$0 = m(A) = \int_{\mathcal{T}} \left[\int_{\mathcal{F}_U(x)} \mathbb{1}_A(x,y)\delta_x(y)\ d\lambda_{\mathcal{F}_U(x)}(y) \right]\ d\lambda_{\mathcal{T}}(x), \tag{5.4}$$

fazendo $\psi(x) = \displaystyle\int_{\mathcal{F}_U(x)} \mathbb{1}_A(x,y)\delta_x(y)\ d\lambda_{\mathcal{F}_U(x)}(y)$ em (5.4) obtemos que,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{T}} \psi(x)\ d\lambda_{\mathcal{T}}(x) = 0 \text{ como } \psi(x) \geqslant 0 \text{ então } \psi(x) = 0 \ \ \lambda_{\mathcal{T}} - q.t.p.\ x \in \mathcal{T},\\
&\Longrightarrow \int_{\mathcal{F}_U(x)} \mathbb{1}_A(x,y)\delta_x(y)\ d\lambda_{\mathcal{F}_U(x)}(y) = 0 \ \ \lambda_{\mathcal{T}} - q.t.p.\ x \in \mathcal{T},\\
&\Longrightarrow \int_{(\mathcal{F}_U(x)\cap A)} \delta_x(y)\ d\lambda_{\mathcal{F}_U(x)}(y) = 0 \quad \lambda_{\mathcal{T}} - q.t.p.\ x \in \mathcal{T},\\
&\Longrightarrow \lambda_{\mathcal{F}_U(x)}(\mathcal{F}_U(x) \cap A) = 0 \quad \lambda_{\mathcal{T}} - q.t.p\ x \in \mathcal{T}.
\end{aligned}$$

Portanto para $\lambda_{\mathcal{T}} - q.t.p.\ x \in \mathcal{T}$ a função f é $\lambda_{\mathcal{F}_{(x)}}$-essencialmente constante. ■

A continuidade absoluta das folheações estáveis e instáveis é uma condição suficiente para provarmos a ergodicidade de difeomorfismos de Anosov. No entanto, provaremos uma propriedade mais forte chamada **continuidade absoluta transversal**.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de M e (U, φ) uma carta coordenada da folheação. Seja $\mathcal{T}_i = \varphi(\{y_i\} \times B^{m-k})$ para $y_i \in B^k$, $i = 1, 2$. Defina a **aplicação de holonomia** $h : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ um homeomorfismo dado por $h(\varphi(y_1, z)) = \varphi(y_2, z)$ para $z \in B^{m-k}$.

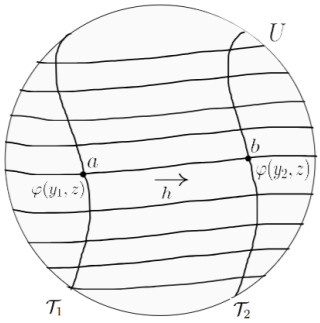


Figura 5.2: Aplicação de holonomia entre $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ ao longo das folhas de $\mathcal{F}$.

Definição 5.9 ([2]). *A folheação $\mathcal{F}$ é **transversalmente absolutamente contínua** se a aplicação de holonomia h é absolutamente contínua para qualquer carta coordenada da folheação e qualquer par de transversais como acima, isto é, se existe uma função mensurável $q : \mathcal{T}_1 \to \mathbb{R}$ (chamada **Jacobiano** de h) tal que para qualquer subconjunto mensurável $A \subset \mathcal{T}_1$,*

$$\lambda_{\mathcal{T}_2}(h(A)) = \int_{\mathcal{T}_1} \mathbb{1}_A q(z)\ d\lambda_{\mathcal{T}_1}(z).$$

Observação 5.10. *Note que, na Definição 5.9 a aplicação de holonomia é absolutamente contínua, se $\lambda_{\mathcal{T}_2} \ll \lambda_{\mathcal{T}_1}$, ou seja, para todo mensurável $A \subset M$ tal que, $\lambda_{\mathcal{T}_1}(A) = 0$ então, $\lambda_{\mathcal{T}_2}(h(A)) = 0$. Observe ainda, que a Definição 5.9 é equivalente a Definição 5.2 do início do capítulo.*

Proposição 5.11 ([2]). *Se a folheação $\mathcal{F}$ é transversalmente absolutamente contínua, então $\mathcal{F}$ é absolutamente contínua.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{T}$ uma transversal e U um aberto, como na definição de folheação absolutamente contínua. Sejam $x \in \mathcal{T}$ e $\mathcal{L}$ uma folheação C^1 $(m-k)$-dimensional, transversal a folheação $\mathcal{F}$, tal que $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$, $\mathcal{L}_U(x) = \mathcal{T}$ e $U = \bigcup_{y \in \mathcal{F}_U(x)} \mathcal{L}_U(y)$.
Note que, $\mathcal{L}$ é absolutamente contínua e transversalmente absolutamente contínua, por ser de classe C^1. Denote por $\overline{\delta}_y(\cdot)$ as densidades condicionais para $\mathcal{L}$. Como $\mathcal{L}$ é uma folheação C^1, então $\overline{\delta}$ é contínua e portanto mensurável. Para qualquer subconjunto

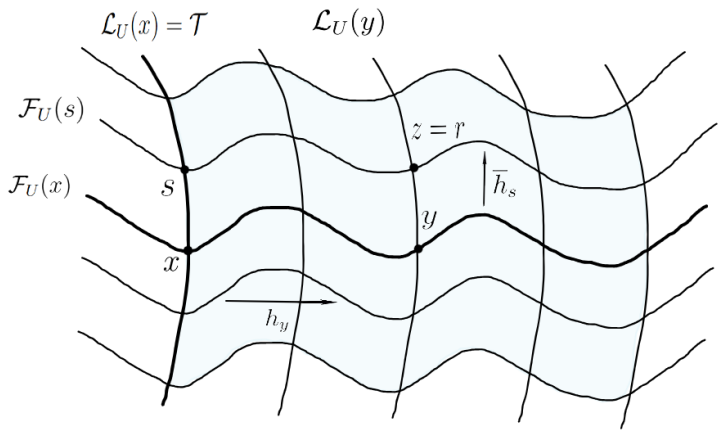


Figura 5.3: Aplicações de Holonomia das folheações $\mathcal{F}$ e $\mathcal{L}$.

$A \subset U$, segue do Teorema de Fubini

$$m(A) = \int_{\mathcal{F}_U(x)} \left[\int_{\mathcal{L}_U(y)} \mathbb{1}_A(y,z)\overline{\delta}_y(z)\ d\lambda_{\mathcal{L}_{(y)}}(z) \right]\ d\lambda_{\mathcal{F}_{(x)}}(y). \tag{5.5}$$

Seja h_y a aplicação de holonomia da transversal $\mathcal{L}_U(x) = \mathcal{T}$ para a transversal $\mathcal{L}_U(y)$, ao longo das folhas de $\mathcal{F}$, isto é, $h_y : \mathcal{T} \to \mathcal{L}_U(y)$. Como $\mathcal{F}$ é transversalmente absolutamente contínua, denote q_y o Jacobiano de h_y. Assim, dado um conjunto mensurável $A \subset U$ temos que

$$\lambda_{\mathcal{L}_U(y)}(h_y(A)) = \int_{\mathcal{T}=\mathcal{L}_U(x)} \mathbb{1}_A(h_y(s))q_y(s)d\lambda_{\mathcal{T}}(s) \Rightarrow d\lambda_{\mathcal{L}_U(y)}(z) = q_{(y)}(s)\ d_{\mathcal{T}}(s). \tag{5.6}$$

Observe pela Figura 5.3 que, $h_y(s) = z$ e $\mathbb{1}_A(h_y(s)) = \mathbb{1}_A(y,z)$, (com y fixo).
Por (5.6) temos,

$$\int_{\mathcal{L}_U(y)} \mathbb{1}_A(y,z)\overline{\delta}_y(z)\ d\lambda_{\mathcal{L}_{(y)}}(z) = \lambda_{\mathcal{L}_U(y)}(h_y(A)) = \int_{\mathcal{T}} \mathbb{1}_A(h_y(s))q_y(s)\overline{\delta}_y(h_y(s))d\lambda_{\mathcal{T}}(s) \tag{5.7}$$

Substituindo o membro direito da igualdade em (5.7) na Equação (5.5) e trocando a ordem de integração, obtemos

$$m(A) = \int_{\mathcal{T}} \underbrace{\left[\int_{\mathcal{F}_U(x)} \mathbb{1}_A(h_y(s))q_y(s)\overline{\delta}_y(h_y(s))\ d\lambda_{\mathcal{F}_{(x)}}(y) \right]}_{(*)}\ d\lambda_{\mathcal{T}}(s). \tag{5.8}$$

Analogamente, como $\mathcal{T}$ é transversalmente absolutamente continua. Denote por $\overline{h}_s$ a aplicação de holonomia ao longo das folhas de $\mathcal{L}$, $\overline{h}_s : \mathcal{F}_U(x) \to \mathcal{F}_U(s)$, com $s \in \mathcal{T}$ e

denote por $\overline{q}_s$ o Jacobiano de $\overline{h}_s$.

Assim podemos transformar a integral sobre $\mathcal{F}_U(x)$ em uma integral sobre $\mathcal{F}_U(s)$, fazendo a seguinte mudança de variáveis $r = h_y(s)$ e $y = \overline{h}_s^{-1}(r)$, obtemos

$$\lambda_{\mathcal{F}_U(x)}(A) = \lambda_{\mathcal{F}_U(x)}(\overline{h}_s^{-1}(\overline{h}_s(A))) = \int_{\mathcal{F}_U(s)} \mathbb{1}_A(r)\overline{q}_s^{-1}(r)\ d\lambda_{\mathcal{F}_{(s)}}(r)$$

Novamente pela continuidade absoluta transversal da folheação $\mathcal{T}$, obtemos pelo Teorema de Radon-Nikodym

$$d\lambda_{\mathcal{F}_{(x)}}(y) = \overline{q}_s^{-1}(r)\ d\lambda_{\mathcal{F}_{(s)}}(r).$$

Assim, podemos reescrever a integral em $(*)$,

$$\int_{\mathcal{F}_U(x)} \mathbb{1}_A(h_y(s))q_y(s)\overline{\delta}_y(h_y(s))\ d\lambda_{\mathcal{F}_{(x)}}(y) = \int_{\mathcal{F}_U(s)} \mathbb{1}_A(r)q_y(s)\overline{\delta}_y(r)\overline{q}_s^{-1}(r)\ d\lambda_{\mathcal{F}_{(s)}}(r). \quad (5.9)$$

Por (5.8) e (5.9), segue que

$$m(A) = \int_{\mathcal{T}} \left[\int_{\mathcal{F}_U(s)} \mathbb{1}_A(r)q_y(s)\overline{\delta}_y(r)\overline{q}_s^{-1}(r)\ d\lambda_{\mathcal{F}_{(s)}}(r) \right]\ d\lambda_{\mathcal{T}}(s).$$

Portanto, $\mathcal{F}$ é absolutamente contínua.

■

Teorema 5.12 ([2]). *As folheações estáveis e instáveis de um difeomorfismo de Anosov C^2 são transversalmente absolutamente contínuas.*

Demonstração: Veja ([2], p. 148). ■

5.4 Prova da Ergodicidade do difeomorfismo Anosov C^2

Dizemos que uma medida μ, em uma variedade Riemanniana M, é **suave** se ela tem uma densidade contínua q em relação ao volume Riemanniano m, ou seja, quando $\mu(A) = \int_A\ q(x)dm(x)$ para cada conjunto de Borel limitado $A \subset M$.

Teorema 5.13 ([2]). *Um difeomorfismo de Anosov de classe C^2 que preserva uma medida suave é ergódico.*

Demonstração: Sejam $(M, \mathfrak{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade, onde M é uma variedade Riemanniana suave, compacta e conexa, $\mathfrak{B}$ é o completamento da σ-álgebra de Borel e $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov de classe C^2, que preserva uma medida de probabilidade suave μ. Para $x \in M$, pela hipótese de f ser Anosov C^2 garante que o fibrado tangente TM admite uma decomposição contínua e Df-invariante em dois subfibrados,

$$TM = E^s \oplus E^u$$

que são integráveis à folheações, estável $\mathcal{W}^s$ e instável $\mathcal{W}^u$ cujas folhas respectivamente são tais que

$$\mathcal{W}^s(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \text{ quando } n \to \infty\} \text{ e} \tag{5.10}$$

$$\mathcal{W}^u(x) = \{y \in M : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to 0 \text{ quando } n \to \infty\}. \tag{5.11}$$

Considere uma função $\varphi : M \to \mathbb{R}$ contínua. Como M é compacta, φ é Lebesgue integrável, ou seja, $\varphi \in L^1(M)$, logo pelo Teorema Ergódico de Birkhoff 3.12 temos que os limites

$$\tilde{\varphi}_f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \;\text{ e }\; \tilde{\varphi}_{f^{-1}}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^{-j}(x)),$$

existem e são iguais em μ-$q.t.p$ $x \in M$. Seja $B \subset M$, o conjunto de medida total em que

$$\tilde{\varphi}_f(x) = \tilde{\varphi}_{f^{-1}}(x) \text{ para todo } x \in B. \tag{5.12}$$

Afirmação 1: Seja $U \subset M$ uma vizinhança local. Para m-quase todo ponto $x \in U$, a média $\tilde{\varphi}_f$ é constante ao longo da folha local estável $\mathcal{W}^s(x, U)$, ou seja, $\tilde{\varphi}_f(x) = \tilde{\varphi}_f(y)$, para todo $y \in \mathcal{W}^s(x, U)$ m-quase todo ponto $x \in U$.

Prova da Afirmação 1. Seja $B_1 \subset U$ um conjunto de medida de Lebesgue total, tal que, para $x \in B_1$, $\tilde{\varphi}_f$ está bem definida como em (5.12).

Considere $x \in B^1$, dado $y \in \mathcal{W}^s(x, U)$, pela propriedade (5.10) temos que

$d_s(f^j(x), f^j(y)) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$, e como φ é continua em M, e M é compacta, segue que φ é uniformente contínua, assim $|\varphi(f^j(x)) - \varphi(f^j(y))| \to 0$ quando $j \to \infty$. Como $\tilde{\varphi}_f(x)$

existe para $x \in B^1$, digamos que seja, $\tilde{\varphi}_f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \theta$, então

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_f(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(y)) &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(y)) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(y)) - \varphi(f^j(x)) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \\ &= \theta \\ &= \tilde{\varphi}_f(x)\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{W}^s(x,U) \subset B_1$ e todo $y \in \mathcal{W}^s(x,U)$, satisfaz $\tilde{\varphi}_f(x) = \tilde{\varphi}_f(y)$. Isto é, B_1 é um conjunto s-saturado em U, em outras palavras, para $x \in B_1$ tem-se que $\mathcal{W}^s(x,U) \subset B_1$.

Afirmação 1': Seja $U \subset M$ uma vizinhança local. Para m-quase todo ponto $x \in U$, a função $\tilde{\varphi}_{f^{-1}}$ é constante ao longo da folha local instável $\mathcal{W}^u(x,U)$, ou seja, para m-quase todo ponto $x \in U$, $\tilde{\varphi}_{f^{-1}}(x) = \tilde{\varphi}_{f^{-1}}(y)$, para todo $y \in \mathcal{W}^u(x,U)$.

Seja $B_2 \subset U$, um conjunto de medida de Lebesgue total, tal que, para $x \in B_2$, $\tilde{\varphi}_{f^{-1}}$ está bem definida como em (5.12). A prova dessa afirmação, segue de maneira análoga à da Afirmação 1, substituindo-se $\tilde{\varphi}_f$ por $\tilde{\varphi}_{f^{-1}}$ e considerando as folhas instáveis $\mathcal{W}^u(x,U)$ no lugar das estáveis locais. Assim, concluímos que, para todo $x \in B_2$, tem-se que $\mathcal{W}^u(x,U) \subset B_2$, e que, para todo $y \in \mathcal{W}^u(x,U)$, vale $\tilde{\varphi}_{f^{-1}}(x) = \tilde{\varphi}_{f^{-1}}(y)$. Portanto, o conjunto B_2 é u-saturado e tem medida de Lebesgue total em U.

Considere agora, $B' = B_1 \cap B_2$. Assim, o conjunto B' tem medida de Lebesgue total em U, isto é, $\mu(U \setminus B') = 0$.

Dado $x \in M$, seja V_x uma vizinhança do tipo produto em M, cuja fronteira de V_x está contida na união de folhas estáveis e instáveis de f. Como anteriormente, considere $B' \subset U = V_x$.

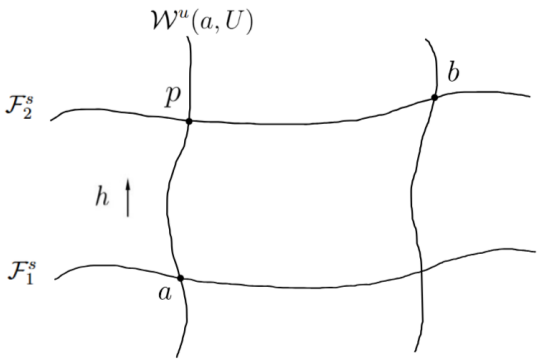
Como $\mathcal{W}^s$ é transversalmente absolutamente contínua, vale que, dada uma transversal $\mathcal{T}$ contida em uma folha instável em U, tem-se que,

$$\lambda_{\mathcal{W}^s(p,U)}((U \setminus B') \cap \mathcal{W}^s(p,U)) = 0 \ \lambda_{\mathcal{T}}\text{-}q.t.p.\ p \in \mathcal{T}. \tag{5.13}$$

Afirmação 2: $\tilde{\varphi}_f$ e $\tilde{\varphi}_{f^{-1}}$ são iguais e constante em quase todo ponto de U.

Prova da Afirmação 2: Sejam $\mathcal{F}_1^s = \mathcal{W}^s(a,U)$ e $\mathcal{F}_2^s = \mathcal{W}^s(b,U)$ duas folhas estáveis em

U, para as quais valem (5.13). Considere $h : \mathcal{F}_1^s \to \mathcal{F}_2^s$ a holonomia local entre $\mathcal{F}_1^s$ e $\mathcal{F}_2^s$, via folhas instáveis. A aplicação h é um homeomorfismo e satisfaz, $h(\mathcal{F}_1^s \cap B') = \mathcal{F}_2^s \cap B'$ para $\lambda_{\mathcal{F}_2^s}$-quase todo ponto. Assim, existem $C_1 \subset \mathcal{F}_1^s \cap B'$ e $C_2 \subset \mathcal{F}_2^s \cap B'$ conjuntos de medida de Lebesgue total, tais que $h(C_1) = C_2$. Além disso, se $a \in C_1$ e $b \in C_2$, supondo que $h(a) = p$ temos que



$$\tilde{\varphi_f}(a) \underset{B' \subset B^1}{=} \tilde{\varphi_{f^{-1}}}(a) \underset{Af.1'}{=} \tilde{\varphi_{f^{-1}}}(p) \underset{B' \subset B^2}{=} \tilde{\varphi_f}(p) \underset{Af.1}{=} \tilde{\varphi_f}(b) \underset{B' \subset B^2}{=} \tilde{\varphi_{f^{-1}}}(b)$$

Portanto $\tilde{\varphi_f}$ é constante em $B' \subset U$.

Finalmente tome $\{V_{x_1}, V_{x_2}, \cdots, V_{x_n}\}$ subcobertura finita da cobertura $\{V_x\}_{x \in M}$. Pela Afirmação 2, temos que, $\tilde{\varphi_f}$ é essencialmente localmente constante, isto é, cada $x \in M$, admite uma vizinhança aberta $V_x \subset M$, com $x \in V_x$, tal que, $\tilde{\varphi_f}$ é constante em Lebesgue quase todo ponto $p \in V_x$.

Afirmação 3: $\tilde{\varphi_f}$ é constante Lebesgue quase todo ponto em M.

Prova da afirmação 3. Suponha que existam $k_1 < k_2$ valores de $\tilde{\varphi_f}$. Seja $V \subset M$ o maior aberto tal que $\tilde{\varphi_f}$ é essencialmente constante igual a k_1 , e seja U o aberto tal que $\tilde{\varphi_f}$ é essencialmente contante mas $\tilde{\varphi_f} \neq k_1$. Assim, $M = V \cup U$, com $V \cap U = \varnothing$, absurdo, pois M é conexo.

Segue das Proposições 3.14 e 3.15 que f é ergódico.

■

Capítulo 6

Folheações Não Absolutamente Contínuas

Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico de classe C^2 definido em uma variedade Riemanniana compacta e suave M, preservando uma medida suave μ (isto é, uma medida equivalente ao volume Riemanniano m em M). Como vimos no capítulo anterior, o fibrado tangente TM admite uma decomposição contínua e Df-invariante em três subfibrados:

$$TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$$

onde Df contrai vetores uniformemente ao longo do subfibrado estável E^s, e expande uniformemente ao longo do subfibrado instável E^u e atua com taxas intermediárias ao longo do subfibrado central E^c.

Pelo Teorema da Variedade Estável em [16] as distribuições E^s e E^u são (unicamente) integráveis e por [2] as folheações estáveis $\mathcal{W}^s$ e instáveis $\mathcal{W}^u$ possuem a propriedade crucial de continuidade absoluta. Por outro lado, a distribuição central E^c pode não ser integrável e mesmo que seja, a folheação central correspondente $\mathcal{W}^c$, pode falhar em satisfazer a propriedade de continuidade absoluta.

Um dos primeiros a estudar o comportamento da folheação central foi o R. Mañé em uma carta (não publicada) para M. Shub, no qual ele relaciona a continuidade absoluta das folheações centrais compactas com os expoentes de Lyapunov não nulos.

Mañé observou que, no caso $\dim E^c = 1$, se existe uma folheação tangente ao fibrado central E^c, e as folhas são todas compactas com comprimento limitado por uma constante $K > 0$. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_x^n | E^c(x)\| > 0$ *q.t.p.* $x \in M$ (relativo a medida de Lebesgue), então $\mathcal{W}^c$ é não absolutamente contínua.

Argumento de Mañé: Seja $A = \{x \in M : \chi_f^c(x) > 0\}$, se $m(A) > 0$ então para algum $\alpha > 0$ tem-se que $m(\{x \in M : \chi_f^c(x) > \alpha\}) > 0$.

Escolha $\alpha > 0$ tal que $m(A_\alpha) > 0$. Suponha por absurdo que a folheação central $\mathcal{W}^c$ é absolutamente contínua em M.

Então $\exists\ A'_\alpha$ tal que $Leb_{\mathcal{W}^c(x)}(A_\alpha \cap \mathcal{W}_f^c(x)) > 0\ \forall\ x \in A'_\alpha$. No entanto, como a folheação é f-invariante, dado $x \in A'_\alpha$ calculando

$$|\mathcal{W}_f^c(f^n(x))| = \int_{\mathcal{W}_f^c} |Df_x^n(t) \cdot \gamma'(t)| dt \geqslant \int_{\mathcal{W}_f^c} e^{n\alpha}\ dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

$\Rightarrow |\mathcal{W}_f^c(f^n(x))| \to \infty$ quando $n \to \infty$, que contradiz a limitação por K.

O objetivo, neste contexto, é demonstrar que a falha da continuidade absoluta constitui um fenômeno genérico, em certo sentido. Mais precisamente, Hirayama e Pesin em [7], estabelecem condições suficientes para a não continuidade absoluta da folheação central, baseando-se em um método conhecido como argumento de Mañé.

6.1 Conceitos necessários

Definição 6.1. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^r, ($r \geqslant 1$), e $\mathcal{W}$ uma folheação de classe C^r da variedade diferenciável M. Dizemos que $\mathcal{W}$ é uma* folheação f-invariante *se, para todo ponto $x \in M$, a imagem da folha de $\mathcal{W}$ passando por x é igual à folha passando por $f(x)$, isto é,*

$$f(\mathcal{W}(x)) = \mathcal{W}(f(x)).$$

Nas condições da Seção 3.4, considere Γ o conjunto dos pontos regulares de f. Seja $x \in \Gamma$ e $\mathcal{W}$ uma folheação f-invariante de M cujas folhas são subvariedades suaves de M. Definimos o **expoente de Lyapunov ao longo da folheação** por

$$\chi_{\mathcal{W}}(x) = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} log\, |Jac(Df_x^n | T_x\mathcal{W}(x))|\,,$$

onde Jac representa o jacobiano.

Seja A^+ o conjunto dos pontos para os quais $\chi_{\mathcal{W}}(x) > 0$. Suponha $\mu(A^+) > 0$. Então, para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno, ℓ um inteiro suficientemente grande e todo $\varepsilon \in (0, \alpha/100)$, existe um conjunto de Borel $A^+_{\alpha,\ell,\varepsilon} \subset A^+$ de medida μ-positiva tal que para todo $x \in A^+_{\alpha,\ell,\varepsilon}$ e $n \geq 0$,

$$|Jac(Df^n_x|T_x\mathcal{W}(x))| \geq \ell^{-1}e^{\alpha n}e^{-\varepsilon n}. \tag{6.1}$$

Quando a distribuição E^c é integrável a uma folheação $\mathcal{W}^c$ com folhas suaves, denotamos $\chi_{\mathcal{W}^c}(x)$ simplesmente por $\chi^c(x)$, a **soma dos expoentes de Lyapunov** de f no ponto x ao longo do subespaço central, $T_x\mathcal{W}^c(x) = E^c(x)$. Assim,

$$\chi^c(x) = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} log\left|Jac(Df^n_x|E^c(x))\right|.$$

Como consequência do Teorema de Oseledec 3.16, $\chi^c(x) = \sum_i \chi_i(x) dim E_i(x)$, onde a soma é tomada sobre todos os i para os quais os subespaços associados satisfazem, $\bigoplus_i E_i(x) = E^c(x)$.

A medida μ é dita **hiperbólica** se $\chi_i(x) \neq 0$ para μ-quase todo ponto $x \in M$ e todo $i = 1, ..., s(x)$.

Seja $\rho > 0$ suficientemente pequeno, e ℓ inteiro suficientemente grande. Para todo $\varepsilon \in (0, \rho/100)$ existe um conjunto de Borel $\Lambda_{\rho,\ell,\varepsilon} \subset M$, de medida positiva, que constitui um bloco de Pesin (ver [17]), tal que para $x \in \Lambda_{\rho,\ell,\varepsilon}$ existe uma subvariedade local suave $\mathcal{W}^-_U(x)$ de M com a seguinte propriedade: para $y \in \mathcal{W}^-_U(x)$ e $n \geqslant 0$,

$$d_{f^n(x)}(f^n(x), f^n(y)) \leqslant \ell e^{-\rho n}e^{\varepsilon n}d_x(x, y), \tag{6.2}$$

onde d_x denota a distância Riemanniana induzida em $\mathcal{W}^-_U(x)$. A variedade local $\mathcal{W}^-_U(x)$ é tangente a

$$E^-(x) = \bigoplus_{i;\chi_i(x)<0} E_i(x).$$

Para $x \in \Lambda_{\rho,\ell,\varepsilon}$ o tamanho $\delta(x)$ de $\mathcal{W}^-_U(x)$ é uniformemente limitado inferiormente digamos por δ_l.

Seja $x \in \Gamma$. Definimos **o maior expoente de Lyapunov central** por

$$\chi_c(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} log \parallel Df_x^n | E^c(x) \parallel .$$

Claramente, f tem expoente central negativo se, e somente se, $\chi_c(x) < 0$. Se f tem expoente central negativo então $E^-(x) = E^s(x) \oplus E^c(x)$ para quase todo $x \in M$.

6.2 Resultados

Definição 6.2 ([7]). *Dizemos que um difeomorfismo parcialmente hiperbólico $f : M \to M$ preservando uma medida de probabilidade de Borel μ, é* ***centro dissipativo*** *se, para μ-quase todo ponto $x \in M$, a soma dos expoentes de Lyapunov ao longo do subespaço central $E^c(x)$, denotada por $\chi^c(x)$, é não nula, ou seja,*

$$\chi^c(x) \neq 0 \text{ para } \mu\text{-quase todo } x \in M.$$

Teorema 6.3 ([7]). *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico de classe C^2 de uma variedade Riemanniana compacta e suave M, preservando uma medida suave μ. Suponha que,*

(1) *a distribuição central E^c é integrável a uma folheação $\mathcal{W}^c$ com folhas compactas e suaves;*

(2) *f é centro dissipativo em um conjunto de μ-medida total.*

Então, a folheação central $\mathcal{W}^c$ não é absolutamente contínua.

Definição 6.4 ([7]). *Dizemos que um difeomorfismo parcialmente hiperbólico $f : M \to M$ preservando uma medida de probabilidade de Borel μ, tem* ***expoentes centrais negativos*** *se para μ-quase todo ponto $x \in M$, todos os expoentes de Lyapunov ao longo da distribuição central são negativos. A definição de f ter* ***expoentes centrais positivos*** *é análogo.*

Observação 6.5 ([7]). *No caso em que a distribuição central é unidimensional a dissipatividade central é equivalente a ter expoentes centrais não nulos μ-quase todo ponto.*

Como consequência do Teorema 6.3, obtemos o seguinte resultado, que provaremos a seguir.

Teorema 6.6 ([7]). *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico de classe C^2 de uma variedade Riemanniana compacta e suave M, preservando uma medida suave μ. Suponha que*

(1) *a distribuição central E^c é integrável a uma folheação $\mathcal{W}^c$ com folhas compactas e suaves;*

(2) *f tem expoentes centrais negativos(positivos).*

Então a folheação central $\mathcal{W}^c$ não é absolutamente contínua. Além disso, se μ é ergódica, então as medidas condicionais induzidas por μ nas folhas de $\mathcal{W}^c$ são atômicas.

Para um difeomorfismo centro-dissipativo geral, a medida condicional nas folhas centrais, embora sejam suaves, podem não ser atômicas. (Veja o exemplo em [7]).

O Teorema 6.3 é um caso particular de um resultado mais geral que descreveremos a seguir. Para a próxima definição, considere um difeomorfismo $f : M \to M$ de classe C^2, de uma variedade Riemanniana compacta e suave M, preservando uma medida de probabilidade de Borel μ.

Definição 6.7 ([7]). *Seja $\mathcal{W}$ uma folheação f-invariante de M, com folhas suaves. Dizemos que f é $\mathcal{W}$-**dissipativo** se existe um conjunto invariante $\mathcal{A} \subset M$, com $\mu(\mathcal{A}) > 0$,tal que, para μ-quase todo ponto $x \in \mathcal{A}$, a soma dos expoentes de Lyapunov de f ao longo do espaço tangente à folha $T_x\mathcal{W}(x)$, denotada por $\chi_{\mathcal{W}}(x)$ é diferente de zero,*

$$\chi_{\mathcal{W}}(x) \neq 0.$$

Para $x \in M$ denotamos por $\mathrm{Vol}(\mathcal{W}(x))$ o volume na folha $\mathcal{W}(x)$. Dizemos que a folheação $\mathcal{W}$ **tem folhas de volume finito em μ-quase todo ponto $x \in M$**, se o conjunto

$$\mathcal{C} = \{x \in M : \ Vol(\mathcal{W}(x)) < \infty\}$$

tem volume Riemanniano total, isto é, $m(M \setminus \mathcal{C}) = 0$.

Observação 6.8 ([7]). *Um caso típico de folheação cujas folhas tem volume finito em quase todo ponto, é uma folheação com folhas compactas e suaves. Se $\mathcal{W}$ for tal folheação, então para quase todo $x \in M$, a função $x \mapsto Vol(\mathcal{W}(x))$ está bem definida(finita), mas pode não ser limitada.*

Teorema 6.9 ([7]). *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^2 de uma variedade Riemanniana compacta e suave M, preservando uma medida suave μ. Seja também $\mathcal{W}$ uma folheação f-invariante de M, com folhas suaves. Suponha que $\mathcal{W}$ tem folhas de volume finito em m-quase todo ponto. Se f é $\mathcal{W}$-dissipativo em m-quase todo ponto então a folheação $\mathcal{W}$ não é absolutamente contínua.*

Demonstração: Como f é $\mathcal{W}$-dissipativo em quase todo ponto, seja $A^- \subset M$ o conjunto dos pontos para os quais $\chi_{\mathcal{W}}(x) < 0$ e $A^+ \subset M$ o conjunto dos pontos para os quais $\chi_{\mathcal{W}}(x) > 0$. Ambos os conjuntos são f-invariantes pelo Teorema de Oseledec e também $\mu(A^-) > 0$, ou $\mu(A^+) > 0$, ou ambos.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\mu(A^+) > 0$ (aqui estamos usando o fato de que μ é f-invariante suave, e portanto equivalente ao volume m). Fixe $\ell > 0$ suficientemente grande tal que $\mu(A^+_{\alpha,\ell,\varepsilon}) > 0$ (como em 6.1). Pelo Teorema de Derivação de Lebesgue, μ-quase todo ponto $x \in A^+_{\alpha,\ell,\varepsilon}$ é ponto de densidade de $A^+_{\alpha,\ell,\varepsilon}$ com respeito a μ (2.5).

Dado $V > 0$, considere o conjunto $Y_V = \{y \in M : Vol(\mathcal{W}(y)) \leqslant V\}$. Escolha $x \in A^+_{\alpha,\ell,\varepsilon}$, um ponto de densidade e $r > 0$, tal que, $\mu(A^+_{\alpha,\ell,\varepsilon} \cap B(x,r)) > 0$, ($B(x,r)$ é uma bola em M centrada em x e raio r) e denote $E = A^+_{\alpha,\ell,\varepsilon} \cap B(x,r)$. Pelas hipóteses do Teorema, para μ-quase todo ponto $p \in E$, tem-se que $\mathrm{Vol}(\mathcal{W}(p)) < +\infty$. Dado $N \in \mathbb{N}$, definimos $E_N = \{p \in E : \mathrm{Vol}(\mathcal{W}(p)) < N\}$, $N = 1, 2, 3, ...$

logo

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} E_N = E \quad q.t.p \quad p \in E.$$

Como $\mu(E) > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\mu(E_{N_0}) > 0$. Desta forma, existe $R = E_{N_0}$ tal que, $R \subset A^+_{\alpha,\ell,\varepsilon} \cap B(x,r) \cap Y_V$ e $\mu(R) > 0$.

Suponha por absurdo, que $\mathcal{W}$ seja uma folheação absolutamente contínua. Como $m(R) >$

0 pois, $\mu(R) > 0$, então para m-quase todo $y \in R$ o conjunto $R_y = R \cap \mathcal{W}(y)$ é tal que $\lambda_{\mathcal{W}(y)}(R_y) > 0$. Usando novamente, o fato de μ ser uma medida f-invariante suave, equivalente ao volume m, em que $\mu(R) > 0$, pelo Teorema de Recorrência de Poincaré a trajetória de μ-quase todo ponto $y \in R$ retorna infinitas vezes para R.
Seja $y \in R$ tal ponto. Logo existe uma sequência $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ de retornos sucessivos de y para o conjunto R, ou seja,

$$f^{n_j} \in R \Rightarrow \ Vol(\mathcal{W}(f^{n_j}(y))) \leqslant N_0 \ \forall \ j = 1, 2, 3, ...$$

Como $\mathcal{W}$ é uma folheação f-invariante, temos que, $f^n(\mathcal{W}(y)) = \mathcal{W}(f^n(y)) \ \forall n \in \mathbb{Z}$. Como $f^{n_j}(y) \in R \subset Y_V$ temos que para todo $j \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{W}(f^{n_j}(y))}(f^{n_j}(R_y)) \leqslant Vol(f^{n_j}(\mathcal{W}(y))) = Vol(\mathcal{W}(f^{n_j}(y))) \leqslant N_0 < V \\ \Rightarrow Vol(\mathcal{W}(f^{n_j}(y))) < V \ \forall j \geqslant 1 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Por outro lado, usando 6.1

$$\begin{aligned} Vol(\mathcal{W}(f^{n_j}(y))) &\geqslant \lambda_{\mathcal{W}(f^{n_j}(y))}(f^{n_j}(R_y)) \\ &= \int_{R_y} \left| Jac(Df_x^{n_j}|_{T_x\mathcal{W}(x))} \right| d\lambda_{\mathcal{W}(y)}(z) \\ &\underset{(5.1)}{\geqslant} \int_{R_y} \ell^{-1} e^{\alpha n} e^{-\varepsilon n} \ d\lambda_{\mathcal{W}(y)}(z) \\ &= \ell^{-1} e^{(\alpha-\varepsilon)n_j} \lambda_{\mathcal{W}(y)}(R_y) \\ &= \frac{1}{\ell} \underset{>0}{\lambda_{\mathcal{W}(y)}(R_y)} e^{(\alpha-\varepsilon)n_j} \xrightarrow[n_j \to +\infty]{} +\infty \end{aligned} \tag{6.4}$$

logo $Vol(\mathcal{W}(f^{n_j}(y))) \longrightarrow +\infty$ quando $n_j \to +\infty$. Por (6.3) e (6.4), absurdo!
Portanto a folheação $\mathcal{W}$ não é absolutamente contínua. ■

Observação 6.10. *Note que, o Teorema 6.3 é um caso particular do Teorema 6.9.*

Demonstração: *De fato, temos nas hipóteses do Teorema 6.3, pelo item* (1) *que a folheação central $\mathcal{W}^c$, tem folhas compactas e suaves e pela Observação 6.8, isto implica que as folhas de $\mathcal{W}^c$ tem volume finito em m-quase todo ponto em M. Além disto, pelo item* (2) *temos que f é centro dissipativo em μ-quase todo ponto em M, sendo assim,*

todas as condições do Teorema 6.9 para a folheação central $\mathcal{W}^c$ são satisfeitas. Portanto a folheação central $\mathcal{W}^c$ não é absolutamente contínua. ■

Demonstração do Teorema 6.6.

Demonstração: Note que, as hipóteses (1) e (2) do Teorema 6.6, implicam que a folheação central satisfaz as condições do Teorema 6.3 e portanto a folheação central $\mathcal{W}^c$ não é absolutamente continua. Basta provamos que se μ é uma medida ergódica, então as medidas condicionais induzidas por μ, nas folhas de $\mathcal{W}^c$, são atômicas.

Como a folheação central $\mathcal{W}^c$ é f-invariante, temos que

$$f_*\mu_x = \mu_{f(x)} \quad \mu\text{-}q.t.p.\ x \in M \tag{6.5}$$

onde μ_x denota a medida de probabilidade condicional gerada por μ na folha $\mathcal{W}^c(x)$.

Obs(1). Por definição $f_*\mu_x(A) = \mu_x(f^{-1}(A))$.

Obs(2). Lembre-se: μ é ergódica $\Leftrightarrow$ Dado qualquer mensurável $E \subset M$ invariante por f isto é, $E = f^{-1}(E)$ μ-$q.t.p$, é tal que $\mu(E) = 0$ ou $\mu(E) = 1$.

Pela ergodicidade de μ é suficiente mostrar que existe um conjunto mensurável $A \subset M$, com $\mu(A) > 0$, tal que, para μ-quase todo ponto $x \in A$ a medida condicional μ_x tem um átomo. De fato, para $x \in M$ defina,

$$d(x) = \sup\{\mu_x(\{y\}) : y \in \mathcal{W}^c(x)\}.$$

Note que d é uma função Borel mensurável, pois o conjunto dos átomos de uma folha é enumerável e como μ é uma medida positiva, f-invariante, temos que,

$$\mu_{f(x)}(\{f(y)\}) \underset{6.5}{=} f_*\mu_x(\{f(y)\}) \underset{\text{Obs.(1)}}{=} \mu_x(f^{-1}\{f(y)\}) = \mu_x(\{y\}), \tag{6.6}$$

logo,

$$d(f(x)) = \sup\{\mu_{f(x)}(\{f(y)\}) : y \in \mathcal{W}^c(x)\} = \sup\{\mu_x(\{y\}) : y \in \mathcal{W}^c(x)\} = d(x)$$

$\Rightarrow d(f(x)) = d(x)$, isto é, d é invariante por f e positiva para μ-$q.t.p$ $x \in A$. Como μ é ergódica, e d é f-invariante, temos que $d(x) = d > 0$ é constante para μ-$q.t.p$ $x \in M$.

Seja $S = \{x \in M : \mu_x(\{y\}) \geqslant \frac{d}{2}$ para algum $y \in \mathcal{W}^c(x)\}$, por (6.6) S é f-invariante,

ou seja, $S = f^{-1}(S)$ μ-$q.t.p$ $x \in M$, logo $\mu(S) = 0$ ou $\mu(S) = 1$, como para μ-$q.t.p$ $x \in A$ tem-se que $d(x) = d > 0$ então $A \subset S$ e $\mu(A) > 0$ logo $\mu(S) = 1$. O resultado segue, portanto, se mostrarmos que a medida condicional μ_x tem um átomo.

Defina o conjunto $\Lambda_\ell = \Lambda_{\rho,\ell,\varepsilon}$ como em (6.2). Fixe um inteiro positivo suficientemente grande $\ell \geq 1$. Então existe um conjunto A com $\mu(A) > 0$ tal que, para todo $x \in A$ obtemos,

$$\mu_x(\mathcal{W}^c(x) \cap \Lambda_\ell) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{6.7}$$

Mostraremos que para μ-quase todo ponto $x \in A$, a medida condicional μ_x tem um átomo. Como $\mu(A) > 0$, segue do Teorema de Recorrência de Poincaré, que existe um conjunto Borel mensurável $R \subset A$, com $\mu(R) = \mu(A)$ tal que, todo ponto $x \in R$ retorna infinitas vezes para R por iteradas de f. Isto implica que a aplicação de primeiro retorno $F = f^\tau : R \to R$ está bem definida, onde $\tau : R \to \mathbb{N}$ é o tempo de primeiro retorno para R. Note que, para

$\tau = 1$ tem-se $R \cap f^{-1}(R)$, é mensurável, pois R e $f^{-1}(R)$ são mensuráveis.

Seja, $B_1 = R \setminus f^{-1}(R)$,

$\tau = 2$ implica que $B_1 \cap f^{-1}(B_1)$ é mensurável, pois B_1 e $f^{-1}(B_1)$ são mensuráveis.

Considere $B_2 = B_1 \setminus f^{-1}(B_1)$

$\vdots$

Desta forma, temos que τ é mensurável. Além disto, considere $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup ...$, com $R_i = \{x \in R : \tau(x) = i\}$, para $i \neq j$ temos que $R_i \cap R_j = \varnothing$. Assim, $F(R) = f^\tau(R) = f^1(R_1) \cup f^2(R_2) \cup f^3(R_3) \cup \cdots \cup f^i(R_i) \cdots$. Logo F também é mensurável.

Obs(3). Note que $f^i(R_i) \cap f^j(R_j) = \varnothing$ se $i \neq j$.

Com efeito, suponha por absurdo que $f^i(R_i) \cap f^j(R_j) \neq \varnothing$ para $i \neq j$, então existe $y \in f^i(R_i) \cap f^j(R_j)$ tal que $y = f^i(x)$ e $y = f^j(x)$, suponha sem perca de generalidade que $i < j$ então $f^i(x) = f^j(x) \Rightarrow x = f^k(x) \in R$ com $k = j - i > 0$, que é um absurdo

pois $\tau(x) = i$ é o tempo de primeiro retorno de x para R. Com isso, obtemos que,

$$\mu(F(R)) = \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} f^i(R_i)) \overset{Obs(3)}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(f^i(R_i)) \overset{\mu \text{ é } f\text{-invar.}}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(R_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} R_i) = \mu(R)$$

logo $\mu(F(R)) = \mu(R)$.

Como a folheação $\mathcal{W}^c(x)$ é f-invariante, para $x \in R$ temos que,
$F(\mathcal{W}^c(x)) = f^{\tau(x)}(\mathcal{W}^c(x)) \overset{f\text{-invar.}}{=} \mathcal{W}^c(f^{\tau(x)}(x)) = \mathcal{W}^c(F(x))$ isto implica que para todo $x \in R$ a extensão, $F(\mathcal{W}^c(x)) = f^{\tau(x)}(\mathcal{W}^c(x))$ está bem definida e satisfaz $F(\mathcal{W}^c(x)) = \mathcal{W}^c(F(x))$.
Seja $x \in A$ e para $r \in (0, \delta_\ell/10)$, considere uma família $\mathcal{B}_x$ de $N = N(x,r) \geqslant 1$ bolas fechadas (nº N de bolas) que cobrem $\mathcal{W}^c(x)$, isto é possível, uma vez que a folha $\mathcal{W}^c(x)$ é compacta. Considere uma subcoleção, de bolas B_i com essas condições e defina

$$m(x) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{k} diam_x B_i\right\},$$

(aqui o $diam_x B_i$ denota o diâmetro de B_i com respeito a distância intrínseca em $\mathcal{W}^c(x)$) onde o ínfimo é tomado sobre todas as subcoleções de bolas fechadas B_i em $\mathcal{W}^c(x)$ tal que $k \leqslant N$ e

$$\mu_x\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{6.8}$$

Seja $m = supess_{x\in A} m(x)$.

Afirmação. Tem-se que $m = 0$.

Prova da Afirmação. Suponha que $m > 0$, então existe um inteiro n_0 tal que para todo $n \geq n_0$,

$$\ell \triangle N e^{-\rho n} e^{\varepsilon n} < \frac{m}{2} \quad \text{onde } \triangle = diam_x \mathcal{W}^c(x). \tag{6.9}$$

Sejam $B(y_1, r), B(y_2, r), ..., B(y_{k(x)}, r)$, bolas na coleção $\mathcal{B}_x$ para as quais a interseção $B(y_i, r) \cap \Lambda_\ell \neq \varnothing$. Como essas bolas cobrem $\mathcal{W}^c(x) \cap \Lambda_\ell$, uma vez que, $\mathcal{W}^c(x) \cap \Lambda_\ell \subset \mathcal{W}^c(x)$, assim $\mathcal{W}^c(x) \cap \Lambda_\ell \subset \bigcup_{i=1}^{k(x)} B(y_i, r)$ e como

$$\mu_x(\mathcal{W}^c(x) \cap \Lambda_\ell) \geqslant \frac{1}{2}, \quad \text{por (6.7)}$$

temos que

$$\mu_x\left(\bigcup_{i=1}^{k(x)} B(y_i, r)\right) \geqslant \mu_x(\mathcal{W}^c(x) \cap \Lambda_\ell) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{6.10}$$

Por (6.5) $f^n_* \mu_x = \mu_{f^n(x)}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e portanto,

$$\mu_{f^n(x)} \left(\bigcup_{i=1}^{k(x)} f^n(B(y_i, r)) \right) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{6.11}$$

Como as bolas $B(y_i, r)$ intersetam Λ_ℓ em diâmetros menores que $\delta_\ell/10$ obtemos de (6.2) que

$$diam_{f^n(x)} f^n(B(y_i, r)) \leqslant \ell \triangle e^{-\rho n} e^{\varepsilon n}. \tag{6.12}$$

Note que obtemos (6.12) da compacidade de $\mathcal{W}^c(x)$, umas vez que estamos considerando bolas $B(y_i, r)$, e $f^n(B(y_i, r))$ pode não ser uma bola, no entanto, tomando a maior distância entre pontos diametralmente opostos, obtemos uma bola B com $f^n(B(y_i, r)) \subset B$ tal que o $diam B = diam f^n(B(y_i, r))$.

Fixe $n \geqslant n_0$, e seja $y \in F^n(R)$. Então existe $x \in R$ tal que $F^n(x) = y$. Então, segue da definição de m, da F-invariância da folheação $\mathcal{W}^c|_R$, e das desigualdades (6.9), (6.11), e (6.12) que

$$\begin{aligned} m(y) = m(F^n(x)) &\leqslant \sum_{i=1}^{k(x)} diam_{F^n(x)} F^n(B(y_i, r)) \\ &\leqslant \ell \triangle k(x) e^{-\rho \tau_n(x)} e^{\varepsilon \tau_n(x)} \\ &\overset{\star}{\leqslant} \ell \triangle N e^{-\rho n} e^{\varepsilon n} \\ &< \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Disto implica que,

$$m = supess_{x \in A} m(x) = supess_{x \in R} m(x) = supess_{y \in F^n(R)} m(y) < \frac{m}{2}$$

contradição, com a suposição de que $m > 0$. Portanto, temos que $m = 0$, logo $m(x) = 0$ para μ-quase todo ponto $x \in A$.

Justificativa para que $(\star)$ ocorra: $k(x) < N$ e observe que

$F(x) = 1^{\text{o}}$ retorno de x à $R \Leftrightarrow \tau(x) = \tau_1(x)$ é tempo de primeiro retorno de x à R por f.

$\vdots$

$F^n(x) = n^{\text{o}}$ retorno de x à $R \Leftrightarrow \tau_n(x)$ é o tempo de primeiro retorno de x à R por f, logo $\tau_n \geqslant n \Rightarrow -n \geqslant -\tau_n(x)$ assim, $e^{-\tau_n(x)} \leqslant e^{-n}$.

Agora, fixe $x \in A$, existe uma sequência de bolas fechadas B_1, B_2, B_3,... $\subset \mathcal{W}^c(x)$ (com respeito a x) satisfazendo (6.8) tais que

$$\lim_{j\to\infty} diam_x B_j = 0$$

e por (6.8)

$$\mu_x(B_j) \geqslant \frac{1}{2N} \quad \forall\ j \in \mathbb{N} \tag{6.13}$$

Tome $z_j \in B_j$.

Afirmação: Para $z_j \in B_j$, qualquer ponto de acumulação da sequência $(z_j)_j$ é um átomo para μ_x.

Prova da afirmação. Seja z ponto de acumulação da sequência $(z_j)_j$. Suponha que $\mu_x(\{z\}) = 0$ e seja U_n bolas abertas de centro z e raio $\frac{1}{n}$ em $\mathcal{W}^c(x)$. Como

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{z\} \quad \text{e} \quad U_n \searrow \{z\}$$

$\Rightarrow \mu_x(U_n) \longrightarrow \mu_x(\{z\}) = 0$. Assim, dado $\varepsilon \ll \frac{1}{4N}$, existe n_0 tal que, para $n \geqslant n_0$ $\mu_x(U_n) < \varepsilon \Rightarrow \mu_x(U_n) < \frac{1}{4N}$, em particular $\mu_x(U_{n_0}) < \frac{1}{4N}$. Como $\lim_{j\to\infty} diam_x B_j = 0$ e z ponto de acumulação, existe $x_i \in (z_j)_j$, de modo que $d(x_i, z) < \frac{1}{10n_0}$ e que a bola B_i contendo x_i seja tal que $diam_x B_i < \frac{1}{10n_0}$.

Seja $y \in B_i$ tal que $d(y, z) \leqslant \frac{1}{5n_0} < \frac{1}{n_0} \Rightarrow B_i \subset U_{n_0}$

$$\Rightarrow \mu_x(B_i) \leqslant \mu_x(U_{n_0}) < \frac{1}{4N}. \tag{6.14}$$

As sentenças (6.13) e (6.14) nos conduzem a uma contradição. Portanto $\mu_x(\{z\}) > 0$, ou seja, qualquer ponto de acumulação da sequência $(z_j)_j$ como na afirmação tem um átomo de μ_x. Isto conclui a prova do Teorema. ■

Observação 6.11. *Por [16] temos que se f é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico de classe C^2, então existe uma vizinhança aberta de f, na topologia C^1, tal que todo difeomorfismo nessa vizinhança também é parcialmente hiperbólico.*

O resultado a seguir, nos mostra que a propriedade *centro-dissipativo* é típica em certo sentido.

Teorema 6.12 ([7]). *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico de classe C^2 de uma variedade Riemanniana compacta e suave M, preservando uma medida suave μ. Suponha que $\chi^c_f(x) < -\alpha$, para algum $\alpha > 0$ e μ-quase todo ponto $x \in M$. Então, qualquer difeomorfismo g que preserva μ, suficientemente próximo de f na topologia C^1 é centro dissipativo em um conjunto de medida positiva.*

Demonstração: Seja $\mathcal{U} \subset \mathrm{Diff}^1(M, \mu)$ uma vizinhança de f na topologia C^1. Onde $f \in \mathcal{U}$ é um difeomorfismo para o qual $\chi^c_f(x) < -\alpha$, para algum $\alpha > 0$ pequeno e para todo $x \in A_f$ um conjunto de medida total em M. Assim para todo $x \in A_f$,

$$\chi^c_f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} log \left| Jac(Df^n|_{E^c_f}(x)) \right| < -\alpha.$$

Integrando sobre M obtemos,

$$\int_M \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} log \left| Jac(Df^n|_{E^c_f(x)}) \right| d\mu(x) < \int_M -\alpha d\mu(x),$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_M log \left| Jac(Df^n|_{E^c_f(x)}) \right| d\mu(x) < -\alpha \underbrace{\mu(M)}_{=1} = -\alpha$$

Em particular, existe $n_0 > 0$, tal que

$$\frac{1}{n_0} \int_M log \left| Jac(Df^{n_0}|_{E^c_f(x)}) \right| d\mu(x) < -\frac{\alpha}{2}.$$

Por simplicidade podemos assumir que $n_0 = 1$, assim,

$$\int_M log \left| Jac(Df|_{E^c_f(x)}) \right| d\mu(x) < -\frac{\alpha}{2}.$$

Como a distribuição central varia continuamente com uma pertubação, para um difeomorfismo $g \in \mathcal{U}$ que preserva μ, suficientemente próximo de f na topologia C^1, temos

$$\int_M log \left| Jac(Dg|_{E^c_g(x)}) \right| d\mu(x) < -\frac{\alpha}{4}.$$

Segue do Teorema Ergódico de Birkhoff que existe um subconjunto g-invariante A_g com $\mu(A_g) > 0$, tal que, para todo $x \in A_g$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} log \left| Jac(Dg|_{E_g^c}(g^j(x))) \right| \leq -\frac{\alpha}{4} \tag{6.15}$$

Como $g^n = g \circ g \circ \overset{n \text{ vezes}}{\ldots} \circ g$ usando a regra da cadeia, $Dg^n = Dg \cdot \overset{n \text{ vezes}}{Dg \ldots} Dg$, assim

$$|Jac(Dg^n|_{E_g^c}(x)| = \prod_{j=0}^{n-1} |Jac(Dg|E_g^c(g^j(x))|$$

e o *log* transforma produto em soma, logo

$$log|Jac(Dg^n|E_g^c(x)| = \sum_{j=0}^{n-1} log|Jac(Dg|E_g^c(g^j(x))| \tag{6.16}$$

Portanto, por (6.15) e (6.16) temos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} log|Jac(Dg^n|E_g^c(x)| \leqslant -\frac{\alpha}{4} \;\Rightarrow\; \chi_g^c(x) \leqslant -\frac{\alpha}{4}$$

para todo $x \in A_g$, disto segue o resultado.

■

Teorema 6.13 ([7]). *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico de classe C^2 de uma variedade Riemanniana compacta e suave M, preservando uma medida suave μ. Suponha que $\chi_f^c(x) = 0$ para μ-quase todo ponto $x \in M$. Então para qualquer $\varepsilon > 0$, há um difeomorfismo g de classe C^2, tal que, $d_{C^1}(f, g) \leqslant \varepsilon$ e g é centro dissipativo em um conjunto de medida positiva.*

O Teorema 6.13 decorre dos resultados de Baraviera e Bonatti [1], que mostram que a neutralidade na direção central é estruturalmente instável na topologia C^1, podendo ser quebrada por pequenas perturbações que induzem dissipação.

Observação 6.14. *Os resultados de Baraviera e Bonatti [1] estabelecem que no ambiente conservativo, um difeomorfismo parcialmente hiperbólico $f : M \to M$ de classe C^2, cuja soma dos expoentes de Lyapunov centrais é nula em quase todo ponto, pode ser C^1-aproximado por difeomorfismos parcialmente hiperbólicos de classe C^2, conservativos, tais que soma dos expoentes de Lyapunov centrais é não nula.*

Desta maneira, no contexto em que há persistência de coerência dinâmica, com folheação central compacta, então restrito aos difeomorfismos hiperbólicos conservativos de classe C^2, os resultados de Baraviera-Bonatti, junto com os de Pesin-Hirayama [7], garantem a existência de um conjunto C^1 aberto e denso de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos cuja folheação central não é absolutamente contínua.

De acordo com o contexto mencionado, podemos citar por exemplo, os difeomorfismos parcialmente hiperbólicos de $\mathbb{T}^3$ com expoente central nulo ou skew-products com base Anosov e fibras S^1.

Existem resultados de persistência de folheação central não absolutamente contínua, no caso de folheação não compacta. Para tais resultados recomendamos por exemplo [6], para o caso Anosov; [12] no caso de derivados de Anosov de $\mathbb{T}^3$ e [5], no caso de folheação central não compacta e de dimensão maior que 1.

Referências Bibliográficas

[1] BARAVIERA, A. T.; BONATTI, C. Removing zero Lyapunov exponents. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, v. 23, p. 1655–1670, 2003.

[2] BRIN, M.; STUCK, G. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[3] CAMACHO, C.; NETO, A. L. *Geometric theory of foliations*. Springer Science & Business Media, 2013.

[4] CORNFELD, I. P.; FOMIN, S. V.; SINAI, Y. G. *Ergodic theory*. Springer Science & Business Media, 2012.

[5] COSTA, J. S.; MICENA, F. Pathological center foliation with dimension greater than one. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series A*, v. 39, n. 2, p. 1049–1070, 2019. DOI: 10.3934/dcds.2019044.

[6] GOGOLEV, A. *How typical are pathological foliations in partially hyperbolic dynamics: an example*. Israel Journal of Mathematics, v. 187, p. 493–507, 2012.

[7] HIRAYAMA, M.; PESIN, Y. Non-absolutely continuous foliations. *Israel Journal of Mathematics*, v. 160, n. 1, p. 173–187, 2007.

[8] LIMA, E. L. *Variedades diferenciáveis*. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[9] MAÑÉ, R. *Teoria ergódica*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1983.

[10] MICENA, F. P. *Avanços em dinâmica parcialmente hiperbólica e entropia para sistema iterado de funções*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

[11] MICENA, F.; TAHZIBI, A. Regularity of foliations and Lyapunov exponents of partially hyperbolic dynamics on 3-torus. *Nonlinearity*, v. 26, n. 4, p. 1071–1082, 2013.

[12] MICENA, F. *New derived from Anosov diffeomorphisms with pathological center foliation*. Journal of Dynamics and Differential Equations, v. 29, p. 1159–1172, 2017.

[13] MILNOR, J. Fubini foiled: Katok's paradoxical example in measure theory. *The Mathematical Intelligencer*, v. 19, n. 2, p. 30–32, 1997.

[14] OLIVEIRA, K.; VIANA, M. *Fundamentos da teoria ergódica*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. p. 3–12.

[15] PALIS, J.; MELO, W. de. *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. New York: Springer-Verlag, 1982.

[16] PESIN, Y. B. *Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity*. Zürich: European Mathematical Society, 2004.

[17] POLLICOTT, M. *Lectures on ergodic theory and Pesin theory on compact manifolds*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[18] PUGH, C.; VIANA, M.; WILKINSON, A. Absolute continuity of foliations. Preprint, 2007. Disponível em: https://w3.impa.br/~viana/out/pvw.pdf. Acesso em: 6 maio 2025.

[19] RUDIN, W. *Principles of mathematical analysis*. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1976.

[20] RUDIN, W. *Real and complex analysis*. New York: McGraw-Hill, 1987.