

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Estudo de Sistemas dinâmicos multívocos
assintoticamente autônomos**

Franklin Cá

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES
e da Bolsa Institucional

ITAJUBÁ, 16 DE JULHO DE 2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Estudo de Sistemas dinâmicos multívocos
assintoticamente autônomos**

Franklin Cá

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Análise Matemática

ITAJUBÁ – MG

16 DE JULHO DE 2025

*Dedico este trabalho aos meus
pais, Bransinho e Domingas*

Agradecimentos

A Deus por me proporcionar a vida e sabedoria para que pudesse lutar em prol deste sonho.

Aos meus pais, Bransinho Cá e Domingas Luis Fernandes, meus tios e tias, Manuel Luis Fernandes, Emiliana Ogari, Silvina Luis Fernandes, Alfredo Ogari, Rosa Djú, Adede Cá, Sabino Ié, Davide Ié e Fernando Djú, e meus irmãos e primos, Natalício Cá, Manuela Cá, Diana Cá, Naftali Cá, Nilton Cá, Benjamim Cá, Fábio Zeca Cá, Sabino Cá, Analisa Alfredo Fernandes Ogari, Mirinda Fernando Cana Ié, Jacira Fernando Cana Ié, Elias Cá, Nandinha Fernando Cana Ié, Julieta Sá e Sá, Camilo Nacuba e Netcha Nacuba pelo incentivo moral, orações e por acreditarem em mim. Vocês são minha fonte de inspiração. Agradeço a minha família que sempre esteve torcendo por mim.

Ao meu orientador Prof. Dr. Jacson Simsen pela paciência, competência e dedicação na orientação de meus estudos desde o meu primeiro ingresso no PMAT em agosto de 2020. Vejo em você um exemplo de profissionalismo a ser seguido.

Aos professores membros da banca examinadora, Giane Casari Rampasso e Cláudia Buttarello Gentile Moussa pela disposição em analisar e apontar as melhorias necessárias nesta dissertação.

Ao professor Fernando Pereira Micena e aos colegas do seu grupo de estudo de Sistemas Dinâmicos que me proporcionou muitos conhecimentos nesta área de estudo.

Aos professores, Rick Antônio Rischter, Fernando Pereira Micena, Jacson Simsen, Fábio Scalco Dias, Mariza Stefanello Simsen, Luis Fernando de Osorio Mello pelos ensinamentos em todas as disciplinas que cursei e pelas orientações.

Em especial, aos meus amigos e amigas, Júnior Djú, Alda Monteiro, Nayuca Alberto

Bampoky, Dionísio Gomes Kór, Julio Gomes, Manfinapul Armando Blez, Raimundo Antônio dos Santos, Sumaé Embaló, Amadú Jaló, Tchernó Sado Canté, Tchernó Baldé, Bruno Impondo Lima, Marciano Foré, Wilson Foré, Doglasse João Mário, Liberata João Insali, Victor da Silva, Geovane Baldé, Badilé Miranda Insali, Elísio da Costa Nhuta, Aruna Djafuno, Sónia Brandão Ié, Ivânia da Silva Golçalves Leite, Marucas António Infante, Ricardo Júlio Sami, Izequiel Orlando Nanque, Elizandro Victor Rogery, Bá Có e Armando Jorge Cá por transmitirem forças nos momentos de dificuldades. Obrigado pela paciência, carinho, conselhos e momentos de descontração. Vocês são muito especiais para mim.

Aos amigos de mestrado, Julio Gomes, Aldecio Alexandre Moutinho, Alejandro Camilo Vanegas Obregon, Brayan Duran Lozano, David Estiven Carvajal Mazo, Edson Alexsander de Souza, Débora Bispo de Oliveira Costa, Geovane Rocha de Araujo, João Vitor Ciolfi da Silva Froest Pinto, Lizzeth Paola Ibañez Rojas, Marina Andrade Domingues e Yelsin Velasquez Varillas pelos momentos marcantes durante o mestrado.

A CAPES e a Bolsa Institucional pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para minha formação.

“Quem domina números e letras, dominará o mundo.”

Franklin Cá

Resumo

Nesta dissertação estudamos atratores pullback de sistemas dinâmicos multívocos que são assintoticamente convergentes. É mostrado que, sob certas condições, os conjuntos componentes do atrator pullback de um sistema dinâmico podem convergir, com a variação da variável temporal, para aqueles do atrator pullback do sistema dinâmico limite. Exemplos particulares são atratores pullback de processos assintoticamente autônomos e assintoticamente periódicos. Teoremas com diferentes condições são estabelecidos e sua aplicabilidade e vantagens são destacadas.

Palavras-chave: problemas assintoticamente autônomos, atrator pullback, atrator global, processo de evolução, semigrupo e inclusões diferenciais.

Abstract

In this master thesis we study pullback attractors of multivalued dynamical systems that are asymptotically convergent. It is shown that, under certain conditions, the component sets of the pullback attractor of a dynamical system can converge, when time vary, to those of the pullback attractor of the limit dynamical system. Particular examples are pullback attractors of asymptotically autonomous and asymptotically periodic processes. Theorems with different conditions are established and their applicability and advantages are highlighted.

Keywords: asymptotically autonomous problems, pullback attractor, global attractor, evolution process, semigroup and differential inclusions.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
Sumário	vii
Introdução	1
1 Pré-Requisitos	5
1.1 Uma Coletânea de Resultados	5
2 Atratores pullback de processos multívocos	14
2.1 Preliminares	14
2.2 Periodicidade dos atratores pullback	18
3 Primeiros teoremas de convergência das propriedades de compacidade	20
3.1 Semiconvergências no sentido da semi-métrica de Hausdorff	20
3.2 Convergências completas no sentido métrico de Hausdorff	23
4 Teoremas de convergência alternativos de propriedades de limitação	33
4.1 Convergências sem suposição de equi-atração	33
4.2 Convergências completas para frente sob a suposição de equi-atração	40

5	Aplicações para uma inclusão diferencial escalar	46
5.1	Uma inclusão diferencial escalar não autônoma: Existência de soluções . .	46
5.1.1	Existência do atrator pullback e algumas propriedades	50
5.2	Convergências de atratores pullback assintoticamente periódicos	55
5.3	Convergências de atratores pullback assintoticamente autônomos	56
	Conclusões	59
	Apêndice	60
	Bibliografia	64

Introdução

A teoria de atratores é uma ferramenta útil para aprender sobre o comportamento de longo prazo de um sistema dinâmico, veja por exemplo [30, 23, 20, 13]. Um dos atratores que tem atraído muita atenção nas últimas décadas é o chamado atrator pullback, que é uma família de conjuntos compactos indexados no tempo $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, onde cada conjunto compacto atrai as trajetórias da solução no tempo correspondente à medida que os dados iniciais são puxados de volta para menos infinito [15, 3].

Geralmente, a dependência do tempo de um atrator pullback está diretamente relacionada à característica não autônoma do sistema dinâmico associado a uma equação diferencial com algum termo dependendo do tempo, por exemplo, a força externa. Se o campo forçante na equação $x' = f(t, x)$ for periódico, então o atrator pullback também tem chance de ser periódico (veja o Teorema 3.1.1). Portanto, intuitivamente, se o forçamento não autônomo de um sistema dinâmico se tornar cada vez mais autônomo em algum sentido, a natureza não autônoma do atrator pullback deverá tornar-se correspondentemente cada vez mais fraca. Isso leva ao estudo de atratores pullback assintoticamente autônomos.

Parece que os primeiros resultados a respeito de comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais ordinárias assintoticamente autônomas da forma

$$x' = f(t, x) \tag{1}$$

em $\mathbb{R}^n$ com $f(t, x) \rightarrow g(x)$ quando $t \rightarrow \infty$ apareceram no trabalho de Markus [24]. A equação

$$y' = g(y) \tag{2}$$

é então chamada a equação limite de (1). Foi provado, no caso bi-dimensional ($n = 2$), que o conjunto ω -limite de uma solução limitada para frente do problema (1) ou contém equilíbrios de (2) ou é a união de órbitas periódicas do problema (2).

Thieme, providenciou em [31], exemplos para os quais as soluções de (1) exibem um comportamento assintótico que difere dramaticamente daquele das soluções para o sistema limite (2). No trabalho [32] o autor apresentou o conceito de sistemas quasi-autônomos e contribuiu para obter mais resultados sobre o conjunto ω -limite de uma solução limitada para frente do problema (1) relacionando-o com equilíbrios e órbitas periódicas do sistema limite (2). A equação (1) é chamada quasi-autônoma com limite (2) se para todo subconjunto compacto K de X , tivermos $\int_{s_0}^{\infty} \sup_{x \in K} \|f(s, x) - g(x)\| ds < \infty$ para todo $s_0 \in \mathbb{R}$.

Strauss e Yorke consideraram, no seu trabalho [29], equações diferenciais ordinárias assintoticamente autônomas da forma $x' = f(x) + g(t, x)$ e provaram que todas as soluções tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$ desde que f e g sejam funções contínuas com valor vetorial e $g(t, \cdot)$ tende a zero quando $t \rightarrow \infty$, uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.

Uma vasta revisão da literatura sobre equações diferenciais assintoticamente autônomas pode ser encontrada no Survey de Simsen [27].

Nesta dissertação apresentaremos inclusões diferenciais ordinárias assintoticamente autônomas as quais foram apresentadas no artigo [7].

Equações Diferenciais Parciais assintoticamente autônomas do tipo semilinear com dependência temporal apenas do termo de força externa foram consideradas nos trabalhos [2, 3, 11, 6, 22]. Os autores de [21] abordaram uma equação fracamente dissipativa com a dependência do tempo sendo apenas do termo de força externa.

Equações Diferenciais Parciais quasilineares assintoticamente autônomas com o operador principal dependendo do tempo foram abordadas em [16, 17]. Depois disso os autores em [18, 26] consideraram Inclusões Diferenciais Parciais assintoticamente autônomas com o operador principal dependendo do tempo e os autores de [19] consideraram Sistemas Acoplados de Inclusões Diferenciais Parciais assintoticamente autônomos com os opera-

dores principais dependendo do tempo.

A teoria dos processos de evolução é uma ferramenta importante para estudar o comportamento de longo prazo das soluções globais associadas a equações não autônomas. Para muitas dessas equações, temos a garantia da existência de atratores pullback e, para alguns problemas, os componentes do atrator pullback convergem para o atrator global associado a um semigrupo limitante. Recentemente, para sistemas dinâmicos unívocos, os autores em [21], mostraram o seguinte resultado:

Lema 0.0.1. *Seja $\mathcal{U}$ o atrator pullback de um processo U e seja $\mathcal{A}$ o atrator global de um semigrupo S . Suponha que*

(i) *$\mathcal{U}$ é compacto para frente, ou seja, o fecho da união $\overline{\bigcup_{t \geq 0} A(t)}$ é compacto;*

(ii) *para qualquer sequência $\{x_\tau\}$ com $\lim_{\tau \rightarrow \infty} x_\tau = x_0$,*

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} d_X(U(\tau + t, \tau, x_\tau), S(t, x_0)) = 0, \forall t \geq 0. \quad (3)$$

Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(A(t), \mathcal{A}) = 0.$$

Em caso unívoco, a condição em (ii) é equivalente a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} d_X(U(t + T, t, x), S(T, x)) = 0, \forall E \text{ compacto}, T > 0. \quad (4)$$

As definições precisas de semigrupo, processo, atrator global e atrator pullback serão apresentadas no próximo capítulo.

O Lema 0.0.1 melhora os resultados correspondentes em [16], onde as duas condições haviam sido assumidas com mais uniformidade. No entanto, ainda pode ser difícil aplicá-lo em Equações Diferenciais Parciais. Consequentemente, Cui em [6], estabeleceu o seguinte resultado alternativo usando a condição de *limitação para frente*.

Lema 0.0.2. *Seja $\mathcal{U}$ o atrator pullback de um processo U e seja $\mathcal{A}$ o atrator global de um semigrupo S . Suponha que*

(i) $\mathcal{U}$ é limitado para frente, ou seja, existe um conjunto limitado B tal que $\bigcup_{t \geq 0} A(t) \subset B$;

(ii) a seguinte condição assintoticamente autônoma é válida

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} d_X(U(t+T, t, x), S(T, x)) = 0, \forall T > 0. \quad (5)$$

Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(A(t), \mathcal{A}) = 0.$$

Sugerimos ao leitor os trabalhos [27] e [25] para ver uma revisão da literatura no contexto unívoco.

Esta dissertação é baseada no artigo [7], no qual os resultados acima foram generalizados em três direções: primeiro, sistemas dinâmicos multívocos em vez de apenas sistemas unívocos; segundo, a convergência de atratores pullback para atratores pullback, o que cobre o caso particular em que o atrator pullback convergem para atratores globais associados a um semigrupo; terceiro, tanto as convergências para frente quanto as convergências para trás são estudadas e além disso, sob condições de equi-atração mostra-se que as convergências podem acontecer com a métrica completa de Hausdorff.

Vale a pena notar que a diferença entre as condições (3) e (5) pode ser crucial em aplicações específicas. Uma inclusão diferencial escalar (também chamada inclusão diferencial ordinária) é estudada como exemplo destacando as vantagens do Lema 0.0.2 sobre o Lema 0.0.1. É mostrado que o atrator pullback é assintoticamente autônomo se o termo forçante também for assintoticamente autônomo. Além disso, a equi-atração do atrator pullback também é provada, o que torna as convergências nesta aplicação todas válidas no sentido métrico completo de Hausdorff.

Capítulo 1

Pré-Requisitos

1.1 Uma Coletânea de Resultados

Nesta seção, apresentaremos algumas definições e resultados que utilizaremos ao longo deste trabalho.

Sejam X um espaço métrico completo com a métrica denotada por d , $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ e 2^X o conjunto de todos os subconjuntos de X .

Neste texto, usaremos as seguintes notações:

$$\mathcal{P}(X) := \{A \subset X : A \neq \emptyset\}$$

$$B(X) := \{B \subset X : B \neq \emptyset \text{ é um conjunto limitado em } X\}$$

$$F(X) := \{F \subset X : F \neq \emptyset \text{ é um conjunto fechado em } X\}$$

$$BF(X) := \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ é um conjunto fechado e limitado em } X\}$$

$$\mathcal{K}(X) := \{K \subset X : K \neq \emptyset \text{ é um conjunto compacto em } X\}$$

$$\mathcal{C}(X) := \{f : X \rightarrow X : f \text{ é contínua}\}$$

Para a aplicação multívoca $F : X \rightarrow 2^X$ denote $\mathcal{D}(F) = \{x \in X : F(x) \in \mathcal{P}(X)\}$.

Definição 1.1.1. [4] Um **processo de evolução** em X é uma família de aplicações $\{U(t, s) : X \rightarrow X, t \geq s \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{C}(X)$ que satisfaz as seguintes propriedades

(i) $U(t, t) = I$ para todo $t \in \mathbb{R}$, onde I é aplicação identidade em X ;

(ii) $U(t, s) = U(t, \tau)U(\tau, s)$ para todo $t \geq \tau \geq s$;

(iii) $\{(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : t \geq s\} \times X \ni (t, s, x) \mapsto U(t, s)x \in X$ é contínua.

$U(t, s)$ toma cada estado x do sistema no instante inicial s e evolui para o estado $U(t, s)x$ do sistema no tempo final t , onde $-\infty < s \leq t < \infty$. Observemos que, para $\sigma \in \mathbb{R}_+$ fixo, o operador $U(\sigma + \tau, \tau)$ pode ser um operador distinto para cada valor de $\tau \in \mathbb{R}$. Isto significa que, além do tempo decorrido σ , também o instante inicial τ pode desempenhar um papel importante no processo de evolução.

Os processos $\{U(t, s) : t \geq s\}$ para os quais $U(t, s) = U(t - s, 0)$ para todo $t \geq s$ são chamados **processos de evolução autônomos**.

Definição 1.1.2. [20, 30, 23, 13, 12] Uma família de operadores $\{S_t : X \rightarrow X, t \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathcal{C}(X)$, satisfazendo:

$$\begin{cases} S_{t+r} = S_t S_r, \forall t, r \in \mathbb{R}_+ \\ S_0 = I(\text{identidade em } X) \end{cases}$$

é chamado **Semigrupo**. Diremos que o semigrupo é linear quando X for espaço vetorial e $S_t : X \rightarrow X$ é um operador linear, $\forall t \in \mathbb{R}_+$. O semigrupo é não linear quando X não for espaço vetorial ou se existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $S_{t_0} : X \rightarrow X$ é não linear. Também denotaremos um semigrupo por $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. Um semigrupo $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ é chamado contínuo (ou C^0 -semigrupo) se a aplicação $(t, x) \mapsto S_t(x) = S(t, x)$ de $\mathbb{R}_+ \times X$ em X é contínua.

Quando S_t é uma aplicação multívoca $\forall t \in \mathbb{R}_+$, o semigrupo é chamado semigrupo multívoco e $S(t_1 + t_2, x) \subset S(t_1, S(t_2, x)), \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X$ para o qual

$$S(t, B) = \bigcup_{x \in B} S(t, x), \quad B \subset X.$$

Definição 1.1.3. [14] Dizemos que a aplicação $x(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ é uma trajetória do semigrupo multívoco $S : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ correspondente à condição inicial x_0 , se

$$x(t + \tau) \in S(t, x(\tau)), \forall t, \tau \in \mathbb{R}_+, x(0) = x_0.$$

Denotemos por $\mathcal{D}(x_0)$ o conjunto de todas as trajetórias correspondentes a x_0 .

Definição 1.1.4. [8] Uma métrica num conjunto X é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in X$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y , de modo que para quaisquer $x, y, z \in X$, vale

(1) $d(x, x) = 0$;

(2) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;

(3) $d(x, y) = d(y, x)$;

(4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 1.1.5. [8] Um espaço métrico é um conjunto M munido de uma métrica d e denotamos por (M, d) ou, simplesmente M , deixando subentendida qual a métrica d está sendo considerada.

Definição 1.1.6. [10] Para $x \in X$, $A, B \subset X$ ($A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$) definiremos

$$\text{dist}(x, B) = \inf_{y \in B} \{d(x, y)\}.$$

A semi-métrica de Hausdorff entre A e B é definida por

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{x \in A} \{\text{dist}(x, B)\} = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \{d(x, y)\}.$$

Definição 1.1.7. [14] Para $\varepsilon > 0$, $B \in B(X)$, o conjunto $O_\varepsilon(B) = \{y \in X : \text{dist}(y, B) < \varepsilon\}$ é uma ε - vizinhança de B .

Observação 1.1.1. [14] $O_\varepsilon(\overline{B}) = \bigcup_{x \in \overline{B}} B(x, \varepsilon)$.

Definição 1.1.8. [14] Diz-se que o conjunto $A \subset X$ atrai o conjunto B pelo semigrupo multívoco $S : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ se $\text{dist}(S(t, B), A) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow +\infty$. O conjunto M é um B - atrator global (**atrator global**) se ele atrai cada $B \in B(X)$.

Observação 1.1.2. [14] Note que A atrai B se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, $\exists T(B, \varepsilon) \geq 0$ tal que $S(t, B) \subset O_\varepsilon(A) \forall t \geq T(B, \varepsilon)$.

Definição 1.1.9. [8] Seja X um espaço métrico. Um ponto $x \in X$ diz-se aderente a um subconjunto A de X quando $d(x, A) = 0$, isto é, para cada $\varepsilon > 0$ existe $y \in A$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$.

Definição 1.1.10. [8] O fecho de um conjunto A num espaço métrico X é o conjunto de pontos de X que são aderentes a A e indicamos por $\overline{A}$.

Definição 1.1.11. [8] Um subconjunto A de um espaço métrico X diz-se denso em X quando $\overline{A} = X$.

Definição 1.1.12. [8] Um conjunto A de um espaço métrico X chama-se fechado quando $A = \overline{A}$.

Observação 1.1.3. [8] Dizer que um conjunto A de um espaço métrico X é fechado, significa que, se $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, então $x \in A$.

Proposição 1.1.1. [8] Para todo subconjunto A de um espaço métrico X , seu fecho $\overline{A}$ é fechado.

Observação 1.1.4. [8] Se A é um conjunto num espaço métrico X , $\overline{A}$ é o menor conjunto fechado de X que contém A , no seguinte sentido: se B é fechado de X e $A \subset B$, então $\overline{A} \subset B$.

Definição 1.1.13. [25] Uma norma sobre um espaço vetorial E sobre $\mathbb{R}$ é uma função que associa a cada $u \in E$ um número real não negativo, indicado por $\|u\|$, e chamado norma de u , de maneira que:

$$i) \quad \|u\| = 0 \iff u = 0;$$

$$ii) \quad \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u \in E;$$

$$iii) \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in E.$$

Definição 1.1.14. [25] Um espaço vetorial normado real é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ dotado de uma norma. Se E é um espaço vetorial normado, então $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $d(u, v) = \|u - v\|$ é uma métrica sobre E . A métrica d assim obtida chama-se métrica induzida pela norma dada sobre E .

Definição 1.1.15. [25] Uma sequência $\{x_n\}$ em um espaço métrico (X, d) é dita de Cauchy se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, se $n, m > n_0$.

Toda sequência convergente é de Cauchy. Porém, nem toda sequência de Cauchy é convergente.

Definição 1.1.16. [25] *Um espaço métrico (X, d) é dito completo se toda sequência de Cauchy converge em X .*

Definição 1.1.17. [14] *Um espaço normado $\mathcal{N}$ que é completo com a métrica induzida pela norma é chamado espaço de Banach. Assim representamos estes espaços por $\mathcal{B}$.*

Definição 1.1.18. [8] *Um operador linear entre os espaços vetoriais X e Y é uma aplicação $T : \text{dom } T \subset X \rightarrow Y$ em que seu domínio $\text{dom } T$ é um subespaço vetorial e*

$$T(\xi + \alpha\eta) = T(\xi) + \alpha T(\eta)$$

para quaisquer $\xi, \eta \in \text{dom } T$ e todo $\alpha \in \mathbb{E}$ ($\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{E} = \mathbb{C}$). Se $Y = \mathbb{E}$, $T : \text{dom } T \subset X \rightarrow Y$ é chamado de funcional linear.

Definição 1.1.19. [9] *O gráfico de um operador linear $T : \text{dom } T \subset \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ é o subespaço vetorial $\mathcal{G}(T) = \{(\xi, T\xi) : \xi \in \text{dom } T\}$ de $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$.*

Definição 1.1.20. [9] *Um operador linear $T : \text{dom } T \subset \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ é fechado se para toda sequência $(\xi_n) \subset \text{dom } T$ convergente, $\xi_n \rightarrow \xi \in \mathcal{N}_1$, com $(T\xi_n) \subset \mathcal{N}_2$ também convergente, $T\xi_n \rightarrow \eta$, tenha-se $\xi \in \text{dom } T$ e $\eta = T\xi$. Em outras palavras, T é fechado se $\mathcal{G}(T)$ for um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$.*

Proposição 1.1.2. [9] *Todo operador limitado T ($T \in B(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$) é fechado.*

Teorema 1.1.1. [9] (**Gráfico Fechado**). *Se $T : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ for um operador linear, então T é contínuo se, e somente se, T for fechado.*

Definição 1.1.21. [8] *Um produto interno no espaço vetorial X é uma função de $X \times X$ em $\mathbb{E}$ que para cada $(\xi, \eta) \in X \times X$ associa-se o elemento $\langle \xi, \eta \rangle \in \mathbb{E}$ e que satisfaz*

$$(i) \quad \langle \xi + \eta, \vartheta \rangle = \langle \xi, \vartheta \rangle + \langle \eta, \vartheta \rangle \text{ para todo } \xi, \eta, \vartheta \in X;$$

$$(ii) \quad \langle \alpha\xi, \eta \rangle = \alpha\langle \xi, \eta \rangle \text{ para todo } \xi, \eta \in X \text{ e } \alpha \in \mathbb{E};$$

(iii) $\langle \xi, \eta \rangle = \overline{\langle \eta, \xi \rangle}$ para todo $\xi, \eta \in X$;

(iv) $\langle \xi, \xi \rangle \geq 0$ para todo $\xi \in X$ e $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ se, e somente se, $\xi = 0$.

Definição 1.1.22. [8] Um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é um espaço com produto interno que é completo com a norma induzida pelo produto interno.

Definição 1.1.23. [8] Se X é um espaço normado, então o espaço de Banach $B(X, \mathbb{E})$ será denotado por X^* e chamado de espaço dual de X . Cada elemento de X^* é chamado de funcional linear contínuo em X . A norma em X^* será dada por

$$\|f\|_{X^*} = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\},$$

Quando $f \in X^*$ e $x \in X$, denotaremos por $\langle f, x \rangle = f(x)$ e diremos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^*, X}$ é o produto escalar na dualidade X^*, X .

Definição 1.1.24. [8] Seja X um espaço de Banach com dual X^* . Uma função convexa e própria em X é uma função $\varphi : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ para o qual existe $u_0 \in X$ com $\varphi(u_0) < \infty$ e satisfaz a desigualdade

$$\varphi((1-t)u + tv) \leq (1-t)\varphi(u) + t\varphi(v)$$

para todo $u, v \in X$ e $t \in [0, 1]$.

Definição 1.1.25. [8] A função $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ é dita ser semicontínua inferiormente (s.c.i) se

$$\varphi(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n)$$

para toda sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $u_n \rightarrow u$ em X . Dada uma função $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ convexa, própria e s.c.i, denotamos por $\mathcal{D}(\varphi)$, o domínio de φ , o conjunto

$$\mathcal{D}(\varphi) = \{u \in X : \varphi(u) < \infty\}.$$

Definição 1.1.26. [8] Seja A um operador definido no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ cujo domínio $\mathcal{D}(A) = \{x \in \mathcal{H} : Ax \neq \emptyset\}$. Dizemos que A em $\mathcal{H}$ é monótono se, para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$,

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0,$$

ou, mais precisamente, para todo $y_1 \in Ax_1$ e para todo $y_2 \in Ax_2$,

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

A noção de operador monótono em um espaço de Hilbert aparece como um caso particular de operador monótono de um espaço de Banach no seu dual.

Definição 1.1.27. [8] Dada uma função $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ convexa, própria e s.c.i, a subdiferencial $\partial\varphi$ de φ é a aplicação $\partial\varphi : X \rightarrow X^*$ dada por

$$\partial\varphi(u) = \{f \in X^* : \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v - u \rangle_{X^*, X}, \forall v \in \mathcal{D}(\varphi)\}.$$

Denotamos $\mathcal{D}(\partial\varphi) = \{u \in X : \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}$.

Observação 1.1.5. [8] A subdiferencial $\partial\varphi$ é monótona em X .

Teorema 1.1.2. [8] Seja X um espaço de Banach real e $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e s.c.i. Então $\partial\varphi : X \rightarrow X^*$ é um operador maximal monótono.

Definição 1.1.28. [10] Uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de um espaço topológico X é dita cobrir X ou ser uma cobertura de X se a união dos elementos de $\mathcal{C}$ contém X . Ela é chamada uma cobertura aberta de X se seus elementos são abertos de X .

Definição 1.1.29. [10] Um espaço topológico X é dito ser compacto se toda cobertura aberta $\mathcal{C}$ de X contém uma subcoleção finita que também cobre X .

Definição 1.1.30. [10] Um conjunto A em um espaço métrico (X, d) é chamado **relativamente compacto** se o fecho $\overline{A}$ é compacto.

Definição 1.1.31. [14] Seja $1 \leq p < \infty$ e um espaço de medida (X, Σ, μ) . O espaço $L_\mu^p(X)$ é definido como o conjunto de classes de equivalências com representantes sendo funções complexas mensuráveis definidas em X tais que

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

No caso $p = \infty$, denotamos por $L_\mu^\infty(X)$ o conjunto das funções complexas mensuráveis à Lebesgue e essencialmente limitadas em X , isto é, existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ para quase todo (q.t.p.) $x \in X$. Cada constante C é denominada majorante essencial de $|f|$ e a norma de $f \in L_\mu^\infty(X)$ é definida por

$$\|f\|_\infty = \inf_{x \in X} \{C; |f(x)| \leq C, \text{ q.t.p } x \in X\} = \sup \text{ess } |f|.$$

O espaço $L^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$, munido de sua respectiva norma torna-se um espaço de Banach.

Lema 1.1.1. [14] (*Desigualdade de Young*) Sejam $\theta, \phi \geq 0$ expoentes conjugados, ou seja $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\phi} = 1$. Então para quaisquer números reais positivos a, b temos que

$$ab \leq \frac{1}{\theta} a^\theta + \frac{1}{\phi} b^\phi.$$

Lema 1.1.2. [8] (*Desigualdade de Gronwall-Bellman*) Sejam $\tau, T \in \mathbb{R}$, $\tau < T$. Sejam $m \in L^1(\tau, T, \mathbb{R})$ tal que $m \geq 0$ q.t.p em (τ, T) e $a \geq 0$ uma constante. Seja $\phi : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que verifica

$$\phi(t) \leq a + \int_\tau^t m(s)\phi(s)ds,$$

para todo $t \in [\tau, T]$. Então,

$$\phi(t) \leq ae^{\int_\tau^t m(s)ds},$$

para todo $t \in [\tau, T]$.

Lema 1.1.3. [8] (*Desigualdade de Gronwall*) Sejam $\tau, T \in \mathbb{R}$, $\tau < T$. Sejam $m \in L^1(\tau, T, \mathbb{R})$ tal que $m \geq 0$ q.t.p em (τ, T) e $a \geq 0$ uma constante. Seja $\phi : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_\tau^t m(s)\phi(s)ds,$$

para todo $t \in [\tau, T]$. Então,

$$|\phi(t)| \leq a + \int_{\tau}^t m(s)ds,$$

para todo $t \in [\tau, T]$.

Definição 1.1.32. A função $\frac{du}{dt} \in L_{Loc}^{\infty}([s, +\infty), \mathbb{R})$ se $\forall [a, b] \subset [s, \infty)$ temos $\sup_{\tau \in [a, b]} \frac{du}{dt}(\tau) < +\infty$.

Capítulo 2

Atratores pullback de processos multívocos

Nesta seção relembramos alguns preliminares sobre atratores pullback de sistemas dinâmicos multívocos e depois mostramos que o atrator pullback de um sistema periódico é periódico.

Seja (X, d_X) um espaço métrico completo. Denote por $\mathbb{R}_{\geq}^2 := \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2 : t \geq \tau\}$ e $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$.

2.1 Preliminares

Uma aplicação $U : \mathbb{R}_{\geq}^2 \times X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ é chamada de processo multívocos se $U(t, \tau, x) \subset U(t, s, U(s, \tau, x))$ e $U(\tau, \tau, x) = x$ para $t \geq s \geq \tau$ e $x \in X$. A aplicação U é chamada de estrito se $U(t, \tau, x) = U(t, s, U(s, \tau, x))$ para todos os $t \geq s \geq \tau$ e $x \in X$.

Definição 2.1.1. [7] Uma família $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de conjuntos compactos é chamado de atrator pullback de um processo multívoco U se

(i) é pullback atraente, ou seja, para todo conjunto limitado não-vazio D em X ,

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t, \tau, D), A(t)) = 0, \forall t \in \mathbb{R};$$

(ii) é negativamente semi-invariante, ou seja, $A(t) \subset U(t, \tau, A(\tau))$ para todo $t \geq \tau$; e

(iii) é minimal entre as famílias de conjuntos fechados que satisfazem as condições acima.

Além disso, é dito estritamente invariante se $A(t) = U(t, \tau, A(\tau))$ para todo $t \geq \tau$.

Observação 2.1.1. A minimalidade mencionada na definição acima, é no sentido de que se existisse outra coleção de fechados $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}$ que cumpre às duas primeiras condições da definição acima, então $A(t) \subset A_\infty(t) \forall t \in \mathbb{R}$.

Definição 2.1.2. [7] Dizemos que uma família $\{E(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de conjuntos não-vazios é

(i) limitada [compacta] para frente, se existir um conjunto B limitado [compacto] tal que

$$\bigcup_{t \geq 0} E(t) \subset B;$$

(ii) limitada [compacta] para trás, se existir um conjunto limitado [compacto] K tal que

$$\bigcup_{t \leq 0} E(t) \subset K.$$

O seguinte teorema de existência é bem conhecido.

Lema 2.1.1. ([5], Lema 2.5). Suponha que exista uma família de conjuntos compactos $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ que é pullback atraente e que a aplicação $x \mapsto U(t, \tau, x)$ tenha gráfico fechado para todo $t \geq \tau$. Então o processo multívoco U tem um atrator pullback $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ dado por

$$A(t) = \overline{\bigcup_{E \in BF(X)} \omega(t, E)}, \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $\omega(t, E) = \bigcap_{s \leq t} \overline{\bigcup_{\tau \leq s} U(t, \tau, E)}$ é o conjunto ω -limite pullback atraente definido em E sob U . Além disso, se U é estrito e o atrator pullback $\mathcal{U}$ é limitado para trás, então $\mathcal{U}$ é estritamente invariante.

Um processo multívoco especial é o chamado semigrupo multívoco, cujo comportamento dinâmico depende apenas do tempo decorrido e não do tempo inicial. É definido como uma aplicação multívoca $S : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ satisfazendo $S(0, x) = x$ e $S(t + s, x) \subset S(t, S(s, x))$ para todos $t, s \in \mathbb{R}_+$ e $x \in X$.

Definição 2.1.3. [7] Diz-se que um conjunto compacto $\mathcal{A} \subset X$ é o atrator global do semigrupo multívoco S se

(i) é globalmente atraente, ou seja, para cada conjunto limitado não-vazio D em X ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S(t, D), \mathcal{A}) = 0;$$

(ii) é negativamente semi-invariante, ou seja, $\mathcal{A} \subset S(t, \mathcal{A})$ para todo $t \geq 0$;

(iii) é o conjunto minimal fechado que satisfaz as condições acima.

Observação 2.1.2. [5] Vamos denotar $W(\tau) = C([\tau, \infty); X)$ e seja $\mathcal{R} = \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} R(\tau)$ consistindo de aplicações $\varphi \in W = \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} W(\tau)$ satisfazendo:

(H1) Para qualquer $\tau \in \mathbb{R}$ e $x \in X$ existe $\varphi \in R(\tau)$ tal que $\varphi(\tau) = x$.

(H2) $\varphi_s = \varphi|_{[\tau+s, \infty)} \in R(\tau + s)$ para qualquer $s \geq 0$, $\varphi \in R(\tau)$ (**Propriedade de Translação**).

Considere também algumas suposições adicionais, que serão necessárias para obter boas propriedades. A saber:

(H3) Seja $\varphi \in R(\tau)$, $\psi \in R(r)$ e $\varphi(s) = \psi(s)$ para alguns $s \geq r \geq \tau$.

Então a função θ definida por

$$\theta(t) := \begin{cases} \varphi(t), & t \in [\tau, s], \\ \psi(t), & t \in [s, \infty), \end{cases}$$

pertence a $R(\tau)$ (**Propriedade de Concatenação**).

(H4) Para qualquer sequência $\varphi^n \in R(\tau)$ tal que $\varphi^n(\tau) \rightarrow \varphi_0$ em X , existe uma subsequência φ^{n_k} e $\varphi \in R(\tau)$ tal que

$$\varphi^{n_k}(t) \rightarrow \varphi(t), \quad \forall t \geq \tau.$$

Definição 2.1.4. [5] Definimos a aplicação multívoca $U : \mathbb{R}_{\geq}^2 \times X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ associado à família $\mathcal{R}$ da seguinte maneira:

$$y \in U(t, s, x) \text{ se houver } \varphi \in R(s) \text{ tal que } y = \varphi(t), \varphi(s) = x.$$

Lema 2.1.2. [5] Se (H1) e (H2) forem válidas, então U é um processo multívoco. Se, além disso, (H3) for válido, então U é um processo multívoco estrito.

Se (H4) é satisfeito, então $x \rightarrow U(t, \tau, x)$ tem gráfico fechado para todos os $t \geq \tau$.

Lema 2.1.3. [5] Uma aplicação $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ é chamada de trajetória completa de $\mathcal{R}$ se

$$\varphi := \gamma|_{[\tau, +\infty)} \in R(\tau), \text{ para todo } \tau \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

É óbvio que

$$\gamma(t) \in U(t, s, \gamma(s)) \text{ para todo } s \leq t. \quad (2.2)$$

A trajetória completa γ é dita limitada para trás (para frente) se existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\cup_{r \leq \tau} \gamma(r)$ ($\cup_{r \geq \tau} \gamma(r)$) é limitado. É limitado se $\cup_{r \in \mathbb{R}} \gamma(r)$ é um conjunto limitado. Claramente, γ é limitado se, e somente se, for limitado para trás e para frente.

Teorema 2.1.1. [5] Suponha que (H1), (H2) e (H3) ou (H4) valem e que U possua o atrator pullback limitado para trás $\{A(t)\}$. Então

$$A(t) = \{\gamma(t) : \gamma \text{ é uma trajetória completa limitada para trás}\}.$$

Teorema 2.1.2. [5] Suponha que (H1), (H2) e (H3) ou (H4) valem e que U possua o atrator pullback limitado para frente $\{A(t)\}$. Então

$$A(t) = \{\gamma(t) : \gamma \text{ é uma trajetória completa limitada para frente}\}$$

Corolário 2.1.1. [5] Suponha que (H1), (H2) e (H3) ou (H4) valem e que U possua o atrator pullback limitado $\{A(t)\}$. Então

$$A(t) = \{\gamma(t) : \gamma \text{ é uma trajetória completa limitada}\}$$

2.2 Periodicidade dos atratores pullback

Nesta seção provaremos que os atratores pullback de processos periódicos são periódicos. Resultados semelhantes também são vistos em Wang [33], onde os atratores pullback aleatórios são estudados.

Seja $T > 0$. Diz-se que um processo multívoco U é periódico com período T se

$$U(t + T, \tau + T, x) = U(t, \tau, x), \forall t \geq \tau, x \in X.$$

Um atrator pullback $\mathcal{U}$ é chamado periódico com período T se $A(t) = A(t + T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.2.1. [7] *Suponha que U seja um processo multívoco com atrator pullback $\mathcal{U}$. Se U é periódico com período T , então $\mathcal{U}$ é periódico com período T .*

Demonstração. Definindo $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ por $A_\infty(t) := A(t + T)$. Queremos mostrar que $A(t) = A_\infty(t)$.

Seja $B \subset X$ um conjunto não-vazio limitado qualquer. Pela definição do atrator pullback, $\mathcal{U}$ é pullback atraente, e portanto

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t, \tau, B), A_\infty(t)) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t + T, \tau + T, B), A(t + T)) = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto $\mathcal{U}_\infty := \{A_\infty(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é uma família de conjuntos compactos que atraem limitados de X através do recuo dos dados iniciais do processo U .

Pela definição do atrator pullback $\mathcal{U}$, temos que $A(t) \subset U(t, \tau, A(\tau))$ para todo $t \geq \tau$. Como $A(t + T) = A_\infty(t)$ e $U(t + T, \tau + T, A(\tau + T)) = U(t + T, \tau + T, A_\infty(\tau)) = U(t, \tau, A_\infty(\tau))$, concluímos que $A_\infty(t) \subset U(t, \tau, A_\infty(\tau)) \forall t \geq \tau$. Isto mostra que $\mathcal{U}_\infty := \{A_\infty(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é negativamente semi-invariante.

Pela propriedade da minimalidade do atrator pullback $\mathcal{U}$ temos $A(t) \subset A_\infty(t) \forall t \in \mathbb{R}$.

Da mesma forma,

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t + T, \tau + T, B), A(t)) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t, \tau, B), A(t)) = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado,

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t + T, \tau + T, B), A_\infty(t)) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t + T, \tau + T, B), A(t + T)) = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, pela minimalidade do $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ temos que $A_\infty(t) \subset A(t) \ \forall t \in \mathbb{R}$. ■

Capítulo 3

Primeiros teoremas de convergência das propriedades de compacidade

Nesta seção estudamos atratores pullback com propriedades de compacidade para frente ou para trás. Ambas as convergências para frente e para trás são estudadas.

3.1 Semiconvergências no sentido da semi-métrica de Hausdorff

A seguir está uma generalização multívoca do Lema [0.0.1](#).

Teorema 3.1.1. *[7] (Semiconvergência para frente) Seja U um processo multívoco com atrator pullback $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e seja S um semigrupo multívoco com atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que*

(i) *para cada sequência $\{x_\tau\}$ com $\lim_{\tau \rightarrow \infty} x_\tau = x_0$,*

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{dist}(U(\tau + t, \tau, x_\tau), S(t, x_0)) = 0, \forall t \geq 0; \quad (3.1)$$

(ii) *$\mathcal{U}$ é compacto para frente.*

Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(A(t), \mathcal{A}) = 0. \quad (3.2)$$

Demonstração. Suponha por contradição que (3.2) não vale, então existe um $\delta > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n \geq n$ tal que $\text{dist}(A(t_n), \mathcal{A}) \geq \delta$, ou seja, existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ tal que $\text{dist}(A(t_n), \mathcal{A}) \geq \delta \forall n \in \mathbb{N}$. Então pela compacidade de $\mathcal{U}$ existe uma sequência $x_n \in A(t_n)$ tal que

$$\text{dist}(x_n, \mathcal{A}) = \text{dist}(A(t_n), \mathcal{A}) \geq \delta, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Como $\mathcal{U}$ é compacto para frente, o conjunto $B = \overline{\bigcup_{t \geq 0} A(t)}$ é compacto. Pela atração de $\mathcal{A}$ pelo S , existe um $T_0 \geq 0$ tal que

$$\text{dist}(S(T_0, B), \mathcal{A}) < \frac{\delta}{2}. \quad (3.4)$$

Além disso, pela semi-invariância negativa de $\mathcal{U}$, $\forall x_n$

$$x_n \in A(t_n) \subset U(t_n, t_n - T_0, A(t_n - T_0)).$$

Logo existe $b_n \in A(t_n - T_0) \subset B$ tal que $x_n \in U(t_n, t_n - T_0, b_n)$ para n suficientemente grande e $b_n \rightarrow b_0$ para $n \rightarrow \infty$ para algum $b_0 \in B$ (a menos de uma subsequência). Portanto, pela condição (3.1) existe um $N = N(\delta) > 0$ tal que para $n \geq N$ temos

$$\text{dist}(x_n, S(T_0, b_0)) \leq \text{dist}(U(t_n, t_n - T_0, b_n), S(T_0, b_0)) < \frac{\delta}{2} \quad (3.5)$$

Portanto, de (3.4) e (3.5) segue pela desigualdade triangular que

$$\text{dist}(x_n, \mathcal{A}) \leq \text{dist}(x_n, S(T_0, b_0)) + \text{dist}(S(T_0, b_0), \mathcal{A}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Isto contradiz a desigualdade (3.3). ■

Analogamente, temos o seguinte teorema da semiconvergência para trás.

Teorema 3.1.2. [7] (*Semiconvergência para trás*). *Seja U um processo multívoco com atrator pullback $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e seja S um semigrupo multívoco com atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que*

(i) *para qualquer $\{x_\tau\}$ com $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} x_\tau = x_0$,*

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t + \tau, \tau, x_\tau), S(t, x_0)) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+; \quad (3.6)$$

(ii) $\mathcal{U}$ é compacto para trás.

Então

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(A(t), \mathcal{A}) = 0. \quad (3.7)$$

Demonstração. Faremos a prova por contradição. Se a condição (3.7) não vale, então existe $\delta > 0$ e $t_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$ tal que $\text{dist}(A(t_n), \mathcal{A}) \geq \delta \forall n \in \mathbb{N}$. Então, pela compacidade de $\mathcal{U}$ existe $x_n \in A(t_n)$ tal que

$$\text{dist}(x_n, \mathcal{A}) = \text{dist}(A(t_n), \mathcal{A}) \geq \delta, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

Como $\mathcal{U}$ é compacto para trás, o conjunto $B := \overline{\bigcup_{t \leq 0} A(t)}$ é compacto. Como $\mathcal{A}$ atrai os limitados sob S , em particular atrai B . Logo, existe $T_0 \geq 0$ tal que

$$\text{dist}(S(T_0, B), \mathcal{A}) < \frac{\delta}{2}. \quad (3.9)$$

Pela semi-invariância negativa de $\mathcal{U}$, $x_n \in A(t_n) \subset U(t_n, t_n - T_0, A(t_n - T_0))$. Logo existe $b_{-n} \in A(t_n - T_0) \subset B$ tal que $x_n \in U(t_n, t_n - T_0, b_{-n})$ (para n suficientemente grande). Pela compacidade de B , existe uma subsequência de b_{-n} que continuaremos chamando de b_{-n} tal que $b_{-n} \rightarrow b_0 \in B$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, pela condição (3.6) existe um $N = N(\delta) \geq 0$ tal que para $n \geq N$ temos

$$\text{dist}(x_n, S(T_0, b_0)) \leq \text{dist}(U(t_n, t_n - T_0, b_{-n}), S(T_0, b_0)) < \frac{\delta}{2} \quad (3.10)$$

Portanto, de (3.9) e (3.10) segue que

$$\begin{aligned} \text{dist}(x_n, \mathcal{A}) &\leq \text{dist}(x_n, S(T_0, b_0)) + \text{dist}(S(T_0, b_0), \mathcal{A}) \\ &< \frac{\delta}{2} + \text{dist}(S(T_0, B), \mathcal{A}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

O que dá uma contradição com (3.8). ■

3.2 Convergências completas no sentido métrico de Hausdorff

Nesta seção, com base nas ideias principais dos Teoremas 3.1.1 e 3.1.2, estudamos convergências no sentido métrico completo de Hausdorff. Para tanto, será assumida uma condição de equi-atração.

Definição 3.2.1. [7] *O atrator pullback $\mathcal{U}$ do processo U é considerado equiatrativo sob U se para qualquer conjunto limitado não-vazio B*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \text{dist}(U(t, t - \tau, B), A(t)) \rightarrow 0, \text{ quando } \tau \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Observe que a propriedade (3.11) é equivalente a

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \text{dist}(U(\tau + t, \tau, B), A(\tau + t)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

De fato, assumindo a condição (3.11) e tomando $z := \tau + t$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \text{dist}(U(\tau + t, \tau, B), A(\tau + t)) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \text{dist}(U(z, z - t, B), A(z)) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{z \in \mathbb{R}} \text{dist}(U(z, z - t, B), A(z)) = 0. \end{aligned}$$

Agora, assumindo a condição (3.12) e tomando $z := t - \tau$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{dist}(U(t, t - \tau, B), A(t)) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{dist}(U(\tau + z, z, B), A(\tau + z)) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sup_{z \in \mathbb{R}} \text{dist}(U(\tau + z, z, B), A(\tau + z)) = 0. \end{aligned}$$

Em seguida apresentaremos proposições para convergências de atratores pullback para atratores pullback.

Proposição 3.2.1. *Sejam U e U_∞ processos multívocos com atratores pullback $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, respectivamente. Suponha que*

(i) *para qualquer sequência $\{x_\tau\}$ com $\lim_{\tau \rightarrow \infty} x_\tau = x_0$,*

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{dist}(U(\tau + t, \tau, x_\tau), U_\infty(\tau + t, \tau, x_0)) = 0, \forall t \geq 0; \quad (3.13)$$

(ii) $\mathcal{U}$ é compacto para frente;

(iii) $\mathcal{U}_\infty$ é equiatraente sob U_∞ .

Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(A(t), A_\infty(t)) = 0. \quad (3.14)$$

Demonstração. Faremos a prova por contradição. Vamos supor que a condição (3.14) não vale. Então existe $\delta > 0$ e $t_n \rightarrow \infty$ para $n \rightarrow \infty$ tal que $\text{dist}(A(t_n), A_\infty(t_n)) \geq \delta$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Então pela compacidade de $\mathcal{U}$ existe $x_n \in A(t_n)$ tal que

$$\text{dist}(x_n, A_\infty(t_n)) = \text{dist}(A(t_n), A_\infty(t_n)) \geq \delta, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.15)$$

Agora, pela compacidade para frente de $\mathcal{U}$ podemos definir $B := \overline{\bigcup_{t \geq 0} A(t)}$ compacto. Pela equitração de $\mathcal{U}_\infty$, existe um $M > 0$ tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \text{dist}(U_\infty(t_n, t_n - M, B), A_\infty(t_n)) < \frac{\delta}{2}. \quad (3.16)$$

Como $\mathcal{U}$ é negativamente semi-invariante, então $x_n \in A(t_n) \subset (t_n, t_n - M, A(t_n - M))$. Logo, existe $b_n \in A(t_n - M) \subset B$ tal que $x_n \in U(t_n, t_n - M, b_n)$.

Pela compacidade de B existe $b_0 \in B$ tal que $b_n \rightarrow b_0$ quando $n \rightarrow \infty$ no sentido da subsequência. Assim, por (3.13) existe $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ temos

$$\text{dist}(x_n, U_\infty(t_n, t_n - M, b_0)) \leq \text{dist}(U(t_n, t_n - M, b_n), U_\infty(t_n, t_n - M, b_0)) < \frac{\delta}{2}. \quad (3.17)$$

Portanto, de (3.16) e (3.17) segue pela desigualdade triangular que

$$\begin{aligned} \text{dist}(x_n, A_\infty(t_n)) &\leq \text{dist}(x_n, U_\infty(t_n, t_n - M, b_0)) + \text{dist}(U_\infty(t_n, t_n - M, b_0), A_\infty(t_n)) \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

O que dá uma contradição com (3.15). ■

Analogamente a proposição anterior, podemos mostrar o seguinte resultado.

Proposição 3.2.2. *Sejam U e U_∞ processos multívocos com atratores pullback $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, respectivamente. Suponha que*

(i) para qualquer sequência $\{x_\tau\}$ com $\lim_{\tau \rightarrow \infty} x_\tau = x_0$,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{dist}(U_\infty(\tau + t, \tau, x_\tau), U(\tau + t, \tau, x_0)) = 0, \forall t \geq 0; \quad (3.18)$$

(ii) $\mathcal{U}_\infty$ é compacto para frente;

(iii) $\mathcal{U}$ é equiatraente sob U .

Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(A_\infty(t), A(t)) = 0. \quad (3.19)$$

Juntando as Proposições 3.2.1 e 3.2.2, temos o seguinte corolário:

Corolário 3.2.1. [7] *Sejam U e U_∞ processos multívocos com atratores pullback $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, respectivamente. Suponha que*

(i) para qualquer sequência $\{x_\tau\}$ com $\lim_{\tau \rightarrow \infty} x_\tau = x_0$,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{dist}_H(U(\tau + t, \tau, x_\tau), U_\infty(\tau + t, \tau, x_0)) = 0, \forall t \geq 0; \quad (3.20)$$

(ii) os dois atratores $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}_\infty$ são ambos compactos para frente;

(iii) $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}_\infty$ são equitraentes sob U e U_∞ , respectivamente.

Então $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}_\infty$ são assintoticamente idênticos num futuro distante, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(A(t), A_\infty(t)) = 0. \quad (3.21)$$

Proposição 3.2.3. *Sejam U e U_∞ processos multívocos com atratores pullback $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, respectivamente. Suponha que*

(i) para qualquer sequência $\{x_\tau\}$ com $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} x_\tau = x_0$,

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t + \tau, \tau, x_\tau), U_\infty(t + \tau, \tau, x_0)) = 0, \forall t \geq 0; \quad (3.22)$$

(ii) $\mathcal{U}$ é compacto para trás;

(iii) $\mathcal{U}_\infty$ é equiatraente sob U_∞ .

Então

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(A(t), A_\infty(t)) = 0. \quad (3.23)$$

Demonstração. Faremos a prova por contradição. Supondo que a condição (3.23) não vale, então existe $\delta > 0$ e $t_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$ tal que $\text{dist}(A(t_n), A_\infty(t_n)) \geq \delta \forall n \in \mathbb{N}$.

Pela compacidade do atrator $\mathcal{U}$, existe $x_n \in A(t_n)$ tal que

$$\text{dist}(x_n, A_\infty(t_n)) = \text{dist}(A(t_n), A_\infty(t_n)) \geq \delta \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.24)$$

Como $\mathcal{U}$ é compacto para trás, $B := \overline{\bigcup_{t \leq 0} A(t)}$ é compacto, logo limitado. Pela equitração de $\mathcal{U}_\infty$, existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \text{dist}(U_\infty(t_n, t_n - M, B), A_\infty(t_n)) < \frac{\delta}{2}. \quad (3.25)$$

Como $\mathcal{U}$ é negativamente semi-invariante, temos $x_n \in A(t_n) \subset U(t_n, t_n - M, A(t_n - M))$ e portanto existe $b_{-n} \in A(t_n - M) \subset B$ tal que $x_n \in U(t_n, t_n - M, b_{-n})$. Pela compacidade de B , existe $b_0 \in B$ tal que $b_{-n} \rightarrow b_0$ quando $n \rightarrow \infty$ a menos de subsequência. Usando a condição (3.22) existe um $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ temos

$$\text{dist}(x_n, U_\infty(t_n, t_n - M, b_0)) \leq \text{dist}(U(t_n, t_n - M, b_{-n}), U_\infty(t_n, t_n - M, b_0)) < \frac{\delta}{2}. \quad (3.26)$$

Usando (3.25) e (3.26) temos:

$$\begin{aligned} \text{dist}(x_n, A_\infty(t_n)) &\leq \text{dist}(x_n, U_\infty(t_n, t_n - M, b_0)) + \text{dist}(U_\infty(t_n, t_n - M, b_0), A_\infty(t_n)) \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

O que dá uma contradição com (3.24). ■

Proposição 3.2.4. *Sejam U e U_∞ processos multívocos com atratores pullback $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, respectivamente. Suponha que*

(i) para qualquer sequência $\{x_\tau\}$ com $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} x_\tau = x_0$,

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(U_\infty(t + \tau, \tau, x_\tau), U(t + \tau, \tau, x_0)) = 0, \forall t \geq 0; \quad (3.27)$$

(ii) $\mathcal{U}_\infty$ é compacto para trás;

(iii) $\mathcal{U}$ é equiatraente sob U .

Então

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(A_\infty(t), A(t)) = 0. \quad (3.28)$$

Demonstração. A prova é análoga à proposição anterior. ■

Juntando as Proposições 3.2.3 e 3.2.4, temos o seguinte corolário:

Corolário 3.2.2. [7] *Sejam U e U_∞ processos multívocos com atratores pullback $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, respectivamente. Suponha que*

(i) para qualquer sequência $\{x_\tau\}$ com $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} x_\tau = x_0$,

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}_H(U(t + \tau, \tau, x_\tau), U_\infty(t + \tau, \tau, x_0)) = 0, \forall t \geq 0; \quad (3.29)$$

(ii) os dois atratores $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}_\infty$ são ambos compactos para trás;

(iii) $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}_\infty$ são equittraentes sob U e U_∞ , respectivamente.

Então $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}_\infty$ são assintoticamente idênticos num passado distante, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}_H(A(t), A_\infty(t)) = 0. \quad (3.30)$$

Como consequência das Proposições 3.2.1 e 3.2.2, temos os dois teoremas seguintes.

Teorema 3.2.1. [7] *Seja U um processo multívoco com atrator pullback $\mathcal{U}$ e seja S um semigrupo multívoco com atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que*

(i) para cada sequência $\{x_\tau\}$ com $\lim_{\tau \rightarrow \infty} x_\tau = x_0$,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{dist}(U(\tau + t, \tau, x_\tau), S(t, x_0)) = 0, \forall t \geq 0; \quad (3.31)$$

(ii) $\mathcal{U}$ é compacto para frente.

Então o atrator global $\mathcal{A}$ é o conjunto ω – limite do atrator pullback $\mathcal{U}$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(A(t), \mathcal{A}) = 0. \quad (3.32)$$

Demonstração. Vamos provar que todas as hipóteses da Proposição 3.2.1 são satisfeitas neste teorema e em seguida aplicar a Proposição 3.2.1.

Defina $U_\infty(t, s, x) := S(t - s, x)$ para cada $(t, s) \in \mathbb{R}_{\geq}^2$ e $x \in X$.

Afirmção: U_∞ é um processo multívoco com atrator pullback $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}$, $A_\infty(t) := \mathcal{A} \forall t \in \mathbb{R}$ e $U_\infty(\tau + t, \tau, x_0) = S(\tau + t - \tau, x_0) = S(t, x_0)$.

De fato,

(i) $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{dist}(U(\tau + t, \tau, x_\tau), U_\infty(\tau + t, \tau, x_0)) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{dist}(U(\tau + t, \tau, x_\tau), S(t, x_0)) = 0$, para todo $t \geq 0$. Isto confirma a hipótese (i) da Proposição 3.2.1.

(ii) Por ser o atrator $\mathcal{U} = \{A(t)\}$ compacto para frente, então é o mesmo que o item (ii) da Proposição 3.2.1.

(iii) Vamos mostrar que a hipótese (iii) da Proposição 3.2.1 é satisfeita, isto é, vamos mostrar que $\mathcal{U}_\infty$ equiatrai sob U_∞ .

De fato, seja $B \in B(X)$ e seja $t \in \mathbb{R}$ arbitrariamente fixado.

$$\text{dist}(U_\infty(t, t - \tau, B), A_\infty(t)) = \text{dist}(S(t - (t - \tau), B), \mathcal{A}) = \text{dist}(S(\tau, B), \mathcal{A}) \rightarrow 0$$

com $\tau \rightarrow \infty$.

Então, pela Proposição 3.2.1 segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(A(t), \mathcal{A}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(A(t), A_\infty(t)) = 0.$$

■

Teorema 3.2.2. [7] *Seja U um processo multívoco com atrator pullback $\mathcal{U}$ e seja S um semigrupo multívoco com atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que*

(a) para cada sequência $\{x_\tau\}$ com $\lim_{\tau \rightarrow \infty} x_\tau = x_0$,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{dist}(S(t, x_\tau), U(\tau + t, \tau, x_0)) = 0, \forall t \geq 0; \quad (3.33)$$

(b) $\mathcal{U}$ é equiatraente sob U .

Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathcal{A}, A(t)) = 0. \quad (3.34)$$

Demonstração. Vamos provar que todas as hipóteses da Proposição 3.2.2 são satisfeitas neste teorema e em seguida aplicar a Proposição 3.2.2.

Defina $U_\infty(t, s, x) := S(t - s, x)$ para cada $(t, s) \in \mathbb{R}_\geq^2$ e $x \in X$.

Afirmção: U_∞ é um processo multívoco com atrator pullback $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}$, $A_\infty(t) := \mathcal{A} \forall t \in \mathbb{R}$ e $U_\infty(\tau + t, \tau, x_r) = S(\tau + t - \tau, x_r) = S(t, x_r)$,

De fato,

(i) $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{dist}(U_\infty(\tau + t, \tau, x_\tau), U(\tau + t, \tau, x_0)) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{dist}(S(t, x_\tau), U(\tau + t, \tau, x_0)) = 0, \forall t \geq 0$. Isto confirma a hipótese (i) da Proposição 3.2.2.

(ii) $\mathcal{U}_\infty$ é compacto para frente, pois $\overline{\bigcup_{t \geq 0} A_\infty(t)} = \overline{\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ que é um conjunto compacto.

(iii) A hipótese (iii) da Proposição 3.2.2 é satisfeita, pois $\mathcal{U}$ equiatrai sob U pela nossa hipótese (b).

Então, pela Proposição 3.2.2 segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathcal{A}, A(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(A_\infty(t), A(t)) = 0.$$

■

Juntando os Teorema 3.2.1 e Teorema 3.2.2 temos o seguinte corolário:

Corolário 3.2.3. [7] (*Convergência total para frente*). *Seja U um processo multívoco com atrator pullback $\mathcal{U}$ e seja S um semigrupo multívoco com atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que*

(i) para cada sequência $\{x_\tau\}$ com $\lim_{\tau \rightarrow \infty} x_\tau = x_0$,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{dist}_H(U(\tau + t, \tau, x_\tau), S(t, x_0)) = 0, \forall t \geq 0; \quad (3.35)$$

(ii) $\mathcal{U}$ é compacto para frente;

(iii) $\mathcal{U}$ é equiatacante sob U .

Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(A(t), \mathcal{A}) = 0. \quad (3.36)$$

Teorema 3.2.3. *Seja U um processo multívoco com atrator pullback $\mathcal{U}$ e seja S um semigrupo multívoco com atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que*

(i) para cada sequência $\{x_\tau\}$ com $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} x_\tau = x_0$,

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t + \tau, \tau, x_\tau), S(t, x_0)) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+; \quad (3.37)$$

(ii) $\mathcal{U}$ é compacto para trás.

Então o atrator global $\mathcal{A}$ é o conjunto α – limite do atrator pullback $\mathcal{U}$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(A(t), \mathcal{A}) = 0. \quad (3.38)$$

Demonstração. Vamos provar que todas as hipóteses da Proposição 3.2.3 são satisfeitas e em seguida aplicá-lo. De fato, defina $U_\infty(t, s, x) := S(t - s, x)$ para cada $(t, s) \in \mathbb{R}_\geq^2$ e $x \in X$.

Afirmção: U_∞ é um processo multívoco com atrator pullback $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}$, $A_\infty(t) := \mathcal{A} \forall t \in \mathbb{R}$ e $U_\infty(t + \tau, \tau, x_0) = S(t + \tau - \tau, x_0) = S(t, x_0)$.

(i) $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t + \tau, \tau, x_\tau), U_\infty(t + \tau, \tau, x_0)) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t + \tau, \tau, x_\tau), S(t, x_0)) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$. Isto confirma a hipótese (i) da Proposição 3.2.3.

(ii) A hipótese (ii) deste teorema é a mesma com a hipótese (ii) da Proposição 3.2.3.

(iii) Vamos mostrar que a hipótese (iii) da Proposição 3.2.3 é satisfeita, isto é, vamos mostrar que $\mathcal{U}_\infty$ equiatrai sob U_∞ . De fato, seja $B \in B(X)$ e seja $t \in \mathbb{R}$ arbitrariamente fixado. Temos

$$\text{dist}(U_\infty(t, t - T, B), A_\infty(t)) = \text{dist}(S(t - (t - T)), B), \mathcal{A}) = \text{dist}(S(T, B), \mathcal{A}) \rightarrow 0,$$

quando $T \rightarrow \infty$.

Então pela Proposição 3.2.3 segue que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(A(t), \mathcal{A}) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(A(t), A_\infty(t)) = 0.$$

■

Teorema 3.2.4. *Seja U um processo multívoco com atrator pullback $\mathcal{U}$ e seja S um semigrupo multívoco com atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que*

(a) *para cada sequência $\{x_\tau\}$ com $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} x_\tau = x_0$,*

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(S(t, x_\tau), U(t + \tau, \tau, x_0)) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+; \quad (3.39)$$

(b) *$\mathcal{U}$ é equiatraente sob U .*

Então,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\mathcal{A}, A(t)) = 0. \quad (3.40)$$

Demonstração. Vamos provar que todas as hipóteses da Proposição 3.2.4 são satisfeitas neste teorema e em seguida aplicar a Proposição 3.2.4. De fato, defina $U_\infty(t, s, x) := S(t - s, x)$ para cada $t \geq s$ e $x \in X$.

Afirmção: U_∞ é um processo multívoco com atrator pullback $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}$, $A_\infty(t) := \mathcal{A} \forall t \in \mathbb{R}$ e $U_\infty(t + \tau, \tau, x_r) = S(t + \tau - \tau, x_r) = S(t, x_r)$

(i) $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(U_\infty(t + \tau, \tau, x_\tau), U(t + \tau, \tau, x_0)) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(S(t, x_\tau), U(t + \tau, \tau, x_0)) = 0, \forall t \geq 0$. Isto confirma a hipótese (i) da Proposição 3.2.4.

- (ii) $\mathcal{U}_\infty$ é compacto para trás, pois $\overline{\bigcup_{t \leq 0} A_\infty(t)} = \overline{\bigcup_{t \leq 0} \mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ que é um conjunto compacto.
- (iii) A hipótese (iii) da Proposição 3.2.4 é satisfeita, pois $\mathcal{U}$ equiatrai sob U pela nossa hipótese (b).

Então, pela Proposição 3.2.4 segue que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\mathcal{A}, A(t)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(A_\infty(t), A(t)) = 0.$$

■

Juntando os Teorema 3.2.3 e Teorema 3.2.4 teremos o seguinte corolário:

Corolário 3.2.4. [7] (*Convergência total para trás*). *Seja U um processo multívoco com atrator pullback $\mathcal{U}$ e seja S um semigrupo multívoco com atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que*

(i) *para cada sequência $\{x_\tau\}$ com $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} x_\tau = x_0$,*

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}_H(U(t + \tau, \tau, x_\tau), S(t, x_0)) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+; \quad (3.41)$$

(ii) *$\mathcal{U}$ é compacto para trás;*

(iii) *$\mathcal{U}$ é equiatraente sob U .*

Então,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}_H(A(t), \mathcal{A}) = 0. \quad (3.42)$$

Capítulo 4

Teoremas de convergência alternativos de propriedades de limitação

Como as condições de compacidade dos atratores são geralmente tecnicamente difíceis de estabelecer em aplicações, baseado em [6], utilizando condições de limitação em vez das condições de compacidade, estabelecemos alguns resultados de critérios alternativos.

4.1 Convergências sem suposição de equi-atração

Primeiro mostramos resultados que não dependem da propriedade de equi-atração, incluindo a convergência total para trás que no Corolário 3.2.4 exigia a suposição de equi-atração.

Proposição 4.1.1. *Sejam $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ atratores pullback dos processos multívocos U e U_∞ , respectivamente. Suponha que*

- (i) $\mathcal{U}$ é limitado para frente, ou seja, existe um conjunto limitado B tal que $\bigcup_{t \geq 0} A(t) \subset B$;
- (ii) a seguinte convergência é válida

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B, \tau \in \mathbb{R}_+} \text{dist}(U(t, t - \tau, x), U_\infty(t, t - \tau, x)) = 0. \quad (4.1)$$

Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(A(t), A_\infty(t)) = 0. \quad (4.2)$$

Demonstração. Vamos supor que a condição (4.2) não acontece. Logo, existe $\delta > 0$ e $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ tal que $\text{dist}(A(t_n), A_\infty(t_n)) \geq \delta \forall n \in \mathbb{N}$. Pela compacidade do $\mathcal{U}$ existe $x_n \in A(t_n)$ tal que

$$\text{dist}(x_n, A_\infty(t_n)) = \text{dist}(A(t_n), A_\infty(t_n)) \geq \delta. \quad (4.3)$$

Pela semi-invariância negativa do $\mathcal{U}$, $x_n \in A(t_n) \subset U(t_n, t_n - \tau, A(t_n - \tau))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, existe $b_n \in A(t_n - \tau) \subset B$ tal que $x_n \in U(t_n, t_n - \tau, b_n)$. Assim, pela condição (4.1) existe um $N = N(\delta) > 0$ tal que para todo $n \geq N$ temos

$$\begin{aligned} \text{dist}(x_n, U_\infty(t_n, t_n - \tau, b_n)) &\leq \text{dist}(U(t_n, t_n - \tau, b_n), U_\infty(t_n, t_n - \tau, b_n)) \\ &\leq \sup_{x \in B, \tau \in \mathbb{R}_+} \text{dist}(U(t_n, t_n - \tau, x), U_\infty(t_n, t_n - \tau, x)) \\ &< \frac{\delta}{2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Além disso, como $\{b_n\} \subset B$ é pullback atraído por $\mathcal{U}_\infty$ sob U_∞ , existe um $M = M(\delta) > 0$ tal que para $\tau \geq M$

$$\text{dist}(U_\infty(t_n, t_n - \tau, b_n), A_\infty(t_n)) \leq \text{dist}(U_\infty(t_n, t_n - \tau, B), A_\infty(t_n)) < \frac{\delta}{2}. \quad (4.5)$$

Portanto, de (4.4) e (4.5) segue-se que,

$$\begin{aligned} \text{dist}(x_n, A_\infty(t_n)) &\leq \text{dist}(x_n, U_\infty(t_n, t_n - \tau, b_n)) + \text{dist}(U_\infty(t_n, t_n - \tau, b_n), A_\infty(t_n)) \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

o que contradiz (4.3). ■

Proposição 4.1.2. *Sejam $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ atratores pullback dos processos multívocos U e U_∞ , respectivamente. Suponha que*

(i) $\mathcal{U}_\infty$ é limitado para frente, ou seja, existe um conjunto limitado B tal que $\bigcup_{t \geq 0} A_\infty(t) \subset B$;

(ii) a seguinte convergência é válida

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B, \tau \in \mathbb{R}_+} \text{dist}(U_\infty(t, t - \tau, x), U(t, t - \tau, x)) = 0. \quad (4.6)$$

Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(A_\infty(t), A(t)) = 0. \quad (4.7)$$

Demonstração. É análoga à Proposição 4.1.1. ■

Juntando as Proposições 4.1.1 e 4.1.2 temos o seguinte corolário:

Corolário 4.1.1. *Sejam $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ atratores pullback dos processos multívocos U e U_∞ , respectivamente. Suponha que*

(i) $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}_\infty$ são limitados para frente, ou seja, existem conjuntos limitados B_1 e B_2 tais que $\bigcup_{t \geq 0} A(t) \subset B_1$ e $\bigcup_{t \geq 0} A_\infty(t) \subset B_2$;

(ii) a seguinte convergência é válida

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B, \tau \in \mathbb{R}_+} \text{dist}_H(U(t, t - \tau, x), U_\infty(t, t - \tau, x)) = 0. \quad (4.8)$$

Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(A(t), A_\infty(t)) = 0. \quad (4.9)$$

Com o Corolário 4.1.1, temos

Teorema 4.1.1. [7] (*Convergência total para frente*). *Seja U um processo multívoco com atrator pullback $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e seja S um semigrupo multívoco com atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que*

(i) $\mathcal{U}$ é limitado para frente, ou seja, existe um conjunto limitado B tal que $\bigcup_{t \geq 0} A(t) \subset B$;

(ii) a seguinte condição assintoticamente autônoma é válida

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} \text{dist}(U(t, t - T, x), S(T, x)) = 0, \forall T > 0. \quad (4.10)$$

Então o atrator global $\mathcal{A}$ é o conjunto ω – limite do atrator pullback $\mathcal{U}$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(A(t), \mathcal{A}) = 0. \quad (4.11)$$

Se, além disso

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} \text{dist}_H(U(t, t - T, x), S(T, x)) = 0, \forall T > 0, \quad (4.12)$$

então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(A(t), \mathcal{A}) = 0. \quad (4.13)$$

Demonstração. Vamos supor que a condição (4.11) não é cumprida. Logo, existe um $\delta > 0$ e $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ tal que $\text{dist}(A(t_n), \mathcal{A}) \geq \delta, \forall n \in \mathbb{N}$. Pela compacidade do atrator $\mathcal{U}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ existe um $x_n \in A(t_n)$ tal que

$$\text{dist}(x_n, \mathcal{A}) = \text{dist}(A(t_n), \mathcal{A}) \geq \delta \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.14)$$

Como B é limitado, então B é atraído por $\mathcal{A}$. Assim, existe um $T > 0$ tal que

$$\text{dist}(S(T, B), \mathcal{A}) < \frac{\delta}{2}. \quad (4.15)$$

Pela semi-invariância negativa do $\mathcal{U}$, $x_n \in A(t_n) \subset U(t_n, t_n - T, A(t_n - T))$ e $A(t_n - T) \subset B$ (para n suficientemente grande). Assim, existe $y_n \in A(t_n - T)$ tal que $x_n \in U(t_n, t_n - T, y_n)$.

Usando (4.14), temos

$$\text{dist}(U(t_n, t_n - T, y_n), \mathcal{A}) \geq \text{dist}(x_n, \mathcal{A}) = \text{dist}(A(t_n), \mathcal{A}) \geq \delta \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.16)$$

Por outro lado, pela condição (4.10) existe $N = N(\delta) > 0$ tal que para $n \geq N$

$$\text{dist}(U(t_n, t_n - T, y_n), S(T, y_n)) < \frac{\delta}{2}. \quad (4.17)$$

Usando a desigualdade triangular, (4.16) e (4.17), temos que

$$\text{dist}(U(t_n, t_n - T, y_n), \mathcal{A}) \leq \text{dist}(U(t_n, t_n - T, y_n), S(T, y_n)) + \text{dist}(S(T, y_n), \mathcal{A})$$

e assim

$$\begin{aligned} \text{dist}(S(T, y_n), \mathcal{A}) &\geq \text{dist}(U(t_n, t_n - T, y_n), \mathcal{A}) - \text{dist}(U(t_n, t_n - T, y_n), S(T, y_n)) \\ &\geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

o que contradiz (4.15). Portanto vale (4.11).

Agora, se a condição (4.12) ocorre, o resultado segue pelo Corolário 4.1.1. ■

Observação 4.1.1. [7] *Modificando ligeiramente a prova como em [6, Teorema 2], vê-se que a condição (4.10) no Teorema 4.1.1 pode ser ligeiramente enfraquecida para a seguinte condição*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(U(t + T, t, B), S(T, B)) = 0, \forall T > 0.$$

Proposição 4.1.3. [7] *Sejam $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ atratores pullback dos processos multívocos U e U_∞ , respectivamente. Suponha que*

- (i) $\mathcal{U}$ é limitado para trás, ou seja, existe um conjunto limitado B tal que $\bigcup_{t \leq 0} A(t) \subset B$;
- (ii) a seguinte convergência é válida

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \sup_{x \in B, \tau \in \mathbb{R}_+} \text{dist}(U(t, t - \tau, x), U_\infty(t, t - \tau, x)) = 0. \quad (4.18)$$

Então,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(A(t), A_\infty(t)) = 0. \quad (4.19)$$

Demonstração. Vamos supor que a condição (4.19) não acontece. Logo, existe $\delta > 0$ e $t_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$ tal que $\text{dist}(A(t_n), A_\infty(t_n)) \geq \delta, \forall n \in \mathbb{N}$. Pela compacidade do $\mathcal{U}$ existe $x_n \in A(t_n)$ tal que

$$\text{dist}(x_n, A_\infty(t_n)) = \text{dist}(A(t_n), A_\infty(t_n)) \geq \delta. \quad (4.20)$$

Pela semi-invariância negativa do $\mathcal{U}$, $x_n \in A(t_n) \subset U(t_n, t_n - \tau, A(t_n - \tau))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, existe $b_n \in A(t_n - \tau) \subset B$ tal que $x_n \in U(t_n, t_n - \tau, b_n)$ (para n suficientemente grande). Assim, pela condição (4.18) existe um $N = N(\delta) > 0$ tal que para todo $n \geq N$ temos

$$\begin{aligned} \text{dist}(x_n, U_\infty(t_n, t_n - \tau, b_n)) &\leq \text{dist}(U(t_n, t_n - \tau, b_n), U_\infty(t_n, t_n - \tau, b_n)) \\ &\leq \sup_{x \in B, \tau \in \mathbb{R}_+} \text{dist}(U(t_n, t_n - \tau, x), U_\infty(t_n, t_n - \tau, x)) \\ &< \frac{\delta}{2} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Além disso, como $\{b_n\} \subset B$ é pullback atraído por $\mathcal{U}_\infty$ sob U_∞ , existe um $M = M(\delta) > 0$ tal que para $\tau \geq M$

$$\text{dist}(U_\infty(t_n, t_n - \tau, b_n), A_\infty(t_n)) \leq \text{dist}(U_\infty(t_n, t_n - \tau, B), A_\infty(t_n)) < \frac{\delta}{2}. \quad (4.22)$$

Portanto, de (4.21) e (4.22) segue-se que,

$$\text{dist}(x_n, A_\infty(t_n)) \leq \text{dist}(x_n, U_\infty(t_n, t_n - \tau, b_n)) + \text{dist}(U_\infty(t_n, t_n - \tau, b_n), A_\infty(t_n)) < \delta,$$

o que contradiz (4.20). ■

Proposição 4.1.4. *Sejam $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ atratores pullback dos processos multívocos U e U_∞ , respectivamente. Suponha que*

(i) $\mathcal{U}_\infty$ é limitado para trás, ou seja, existe um conjunto limitado B tal que $\bigcup_{t \leq 0} A_\infty(t) \subset B$;

(ii) a seguinte convergência é válida

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \sup_{x \in B, \tau \in \mathbb{R}_+} \text{dist}(U_\infty(t, t - \tau, x), U(t, t - \tau, x)) = 0. \quad (4.23)$$

Então,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(A_\infty(t), A(t)) = 0. \quad (4.24)$$

Demonstração. É análoga à Proposição 4.1.3. ■

Juntando as Proposições 4.1.2 e 4.1.3, temos o seguinte corolário:

Corolário 4.1.2. *Sejam $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ atratores pullback dos processos multívocos U e U_∞ , respectivamente. Suponha que*

- (i) $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}_\infty$ são limitados para trás, ou seja, existem conjuntos limitados B_1 e B_2 tais que $\bigcup_{t \leq 0} A(t) \subset B_1$ e $\bigcup_{t \leq 0} A_\infty(t) \subset B_2$;
- (ii) a seguinte convergência é válida

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \sup_{x \in B, \tau \in \mathbb{R}_+} \text{dist}_H(U(t, t - \tau, x), U_\infty(t, t - \tau, x)) = 0. \quad (4.25)$$

Então,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}_H(A(t), A_\infty(t)) = 0. \quad (4.26)$$

Com o Corolário 4.1.2, temos

Teorema 4.1.2. [7] (*Convergência total para trás*). *Seja U um processo multívoco com atrator pullback $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e seja S um semigrupo multívoco com atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que*

- (i) $\mathcal{U}$ é limitado para trás, ou seja, existe um conjunto limitado B tal que $\bigcup_{t \leq 0} A(t) \subset B$;
- (ii) a seguinte condição assintoticamente autônoma é válida

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \sup_{x \in B} \text{dist}(U(t, t - T, x), S(T, x)) = 0, \forall T > 0. \quad (4.27)$$

Então o atrator global $\mathcal{A}$ é o conjunto α – limite do atrator pullback $\mathcal{U}$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(A(t), \mathcal{A}) = 0. \quad (4.28)$$

Se, além disso

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \sup_{x \in B} \text{dist}_H(U(t, t - T, x), S(T, x)) = 0, \forall T > 0, \quad (4.29)$$

então

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}_H(A(t), \mathcal{A}) = 0. \quad (4.30)$$

Demonstração. Vamos supor que a condição (4.28) não é cumprida. Logo, existe um $\delta > 0$ e $t_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$ tal que $\text{dist}(A(t_n), \mathcal{A}) \geq \delta, \forall n \in \mathbb{N}$. Pela compacidade do atrator $\mathcal{U}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ existe um $x_n \in A(t_n)$ tal que

$$\text{dist}(x_n, \mathcal{A}) = \text{dist}(A(t_n), \mathcal{A}) \geq \delta \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.31)$$

Como B é limitado, então B é atraído por $\mathcal{A}$. Assim, existe um $T > 0$ tal que

$$\text{dist}(S(T, B), \mathcal{A}) < \frac{\delta}{2}. \quad (4.32)$$

Pela semi-invariância negativa do $\mathcal{U}$, $x_n \in A(t_n) \subset U(t_n, t_n - T, A(t_n - T))$ e $A(t_n - T) \subset B$ (para n suficientemente grande). Assim, existe $y_n \in A(t_n - T)$ tal que $x_n \in U(t_n, t_n - T, y_n)$. Usando (4.31), temos

$$\text{dist}(U(t_n, t_n - T, y_n), \mathcal{A}) \geq \text{dist}(x_n, \mathcal{A}) = \text{dist}(A(t_n), \mathcal{A}) \geq \delta \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.33)$$

Por outro lado, pela condição (4.27) existe $N = N(\delta) > 0$ tal que para $n \geq N$

$$\text{dist}(U(t_n, t_n - T, y_n), S(T, y_n)) < \frac{\delta}{2}. \quad (4.34)$$

Usando a desigualdade triangular, (4.33) e (4.34), temos que

$$\text{dist}(U(t_n, t_n - T, y_n), \mathcal{A}) \leq \text{dist}(U(t_n, t_n - T, y_n), S(T, y_n)) + \text{dist}(S(T, y_n), \mathcal{A})$$

e assim

$$\begin{aligned} \text{dist}(S(T, y_n), \mathcal{A}) &\geq \text{dist}(U(t_n, t_n - T, y_n), \mathcal{A}) - \text{dist}(U(t_n, t_n - T, y_n), S(T, y_n)) \\ &\geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}, \end{aligned}$$

o que contradiz (4.32). Portanto vale (4.28).

Agora, se a condição (4.29) ocorre, o resultado segue pelo Corolário 4.1.2. ■

4.2 Convergências completas para frente sob a suposição de equi-atração

Com a propriedade de equi-atração, teremos também um resultado sobre convergência total para frente, de forma análoga ao Corolário 3.2.1. Começamos com o seguinte

Proposição 4.2.1. *Sejam U e U_∞ processos multívocos com atratores pullback $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, respectivamente. Suponha que*

(i) *a seguinte condição é válida para todo conjunto limitado não vazio B*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} \text{dist}(U(t+T, t, x), U_\infty(t+T, t, x)) = 0, \forall T > 0; \quad (4.35)$$

(ii) *$\mathcal{U}$ é limitado para frente;*

(iii) *$\mathcal{U}_\infty$ é equiatraente sob U_∞ .*

Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(A(t), A_\infty(t)) = 0. \quad (4.36)$$

Demonstração. Faremos a prova por contradição. Vamos supor que a condição (4.36) não vale. Existe $\delta > 0$ e $t_n \rightarrow \infty$ para $n \rightarrow \infty$ tal que $\text{dist}(A(t_n), A_\infty(t_n)) \geq \delta, \forall n \in \mathbb{N}$. Então pela compacidade de $\mathcal{U}$ existe $x_n \in A(t_n)$ tal que

$$\text{dist}(x_n, A_\infty(t_n)) = \text{dist}(A(t_n), A_\infty(t_n)) \geq \delta, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.37)$$

Agora, pela limitação para frente de $\mathcal{U}$ existe $B \in B(X)$ tal que $\bigcup_{t \geq 0} A(t) \subset B$. E pela equitração de $\mathcal{U}_\infty$, existe um $T > 0$ tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \text{dist}(U_\infty(t_n, t_n - T, B), A_\infty(t_n)) < \frac{\delta}{2}. \quad (4.38)$$

Como $\mathcal{U}$ é negativamente semi-invariante, então $x_n \in A(t_n) \subset U(t_n, t_n - T, A(t_n - T))$. Logo, existe $b_n \in A(t_n - T) \subset B$ tal que $x_n \in U(t_n, t_n - T, b_n)$. Como $\{b_n\} \subset B$, pela condição (4.35) existe $N > 0$ tal que para $n \geq N$ temos,

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \text{dist}(U(t_n - T, t_n, b_n), U_\infty(t_n - T, t_n, b_n)) &= \sup_{x \in B} \text{dist}(U(t_n - T, t_n, x), U_\infty(t_n - T, t_n, x)) \\ &< \frac{\delta}{2}, \forall T > 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Portanto, de (4.38) e (4.39) segue pela desigualdade triangular que

$$\begin{aligned} \text{dist}(x_n, A_\infty(t_n)) &\leq \text{dist}(x_n, U_\infty(t_n, t_n - T, B)) + \text{dist}(U_\infty(t_n, t_n - T, B), A_\infty(t_n)) \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

o que dá uma contradição com (4.37). ■

De modo análogo pode-se provar a seguinte

Proposição 4.2.2. *Sejam U e U_∞ processos multívocos com atratores pullback $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, respectivamente. Suponha que*

(i) *a seguinte condição é válida para todo conjunto limitado não vazio B*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} \text{dist}(U_\infty(t+T, t, x), U(t+T, t, x)) = 0, \forall T > 0; \quad (4.40)$$

(ii) $\mathcal{U}_\infty$ *é limitado para frente;*

(iii) $\mathcal{U}$ *é equiatraente sob U .*

Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(A_\infty(t), A(t)) = 0. \quad (4.41)$$

Juntando as Proposições 4.2.1 e 4.2.2, temos o seguinte corolário:

Corolário 4.2.1. [7] *Sejam U e U_∞ processos multívocos com atratores pullback $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, respectivamente. Suponha que*

(i) *a seguinte condição é válida para todo conjunto limitado não vazio B*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} \text{dist}_H(U(t+T, t, x), U_\infty(t+T, t, x)) = 0, \forall T > 0; \quad (4.42)$$

(ii) $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}_\infty$ *são ambos limitados para frente;*

(iii) $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}_\infty$ *são ambos equiatraentes.*

Então $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}_\infty$ *são assintoticamente idênticos em um futuro distante, ou seja,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(A(t), A_\infty(t)) = 0. \quad (4.43)$$

Com o corolário 4.2.1, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.2.1. *Seja U um processo multívoco com um atrator pullback $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e seja S um semigrupo multívoco com um atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que*

(i) *a seguinte condição é válida para todo conjunto limitado não vazio B*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} \text{dist}(U(t+T, t, x), S(T, x)) = 0, \forall T > 0; \quad (4.44)$$

(ii) *$\mathcal{U}$ é limitado para frente;*

(iii) *$\mathcal{U}$ é equiatraente sob U .*

Então, o atrator $\mathcal{A}$ do semigrupo é o conjunto ω – limite do atrator pullback, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(A(t), \mathcal{A}) = 0. \quad (4.45)$$

Demonstração. Vamos provar que todas as hipóteses da Proposição 4.2.1 são satisfeitas neste teorema e em seguida aplicar a Proposição 4.2.1.

Seja $S(T, x) := U_\infty(t+T, t, x)$ e $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\} = \{\mathcal{A}\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $T \in \mathbb{R}_+$.

Afirmção: U_∞ é um processo multívoco com atrator pullback $\mathcal{U}_\infty$ e $U_\infty(t+T, t, x) = S(t+T-t, x) = S(T, x)$.

De fato,

$$(i) \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} \text{dist}(U(t+T, t, x), U_\infty(t+T, t, x)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} \text{dist}(U(t+T, t, x), S(T, x)) = 0$$

Isto confirma a hipótese (i) da Proposição 4.2.1.

(ii) Por ser o atrator $\mathcal{U}$ limitado para frente, então é o mesmo que o item (ii) da Proposição 4.2.1.

(iii) Vamos mostrar que a hipótese (iii) da Proposição 4.2.1 é satisfeita, isto é, vamos mostrar que $\mathcal{U}_\infty$ equitrai sob U_∞ .

De fato, seja $B \in B(X)$ e seja $t \in \mathbb{R}$ arbitrariamente fixado.

$$\text{dist}(U_\infty(t, t-\tau, B), A_\infty(t)) = \text{dist}(S(t-(t-\tau), B), \mathcal{A}) = \text{dist}(S(\tau, B), \mathcal{A}) \rightarrow 0$$

quando $\tau \rightarrow \infty$.

Então, pela Proposição 4.2.1 segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(A(t), \mathcal{A}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(A(t), A_\infty(t)) = 0.$$

■

Teorema 4.2.2. *Seja U um processo multívoco com um atrator pullback $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e seja S um semigrupo multívoco com um atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que*

(a) *a seguinte condição é válida para todo conjunto limitado não vazio B*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} \text{dist}(S(T, x), U(t + T, t, x)) = 0, \forall T > 0; \quad (4.46)$$

(b) *$\mathcal{U}$ é equiatraente sob U .*

Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathcal{A}, A(t)) = 0. \quad (4.47)$$

Demonstração. Vamos provar que todas as hipóteses da Proposição 4.2.2 são satisfeitas neste teorema e em seguida aplicar a Proposição 4.2.2. Defina $U_\infty(t, s, x) := S(t - s, x)$ (para $t \geq s$, $x \in X$) e $\mathcal{U}_\infty = \{A_\infty(t)\}$ com $A_\infty(t) = \mathcal{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Afirmção: U_∞ é um processo multívoco com atrator pullback $\mathcal{U}_\infty$ e $U_\infty(t + T, t, x) = S(t + T - t, x) = S(T, x)$.

De fato,

$$(i) \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} \text{dist}(U_\infty(t + T, t, x), U(t + T, t, x)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} \text{dist}(S(T, x), U(t + T, t, x)) = 0$$

Isto confirma a hipótese (i) da Proposição 4.2.2.

(ii) O atrator $\mathcal{U}_\infty$ é limitado para frente, pois $\bigcup_{t \geq 0} A_\infty(t) = \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{A} = \mathcal{A} \in B(X)$.

(iii) $\mathcal{U}$ equitrai sob U pela hipótese (b).

Então, pela Proposição 4.2.2 segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathcal{A}, A(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(A_\infty(t), A(t)) = 0.$$



Juntando os Teorema 4.2.1 e Teorema 4.2.2, temos o seguinte corolário:

Corolário 4.2.2. [7] (*Convergência total para frente*). *Seja U um processo multívoco com um atrator pullback $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e seja S um semigrupo multívoco com um atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que*

(i) *a seguinte condição é válida para todo conjunto limitado não vazio B*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} \text{dist}_H(U(t+T, t, x), S(T, x)) = 0, \forall T > 0; \quad (4.48)$$

(ii) *$\mathcal{U}$ é limitado para frente;*

(iii) *$\mathcal{U}$ é equiatraente sob U .*

Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(A(t), \mathcal{A}) = 0. \quad (4.49)$$

Capítulo 5

Aplicações para uma inclusão diferencial escalar

Comparado com o Teorema 3.1.1, o Teorema 4.1.1 tem a vantagem evidente de exigir apenas uma condição de limitação para frente em vez de uma condição de compactação para frente. Esta é uma melhoria importante para sistemas dinâmicos de dimensão infinita e mesmo em caso de unicidade de solução, um exemplo de equação de reação-difusão é dado em [6]. Neste capítulo, por meio de uma aplicação a uma inclusão diferencial ordinária destacamos outra vantagem que a condição (4.1) tem com os dados iniciais sendo os mesmos.

5.1 Uma inclusão diferencial escalar não autônoma: Existência de soluções

Consideramos a seguinte inclusão diferencial escalar

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \lambda u \in b(t)H_0(u), \quad t \geq s, \\ u(s) = u_s, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $\lambda > 0$, H_0 é a função de Heaviside dada por

$$H_0(u) = \begin{cases} -1, & \text{se } u < 0, \\ [-1, 1], & \text{se } u = 0, \\ 1, & \text{se } u > 0, \end{cases}$$

e $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função contínua que satisfaz

$$0 < b_0 \leq b(t) \leq b_1.$$

Definição 5.1.1. [7] A função $u \in C([s, +\infty), \mathbb{R})$ é chamada solução de (5.1) se $\frac{du}{dt} \in L_{Loc}^\infty([s, +\infty), \mathbb{R})$ e existe $h \in L_{Loc}^\infty([s, +\infty), \mathbb{R})$ tal que $h(t) \in H_0(u(t))$, para quase todo $t > s$, e

$$\frac{du}{dt} + \lambda u = b(t)h(t) \text{ para quase todo } t > s \quad (5.2)$$

com $u(s) = u_s$.

Observação 5.1.1. [5] Denotaremos por $\mathcal{R}_s^b$ o conjunto de todas as soluções de (5.1) começando em s . No caso autônomo, isto é, quando $b(t) \equiv b > 0$, o conjunto de todas as soluções começando em $s = 0$ será denotado por $\mathcal{R}_b$.

Lema 5.1.1. [5] Se $u_s > 0$, então $u(t) > 0$ para todos os $t \geq s$ e todos os $u \in \mathcal{R}_s^b$ com $u(s) = \mu_s$. Se $u_s < 0$, então $u(t) < 0$ para todos os $t \geq s$ e todos os $u \in \mathcal{R}_s^b$ com $u(s) = u_s$.

Lema 5.1.2. [5] (*Concatenação*). Seja $u \in \mathcal{R}_\tau^b$, $v \in \mathcal{R}_r^b$ com $\tau \leq r \leq s$ e $u(s) = v(s)$. Então

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & \text{se } \tau \leq t \leq s, \\ v(t) & \text{se } t \geq s, \end{cases}$$

pertence a $\mathcal{R}_\tau^b$.

É claro que o problema (5.1) possui pelo menos uma solução para cada dado inicial [5]. Além disso, o seguinte lema mostra que a unicidade das soluções falha apenas quando os dados iniciais são zero.

Lema 5.1.3. [5]. Para qualquer $u_s \neq 0$ o problema (5.1) tem a única solução dada por

$$u(t) = e^{-\lambda(t-s)}u_s + \int_s^t e^{-\lambda(t-\tau)}b(\tau)h(\tau) d\tau.$$

Para $u_s = 0$, existem infinitas soluções dadas por

$$u_\infty \equiv 0,$$

$$u_r^+(t) = \begin{cases} 0, & s \leq t \leq r, \\ \int_r^t e^{-\lambda(t-\tau)}b(\tau)d\tau, & t > r, \end{cases}$$

$$u_r^-(t) = \begin{cases} 0, & s \leq t \leq r, \\ -\int_r^t e^{-\lambda(t-\tau)}b(\tau)d\tau, & t > r, \end{cases}$$

onde $r \geq s$ é arbitrário, e estas são as únicas soluções possíveis.

Demonstração. Usaremos a técnica de fator integrante. Note que a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{du}{dt} + \lambda u = b(t)h(t)$$

é do tipo $y' + p(t)y = g(t)$ onde a função

$$v(t) = e^{\int p(t) dt} := \exp\left(\int p(t) dt\right)$$

multiplicada pela equação $y' + p(t)y = g(t)$ transforma o primeiro membro na derivada do produto $v(t) \cdot y(t)$.

Logo, multiplicando a equação $u' + \lambda u = b(t)h(t)$ por $v(t) = e^{\int \lambda dt} = e^{\lambda t}$, temos $e^{\lambda t}u' + \lambda e^{\lambda t}u = b(t)h(t)e^{\lambda t}$, ou seja,

$$(e^{\lambda t} \cdot u)' = b(t)h(t)e^{\lambda t}.$$

Integrando em ambos os lados,

$$e^{\lambda t}u = \int b(\tau)h(\tau)e^{\lambda \tau} d\tau + C, \text{ onde } C \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$u = \frac{1}{e^{\lambda t}} \int b(\tau)h(\tau)e^{\lambda\tau} d\tau + \frac{C}{e^{\lambda t}}$$

Como $u(s) = u_s$ temos

$$u_s = \frac{1}{e^{\lambda s}} \int_s^s b(\tau)h(\tau)e^{\lambda\tau} d\tau + \frac{C}{e^{\lambda s}} = \frac{C}{e^{\lambda s}}$$

$$C = u_s e^{\lambda s}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{e^{\lambda t}} \int_s^t b(\tau)h(\tau)e^{\lambda\tau} d\tau + \frac{u_s e^{\lambda s}}{e^{\lambda t}} \\ \Rightarrow u(t) &= \frac{1}{e^{\lambda t}} \int_s^t b(\tau)h(\tau)e^{\lambda\tau} d\tau + e^{\lambda(s-t)} u_s \\ \Rightarrow u(t) &= e^{-\lambda(t-s)} u_s + \frac{1}{e^{\lambda t}} \int_s^t b(\tau)h(\tau)e^{\lambda\tau} d\tau \\ \Rightarrow u(t) &= e^{-\lambda(t-s)} u_s + \int_s^t \frac{e^{\lambda\tau}}{e^{\lambda t}} b(\tau)h(\tau) d\tau \\ \Rightarrow u(t) &= e^{-\lambda(t-s)} u_s + \int_s^t e^{-\lambda(t-\tau)} b(\tau)h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

- Se $u_s > 0$, então $h(\tau) = 1$ para todo $\tau \geq s$. Logo,

$$u(t) = e^{-\lambda(t-s)} u_s + \int_s^t e^{-\lambda(t-\tau)} b(\tau) d\tau.$$

- Se $u_s < 0$, então $h(\tau) = -1$ para todo $\tau \geq s$. Logo,

$$u(t) = e^{-\lambda(t-s)} u_s - \int_s^t e^{-\lambda(t-\tau)} b(\tau) d\tau.$$

- Se $u_s = 0$, então $h(\tau) \in [-1, 1]$ para todo $\tau \geq s$. Logo,

$$u(t) = e^{-\lambda(t-s)} \cdot 0 + \int_s^t e^{-\lambda(t-\tau)} b(\tau)h(\tau) d\tau = \int_s^t e^{-\lambda(t-\tau)} b(\tau)h(\tau) d\tau.$$

As soluções para este caso são

$$u_\infty \equiv 0,$$

e usando a concatenação do Lema 5.1.2 temos

$$u_r^+ = \begin{cases} 0, & s \leq t \leq r \\ \int_r^t e^{-\lambda(t-\tau)} b(\tau) d\tau, & t > r \end{cases}$$

$$u_r^- = \begin{cases} 0, & s \leq t \leq r \\ -\int_r^t e^{-\lambda(t-\tau)} b(\tau) d\tau, & t > r \end{cases}$$

■

5.1.1 Existência do atrator pullback e algumas propriedades

O trabalho recente de Caraballo *et al.* [5] mostra que o problema escalar (5.1) gera um processo estrito multívoco, que possui um atrator pullback compacto.

Lema 5.1.4. [5] *A aplicação $(t, s, u_s) \mapsto U(t, s, u_s)$ dado*

$$U(t, s, u_s) = \{y \in \mathbb{R} : \text{existe } \eta \in C([s, +\infty), \mathbb{R}) \text{ tal que } y = \eta(t) \text{ e } u_s = \eta(s)\}$$

é um processo estrito multívoco que possui gráfico fechado. Além disso, o processo U possui um atrator pullback $\mathcal{U} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Neste artigo, fazendo uso de nossos resultados teóricos, estudamos o comportamento assintótico do atrator pullback sob algumas condições em $b(t)$. Para começar, mostramos que o atrator pullback $\mathcal{U}$ é limitado para trás e para frente, e é equiatraente sob U .

Proposição 5.1.1. [7] *O atrator pullback $\mathcal{U}$ é limitado para frente e para trás.*

Demonstração. Por (5.2), $\frac{du(t)}{dt} + \lambda u(t) = b(t)h(t)$. Multiplicando esta equação em ambos os lados pela solução u (calculada no tempo genérico t), obtemos que qualquer solução u do problema (5.1) satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 + \lambda |u(t)|^2 &= b(t)h(t)u(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} b(t)h(t)\sqrt{\lambda}u(t) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} b(t)|h(t)|\sqrt{\lambda}|u(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} b(t)\sqrt{\lambda}|u(t)|, \quad \forall t \geq s. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 + \lambda |u(t)|^2 \leq \frac{1}{2\lambda} (b(t))^2 + \frac{\lambda}{2} |u(t)|^2, \quad \forall t \geq s.$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 \leq \frac{1}{2\lambda} |b|^2 - \frac{\lambda}{2} |u|^2.$$

Integrando de s a t , obtemos

$$\frac{1}{2} \int_s^t \frac{d}{d\tau} |u(\tau)|^2 d\tau \leq \frac{1}{2\lambda} \int_s^t |b(\tau)|^2 d\tau - \frac{\lambda}{2} \int_s^t |u(\tau)|^2 d\tau.$$

Logo,

$$|u(t)|^2 \leq |u(s)|^2 + \frac{1}{\lambda} \int_s^t |b(\tau)|^2 d\tau - \lambda \int_s^t |u(\tau)|^2 d\tau.$$

Considerando $a := |u(s)|^2 + \frac{1}{\lambda} \int_s^t |b(\tau)|^2 d\tau$ e $\phi(t) := |u(t)|^2$, temos

$$\phi(t) \leq a + \int_s^t -\lambda \phi(\tau) d\tau \quad \forall t \in [s, T].$$

Daí, pela desigualdade de Gronwall-Bellman, obtemos

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 = \phi(t) &\leq a e^{\int_s^t -\lambda d\tau} = a e^{-\lambda(t-s)} \\ &= \left[|u(s)|^2 + \frac{1}{\lambda} \int_s^t |b(\tau)|^2 d\tau \right] e^{-\lambda(t-s)} \\ &= e^{-\lambda(t-s)} |u(s)|^2 + \frac{1}{\lambda} \int_s^t e^{-\lambda(t-s)} |b(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto não autônomo $\mathbf{B} = \{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ dado por

$$B(t) = \left\{ \eta \in \mathbb{R} : |\eta|^2 \leq 1 + \frac{1}{\lambda} \int_s^t e^{-\lambda(t-\tau)} |b(\tau)|^2 d\tau \right\},$$

é um conjunto pullback absorvente do processo U . Além disso, $|\eta(t)|^2 \leq 1 + \frac{b_1^2}{\lambda^2}$ para todo $\eta(t) \in B(t)$, $t \geq s$. De fato, primeiro note que $|b(\tau)| \leq b_1$. Seja $\eta(t) \in B(t)$. Pela

definição de $B(t)$, temos

$$\begin{aligned}
 |\eta(t)|^2 &\leq 1 + \frac{1}{\lambda} \int_s^t e^{-\lambda(t-\tau)} |b(\tau)|^2 d\tau \\
 &\leq 1 + \frac{1}{\lambda} \int_s^t e^{-\lambda(t-\tau)} b_1^2 d\tau \\
 &\leq 1 + \frac{b_1^2}{\lambda} \int_s^t e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \\
 &\leq 1 + \frac{b_1^2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} b_1^2 e^{-\lambda(t-\tau)} \\
 &\leq 1 + \frac{b_1^2}{\lambda^2}.
 \end{aligned}$$

■

Teorema 5.1.1. [5] *Existe uma trajetória completa limitada máxima $\xi_M(\cdot)$ de $\mathcal{R}_b$, e que significa que para qualquer trajetória completa limitada $\varphi(\cdot)$ temos*

$$-\xi_M(t) \leq \varphi(t) \leq \xi_M(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, para qualquer $u_s \neq 0$ temos

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} U_b(t, s, u_s) = \xi_M(t) \text{ se } u_s > 0, \quad (5.3)$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} U_b(t, s, u_s) = -\xi_M(t) \text{ se } u_s < 0, \quad (5.4)$$

e o intervalo $[-\xi_M(t), \xi_M(t)]$ é positivamente invariante.

Lema 5.1.5. [5] *Se $\psi(\cdot)$ é uma trajetória completa limitada de $\mathcal{R}_b$ tal que $\psi(t) > 0$ ($\psi(t) < 0$) para todo $t \in \mathbb{R}$, então*

$$\psi(t) \equiv \xi_M(t) \text{ } (\psi(t) \equiv -\xi_M(t)).$$

Lema 5.1.6. [5] *Seja $u_s > 0$, $v_s < 0$. Então*

$$|U_b(t, s, u_s) - \xi_M(t)| \rightarrow 0,$$

$$|U_b(t, s, v_s) + \xi_M(t)| \rightarrow 0, \text{ com } t \rightarrow +\infty.$$

Lema 5.1.7. *Para qualquer $s \in \mathbb{R}$ existem pelo menos duas trajetórias completas limitadas ϕ_s^+ , ϕ_s^- tais que $\phi_s^+(t) = \phi_s^-(t) = 0$, para todos $t \leq s$, e*

$$|\phi_s^+(t) - \xi_M(t)| \rightarrow 0 \text{ com } t \rightarrow +\infty,$$

$$|\phi_s^-(t) + \xi_M(t)| \rightarrow 0 \text{ com } t \rightarrow +\infty.$$

Corolário 5.1.1. [5] *Seja $\psi(\cdot)$ uma trajetória completa limitada de $\mathcal{R}_b$. Então, ou $\psi(t) \equiv \pm \xi_M(t)$, $\psi(t) \equiv 0$ ou existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(t) = \psi_s^\pm(t)$.*

Proposição 5.1.2. *O atrator pullback $\mathcal{U}$ é equiatraente pelo processo U .*

Demonstração. Dado um conjunto limitado não vazio $K \subset \mathbb{R}$, sem perda de generalidade assumimos que ele pode ser dividido em três partes $K = K_1 \cup \{0\} \cup K_2$, onde K_1 contém todos os elementos positivos de K e K_2 contém todos os negativos. Queremos concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \text{dist}(U(t + \tau, \tau, K), A(t + \tau)) = 0 \quad (5.5)$$

vale para $K = K_1$, $\{0\}$, K_2 , respectivamente.

- Para K_1 : Pelo Teorema 5.1.1, considere $\xi_M : \mathbb{R} \rightarrow \left[\frac{b_0}{\lambda}, \frac{b_1}{\lambda} \right]$ dada por

$$\xi_M(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} b(s) ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esta aplicação é uma trajetória completa e limitada de U satisfazendo

$$U(t, s, \xi_M(s)) = \xi_M(t), \quad \forall t \geq s, .$$

Isto implica que $\xi_M(t) \in A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$ e para t fixado arbitrariamente, existe $s_0 < t$ tal que

$$\xi_M(t) = U(t, s, \xi_M(s)) \subset U(t, s, \cup_{l \in \mathbb{R}} \xi_M(l)) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A(t)), \quad \forall s \leq s_0.$$

Então, $\xi_M(t) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{O}_\varepsilon(A(t)) = \overline{A(t)} = A(t)$. Portanto, pelo Lema 5.1.3, uma vez que U é unívoco em K_1 , temos

$$\begin{aligned}
& \text{dist}(U(t + \tau, \tau, K_1), A(t + \tau)) \leq \sup_{x \in K_1} \text{dist}(U(t + \tau, \tau, x), \xi_M(t + \tau)) \\
&= \sup_{x \in K_1} \left| e^{-\lambda(t+\tau-\tau)} \cdot x + \int_{\tau}^{t+\tau} e^{-\lambda(t+\tau-s)} b(s) \, ds - \int_{-\infty}^{t+\tau} e^{-\lambda(t+\tau-s)} b(s) \, ds \right| \\
&= \sup_{x \in K_1} \left| e^{-\lambda t} \cdot x - \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\lambda(t+\tau-s)} b(s) \, ds \right| \\
&\leq e^{-\lambda t} \sup_{x \in K_1} |x| + \left| - \int_{-\infty}^{-\tau} e^{-\lambda(t+\tau-s)} b(s) \, ds \right| \\
&= e^{-\lambda t} |K_1| + e^{-\lambda t} \left| \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\lambda(\tau-s)} b(s) \, ds \right| \\
&= e^{-\lambda t} (|K_1| + |\xi_M(\tau)|) \leq e^{-\lambda t} \left(|K_1| + \frac{b_1}{\lambda} \right) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

quando $t \rightarrow +\infty$, uniformemente para todo $\tau \in \mathbb{R}$. Portanto, a equitração (5.5) vale para K_1 .

- Para K_2 :

O caso K_2 é semelhante a K_1 com $-\xi_M(\cdot)$ em vez de $\xi_M(\cdot)$.

- Para $K = \{0\}$:

Como o processo multívoco U é estrito e da Proposição 5.1.1 o atrator pullback $\mathcal{U}$ é limitado para trás, pelo Lema 2.1.1, $\mathcal{U}$ é estritamente invariante, ou seja, $U(t + \tau, \tau, A(\tau)) = A(t + \tau)$ para todo $t \geq 0$ e $\tau \in \mathbb{R}$. Portanto, como $\xi(t) \equiv 0$ pertence a $A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\text{dist}(U(t + \tau, \tau, 0), A(t + \tau)) \leq \text{dist}(U(t + \tau, \tau, A(\tau)), A(t + \tau)) \equiv 0$$

para todo $t \geq 0$ e $\tau \in \mathbb{R}$. Portanto, a equitração (5.5) vale para $K = \{0\}$.

■

5.2 Convergências de atratores pullback assintoticamente periódicos

Seja $p(t)$ uma função periódica contínua e considere a seguinte versão periódica de (5.1)

$$\frac{du}{dt} + \lambda u \in p(t)H_0(u). \quad (5.6)$$

Claramente, o processo multívoco U_{per} correspondente a (5.6) tem um atrator pullback $\mathcal{U}_{per} = \{A_{per}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$. Além disso, pelas Proposições 5.1.1, 5.1.2 e Teorema 2.5, temos

Teorema 5.2.1. *O atrator pullback $\mathcal{U}_{per}$ é limitado para frente e para trás e é equiatraente em U_{per} . Além disso, é periódico.*

A seguir, estudamos as convergências do atrator pullback $\mathcal{U}$ de (5.1) em direção ao atrator pullback periódico $\mathcal{U}_{per}$ de (5.6).

Teorema 5.2.2. (Convergência para frente). *Seja $\lim_{t \rightarrow \infty} |b(t) - p(t)| = 0$. Então os dois atratores $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}_{per}$ são assintoticamente idênticos em um futuro distante em relação à métrica completa de Hausdorff, ou seja,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(A(t), A_{per}(t)) = 0.$$

Demonstração. Pela Proposição 4.5 e Teorema 5.2.1, é suficiente provar

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \text{dist}(U(t+T, t, x), U_{per}(t+T, t, x)) = 0, \forall T > 0. \quad (5.7)$$

Pela hipótese, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $T_* > 0$ tal que $|b(\tau) - p(\tau)| < \varepsilon$ para todo $\tau \geq T_*$. Portanto, se $x \neq 0$, então, pelo Lema 5.1.3,

$$\begin{aligned} \text{dist}_H(U(t+T, t, x), U_{per}(t+T, t, x)) &= \left| \int_t^{t+T} e^{-\lambda(t+T-\tau)} (b(\tau) - p(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq \int_t^{t+T} |b(\tau) - p(\tau)| d\tau < T\varepsilon, \forall t \geq T_*. \end{aligned}$$

Se $x = 0$, então, pelo Lema 5.1.3 novamente,

$$\text{dist}_H(U(t+T, t, 0), U_{per}(t+T, t, 0)) \leq \sup_{r \in [t, t+T)} \int_r^{t+T} e^{-\lambda(t+T-\tau)} |b(\tau) - p(\tau)| d\tau$$

$$\leq \sup_{r \in [t, t+T)} \int_r^{t+T} |b(\tau) - p(\tau)| d\tau \leq \int_t^{t+T} |b(\tau) - p(\tau)| d\tau < T\epsilon, \forall t \geq T_*.$$

Portanto, (5.7) é válido como desejado. ■

Teorema 5.2.3. (*Convergência para trás*). *Seja $\lim_{t \rightarrow -\infty} |b(t) - p(t)| = 0$. Então os dois atratores $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}_{per}$ são assintoticamente idênticos no passado distante em relação à métrica completa de Hausdorff, ou seja,*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}_H(A(t), A_{per}(t)) = 0.$$

Demonstração. Pelo Corolário 4.1.2 é suficiente provar que

$$\sup_{x \in X, \tau \in \mathbb{R}_+} \text{dist}_H(U(t, t - \tau, x), U_{per}(t, t - \tau, x)) \rightarrow 0, \text{ com } t \rightarrow -\infty. \quad (5.8)$$

Pela hipótese, para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $T_* < 0$ tal que $|b(s) - p(s)| < \epsilon$ para todo $s \leq T_*$. Portanto, se $x \neq 0$, então, pelo Lema 5.1.3,

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in \mathbb{R}_+} \text{dist}_H(U(t, t - \tau, x), U_{per}(t, t - \tau, x)) &= \left| \int_{t-\tau}^t e^{-\lambda(t-s)} (b(s) - p(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} \epsilon ds = \frac{\epsilon}{\lambda}, \end{aligned}$$

para todo $t \leq T_*$. Se $x = 0$, então, pelo Lema 5.1.3 novamente,

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in \mathbb{R}_+} \text{dist}_H(U(t, t - \tau, 0), U_{per}(t, t - \tau, 0)) &\leq \sup_{\tau \in \mathbb{R}_+} \left(\sup_{r \in [t-\tau, t]} \int_r^t e^{-\lambda(t-s)} |b(s) - p(s)| ds \right) \\ &\leq \sup_{r \in (-\infty, t]} \int_r^t e^{-\lambda(t-s)} \epsilon ds = \frac{\epsilon}{\lambda}, \end{aligned}$$

para todo $t \leq T_*$. Portanto, (5.8) é válido como desejado. ■

5.3 Convergências de atratores pullback assintoticamente autônomos

Seja $\bar{b} \in [b_0, b_1]$ uma constante e considere a versão autônoma de (5.1)

$$\frac{du}{dt} + \lambda u \in \bar{b} H_0(u). \quad (5.9)$$

Claramente, o semigrupo multívoco S gerado por (5.9) tem um atrator global $\mathcal{A}$ como caso particular.

A seguir, estudamos as convergências do atrator pullback $\mathcal{U}$ de (5.1) em direção ao atrator global $\mathcal{A}$ de (5.9).

Teorema 5.3.1. (*Convergência para frente*). *Seja $\lim_{t \rightarrow \infty} |b(t) - \bar{b}| = 0$. Então o atrator semigrupo $\mathcal{A}$ é o conjunto ω – limite do atrator pullback $\mathcal{U}$, ou seja,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(A(t), \mathcal{A}) = 0.$$

Demonstração. Como o atrator pullback $\mathcal{U}$ é limitado para frente pela Proposição 5.1.1 e equitraniente sob U pela Proposição 5.1.2, pelo Corolário 4.2.2 é suficiente provar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \text{dist}_H(U(t+T, t, x), S(T, x)) = 0, \forall T > 0. \quad (5.10)$$

Pela hipótese, para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $T_* > 0$ tal que $|b(\tau) - \bar{b}| < \epsilon$ para todo $\tau \geq T_*$. Portanto, se $x \neq 0$, então, pelo Lema 5.1.3,

$$\begin{aligned} \text{dist}_H(U(t+T, t, x), S(T, x)) &= \left| \int_t^{t+T} e^{-\lambda(t+T-\tau)} (b(\tau) - \bar{b}) d\tau \right| \\ &\leq \int_t^{t+T} |b(\tau) - \bar{b}| d\tau < T\epsilon, \forall t \geq T_*; \end{aligned}$$

se $x = 0$, então, pelo Lema 5.1.3 novamente,

$$\begin{aligned} \text{dist}_H(U(t+T, t, 0), S(T, 0)) &\leq \sup_{r \in [t, t+T]} \int_r^{t+T} e^{-\lambda(t+T-\tau)} |b(\tau) - \bar{b}| d\tau \\ &\leq \sup_{r \in [t, t+T]} \int_r^{t+T} |b(\tau) - \bar{b}| d\tau \\ &\leq \int_t^{t+T} |b(\tau) - \bar{b}| d\tau < T\epsilon, \forall t \geq T_*. \end{aligned}$$

Portanto, (5.10) é válido como desejado. ■

Teorema 5.3.2. (*Convergência para trás*). *Seja $\lim_{t \rightarrow -\infty} |b(t) - \bar{b}| = 0$. Então o atrator semigrupo $\mathcal{A}$ é o conjunto α – limite do atrator pullback $\mathcal{U}$, ou seja,*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}_H(A(t), \mathcal{A}) = 0.$$

Demonstração. Como pela Proposição 5.1.1 o atrator pullback $\mathcal{U}$ é limitado para trás, pelo Teorema 4.1.2, é suficiente provar que

$$\sup_{x \in X, \tau \in \mathbb{R}_+} \text{dist}_H(U(t, t - \tau, x), S(\tau, x)) \rightarrow 0, \text{ com } t \rightarrow -\infty. \quad (5.11)$$

Pela hipótese, para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $T_* < 0$ tal que $|b(s) - \bar{b}| < \epsilon$ para todo $s \leq T_*$. Portanto, se $x \neq 0$, então, pelo Lema 5.1.3,

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in \mathbb{R}_+} \text{dist}_H(U(t, t - \tau, x), S(\tau, x)) &= \left| \int_{t-\tau}^t e^{-\lambda(t-s)} (b(s) - \bar{b}) ds \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} \epsilon ds = \frac{\epsilon}{\lambda}, \forall t \leq T_*; \end{aligned}$$

se $x = 0$, então, pelo Lema 5.1.3 novamente,

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in \mathbb{R}_+} \text{dist}_H(U(t, t - \tau, 0), S(\tau, 0)) &\leq \sup_{\tau \in \mathbb{R}_+} \left(\sup_{r \in [t-\tau, t]} \int_r^t e^{-\lambda(t-s)} |b(s) - \bar{b}| ds \right) \\ &\leq \sup_{r \in (-\infty, t)} \int_r^t e^{-\lambda(t-s)} \epsilon ds = \frac{\epsilon}{\lambda}, \forall t \leq T_*. \end{aligned}$$

Portanto, (5.11) é válido como desejado. ■

Conclusões

Pelo Teoremas 4.1.2 e pelo Corolário 4.2.2 provamos as convergências completas do atrator pullback para o atrator do semigrupo. Isto pode ser considerado um exemplo que destaca as vantagens do Teorema 4.1.2 e do Corolário 4.2.2 sobre os primeiros Corolários 3.2.3 e 3.2.4. Na verdade, pelo Lema 5.1.3 temos, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \text{dist}_H \left(U \left(n+1, n, \frac{1}{n} \right), S(1, 0) \right) &\geq \left| U \left(n+1, n, \frac{1}{n} \right) - 0 \right| \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{n} + \int_n^{n+1} e^{-\lambda(n+1-\tau)} b(\tau) d\tau \\ &\geq \int_n^{n+1} e^{-\lambda(n+1-\tau)} b_0 d\tau \geq \frac{b_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda}), \end{aligned}$$

o que mostra que a condição (3.35) falha e o Corolários 3.2.3 não pode ser aplicado neste exemplo. A condição (4.48) no Corolário 4.2.2 revela-se fácil de verificar (Teorema 5.3.1).

Apêndice: Resultados teóricos para inclusões diferenciais abstratas

Este apêndice é baseado no artigo [26].

Considere o seguinte problema multívoco não autônomo em um espaço de Banach X da forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t) + A(t)u(t) + F(u(t)) \ni 0, \quad u(\tau) = \psi_\tau, \quad (5.12)$$

em comparação com do problema autônomo multívoco da forma

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t) + A_\infty v(t) + F(v(t)) \ni 0, \quad v(0) = \psi_0, \quad (5.13)$$

onde $A(t)$, A_∞ são operadores unívocos em X e $F : X \rightarrow P(X)$ é uma aplicação multívoca ($(X, \|\cdot\|)$ será um espaço de Banach).

O processo de evolução multívoco associado a (5.12) é definido pela aplicação $U : \mathbb{R}_{\geq}^2 \times X \rightarrow P(X)$ definido por

$$U(t, \tau)\xi = \{z : \text{existe } u(\cdot) \in \mathcal{D}_\tau(\xi) \text{ tal que } u(t) = z\}$$

onde $\mathcal{D}_\tau(\xi)$ denota o conjunto de todas as soluções de (5.12) correspondente à condição inicial $u(\tau) = \xi$.

Suponhamos que o processo de evolução multívoco $\{U(t, \tau) : t \geq \tau\}$ em X associado ao problema (5.12) tem um atrator pullback $\mathfrak{A} = \{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$, com $\mathcal{A}(t)$ compacto para cada $t \in \mathbb{R}$, e que o semigrupo multívoco $G : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow P(X)$ associado ao problema (5.13) tem um atrator autônomo global compacto $\mathcal{A}_\infty$ no espaço de Banach X .

Teorema 5.3.3. *Suponha que para cada solução u do problema (5.12) existe uma solução v do problema (5.13) tal que $u(t + \tau) \rightarrow v(t)$ em X quando $\tau \rightarrow +\infty$ para cada $t \geq 0$ sempre que $\psi_\tau \in \mathcal{A}(\tau)$ e $\psi_\tau \rightarrow \psi_0$ em X com $\tau \rightarrow +\infty$. Se $\overline{\cup_{s \geq \tau} \mathcal{A}(s)}$ é um subconjunto compacto de X para cada $\tau \in \mathbb{R}$, então*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\mathcal{A}(t), \mathcal{A}_\infty) = 0. \quad (5.14)$$

Demonstração. Temos que $K(\tau) := \overline{\cup_{s \geq \tau} \mathcal{A}(s)}$ é um subconjunto compacto de X para cada $\tau \in \mathbb{R}$. Em particular, $K := \overline{\cup_{s \geq 0} \mathcal{A}(s)}$ é um subconjunto compacto de X . Suponha que (5.14) não seja verdadeiro. Então existiria um $\epsilon_0 > 0$ e uma sequência real $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $0 < \tau_n \nearrow +\infty$ tal que $\text{dist}(\mathcal{A}(\tau_n), \mathcal{A}_\infty) \geq 3\epsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que os conjuntos $\mathcal{A}(\tau_n)$ são compactos, existe $a_n \in \mathcal{A}(\tau_n)$ tal que

$$\text{dist}(a_n, \mathcal{A}_\infty) = \text{dist}(\mathcal{A}(\tau_n), \mathcal{A}_\infty) \geq 3\epsilon_0, \quad (5.15)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Pela propriedade de atração temos $\text{dist}(G(\tau_{n_0}, K), \mathcal{A}_\infty) \leq \epsilon_0$ para $n_0 > 0$ grande o suficiente. Além disso, pela semi-invariância do atrator pullback existe $b_n \in \mathcal{A}(\tau_n - \tau_{n_0}) \subset K$ para $n > n_0$ tal que $a_n \in U(\tau_n, \tau_n - \tau_{n_0})b_n$ para cada $n > n_0$. Como K é compacto, existe uma subsequência convergente $b_{n'} \rightarrow b \in K$. Como $a_{n'} \in U(\tau_{n'}, \tau_{n'} - \tau_{n_0})b_{n'}$ existe uma solução $u_{n'}$ de

$$\frac{\partial u_{n'}}{\partial t}(t) + A(t)u_{n'}(t) + F(u_{n'}(t)) \ni 0, \quad u_{n'}(\tau_{n'} - \tau_{n_0}) = b_{n'},$$

tal que $a_{n'} = u_{n'}(\tau_{n'})$. Escrevendo $\tau_{n'} = \tau_{n_0} + (\tau_{n'} - \tau_{n_0})$ e usando as hipóteses com $t = \tau_{n_0}$ e $\tau = \tau_{n'} - \tau_{n_0} \rightarrow +\infty$ (com $n' \rightarrow +\infty$), existe uma solução $v_{n'}$ de

$$\frac{\partial v_{n'}}{\partial t}(t) + A_\infty v_{n'}(t) + F(v_{n'}(t)) \ni 0, \quad v_{n'}(0) = b,$$

tal que

$$\|u_{n'}(\tau_{n'}) - v_{n'}(\tau_{n_0})\|_X < \epsilon_0$$

para n' grande o suficiente. Daqui,

$$\begin{aligned} \text{dist}(a_{n'}, \mathcal{A}_\infty) &= \text{dist}(u_{n'}(\tau_{n'}), \mathcal{A}_\infty) \\ &\leq \|u_{n'}(\tau_{n'}) - v_{n'}(\tau_{n_0})\|_X + \text{dist}(v_{n'}(\tau_{n_0}), \mathcal{A}_\infty) \\ &\leq \|u_{n'}(\tau_{n'}) - v_{n'}(\tau_{n_0})\|_X + \text{dist}(G(\tau_{n_0}, K), \mathcal{A}_\infty) \\ &\leq 2\epsilon_0, \end{aligned}$$

que contradiz (5.15). ■

Sob a seguinte condição extra (*USC*) uma espécie de recíproca do teorema anterior é válida.

(*USC*): Para cada $t \in \mathbb{R}$, $\sigma : [t, +\infty) \times X \rightarrow P(X)$, definido por $\sigma(r, x) := U(r, t)x$, é uma aplicação semicontinua superior e tem valores compactos.

É um resultado bem conhecido que para cada par fixo (t, τ) com $t \geq \tau$, o processo de evolução multívoco associado ao problema (5.12) $U(t, \tau) : X \rightarrow P(X)$ é uma aplicação semicontínua superior se, por exemplo, o processo multívoco é definido por um Processo Generalizado Exato (veja Teorema 12.3 em [28]).

Teorema 5.3.4. *Suponha que (*USC*) seja satisfeito e que para cada solução do problema (5.12) existe uma solução v do problema (5.13) tal que para cada $t \geq 0$, $u(t + \tau) \rightarrow v(t)$ em X quando $\tau \rightarrow +\infty$ sempre que $\psi_\tau \in \mathcal{A}(\tau)$ e $\psi_\tau \rightarrow \psi_0$ em X com $\tau \rightarrow +\infty$. Se*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\mathcal{A}(t), \mathcal{A}_\infty) = 0 \quad (5.16)$$

então $\overline{\cup_{s \geq \tau} \mathcal{A}(s)}$ é um subconjunto compacto de X para cada $\tau \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Suponha que (5.16) seja verdadeiro. Vamos provar a pre-compactação de $\cup_{r \geq t} \mathcal{A}(r)$ para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado. Tomando uma sequência $\{x_n\}$ a partir desta união, então escolhemos $r_n \geq t$ tal que $x_n \in \mathcal{A}(r_n)$. Vamos provar que a sequência $\{x_n\}$ tem uma subsequência convergente em dois casos.

Caso 1. $r_0 := \sup_{n \in \mathbb{N}} r_n < +\infty$.

Neste caso, $\{r_n\} \subset [t, r_0]$ e assim $\{x_n\} \subset \cup_{t \leq r \leq r_0} \mathcal{A}(r)$. Pela invariância do atrator pull-back $\mathcal{U}$, temos $\cup_{t \leq r \leq r_0} \mathcal{A}(r) \subset \sigma([t, r_0] \times \mathcal{A}(t))$. Pela hipótese (*USC*), $\sigma : [t, +\infty] \times X \rightarrow P(X)$ é semicontínua superior. Uma vez que uma aplicação multívoca semicontínua superior com valores compactos leva conjuntos compactos em conjuntos compactos (veja Proposição 3, p.42 em [1]) temos que $\sigma([t, r_0] \times \mathcal{A}(t))$ é um conjunto compacto. Então, $\overline{\cup_{t \leq r \leq r_0} \mathcal{A}(r)}$ é um conjunto compacto, pois é um conjunto fechado em um conjunto compacto.

Portanto $\{x_n\}$ é compacto.

Caso 2. $\sup_{n \in \mathbb{N}} r_n = +\infty$.

Neste caso, passando para uma subsequência, podemos assumir $r_n \nearrow +\infty$. Usando (5.16), temos

$$\text{dist}(x_n, \mathcal{A}_\infty) \leq \text{dist}(\mathcal{A}(r_n), \mathcal{A}_\infty) \rightarrow 0 \quad (5.17)$$

quando $n \rightarrow +\infty$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escolher $y_n \in \mathcal{A}_\infty$ tal que

$$d(x_n, y_n) \leq \text{dist}(x_n, \mathcal{A}_\infty) + \frac{1}{n}.$$

Como $\mathcal{A}_\infty$ é um conjunto compacto, segue-se que y_n tem uma subsequência convergente tal que $y_{n_k} \rightarrow y \in \mathcal{A}_\infty$ com $k \rightarrow +\infty$. Portanto,

$$\begin{aligned} d(x_{n_k}, y) &\leq d(x_{n_k}, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y) \\ &\leq \text{dist}(x_{n_k}, \mathcal{A}_\infty) + \frac{1}{n_k} + d(y_{n_k}, y). \end{aligned}$$

Usando (5.17), concluímos que $x_{n_k} \rightarrow y$ com $k \rightarrow +\infty$. ■

O leitor pode ver uma aplicação concreta no artigo [26], onde os autores consideraram uma inclusão de evolução com os coeficientes de difusão e absorção ambos dependentes do tempo, mais precisamente, estudaram o comportamento assintótico do problema multívoco não autônomo, com condição de fronteira Neumann homogênea, no espaço de Hilbert $H := L^2(\Omega)$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t) - \text{div} (D_1(t)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + D_2(t)|u|^{p(x)-2}u + F(u(t)) \ni 0, \quad u(\tau) = \psi_\tau, \quad (5.18)$$

sendo que Ω um domínio suave limitado em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, o expoente $p(\cdot) \in C(\overline{\Omega})$ satisfaz

$$p^+ := \max_{x \in \Omega} p(x) \geq p^- := \min_{x \in \Omega} p(x) > 2$$

e a condição inicial $u(\tau) \in H := L^2(\Omega)$.

Referências Bibliográficas

- [1] J. P. AUBIN AND A. CELLINA, *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [2] J. M. BALL, On the asymptotic behavior of generalized processes, with applications to nonlinear evolution equations, *J. Differential Equations* **27** (1978), No. 2, 224–265.
- [3] A. N. CARVALHO, J. A. LANGA AND J. C. ROBINSON, *Attractors for Infinite-dimensional Non-autonomous Dynamical Systems*, Applied Mathematical Sciences 182, Springer-Verlag, 2012.
- [4] T. CARABALLO, A. N. CARVALHO, J. A. LANGA AND F. RIVERO, Existence of pullback attractors for pullback asymptotically compact processes, *Nonlinear Anal.* **72** (2010), 1967–1976.
- [5] T. CARABALLO, J. LANGA AND J. VALERO, Structure of the pullback attractor for a non-autonomous scalar differential inclusion. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, **9** (2016), No. 4: 979–994.
- [6] H. CUI, Convergences of asymptotically autonomous pullback attractors towards semigroup attractors, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* **24** (2019), No. 8, 3525–3535.
- [7] H. CUI AND P. E. KLOEDEN, Tail convergences of pullback attractors for asymptotically converging multi-valued dynamical systems, *Asymptot. Anal.* **112** (2019), No. 3-4, 165–184.
- [8] M. A. R. DE LIMA, *Atratores Pullback para Problemas Parabólicos envolvendo o p -Laplaciano*, Master’s thesis, Federal University of Itajubá, 2015.

- [9] C. R. DE OLIVEIRA, *Introdução à análise funcional*, 2. Ed. - Rio de Janeiro: IMPA, 2018. 257 p. (Coleção Projeto Euclides)
- [10] T. L. FERREIRA, *Estudo teórico de processos multívocos gerados por processos generalizados exatos*, Master's thesis, Federal University of Itajubá, 2017.
- [11] J. FÖLDES, P. POLÁČIK, Convergence to a steady state for asymptotically autonomous semilinear heat equations on $\mathbb{R}^N$, *J. Differential Equations* **251** (2011), No. 7, 1903–1922.
- [12] F. S. GUIMARÃES, *Teoria de Semigrupos Não Lineares e Resultados de Compacidade*, Master's thesis, Federal University of Itajubá, 2012.
- [13] J. K. HALE, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Providence, RI:AMS, 1988.
- [14] E. N. N. JÚNIOR, *Teoria de Semigrupos Multívocos: Atratores para Inclusões Diferenciais*, Master's thesis, Federal University of Itajubá, 2013.
- [15] P. E. KLOEDEN AND M. RASMUSSEN, *Nonautonomous dynamical systems*. Number 176. American Mathematical Soc., 2011.
- [16] P. E. KLOEDEN AND J. SIMSEN, Attractors of asymptotically autonomous quasilinear parabolic equation with spatially variable exponents, *J. Math. Anal. Appl.* **425** (2015), 911–918.
- [17] P. E. KLOEDEN AND J. SIMSEN, Pullback attractors for non-autonomous evolution equations with spatially variable exponents, *Commun. Pure Appl. Anal.* **13** (2014), 2543–2557.
- [18] P. E. KLOEDEN, J. SIMSEN AND M. S. SIMSEN, A pullback attractor for an asymptotically autonomous multivalued Cauchy problem with spatially variable exponent, *J. Math. Anal. Appl.* **445** (2017), 513–531.
- [19] P. E. KLOEDEN, J. SIMSEN AND P. WITTBOLD, Asymptotic behavior of coupled inclusions with variable exponents, *Commun. Pure Appl. Anal.* **19** (2020), No. 2, 1001–1016.

- [20] O. LADYZHENSKAYA, *Attractors for semigroups and evolution equations*, 1. ed. Cambridge University Press, 1991.
- [21] Y. LI, L. SHE AND R. WANG, Asymptotically autonomous dynamics for parabolic equations, *J. Math. Anal. Appl.* **459** (2018), 1106–1123.
- [22] Y. LI, L. SHE AND J. YIN, Longtime robustness and semi-uniform compactness of a pullback attractor via nonautonomous PDE, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* **23** (2018), No. 4, 1535–1557.
- [23] D. LIU, The critical forms of the attractors for semigroups and the existence of critical attractors, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **454** (1998), 2157–2171.
- [24] L. MARKUS, *Asymptotically autonomous differential systems*, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, vol. 3, pp. 17–29. Annals of Mathematics Studies, no. 36. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1956.
- [25] D. L. NOGUEIRA, *Dinâmica assintoticamente autônoma para equações parabólicas*, Master’s thesis, Federal University of Itajubá, 2019.
- [26] J. SIMSEN AND M. S. SIMSEN, On asymptotically autonomous dynamics for multivalued evolution problems, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* **24** (2019), No. 8, 3557–3567.
- [27] J. SIMSEN, A survey on asymptotically autonomous evolution processes, *Mat. Contemp.* **59** (2024), 32–61.
- [28] J. SIMSEN AND E. CAPELATO, Some properties for exact generalized processes, *Continuous and distributed systems. II*, 209–219, Stud. Syst. Decis. Control, 30, Springer, Cham, 2015.
- [29] A. STRAUSS AND J. A. YORKE, On asymptotically autonomous differential equations, *Math. Systems Theory* **1** (1967), 175–182.

- [30] R. TEMAM, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [31] H. R. THIEME, Asymptotically autonomous differential equations in the plane. 20th Midwest ODE Meeting (Iowa City, IA, 1991). *Rocky Mountain J. Math.* **24** (1994), No. 1, 351–380.
- [32] H. R. THIEME, Asymptotically autonomous differential equations in the plane. II. Stricter Poincaré/Bendixson type results. *Differential Integral Equations* **7** (1994), No. 5-6, 1625–1640.
- [33] B. WANG, Sufficient and necessary criteria for existence of pullback attractors for non-compact random dynamical systems. *Journal of Differential Equations*, **253** (2012), 1544–1583.