

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Uma Teoria de Continuação de Órbitas Periódicas em  
Equações Diferenciais Ordinárias**

**Wellington Alves Mota**

**Orientador: Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga**

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 7 DE ABRIL DE 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Uma Teoria de Continuação de Órbitas Periódicas em Equações Diferenciais Ordinárias

**Wellington Alves Mota**

**Orientador: Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Ciências em Matemática

**Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias**

ITAJUBÁ – MG

7 DE ABRIL DE 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Uma Teoria de Continuação de Órbitas Periódicas em Equações Diferenciais Ordinárias

**Wellington Alves Mota**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 07 de abril de 2016, conferindo ao autor o título de Mestre em Ciências em Matemática.

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Felipe Emanuel Chaves, INATEL

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello, UNIFEI

Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga (Orientador), UNIFEI

ITAJUBÁ – MG

7 DE ABRIL DE 2016

*Dedico a toda minha família, aos meus amigos e professores.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS que é fonte essencial e caminho para conseguir alcançar todos os meus objetivos. A toda a minha família. Aos meus professores de graduação e pós graduação que me transmitiram todo o conhecimento matemático para poder escrever minha dissertação. Em especial, ao Prof. Denis Carvalho Braga pela orientação, paciência e incentivo na elaboração desse trabalho. Aos meus amigos da minha turma de pós-graduação, ao Douglas Batista Rodrigues por toda ajuda e acolhimento. E demais amigos da UNIFEI pelo companheirismo em todos os momentos. A minha namorada e amiga, Winnie Mandela, pela compreensão, paciência e apoio. Agradeço também a CAPES pelo apoio financeiro. Por fim, a todos que diretamente ou indiretamente me ajudaram na elaboração deste trabalho.

*“A mente usa a sua faculdade de criatividade apenas quando a experiência a obriga a fazê-lo.”*

*Henri Poincaré*

# Resumo

A proposta deste trabalho é estudar uma teoria de continuação de órbitas periódicas em uma família a um parâmetro de equações diferenciais ordinárias constituída de perturbações por campo de vetores de classe  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ , de um sistema linear no qual, excetuando os pontos de equilíbrio, as soluções são periódicas. Por continuação de soluções periódicas entende-se aquelas órbitas periódicas que persistem após a perturbação para um valor do parâmetro suficientemente pequeno. Tais órbitas periódicas que persistem estão associadas com os zeros simples de certas funções integrais.

**Palavras-chave:** Ciclo Limite, Função Integral, Zero Simples.

# Abstract

The purpose of this study is to present a theory of continuation of periodic orbits in a one-parameter family of ordinary differential equations consisting of perturbations by  $\mathcal{C}^r$ -vector fields,  $r \geq 1$  or  $r = \infty$ , of a linear system in which, apart from the equilibrium points, the solutions are periodic. By continuation of periodic solutions it means those periodic orbits that persist after the perturbation when the parameter is small enough. Such periodic orbits that remain are associated with the simple zeros of certain integral functions.

**Keywords:** Limit Cycle, Integral Function, Simple Zero.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>ii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Sumário</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Abordagem Histórica . . . . .	1
1.2 Principais Resultados . . . . .	3
1.3 Revisão Bibliográfica . . . . .	4
1.4 Estrutura da Dissertação . . . . .	5
<b>2 Fundamentos da Teoria Qualitativa</b>	<b>6</b>
2.1 Campos Vetoriais e Fluxos . . . . .	6
2.2 Retrato de Fase de um Campo Vetorial . . . . .	9
2.3 Sistemas Lineares . . . . .	10
2.4 Teorema do Fluxo Tubular . . . . .	11
2.5 Pontos Singulares Hiperbólicos e Estabilidade . . . . .	12
2.6 Estrutura Local das Órbitas Periódicas . . . . .	13
2.7 Perturbação de Campos de Vetores . . . . .	15

<b>3</b>	<b>Continuação de Soluções Periódicas em <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>17</b>
3.1	Motivação: A Equação de van der Pol . . . . .	18
3.2	Teoria de Continuação em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	20
3.3	Análise da Equação de van der Pol . . . . .	30
3.4	O Sistema de Liénard . . . . .	31
3.5	Análise de um Sistema com um Número Contável de Ciclos Limites . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Continuação de Soluções Periódicas em <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>38</b>
4.1	Generalização para Dimensão Arbitrária . . . . .	38
4.2	Algumas Considerações em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	47
<b>5</b>	<b>O Sistema de Michelson</b>	<b>50</b>
5.1	Contexto Histórico e Obtenção do Modelo . . . . .	50
5.2	Análise Linear do Sistema de Michelson . . . . .	52
5.3	Ciclos Limites no Sistema de Michelson . . . . .	55
	<b>Conclusões</b>	<b>61</b>

# Lista de Figuras

2.1	Curvas integrais do campo vetorial $f$ . . . . .	7
2.2	O fluxo tubular. . . . .	12
3.1	Equilíbrio do tipo centro linear na origem. Excetuando a origem, para cada $\xi > 0$ , as soluções são periódicas de período $2\pi$ . . . . .	21
3.2	A solução $x$ (linha verde) do sistema perturbado está próxima da solução do sistema não perturbado (linha preta) que passa por $(\xi, 0)$ . . . . .	23
3.3	(a) Retrato de fase do sistema não perturbado. (b) Construção da aplicação de Poincaré. . . . .	24
3.4	Retrato de fase de (3.15) para $\varepsilon = 0.2$ . O ciclo limite estável é representada pela linha vermelha. . . . .	31
3.5	O gráfico da função de Bessel é representado pela linha vermelha. Os pontos azuis são da forma $(\xi_k, 0)$ , $k = 1, \dots, 15$ , obtidos através de (3.23). . . . .	37
4.1	Retrato de fase de $x' = Ax$ , com $A$ tal como em (4.10). O eixo $x_3$ é constituído de pontos de equilíbrio e as soluções periódicas estão sobre cilindros. . . . .	49

# Capítulo 1

## Introdução

Neste capítulo faremos uma abordagem histórica resumida da teoria de continuação de órbitas periódicas em equações diferenciais e também apresentaremos os principais resultados da dissertação, a revisão bibliográfica e a estrutura deste trabalho.

### 1.1 Abordagem Histórica

A teoria de continuação de órbitas periódicas, também chamada teoria de perturbação regular, é empregada em matemática aplicada na análise do comportamento das soluções periódicas em um modelo de um processo físico [5]. Na maioria dos casos, o modelo é uma família de equações diferenciais, ou seja, o modelo depende de parâmetros. Caso um membro da família possua, por exemplo, uma órbita periódica, será que esta órbita periódica persiste se alterarmos os valores dos parâmetros? A teoria de continuação é um conjunto diversificado de técnicas que podem ser usadas para responder a esta pergunta em algumas situações [5] e está inserida no contexto da *Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias*.

A *Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias* inicia-se com o trabalho de Poincaré [18], de 1881, intitulado *Mémoire sur les Courbes Définies par une Équation Differentielle* e tem por objetivo descrever as propriedades qualitativas das soluções de uma equação diferencial sem resolvê-la explicitamente. Visto que muitos fenômenos natu-

rais podem ser descritos por equações diferenciais ordinárias, tal teoria possui aplicações em diversas áreas do conhecimento. Em particular, o conceito de ciclo limite para campos vetoriais planares, também introduzido por Poincaré, modela oscilações não lineares em processos físicos.

No final da década de 1920, van der Pol [19], Liénard [11] e Andronov [1], estudando oscilações não lineares de fenômenos elétricos, analisaram certas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem verificando a ocorrência de ciclos limites. Após tal verificação, matemáticos e físicos estudaram extensivamente a não existência, a existência e a unicidade, entre outras propriedades destes ciclos limites. Os livros clássicos do Andronov, [2] e [3], apresentam dois métodos, um empregado por Poincaré e o outro por van der Pol, que podem ser utilizados no estudo de ciclos limites no retrato de fase de modelos dados pela equação diferencial  $x'' + x = \mu f(x, x')$  ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x + \mu f(x, y), \end{cases}$$

sendo  $\mu$  um parâmetro real suficientemente pequeno e  $f$  uma função polinomial (ou, em geral, analítica real).

Estes métodos abordam a questão da existência, número e estabilidade dos ciclos limites que surgem no retrato de fase da equação diferencial anterior, a partir da análise dos zeros simples de uma função integral, na mesma linha que será abordada nesta dissertação. Em ambos os casos, é obtida uma função integral  $\Phi$  dada por

$$\Phi(K) = \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u \, du,$$

com  $K > 0$ . Se  $K_0 > 0$  é um zero simples da função  $\Phi$ , isto é,  $\Phi(K_0) = 0$  e  $\Phi'(K_0) \neq 0$ , então existe um ciclo limite no retrato de fase de  $x'' + x = \mu f(x, x')$  próximo a um círculo centrado na origem e de raio  $K_0$ , para  $\mu > 0$  suficientemente pequeno. Este ciclo limite será estável, se  $\Phi'(K_0) < 0$ , e instável, se  $\Phi'(K_0) > 0$ .

## 1.2 Principais Resultados

Seguindo a linha dos métodos de Poincaré e van der Pol, o objetivo deste trabalho é estudar a continuação de órbitas periódicas em uma família a um parâmetro de equações diferenciais ordinárias em  $\mathbb{R}^n$  da forma

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2 + \varepsilon g_1(x_1, \dots, x_n), \\ x'_2 = x_1 + \varepsilon g_2(x_1, \dots, x_n), \\ x'_3 = \varepsilon g_3(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x'_n = \varepsilon g_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

com  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  um parâmetro e  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

Por continuação entende-se aquelas órbitas periódicas que persistem, após a perturbação, para um valor do parâmetro  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, visto que, excetuando um único ponto de equilíbrio, no caso  $n = 2$ , ou os pontos de equilíbrio em um subespaço do  $\mathbb{R}^n$  de dimensão  $n - 2$ , para  $n \geq 3$ , todas as soluções são periódicas de período  $2\pi$  quando  $\varepsilon = 0$ .

Será mostrado que as órbitas periódicas que persistem estão associadas com os zeros simples da função integral

$$\xi \mapsto \mathcal{F}(\xi) = \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} g_1(\Psi(\xi, s)) \cos s + g_2(\Psi(\xi, s)) \operatorname{sen} s \, ds \\ \int_0^{2\pi} g_3(\Psi(\xi, s)) \, ds \\ \vdots \\ \int_0^{2\pi} g_n(\Psi(\xi, s)) \, ds \end{pmatrix},$$

com  $\Psi$  dada por

$$\Psi(\xi, t) = (\xi_1 \cos t, \xi_1 \operatorname{sen} t, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}), \quad t \in [0, 2\pi],$$

e  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\xi_1 > 0$ .

Dentre as aplicações feitas estão o estudo da equação de van der Pol, o número de ciclos limites no retrato de fase dos sistemas planares

$$\begin{cases} x' = y - \varepsilon(a_1x + \dots + a_nx^n), \\ y' = -x, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -y - \varepsilon \operatorname{sen} x, \\ y' = x, \end{cases}$$

e também o estudo do sistema de Michelson

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = c^2 - y - x^2/2, \end{cases}$$

segundo [15].

### 1.3 Revisão Bibliográfica

Como o objetivo aqui é estudar famílias a um parâmetro de equações diferenciais ordinárias, os principais conceitos e teoremas podem ser encontrados em [5] e em [22] ou [23]. Em particular, no Capítulo 5 de [5] encontram-se diversas teorias de *Pertubação Regular* para equações diferenciais ordinárias no plano, uma *Teoria de Continuação de Órbitas Periódicas em  $\mathbb{R}^2$* , bem como a aplicação associada com a equação de van der Pol. Ainda no contexto em  $\mathbb{R}^2$ , a aplicação em um sistema do tipo Liénard foi retirada de [13] e o resultado associado com um sistema planar com um número contável de ciclos limites foi adaptado da Proposição 3 de [14].

A extensão do método de continuação de órbitas periódicas proposto em [5] para o  $\mathbb{R}^n$  foi realizado sem uma referência específica. Porém, a aplicação do método ao sistema de Michelson foi feita tendo por base o artigo [15] e também o material [13]. Mais informações sobre o sistema de Michelson foram extraídas do artigo original de Michelson [16] e a modelagem de [24].

## 1.4 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está estruturada da seguinte maneira. No Capítulo 2 faremos uma introdução sobre alguns conceitos básicos da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias. No Capítulo 3, iremos estudar uma teoria de continuação de órbitas periódicas em equações diferenciais no plano, estudaremos a equação de van der Pol, um sistema do tipo Liénard e também um sistema planar com um número contável de ciclos limites. Em seguida, mostraremos no Capítulo 4 que parte da teoria é válida em  $\mathbb{R}^n$  e faremos algumas considerações em  $\mathbb{R}^3$ .

No Capítulo 5, faremos uma aplicação da teoria de continuação de órbitas periódicas ao sistema de Michelson, um caso particular em  $\mathbb{R}^3$ . Veremos ainda o contexto histórico e como obter o modelo do sistema de Michelson, uma análise linear de tal sistema será feita, além de um estudo sobre ciclos limites no retrato de fase do sistema de Michelson. Em Conclusões há algumas reflexões obtidas com a elaboração deste trabalho, bem como sugestões de trabalhos futuros sobre os resultados desta dissertação.

# Capítulo 2

## Fundamentos da Teoria Qualitativa

Veremos neste presente capítulo uma revisão básica de alguns dos principais resultados da teoria matemática necessária para trabalharmos com o tema principal a ser estudado nesta dissertação. Para tanto iremos considerar as referências bibliográficas [7], [22] e [5] que é também a referência básica para a teoria de continuação empregada neste trabalho.

### 2.1 Campos Vetoriais e Fluxos

Seja  $\Lambda$  um conjunto aberto do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Um *campo vetorial* de classe  $\mathcal{C}^r$ , com  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ , em  $\Lambda$  é uma aplicação  $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^r$ . Isto significa que as derivadas parciais até a ordem  $r$  de  $f$ , se  $r \geq 1$ , ou todas, se  $r = \infty$ , existem e são contínuas em  $\Lambda$ .

Ao campo vetorial  $f$  iremos associar a seguinte equação diferencial ordinária

$$x' = \frac{dx}{dt} = f(x), \quad (2.1)$$

e, reciprocamente, à equação diferencial (2.1) associamos o campo vetorial  $f$ . A equação diferencial (2.1) é também chamada de equação diferencial *autônoma* devido ao fato de que o campo vetorial  $f$  não depende da variável  $t$ .

As soluções de (2.1), ou seja, as aplicações diferenciáveis definidas da seguinte maneira  $\varphi : I \rightarrow \Lambda$ , sendo que  $I$  é um intervalo em  $\mathbb{R}$ , e tais que

$$\varphi'(t) = \frac{d\varphi}{dt}(t) = f(\varphi(t)), \quad \forall t \in I, \quad (2.2)$$

são chamadas *trajetórias* ou *curvas integrais* do campo vetorial  $f$ . Observando (2.1) e (2.2) temos que  $\varphi$  é uma curva integral de  $f$  se, e somente se, seu vetor velocidade  $\varphi'(t)$  em  $t$  coincide com o valor do campo vetorial  $f$  em  $\varphi(t)$ , conforme podemos observar geometricamente na Figura 2.1.

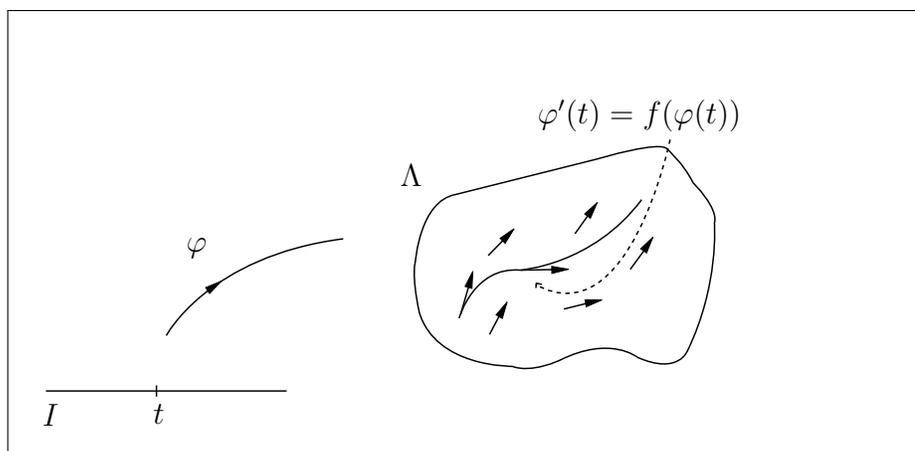


Figura 2.1: Curvas integrais do campo vetorial  $f$ .

Podemos classificar os pontos em  $\Lambda$  em regulares e singulares.

**Definição 2.1.1** (Ponto Singular e Regular). *Um ponto  $p \in \Lambda$  é chamado de ponto singular de  $f$  ou ponto de equilíbrio sempre que  $f(p) = 0$ , mas quando  $f(p) \neq 0$ , então  $p \in \Lambda$  será chamado de ponto regular de  $f$ .*

Quando  $p$  é um ponto singular, então  $\varphi(t) = p$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , é solução de (2.1). Reciprocamente, se  $\varphi(t) = p$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , é solução de (2.1), então  $p$  é ponto singular de  $f$ , pois

$$0 = \varphi'(t) = f(\varphi(t)) = f(p).$$

Em outras palavras, os pontos singulares são soluções constantes de (2.1).

**Definição 2.1.2** (Soluções Máximas). *Uma solução  $\varphi : I \rightarrow \Lambda$  chama-se máxima, se para toda outra solução  $\sigma : J \rightarrow \Lambda$  tal que  $I \subset J$  e  $\varphi = \sigma|_I$  se tenha  $I = J$  e, conseqüentemente,  $\varphi = \sigma$ . Neste caso,  $I$  chama-se intervalo máximo ou maximal.*

O próximo teorema trata da questão da existência e unicidade da solução máxima

$$\begin{aligned}\varphi_x : I_x &\longrightarrow \Lambda \\ t &\longmapsto \varphi_x(t),\end{aligned}$$

do Problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x, \end{cases} \quad (2.3)$$

com  $0 \in I_x$  e  $x \in \Lambda$ . A notação  $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$  significa que os extremos do intervalo maximal dependem do ponto  $x \in \Lambda$ .

**Teorema 2.1.1.** *Seja  $f$  um campo vetorial de classe  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ .*

- a) Existência e unicidade de soluções máximas. *Para cada  $x \in \Lambda$  existe um intervalo aberto  $I_x$  no qual está definida a única solução máxima  $\varphi_x$  de (2.3) tal que  $\varphi_x(0) = x$ ;*
- b) Propriedade de grupo. *Se  $y = \varphi_x(t)$  e  $t \in I_x$ , então  $I_y = I_x - t = \{r - t : r \in I_x\}$  e  $\varphi_y(0) = y$  e  $\varphi_y(t) = \varphi_x(t + s)$  para todo  $t \in I_y$ ;*
- c) Regularidade com relação às condições iniciais. *O conjunto  $\Omega = \{(t, x) : t \in I_x, x \in \Lambda\}$  é aberto em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e a aplicação  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dada por  $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ , é de classe  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ , em  $\Omega$ .*

**Demonstração.** Consulte a referência [23] na Seção 2 do Capítulo 3. ■

**Definição 2.1.3.** *A aplicação  $\varphi : \Omega \rightarrow \Lambda$  chama-se fluxo gerado por  $f$ .*

E podemos agora notar que as condições da definição de um fluxo de classe  $\mathcal{C}^r$  são satisfeitas, isto é,

$$\varphi(0, x) = x \quad \text{e} \quad \varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x)),$$

sendo que a última condição é válida apenas nas condições do item (b) do Teorema 2.1.1.

Claramente se  $I_x = \mathbb{R}$  para todo  $x \in \Lambda$ , o fluxo gerado por  $f$  é um fluxo de classe  $\mathcal{C}^r$  em  $\Omega$ . Porém, muitas vezes  $I_x \neq \mathbb{R}$ . Portanto, o fluxo gerado por  $f$  é chamado com frequência de *fluxo local*. E assim é válida a imagem de que os pontos de  $\Lambda$  fluem ao longo das trajetórias de  $f$  do mesmo modo que um fluido desloca-se ao longo de suas linhas de corrente.

## 2.2 Retrato de Fase de um Campo Vetorial

**Definição 2.2.1.** O conjunto  $\mathcal{O}(p) = \{\varphi(t, p) : t \in I_p\}$ , isto é, a imagem da curva integral de  $f$  pelo ponto  $p$ , chama-se *órbita de  $f$  pelo ponto  $p$* .

Observe que

$$q \in \mathcal{O}(p) \Leftrightarrow \mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(q),$$

pois se  $q \in \mathcal{O}(p)$ , temos

$$q = \varphi(t_1, p) \text{ e } \varphi(t, q) = \varphi(t, \varphi(t_1, p)) = \varphi(t + t_1, p) \text{ e } I_p - t_1 = I_q.$$

Em outros termos, duas órbitas de  $f$  coincidem ou são disjuntas. Isto é,  $\Lambda$  fica decomposto numa união disjunta de curvas diferenciáveis, podendo cada uma ser:

1. Imagem biunívoca de um intervalo de  $\mathbb{R}$ ;
2. Um ponto;
3. Homeomorfa a um círculo.

No segundo caso  $\mathcal{O}(p) = \{p\}$ , a órbita chama-se *órbita singular*, no terceiro caso a órbita chama-se *fechada* ou *periódica*. Mais detalhes poderão ser encontrados na referência [23] nas páginas 99 e 100, que em termos da solução máxima  $\varphi_x$  em  $I_x$  de (2.3), os itens acima correspondem às seguintes alternativas:

1.  $\varphi_x$  é injetora;
2.  $I_x = \mathbb{R}$  e  $\varphi_x$  é constante;
3.  $I_x = \mathbb{R}$  e  $\varphi_x$  é periódica, isto é, existe um  $c > 0$  tal que  $\varphi_x(t + c) = \varphi_x(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $\varphi_x(t_1) \neq \varphi_x(t_2)$  se  $|t_1 - t_2| < c$ .

**Definição 2.2.2** (Retrato de Fase). O conjunto aberto  $\Lambda$ , munido da decomposição em órbitas do campo vetorial  $f$ , chama-se *retrato de fase de  $f$* . As órbitas são orientadas no sentido das curvas integrais do campo vetorial  $f$ . Os pontos singulares ou de equilíbrio são munidos da orientação trivial.

## 2.3 Sistemas Lineares

Considere a seguinte equação diferencial ordinária

$$x' = A(t)x, \quad (2.4)$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A(t) = (a_{i,j}(t))$  uma matriz  $n \times n$  em que as entradas  $a_{i,j} : I \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas em  $I \subset \mathbb{R}$ , para  $i, j = 1, \dots, n$ . A equação (2.4) é chamada de *equação diferencial ordinária linear (homogênea)*.

Pelo *Teorema de Existência e Unicidade de Soluções*, qualquer Problema de Cauchy envolvendo (2.4) possui solução máxima única em  $I$ . A próxima definição também trata das soluções de (2.4).

**Definição 2.3.1** (Matriz Fundamental). *Uma matriz  $\phi = \phi(t)$ ,  $t \in I$ , de ordem  $n \times n$  cujas colunas formam uma base para o espaço de soluções de (2.4) chama-se matriz fundamental de (2.4).*

O próximo teorema trata da equação diferencial ordinária não homogênea

$$x' = A(t)x + b(t),$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $b(t) = (b_i(t))$  uma matriz  $n \times 1$  tal que  $b_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua em  $I$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

**Teorema 2.3.1** (Variação de Parâmetros). *Se  $\phi = \phi(t)$ ,  $t \in I$ , é uma matriz fundamental de (2.4), então a solução  $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0)$ ,  $t \in I$ , de*

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

com  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ , é dada por

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \phi(t) \left( \phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)b(s) \, ds \right).$$

Em particular,  $\varphi(t, t_0, x_0) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0$ ,  $t \in I$ , no caso homogêneo.

**Demonstração.** Consulte a referência [23], Capítulo 2, Seção 2. ■

No caso em que a matriz  $A$  é constante, a função  $\phi$  dada por  $\phi(t) = e^{tA}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , é matriz fundamental de  $x' = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , satisfazendo  $\phi(0) = E$ , sendo

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

e  $E$  a matriz identidade  $n \times n$ .

## 2.4 Teorema do Fluxo Tubular

Na presente seção iremos definir *seção transversal* e enunciar o *Teorema do Fluxo Tubular*, conceitos matemáticos importantes em nossos estudos da teoria de continuação.

**Definição 2.4.1** (Seção Transversal Local). *Sejam  $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ , no aberto  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ . Uma aplicação diferenciável  $\sigma : U \rightarrow \Lambda$  de classe  $C^r$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$  chama-se seção transversal local de  $f$  (de classe  $C^r$ ) quando, para todo  $u \in U$ ,  $D\sigma(u)(\mathbb{R}^{n-1})$  e  $f(\sigma(u))$  geram o espaço  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $\Sigma = \sigma(U)$  munido da topologia induzida. Se  $\sigma : U \rightarrow \Sigma$  for um homeomorfismo, é usual dizermos que  $\Sigma$  é uma seção transversal de  $f$ .*

**Teorema 2.4.1** (Teorema do Fluxo Tubular). *Sejam  $p$  um ponto regular de  $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ , e  $\sigma : U \rightarrow \Sigma$  uma seção transversal local de  $f$  de classe  $C^r$  com  $0 \in U$  e  $\sigma(0) = p$ . Então, existem uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\Lambda$  e um difeomorfismo  $h : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$  de classe  $C^r$ , com  $\varepsilon > 0$  e  $B$  uma bola aberta em  $\mathbb{R}^{n-1}$  de centro na origem  $0 = \sigma^{-1}(p)$ , tais que:*

1.  $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$ ;
2.  $h$  é uma  $C^r$ -conjugação entre  $f|_V$  e o campo constante  $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por  $Y = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ .

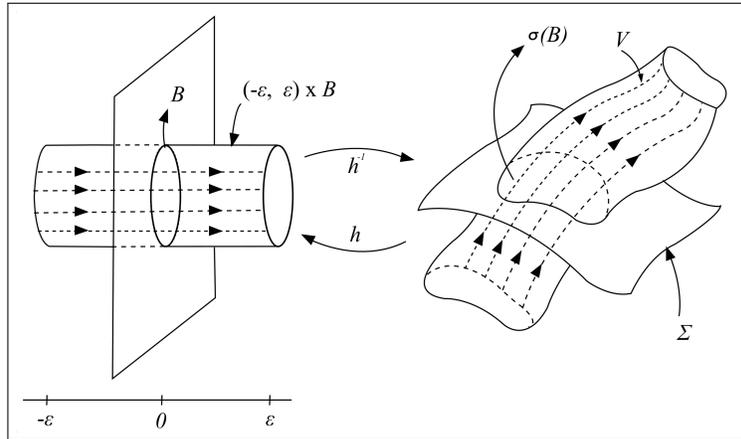


Figura 2.2: O fluxo tubular.

**Corolário 2.4.1.** *Seja  $f$  um campo vetorial de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ , e  $\Sigma$  uma seção transversal de  $f$ , conforme o teorema anterior. Para todo ponto  $p \in \Sigma$  existem  $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ , uma vizinhança  $V \subset \Lambda$  de  $p$  e uma função  $\tau : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)$  de classe  $C^r$ , tais que  $\tau(V \cap \Sigma) = \{0\}$  e*

- a) *para todo  $q \in V$ , a curva integral  $\varphi(t, q)$  de  $f|_V$  é definida e biunívoca em  $J_q = (-\varepsilon + r(q), \varepsilon + r(q))$ ;*
- b)  *$\xi(q) = \varphi(\tau(q), q) \in \Sigma$  é o único ponto no qual  $\varphi(t, q)|_{J_q}$  intercepta  $\Sigma$ . Em particular  $q \in \Sigma \cap V$  se, e somente se,  $\tau(q) = 0$ .*

## 2.5 Pontos Singulares Hiperbólicos e Estabilidade

**Definição 2.5.1** (Ponto Singular Hiperbólico). *Um ponto singular  $p$  de um campo vetorial  $f : \Lambda \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^r$  no aberto  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ , sendo  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ , chama-se hiperbólico, se todos os autovalores da matriz jacobiana de  $f$  em  $p$ , denotada por  $Df(p)$ , têm partes reais não nulas, sendo*

$$Df(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}.$$

**Definição 2.5.2.** Dados  $f : \Lambda \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $\mathcal{C}^r$  no aberto  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ , com  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ , e  $p \in \Lambda$  um ponto singular de  $f$ , temos que:

- a)  $p$  é estável, se dado  $\varepsilon > 0$  qualquer, existe  $\Lambda > 0$ , tal que  $\|x - p\| < \Lambda$  implica  $\|\varphi_x(t) - p\| < \varepsilon$ , para todo  $t \geq 0$ ;
- b)  $p$  é instável, se não for estável;
- c)  $p$  é assintoticamente estável, se  $p$  for estável e, além disso, existe  $\Lambda > 0$ , tal que  $\|x - p\| < \Lambda$  implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_x(t) = p$ ,

sendo  $\varphi_x$  solução de (2.3) e  $\|\cdot\|$  a norma usual em  $\mathbb{R}^n$ .

Podemos ainda compreender da seguinte maneira: um ponto singular  $p$  de um sistema autônomo é *estável*, quando para toda vizinhança  $U \subset \Lambda$  de  $p$  existe uma vizinhança  $U_1 \subset U$  de  $p$  tal que toda solução  $\varphi_x$  de (2.3), com  $x \in U_1$ , está definida para todo  $t \geq 0$  e  $\varphi_x(t) \in U$  para todo  $t \geq 0$ . Se além disto,  $\varphi_x(t) \rightarrow p$  quando  $t \rightarrow \infty$ , ajustando  $U_1$  se necessário, então  $p$  é *assintoticamente estável*.

O teorema *Teorema de Hartman-Grobman* garante que o comportamento numa vizinhança de um ponto singular hiperbólico é sempre dado pelo comportamento da parte linear. O enunciado e a demonstração deste teorema é dada em [22], Capítulo 9, página 294. Assim, para os pontos singulares hiperbólicos há o seguinte resultado [7].

**Teorema 2.5.1.** *Seja  $f : \Lambda \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $\mathcal{C}^r$  no aberto  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ , com  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ , e  $p \in \Lambda$  um ponto singular hiperbólico de  $f$ . Se todos os autovalores de  $Df(p)$  têm partes reais negativas, então  $p$  é um ponto singular assintoticamente estável e se pelo menos um autovalor de  $Df(p)$  tem parte real positiva, então  $p$  é instável.*

## 2.6 Estrutura Local das Órbitas Periódicas

A aplicação de Poincaré associada a uma órbita fechada ou periódica  $\gamma$  de um campo vetorial  $f$  é um difeomorfismo  $P$ . Esta aplicação descreve o comportamento do campo vetorial em uma vizinhança de  $\gamma$ .

Seja, então,  $\gamma = \{\varphi(t, p), 0 \leq t \leq T\}$  uma órbita periódica de período  $T > 0$  de um campo vetorial  $f$  de classe  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ , definido no aberto  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  e seja  $\Sigma$  uma seção transversal a  $f$  em  $p$ . Em virtude da continuidade do fluxo  $\varphi$  de  $f$ , para todo  $q \in \Sigma$  próximo de  $p$ , a trajetória  $\varphi = \varphi(t, q)$ , permanece próxima a  $\gamma$ , com  $t$  em um intervalo compacto pré-fixado, por exemplo,  $[0, 2T]$ . Define-se a *aplicação de primeiro retorno* ou *aplicação de Poincaré* por

$$P : \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma$$

$$q \longmapsto P(q)$$

com  $\Sigma_0 \subset \Sigma$  o domínio de  $P$ . Note que  $P(q)$  é o primeiro ponto no qual a órbita de  $f$  que passa por  $q$  intercepta  $\Sigma$ .

É possível mostrar que  $P : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  é um difeomorfismo de classe  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ , sobre sua imagem  $\Sigma_1 = \pi(\Sigma_0)$ . Utilizando o *Teorema do Fluxo Tubular* e seu Corolário 2.4.1 podemos dar precisão a definição de  $P$ . Seja  $V$  uma vizinhança de  $p$  dada pelo Corolário 2.4.1. Como  $\varphi(t, p) = p$ , existe uma vizinhança  $\Sigma_0$  de  $p$  em  $\Sigma$  tal que  $\varphi(T, q) \in V$  para todo  $q \in \Sigma_0$ . Seja  $\xi : V \rightarrow \Sigma$  a aplicação definida no Corolário 2.4.1. Temos  $P : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  dada por  $P(q) = \xi(\varphi(T, q))$ . Outra expressão para  $P$  é  $P(q) = \varphi(T + \tau(\varphi(T, q)), q)$ , com  $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$  o tempo  $\tau(x)$  que leva a órbita por  $x$  em  $V$  para interceptar  $\Sigma$ . Pelo Corolário 2.4.1,  $\tau$  é de classe  $\mathcal{C}^r$ .

Destas expressões, resulta que  $P$  é da mesma classe de diferenciabilidade do campo vetorial  $f$ . A aplicação inversa  $P^{-1} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$  de  $P$  é definida tomando-se o campo vetorial  $-f$ .

A aplicação de Poincaré é utilizada para estudar os ciclos limites no retrato de fase do campo vetorial  $f$ .

**Definição 2.6.1.** *Seja  $\Lambda$  um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$  e  $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ , em  $\Lambda$ . Uma órbita periódica  $\gamma$  de  $f$  chama-se ciclo limite, se existe uma vizinhança  $V$  de  $\gamma$  tal que  $\gamma$  é a única órbita periódica de  $f$  contida em  $V$ .*

No plano, a relação com a aplicação de Poincaré vai ser a seguinte:  $\gamma$  será um ciclo limite de  $f$  por  $p$  se, e somente se,  $p$  é um ponto fixo isolado de  $P$ . Ainda,

1.  $\gamma$  é estável se, e somente se,  $|P(x) - p| < |x - p|$ , para todo  $x \neq p$  próximo de  $p$ ;

2.  $\gamma$  é instável se, e somente se,  $|P(x) - p| > |x - p|$ , para todo  $x \neq p$  próximo de  $p$ ;

No caso em que o campo vetorial  $f$  é  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ , se  $P'(x) < 1$ , podemos aplicar o *Teorema do Valor Médio* e concluir que  $\gamma$  é estável. Por outro lado,  $\gamma$  é instável se  $P'(x) > 1$ .

## 2.7 Perturbação de Campos de Vetores

Todas as definições e teoremas apresentados nas seções anteriores deste capítulo podem ser adaptados para a família a um parâmetro de equações diferenciais ordinárias

$$x' = F(x, \varepsilon), \quad (2.5)$$

com  $F : \Lambda \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ , no aberto  $\Lambda \times J \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  e  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $\forall (x, 0) \in \Lambda \times J$ .

**Definição 2.7.1.** *A equação diferencial ordinária (2.5) é chamada de perturbação de (2.1) ou, ainda, de sistema perturbado.*

O próximo teorema, associado com a dependência diferenciável das soluções de (2.5) com respeito aos parâmetros e condições iniciais, pode ser encontrado em [22] e desempenhará um papel importante neste trabalho.

**Teorema 2.7.1** (Dependência Diferenciável). *Seja*

$$\begin{aligned} F : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, \varepsilon) &\longmapsto F(x, \varepsilon) \end{aligned}$$

*contínua no aberto  $\Omega = \Lambda \times J$ , com derivadas parciais contínuas de ordem menor ou igual a  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , relativas às coordenadas de  $(x, \varepsilon)$ . Então, para  $\varepsilon$  fixo,*

$$\begin{cases} x' = F(x, \varepsilon), \\ x(0) = x, \end{cases}$$

*tem uma única solução  $\varphi = \varphi(t, x, \varepsilon)$ . A solução  $\varphi$  está definida no aberto*

$$D = \{(t, x, \varepsilon) : (x, \varepsilon) \in \Omega, \omega_-(x, \varepsilon) < t < \omega_+(x, \varepsilon)\}$$

de  $\mathbb{R} \times \Omega$ , no qual admite todas as derivadas parciais da forma

$$\frac{\partial^{i+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n+\beta_1+\dots+\beta_p} \varphi}{\partial t^i \partial (x_0^1)^{\alpha_1} \partial (x_0^2)^{\alpha_2} \dots \partial (\varepsilon^1)^{\beta_1} \dots \partial (\varepsilon^p)^{\beta_p}}$$

com  $\Sigma \alpha_j + \Sigma \beta_j \leq m$ ,  $i \leq 1$ , as quais são contínuas.

**Demonstração.** A demonstração pode ser consultada na Seção 3 do Capítulo 2 da referência [22]. ■

Nosso objetivo, a partir do próximo capítulo, é estudar um caso particular de (2.5), quando

$$F(x, \varepsilon) = Ax + \varepsilon G(x), \quad \forall (x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

sendo  $A$  uma matriz  $n \times n$  e  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , um campo vetorial de classe  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ , em  $\mathbb{R}^n$ .

# Capítulo 3

## Continuação de Soluções Periódicas em $\mathbb{R}^2$

Segundo Chicone [5], tem sido um problema fundamental determinar a solução de problemas que envolvem um modelo de sistema físico com uma força aplicada. Neste capítulo algumas idéias matemáticas introduzidas poderão ser utilizadas para trabalharmos com este tipo de problema. Um caso clássico a ser considerado consiste em um sistema físico, que pode ser interpretado como um oscilador, que é modelado por uma equação diferencial que possui soluções periódicas e a força aplicada é modelada como uma *pequena* perturbação. Respostas parciais a várias questões que envolvem este tipo de problema serão dadas através deste trabalho.

Por exemplo, *são as soluções periódicas perturbadas estáveis? Podem as soluções periódicas perturbadas serem aproximadas por fórmulas analíticas?* Embora iremos restringir a maior parte da nossa discussão para sistemas planares, o caso de valor mais prático, muitos dos resultados da teoria aqui apresentada poderão ser facilmente generalizados para sistemas em  $\mathbb{R}^n$ , como feito no Capítulo 4.

A teoria de continuação de soluções periódicas tem longa história na ciência e matemática aplicada, mas ainda é uma área ativa de pesquisa matemática. Assim, há uma extensa literatura matemática e científica sobre este tema. Os interessados no assunto podem iniciar os estudos consultando as obras clássicas [3] e [2] citadas nas referências

deste trabalho.

A seguir faremos uma introdução ao estudo sobre a teoria de continuação de soluções periódicas utilizando como motivação a equação de van der Pol, que pode ser entendida como um caso particular da equação de Liénard, a qual também trabalharemos neste capítulo.

### 3.1 Motivação: A Equação de van der Pol

Um modelo matemático importante na história da teoria de continuação de soluções periódicas é conhecido como *equação de van der Pol*

$$x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + \omega^2 x = a \sin(\Omega t), \quad (3.1)$$

com as derivadas da função  $x = x(t)$  com respeito ao parâmetro  $t$ , chamado de tempo,  $\varepsilon$ ,  $a$ ,  $\omega$  e  $\Omega$  parâmetros reais. Após esta equação diferencial ordinária de segunda ordem, não linear e não homogênea ser introduzida por Lord Rayleigh em 1883, a mesma tem sido sugerida como um modelo para diversos fenômenos físicos distintos. Por exemplo, Balthasar van der Pol investigou tais fenômenos mais amplamente quando estudou a equação diferencial (3.1) como um modelo da tensão em um circuito elétrico com triodo em 1926. Em seguida, apenas dois anos depois, van der Pol e Johannes van der Mark propuseram a equação (3.1) como um modelo para o batimento cardíaco humano.

Para introdução, vamos usar a equação diferencial de van der Pol para ilustrar algumas das idéias que serão exploradas com mais detalhes mais adiante neste capítulo. Primeiro, observemos algumas das características da equação diferencial (3.1). Se  $a = 0$  e  $\varepsilon = 0$ , então a equação diferencial (3.1) é uma equação diferencial linear da forma  $x'' + \omega^2 x = 0$ , conhecida como equação da mola, já que é modelo de um sistema com força restauradora dada pela *Lei de Hooke*. Esta equação é muitas vezes referida também como *oscilador harmônico*.

O termo  $a \sin(\Omega t)$  representa uma *força externa* periódica com amplitude  $a > 0$ , período  $2\pi/\Omega$  e frequência angular  $\Omega > 0$ . O termo  $\varepsilon(x^2 - 1)x'$  pode ser visto como uma representação de um *amortecimento* não linear. O amortecimento depende do estado

$(x, x')$  do sistema, sendo que  $x$  representa posição e  $x'$  representa a velocidade. De fato, a energia da mola é dada por

$$E = \frac{1}{2}(x')^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2,$$

e tem derivada no tempo

$$E' = ax'\text{sen}(\Omega t) - \varepsilon(x^2 - 1)(x')^2.$$

Assim, uma força externa e o amortecimento não linear causam variações de energia. O sistema perde energia, devido ao amortecimento, quando  $|x| > 1$  e absorve quando  $|x| < 1$ . Nosso estudo será motivado pela seguinte questão básica: *Se o estado atual do sistema é conhecido, o que é que o modelo pode prever sobre seus estados futuros?*

Neste trabalho, iremos considerar os sistemas não forçados e fracamente amortecidos, reescrevendo a equação de van der Pol da seguinte maneira

$$x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0. \quad (3.2)$$

A equação diferencial correspondente quando  $\varepsilon = 0$ , ou seja, a equação não perturbada, é  $x'' + x = 0$  ou, equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dada uma condição inicial  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , a equação diferencial linear anterior possui solução explícita  $X$  da forma

$$X(t) = (x(t), y(t)) = x_0 \begin{pmatrix} \cos t \\ \text{sen } t \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} -\text{sen } t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, todas as soluções do sistema não perturbado, exceto a solução de equilíbrio, isto é, a origem  $(0, 0)$ , são periódicas de período  $2\pi$ . Portanto, não há nenhum problema prever os estados futuros do sistema não perturbado.

*O que acontece quando  $\varepsilon \neq 0$ ? Será que a equação (3.2) possuirá soluções periódicas? Se isto acontecer, então poderemos encontrar uma fórmula que representa a solução? Ou, se isto não for possível, como poderemos aproximar a solução periódica?* Abordaremos estas questões, na próxima seção, utilizando a interpretação geométrica da equação diferencial como um sistema no plano de fase, também denominado retrato de fase.

## 3.2 Teoria de Continuação em $\mathbb{R}^2$

Vamos trabalhar uma teoria de continuação de órbitas periódicas em  $\mathbb{R}^2$  e em seguida utilizá-la para tratar o sistema de van der Pol na seção seguinte.

Considere o sistema

$$x' = F(x, \varepsilon) = Ax + \varepsilon G(x), \quad (3.3)$$

com  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

e  $G \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ,  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ , um campo vetorial dado por

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto G(x) = (g_1(x), g_2(x)). \end{aligned}$$

Estamos interessados em analisar (3.3) quando  $\varepsilon \geq 0$ . O caso no qual  $\varepsilon \leq 0$  pode ser tratado de modo análogo.

Na realidade, a equação diferencial (3.3) é uma família a um parâmetro  $\varepsilon$  de equações diferenciais e pode ser reescrita de maneira equivalente como

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2 + \varepsilon g_1(x_1, x_2), \\ x'_2 = x_1 + \varepsilon g_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Quando  $\varepsilon = 0$ , o sistema (3.3) é chamado de *sistema não perturbado*.

Denote por

$$\begin{aligned} x : I \times (0, \infty) \times [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, \xi, \varepsilon) &\longmapsto x(t, \xi, \varepsilon) = (x_1(t, \xi, \varepsilon), x_2(t, \xi, \varepsilon)), \end{aligned} \quad (3.5)$$

a solução do *Problema de Cauchy*.

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2 + \varepsilon g_1(x_1, x_2), \\ x'_2 = x_1 + \varepsilon g_2(x_1, x_2), \\ x_1(0) = \xi, \\ x_2(0) = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

sendo  $I \subset \mathbb{R}$  o intervalo maximal (dependendo de  $\xi$  e  $\varepsilon$ ). Note que para  $\varepsilon = 0$  a solução  $x$  de

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = (\xi, 0), \end{cases}$$

é  $x(t, \xi, 0) = \phi(t)x_0$ ,  $t \in I = \mathbb{R}$ , com

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\text{sen } t \\ \text{sen } t & \cos t \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

a *matriz fundamental*, satisfazendo  $\phi(0) = E$ . Logo,

$$x(t, \xi, 0) = (x_1(t, \xi, 0), x_2(t, \xi, 0)) = (\xi \cos t, \xi \text{sen } t), \quad \forall t \in I = \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

O retrato de fase, neste caso, será um centro linear na origem de acordo com a Figura 3.1.

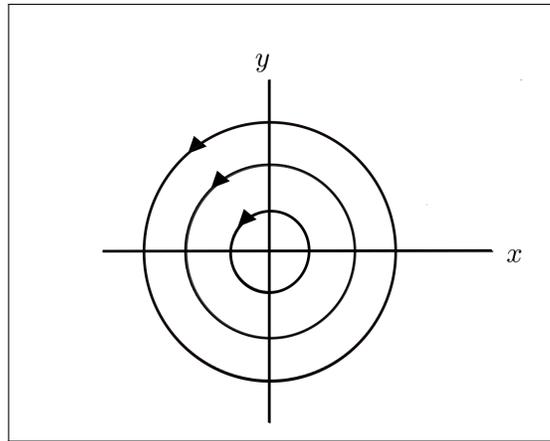


Figura 3.1: Equilíbrio do tipo centro linear na origem. Excetuando a origem, para cada  $\xi > 0$ , as soluções são periódicas de período  $2\pi$ .

Considere agora a função

$$u \in (0, \infty) \mapsto \sigma(u) = (u, 0).$$

Mostraremos que para  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno, existe  $c$  tal que

$$\Sigma = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in (0, c)\},$$

é uma seção transversal do campo vetorial  $F$  associado com (3.3), conforme Definição 2.4.1, podendo ocorrer  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$  ou  $c = \infty$ .

Temos que

$$g(u, \varepsilon) = \det (F(\sigma(u), \varepsilon) | D\sigma(u)) = \det \begin{pmatrix} \varepsilon g_1(u, 0) & 1 \\ u + \varepsilon g_2(u, 0) & 0 \end{pmatrix} = -u - \varepsilon g_2(u, 0),$$

com  $F$  tal como em (3.3) e  $D\sigma(u) = \sigma'(u) = (1, 0)$ . Para  $\varepsilon = 0$ ,  $g(u, 0) \neq 0$ , para todo  $u > 0$ , e, portanto,  $\Sigma = \sigma(0, \infty)$ . Assim, pela continuidade do campo vetorial  $F$  e para  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno, existe  $c$  tal que  $\Sigma$  é seção transversal do campo vetorial  $F$ . Se  $g^{-1}(0) \cap \sigma(0, \infty) \neq \emptyset$ , então  $c \in \mathbb{R}$  e  $c > 0$ . Caso, contrário, se  $g^{-1}(0) \cap \sigma(0, \infty) = \emptyset$ , então  $c = \infty$ .

O próximo lema, adaptado de [5], será utilizado para mostrar que é possível definir uma aplicação de primeiro retorno em  $\Sigma$ .

**Lema 3.2.1.** *A solução  $x$  dada em (3.5) do Problema de Cauchy (3.6) satisfaz*

$$x(t, \xi, \varepsilon) = \phi(t)x_0 + \varepsilon \int_0^t \phi(t)\phi^{-1}(s)G(x(s, \xi, \varepsilon)) ds, \quad (t, \xi, \varepsilon) \in I \times (0, \infty) \times [0, \infty),$$

com  $\phi$  a matriz fundamental (3.7) e  $x_0 = (\xi, 0)$ .

**Demonstração.** Defina uma nova variável  $y$  por  $y(t, \xi, \varepsilon) = \phi^{-1}(t)x(t, \xi, \varepsilon)$ , sendo  $x = x(t, \xi, \varepsilon)$ ,  $(t, \xi, \varepsilon) \in I \times (0, \infty) \times [0, \infty)$ , a solução de (3.6). Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t, \xi, \varepsilon) &= \phi'(t)y(t, \xi, \varepsilon) + \phi(t)\frac{d}{dt}y(t, \xi, \varepsilon) \\ Ax(t, \xi, \varepsilon) + \varepsilon G(x(t, \xi, \varepsilon)) &= A\phi(t)y(t, \xi, \varepsilon) + \phi(t)\frac{d}{dt}y(t, \xi, \varepsilon) \\ Ax(t, \xi, \varepsilon) + \varepsilon G(x(t, \xi, \varepsilon)) &= Ax(t, \xi, \varepsilon) + \phi(t)\frac{d}{dt}y(t, \xi, \varepsilon), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}y(t, \xi, \varepsilon) = \varepsilon\phi^{-1}(t)G(x(t, \xi, \varepsilon)).$$

Integrando a equação anterior na variável  $s$ , de  $s = 0$  até  $s = t$ , e sabendo que  $y(0, \xi, \varepsilon) = x_0$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{ds}y(s, \xi, \varepsilon) ds &= \varepsilon \int_0^t \phi^{-1}(s)G(x(s, \xi, \varepsilon)) ds \\ \phi^{-1}(t)x(t, \xi, \varepsilon) - x_0 &= \varepsilon \int_0^t \phi^{-1}(s)G(x(s, \xi, \varepsilon)) ds, \quad (t, \xi, \varepsilon) \in I \times (0, \infty) \times [0, \infty), \end{aligned}$$

terminando a demonstração. ■

Do Lema 3.2.1 temos que

$$x(t, \xi, \varepsilon) = (\xi \cos t, \xi \sin t) + R_x(t, \xi, \varepsilon), \quad (t, \xi, \varepsilon) \in I \times (0, \infty) \times [0, \infty), \quad (3.9)$$

sendo  $R_x$  uma função com desenvolvimento em série de Taylor na variável  $\varepsilon$ , em torno de  $\varepsilon = 0$ , iniciando, pelo menos, no termo de grau 1 e, ainda,  $R_x(t, \xi, 0) \equiv 0$ . Além disto, para  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno,  $[0, T_0] \subset I$ , com  $T_0 \geq 2\pi$ . Assim, ajustando  $c > 0$  se necessário, segue que para cada  $\xi > 0$  e  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno, a solução  $x$  dada em (3.9) está próxima da solução (3.8) do sistema não perturbado que passa por  $(\xi, 0)$ , pelo menos até o primeiro retorno a  $\Sigma$ . A Figura 3.2 ilustra isto.

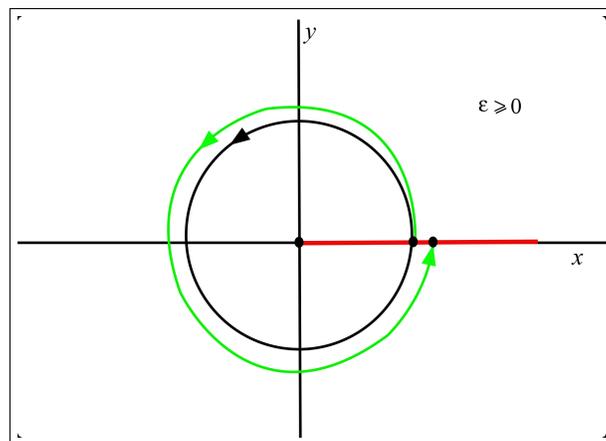


Figura 3.2: A solução  $x$  (linha verde) do sistema perturbado está próxima da solução do sistema não perturbado (linha preta) que passa por  $(\xi, 0)$ .

Portanto,  $\Sigma$  é seção transversal de  $F$  e, sendo  $\Sigma_c = \sigma^{-1}(\Sigma) = (0, c)$ , podemos definir a aplicação de primeiro retorno parametrizada

$$\begin{aligned} P : \Sigma_c \times [0, \varepsilon_0) &\longrightarrow \Sigma_c \\ (\xi, \varepsilon) &\longmapsto P(\xi, \varepsilon) = x_1(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.10)$$

sendo  $\varepsilon_0$  um número real positivo suficientemente pequeno e  $T = T(\xi, \varepsilon) > 0$  o menor tempo tal que  $x(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon) \in \Sigma$ . Tal tempo é solução de  $x_2(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon) = 0$  e por (3.8)

resulta que  $T(\xi, 0) = 2\pi$ . A Figura 3.3 exibe o retrato de fase do sistema não perturbado e a construção da aplicação de Poincaré.

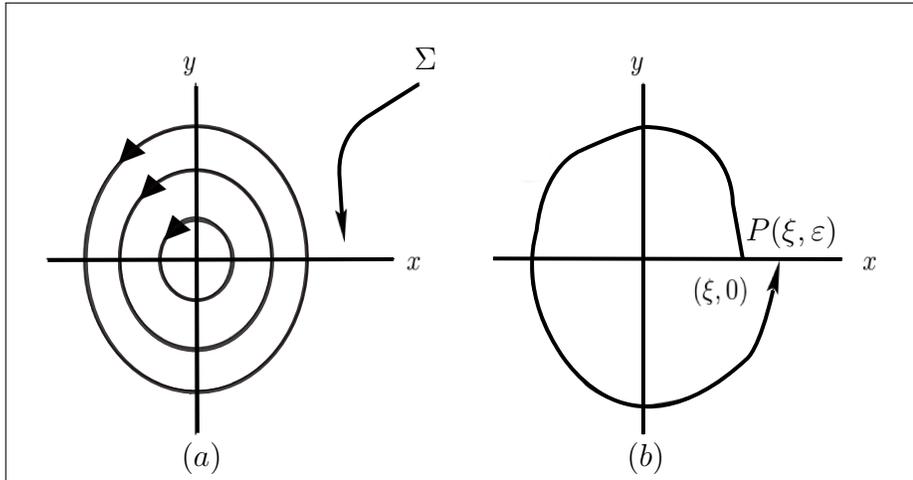


Figura 3.3: (a) Retrato de fase do sistema não perturbado. (b) Construção da aplicação de Poincaré.

**Afirmção 3.2.1.**  $T(\xi, 0) = 2\pi$  e  $P(\xi, 0) = \xi, \forall \xi \in \Sigma_c$ .

**Demonstração.** Para  $\varepsilon = 0$  temos que

$$x(T(\xi, 0), \xi, 0) = (x_1(T(\xi, 0), \xi, 0), x_2(T(\xi, 0), \xi, 0)) = (\xi \cos T(\xi, 0), \xi \sin T(\xi, 0))$$

e note que  $T(\xi, 0) = 2\pi$  é o menor tempo positivo quando a solução completa o primeiro retorno, pois neste ponto as coordenadas da solução são  $(\xi, 0)$  e, conseqüentemente,

$$\xi \sin T(\xi, 0) = 0 \Rightarrow T(\xi, 0) = 2\pi.$$

Seguindo, note que

$$P(\xi, 0) = x_1(T(\xi, 0), \xi, 0) = \xi \cos T(\xi, 0) = \xi \cos 2\pi = \xi,$$

e, portanto, é fácil ver que  $P(\xi, 0) = \xi, \forall \xi \in \Sigma_c$ . ■

Na realidade,  $P$  é uma família a um parâmetro  $\varepsilon$  de aplicações de primeiro retorno parametrizadas. A partir de (3.10) definimos a *função separação*,

$$\begin{aligned} \delta : \Sigma_c \times [0, \varepsilon_0) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\xi, \varepsilon) &\longmapsto \delta(\xi, \varepsilon) = P(\xi, \varepsilon) - \xi. \end{aligned}$$

**Afirmção 3.2.2.**  $\delta(\xi, 0) = 0, \forall \xi \in \Sigma_c.$

**Demonstração.** Para  $\varepsilon = 0$  temos

$$\begin{aligned} \delta(\xi, 0) &= P(\xi, 0) - \xi = x_1(T(\xi, 0), \xi, 0) - \xi = \xi \cos T(\xi, 0) - \xi \\ &= \xi \cos 2\pi - \xi = \xi - \xi = 0. \end{aligned}$$

■

Queremos encontrar uma função  $\beta : [0, \tilde{\varepsilon}_0) \longrightarrow \Sigma_c$  tal que  $\delta(\beta(\varepsilon), \varepsilon) = 0$  ou, equivalentemente,  $P(\xi, \varepsilon) = \xi$ , para todo  $\varepsilon \in [0, \tilde{\varepsilon}_0)$ , com  $\xi = \beta(\varepsilon)$ . Para isto usaremos o *Teorema da Função Implícita* [5] e as seguintes notações

$$\begin{aligned} \delta_\xi(\xi, \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \delta(\xi, \varepsilon), \\ \delta_\xi(\xi, 0) &= \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \delta(\xi, \varepsilon) \right|_{(\xi, \varepsilon) = (\xi, 0)}, \\ \delta_\varepsilon(\xi, \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \delta(\xi, \varepsilon), \\ \delta_\varepsilon(\xi, 0) &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \delta(\xi, \varepsilon) \right|_{(\xi, \varepsilon) = (\xi, 0)}, \\ x'_1(t, \xi, \varepsilon) &= \frac{d}{dt} x_1(t, \xi, \varepsilon), \\ x_{1\xi}(t, \xi, \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial \xi} x_1(t, \xi, \varepsilon), \\ x_{1\varepsilon}(t, \xi, \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} x_1(t, \xi, \varepsilon), \\ x'_{1\varepsilon}(t, \xi, \varepsilon) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon} x_1(t, \xi, \varepsilon) \right), \end{aligned}$$

e assim por diante.

Como  $\delta(\xi, 0) = 0$ , para todo  $\xi \in \Sigma_c$ , então  $\delta_\xi(\xi, 0) = 0$ , pois

$$\begin{aligned}\delta_\xi(\xi, \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial \xi}(x_1(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon) - \xi) \\ &= x'_1(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon)T_\xi(\xi, \varepsilon) + x_{1\xi}(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon) - 1.\end{aligned}$$

Calculando no ponto  $(\xi, 0)$ , resulta que  $x'_1(2\pi, \xi, 0) = -x_2(2\pi, \xi, 0) = 0$  e, assim,

$$\delta_\xi(\xi, 0) = x_{1\xi}(T(\xi, 0), \xi, 0) - 1 = x_{1\xi}(2\pi, \xi, 0) - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Logo, o *Teorema da Função Implícita* não pode ser aplicado. Mas, calculando o desenvolvimento em série de Taylor da função  $\delta$  na variável  $\varepsilon$ , em torno de  $\varepsilon = 0$ , até o termo de grau 1, temos que

$$\delta(\xi, \varepsilon) = \varepsilon\delta_\varepsilon(\xi, 0) + O_\delta(\xi, \varepsilon^2) = \varepsilon(\delta_\varepsilon(\xi, 0) + O_\delta(\xi, \varepsilon)),$$

com  $O_\delta(\xi, 0) \equiv 0$ . Aqui a notação  $O_\delta$  denota os termos de ordem superior do desenvolvimento de Taylor da função  $\delta$  na variável  $\varepsilon$ , em torno de  $\varepsilon = 0$ . Notações similares serão utilizadas ao longo do texto.

Definindo

$$\begin{aligned}\Delta : \Sigma_c \times [0, \varepsilon_0) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\xi, \varepsilon) &\longmapsto \Delta(\xi, \varepsilon) = \delta_\varepsilon(\xi, 0) + O_\delta(\xi, \varepsilon),\end{aligned}$$

segue que  $\delta(\xi, \varepsilon) = \varepsilon\Delta(\xi, \varepsilon)$ .

**Afirmção 3.2.3.**  $\Delta(\xi, 0) = \delta_\varepsilon(\xi, 0) = x_{1\varepsilon}(2\pi, \xi, 0)$ ,  $\forall \xi \in \Sigma_c$ .

**Demonstração.** Temos que

$$\delta(\xi, \varepsilon) = \varepsilon\Delta(\xi, \varepsilon),$$

aplicando a derivada parcial em relação à variável  $\varepsilon$  em ambos os membros desta equação

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\delta(\xi, \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\varepsilon\Delta(\xi, \varepsilon)) \\ &= \Delta(\xi, \varepsilon) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Delta(\xi, \varepsilon)\end{aligned}$$

e aplicando no ponto  $(\xi, 0)$ , segue que  $\Delta(\xi, 0) = \delta_\varepsilon(\xi, 0)$  e da definição da função  $\delta$ ,  $\delta_\varepsilon(\xi, 0) = x_{1\varepsilon}(T(\xi, 0), \xi, 0) = x_{1\varepsilon}(2\pi, \xi, 0)$ ,  $\forall \xi \in \Sigma_c$ . ■

Portanto, concluímos que mesmo que o *Teorema da Função Implícita* não se aplique em  $\delta$ , ele será aplicável em  $\Delta$ . O que vimos até agora se resume no seguinte resultado.

**Proposição 3.2.1.** *Se  $\xi_0 > 0$  é zero simples de  $\xi \mapsto \Delta(\xi, 0)$ , isto é,  $\Delta(\xi_0, 0) = 0$  e  $\Delta_\xi(\xi_0, 0) \neq 0$  ou, equivalentemente, se  $\delta_\varepsilon(\xi_0, 0) = 0$  e  $\delta_{\varepsilon\xi}(\xi_0, 0) \neq 0$ , então existe uma única função*

$$\beta : V \subset [0, \varepsilon_0) \longrightarrow U \subset \Sigma_c$$

$$\varepsilon \longmapsto \xi = \beta(\varepsilon)$$

de classe  $C^r$ , com  $0 \in V$ , tal que  $\Delta(\beta(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ ,  $\forall \varepsilon \in V$ ,  $\beta(0) = \xi_0$  e

$$\begin{aligned} \beta(\varepsilon) &= \beta(0) + \beta'(0)\varepsilon + O_\beta(\varepsilon^2), \\ &= \xi_0 - \frac{\Delta_\varepsilon(\xi_0, 0)}{\Delta_\xi(\xi_0, 0)}\varepsilon + O_\beta(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

**Demonstração.** Seja  $\xi_0 > 0$  um zero simples de  $\xi \mapsto \Delta(\xi, 0)$ , isto é,

$$\Delta(\xi_0, 0) = 0, \quad \Delta_\xi(\xi_0, 0) \neq 0.$$

Logo, todas as hipóteses do *Teorema da Função Implícita* estão satisfeitas. Assim, tal teorema nos garante que existem uma vizinhança  $U \times V \subset \Sigma_c \times [0, \varepsilon_0)$ , com  $(\xi_0, 0) \in U \times V$  e uma única função  $\beta : V \longrightarrow U$ , de classe  $C^r$ , tal que  $\beta(0) = \xi_0$  e  $\Delta(\beta(\varepsilon), \varepsilon) = 0$  para todo  $\varepsilon \in V$ . E, portanto, o resultado segue. ■

Para simplificar a notação, no estudo dos zeros simples de  $\Delta = \Delta(\xi, 0)$ , definimos a função  $\mathcal{F} : \Sigma_c \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\mathcal{F}(\xi) = \Delta(\xi, 0)$ .

**Definição 3.2.1.** *Um zero simples  $\xi_0 \in \Sigma_c$  da função  $\mathcal{F}$  é chamado de ponto de continuação das soluções periódicas de (3.3). Neste caso, diremos também que a solução*

$$\gamma_0(t) = (\xi_0 \cos t, \xi_0 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

do sistema não perturbado  $x' = Ax$ , com  $A$  tal como em (3.4), é uma órbita periódica continuável para  $\varepsilon > 0$ . Diremos também que uma órbita periódica  $\gamma_0$  de  $x' = Ax$  persiste, se for continuável para  $\varepsilon > 0$ .

Se  $\gamma_0$  é uma órbita periódica de  $x' = Ax$  que persiste, então

$$\gamma_0(t) = (\xi_0 \cos t, \xi_0 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

$\mathcal{F}(\xi_0) = 0$  e  $\mathcal{F}'(\xi_0) \neq 0$ . Assim, existe uma solução periódica  $\gamma_\varepsilon$  de  $x' = Ax + \varepsilon G(x)$ , dada por

$$\gamma_\varepsilon(t) = x(t, \beta(\varepsilon), \varepsilon), \quad t \in [0, T(\beta(\varepsilon), \varepsilon)]$$

com  $\varepsilon > 0$  e  $T(\beta(\varepsilon), \varepsilon)$  o período, satisfazendo

$$\gamma_\varepsilon(t) \rightarrow \gamma_0(t), \quad T(\beta(\varepsilon), \varepsilon) \rightarrow 2\pi,$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Pela Proposição 3.2.1, o número de zeros simples da função  $\mathcal{F}$ , com  $\xi > 0$ , corresponde ao número de órbitas periódicas do centro linear que persistem para  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno.

O objetivo agora é determinar uma expressão para a função  $\mathcal{F}$ . Pela dependência diferenciável da solução com respeito ao parâmetro  $\varepsilon$  (ver o Teorema 2.7.1), há o seguinte *Problema de Cauchy* quando  $\varepsilon = 0$ ,

$$\begin{cases} x'_{1\varepsilon} = -x_{2\varepsilon} + g_1(x_1, x_2), \\ x'_{2\varepsilon} = x_{1\varepsilon} + g_2(x_1, x_2), \\ x_{1\varepsilon}(0) = 0, \\ x_{2\varepsilon}(0) = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

com  $x_1 = x_1(t, \xi, 0) = \xi \cos t$  e  $x_2 = x_2(t, \xi, 0) = \xi \sin t$ . Em notação compacta,

$$\begin{cases} x'_\varepsilon = Ax_\varepsilon + g(t), \\ x_\varepsilon(0) = (0, 0), \end{cases} \quad (3.12)$$

com a função  $g$  dada por  $g(t) = G(\xi \cos t, \xi \sin t)$ ,  $t \in I$ . Sabemos que  $\phi$  tal como em (3.7) é matriz fundamental de  $x'_\varepsilon = Ax_\varepsilon$  e, assim, pela *Fórmula da Variação dos Parâmetros*

(Teorema 2.3.1), a solução do Problema de Cauchy (3.11) envolvendo um sistema linear não homogêneo (3.11) é

$$x_\varepsilon(t, \xi, 0) = \phi(t)x_\varepsilon(0) + \phi(t) \int_0^t \phi^{-1}(s)g(s) ds, \quad t \in I,$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} x_{1\varepsilon}(t, \xi, 0) \\ x_{2\varepsilon}(t, \xi, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^t g_1(\xi \cos s, \xi \sin s) \cos s + g_2(\xi \cos s, \xi \sin s) \sin s ds \\ \int_0^t g_2(\xi \cos s, \xi \sin s) \cos s - g_1(\xi \cos s, \xi \sin s) \sin s ds \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Calculando em  $t = 2\pi$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\xi) &= x_{1\varepsilon}(2\pi, \xi, 0) \\ &= \int_0^{2\pi} g_1(\xi \cos s, \xi \sin s) \cos s + g_2(\xi \cos s, \xi \sin s) \sin s ds. \end{aligned}$$

A fim de determinar a estabilidade de uma órbita periódica que persiste, podemos diferenciar, com respeito ao parâmetro  $\xi$ , a função  $P$ , reescrita como,

$$P(\xi, \varepsilon) = \xi + \varepsilon \Delta(\xi, \varepsilon),$$

e calcular em  $\xi = \beta(\varepsilon)$ . Fazendo isto, nós obtemos

$$P_\xi(\beta(\varepsilon), \varepsilon) = 1 + \varepsilon \Delta_\xi(\beta(\varepsilon), \varepsilon).$$

Assim, do desenvolvimento em série de Taylor de  $\Delta_\xi(\beta(\varepsilon), \varepsilon)$  na variável  $\varepsilon$ , em torno de  $\varepsilon = 0$ , resulta que

$$\begin{aligned} \Delta_\xi(\beta(\varepsilon), \varepsilon) &= \Delta_\xi(\xi_0, 0) + O_\Delta(\varepsilon) \\ &= \delta_{\xi\varepsilon}(\xi_0, 0) + O_\Delta(\varepsilon) \\ &= \mathcal{F}'(\xi_0) + O_\Delta(\varepsilon) \end{aligned}$$

e

$$P_\xi(\beta(\varepsilon), \varepsilon) = 1 + \mathcal{F}'(\xi_0)\varepsilon + O_P(\varepsilon^2).$$

Como  $\varepsilon > 0$ , se  $\mathcal{F}'(\xi_0) < 0$ , então  $|P_\xi(\beta(\varepsilon), \varepsilon)| < 1$  e a órbita periódica que persiste (ciclo limite) é estável e se  $\mathcal{F}'(\xi_0) > 0$ , então  $|P_\xi(\beta(\varepsilon), \varepsilon)| > 1$  e a órbita periódica que persiste é instável (ver Seção 2.6).

Os resultados desta seção podem ser resumidos no seguinte teorema.

**Teorema 3.2.1.** *Se  $\xi_0 > 0$  é zero simples da função  $\mathcal{F} : \Sigma_c \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\mathcal{F}(\xi) = \int_0^{2\pi} g_1(\xi \cos s, \xi \sin s) \cos s + g_2(\xi \cos s, \xi \sin s) \sin s \, ds, \quad (3.14)$$

*então,  $\xi_0 > 0$  é um ponto de continuação de soluções periódicas do sistema (3.3). Se  $\mathcal{F}'(\xi_0) < 0$ , a órbita periódica que persiste é estável e se  $\mathcal{F}'(\xi_0) > 0$ , a órbita periódica que persiste é instável.*

As próximas seções consistem de aplicações da teoria apresentada aqui. Note que em todos os três sistemas planares analisados temos como seção transversal  $\Sigma_\infty$ . Isto porque na equação de van der Pol,  $g_2(u, 0) = 0, \forall u > 0$  e nos dois outros sistemas  $g_2(x_1, x_2) = 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

### 3.3 Análise da Equação de van der Pol

Através de uma mudança de variáveis podemos obter o seguinte sistema equivalente para a equação diferencial (3.2),

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x - \varepsilon(x^2 - 1)y, \end{cases} \quad (3.15)$$

ou, equivalentemente, na forma (3.3), com o campo vetorial  $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  dado por

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto G(x) = (g_1(x), g_2(x)) = (0, -(x_1^2 - 1)x_2), \end{aligned}$$

e  $\varepsilon \geq 0$ . Segue do Teorema 3.2.1 que

$$\mathcal{F}(\xi) = \int_0^{2\pi} (1 - \xi^2 \cos^2 s) \xi \sin^2 s \, ds, \quad \xi \in \Sigma_\infty. \quad (3.16)$$

Após uma integração elementar temos que

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{\pi}{4} \xi (4 - \xi^2), \quad \xi \in \Sigma_\infty. \quad (3.17)$$

Observe que  $\xi_0 = 2$  é zero simples da função  $\mathcal{F}$ , pois  $\mathcal{F}(\xi_0) = 0$  e  $\mathcal{F}'(\xi_0) = -2\pi \neq 0$ . Logo,  $\xi_0 = 2$  é um ponto de continuação de uma órbita periódica de (3.15) que persiste para  $\varepsilon > 0$ . Note ainda que, pelo Teorema 3.2.1, a órbita periódica que persiste é estável.

A Figura 3.4 exibe o retrato de fase de (3.15) para  $\varepsilon = 0.2$ .

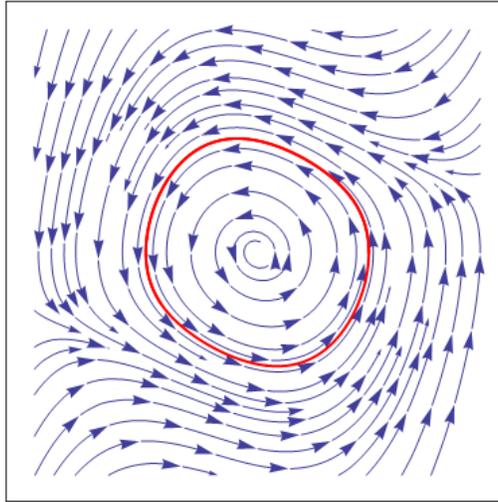


Figura 3.4: Retrato de fase de (3.15) para  $\varepsilon = 0.2$ . O ciclo limite estável é representada pela linha vermelha.

### 3.4 O Sistema de Liénard

Aqui apresentamos uma aplicação da teoria de continuação para encontrar uma cota para o número máximo de ciclos limites de um sistema do tipo Liénard. Uma demonstração do teorema a seguir, empregando o *Método do Averaging*, é dada em [13].

**Teorema 3.4.1.** *O sistema de Liénard da forma*

$$\begin{cases} x' = y - \varepsilon(a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n), \\ y' = -x, \end{cases} \quad (3.18)$$

com  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e  $a_n \neq 0$ , possui no máximo  $[(n-1)/2]$  órbitas periódicas que persistem para  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno, sendo  $[n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , a função maior inteiro positivo menor ou igual a  $n$ .

**Demonstração.** O sistema (3.18) na forma matricial é escrito da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -(a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) \\ 0 \end{pmatrix}$$

e mudando as variáveis

$$\begin{cases} x_1 = -x \\ x_2 = y \end{cases}$$

temos

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -(d_1x_1 + d_2x_1^2 + \cdots + d_nx_1^n) \\ 0 \end{pmatrix},$$

com  $d_i = a_i$ , se  $i$  é par, e  $d_i = -a_i$ , se  $i$  é ímpar,  $i = 1, \dots, n$ . Assim, sendo  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

o campo vetorial dado por

$$G(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(d_1x_1 + \cdots + d_nx_1^n) \\ 0 \end{pmatrix},$$

pela teoria de continuação,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\xi) &= - \int_0^{2\pi} \cos s (d_1\xi \cos s + \cdots + d_n\xi^n \cos^n s) \, ds \\ &= - \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n d_k \xi^k \cos^{k+1} s \, ds \\ &= - \sum_{k=1}^n d_k \xi^k \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^{k+1} s \, ds}_{b_k} \\ &= - \sum_{k=1}^n d_k b_k \xi^k, \end{aligned}$$

com  $\xi \in \Sigma_\infty$ .

**Afirmção 3.4.1.**

$$\begin{cases} b_k = 0, & \text{se } k \text{ é par} \\ b_k \neq 0, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

**Demonstração.** Se  $k = 1$ , então

$$b_1 = \int_0^{2\pi} \cos^2 s \, ds = \pi.$$

Seja agora  $k = 2p + 1$  ímpar, com  $p \geq 1$ , e note que  $n = k + 1 = 2p + 2$  é par. Usando sucessivamente a fórmula de recorrência,

$$\int_0^{2\pi} \cos^n s \, ds = \frac{n-1}{n} \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} s \, ds,$$

resulta que

$$b_k = \int_0^{2\pi} \cos^n s \, ds = \left( \prod_{j=1}^p \frac{n-2j+1}{n-2j+2} \right) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2p} s \, ds$$

e, como  $n - 2p = 2$ , segue que

$$b_k = \int_0^{2\pi} \cos^n s \, ds = \left( \prod_{j=1}^p \frac{n-2j+1}{n-2j+2} \right) b_1 \neq 0.$$

Se  $k = 2p$  é par, com  $p \geq 1$ , então  $n = k + 1 = 2p + 1$  é ímpar e usando raciocínio análogo feito anteriormente obtemos que

$$b_k = \int_0^{2\pi} \cos^n s \, ds = \left( \prod_{j=1}^p \frac{n-2j+1}{n-2j+2} \right) \int_0^{2\pi} \cos s \, ds = \left( \prod_{j=1}^p \frac{n-2j+1}{n-2j+2} \right) 0 = 0$$

e, conseqüentemente, concluímos que  $b_k = 0$ , se  $k$  é par. ■

**Afirmção 3.4.2.**  $\mathcal{F}(\xi) = - \sum_{k=1,3,5,\dots}^n d_k b_k \xi^k$  possui no máximo  $[(n-1)/2]$  zeros simples.

**Demonstração.** Seja  $n$  ímpar, ou seja,  $n = 2p + 1$ . Logo,  $p = (n-1)/2$  e

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\xi) &= - \sum_{k=1,3,5,\dots}^{2p+1} d_k b_k \xi^k \\ &= -(d_1 b_1 \xi + d_3 b_3 \xi^3 + \dots + d_{2p+1} b_{2p+1} \xi^{2p+1}) \\ &= -\xi (d_1 b_1 + d_3 b_3 \xi^2 + \dots + d_{2p+1} b_{2p+1} \xi^{2p}) \\ &= -\xi q_{\text{I}}(\xi^2), \end{aligned}$$

com

$$q_{\text{I}}(\xi^2) = \sum_{j=0}^p c_j (\xi^2)^j$$

e  $c_j = d_{2j+1} b_{2j+1}$ , para  $j = 0, \dots, p$ . Definindo  $\mu = \xi^2$ ,

$$q_{\text{I}}(\mu) = \sum_{j=0}^p c_j \mu^j = c_0 + c_1 \mu + \dots + c_p \mu^p.$$

Dependendo dos coeficientes  $c_0, c_1, \dots, c_p$ ,  $q_{\text{I}}$  pode ter no máximo  $p$  raízes reais positivas e, portanto,  $\mathcal{F}(\xi)$  possui no máximo  $p = (n-1)/2$  raízes positivas.

Se  $n$  é par, isto é,  $n = 2p$ , então

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\xi) &= \sum_{k=1,3,5,\dots}^{2p} d_k b_k \xi^k \\ &= -(d_1 b_1 \xi + d_3 b_3 \xi^3 + \dots + d_{2p-1} b_{2p-1} \xi^{2p-1}) \\ &= \xi(d_1 b_1 + d_3 b_3 \xi^2 + \dots + d_{2p-1} b_{2p-1} \xi^{2p-2}) \\ &= -\xi q_P(\xi^2),\end{aligned}$$

com

$$q_P(\xi^2) = \sum_{j=1}^{p-1} c_j (\xi^2)^j,$$

sendo  $c_j = d_{2j+1} b_{2j+1}$ ,  $j = 0, \dots, p-1$ . Defina  $\mu = \xi^2$ . Assim,

$$q_P(\mu) = \sum_{j=0}^{p-1} c_j \mu^j = c_0 + c_1 \mu + \dots + c_{p-1} \mu^{p-1}.$$

Novamente dependendo dos coeficientes  $c_0, c_1, \dots, c_{p-1}$  temos que  $q_P$  possui no máximo  $p-1$  raízes reais positivas. Assim,  $\mathcal{F}(\xi)$ , quando  $n$  é par, possui no máximo

$$p-1 = \frac{n-2}{2} = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

■

Portanto,  $\mathcal{F}(\xi)$  possui no máximo  $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$  zeros simples e, conseqüentemente, o sistema do tipo Liénard (3.18) possui no máximo  $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$  ciclos limites para  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno. ■

### 3.5 Análise de um Sistema com um Número Contável de Ciclos Limites

Nesta seção mostraremos um exemplo de sistema planar com um número contável de ciclos limites. Adaptando a Proposição 3 de [14] temos o seguinte teorema.

**Teorema 3.5.1.** *O sistema planar*

$$\begin{cases} x' = -y - \varepsilon \operatorname{sen} x, \\ y' = x, \end{cases} \quad (3.19)$$

*possui um número contável de ciclos limites para  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno.*

**Demonstração.** O sistema (3.19) é equivalente à seguinte forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

e podemos notar que

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto G(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

E, portanto, calculando a expressão para a função  $\mathcal{F}$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\xi) &= \int_0^{2\pi} g_1(\xi \cos s, \xi \operatorname{sen} s) \cos s + g_2(\xi \cos s, \xi \operatorname{sen} s) \operatorname{sen} s \, ds \\ &= - \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\xi \cos s) \cos s \, ds, \quad \xi \in \Sigma_\infty. \end{aligned}$$

No Capítulo 1 da referência [9] é provado que

$$J_n(\xi) = \int_0^\pi \cos(\xi \operatorname{sen} s - ns) \, ds,$$

sendo  $J_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , funções de Bessel de primeira espécie (ver também o Capítulo 1 de [9]). E, ainda, temos para  $n = 1$ ,

$$J_1(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}(\xi \cos s) \cos s \, ds \quad (3.20)$$

e através da mudança de variáveis  $\tau = s + \pi$ , segue que

$$J_1(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \operatorname{sen}(\xi \cos \tau) \cos \tau \, d\tau. \quad (3.21)$$

Somando (3.20) com (3.21), mostramos que

$$\mathcal{F}(\xi) = - \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\xi \cos s) \cos s \, ds = -2\pi J_1(\xi), \quad \xi \in \Sigma_\infty.$$

A função de Bessel

$$J_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\xi \longmapsto J_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k+1}}{2^{2k+1} k! (k+1)!},$$

é solução da equação diferencial

$$\xi^2 x''(\xi) + \xi x'(\xi) + (\xi^2 - 1)x(\xi) = 0, \quad (3.22)$$

conhecida como *equação de Bessel*.

Algumas propriedades dos zeros da função  $J_1$  são fornecidas nas afirmações a seguir.

**Afirmção 3.5.1.** *A função  $J_1 = J_1(\xi)$ , para  $\xi > 0$ , possui somente zeros reais.*

**Demonstração.** Ver o Capítulo 2 de [9]. ■

**Afirmção 3.5.2.** *A função  $J_1 = J_1(\xi)$ , para  $\xi > 0$ , possui um número infinito de zeros reais.*

**Demonstração.** Ver o Capítulo V de [6]. ■

**Afirmção 3.5.3.** *Todos os zeros de  $J_1 = J_1(\xi)$ , para  $\xi > 0$ , são simples.*

**Demonstração.** Se  $\xi_0 > 0$  não é zero simples de  $J_1(\xi)$ , então temos pelo menos que  $J_1(\xi_0) = 0$  e  $J_1'(\xi_0) = 0$ . Como  $\xi_0 > 0$  segue da equação diferencial (3.22) que também  $J_1''(\xi_0) = 0$ . Por indução, resulta que  $J_1^{(m)}(\xi_0) = 0$  para todo  $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , o que implica que  $J_1(\xi)$  é identicamente nula, o que é uma contradição. ■

Pelo Teorema 3.2.1, e pelas afirmações anteriores, podemos concluir que o retrato de fase do sistema (3.19) apresenta um número contável de órbitas periódicas que persistem para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. ■

É possível mostrar que para  $\xi > 0$ , suficientemente grande,

$$J_1(\xi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \cos\left(\xi - \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)$$

e, portanto, os zeros da função de Bessel  $J_1$  são aproximados por

$$\xi_k = \left(k + \frac{1}{4}\right) \pi, \quad (3.23)$$

para um inteiro positivo  $k$  suficientemente grande. Por exemplo, tomando  $k = 10$ ,  $\xi_{10} = 32.2013$ , porém o valor aproximado com quatro casas decimais, obtido numericamente pelo *software* Mathematica [21], é  $\xi = 32.1897$ .

A Figura 3.5 apresenta o gráfico da função  $J_1$ , para  $\xi \geq 0$ , com alguns pontos  $(\xi_k, 0)$  obtidos através de (3.23).

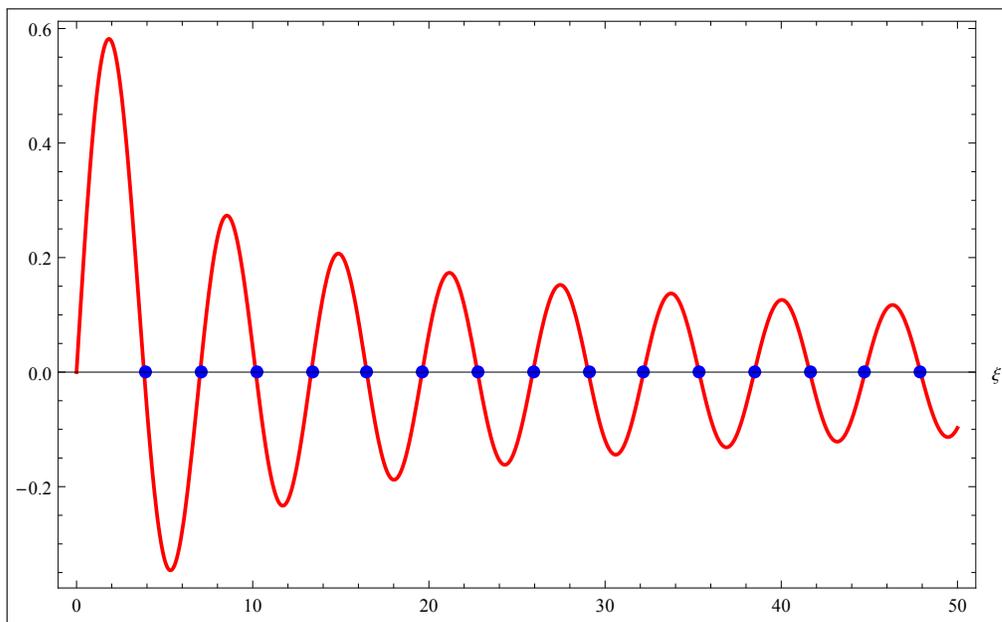


Figura 3.5: O gráfico da função de Bessel é representado pela linha vermelha. Os pontos azuis são da forma  $(\xi_k, 0)$ ,  $k = 1, \dots, 15$ , obtidos através de (3.23).

# Capítulo 4

## Continuação de Soluções Periódicas em $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo provaremos que parte da teoria de continuação de soluções periódicas em equações diferenciais ordinárias em  $\mathbb{R}^2$  pode ser generalizada para qualquer dimensão  $n \geq 3$ . E faremos um comentário sobre o caso particular em  $\mathbb{R}^3$ .

### 4.1 Generalização para Dimensão Arbitrária

Iremos, agora, estender alguns resultados obtidos em  $\mathbb{R}^2$  para uma dimensão qualquer, ou seja,

$$x' = F(x, \varepsilon) = Ax + \varepsilon G(x), \quad (4.1)$$

com  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon \geq 0$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

e  $G \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ , um campo vetorial dado por

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto G(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x)). \end{aligned}$$

A solução do Problema de Cauchy,

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = -x_2 + \varepsilon g_1(x_1, \dots, x_n), \\ x'_2 = x_1 + \varepsilon g_2(x_1, \dots, x_n), \\ x'_3 = \varepsilon g_3(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x'_n = \varepsilon g_n(x_1, \dots, x_n), \\ x(0) = (\xi_1, 0, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}), \end{array} \right. \quad (4.2)$$

será denotada por

$$\begin{aligned} x : I \times \mathbb{R}_*^{n-1} \times [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \xi, \varepsilon) &\longmapsto x(t, \xi, \varepsilon) = (x_1(t, \xi, \varepsilon), \dots, x_n(t, \xi, \varepsilon)), \end{aligned} \quad (4.3)$$

sendo  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}_*^{n-1}$ ,

$$\mathbb{R}_*^{n-1} = (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

e  $I$  o intervalo maximal. Para  $\varepsilon = 0$ , todo ponto da forma  $(0, 0, l_1, l_2, \dots, l_{n-2})$  é ponto de equilíbrio de  $x' = Ax$ , sendo  $l_1, l_2, \dots, l_{n-2}$  números reais. Assim, os pontos de equilíbrio pertencem a um subespaço do  $\mathbb{R}^n$  de dimensão  $n - 2$ . Além disto, a solução  $x$  de

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = Ax, \\ x(0) = (\xi_1, 0, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}), \end{array} \right.$$

é dada por  $x(t, \xi, 0) = \phi(t)x(0)$ ,  $t \in I = \mathbb{R}$ , com  $\phi$  a matriz fundamental, satisfazendo

$\phi(0) = E$ , ou seja,

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in I = \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

Logo, excetuando os pontos de equilíbrio, toda solução é periódica de período  $2\pi$  quando  $\varepsilon = 0$ .

Seja  $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}_*^{n-1}$  e considere as funções

$$\sigma : \mathbb{R}_*^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$u \longmapsto \sigma(u) = (u_1, 0, u_2, \dots, u_{n-1})$$

e  $g$  dada por

$$g(u, \varepsilon) = \det(F(\sigma(u), \varepsilon) | D\sigma(u)), \quad u \in \mathbb{R}_*^{n-1},$$

com  $F$  tal como em (4.1). Como, para cada  $u \in \mathbb{R}_*^{n-1}$ ,  $D\sigma(u) : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é tal que

$$D\sigma(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

aplicando o *Teorema de Laplace* para determinantes,

$$\begin{aligned}
g(u, \varepsilon) &= \det \begin{pmatrix} \varepsilon g_1(\sigma(u)) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_1 + \varepsilon g_2(\sigma(u)) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon g_3(\sigma(u)) & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon g_n(\sigma(u)) & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{2+1}(u_1 + \varepsilon g_2(\sigma(u))) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= -u_1 - \varepsilon g_2(\sigma(u)),
\end{aligned}$$

para todo  $u \in \mathbb{R}_*^{n-1}$ .

Para  $\varepsilon = 0$ , temos que  $g(u, 0) = -u_1 \neq 0$ , para todo  $u \in \mathbb{R}_*^{n-1}$ , e, portanto,  $\Sigma = \sigma(\mathbb{R}_*^{n-1})$  é seção transversal do campo vetorial  $F$ . Pela continuidade do campo vetorial  $F$  e para  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno, se  $g^{-1}(0) \cap \sigma(\mathbb{R}_*^{n-1}) \neq \emptyset$ , então a interseção, em geral, é uma subvariedade de dimensão  $n - 2$  que determina o fronteira de  $\Sigma$ . Porém, se  $g^{-1}(0) \cap \sigma(\mathbb{R}_*^{n-1}) = \emptyset$ , então  $\Sigma = \sigma(\mathbb{R}_*^{n-1})$ .

O seguinte lema é análogo ao Lema 3.2.1 em  $\mathbb{R}^n$ .

**Lema 4.1.1.** *A solução  $x$  dada em (4.3) do Problema de Cauchy (4.2) satisfaz*

$$x(t, \xi, \varepsilon) = \phi(t)x_0 + \varepsilon \int_0^t \phi(t)\phi^{-1}(s)G(x(s, \xi, \varepsilon)) ds, \quad (t, \xi, \varepsilon) \in I \times \mathbb{R}_*^{n-1} \times [0, \infty), \quad (4.5)$$

com  $\phi$  a matriz fundamental (4.4) e  $x_0 = (\xi_1, 0, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ .

**Demonstração.** A demonstração é similar àquela feita no Lema 3.2.1. ■

Resulta do Lema 4.1.1 que

$$\begin{aligned}
x(t, \xi, \varepsilon) &= x(t, \xi, 0) + R_x(t, \xi, \varepsilon) \\
&= (\xi_1 \cos t, \xi_1 \sin t, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) + R_x(t, \xi, \varepsilon),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

com  $R_x$  uma função com desenvolvimento em série de Taylor na variável  $\varepsilon$ , em torno de  $\varepsilon = 0$ , iniciando, pelo menos, no termo de grau 1 e  $R_x(t, \xi, 0) \equiv 0$ . Tal como no caso em  $\mathbb{R}^2$ , a solução do sistema perturbado está próxima da solução do sistema não perturbado que passa por  $(\xi_1, 0, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ , pelo menos até o primeiro retorno a  $\Sigma$ .

Definimos agora  $\Sigma_c = \sigma^{-1}(\Sigma)$  e no caso em que  $g^{-1}(0) \cap \sigma(\mathbb{R}_*^{n-1}) = \emptyset$ , tomamos  $c = \infty$ . Assim, ajustando  $\Sigma$  se necessário, podemos definir a *aplicação de primeiro retorno parametrizada* de maneira seguinte

$$\begin{aligned} P : \Sigma_c \times [0, \varepsilon_0) &\longrightarrow \Sigma_c \\ (\xi, \varepsilon) &\longmapsto P(\xi, \varepsilon), \end{aligned}$$

tal que

$$P(\xi, \varepsilon) := (x_1(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon), x_3(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon), \dots, x_n(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon)),$$

com  $\varepsilon_0$  um número real positivo, suficientemente pequeno, e  $T = T(\xi, \varepsilon) > 0$  o menor tempo tal que  $x(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon) \in \Sigma$ . Tal tempo é solução de  $x_2(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon) = 0$ .

**Afirmção 4.1.1.**  $T(\xi, 0) = 2\pi$  e  $P(\xi, 0) = \xi$ ,  $\forall \xi \in \Sigma_c$ .

**Demonstração.** Para  $\varepsilon = 0$ , segue que  $x_2(T(\xi, 0), \xi, 0) = 0$  e, assim, temos

$$\xi_1 \sin T(\xi, 0) = 0$$

e, portanto,  $\sin T(\xi, 0) = 0$ , pois  $\xi_1 > 0$ . Assim,  $T(\xi, 0) = \pi$  ou  $T(\xi, 0) = 2\pi$  e como estamos interessados em encontrar o menor tempo positivo de primeiro retorno da solução, segue que  $T(\xi, 0) = 2\pi$ . Com  $T(\xi, 0) = 2\pi$  resulta que

$$P(\xi, 0) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n-1}) = \xi, \quad \forall \xi \in \Sigma_c.$$

■

E de maneira análoga feita em  $\mathbb{R}^2$ , para o caso  $\mathbb{R}^n$ , vamos definir a *função separação*

$$\begin{aligned} \delta : \Sigma_c \times [0, \varepsilon_0) &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ (\xi, \varepsilon) &\longmapsto \delta(\xi, \varepsilon) = P(\xi, \varepsilon) - \xi. \end{aligned}$$

**Afirmação 4.1.2.**  $\delta(\xi, 0) = 0$  e  $\delta_\xi(\xi, 0) = 0$ ,  $\forall \xi \in \Sigma_c$ .

**Demonstração.** Observe que

$$\delta(\xi, \varepsilon) = (\delta_1(\xi, \varepsilon), \delta_2(\xi, \varepsilon), \dots, \delta_{n-1}(\xi, \varepsilon)), \quad (\xi, \varepsilon) \in \Sigma_c \times [0, \varepsilon_0),$$

com

$$\delta_1(\xi, \varepsilon) = x_1(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon) - \xi_1,$$

$$\delta_2(\xi, \varepsilon) = x_3(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon) - \xi_2,$$

$$\vdots$$

$$\delta_{n-1}(\xi, \varepsilon) = x_n(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon) - \xi_{n-1},$$

e, portanto, segue que

$$\delta(\xi, 0) = \xi - \xi = 0.$$

Note ainda que

$$\delta_\xi(\xi, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \delta_{1\xi_1}(\xi, \varepsilon) & \delta_{1\xi_2}(\xi, \varepsilon) & \dots & \delta_{1\xi_{n-1}}(\xi, \varepsilon) \\ \delta_{2\xi_1}(\xi, \varepsilon) & \delta_{2\xi_2}(\xi, \varepsilon) & \dots & \delta_{2\xi_{n-1}}(\xi, \varepsilon) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n-1\xi_1}(\xi, \varepsilon) & \delta_{n-1\xi_2}(\xi, \varepsilon) & \dots & \delta_{n-1\xi_{n-1}}(\xi, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

e, aplicando no ponto  $(\xi, 0)$ , temos que

$$\delta_\xi(\xi, 0) = \begin{pmatrix} \delta_{1\xi_1}(\xi, 0) & \delta_{1\xi_2}(\xi, 0) & \dots & \delta_{1\xi_{n-1}}(\xi, 0) \\ \delta_{2\xi_1}(\xi, 0) & \delta_{2\xi_2}(\xi, 0) & \dots & \delta_{2\xi_{n-1}}(\xi, 0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n-1\xi_1}(\xi, 0) & \delta_{n-1\xi_2}(\xi, 0) & \dots & \delta_{n-1\xi_{n-1}}(\xi, 0) \end{pmatrix} = 0,$$

sendo

$$\delta_{i\xi_j}(\xi, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \delta_i(\xi, \varepsilon), \quad i, j = 1, \dots, n-1.$$

■

Assim, como em  $\mathbb{R}^2$ , o *Teorema da Função Implícita* não pode ser aplicado na função  $\delta$ , visto que suas hipóteses não são todas satisfeitas. Mas, calculando o desenvolvimento

em série de Taylor da função  $\delta$  em relação à variável  $\varepsilon$ , em torno de  $\varepsilon = 0$ , e até o termo de grau 1 temos, pela dependência diferenciável da solução em relação aos parâmetros, que

$$\begin{aligned}\delta(\xi, \varepsilon) &= \varepsilon \delta_\varepsilon(\xi, \varepsilon) + O_\delta(\xi, \varepsilon^2) \\ &= \varepsilon(\delta_\varepsilon(\xi, 0) + O_\delta(\xi, \varepsilon))\end{aligned}$$

e definindo a aplicação

$$\begin{aligned}\Delta : \Sigma_c \times [0, \varepsilon_0) &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ (\xi, \varepsilon) &\longmapsto \Delta(\xi, \varepsilon) = \delta_\varepsilon(\xi, 0) + O_\delta(\xi, \varepsilon)\end{aligned}$$

temos que  $\delta(\xi, \varepsilon) = \varepsilon \Delta(\xi, \varepsilon)$  e, portanto,  $\Delta(\xi, 0) = \delta_\varepsilon(\xi, 0)$ , com

$$\delta_\varepsilon(\xi, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \delta(\xi, \varepsilon).$$

**Definição 4.1.1.** *Um zero simples ou um ponto singular simples de  $\xi \mapsto \Delta(\xi, 0)$ , é um ponto  $\xi_0 \in \Sigma_c$  tal que  $\Delta(\xi_0, 0) = 0$  e  $\Delta_\xi(\xi_0, 0)$  é uma matriz não singular ou, equivalentemente,  $\delta_\varepsilon(\xi_0, 0) = 0$  e  $\delta_{\varepsilon\xi}(\xi_0, 0)$  é uma matriz não singular.*

**Proposição 4.1.1.** *Se  $\xi_0 \in \Sigma_c$  é zero simples de  $\xi \mapsto \Delta(\xi, 0)$ , então existe uma única função*

$$\begin{aligned}\beta : V \subset [0, \varepsilon_0) &\longrightarrow U \subset \Sigma_c \\ \varepsilon &\longmapsto \xi = \beta(\varepsilon)\end{aligned}$$

de classe  $\mathcal{C}^r$ , com  $0 \in V$ , tal que  $\Delta(\beta(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ ,  $\forall \varepsilon \in V$ ,  $\beta(0) = \xi_0$  e

$$\begin{aligned}\beta(\varepsilon) &= \beta(0) + \beta'(0)\varepsilon + O_\beta(\varepsilon^2), \\ &= \xi_0 - \Delta_\xi(\xi_0, 0)^{-1} \Delta_\varepsilon(\xi_0, 0)\varepsilon + O_\beta(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

**Demonstração.** Suponha que  $\xi_0 \in \Sigma_c$  é um zero simples de  $\xi \mapsto \Delta(\xi, 0)$ , ou seja,  $\Delta(\xi_0, 0) = 0$  e  $\Delta_\xi(\xi_0, 0)$  é uma matriz não singular. Assim, todas as hipóteses do *Teorema da Função Implícita* são satisfeitas. Portanto, existem uma vizinhança  $U \times V \subset \Sigma_c \times [0, \varepsilon_0)$ , com  $(\xi_0, 0) \in U \times V$  e uma única função  $\beta : V \longrightarrow U$ , de classe  $\mathcal{C}^r$ , tal que  $\beta(0) = \xi_0$  e  $\Delta(\beta(\varepsilon), \varepsilon) = 0$  para todo  $\varepsilon \in V$ . E, portanto, o resultado segue. ■

Vamos agora encontrar uma expressão para  $\Delta(\xi, 0)$ . Calculando a derivada parcial de  $\delta = \delta(\xi, \varepsilon)$  em relação à variável  $\varepsilon$  segue que

$$\delta_\varepsilon(\xi, \varepsilon) = (\delta_{1\varepsilon}(\xi, \varepsilon), \delta_{2\varepsilon}(\xi, \varepsilon), \dots, \delta_{n-1\varepsilon}(\xi, \varepsilon)),$$

com

$$\begin{aligned} \delta_{1\varepsilon}(\xi, \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} x_1(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon) = x'_1(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon)T_\varepsilon(\xi, \varepsilon) + x_{1\varepsilon}(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon), \\ \delta_{2\varepsilon}(\xi, \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} x_3(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon) = x'_3(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon)T_\varepsilon(\xi, \varepsilon) + x_{3\varepsilon}(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon), \\ &\vdots \\ \delta_{n-1\varepsilon}(\xi, \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} x_n(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon) = x'_n(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon)T_\varepsilon(\xi, \varepsilon) + x_{n\varepsilon}(T(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon), \end{aligned}$$

e, calculando no ponto  $(\xi, 0)$ , temos que

$$\begin{aligned} \delta_{1\varepsilon}(\xi, 0) &= x'_1(T(\xi, 0), \xi, 0)T_\varepsilon(\xi, 0) + x_{1\varepsilon}(T(\xi, 0), \xi, 0), \\ &= x'_1(2\pi, \xi, 0)T_\varepsilon(\xi, 0) + x_{1\varepsilon}(2\pi, \xi, 0), \\ &= -x_2(2\pi, \xi, 0)T_\varepsilon(\xi, 0) + x_{1\varepsilon}(2\pi, \xi, 0), \\ &= x_{1\varepsilon}(2\pi, \xi, 0), \\ \delta_{2\varepsilon}(\xi, 0) &= x'_3(T(\xi, 0), \xi, 0)T_\varepsilon(\xi, 0) + x_{3\varepsilon}(T(\xi, 0), \xi, 0), \\ &= x'_3(2\pi, \xi, 0)T_\varepsilon(\xi, 0) + x_{3\varepsilon}(2\pi, \xi, 0), \\ &= x_{3\varepsilon}(2\pi, \xi, 0), \\ &\vdots \\ \delta_{n-1\varepsilon}(\xi, 0) &= x'_n(T(\xi, 0), \xi, 0)T_\varepsilon(\xi, 0) + x_{n\varepsilon}(T(\xi, 0), \xi, 0), \\ &= x'_n(2\pi, \xi, 0)T_\varepsilon(\xi, 0) + x_{n\varepsilon}(2\pi, \xi, 0), \\ &= x_{n\varepsilon}(2\pi, \xi, 0). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Cada função  $\delta_{i\varepsilon}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , em (4.7) é obtida derivando

$$\begin{cases} x' = Ax + \varepsilon G(x), \\ x(0) = (\xi_1, 0, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}), \end{cases}$$

com respeito ao parâmetro  $\varepsilon$  e calculando em  $\varepsilon = 0$  e, ainda, empregando a dependência diferenciável da solução em relação aos parâmetros. Fazendo isto temos que

$$\begin{cases} x'_\varepsilon = Ax_\varepsilon + g(t), \\ x_\varepsilon(0) = (0, 0, 0, \dots, 0) \end{cases} \quad (4.8)$$

com  $g$  dada por  $g(t) = G(\xi_1 \cos t, \xi_1 \sin t, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . A solução de (4.8), pelo Teorema 2.3.1, é

$$x_\varepsilon(t, \xi, 0) = \phi(t)x_\varepsilon(0) + \phi(t) \int_0^t \phi^{-1}(s)g(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Em  $t = 2\pi$ , resulta de (4.4) que  $\phi(2\pi) = E$ . Assim, definindo  $\Psi$  por

$$\Psi(\xi, t) = (\xi_1 \cos t, \xi_1 \sin t, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}), \quad t \in \mathbb{R},$$

podemos concluir que

$$x_\varepsilon(2\pi, \xi, 0) = \begin{pmatrix} x_{1\varepsilon}(2\pi, \xi, 0) \\ x_{2\varepsilon}(2\pi, \xi, 0) \\ x_{3\varepsilon}(2\pi, \xi, 0) \\ \vdots \\ x_{n\varepsilon}(2\pi, \xi, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} g_1(\Psi(\xi, s)) \cos s + g_2(\Psi(\xi, s)) \sin s ds \\ \int_0^{2\pi} g_2(\Psi(\xi, s)) \cos s - g_1(\Psi(\xi, s)) \sin s ds \\ \int_0^{2\pi} g_3(\Psi(\xi, s)) ds \\ \vdots \\ \int_0^{2\pi} g_n(\Psi(\xi, s)) ds \end{pmatrix}.$$

Definindo também  $\mathcal{F} : \Sigma_c \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  por  $\mathcal{F}(\xi) = \Delta(\xi, 0)$ , segue que

$$\mathcal{F}(\xi) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(\xi) \\ \mathcal{F}_2(\xi) \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{n-1}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} g_1(\Psi(\xi, s)) \cos s + g_2(\Psi(\xi, s)) \sin s ds \\ \int_0^{2\pi} g_3(\Psi(\xi, s)) ds \\ \vdots \\ \int_0^{2\pi} g_n(\Psi(\xi, s)) ds \end{pmatrix}.$$

Portanto, basta encontrarmos os zeros simples da aplicação  $\mathcal{F}$ , isto é, os pontos  $\xi_0 \in \Sigma_c$  tais que  $\mathcal{F}(\xi_0) = 0$  e  $\mathcal{F}_\xi(\xi_0)$  é não singular, para obtermos os pontos de continuação de

órbitas periódicas que persistem em  $\mathbb{R}^n$  para um valor de  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno, sendo

$$\mathcal{F}_\xi(\xi_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{1\xi_1}(\xi_0) & \mathcal{F}_{1\xi_2}(\xi_0) & \dots & \mathcal{F}_{1\xi_{n-1}}(\xi_0) \\ \mathcal{F}_{2\xi_1}(\xi_0) & \mathcal{F}_{2\xi_2}(\xi_0) & \dots & \mathcal{F}_{2\xi_{n-1}}(\xi_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{F}_{n-1\xi_1}(\xi_0) & \mathcal{F}_{n-1\xi_2}(\xi_0) & \dots & \mathcal{F}_{n-1\xi_{n-1}}(\xi_0) \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{F}_{i\xi_j}(\xi_0) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathcal{F}_i(\xi_0), \quad i, j = 1, \dots, n-1.$$

O que foi feito pode ser resumido no seguinte teorema.

**Teorema 4.1.1.** *Se  $\xi_0 \in \Sigma_c$  é um zero simples da função  $\mathcal{F} : \Sigma_c \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\mathcal{F}(\xi) = \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} g_1(\Psi(\xi, s)) \cos s + g_2(\Psi(\xi, s)) \sin s \, ds \\ \int_0^{2\pi} g_3(\Psi(\xi, s)) \, ds \\ \vdots \\ \int_0^{2\pi} g_n(\Psi(\xi, s)) \, ds \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

então,  $\xi_0$  é um ponto de continuação de soluções periódicas do sistema (4.1).

## 4.2 Algumas Considerações em $\mathbb{R}^3$

Quando  $n = 3$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

e

$$G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x \longmapsto G(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x)),$$

é um campo vetorial de classe  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ . Em outras palavras, estamos interessados no Problema de Cauchy,

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2 + \varepsilon g_1(x_1, x_2, x_3), \\ x'_2 = x_1 + \varepsilon g_2(x_1, x_2, x_3), \\ x'_3 = \varepsilon g_3(x_1, x_2, x_3), \\ x(0) = (\xi_1, 0, \xi_2), \end{cases} \quad (4.11)$$

sendo  $\xi_1 > 0$ .

Para  $\varepsilon = 0$ , todo ponto sobre o eixo  $x_3$ , ou seja, pontos da forma  $(0, 0, l_1)$ , são pontos de equilíbrio do sistema linear  $x' = Ax$ , com  $A$  dada em (4.10). Excetuando estes pontos, as soluções de  $x' = Ax$  são periódicas de período  $2\pi$  e da forma

$$x(t, \xi, 0) = \phi(t)x(0) = (\xi_1 \cos t, \xi_1 \sin t, \xi_2), \quad \forall t \in I = \mathbb{R}, \quad (4.12)$$

com  $\phi$  dada por

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, para  $\varepsilon = 0$ , as soluções periódicas estão sobre cilindros parametrizados por (4.12), com  $\xi_1 > 0$  e  $\xi_2 \in \mathbb{R}$ , como podemos ver na Figura 4.1.



# Capítulo 5

## O Sistema de Michelson

Aqui estudaremos o sistema de Michelson, veremos o contexto histórico e mostraremos como ele pode ser obtido a partir da equação de Kuramoto-Sivashinsky. Faremos uma análise linear do sistema de Michelson e, finalmente, um estudo sobre ciclos limites em tal sistema.

### 5.1 Contexto Histórico e Obtenção do Modelo

A equação diferencial ordinária de terceira ordem

$$x''' = c^2 - x' - x^2/2, \quad (5.1)$$

com  $x'$ , significando derivada da função  $x = x(t)$  em relação à variável  $t$  e  $c$  é um parâmetro real, pode ser escrita na forma do seguinte sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = c^2 - y - x^2/2. \end{cases} \quad (5.2)$$

Este sistema tornou-se conhecido como *sistema de Michelson* após a primeira análise completa do sistema por D. Michelson em [16] no qual obteve as equações que formam o sistema (5.2) por volta de 1986. Sendo  $u = u(x, t)$ , tal sistema é obtido a partir da equação de Kuramoto-Sivashinsky

$$u_t + uu_x + u_{xx} + u_{xxxx} = 0, \quad (5.3)$$

que vem sendo estudada com o objetivo de entender melhor problemas que envolvem equações diferenciais parciais. A equação (5.3) é uma equação diferencial parcial não linear que modela vários processos físicos, um exemplo é a propagação das ondas de concentração de reações químicas.

Para obter o sistema (5.2), a equação (5.3) é estudada sobre condições de contorno periódicas, isto é,

$$\begin{cases} u_t = -uu_x - u_{xx} - u_{xxx}, \\ u(x, t) = u(x + L, t) \end{cases}$$

sendo  $L$ , um parâmetro real, o período.

Em seguida notemos que a equação (5.3) tem a seguinte simetria translacional

$$y = x + x_0, \quad \tau = t, \quad w = u$$

e também a simetria de Galileu

$$y = x - vt, \quad \tau = t, \quad w = u - v,$$

com  $x_0$  e  $v$  números reais.

De fato, como

$$w(y, t) = u(y + vt, t) - v,$$

então,

$$\begin{aligned} w_t(y, t) &= vu_x(y + vt, t) + u_t(y + vt, t), \\ w_y(y, t) &= u_x(y + vt, t), \\ w_{yy}(y, t) &= u_{xx}(y + vt, t), \\ w_{yyy}(y, t) &= u_{xxx}(y + vt, t). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Substituindo (5.4) em (5.3), e empregando uma notação simplificada, segue que

$$w_t + ww_y + w_{yy} + w_{yyy} = vu_x + u_t + (u - v)u_x + u_{xx} + u_{xxx} = 0.$$

Podemos demonstrar um resultado análogo no caso da simetria translacional.

Seguindo [24], uma forma simples de se obter (5.2) é procurarmos uma solução em estado estacionário da forma  $u(x, t) = w(x)$ . Assim,  $u_t(x, t) = 0$  e

$$u_t + uu_x + u_{xx} + u_{xxxx} = ww' + w'' + w^{(4)} = \frac{1}{2}(w^2)' + w'' + w^{(4)} = 0.$$

Integrando na variável  $x$ , vem que

$$\frac{1}{2}w(x)^2 + w'(x) + w'''(x) = c^2,$$

sendo  $c$  uma constante real. Assim, a equação (5.1) é obtida através das substituições  $t \rightarrow x$  e  $x \rightarrow w$ .

## 5.2 Análise Linear do Sistema de Michelson

No primeiro estudo sobre o sistema (5.2), D. Michelson [16], provou que se  $c > 0$  é suficientemente grande, o sistema (5.2) possui uma única solução limitada, que é uma órbita heteroclínica transversal que liga as duas singularidades finitas. Quando  $c$  decresce aparece uma bifurcação, o que foi verificado em [16].

Para  $c > 0$ , suficientemente pequeno, experimentos numéricos e expansões assintóticas em série de senos [16] revelaram a existência de uma bifurcação zero-Hopf na origem para  $c = 0$ . Mas os resultados não proporcionaram uma prova analítica da existência de uma bifurcação zero-Hopf.

Por uma bifurcação zero-Hopf queremos dizer que, quando  $c = 0$ , o sistema (5.2) possui a origem como uma singularidade que tem autovalores  $0$ ,  $i$  e  $-i$  e quando  $c > 0$  é suficientemente pequeno, o sistema (5.2) possui uma órbita periódica que tende para a origem quando  $c$  tende a zero.

Podemos associar ao sistema de Michelson (5.2), o seguinte campo vetorial

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = (y, z, c^2 - y - x^2/2), \end{aligned} \tag{5.5}$$

considerando aqui  $c \geq 0$ . Assim, de (5.5), há os seguintes pontos de equilíbrio

$$p_1 = (-\sqrt{2c}, 0, 0), \quad p_3 = (\sqrt{2c}, 0, 0).$$

quando  $c > 0$  e  $p_2 = (0, 0, 0)$  para  $c = 0$ .

A parte linear do campo vetorial (5.5) é

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -x & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Para o ponto  $p_1 = (-\sqrt{2}c, 0, 0)$ , o polinômio característico de

$$A_1 = Df(p_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}c & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

é

$$P_1(\lambda) = \det(\lambda E - A_1) = \lambda^3 + \lambda - \sqrt{2}c.$$

Sabemos que o sinal do discriminante [25]

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27},$$

fornece informações sobre as raízes do polinômio cúbico de coeficientes reais

$$P(\lambda) = \lambda^3 + p\lambda + q, \quad (5.7)$$

ou seja:

- i) Se  $D > 0$ , então  $P$  possui uma raiz real e duas raízes complexas;
- ii) Se  $D = 0$ , então  $P$  possui três raízes reais, sendo pelo menos duas iguais;
- iii) Se  $D < 0$ , então  $P$  possui três raízes reais e distintas.

Mais ainda, sendo

$$\begin{aligned} \mu &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \\ \nu &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \end{aligned}$$

então as raízes  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  de (5.7) são dadas por

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \mu, \\ \lambda_2 &= -\frac{\mu}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\nu, \\ \lambda_3 &= -\frac{\mu}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\nu.\end{aligned}$$

No caso do polinômio  $P_1$ , o discriminante

$$D_1 = \frac{c^2}{2} + \frac{1}{27} > 0.$$

Logo,  $P_1$  possui uma raiz real  $\lambda_{1,1}$  e duas raízes complexas  $\lambda_{2,1} = \alpha_1 + i\beta_1$  e  $\lambda_{3,1} = \bar{\lambda}_{2,1} = \alpha_1 - i\beta_1$ , com  $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\beta_1 \neq 0$ . Podemos afirmar ainda que  $\lambda_{1,1} > 0$  e  $\lambda_{2,1}$  e  $\lambda_{3,1}$  possuem partes reais negativas, isto é,  $\alpha_1 < 0$ . Isto decorre de

$$\mu_1 = \sqrt[3]{\frac{c}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{c}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{1}{27}}} > 0,$$

pois,  $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é estritamente crescente,  $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , e, para  $c > 0$ ,

$$\begin{aligned}\frac{c}{\sqrt{2}} &> -\frac{c}{\sqrt{2}} \\ \frac{c}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{1}{27}} &> -\frac{c}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{1}{27}} \\ \sqrt[3]{\frac{c}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{1}{27}}} &> \sqrt[3]{-\frac{c}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{1}{27}}}.\end{aligned}$$

Portanto,  $p_1$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico instável, segundo Definições 2.5.1 e 2.5.2 e pelo Teorema 2.5.1.

A análise de  $p_2$  é bem mais simples, pois

$$A_2 = Df(p_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e as raízes de

$$P_2(\lambda) = \det(\lambda E - A_2) = \lambda^3 + \lambda$$

são  $\lambda_{1,2} = 0$ ,  $\lambda_{2,2} = i$  e  $\lambda_{3,2} = -i$ . Neste caso,  $p_2$  é um ponto de equilíbrio não hiperbólico.

Por último, para o ponto  $p_3$ ,

$$A_3 = Df(p_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{2}c & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$P_3(\lambda) = \det(\lambda E - A_3) = \lambda^3 + \lambda + \sqrt{2}c.$$

Como

$$D_3 = \frac{c^2}{2} + \frac{1}{27} > 0,$$

os autovalores são  $\lambda_{1,3}$  real,  $\lambda_{2,3} = \alpha_3 + i\beta_3$  e  $\lambda_{3,3} = \alpha_3 - i\beta_3$  complexos, com  $\alpha_3, \beta_3 \in \mathbb{R}$ ,  $\beta_3 \neq 0$ . Observe que

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \sqrt[3]{-\frac{c}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{1}{27}}} \\ &= -\mu_1 < 0. \end{aligned}$$

Assim,  $\lambda_{1,3} < 0$  e  $\alpha_3 > 0$  e, portanto,  $p_3$  também é um ponto de equilíbrio hiperbólico instável.

Observe ainda que  $p_1 \rightarrow p_2$  e  $p_3 \rightarrow p_2$  quando  $c \rightarrow 0$  por valores positivos.

### 5.3 Ciclos Limites no Sistema de Michelson

De acordo com [15], o sistema de Michelson (5.2), com  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  e o parâmetro  $c \geq 0$ , suficientemente pequeno, possui uma bifurcação zero-Hopf na origem quando  $c = 0$ . Além disto, a órbita periódica bifurcada satisfaz

$$\begin{cases} x(t) = -2c \cos t + O(c), \\ y(t) = 2c \sin t + O(c), \\ z(t) = 2c \cos t + O(c). \end{cases}$$

Para  $\varepsilon \neq 0$ , faremos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = \varepsilon y_1, \\ y = \varepsilon y_2, \\ z = \varepsilon y_3, \\ c = \varepsilon d. \end{cases} \quad (5.8)$$

Assim, o sistema de Michelson é reescrito como

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = y_3, \\ y'_3 = -y_2 + \varepsilon(d^2 - y_1^2/2), \end{cases} \quad (5.9)$$

ou na forma matricial

$$Y' = BY + \varepsilon H(Y),$$

com  $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$H : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$Y \longmapsto H(Y) = (0, 0, d^2 - y_1^2/2).$$

Iremos agora transformar a matriz  $B$  na matriz  $A$  dada em (4.10). Observe que em relação à matriz  $B$  os autovalores são  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = i$  e  $\lambda_3 = -i$  e os autovetores associados são, respectivamente,  $v_1 = (1, 0, 0)$ ,  $v_2 = (1, i, -1)$  e  $v_3 = (1, -i, -1)$ . Definindo  $P = (\text{Im}(v_2), \text{Re}(v_2), v_1)$ , segue que

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e  $\det P = -1 \neq 0$ . Logo, existe  $P^{-1}$  dada por

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere a mudança de variáveis  $X = P^{-1}Y$ , com  $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Assim, segue que

$$\begin{aligned} X' &= P^{-1}Y' \\ &= P^{-1}BY + \varepsilon P^{-1}H(Y) \\ &= (P^{-1}BP)X + \varepsilon P^{-1}H(PX). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Mostraremos agora que (5.10) é equivalente a  $X' = AX + \varepsilon G(X)$ , com  $A$  tal como em (4.10) e o campo vetorial  $G$  dado por  $G(X) = P^{-1}H(PX)$ ,  $X \in \mathbb{R}^3$ . Resulta que

$$\begin{aligned} P^{-1}BP &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

e calculando  $PX$ , temos

$$PX = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$H(PX) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d^2 - (x_2 + x_3)^2/2 \end{pmatrix}$$

e, portanto, temos

$$P^{-1}H(PX) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d^2 - (x_2 + x_3)^2/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -d^2 + (x_2 + x_3)^2/2 \\ d^2 - (x_2 + x_3)^2/2 \end{pmatrix}.$$

Segue que o sistema (5.10) é

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ -d^2 + (x_2 + x_3)^2/2 \\ d^2 - (x_2 + x_3)^2/2 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

De (5.11), o campo vetorial  $G$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  é dado por

$$G(X) = \begin{pmatrix} g_1(X) \\ g_2(X) \\ g_3(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -d^2 + (x_2 + x_3)^2/2 \\ d^2 - (x_2 + x_3)^2/2 \end{pmatrix}, \quad X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Portanto, por (4.13), a função  $\mathcal{F}$  é

$$\mathcal{F}(\xi) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(\xi) \\ \mathcal{F}_2(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} (-d^2 + (\xi_1 \sin s + \xi_2)^2/2) \sin s \, ds \\ \int_0^{2\pi} (d^2 - (\xi_1 \sin s + \xi_2)^2/2) \, ds \end{pmatrix}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2).$$

Calculando estas integrais

$$\mathcal{F}(\xi) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(\xi) \\ \mathcal{F}_2(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \xi_1 \xi_2 \\ \pi 2d^2 - \pi \xi_1^2/2 - \pi \xi_2^2 \end{pmatrix}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \Sigma_c.$$

Os zeros simples da aplicação  $\mathcal{F}$ , se existirem, são soluções de

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(\xi) = \pi \xi_1 \xi_2 = 0, \\ \mathcal{F}_2(\xi) = \pi 2d^2 - \pi \xi_1^2/2 - \pi \xi_2^2 = 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

Como  $\xi_1 > 0$ , da equação  $\mathcal{F}_1(\xi) = 0$ , segue que  $\xi_2 = 0$  e, substituindo em  $\mathcal{F}_2(\xi) = 0$ ,  $\xi_1 = 2d > 0$ . Portanto, há um único zero  $\xi_0 = (2d, 0)$  de (5.12).

A matriz  $\mathcal{F}_\xi(\xi)$  é

$$\mathcal{F}_\xi(\xi) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{1\xi_1}(\xi) & \mathcal{F}_{1\xi_2}(\xi) \\ \mathcal{F}_{2\xi_1}(\xi) & \mathcal{F}_{2\xi_2}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \xi_2 & \pi \xi_1 \\ -\pi \xi_1 & -2\pi \xi_2 \end{pmatrix}.$$

e calculando em  $\xi = \xi_0$ , vem que

$$\mathcal{F}_\xi(\xi_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi d \\ -2\pi d & 0 \end{pmatrix},$$

cujo determinante é  $\det(\mathcal{F}_\xi(\xi_0)) = 4\pi^2 d^2 \neq 0$ , pois  $d > 0$ .

Logo,  $\xi_0 = (2d, 0)$  é zero simples da função  $\mathcal{F}$  e, portanto, é ponto de continuação de uma órbita periódica  $X$  que persiste para o sistema (5.11), após a perturbação para  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno. Tal órbita periódica  $X$  tem a seguinte representação

$$\begin{aligned} X(t, \beta(\varepsilon), \varepsilon) &= X(t, \xi_0, 0) + O_X(t, \varepsilon) \\ &= (2d \cos t, 2d \sin t, 0) + O_X(t, \varepsilon), \end{aligned} \tag{5.13}$$

obtida substituindo  $\xi = \beta(\varepsilon) = \xi_0 + O_\beta(\varepsilon)$  em (4.6), para  $n = 3$ .

Mas para obter o mesmo resultado do sistema de Michelson original (5.2) usaremos o fato de que  $Y = PX$  e a mudança (5.8). Logo, multiplicando a expressão (5.13) à esquerda pela matriz  $P$  e usando a notação

$$Y = Y(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} y_1(t, \varepsilon) \\ y_2(t, \varepsilon) \\ y_3(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

temos

$$\begin{aligned} Y(t, \varepsilon) &= PX(t, \xi_0, 0) + PO_X(t, \varepsilon) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2d \cos t \\ 2d \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + PO_X(t, \varepsilon) \\ &= \begin{pmatrix} 2d \sin t \\ 2d \cos t \\ -2d \sin t \end{pmatrix} + O_Y(t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Resulta de (5.8) que

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x(t, c) \\ y(t, c) \\ z(t, c) \end{pmatrix} &= \varepsilon \begin{pmatrix} y_1(t, \varepsilon) \\ y_2(t, \varepsilon) \\ y_3(t, \varepsilon) \end{pmatrix} \\
 &= \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{c}{\varepsilon} \operatorname{sen} t \\ \frac{c}{\varepsilon} \cos t \\ -\frac{c}{\varepsilon} \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + \varepsilon O_Y(t, \varepsilon) \\
 &= \begin{pmatrix} 2c \operatorname{sen} t \\ 2c \cos t \\ -2c \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_x(t, c) \\ O_y(t, c) \\ O_z(t, c) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

e, portanto, o resultado segue, tendo em conta que o sistema de Michelson (5.2) é invariante pela mudança

$$(x, y, z, t) \rightarrow (-x, y, -z, -t)$$

e fazendo a substituição  $t - \pi/2 \rightarrow t$ .

# Conclusões

As equações diferenciais ordinárias, dependendo de parâmetros, possuem inúmeras aplicações e a procura de soluções periódicas é útil em diversos ramos da ciência. No presente trabalho mostramos um método para encontrar tais soluções.

Motivados por [5], Capítulo 5, estudamos uma teoria de continuação de órbitas periódicas em  $\mathbb{R}^2$ . Nesta teoria, o sistema consiste de uma perturbação de um centro linear por campos vetoriais de classe  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$  ou  $r = \infty$ , e mostramos que as órbitas periódicas que persistem estão associadas com os zeros de uma função integral. Além disto, mostramos ainda que parte desta teoria, aquela associada com os zeros de certas funções integrais, é também válida em  $\mathbb{R}^n$ , para uma escolha adequada do sistema linear.

Como aplicações da teoria de continuação em  $\mathbb{R}^2$  apresentada aqui, estudamos a equação de van der Pol, o sistema de Liénard e um sistema com um número contável de ciclos limites. Já em  $\mathbb{R}^3$ , usamos a teoria de continuação para verificarmos a existência de soluções periódicas no sistema de Michelson.

Quanto a trabalhos futuros, uma questão interessante é demonstrar um teorema sobre a estabilidade das soluções periódicas que persistem, obter aplicações em  $\mathbb{R}^n$  e comparar esta teoria de continuação com outros métodos utilizados para obter soluções periódicas. Por exemplo, comparando com [15], vimos neste trabalho que a teoria de continuação se mostrou de aplicação mais simples do que o *Método do Averaging* no estudo do sistema de Michelson.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. A. Andronov, *Les Cycles Limites de Poincaré et la Théorie des Oscillations Auto-entretenues*, C. R. Acad. Sci. Paris, 189 (1929), 559–561.
- [2] A. A. Andronov, C. E. Chaikin, *Theory of Oscillations*, Princeton Press, 2<sup>nd</sup> Edition, 1949.
- [3] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, A. G. Maier, *Qualitative Theory of Second-order Dynamic Systems*, Israel Program for Scientific Translations, Halstead Press, Texts in Applied Mathematics, 2<sup>nd</sup> Edition, 1973.
- [4] J. G. Cançado, *A Equação de Liénard*, Dissertação do Programa de Mestrado em Matemática, UNIFEI, 2012.
- [5] C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer, 2<sup>nd</sup> Edition, 2006.
- [6] A. Gray, G. B. Mathews, *A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics*, Macmillan and Co, 1895.
- [7] M. W. Hirsch, S. Smale, R. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Elsevier, 2<sup>nd</sup> Edition, 2004.
- [8] K. Hoffman, R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, New Jersey, 1997.
- [9] B. G. Koronev, *Bessel Functions and their Applications*, Taylor & Francis, 1<sup>st</sup> Edition, 2002.

- [10] Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer, New York, 2<sup>nd</sup> Edition, 1998.
- [11] A. Liénard, *Etude des Oscillations Entretienues*, Rev. Générale de l'Électricité, 23 (1928), 335–357.
- [12] E. L. Lima, *Análise no Espaço  $\mathbb{R}^n$* , Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2007.
- [13] J. Llibre, *Periodic Solutions Via Averaging Theory*. Disponível em: <http://www.dance-net.org/files/events/rtns2014/materiales/Llibre.pdf>. Acessado em 03/08/2015.
- [14] J. Llibre, E. Ponce, *Piecewise Linear Feedback Systems with Arbitrary Number of Limit Cycles*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 13 (2003), 895-904.
- [15] J. Llibre, X. Zhang, *On the Hopf-zero Bifurcation of the Michelson System*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 4 (2011), 1650-1653.
- [16] D. Michelson, *Steady Solutions of the Kuramoto-Sivashinsky Equation*, Physica D: Nonlinear Phenomena, 19 (1986), 89-111.
- [17] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, New York, 2000.
- [18] H. Poincaré, *Mémoire sur les Courbes Définies par une Équation Differentielle*, J. Math. Pures Appl., 7 (1881), 375–422.
- [19] B. van der Pol, *Sur les Oscillations de Relaxation*, Rev. Générale de l'Électricité, 22 (1927), 489–490.
- [20] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1989.
- [21] Software **Mathematica 10**. Disponível em: <https://www.wolfram.com/mathematica/>.
- [22] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, 1979.
- [23] J. Sotomayor, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Livraria da Física: Coleção Textos Universitários do IME-USP, São Paulo, 2011.

- [24] K. N. Webster, *Bifurcations in Reversible Systems with Application to the Michelson System*, Thesis of the Department of Mathematics, Imperial College London, 227p, 2005.
- [25] WolframMathWorld. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/CubicFormula.html>. Acessado em 26/03/2016.